

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
CURSO DE BACHARELADO EM ESTATÍSTICA

AUGUSTO FELIX MARCOLIN

**Otimização de Portfólios: Uma
aplicação ao Mercado Acionário
Brasileiro**

Trabalho de Conclusão apresentado como
requisito parcial para a obtenção do grau de
Bacharel em Estatística

Prof. Dr. Marcio Valk
Orientador

Prof. Dr. Hudson Torrent
Co-orientador

Porto Alegre, dezembro de 2015

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Marcolin, Augusto Felix

Otimização de Portfólios: Uma aplicação ao Mercado Acionário Brasileiro / Augusto Felix Marcolin. – Porto Alegre: Curso de Bacharelado em Estatística da UFRGS, 2015.

33 f.: il.

Orientador: Marcio Valk

Co-orientadora: Hudson Torrent.

Trabalho de Conclusão de curso (Graduação)– Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Curso de Bacharelado em Estatística, Porto Alegre, BR-RS, 2015.

1. Séries Temporais. 2. Agrupamento de Séries Temporais. 3. Portfólio. 4. Markowitz. I. Valk, Marcio, orient. II. Torrent, Hudson, coorient. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Reitor: Prof. Carlos Alexandre Netto

Vice-Reitor: Prof. Rui Vicente Oppermann

Pró-Reitor de Graduação: Prof. Sérgio Roberto Kieling Franco

Diretor do Instituto de Matemática: Prof^a. Suzi Alves Camey

Coordenador do Curso: Prof^a. Lisiane Priscila Roldão Selau

Bibliotecária-Chefe do Instituto de Matemática e Estatística: Juliano Leal Camargo

"Desconfie sempre da sabedoria convencional. O senso comum precisa ser confrontado com perguntas, muitas perguntas. Algumas não levarão a nada. Outras vão produzir respostas absolutamente surpreendentes."
Steven Levitt

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Milton Marcolin e Adriani Felix, por todo o amor e apoio incondicional e, acima de tudo, pelo ensinamento de que a educação é a maior herança.

Ao meu irmão, Arthur Marcolin, pelo companherismo.

À minha namorada, Lauren Duro, pelo apoio as minhas escolhas, mesmo quando estas dificultam nosso relacionamento.

Ao meu orientador, Marcio Valk, pela compreensão, confiança, incentivo e ainda, pelos conhecimentos passados (que não só acadêmicos).

Também ao Hudson Torrent, meu co-orientador, pelo apoio e confiança depositados nesse trabalho.

Ao corpo docente da estatística, pelos ensinamentos passados.

À minha família e amigos.

Sumário

Lista de Figuras	6
Lista de Tabelas	7
Resumo	8
Introdução	9
1 Otimização de Carteira	11
1.1 Retornos	11
1.2 Excesso de Retornos	12
1.3 <i>Mean Variance</i>	12
1.4 Via Método de Agrupamento	14
1.4.1 Descrição da Técnica	14
1.5 <i>Naive</i> Portfólio	18
2 Teste para Homogeneidade de Grupos de Séries Temporais	19
2.1 Estatística do Teste	20
3 Certificado de Depósito Interbancário (CDI)	21
4 Medidas de Performance	23
4.1 Índice de Sharpe	23
4.2 Índice de Treynor	24
5 Aplicação Empírica	26
5.1 Tratamento dos Dados	26
5.2 Otimização	26
5.3 Resultados	27
5.3.1 <i>Performance</i> Quanto ao Índice de Sharpe	28
5.3.2 <i>Performance</i> Quanto ao Índice de Treynor	28
Conclusão	30
Referências	31
Anexos	32

Lista de Figuras

1.1	Fronteira Eficiente.	14
1.2	Dendrograma.	15
1.3	Dendrograma 2 Grupos	16
1.4	Dendrograma 3 Grupos	16
5.1	Dendrograma.	27
5.2	IC 95% Sharpe Ratio.	28
5.3	IC 95% Treynor Ratio.	29
4	Excesso de Retorno 1/N	32
5	Excesso de Retorno Agrupamento	32
6	Excesso de Retorno Mean Variance	33

Lista de Tabelas

1.1	Teste de Grupos	16
5.1	Estatísticas Descritivas.	27
5.2	Sharpe Ratio.	28
5.3	Índice de Treynor.	29

Resumo

Este trabalho busca explorar um pouco da teoria moderna do portfólio comparando-a com uma estratégia ingênua de investimento, quanto a diversificação. Nesse contexto, consideramos o método clássico de otimização, conhecido como “mean variance” em que busca-se minimizar o risco e maximizar os retornos atrelados a uma certa estratégia de investimento e, a estratégia ingênua em que distribui-se proporcionalmente o capital de investimento através de todos os ativos disponíveis. Otimização tem sido desenvolvida ao longo dos últimos anos e é um tópico recorrente na literatura específica. Visando diminuir os erros de estimação, propomos uma nova metodologia para a otimização de portfólio, baseada em agrupamentos de séries temporais. Com intuito de avaliar o desempenho dos diferentes métodos, realizamos uma aplicação ao mercado acionário brasileiro.

Palavras-chave: Séries Temporais, Agrupamento de Séries Temporais, Portfólio, Markowitz.

Introdução

Muito se tem discutido, recentemente, acerca das vantagens e desvantagens dos investimentos de risco no Brasil, devido à grande flutuação no preço dos ativos, instabilidade econômica do país, entre outros fatores. Neste âmbito, empresários e investidores demandam tempo e trabalho determinando quais serão suas estratégias de operação no mercado de capitais, afim de encontrar uma solução ótima para o problema que envolve basicamente dois fatores: risco e retorno.

Tendo em vista que o processo de seleção de carteiras de investimentos em ativos de risco é um dos principais problemas da economia financeira, tanto atuantes do mercado, quanto profissionais da esfera acadêmica vem concentrando esforços na utilização de métodos quantitativos nos processos de alocação e gestão de carteira de investimentos.

Desde 1952, quando Harry Markowitz publicou seu artigo “*Portfolio Selection*” no *The journal of finance*, uma nova área de estudo está em desenvolvimento, intitulada Teoria Moderna do Portfólio (ou, simplesmente, Teoria do Portfólio), cujo objeto de estudo é a construção de carteiras (portfólios) de investimentos que otimizem a relação risco e retorno.

O conceito fundamental por trás da Teoria Moderna do Portfólio é a de que ativos não devem ser escolhidos individualmente, sendo importante considerar o comportamento do preço de um ativo quando se tem uma mudança por parte de outros ativos na carteira. Em linhas gerais, a proposta é a de uma diversificação na montagem da carteira, através de processos de otimização. Sendo esta uma ferramenta poderosa na redução do risco, pois os retornos oferecidos por diferentes ativos não se comportam similarmente.

Há muitos debates na literatura a respeito da verdadeira contribuição dada pelos processos de otimização de carteiras de investimento, segundo estudo de DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009), estratégias de otimização baseadas na “*mean variance*” proposta por Markowitz (1952), obtiveram resultados inferiores há um investimento ingênuo, no qual adota pesos iguais para todos os ativos. DeMiguel et al. (2009), argumenta : “ A melhor performance da estratégia 1/N indica que os erros de estimação das médias e da matriz de covariâncias corroem todos os ganhos da otimização frente à diversificação 1/N”.

DeMiguel et al. (2009) também expõe através de um estudo de simulação que para uma carteira com 25 ativos é preciso mais de 3.000 meses de janela de estimação para uma melhor performance das estratégias de otimização sobre a estratégia 1/N, já para uma carteira com 50 ativos, é preciso mais de 6.000 meses de janela de estimação. É importante salientar que é tipicamente usado 60-120 meses para a estimação dos parâmetros.

Por outro lado, Kritzman, Page e Turkington (2010) defendem a otimização, replicando que a falsa superioridade da estratégia 1/N não se deve as limitações da otimização, mas por conta da confiança em pequenas janelas de estimação para o método “rolling sample”¹

¹ Conceito explicado detalhadamente na seção 5.2.

de estimação dos retornos esperados.

Nesse contexto de comparação entre métodos, a ideia geral deste trabalho é aplicar no mercado acionário brasileiro IBOVESPA a estratégia de “mean variance” proposta por Markowitz(1952) e o método ingênuo $1/N$, bem como apresentar uma nova metodologia para a diversificação da carteira de investimentos, visando corrigir problemas na estimação dos parâmetros e por fim comparar os resultados em termos de medidas de desempenho.

1 Otimização de Carteira

A otimização de carteira, estudada na teoria do portfólio, consiste em diversificar os investimentos com intuito de maximizar os retornos correndo riscos menores. Do ponto de vista teórico, existem diversas formas de analisar e montar um portfólio, são exemplos: *Mean Variance*, *Bayesian diffuse-prior*, *Bayes-Stein*, *Minimum Variance*, entre outros. A principal crítica a esses métodos é quanto a sua efetividade perante à formas mais básicas de estratégia. Abaixo serão apresentados algumas das técnicas mais comuns de análise para montagem de carteira, bem como alguns conceitos básicos.

1.1 Retornos

No processo de análise do desempenho dos investimentos, não podemos comparar os ativos através do preço, pois o aumento x no preço, pode ter um impacto muito maior em uma ação do que em outra, portanto devemos escolher uma maneira de mensurar as altas e baixas nos preços das ações, ou seja, estamos interessados em definir uma medida de volatilidade para os preços, pois assim podemos comparar os diferentes ativos. Nesse contexto, surge a definição dos retornos de um investimento.

A abordagem mais intuitiva para o cálculo dos retornos no mercado capitais é a taxa percentual referente à diferença entre o preço atual e o do mês (dia, ano) anterior.

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (1.1)$$

Sendo T o número de dias, meses ou anos, P_t os preços observados em momentos discretos (dias, meses, anos) e r_t os devidos retornos.

Apesar dessa abordagem óbvia, segundo Morettin e Tolo (2006), é comum a utilização de uma outra definição de retorno, intitulada como ‘log retorno’¹, sendo esta representada por:

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right), \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (1.2)$$

Esta medida tem algumas vantagens sobre a taxa percentual de retorno, devido à algumas propriedades estatísticas que podem ser assumidas. Além disso, há uma relação entre os dois tipos de retornos, é sabido que $\ln(1 + R_t) \approx r_t$, a relação pode ser expressa por:

¹No escopo deste trabalho, utilizaremos essa medida como base, e será simplesmente chamada de retorno.

$$R_t = \ln(1 + R_t) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) \approx r_t. \quad (1.3)$$

Uma vantagem do log retorno é caracterizada pela aditividade. Por exemplo, imagine que você perca 0.01 em um mês e no próximo consiga uma mesma alta de 0.01. No final, o preço será o mesmo que o anterior à perda, coisa que não acontece na taxa percentual de retorno.

Os retornos são séries temporais com algumas peculiaridades e características próprias. Porém, podemos também descrever outros fatores que são encontrados na maioria das séries de retornos, segundo Morettin e Tolo (2006):

- estacionariedade;
- fraca dependência linear e não linear;
- distribuição de caudas pesadas e excesso de curtose;
- comportamento heterocedástico condicional.

O comportamento heterocedástico reúne características como aglomerados de volatilidade e efeitos alavanca, que aponta para o efeito de choque. Choques negativos normalmente afetam a volatilidade condicional em maior magnitude do que choques positivos, ou seja, uma queda no retorno implica uma volatilidade condicional alta.

1.2 Excesso de Retornos

Em função da instabilidade do mercado acionário brasileiro, há um interesse, por parte desse estudo, em trabalhar com a diferença entre o investimento de alto risco e o de baixo, pois assim podemos comparar os retornos destes investimentos. O excesso de retorno pode ser definido como: $(R_t - R_f)$, onde R_f refere-se ao retorno de um investimento de baixo risco. Esta medida tem o intuito de avaliar o impacto entre os dois tipos de investimento (alto e baixo risco).

Neste trabalho optou-se por adotar como retorno de investimento de baixo risco, a taxa CDI, devido à muitos investimentos estarem atreladas a este índice, como será justificado no Capítulo 3.

1.3 Mean Variance

Desenvolvido por Harry Markowitz em 1952, o modelo de *mean variance* foi o trabalho pioneiro no campo da Teoria Moderna do Portfólio e recebeu esse nome pois utiliza-se o retorno esperado médio como medida de desempenho da carteira e a variância como medida de risco.

O problema é formulado de modo a se maximizar o nível de retorno esperado do portfólio associado a um dado nível de risco ou minimizar o risco do portfólio para um dado nível de retorno requerido pelo investidor.

A formulação matemática do modelo de *mean variance* é simples, começando pelo retorno esperado de cada carteira sendo dado por:

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^N w_i R_i \quad (1.4)$$

onde,

- w_i é o peso de cada ativo;
- R_i sendo retorno esperado de cada ativo.

Sujeito à condição,

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad , \quad w_i \geq 0. \quad (1.5)$$

Através da equação (1.4), podemos notar que o retorno esperado de uma carteira nada mais é do que uma média ponderada dos retornos individuais.

Já a variância da carteira é expressa por:

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \Sigma_{ij}. \quad (1.6)$$

Na forma matricial podemos escrever

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= (w_1, \dots, w_k) \begin{bmatrix} Var(R_1) & \dots & Cov(R_1, R_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(R_k, R_1) & \dots & Var(R_k) \end{bmatrix} (w_1, \dots, w_k)' \\ &= \mathbf{w} \Sigma \mathbf{w}', \end{aligned}$$

onde

- $w_{i,j}$ é o peso de cada ativo;
- Σ_{ij} é o elemento ij -ésimo da matriz de variâncias e covariâncias dos ativos.

Tendo as definições iniciais do modelo de Markowitz, ainda resta a construção do modelo de otimização, onde minimiza-se uma função objetivo (variância) sujeita a algumas restrições. Dessa forma o problema é dado por:

$$\underset{w}{\text{Minimizar}} \quad \mathbf{w} \Sigma \mathbf{w}'; \quad (1.7)$$

sujeito à,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N w_i R_i &= \rho; \\ \sum_{i=1}^N w_i &= 1; \\ w_i &\geq 0, \end{aligned}$$

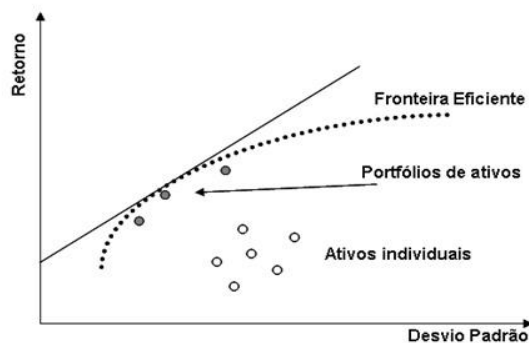
onde, ρ é o valor esperado dos retornos do portfólio (valor requerido pelo investidor).

A função objetivo modela o risco do portfólio, o qual o investidor deseja minimizar. A primeira restrição representa o valor esperado do retorno do portfólio. A segunda restrição

garante que todo o capital disponível seja investido e a última restrição assegura a não existência de investimento negativo.

Resolvendo-se o problema diversas vezes, com ρ (nível de retorno desejado pelo investidor) assumindo um valor diferente em cada problema, obtém-se, associado a cada um dos níveis de retorno, a composição do portfólio de menor risco. Pode-se então traçar uma curva com a relação risco versus retorno, denominada **fronteira eficiente**, como podemos ver na Figura 1.1 abaixo:

Figura 1.1: Fronteira Eficiente.



Fonte: <http://ogereente.com.br>.

A partir da fronteira eficiente o investidor pode decidir qual risco tomar dado um retorno desejável, escolhendo assim a carteira pretendida. Outro fato interessante a destacar é o desempenho superior de uma carteira se comparado com a individualização dos ativos, fato devido a diversificação nos investimentos. Segundo Markowitz, quando dois ativos pouco relacionados compõem um portfólio obtém-se um risco menor do que a média ponderada dos riscos individuais, sendo em alguns casos um risco menor que o do ativo de menor risco com um retorno maior que o deste ativo.

1.4 Via Método de Agrupamento

O método de agrupamento para otimização de portfólios tem por objetivo mesclar o processo de *mean variance* proposto por Markowitz (1962) com a abordagem de agrupamento de séries temporais proposta por Valk e Pinheiro (2012), que será definida detalhadamente no Capítulo 2.

O objetivo principal do método que será proposto é apresentar uma alternativa para o processo de estimação da matriz de covariância (Σ) do método proposto por Markowitz. A matriz Σ apresenta tamanho $n \times n$ em que n é o número de ativos. Usando alguma técnica de agrupamento, espera-se que esta matriz, que agora será $G \times G$ em que G é o número de grupos, seja estimada com maior precisão.

1.4.1 Descrição da Técnica

Inicialmente, considerando que o processo de classificação proposto por Valk e Pinheiro (2012) é realizado supondo que existam pelo menos dois grupos já conhecidos à priori para que posteriormente possamos testar se estes grupos se diferenciam. De alguma forma, devemos obter grupos de ativos para aplicar a técnica.

Para solucionar este problema utilizamos primeiramente o processo de agrupamento

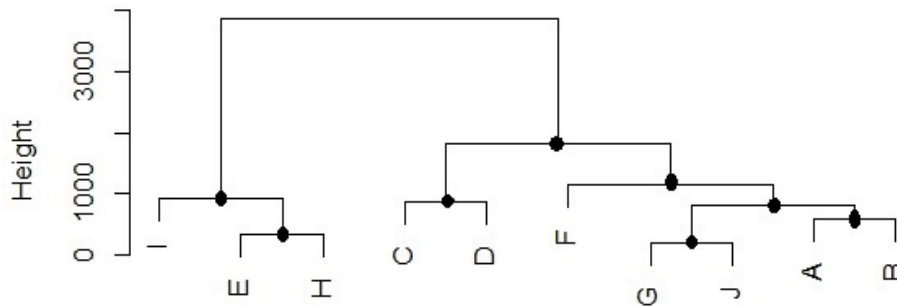
hierárquico aglomerativo. Nesse tipo de método começamos com objetos individuais, onde inicialmente temos a mesma quantidade de grupos e de objetos. Primeiramente os objetos mais similares são agrupados e esses grupos iniciais vão crescendo de forma gradual, adicionando mais objetos a partir da similiaridade destes com o grupo, Johnson e Whichern (1992, p.680).

Deste modo, a partir destes grupos criados podemos testá-los a fim de encontrar grupos que realmente se diferem entre si. Nesse contexto, devemos escolher uma métrica para medir a dissimilaridade entre os ativos. Em estudos anteriores, a métrica que apresentou melhor desempenho é a dissimilaridade baseada na distância periodogramas integralizados, para mais detalhes consultar Valk e Marcolin (2014).

Quanto ao método de separação hierárquica, a sugestão é a escolha do método de agrupamento proposto por Ward (1963), pois este tem como ideia geral minimizar a variância dentro dos grupos no processo de criação da hierarquia, ou seja, a cada repetição do algoritmo, encontra-se o par de ativos que leva ao aumento mínimo no total da variância dentro do cluster após a junção.

Como resultado teremos uma estrutura em forma de “árvore”, representando a hierarquia de cada ativo. Vamos tomar como exemplo uma bolsa que contenha apenas 10 ativos, listados da letra “A” até “J”. Suponhamos que baseado em seus retornos o algoritmo de agrupamento indique estrutura como da Figura 1.2:

Figura 1.2: Dendrograma.



Fonte: Elaborada pelo autor.

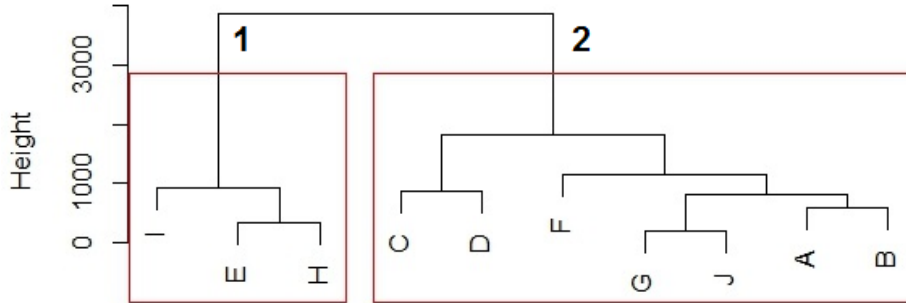
Podemos notar que há vários níveis de hierarquia entre os ativos, e é justamente nesses diferentes “ramos” que estamos interessados em trabalhar.

O método de classificação proposto por Valk e Pinheiro (2012) consiste na suposição de homogeneidade dos grupos, ou seja, sob H_0 o processo gerador das séries temporais é o mesmo para todos os grupos.

Para o agrupamento, testa-se todos os possíveis grupos que possam ser formados com n séries temporais e então escolhe-se como o melhor agrupamento o grupo cujo teste resultou em um menor p-valor. Em outras palavras, testa-se todos os níveis da “árvore” hierárquica até que se chegue a grupos diferentes.

A seguir apresentamos uma ilustração do processo de construção dos grupos, para facilitar a compreensão. Em um primeiro momento, testamos apenas dois grandes grupos, como mostra a Figura 1.3:

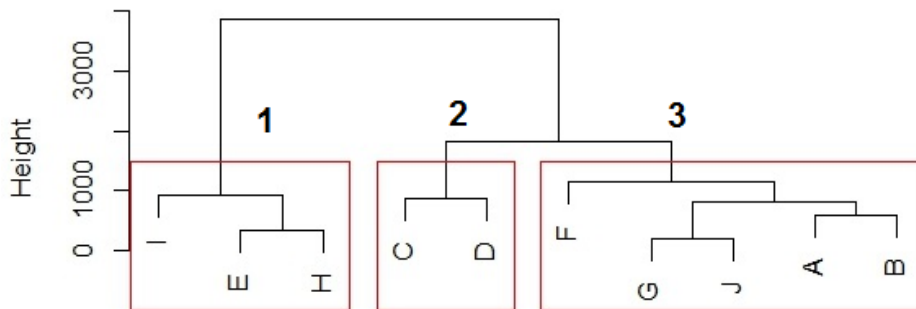
Figura 1.3: Dendrograma 2 Grupos



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para esses dois grupos o p-valor foi de 0.001, ou seja, à um nível de 5% de significância, rejeitamos a hipótese de que esses grupos sejam iguais. Agora vamos restringir os grupos de forma a conseguir o maior número de grupos, como na Figura 1.4.

Figura 1.4: Dendrograma 3 Grupos



Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerando essa partição dos grupos, teremos 3 comparações, Grupo 1 vs. Grupo 2, Grupo 2 vs. Grupo 3, Grupo 1 vs. Grupo 3. A Tabela 1.1 a seguir mostra os respectivos p-valores:

Tabela 1.1: Teste de Grupos

Grupos	p-valor
1x2	0.027
2x3	0.036
1x3	0.001

Novamente, temos que todos os grupos diferem entre si significativamente, adotando um nível de significância de 5%. O processo se repete até conseguir o número máximo de grupos que se diferem entre si, significativamente.

Especificado a etapa de agrupamento, parte-se para a otimização do portfólio, momento no qual entra em cena a técnica proposta por Markowitz.

Assuma que existam H diferentes grupos e I o número de ativos dentro do grupo. Em cada um dos grupos será feito um processo de *mean variance* para encontrar os pesos w_{ih} de cada ativo, onde $h = 1, \dots, H$ e $i = 1, \dots, I$, ou seja, o peso do ativo dentro do grupo.

Então, dentro de cada grupo será feito o seguinte processo:

$$\underset{\mathbf{w}_h}{\text{Minimizar}} \mathbf{w}_h \Sigma \mathbf{w}_h'; \quad (1.8)$$

sujeito à,

$$\sum_{i=1}^{N_h} w_{ih} R_{ih} = \rho;$$

$$\sum_{i=1}^{N_h} w_{ih} = 1;$$

$$w_{ih} \geq 0,$$

onde, N_h representa o número de ativos em cada grupo, R_{ih} o retorno do ativo i do grupo h e Σ a matriz de covariância dos ativos dentro do grupo.

A intenção é utilizar os pesos w_{ih} para calcular uma média ponderada dentro de cada grupo, com isso, através das médias ponderadas, dar pesos para os grupos.

Portanto, é estimada uma média $\hat{\mu}_h$ dos retornos para cada grupo, sendo ela definida como:

$$\hat{\mu}_h = \sum_{i=1}^{N_h} w_{ih} R_{ih}. \quad (1.9)$$

Sendo assim, a partir de agora estamos interessados em adicionar pesos aos grupos, onde denotaremos por \mathbf{w}_h , para cumprir este propósito, utilizaremos novamente o método *mean variance*, porém, ao invés de utilizar os retornos dos ativos, será utilizado a média ponderada de cada grupo. Então, a estimação dos pesos dos grupos pode ser expressa por:

$$\underset{\mathbf{w}^*}{\text{Minimizar}} \mathbf{w}^* \Sigma_{\mu} \mathbf{w}^*; \quad (1.10)$$

sujeito à,

$$\sum_{h=1}^H w_h^* = 1;$$

$$w_h^* \geq 0,$$

onde, Σ_{μ} representa a matriz de covariância das médias dos grupos, H o número de grupos e $\mathbf{w}_h^* = \{w_1, \dots, w_H\}$ são os pesos de cada grupo.

Agora passamos a ter dois níveis de pesos, w_{ih} indicando a influência da ação dentro do grupo e w_h^* apontando a magnitude de cada grupo.

Portanto o peso final de cada ativo será definido pelo vetor \mathbf{w} , onde o tamanho de \mathbf{w} é o número total de ativos N :

$$\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_N], \quad (1.11)$$

em que cada elemento j , $j = 1, \dots, N$, do vetor \mathbf{w} pode ser calculado multiplicando o peso do grupo w_h pelo peso dentro do grupo w_i . Com isso finalizamos o método proposto neste trabalho.

1.5 *Naive* Portfólio

A estratégia *Naive*, como o próprio nome sugere, é considerada uma forma ingênua da investimento, também conhecida como estratégia 1/N.

Neste tipo de diversificação não há nenhuma otimização ou estimação e ainda ignora completamente os dados, nela é considerada que todos os ativos da carteira tem o mesmo peso. Neste âmbito, o peso de cada ativo na carteira é definido por

$$w_t = \frac{1}{N}, \quad (1.12)$$

onde, w_t é o peso do ativo t e N é o número de ativos na carteira.

Mesmo parecendo pouco eficaz esse tipo de estratégia para diversificação de portfólio, alguns autores da área defendem que esta estratégia é tão eficaz quanta as tradicionais, como argumenta DeMiguel et al.(2009) em seu artigo *“Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy”*.

Por ser uma forma mais simples de diversificação da carteira e com efetividade parecida com os demais métodos de análise, a estratégia 1/N será considerada um *benchmark*, ou seja, um padrão ouro que nós queremos igualar resultados ou até mesmo obter melhor desempenho.

2 Teste para Homogeneidade de Grupos de Séries Temporais

No contexto estatístico, quando deseja-se testar se duas amostras aleatórias provém de uma mesma distribuição, as ferramentas geralmente utilizadas são testes não paramétricos (tais como: Kolmogorov-Smirnov e χ^2 de aderência). No entanto estes testes não são aplicáveis quando as amostras provém de uma distribuição multivariada e as observações possuem correlação, o que é o caso de séries temporais. Assim, se $\{X_1\}_{t=1}^T, \{X_2\}_{t=1}^T, \dots, \{X_{n_1}\}_{t=1}^T$ são n_1 séries temporais oriundas de um mesmo processo estocástico com distribuição F , podemos considerar que essas amostras aleatórias são independentes e identicamente distribuídas com distribuição F . Analogamente, podemos supor que $\{Y_1\}_{t=1}^T, \{Y_2\}_{t=1}^T, \dots, \{Y_{n_2}\}_{t=1}^T$ são séries temporais *i.i.d.* com distribuição H .

Observe que $\{X_i\}_{t=1}^T$, por ser uma série temporal, possui (auto)correlação entre suas observações, porém é independente de $\{X_j\}_{t=1}^T$ para $i \neq j$, assim como também é independente de $\{Y_i\}_{t=1}^T$, para todo $i = 1, \dots, n_2$, todas as séries devem ter o mesmo tamanho T .

A existência das autocorrelações é o que inviabiliza a utilização de técnicas convencionais para testar a hipótese de que amostras provém de mesma distribuição, ou seja,

$$H_0 : F = H.$$

Uma metodologia que aborda o problema evidenciado é proposta por Valk e Pinheiro (2012). Para descrever esta metodologia consideremos que as séries temporais $\{X_i\}_{t=1}^T$, $i = 1, \dots, n_1$, formam um grupo (G_1) e as séries temporais $\{Y_i\}_{t=1}^T$, $i = 1, \dots, n_2$, formam outro grupo (G_2). O método consiste em medir distâncias entre os grupos G_1 e G_2 e comparar com medidas dentro desses grupos. Se $F = H$, ou seja, se os grupos são homogêneos, espera-se que a distância entre os grupos não seja maior que a soma das distâncias dentro dos grupos. No entanto, se $F \neq H$, ou seja, os grupos são heterogêneos, espera-se que a distância entre grupos seja maior que a soma das distâncias dentro dos grupos.

Considere que F e H pertencem a um conjunto \mathcal{F} de funções de distribuições com mínimas restrições. Supostamente, \mathcal{F} é conhecido, mas F e H não. Considere δ um parâmetro funcional de \mathcal{F} sendo a distância entre F e H , denotado por

$$\delta(F, H).$$

Como F e H são multivariadas, faz sentido definir $\delta(F)$ e $\delta(H)$ como sendo o tipo de distâncias entre as marginais.

No caso de o parâmetro funcional δ seja a variância σ^2 , a restrição que o conjunto de funções F deve satisfazer é $\mathcal{F} = \{F : \int |X|^2 dF(x) < \infty\}$.

Para que possamos usar a teoria de U-estatística é necessário a suposição de que exista uma função $\psi(\cdot, \cdot)$ tal que

$$\delta(F, H) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \psi(x, y) dF(x) dH(y),$$

e que satisfaça

$$\delta(F, H) \geq \frac{1}{2} \{ \delta(F) + \delta(H) \}.$$

Com essas suposições garantimos a existência de estimadores não viesados, consistentes e eficientes para os parâmetros $\delta(F, H)$, $\delta(F)$ e $\delta(H)$, baseados nas amostras $\{X_i\}_{i=1}^T$ e $\{Y_i\}_{i=1}^T$ dados, respectivamente, por:

$$U_{n,12} = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \psi(X_i, Y_j), \quad (2.1)$$

$$U_{n,1} = \binom{n_1}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n_1} \psi(X_i, X_j) \quad (2.2)$$

e

$$U_{n,2} = \binom{n_2}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n_2} \psi(Y_i, Y_j). \quad (2.3)$$

2.1 Estatística do Teste

No contexto de teste de hipótese, é comum trabalhar sob a suposição de que a hipótese nula é verdadeira. Nesse caso, significa que todas as séries temporais provém de um mesmo processo estocástico, ou seja, sob H_0 não temos dois grupos distintos. Assim, vamos supor que a nossa amostra é composta apenas de $\{X_i\}_{i=1}^T$, para $i = 1, \dots, n$, em que $n = n_1 + n_2$. A U-estatística para a amostra combinada pode ser escrita como:

$$U_n = \frac{n_1(n_1 - 1)}{n(n - 1)} U_{n,1} + \frac{n_2(n_2 - 1)}{n(n - 1)} U_{n,2} + 2 \frac{n_1 n_2}{n(n - 1)} U_{n,12} \quad (2.4)$$

que corresponde às componentes dentro dos grupos e entre os grupos. Além disso, é possível mostrar que:

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{g=1}^2 \frac{n_g}{n} U_{n,g} + 2 \frac{n_1 n_2}{n(n - 1)} (2U_{n,12} - U_{n,1} - U_{n,2}) \\ &= W_n + B_n. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Para mais detalhes consultar Pinheiro et al.(2009).

O último termo da equação (2.4) é não-negativo, enquanto, em (2.5), B_n pode ser tanto positivo ou negativo. Sob a hipótese de homogeneidade dos G grupos, $\mathbb{E}(B_n) = 0$, mas $\mathbb{E}(B_n) \geq 0$ sob à hipótese alternativa. Sendo assim, a estatística do teste será definida por B_n . É conhecido na literatura que a estatística B_n é assintoticamente normal. Sob H_0 a média é 0 e a variância vai depender da $\psi(\cdot, \cdot)$ escolhida. Por não ter uma fórmula fechada, estima-se a variância de B_n utilizando o procedimento de reamostragem, bootstrap.

Desta forma, o teste de hipótese para a homogeneidade de grupos fica caracterizado. Como usual, se o p-valor é menor que o nível de significância α rejeita-se a hipótese nula de que os grupos são homogêneos.

3 Certificado de Depósito Interbancário (CDI)

O Certificado de Depósito Interbancário, também conhecido como CDI, é uma das taxas de juros mais utilizadas pelos bancos. Foi criado em meados de 1980 com intuito de garantir uma distribuição de recursos que atenda ao fluxo de recursos demandados pelas instituições financeiras. O CDI é uma aplicação com prazo de um dia útil, com objetivo de auxiliar na liquidez de uma instituição financeira. Em linhas gerais, devido ao movimento regular de retiradas e depósitos, alguns bancos têm sobra de caixa ao final do expediente e outros têm falta. Para não deixar o dinheiro “dormindo” sem rendimento, os bancos fazem empréstimos entre si de apenas um dia. Abaixo temos uma ilustração do problema para a melhor compreensão.

- O banco A precisa de dinheiro em caixa para fechar uma operação, ele então emite um CDI no mercado;
- O banco B, como tem algum saldo sobrando, compra esse título depositando o valor no banco B;
- No dia seguinte, o banco B devolve o título e recebe o dinheiro de volta mais a taxa CDI acordada pelas duas partes.

Assim sendo, a taxa cobrada pelos CDI's passou a ser utilizada como referência para a maioria das aplicações financeiras de renda fixa. São alguns exemplos de aplicações como: Certificados de Depósito Bancários (CDB's), Letras de Crédito Imobiliário (LCI's) e Letras de Crédito Agronegócio(LCA's). Tal referência se deve a fato de que o CDI é o custo pago pelos bancos quando pegam dinheiro emprestado ou o custo pago pelo empréstimo tomado de outros bancos.

É importante salientar que os investimentos não são diretamente em CDI, pois esta só vale para entidades financeiras. Primeiro o investimento é feito em CDB ou LCI por exemplo, e estas aplicações rendem um percentual do CDI. Para melhor compreensão considere o seguinte: Imagine que será feito um investimento de R\$ 1.000 em LCI e a taxa anual do CDI está em 14%. O Banco A oferece rendimento de 90% do CDI enquanto o banco B oferece 112%, isso quer dizer que se o resgate for feito em um ano, teremos R\$ 1.126 no banco A e R\$ 1.154 no banco B.

Levando em conta que os investimentos mais seguros do mercado são baseados na taxa CDI, ela acabou sendo chamada de **taxa livre de risco**, taxa essa utilizada como referência para análise de risco relativo, ou seja, é a taxa que utilizamos para calcular o retorno relativo do ativo financeiro.

Nesse contexto, o presente trabalho tem por objetivo comparar o desempenho das estratégias de montagem da carteira de investimentos com a taxa CDI ao longo dos anos,

com intuito de no mínimo alcançar desempenho igual a um investimento com maior segurança.

4 Medidas de Performance

As medidas de performance de um portfólio de investimento se tornaram tópico essencial no mercado de capitais a partir dos anos 60. Até então, administradores de carteiras e investidores erroneamente apenas analisavam o retorno de cada estratégia de investimentos, sem mesmo se preocupar com a variabilidade ou risco associado na montagem do portfólio.

Em 1952, Markowitz criou a base da teoria moderna do portfólio, já descrita anteriormente, que em suma na montagem da carteira, visa minimizar o risco do portfólio para um dado nível de retorno requerido pelo investidor. Porém até o início dos anos 60 nada havia sido feito a respeito da medição da performance das diferentes estratégias adotadas. Foi quando Treynor (1965) e Sharpe (1966) desenvolveram índices capazes de medir a relação entre o retorno esperado e o risco associado a carteira de investimentos. Desde então, várias medidas de performance foram desenvolvidas. Nesse trabalho mediremos a performance das carteiras usando dois índices, sendo eles: o índice de Sharpe e o índice de Treynor.

Antes de apresentar os índices, é importante salientar que existem basicamente dois tipos de risco que o investidor está sujeito no mercado segundo Shahid(2007), definidos como:

- Risco Sistemático: são os riscos do mercado que não podem ser “quantificados”, por exemplo: guerras, crises e etc.
- Risco Não Sistemático: é o risco específico para cada mercado individual e pode ser diversificado. Ex: Uma greve no setor bancário acarretará em uma instabilidade nos papéis das empresas desse setor.

A teoria moderna do portfólio trabalha em cima do risco não sistemático, atuando na diversificação da carteira e por consequência evitando o risco não sistemático.

4.1 Índice de Sharpe

Desenvolvido por William Forsyth Sharpe em 1966, Nobel de ciências econômicas em /1990/, o índice que leva seu nome é uma medida na qual mensuramos a performance do nosso portfólio para um determinado período de tempo, utilizando três componentes: o retorno do portfólio, a taxa livre de risco e o desvio padrão da carteira. Tal índice caracteriza-se por medir quão bem o retorno de um portfólio compensa o investidor pelo risco assumido. Quanto maior o valor do índice, melhor o desempenho da carteira. No presente trabalho assumiremos a taxa livre de risco como zero, pois é definimos que apenas

será selecionado ativos de risco na montagem da carteira de investimentos. O índice de Sharpe é numericamente definido como:

$$\widehat{SR}_k = \frac{\hat{\mu}_k - R_f}{\hat{\sigma}_k},$$

onde, $\hat{\mu}$ é o retorno esperado da estratégia k , R_f é o *risk-free*, um retorno mínimo esperado pelo investidor para qualquer investimento com um risco adicional, e $\hat{\sigma}$ o desvio padrão dos retornos da carteira da estratégia k .

Um fator relevante é testar a igualdade entre as medidas do índice de Sharpe, com intuito de analisar se realmente há diferença significativa entre duas medidas. Para cumprir esse propósito, Jobson and Korkie (1981) propuseram um teste de hipótese assintótico, afim de avaliar a diferença entre os índices de Sharpe para diferentes estratégias. Porém, segundo DeMiguel et.al.(2009), a suposição de normalidade dos retornos raramente é atendida em pequenas amostras, o que torna o teste impreciso.

Deste modo, neste trabalho a comparação entre os índices de Sharpe se dará através dos intervalos de confiança obtidos através da técnica de reamostragem bootstrap. Este método consiste em obter n subamostras da amostra original e considerar os percentis como os limites superior e inferior do intervalo de confiança. Por exemplo, em um intervalo de confiança com 5% de significância, pegamos o percentil 2,5% e 97,5%.

4.2 Índice de Treynor

Em 1965, Jack L. Treynor foi o primeiro pesquisador a desenvolver uma medida de performance para carteiras de investimentos. O objetivo de Treynor era encontrar uma medida de desempenho que poderia aplicar-se a todos os investidores, independentemente das suas preferências de risco pessoais. Foi ele quem sugeriu que houvesse realmente dois componentes de risco: o risco produzido pelas flutuações do mercado (risco sistemático) e do risco em decorrência da flutuação de títulos individuais (risco não sistemático).

Treynor introduziu o conceito da linha de mercado de segurança, que define a relação entre os retornos da carteira e taxas de retorno de mercado, pelo que a inclinação da linha mede a volatilidade relativa entre a carteira e o mercado (representado por β). O coeficiente β é simplesmente a medida de volatilidade de uma carteira de ações para o próprio mercado, em termos estatísticos, ele representa o coeficiente de regressão entre o retorno da carteira com o retorno geral do mercado. Quanto maior a inclinação da linha, melhor a relação risco-retorno.

Nesse contexto, o índice de Treynor é similar ao índice de Sharpe, porém utiliza o β como medida de risco ao invés do desvio padrão. Matematicamente o índice é definido como

$$\widehat{Tr}_k = \frac{\hat{\mu}_k - R_f}{\beta}.$$

O índice também é conhecido como recompensa em relação a volatilidade do mercado.

Assim como no índice de Sharpe, temos o interesse em analisar se há diferença estatística entre as medidas de Treynor. O trabalho de Jobson and Korkie (1981) também propôs uma forma de testar a igualdade entre os índices de Treynor para diferentes estratégias. Porém, como comentando anteriormente, devido à não aderência a normalidade em pequenas amostras de retornos o teste de hipótese assintótico é impreciso e a solução

é comparar o índice através de intervalos de confiança. Similarmente ao índice de Sharpe, o intervalo de confiança será obtido através de reamostragem bootstrap.

5 Aplicação Empírica

O mercado acionário brasileiro é considerado por muitos investidores como um mercado de alto risco, devido a fraca estrutura das empresas e à instabilidade econômica do país. Sendo assim, é uma tarefa árdua operar nesse terreno argiloso. Nesse contexto, elaborou-se um estudo para aplicar os conceitos da teoria moderna do portfólio para a montagem da carteira de investimentos no principal mercado de capitais brasileiro, a IBOVESPA. Além da comparação das diferentes estratégias, estamos interessados em avaliar o desempenho destas, perante um investimento de baixo risco (CDI). As análises foram feitas utilizando o *software* R 3.2.0.

5.1 Tratamento dos Dados

O estudo foi desenvolvido em cima de um banco de dados dos preços de ações da bolsa de valores IBOVESPA. Os preços dos ativos foram obtidos diariamente no período de 5 de janeiro de 1999 até 31 de dezembro de 2010, totalizando 144 meses e contendo o preço de 67 ações.

A primeira etapa calculou-se os log-retornos de cada ativo. Levando em conta que alguns ativos são negociados poucas vezes durante o mês ou semana, foram utilizadas apenas os 40 ativos com maior liquidez diária¹. O critério de exclusão adotado foi o de que ativos que tem mais de 5% dos log-retornos iguais a 0 não devem compor a amostra.

Outro fator importante para a análise é resguardar uma fatia da amostra para podermos validar o método escolhido. Portanto, foi particionada a amostra em: amostra de análise, contendo os primeiros 60 meses e sendo utilizada para a criação dos grupos e pesos iniciais da carteira e, amostra de validação, com os últimos 84 meses para analisar o desempenho dos métodos de otimização.

5.2 Otimização

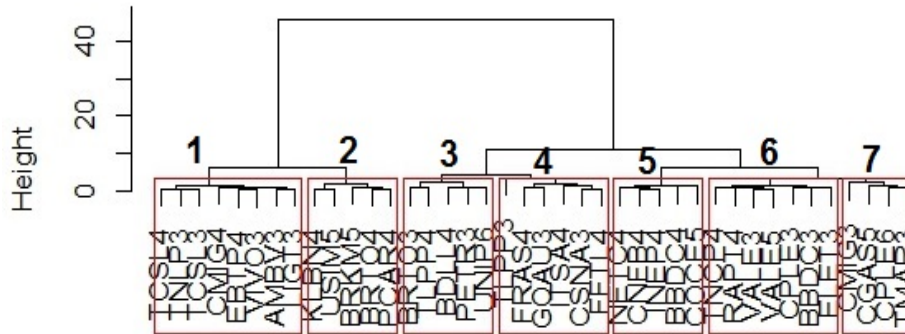
O processo de otimização foi feito utilizando o conceito de *rolling-sample*. O conceito desta técnica é o de que, dado T meses de retornos, no nosso caso, $T = 144$, utilizamos uma janela de tamanho M para a estimação dos parâmetros, definimos $M = 60$. Em outras palavras, em cada mês t , começando de $t = M + 1$ usamos os 60 meses anteriores para estimar os parâmetros de cada estratégia. Esses parâmetros são utilizados posteriormente para estimar o peso de cada ativo nas estratégias. O resultado da '*rolling-sample* é uma série de $T - M$ retornos mensais gerados por cada estratégia.

Para o método proposto de agrupamento, a formação dos grupos foi feita dentro da

¹Capacidade de transformar um ativo em dinheiro.

amostra de análise e não foi modificada posteriormente, o resultado foi de que há 7 grupos diferentes entre os ativos, eles são expressos pela Figura 5.1.

Figura 5.1: Dendrograma.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Cada ativo é representado por 4 letras maiúsculas que costumam representar o nome da empresa e um número que diz respeito ao tipo de negociação. O número 3 representa as ações ordinárias, as quais concedem ao acionista o direito de voto nas assembleias, bem como a participação não preferencial nos resultados da empresa. Já o número 4 caracteriza as ações preferenciais, que dão prioridade aos acionistas no recebimento de dividendos ou no reembolso do capital. No entanto, não concedem o direito de voto nas assembleias.

Portanto, a ação VALE3 representa um ativo da empresa vale do tipo ordinário. Existem outros tipos de investimentos com diferentes numerações, porém são pouco utilizados.

5.3 Resultados

O primeiro resultado a ser analisado é a Tabela 5.1 na qual consta estatísticas descritivas dos excessos de retornos de cada estratégia. A estratégia que apresentou maior retorno médio foi a 1/N, seguida pela de agrupamento, porém estas duas estratégias tiveram desvio padrão maior do que a *mean variance*(MV), indicativo de maior risco associado.

Tabela 5.1: Estatísticas Descritivas.

Estratégias	1/N	Agrupamento	MV
Mínimo	-0,586	-0,460	-0,386
Máximo	0,420	0,458	0,530
Média	-0,033	-0,038	-0,039
Mediana	-0,033	-0,037	-0,387
Desv. Padrão	0,160	0,141	0,104

Outro fator importante que pode ser destacado, é fato de que todos os excessos de retorno médios são negativos, o que significa que em média o CDI, investimento de baixo risco, é mais eficaz que qualquer estratégia de investimento.

Em anexo as Figuras 4, 5, 6 trazem as séries temporais dos retornos de cada investimento e podem ajudar na interpretação da análise descritiva.

5.3.1 Performance Quanto ao Índice de Sharpe

A tabela 5.2 contém o índice de Sharpe para cada uma das estratégias, os índices foram obtidos através da função “SharpeRatio” do pacote **PerformanceAnalytics**. Vale lembrar que quanto maior o valor absoluto do índice, melhor é o desempenho da estratégia.

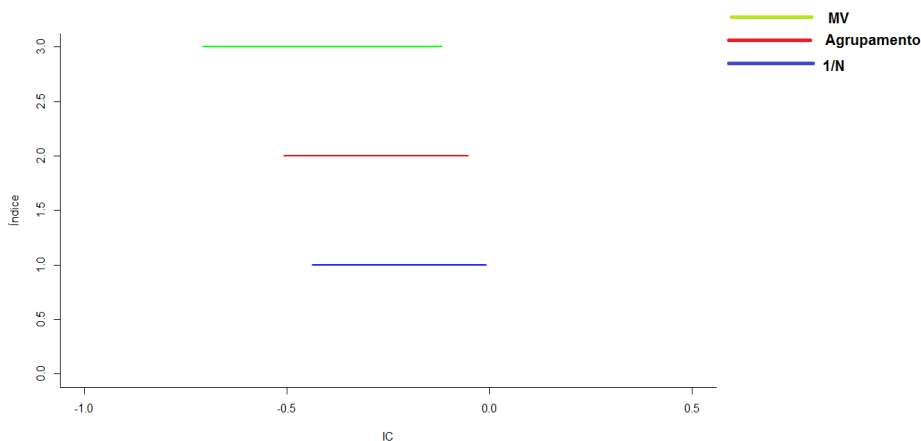
Tabela 5.2: Sharpe Ratio.

Estratégias	1/N	Agrupamento	MV
Sharpe Ratio	-0,221	-0,268	-0,371
IC 95%	[-0,4396 ; -0,0085]	[-0,5087 ; -0,0538]	[-0,7079 ; -0,1176]

Podemos notar que a estratégia *Mean Variance* possui maior valor absoluto para o índice de Sharpe, indicando que esta estratégia tem o melhor desempenho em relação à risco \times retorno, seguido pelo método de agrupamento e 1/N.

É de interesse analisar se os intervalos de confiança se interseccionam, para comparar se há realmente diferença estatística entre as medidas de Sharpe. A Figura 5.2 mostra os intervalos de confiança, construídos através do método de bootstrap, para cada uma das estratégias.

Figura 5.2: IC 95% Sharpe Ratio.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos concluir que, com 95% de confiança, não há evidências de que as estratégias se diferem quanto ao índice de Sharpe. Portanto, como aponta DeMiguel et. al (2009), as diversificações através de otimização não possuem performance superior há uma estratégia ingênua de atribuir o mesmo peso para todos os ativos, para esse conjunto de dados.

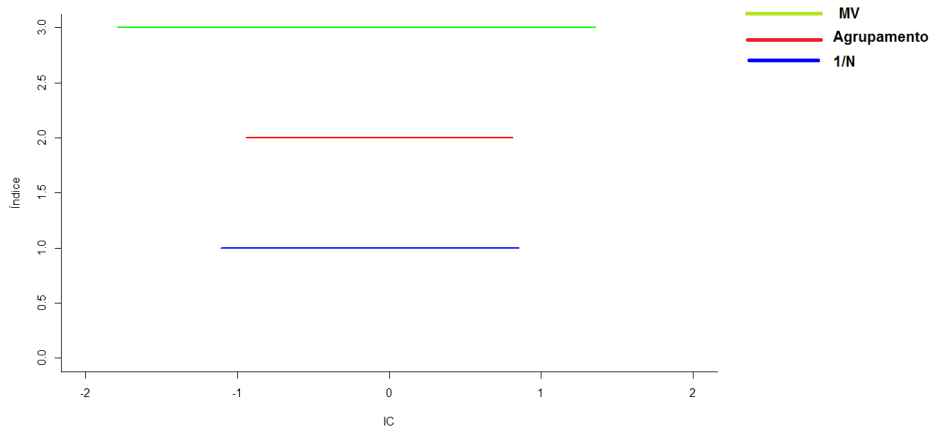
5.3.2 Performance Quanto ao Índice de Treynor

A tabela 5.3 traz o desempenho de cada estratégia frente ao risco inerente ao mercado e que não pode ser diversificado, sendo representada pelo índice de Treynor.

Tabela 5.3: Índice de Treynor.

Estratégias	1/N	Agrupamento	MV
Beta	0,2072	0,3296	0,1957
Treynor	-2,223	-1,363	-2,128
IC 95%	[-1,1075 ; 0,8523]	[-0,9463 ; 0,8129]	[-1,7903 ; 1,3594]

Podemos notar, que o menor valor absoluto do índice de Treynor e o maior Beta associado é para a estratégia utilizando agrupamento, o que indica que essa estratégia possui maior influência das oscilações do mercado, ou seja, há um menor risco diversificável, porém em mercados de alta ela pode obter retornos maiores. No entanto, os intervalos de confiança nos mostram, com 95% de confiança, que não há uma diferença significativa, como pode ser visto na Figura 5.3.

Figura 5.3: IC 95% Treynor Ratio.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Logo, podemos dizer que há evidências de que as estratégias não se diferem quanto a dependência ao mercado, no que diz respeito ao conjunto de dados utilizados.

Conclusão

Este trabalho tinha como objetivo avaliar o desempenho de estratégias de otimização frente a uma estratégia simplória de distribuir proporcionalmente os pesos entre os ativos disponíveis, aplicado-as ao mercado acionário brasileiro, IBOVESPA e ainda, avaliar os retornos de um investimento de baixo risco em relação a um de alto risco utilizando tais estratégias. Como um segundo objetivo, propor uma nova abordagem de estimação visando corrigir erros de estimação na otimização .

Quanto aos resultados, podemos concluir que não há evidências de que usar otimização da carteira de investimento traz um ganho real, quanto ao índice de Sharpe, medida de recompensa por risco tomado e nem quanto ao índice de Treynor, recompensa em relação a volatilidade do mercado. Além desses fatores, por ser um método mais complexo de operar, do que simplesmente distribuir proporcionalmente os pesos entre os ativos disponíveis, a otimização parece pouco vantajosa. Em relação aos investimentos de baixo risco, estes apresentaram retornos médios superiores do que os advindos das carteiras montadas no mercado acionário pelas diferentes estratégias.

No que diz respeito a nova abordagem de otimização, não houve ganhos significativos quanto as medidas de performance, porém ainda cabe outros estudos para melhorar o processo de agrupamento e conseqüentemente a estimação dos parâmetros do processo de otimização.

Portanto, assim como DeMiguel et al. (2009), não encontramos evidências de que as estratégias baseadas em otimização tenham ganhos significativos perante ao método ingênuo $1/N$. No entanto, ainda há muito espaço para o desenvolvimento de novos métodos afim de melhorar a performance dos processos de otimização e aplicá-los à outras mercados.

Referências

- [1] DeMiguel, Victor, Lorenzo Garlappi, and Raman Uppal(2009), Optimal Versus Naïve Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy? *Review of Financial Studies*, Vol. 22, 2009: 1915-1953.
- [2] Jobson, J. D., e Korkie, B. M.. (1981). Performance Hypothesis Testing with the Sharpe and Treynor Measures. *The Journal of Finance*, 36(4), 889-908.
- [3] Johnson, Richard Arnold, and Dean W. Wichern (1992). *Applied multivariate statistical analysis*. Vol. 6. Englewood Cliffs, NJ: Prentice hall.
- [4] Kritzman, Mark, Sebastien Page, and David Turkington(2010), In Defense of Optimization: The Fallacy of 1/N, *Financial Analysts Journal*, Vol. 66 (2), March/April 2010: 31-39.
- [5] Markowitz, H. M (1952), Portfolio Selection, *Journal of finance*, V7(1), 77-91.
- [6] Morettin, P.A. e Tolo, C.M.C. (2006), "Análise de Séries Temporais", *ABE-Projeto Fisher*, 2ª ed., 10-13.
- [7] Pinheiro, A. (2009) Decomposability of high-dimensional diversity measures: Quasi-U-statistics, martingales and nonstandard asymptotics *Journal of Multivariate Analysis*.
- [8] Shahid, M. (2007). Measuring portfolio performance. Available at <http://www2.math.uu.se/research/pub/Shahid1>. 11-14.
- [9] Sharpe, W.F.(1966) Mutual fund performance . *Journal of Business* .
- [10] Treynor, Jack L (1965) How to Rate Management of Investment Funds, *Harvard Business Review*.
- [11] Valk, M. e A. Pinheiro (2012). Time-series clustering via quasi U-statistics. *Journal of Time Series Analysis*, vol.33(4), 608-619.
- [12] Valk, M. e Marcolin, A.F. Medidas de dissimilaridade para o método de classificação de séries temporais baseado em U-estatísticas In: SINAPE, 2014 , Natal.
- [13] Ward, J. H., Jr. (1963), Hierarchical Grouping to Optimize an Objective Function *Journal of the American Statistical Association*, 58, 236-244.

Anexos

Através das Figuras 4, 5 e 6 são representos os retornos de cada estratégia de investimento. Podemos notar que as estratégias 1/N e de agrupamento possuem uma maior variância do que o método clássico de média e variância, assim como indicado anteriormente nas medidas descritivas.

Figura 4: Excesso de Retorno 1/N



Figura 5: Excesso de Retorno Agrupamento

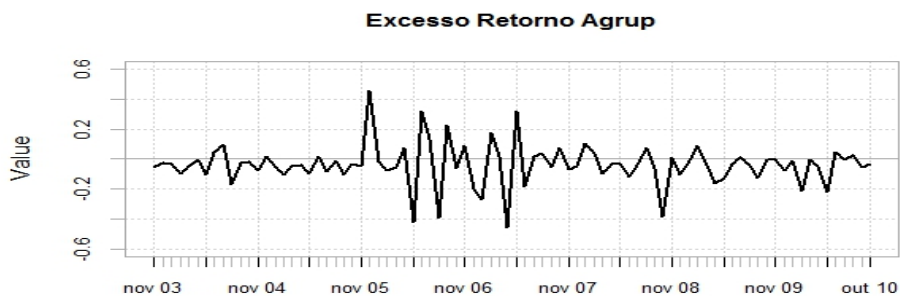


Figura 6: Excesso de Retorno Mean Variance