UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

THEODORO BECKER DE ALMEIDA

UMA REVISITAÇÃO AOS CONJUNTOS NUMÉRICOS NO ENSINO MÉDIO

Porto Alegre
2015

THEODORO BECKER DE ALMEIDA

UMA REVISITAÇÃO AOS CONJUNTOS NUMÉRICOS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Cydara Cavedon Ripoll

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Porto Alegre

2015

THEODORO BECKER DE ALMEIDA

UMA REVISITAÇÃO AOS CONJUNTOS NUMÉRICOS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dra. Letícia Rangel (CAp - UFRJ)

____

Profa. Dra. Luísa Doering (PPGEMat/UFRGS)

____

Prof. Dr.Victor Augusto Giraldo (PPG Ensino Educ. Mat/UFRJ)

Porto Alegre

2015

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por todo o amor que não se acaba e por toda a Sua generosidade de caminhar sempre ao meu lado.

Aos meus pais que, mesmo de longe, sempre torceram pela minha felicidade e fizeram parte de todos os momentos da minha vida, me dando suporte e carinho necessários para seguir.

À minha irmã que sempre me ensinou, me ouviu, me compreendeu e me apoiou em todos os momentos de dúvidas e incertezas.

À minha querida amiga e protetora Maria Inês que desde 2009 me incentivou e sempre participou de todos os momentos alegres e tristes pelos quais passei.

Aos meus alunos do Colégio São Judas Tadeu pela importante participação neste trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS, por todo aprendizado que adquiri nesses últimos anos.

À professora Cydara que foi, além de minha grande incentivadora e referência para que eu iniciasse este curso de Pós-Graduação, uma amiga que pude contar, desde sempre, com sua paciência e compreensão nos momentos de angústia e de falta de tempo para escrever a dissertação.

RESUMO

Esta dissertação trata principalmente de uma proposta de retomada do estudo de números no Ensino Médio através dos conjuntos numéricos, a título de revisão e aprofundamento sobre os mesmos. Apresenta também os resultados da aplicação da Sequência Didática construída sobre tal tema em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio de uma escola de ensino privado do município de Porto Alegre, Rio Grande do Sul. O trabalho inclui ainda uma leitura dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e da recente proposta intitulada Base Nacional Curricular Comum, tornada pública no dia 15 de setembro de 2015. Também é feita a análise crítica de quatro livros didáticos recomendados pelo Programa Nacional do Livro Didático de 2015.

Palavras-chave: Conjuntos Numéricos; Ensino de Números no Ensino Médio.

ABSTRACT

This dissertation deals mainly with a proposal to resume the study of numbers in high school through the numerical sets, as a review and deepening of them. It also presents the results of the implementation of the Teaching Sequence built on this theme in a class of third grade of High School of a private school in the city of Porto Alegre, Rio Grande do Sul. The work also includes a reading of the National Curriculum Guidelines for Secondary Education and the recent proposal entitled National Curriculum Common Base, published on 15 September 2015. It also comprises a critical analysis of four textbooks recommended by the National Textbook Program 2015.

Key-words: Numerical Sets; Teaching of Numbers in High School.

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO

Em todas as épocas, mesmo nas mais remotas, a necessidade de contar e de medir sempre esteve presente em diversos povos e civilizações. Esse fato faz com que o assunto "números" seja primordial no ensino e aprendizagem da matemática. No entanto, muitos anos foram necessários para que se iniciasse o desenvolvimento do conceito matemático de número que, embora hoje nos pareça natural, foi lento e complexo (FERREIRA, 2013, p.1).

O presente trabalho consiste do desenvolvimento de pesquisa, acompanhado de experimentação no nível médio da Educação Básica, sobre uma revisão dos diferentes conjuntos numéricos estudados no Ensino Fundamental, dentro da linha de pesquisa "Ensino de tópicos específicos de Matemática e abordagens alternativas no nível médio da Educação Básica" do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

A ideia inicial de desenvolver este trabalho surgiu devido à importância que damos ao estudo de conjuntos numéricos no ensino fundamental que, muitas vezes, é feito de maneira rápida e superficial. Por sua vez, no Ensino Médio, conjuntos numéricos são retomados em um capítulo de revisão, como se o aluno já tivesse tido um contato aprofundado sobre esses números nos anos anteriores. Por isso, apresentamos uma proposta de revisão diferenciada para o Ensino Médio, na forma de roteiro didático para o professor, constituído por um apanhado de questões disparadoras que levam a uma discussão sobre tópicos que acreditamos contribuir para uma melhor compreensão dos diferentes tipos de números, além de estimular os alunos a transitarem pelo processo argumentativo. Tal proposta leva em conta que, neste nível, com mais maturidade, o aluno é capaz de entender melhor alguns conceitos, podendo, assim, explorá-los de diversas maneiras e até aprofundá-los em muitos aspectos.

Na recente proposta intitulada Base Nacional Curricular Comum (BNCC) tornada pública no dia 15 de setembro de 2015[1], encontramos:

> O Ensino Médio caracteriza-se como a última etapa da Educação Básica. Não é uma etapa isolada e independente das anteriores, mas sim uma etapa complementar, que deve oferecer condições ao estudante para ampliar e consolidar as aprendizagens do Ensino

[1] Tal proposta está disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio para que sejam-lhe feitos comentários e contribuições até dezembro de 2015.

> Fundamental e desenvolver novas capacidades de interpretar e refletir sobre diferentes contextos. (BNCC, 2015, p. 156)

Sentimos, no objetivo explicitado no parágrafo mencionado, a atualidade de conceber uma proposta de revisitar os diferentes conjuntos numéricos estudados no Ensino Fundamental e, com ela, aprimorar a maneira como eles vêm sendo apresentados para os estudantes no Ensino Médio.

Quanto ao ensino de números no ensino básico especificamente, destacamos no mesmo documento:

> [...] O estudo dos números no Ensino Médio deve favorecer a percepção de agrupamentos em diferentes conjuntos numéricos e a compreensão das limitações de algumas propriedades numéricas. Com isso, espera-se que, nessa etapa, a construção dos números irracionais ganhe sentido e que o/a estudante possa compreender o conjunto dos números reais como resultado da necessidade de ampliação dos eixos numéricos. (BNCC, 2015, p. 157)

Apesar de discordarmos da segunda frase (pois acreditamos que os números irracionais devem ganhar sentido ainda no Ensino Fundamental, mesmo porque fazem parte do currículo do Ensino Fundamental (PCN, 1998, p. 49), encontramos na primeira frase mencionada precisamente um dos objetivos de nossa proposta.

Além desse importante e recente documento que deverá vigorar em breve, ainda que com algumas alterações, destacamos, no Capítulo 2, em nossa fundamentação teórica a tese de doutorado de Plinio Moreira (MOREIRA, 2004). Embora trate como principal questão o processo de formação de alunos do curso de licenciatura em matemática, o autor restringe seu estudo ao tema Números e, a partir disso, apresenta muitas conclusões interessantes que inspiraram e influenciaram o presente trabalho.

Também em relação à importância de conexão entre os diferentes níveis de ensino e o que já foi estudado pelos alunos em anos anteriores, encontramos em sua tese um destaque para Behr et al.:

> [...] foi comum observar regressões significativas na compreensão dos conceitos. Os conceitos já trabalhados anteriormente devem ser não só relembrados, mas integrados progressivamente a sistemas mais complexos de ideias; algumas vezes eles têm que ser reconceitualizados quando da extensão para novos domínios. Ideias que são verdadeiras em domínios restritos [...] podem ser enganosas, incorretas ou mesmo inúteis quando transportadas para novos domínios. (BEHR et al., 1983, p.104)

Assim, para a elaboração desta proposta, tivemos como principais objetivos:

- descrever como são revisados os conjuntos numéricos nos capítulos iniciais de algumas coleções de livros didáticos integrantes do PNLD 2015 para o Ensino Médio;

- elaborar uma proposta didática que contemple todos os conjuntos numéricos estudados no início do Ensino Médio buscando corrigir incoerências e mal encaminhamentos usualmente encontrados em livros didáticos;

- abordar situações que motivem a reflexão sobre a necessidade de ampliação do universo numérico.

Após termos claros os objetivos, buscamos fundamentar a proposta em referenciais teóricos tanto do ponto de vista da educação matemática propriamente dita, quanto do ponto de vista das convicções matemáticas que aqui seguimos. Eles são apresentados no capítulo 2 juntamente com a metodologia utilizada na execução da proposta.

Já no capítulo 3, está a análise de quatro livros didáticos do PNLD 2015 executada em relação à revisão dos conjuntos numéricos e alguns comentários do que dois desses autores já diziam há mais de dez anos. Tal análise serviu para garantir a legitimidade da nossa ideia em relação a este tema e evidenciou que a forma de apresentar e ensinar este conteúdo não mudou muito desde aquela época.

Como proposta didática, optamos por construir uma sequência didática na forma de questões disparadoras com dez perguntas sobre cada um dos conjuntos numéricos revisitados, às quais pretende-se acoplar, por meio das discussões que elas oportunizam/disparam, todas as importantes características, propriedades e principais diferenças entre os diferentes conjuntos. A implementação da sequência didática foi aplicada em uma turma de quarenta alunos de terceiro ano do Ensino Médio, de uma escola privada de Porto Alegre, RS, antes do estudo de Números Complexos. A proposta didática está no capítulo 4 e inclui os principais objetivos, alguns "bilhetes ao professor", expectativas de cada questão no que diz respeito às argumentações e/ou respostas dadas pelos alunos e um breve relato do que aconteceu durante sua implementação em sala de aula.

No capítulo 5, está o produto final da proposta. Este, por sua vez, é produto das reflexões ocasionadas pela implementação da proposta na sala de aula citada e pela implementação de uma oficina para professores e futuros professores, intitulada *Uma Revisitação aos Conjuntos Numéricos no Ensino Médio* que foi aplicada em eventos e congressos de formação de professores de matemática durante este ano. Tal produto consiste em um roteiro didático para o professor com questões disparadoras que oportunizam uma revisão mais significativa dos conjuntos numéricos no Ensino Médio. Além disso, são incluídas 15 atividades complementares para que o professor possa utilizá-las como exercícios (Atividade Complementar).

No sexto e último capítulo, apresentamos nossas considerações finais após termos percorrido todas as etapas desse processo: literatura, livros didáticos, planejamento e implementação da sequência didática.

2 – FUNDAMENTAÇÃO E METODOLOGIA

Uma das principais críticas que fazemos em relação ao modo como é tratado o capítulo sobre conjuntos numéricos nos livros didáticos de Ensino Médio é que não se aproveita a oportunidade para fazer uma comparação entre tais conjuntos, no que diz respeito às suas principais características e propriedades. Também não se problematiza a necessidade de se expandir cada universo numérico para o seguinte. Sendo assim, decidimos refletir sobre tais conjuntos com um embasamento teórico de alguns conceitos utilizados que apresentaremos neste capítulo e que nos auxiliou na elaboração deste trabalho.

Após uma leitura dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e a execução da análise dos livros didáticos apresentada no Capítulo 3, buscamos outras bibliografias relacionadas ao tema que pretendíamos abordar. Em seguida, uma proposta foi elaborada por meio de uma lista de questões (dez questões de cada conjunto numérico, apresentadas com detalhes no próximo capítulo), que pretendem evidenciar as principais características e propriedades de cada universo numérico. Nessa proposta, preocupamo-nos, durante o planejamento das questões, em problematizar a necessidade de expansão de um conjunto numérico para o outro. Além disso, buscamos registrar as expectativas sobre as atividades que propúnhamos, bem como os seus objetivos.

Acreditamos que o desenvolvimento de uma prática pedagógica que visa à compreensão dos fatos por meio da construção de justificativas, permite que o aluno aprenda de maneira coerente podendo, assim, elaborar hipóteses a partir de definições, postulados e teoremas.

> O desenvolvimento de uma visão flexível e multifacetada do conhecimento matemático envolvido nessas questões pode contribuir decisivamente para que o professor seja capaz de dialogar com seus alunos, de reconhecer e validar, quando for o caso, certos pontos de partida por eles adotados para a construção de um determinado conceito ou de avaliar uma determinada forma de elaboração do conceito como adequada para certo estágio, ainda que precise ser reelaborada em estágios posteriores. (MOREIRA, 2004, p. 88)

Essa visão de Moreira é a que trazemos para o estudo dos conjuntos numéricos. Neste nível, com a maturidade dos alunos de Ensino Médio, certamente muitos conceitos serão mais bem compreendidos e relacionados com os que já foram estudados durante o ensino fundamental. Por exemplo, as ideias que vão se desenvolver até a formação do conceito de número natural começam a ser elaboradas muito cedo pelas crianças, a partir, principalmente, de atividades associadas à contagem e à ordenação de objetos (DICKSON et al.,1993, p.169-188; SINCLAIR; SINCLAIR, 1986, p.62-67).

Moreira (2004, p. 84) destaca que, no desenvolvimento de cada etapa do processo de expansão dos conjuntos numéricos, o professor precisa conhecer profundamente, de um ponto de vista relevante para a sua prática, aquilo que os alunos consideram como o universo numérico nos diferentes estágios da vida escolar. Só assim ele terá condições de lidar com dúvidas e concepções incorretas trazidas pelos alunos e que dizem respeito tanto ao novo conjunto, mais amplo, como também ao conjunto mais restrito, aquele supostamente conhecido, que está sendo ampliado.

Durante o ensino fundamental, o aluno pode apresentar uma dificuldade maior na compreensão e distinção das diferentes propriedades de cada conjunto numérico pois as extensões numéricas são muitas vezes motivadas por questões de natureza totalmente diferentes (contagem, oposição, medida), revelando-se o conjunto e a respectiva estrutura resultantes do processo de extensão um universo genuinamente novo para o aluno. Essa novidade constitui um elemento fundamental na conformação da prática docente, afetando decisivamente o tratamento didático-pedagógico das várias etapas desse processo. A ampliação dos naturais para os inteiros, por exemplo, envolve uma ressignificação do próprio conceito de número. O que antes expressava quantidade, agora passa a representar uma quantidade orientada, isto é, uma quantidade acompanhada de um referencial. Já quando introduzimos os racionais positivos, outra abordagem deve ser tratada: a noção abstrata de número racional parece estar associada a um longo processo de construção e reelaboração, quase que elemento a elemento.

> [...] O processo de se captar o 2 como algo “livre” da concretude a que se refere originalmente é análogo ao processo de se captar o 2/7, por exemplo, como algo “livre” daquilo a que ele se “aplica” em situações concretas — 2/7 da área de um terreno, 2/7 de uma maçã, 2/7 dos alunos de uma classe etc. Mas esse desvinculamento do concreto, que está no cerne da construção do conceito de número, não é uma ruptura cabal que desconecta abstrato e concreto. Pelo contrário, o sentido desse desvinculamento é a potencialidade de novos vínculos a novas concretudes. Por outro lado, esses novos vínculos vão proporcionar um aprofundamento no nível de abstração com que é percebido o conceito de número racional. (SOARES et al.,1998, p. 9-10)

Behr et al. (1983) afirmam que os conceitos associados aos números racionais estão entre as ideias mais complexas e importantes que as crianças encontram ao longo dos primeiros anos de escolarização.

Em uma das questões apresentadas no roteiro didático que propomos, chamamos a atenção para a importância do desenvolvimento de uma percepção abrangente da natureza e do papel daquilo que se toma como unidade, ao se trabalhar com os números racionais no ambiente escolar. Sowder et al. (1998) chamam atenção para isso dizendo que a capacidade de reconhecer um agregado de objetos, ou parte de um deles, como uma “nova” unidade pode ser fundamental para o tratamento matemático de uma determinada situação, para a construção de certas formas conceituais e para uma compreensão mais profunda das estruturas multiplicativas.

Seguindo o processo de ampliação dos conjuntos numéricos, um dos pontos mais complicados para o entendimento do aluno é a passagem dos racionais para os reais. Fishbein et al. (1995) comentam: “Como seria possível passar dos racionais aos reais sem descrever o conjunto dos números irracionais? Os irracionais são parte do sistema numérico e sem eles o conceito de número real é incompleto. Basta descuidar-se dos irracionais e todo o sistema desmorona” (FISHBEIN et al., 1995, p. 30). Essa dificuldade é evidenciada quando percebemos que, nos livros didáticos escolares, o número irracional é, geralmente, apresentado de duas maneiras: como um número que não se pode escrever como razão de inteiros ou como uma forma decimal infinita não periódica. De acordo com Moreira (2004):

> Se o universo numérico dos alunos ainda é o conjunto dos racionais, nenhuma dessas duas caracterizações tem qualquer significado para eles. Não sabendo o que significa uma forma decimal infinita não periódica não se sabe o que é número irracional e vice-versa. Do mesmo modo, se a ideia escolar de número está associada, no seu significado mais amplo, apenas a uma razão de inteiros, os irracionais, não sendo razão de inteiros, não são números. Trata-se de uma situação análoga àquela de procurar no dicionário o sinônimo para uma palavra cujo significado não conhecemos e encontrar apenas duas palavras, as quais, também, não sabemos o que significam. No final, define-se o conjunto dos números reais como a união dos racionais com os irracionais. Fecha-se, assim, um ciclo de inconsistências e não se esclarece o sentido de se conceber os irracionais como números ou o significado que possa vir a ter essa nova espécie de número. (MOREIRA, 2004, p. 121)

Sendo assim, sugerimos, no material produzido, que a introdução de números irracionais (positivos) deve ser uma discussão de natureza geométrica através da associação desses números a medidas de segmentos e da consideração da possibilidade da incomensurabilidade. Essa discussão em sala de aula traz a questão da insuficiência do conjunto dos números racionais e a necessidade de se ampliar novamente a noção de número, de modo a incluir a consideração de “quantidades” que não se expressam como razão de inteiros. Ainda de acordo com Moreira (2004):

> Conjugada a essa discussão, evidentemente, faz-se necessária uma reelaboração da noção do que seja medir algo, fixada uma unidade. Por outro lado, essa elaboração mais profunda da ideia de medir pode servir de base para uma abordagem que venha a tornar mais transparente e compreensível o vínculo intrínseco da irracionalidade com os processos infinitos: um número irracional, por expressar medidas de segmentos incomensuráveis com a unidade, não pode ser dado por uma fração da unidade, mas é sempre uma soma de infinitas frações. Por esse mesmo motivo, um número irracional tem a forma decimal (ou em qualquer outra base, num sistema posicional análogo) infinita e não periódica. (MOREIRA, 2004, p. 123)

Além disso, uma das principais críticas que fazemos é que os alunos de 9º ano passam quase um trimestre em torno de um capítulo intitulado “Cálculo com Radicais” aplicando uma série de receitas e regras e chegam ao Ensino Médio, muitas vezes, sem saber dizer, por exemplo, se $\sqrt{13}+3\sqrt{5}$ é maior ou menor do que 10. Em relação a isso, destacamos os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002) que recomendam que, ao concluir o Ensino Fundamental, o estudante deve ser capaz de reconhecer a forma decimal dos irracionais, o que pressupõe a atribuição, na escola, de algum significado aos decimais infinitos não periódicos. Para tal reconhecimento, se faz necessária alguma forma de discussão escolar de processos infinitos, seja no contexto aritmético de uma soma de infinitas parcelas seja numa formulação geométrica, em que se associa a forma decimal a um ponto da reta e, portanto, ao comprimento de um segmento (MOREIRA, 2004).

Diante disso, observamos que, se a extensão do universo numérico for sendo gradativamente ampliada desde a ideia básica de número natural, quando o aluno conhecer o conjunto dos números reais, perceberá que essas ampliações acontecem para superar a necessidade de ressignificação do conceito de número. Com isso, se torna mais palpável o fato de que, em termos da educação matemática escolar, o conjunto dos reais, antes de ser uma estrutura matemática abstrata, compõe-se de objetos (números) que são constituídos para dar solução a problemas vistos como insuperáveis no âmbito dos números racionais.

Portanto, com o objetivo de fornecer ao aluno iniciante do Ensino Médio uma abordagem mais significativa no estudo de conjuntos numéricos, apresentamos uma proposta que, mesmo com a reconhecida sofisticação de ideias envolvidas durante o estudo de números no Ensino Fundamental, pretende se revelar mais clara e consistente para o aluno. Para essa forma de elaboração do conhecimento matemático, achamos indispensável que seja viabilizado o cumprimento de algumas tarefas por parte do professor, tais como a decisão dos tipos de ideias ou conceitos matemáticos que são essenciais discutir neste estágio, de que exemplos dispor e em que conhecimentos anteriores se apoiar para ilustrar uma ideia em discussão ou facilitar a sua compreensão por parte do aluno e, principalmente, analisar quais deficiências podem ser identificadas na forma com que o assunto é desenvolvido e decidir o que fazer para superar as deficiências reconhecidas (MOREIRA, 2004, p. 136).

O trabalho foi implementado em uma turma de 40 alunos de terceiro ano do Ensino Médio de uma escola privada de Porto Alegre, localizada em um bairro de classe média. Em um levantamento feito nessa turma, 31 alunos revelaram que já frequentam a escola desde o início do Ensino Médio, e 9 frequentam-na desde o segundo ou terceiro ano. Isso nos permitiu constatar, por meio de conversas com os professores de primeiro ano de dois anos atrás, que a revisão de conjuntos numéricos que estávamos propondo (geralmente estudada nas primeiras aulas do Ensino Médio) não havia sido trabalhada com a maioria dos alunos ali presentes.

As aulas foram planejadas para acontecerem durante o período de sondagem (assim denominado pela própria escola), nas 3 primeiras semanas do ano letivo, no qual está prevista uma revisão e exploração de conteúdos de séries anteriores, com o propósito de melhor preparar os alunos para o que será abordado no decorrer do ano em curso. Foram então destinadas 12 aulas consecutivas (com duração de 50 minutos cada) entre fevereiro e março de 2015 para a execução do presente trabalho. O planejamento das mesmas teve como base um roteiro didático previamente preparado pelo professor (produto final desta dissertação) e que inclui questões disparadoras para a revisitação aos conjuntos numéricos. Tais questões formaram o conjunto de atividades a serem propostas aos alunos. Para cada um dos quatro universos numéricos tratados (Naturais, Inteiros, Racionais e Reais) cada aluno recebeu uma folha impressa com dez atividades referentes ao conjunto sob estudo.

A distribuição do tempo foi feita da seguinte maneira: no primeiro encontro (duas aulas que totalizaram 100 minutos), os alunos receberam a folha de atividades referentes ao conjunto dos números naturais, e foram alertados que questões como aquelas seriam trabalhadas ao longo das aulas seguintes e iriam servir para gerar discussões sobre os diferentes conjuntos numéricos. Em um segundo momento os alunos, em duplas, tiveram um breve tempo de reflexão sobre cada questão. Foram estimulados pelo professor, a responderem as questões oralmente, de acordo com o que lembravam sobre o assunto (do Ensino Fundamental ou até mesmo do que já haviam visto no Ensino Médio).

Enquanto os alunos iam respondendo as questões e refletindo sobre números naturais, o professor ia monitorando e auxiliando os alunos quando o solicitavam.

Após essa familiarização com as atividades e tentativas de respostas, que durou por volta de 25 minutos, o professor sugeriu que fossem corrigidas no grande grupo.
Então, o professor foi lendo o material com os alunos e perguntando o que eles haviam respondido em cada questão que se apresentava, aproveitando as oportunidades para maior revisão e aprofundamento. O relato sobre as respostas dos alunos, bem como a discussão que se sucedeu a partir delas está no capítulo 4, na cor vermelha (Relato do Professor), após cada questão disparadora.

Para as aulas seguintes, o professor achou mais produtivo (para que a implementação pudesse acabar, conforme o planejado, na 12ª aula) permitir que os alunos levassem a folha de atividades a respeito do próximo conjunto numérico a ser revisitado para refletirem sobre as mesmas e responderem em casa, individualmente, portanto. Obviamente, o professor entregava o material referente à aula seguinte. Por exemplo, ao final da primeira aula (de números naturais), o professor disponibilizou o material de números inteiros para que os alunos trouxessem reflexões que pudessem agregar à discussão da aula seguinte. E assim aconteceram as demais aulas: o professor já iniciava lendo o material com os alunos, questionando-os a cada questão sobre o que tinham respondido ou refletido e suas dúvidas e, à medida que iam surgindo ideias individuais, o professor as tratava juntamente com a turma, registrando-as no quadro negro. Os alunos complementavam/corrigiam suas anotações em suas folhas de atividades.

Números inteiros foram tratados também em duas aulas (totalizando 100 minutos); números racionais foram trabalhados em quatro aulas e, finalmente, números irracionais e reais em quatro aulas. Ao final desse período (13ª aula), foi aplicada uma prova, para verificar o aprendizado dos alunos. Ela pode ser conferida na íntegra ao final do capítulo 4 (Atividade de Avaliação).

Cabe ressaltar que o objetivo deste trabalho não é entender o aprendizado do aluno individualmente, mas sim testar e descrever a dinâmica da sala de aula, sendo a turma tomada como unidade, e não o aluno individualmente.

3 – ANÁLISE CRÍTICA DE LIVROS DIDÁTICOS

Fez parte de nossa proposta de trabalho, a partir das questões norteadoras da pesquisa, uma análise de quatro livros didáticos aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) do ano de 2015 que conseguimos encontrar (são seis ao todo), comparando-a com o que foi dito pelos analistas em Lima (2001) sobre os mesmos autores, em relação ao capítulo inicial de Conjuntos Numéricos.

Para facilitar a referência durante a análise, decidimos, assim, etiquetar os livros consultados da seguinte maneira:

Livro A: *Conexões com a Matemática*, Volume 1, obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna, editor responsável: Fábio Martins de Leonardo, 2013, Editora Moderna;

Livro B: *Novo Olhar Matemática*, de Joamir Souza, Volume 1, 2013, Editora FTD;

Livro C: *Matemática*, de Manoel Paiva, Volume 1, 2013, Editora Moderna;

Livro D: *Matemática Ciência e Aplicações*, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida, Volume 1, 2013, Editora Saraiva.

O principal motivo para a realização desta análise crítica é o importante papel que os livros indicados pelo PNLD exercem sobre os professores das escolas públicas brasileiras, servindo muitas vezes como única fonte de referência para o educador:

> Não tendo oportunidade e condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas da sala de aula, os professores apoiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória. (BRASIL, 1998 p.21-22)

Muitas vezes, o professor não tem oportunidade e condições para aprimorar sua formação e, assim, acaba, inevitavelmente, apoiando-se quase que exclusivamente nos livros didáticos para exercer a sua prática profissional. Além disso, encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio do ano de 2002 (PCNEM) a recomendação ao professor de que ele deve ser reflexivo e crítico em relação às questões de ensino-aprendizagem e que esteja em contínuo processo de auto formação.

A seguir, apresentamos um breve apanhado da análise feita, por meio de algumas observações gerais do que os livros atuais (e aprovados pelo mais recente PNLD) tratam em relação a cada conjunto numérico e também de alguns comentários sobre o que já era apontado em 2001 pelos analistas do livro *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio.*

Cabe salientar que, antes da análise dos livros didáticos, buscamos embasamento teórico em FERREIRA (2013), RIPOLL et al. (2011) e GIRALDO et al. (*preprint*). Foi a partir de tal embasamento que os itens, mencionados a seguir, nos chamaram a atenção.

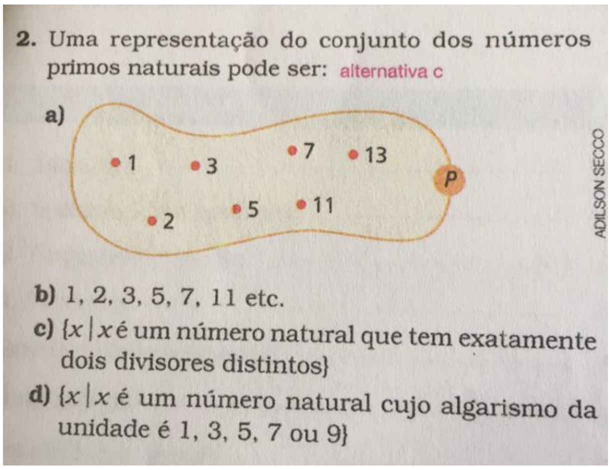
3.1 ANÁLISE DE LIVROS DO PNLD/2015

3.1.1 NÚMEROS NATURAIS

Quanto à construção e descrição do conjunto $\mathbb{N}$, em nenhum dos livros as características elementares[2] de existência de sucessor e de primeiro elemento são abordadas, bem como a infinitude. Só na obra C o zero é referido como número natural (como a quantidade de elementos do conjunto vazio) e, além disso, sucessor e antecessor são mencionados, porém não na descrição de $\mathbb{N}$. Por outro lado, esta é a única obra em que infinito não é citado. Nas obras A, B e D, os autores mencionam a infinitude mas não a exploram por meio da ideia de sucessor, dando apenas a informação que o conjunto dos números naturais possui infinitos elementos.

Somente nos livros A e D os números primos são mencionados. Enquanto na obra A aparece como definição *o número natural que tem exatamente dois divisores distintos* (o que é um tanto redundante) (Figura 1), na obra D o conjunto dos primos aparece representado “por extensão” (Figura 2), o que é impossível, para um conjunto infinito. Ou seja, nos dois a definição de número primo deve ser, pelo menos, melhorada (ver questão 10 do roteiro didático).

[2] Estamos empregando, neste trabalho, o termo *elementar* no sentido utilizado por Felix Klein (2009, 2010, 2011), para quem matemática elementar é constituída das partes essenciais que encerram a capacidade de sustentar e de estruturar a Matemática.


2. Uma representação do conjunto dos números primos naturais pode ser: alternativa c

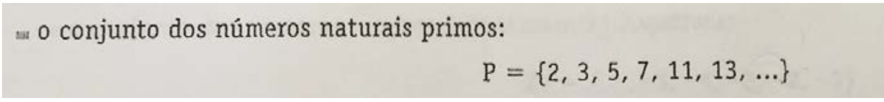
a)

b) 1, 2, 3, 5, 7, 11 etc.

c) {x | x é um número natural que tem exatamente dois divisores distintos}

d) {x | x é um número natural cujo algarismo da unidade é 1, 3, 5, 7 ou 9}

Figura 1 – Recorte do Livro A, página 53.


o conjunto dos números naturais primos:

P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, ...}

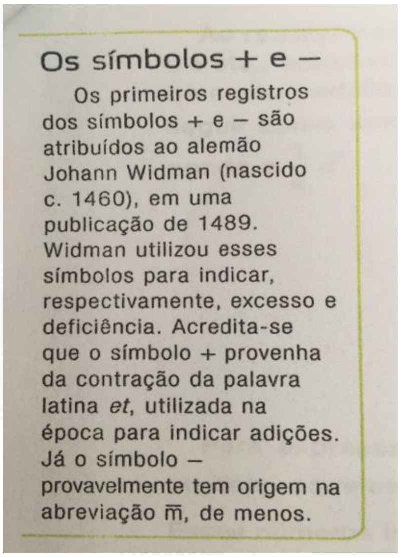
Figura 2 – Recorte do Livro D, página 22.

Em relação à reta numerada, nos livros A, B e D ela é introduzida já no conjunto ℕ, no entanto, sem qualquer explicação de por quê nem para quê, como, por exemplo, como ela é construída.

Quanto às operações e aos exercícios apresentados, percebemos que as obras A e D tratam da propriedade de fechamento da adição e da multiplicação, sendo tal propriedade utilizada como motivação para introduzir os inteiros (a subtração passa a ser fechada). Defendemos, no entanto, que, na escola, a propriedade de fechamento da subtração em ℤ ou da divisão (por número diferente de zero) em ℚ seja um “ganho” destes conjuntos e não a motivação para construí-los. Em nossa proposta, a construção de ℤ é motivada pela “existência de um referencial” e a de ℚ por expressão de algumas medidas que os naturais não dão conta, por serem problematizações mais concretas para o aluno.

3.1.2 NÚMEROS INTEIROS

Em relação à construção do conjunto dos números inteiros, destacamos que todos os autores analisados introduzem o conjunto por meio da subtração, apesar de um deles apresentar, no início, um quadro comentário no qual é sugerido um referencial (Figura 3). No entanto, este mesmo autor acaba apelando para a subtração no texto principal (Figura 4). A nomenclatura *oposto* é destacada apenas nos livros A e D. Enquanto em D, oposto é apresentado via adição e não via simetria em relação ao referencial (Figura 5), em A é apenas ilustrada essa ideia na reta numerada (Figura 6).



Os símbolos + e −

Os primeiros registros dos símbolos + e − são atribuídos ao alemão Johann Widman (nascido c. 1460), em uma publicação de 1489. Widman utilizou esses símbolos para indicar, respectivamente, excesso e deficiência. Acredita-se que o símbolo + provenha da contração da palavra latina *et*, utilizada na época para indicar adições. Já o símbolo − provavelmente tem origem na abreviação m̄, de menos.

Figura 3 – Recorte do Livro B, página 30.

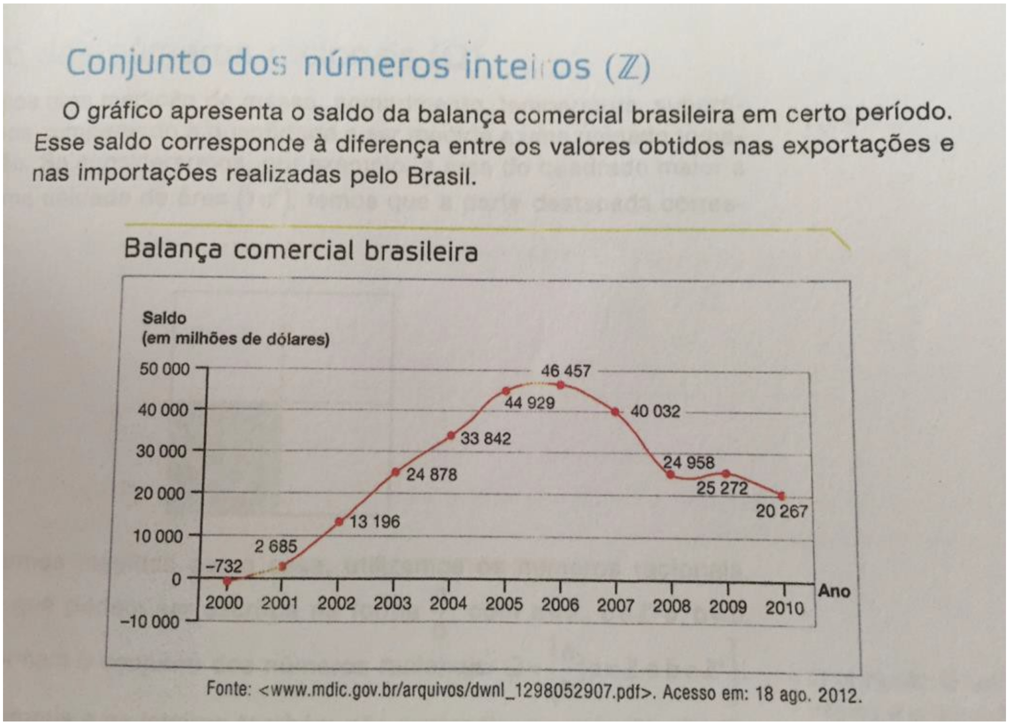
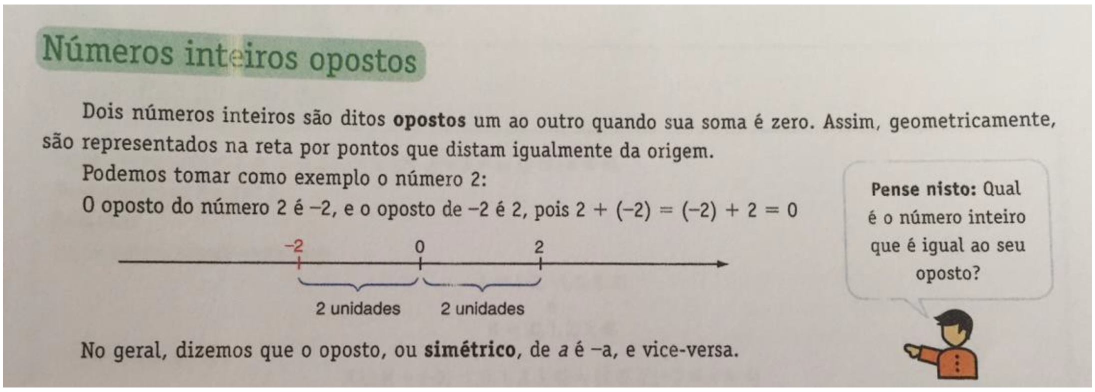


Figura 4 – Recorte do Livro B, página 30.



Números inteiros opostos

Dois números inteiros são ditos **opostos** um ao outro quando sua soma é zero. Assim, geometricamente, são representados na reta por pontos que distam igualmente da origem.

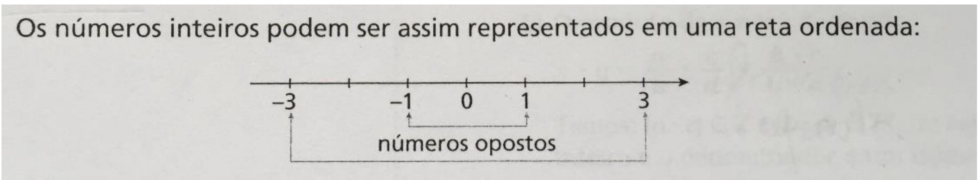
Podemos tomar como exemplo o número 2:

O oposto do número 2 é −2, e o oposto de −2 é 2, pois 2 + (−2) = (−2) + 2 = 0

No geral, dizemos que o oposto, ou **simétrico**, de *a* é −a, e vice-versa.

Pense nisto: Qual é o número inteiro que é igual ao seu oposto?

Figura 5 – Recorte do Livro D, página 23.



Os números inteiros podem ser assim representados em uma reta ordenada:

Figura 6 – Recorte do Livro A, página 43.

Quanto à descrição do conjunto, todos os autores apresentam o conjunto ℤ apenas “por extensão”, isto é, escrevendo ℤ = {... , -2, -1, 0, 1, 2, ...}. No entanto, cabe ressaltar que nenhum conjunto infinito pode ser caracterizado por extensão. Os livros que tratam de sucessor e antecessor (B e C), não chamam a atenção para o fato que, neste conjunto, diferentemente de ℕ, “todo elemento tem antecessor”.

Além disso, apenas nas obras A, B e D os números inteiros são representados na reta numerada. Em nenhum dos livros são revisadas as chamadas “regras de sinais” nas operações com inteiros, apesar de ser bem conhecido o fato de que os alunos fazem muita confusão sobre elas, e tampouco ressaltam sobre os três diferentes significados para o sinal “-”:

- fazendo parte da notação para um número negativo, como em – 2;
- – *m*, denotando o oposto do número inteiro *m* (não necessariamente negativo);
- *a* – *b* como a subtração do número inteiro *a* pelo número inteiro *b*.

Consideramos bastante adequada a explicitação de tais significados para um aluno do Ensino Médio, por acreditarmos que muitas confusões podem ser esclarecidas a partir deles. Por exemplo, se o enunciado de um exercício envolve o sinal “-” com um determinado significado mas o aluno o interpreta com outro, é bem provável que não compreenda a atividade.

Tal constatação evidencia uma grande (e grave) distância entre o que consideramos relevante para uma proposta de abordagem dos conjuntos numéricos e o que os autores das obras aqui mencionadas apresentam.

Na obra C, o autor aproveita os exercícios resolvidos para fazer uso dos conceitos de par e ímpar, demonstrando (ainda que algebricamente, apenas), por exemplo, que a soma de dois números inteiros pares é um número inteiro par, bem como o quadrado de um inteiro é par se, e somente se, esse número é par.

3.1.3 NÚMEROS RACIONAIS

Em dois dos quatro livros analisados (C e D), os autores motivam a construção do conjunto dos números racionais a partir da divisão. Na obra A encontramos o termo *razão* e o uso imediato da representação *a/b* para ela, isto é, a nosso ver, sugerindo uma divisão enquanto que apenas na obra B o autor motiva a construção por necessidade de expressar uma medida. Ressaltamos que o termo *razão* é muito mal explicado nos livros didáticos (RIPOLL et al., 2015). Percebe-se, assim, um desencontro no que diz respeito à motivação apresentada nos livros analisados para a expansão do universo numérico $\mathbb{Z}$. Tal fato pode ocasionar certa confusão na cabeça do aluno que tenha o hábito de consultar vários livros didáticos, uma vez que nenhum dos livros analisados aborda todas as manifestações dos números racionais, a saber, associados a uma relação parte-todo, a uma relação parte-parte ou a uma medida (GIRALDO et al., *preprint*).

Constatamos também, durante a análise, que a maneira como os autores colocam alguns conceitos e afirmações são inadequadas. Por exemplo, na obra A aparece a afirmação "o uso de números racionais é muito frequente na expressão de medidas em que o fator *precisão* é fundamental", ou seja, essa frase sugere que os racionais dão conta do problema teórico da medida, ou seja, que os números racionais são suficientes, por exemplo, para expressar a medida de qualquer segmento de reta. No entanto, sabe-se que isso não acontece. É o caso, por exemplo, da medida da diagonal de um quadrado de lado unitário.

Na obra C, o autor define número racional como todo aquele que "pode ser representado por uma razão entre dois números inteiros" e questionamos: por que "representado por" e não "resultado de" no caso de *razão* estar sendo interpretada como sinônimo de divisão ou "associado a" no caso de *razão* estar sendo interpretada como uma comparação entre quantidades inteiras? (RIPOLL et al., 2015).

Na obra D não aparece o termo “representação”, mas sim “quociente”. No entanto, nessa mesma obra encontramos: “dessa forma, podemos definir o conjunto ℚ como o conjunto de todas as frações p/q. Assim, um número é racional se pode ser escrito como uma fração p/q,...”. Perguntamos, afinal, número racional é “quociente”? É “fração”? Ou “pode ser representado por uma fração”?

Em relação à representação decimal e à representação fracionária dos números racionais, destacamos que na obra A sequer é mencionado como obter a representação decimal a partir da fracionária. Já na obra B, o autor apresenta, simplesmente, a “receita” de como obter a representação decimal, afirmando: “para expressar uma fração por meio de um número decimal, podemos dividir o numerador da fração pelo seu denominador”. Tal frase revela uma confusão entre número e sua representação, uma vez que o termo “decimal” refere-se apenas a uma outra forma de representar um número, e não a um outro número. Além disso, tal frase não leva em conta que, enquanto o universo numérico é só formado por números inteiros, a única divisão viável é a divisão euclidiana (ou divisão com resto).

Com relação às dízimas periódicas, na obra A encontramos a “receita de recuperação da fração geratriz” (Figura 7) seguida de um exemplo, enquanto que, nos demais livros, a recuperação da fração geratriz de uma dízima periódica é ilustrada através de exemplos suficientemente genéricos, isto é, de exemplos que envolvem um raciocínio que pode ser aplicado a qualquer outra dízima periódica.

Agora observe os passos de um procedimento algébrico para encontrar a fração geratriz de uma dízima periódica simples:

1º) Escrever uma equação igualando a dízima periódica a uma incógnita.

2º) Escrever outra equação, obtida da anterior, mediante a multiplicação de ambos os membros por uma potência de 10 de modo que a vírgula da nova dízima separe o primeiro período do segundo.

3º) Subtrair membro a membro ambas as equações.

Figura 7 – Recorte do Livro A, página 44.

Destacamos, no entanto, que em nenhuma das obras analisadas, essa recuperação da fração geratriz para dízimas periódicas é demonstrada. Apenas apresentam o uso de receitas que evidenciam que multiplicar por potências de dez faz com que o valor relativo dos algarismos seja alterado, sem qualquer preocupação com o fato de a representação decimal ter, no caso, infinitas casas decimais. Somente no livro D é informado, sem demonstração, em que casos uma fração tem representação decimal “infinita” e este é o único que destaca a problemática do período 9 em um quadro com bilhete ao professor

(Figura 8). A saber, para se obter a representação decimal de um número racional a partir da sua representação fracionária fazemos uso do chamado método das divisões sucessivas. No entanto, é possível mostrar que este método nunca origina período nove (RIPOLL et al., 2011, p. 161).

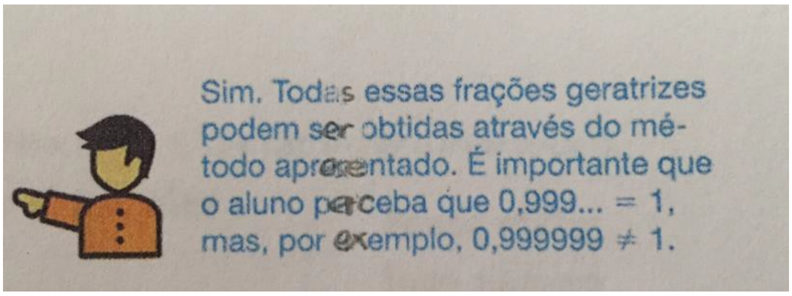


Figura 8 – Recorte do Livro D, página 27.

3.1.4 NÚMEROS IRRACIONAIS

Todos os livros analisados tratam dos números irracionais após os racionais, para só então definirem número real, parecendo que, antes da ampliação do universo numérico de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$, muito vão falar sobre tais números, o que não se confirma. Como motivação para a introdução dos números irracionais, todos os autores fazem uso do Teorema de Pitágoras em seu enunciado numérico (medida) (Figura 9), no lugar do enunciado geométrico, a saber, a área do quadrado de lado igual à hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados de lados iguais aos respectivos catetos.

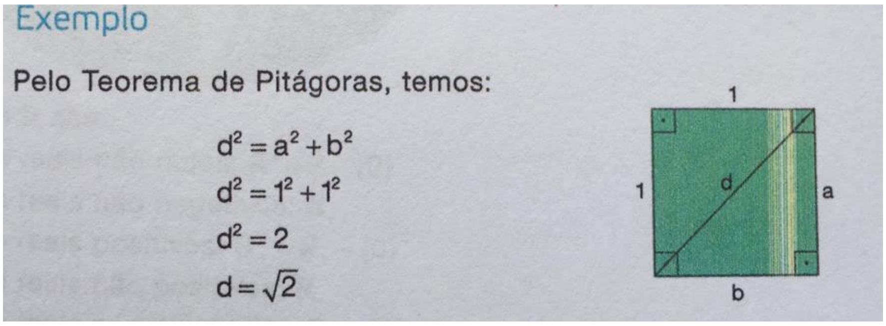


Figura 9 – Recorte do Livro B, página 36.

Este fato já revela uma incoerência: se estamos interessados em definir número irracional, como podemos fazer uso de um enunciado que já o envolve para tal definição? Repetimos aqui citação já mencionada no capítulo 2:

> Se o universo numérico dos alunos ainda é o conjunto dos racionais, nenhuma dessas duas caracterizações tem qualquer significado para eles. Não sabendo o que significa uma forma decimal infinita não periódica não se sabe o que é número irracional e vice-versa. Do mesmo modo, se a ideia escolar de número está associada, no seu significado mais amplo, apenas a uma razão de inteiros, os irracionais, não sendo razão de inteiros, não são números. (MOREIRA, 2004, p. 121)

No que diz respeito à demonstração (por redução ao absurdo) do fato que não existe número racional cujo quadrado é igual a 2, somente no livro A houve a preocupação de se explicar em que consiste provar uma afirmação por contradição. No entanto, menciona-se, nesse livro, que o procedimento de demonstração por redução ao absurdo consiste em formular uma proposição suposta verdadeira e que, a partir das leis da lógica, chega-se a uma proposição contrária. Perguntamos: o que significa uma proposição contrária? Além disso, na hipótese, supõe-se que os números inteiros *p* e *q* sejam primos entre si, destacando-se que a fração *p/q* é uma fração irredutível, informação ressaltada desnecessariamente.

Apontamos ainda uma preocupação excessiva por parte da maioria dos autores (três dos quatro), não só relativa ao universo numérico dos números reais, mas a todos os demais conjuntos, em apresentar notações especiais para alguns subconjuntos como, por exemplo, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Q}^*_-$, etc. Nossa opinião é que os autores deveriam preocupar-se com outros aspectos importantes e diferenciadores dos universos numéricos, tais como operações com números inteiros e reais enquanto optam por dar mais atenção às operações com intervalos.

Na obra C_1 é utilizada a notação de conjunto complementar, $\mathbb{Q}'$, para o conjunto dos irracionais, antes de ser definido o conjunto $\mathbb{R}$.

Sobre a representação geral dos conjuntos numéricos, todos fazem uso de um diagrama inadequado para ressaltar a relação de inclusão entre eles (Figuras 10 – 13):

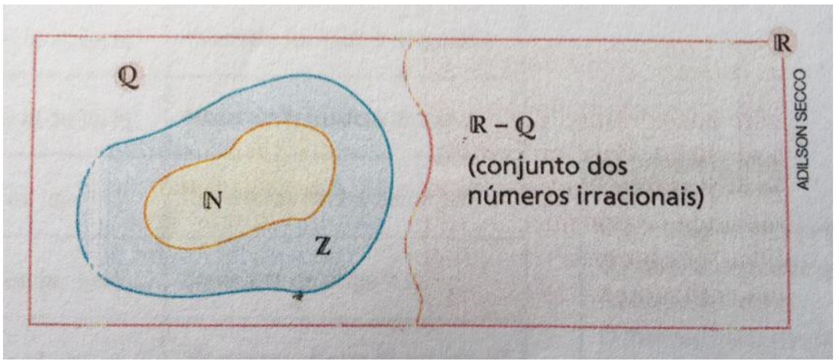


Figura 10 – Recorte do Livro A, página 48.

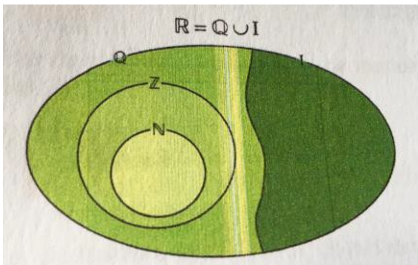


Figura 11 – Livro B, página 37.

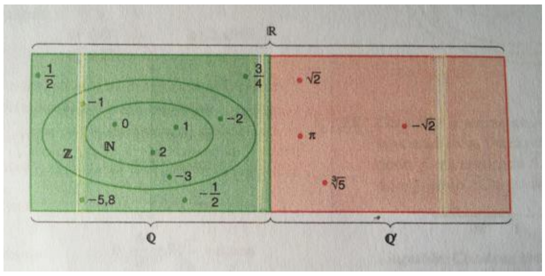


Figura 12 – Livro C, página 33.

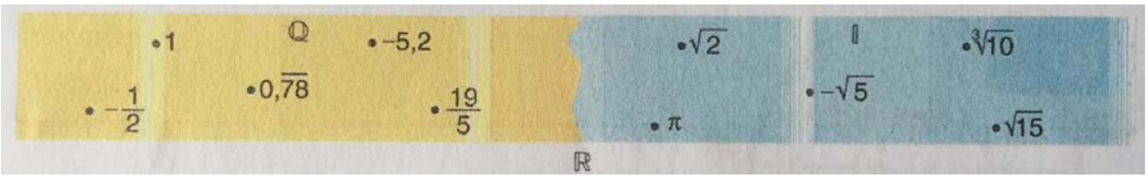


Figura 13 – Recorte do Livro D, página 30.

Os diagramas são apresentados nos livros para evidenciar a relação de inclusão entre os conjuntos até então estudados. Porém, a partir deles, é possível criar-se a errônea interpretação de que existem tantos números irracionais quanto racionais (Figuras 10, 12 e 13) ou de que existem mais números racionais do que irracionais (Figuras 11 e 12). Ressaltamos ainda que, se levarmos em conta a cardinalidade dos conjuntos, não há diagrama de Venn possível para representá-los.

3.1.5 QUADRO RESUMO

O seguinte quadro resume os problemas encontrados nos encaminhamentos dos livros didáticos analisados:

Conjunto numérico	Item criticado	Livro A	Livro B	Livro C	Livro D
$\mathbb{N}$	Não aborda sucessor e antecessor	X	X		X
	Não aborda números primos		X	X	
$\mathbb{Z}$	Construção dos números inteiros via subtração	X	X	X	X
	Não apresenta a ideia de oposição		X	X	
$\mathbb{Q}$	Construção de racionais via divisão			X	X
	Não aborda a representação decimal a partir da representação fracionária	X			
	Não aborda a problemática do	X	X	X	

	período 9				
	Não aborda aproximações	X	X	X	X
ℝ	Construção de irracionais via enunciado numérico do Teorema de Pitágoras e não via enunciado geométrico	X	X	X	X
	Uso de diagramas inadequados para retratar a relação de inclusão dos conjuntos numéricos	X	X	X	X
	Não aborda aproximações	X	X	X	X

3.2 UMA COMPARAÇÃO COM O LIVRO EXAME DE TEXTOS

Além da análise feita com os livros recentemente aprovados pelo PNLD (2015), tivemos acesso ao livro Exame de Textos (LIMA, 2001), editado por Elon Lages de Lima, no qual é feita uma análise de livros de matemática para o Ensino Médio. Dois dos autores cujas obras foram por nós analisadas (C e D), encontram-se também nesse exame de textos. Assim, destacamos, a seguir, algumas partes da análise feita nesse livro, na época, em relação a esses dois autores.

Quanto ao autor da obra D, é mencionado que ele apresenta números naturais, racionais e reais com ênfase na representação sobre um eixo, mas que não esclarece como localizar as frações na reta, uma questão considerada fundamental pelos revisores da obra, que apontam que seria importante explicar, por exemplo, que 17/3 = 5 + 2/3 e, assim, dividir o espaço entre o 5 e o 6 em três partes iguais e tomar o segundo ponto de divisão. Portanto, os revisores, na obra Exame de Textos, consideram que a representação dos números reais na reta ficou prejudicada. Questionam, por exemplo: dados os números 0,1563847 e 0,1563798561, qual é o maior? Afirmam que muitos alunos têm dúvida nesse tipo de questão e que o livro deveria esclarecer o que significa cada dígito de uma expressão decimal. Os revisores apontam também que a noção de aproximação, que consideram essencial, não é sequer citada no livro.

Cabe salientar que a noção de aproximação tampouco é tratada nos livros atuais.

Os revisores apontam ainda que o livro do mesmo autor da obra D não mostra por que a divisão continuada de dois inteiros tem como resultado um número com representação decimal finita ou (infinita) periódica. No entanto, é ali indicado como obter uma fração geratriz de uma dízima periódica. Já sobre o conjunto dos números irracionais, o livro não mostra que $\sqrt{2}$ não é racional, afirmando-se apenas que isso pode ser mostrado com “alguns recursos de aritmética” e que “seria muito bom que o livro tivesse feito isso, porque é muito simples, esclarecedor e educativo”. Ainda, o livro não diz claramente o que são os números irracionais e por que eles completam a reta. No entanto, mais adiante, já no capítulo de função exponencial, é possível ler “$\sqrt{3}$ como sabemos, é um número irracional”. Na verdade, isso foi decretado na página 1, sem nenhum explicação, portanto não vale aqui o argumento “como sabemos”.

No que diz respeito ao livro do mesmo autor da obra C, os revisores mencionam que “sobre o conceito de número, limita-se a algumas referências sobre a origem dos números naturais. Como ainda nesta introdução são apresentados os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, seria mais coerente se a introdução mencionasse a necessidade da ampliação progressiva do conceito de número e não deixasse isso para as seções posteriores (Seção 3 – Conjunto dos números inteiros e Seção 4 – O conjunto dos números racionais).”

O livro destaca as propriedades de fechamento em relação à soma e à multiplicação de números naturais, mas os revisores apontam “A terceira propriedade está mal formulada, pois mistura propriedades com definições. De fato, encontra-se no livro que ‘Se n é um número natural, então $n + 1$ é um número natural tal que:

I. n e $n + 1$ são chamados de números naturais consecutivos;
II. n é o antecessor de $n + 1$;
III. $n + 1$ é o sucessor de n.’ ”

Os revisores salientam que uma alternativa mais consistente com a estrutura conceitual dos números naturais seria dizer que dado um natural qualquer n, então o natural $n + 1$ é chamado seu sucessor e que o número 0 é o primeiro elemento do conjunto, ou seja, não é sucessor de nenhum número natural, já pensando em uma das principais características que diferem os inteiros dos naturais. Como ponto positivo, mencionam que no livro são apresentadas, nos exercícios resolvidos, situações em que devem ser demonstradas propriedades simples a respeito de número racionais, “estimulando assim alunos e professores a desenvolver a argumentação matemática.”

O conjunto dos números reais é construído, apropriadamente, na opinião dos revisores (e também na nossa), motivado pelo fato de que existem grandezas (comprimentos) cuja medida não pode ser expressa por números racionais. Para isso, ele menciona e logo depois demonstra que não existe número racional cujo quadrado é igual a 2. Além disso, “o autor define número irracional como ‘toda dízima não-periódica, ou seja, é todo número com infinitas casas decimais e não-periódico’. Esta definição está correta, mas, apresentada sem comentários, ela perde a oportunidade de enriquecer a compreensão do aluno sobre números racionais e irracionais.”

Não podemos deixar de nos manifestarmos criticamente com relação à frase acima retirada do livro Exame de Textos, discordando, em parte, dos revisores, ao afirmarem que a definição do autor está correta, sem apontarem, como antes, já feito por eles, uma confusão entre *número* e *representação do número*, dando margem à concepção errada de que qualquer número admite uma representação decimal, o que não é verdade, se levamos em conta os números complexos.

Os revisores apontam que em um exercício resolvido é mostrado como obter a fração geratriz de uma dízima periódica, mas que a discussão é incompleta. Além de a questão de recuperação da fração geratriz ser feita por meio de um único exemplo, afirmam não é dado nenhum argumento para justificar o fato de que, ao dividir dois inteiros, obtém-se um resultado que tem representação decimal finita ou (infinita) periódica. “Em seguida, sem relacionamento com o que foi exposto anteriormente, o livro afirma simplesmente que ‘Um número irracional não pode ser representado como uma razão entre dois inteiros’. Ao fazer isso, o autor simplesmente apresenta informações de maneiras desconexas, sem procurar relacioná-las nem mostrar que alguns fatos são decorrência lógica de outros.”

Os revisores elogiam a insistência do autor em mostrar como marcar números irracionais sobre a reta real. No entanto, na versão atual, por nós analisada, ele se resume a irracionais construtíveis geometricamente de modo que a localização é feita por meio de um compasso e não da representação decimal do número irracional.

Finalizamos esta seção observando que muito do que já foi criticado em 2001 segue acontecendo nos livros dos mesmos autores de 2015.

No capítulo que segue, apresentamos uma proposta que contempla o que julgamos essencial que o aluno saiba sobre números e que está de acordo com o embasamento teórico. Nesse nível de escolaridade, em particular, acreditamos que o professor consegue explorar alguns conceitos de diversas maneiras e até aprofundá-los em muitos aspectos.

4 - A PROPOSTA E SUA IMPLEMENTAÇÃO

A proposta apresentada a seguir partiu de um roteiro didático ao professor com questões disparadoras (denominadas “Atividades” para os alunos) que têm o objetivo de aproveitar os primeiros momentos do aluno no Ensino Médio para retomar e discutir muitas das dificuldades usuais que surgem durante o Ensino Fundamental no que diz respeito a números, ao mesmo tempo em que ele se aprofunda nas questões que oportunizam um maior esclarecimento sobre a ciência matemática. Para a elaboração dessas questões, buscamos embasamento teórico em FERREIRA (2013), RIPOLL et al. (2011) e GIRALDO et al. (*preprint*).

Trata-se de uma proposta de revisitação aos diferentes tipos de números que já foram, há algum tempo, trabalhados no Ensino Fundamental. Acreditamos que, neste nível, já com maior maturidade, o aluno seja capaz de entender melhor alguns conceitos, podendo, assim, explorá-los de diversas maneiras, aprimorando seu raciocínio matemático em questões sobre entes que já lhe são familiares, refletindo sobre características, propriedades e relevância de cada conjunto numérico e oportunizando uma maior compreensão sobre os números até aqui estudados, antes de ampliar o universo numérico para os complexos, além de oportunizar um maior esclarecimento sobre a ciência matemática. É em todos estes aspectos que ela se diferencia dos livros didáticos analisados no capítulo anterior.

No entanto, por ser o autor professor de turmas de terceiro ano do Ensino Médio, a proposta foi implementada neste nível com o objetivo de resgatar o que já haviam estudado sobre números e oportunizar aos alunos uma base consistente e sólida antes de ampliar o universo numérico para o conjunto dos números complexos – conteúdo que usualmente faz parte dessa série do Ensino Médio.

A implementação ocorreu em uma turma de 40 alunos durante 3 semanas que ocorreram em um período de sondagem quando se revisam e se exploram conteúdos de séries anteriores com o propósito de melhor prepará-los para o que será abordado no decorrer do ano. Foram 12 aulas consecutivas entre fevereiro e março que possibilitaram a execução do trabalho. A distribuição do tempo foi feita da seguinte maneira: resolução das atividades seguidos de aulas expositivas com reflexões sobre as questões apresentadas. Tanto números naturais como números inteiros foram tratados em duas aulas; números racionais foram trabalhados em quatro aulas e, finalmente, números irracionais e reais em quatro aulas.

Em seguida, ao final desse período, foi aplicada uma prova, na 13ª aula, para verificar o aprendizado dos alunos. Maiores detalhes sobre a metodologia empregada já foram dados ao final do capítulo 2.

4.1 ATIVIDADES IMPLEMENTADAS

A seguir apresentamos:

- na cor preta, o material que foi distribuído aos alunos e que consiste de alguns textos informativos e das atividades propostas.

Após cada atividade, acrescentamos:

- na cor azul, os objetivos, comentários e/ou expectativas de cada questão no que diz respeito às argumentações e/ou respostas dadas pelos alunos e que fizeram parte do planejamento de tal atividade;

- na cor vermelha, um breve relato do professor sobre o que, de fato, aconteceu durante a execução de tal atividade.

4.1.1 NÚMEROS NATURAIS

A matemática sempre representou uma atividade humana e, em todas as épocas, mesmo nas mais remotas, a ideia de contar sempre esteve presente. Um clássico exemplo da noção intuitiva de contagem é a correspondência entre ovelhas de um rebanho e pedrinhas contidas em pequenos sacos, ou marcas em um pedaço de osso ou de madeira, ou ainda através de nós em cordões.

Muitos anos ainda se passaram até que se iniciasse o desenvolvimento do conceito de número que, embora hoje nos pareça natural, foi lento e complexo, envolvendo diversas civilizações.

Este trabalho tem como propósito revisitar os conjuntos numéricos abordados no Ensino Fundamental buscando fornecer uma base sólida e consistente para cada um deles e motivar a necessidade de ampliar o universo numérico $\mathbb{R}$ para o conjunto dos números complexos (conteúdo de 3º ano do Ensino Médio). Assim, iremos trabalhar juntos, aprofundando noções trazidas desde o Ensino Fundamental. Por isso, de acordo com o que você já estudou sobre números e com o apoio desse material, solicita-se que você responda as próximas questões.

1) Quais os números que são utilizados para contagem?

Objetivo da questão: verificar se o zero e o um, para os alunos, são contemplados pela contagem, para, então, reafirmar, nas próximas atividades, o conjunto ℕ como o conjunto formado pelos números que são utilizados para contagem.

Expectativas: que os alunos respondam 0,1,2,3,4... ou 1,2,3,4... ou 2,3,4,5,...

Relato do professor: a maioria iniciou a partir do 1, justificando que quando contamos alguma coisa é porque temos um objeto concreto, por exemplo, mesas, lápis etc. Outros começaram a partir do zero justificando que lembravam que tinham aprendido o zero desde o início quando estudaram números naturais. Surpreendeu-me a resposta de dois alunos que iniciaram a partir do 2, justificando que o ato de contar só faz sentido quando existe mais de uma unidade de qualquer objeto em questão, se não, para que contar?
Outra surpresa: sete alunos incluíram números negativos e/ou não inteiros, porém, quando destaquei novamente que estávamos falando de números utilizados para contagem, ou seja, contar coisas ou objetos, eles então descartaram essa ideia.

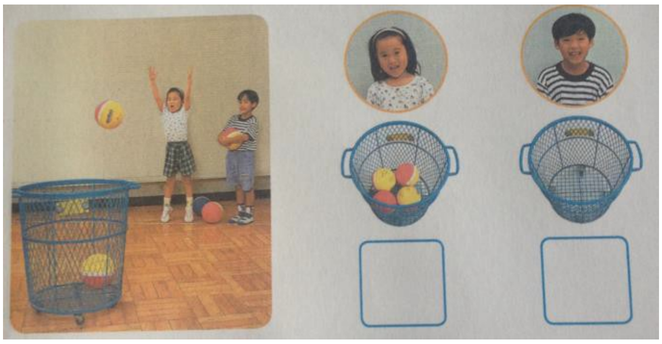
2) Como são chamados os números que são utilizados para contagem?

Objetivo da questão: reafirmar o conjunto ℕ como o conjunto formado pelos números que são utilizados para contagem.

Expectativas: os alunos não terão dificuldades em dar a resposta “Números Naturais”.

Relato do professor: após uma breve reflexão sobre a questão anterior, em que destaquei que seria interessante considerar o zero como número natural na escola básica mas que, nem por isso, as demais respostas eram incorretas, os alunos mencionaram “números naturais”, respondendo corretamente a questão.

3) Observe e interprete a figura abaixo.



Fonte: Matemáticas para la educación normal
(livro japonês traduzido para espanhol).
Masani Isoda e Tenoch Cedillo. Editora Pearson – 2012.

Objetivo da questão: abrir a discussão de por que o zero é considerado número natural na escola.

Ao professor: A situação mostrada na figura nos permite interpretar o seguinte: Duas crianças brincam de acertar bolas em um cesto. Uma delas acerta 4 bolas e a outra acerta nenhuma.
Sendo assim, é provável que uma criança que ainda está sendo alfabetizada considere o zero como resultado de uma contagem, portanto como um número natural.
Matematicamente, o zero como número natural é opcional. De fato, na axiomatização de Peano para os números naturais, exige-se apenas a existência de um primeiro elemento e de seus sucessivos sucessores, além do axioma da indução. Do ponto de vista histórico, o zero surgiu inicialmente como algarismo para representar ordens ausentes (ou vazias) em representações posicionais e, somente muito tempo depois, como número.

Expectativas: que os alunos, ao tentarem descrever a situação, cheguem ao zero como resultado de contagem, portanto como número natural.

Relato do professor: assim que os alunos se mostraram cientes na Atividade 2 de que estávamos falando de números naturais, passamos à próxima atividade. Com as ideias tratadas anteriormente, rapidamente responderam que o zero é um número natural no sentido de que uma criança consegue aceitar a ideia de zero como possibilidade de contagem, o mesmo ocorrendo para o 1, como esclarecimento para os alunos que afirmaram que só faz sentido contar a partir do 2.

É interessante notar como o processo histórico da conceituação de número natural assemelha-se à nossa própria construção desse conceito. Desde crianças, admitimos os números naturais como fruto do processo de contagem.

No entanto, entre os gregos da época de Euclides, números eram os que hoje escrevemos como 2, 3, 4, 5 etc., ou seja, os naturais maiores do que 1. Na época, o ato de contar só fazia sentido a partir da quantidade 2, senão, contar o quê?

Por isso, o próprio 1 era concebido como a unidade básica a partir da qual os números, as quantidades, eram formadas. O zero foi criado pelos hindus nos primeiros séculos da era cristã. A concepção do zero foi ignorada durante milênios mesmo por civilizações matematicamente importantes como a dos gregos e dos egípcios e surgiu, inicialmente, apenas como algarismo (para representar ordens ausentes ou vazias em representações posicionais) e somente muito tempo depois como número.

Ao Professor: maiores detalhes sobre as afirmações nos parágrafos anteriores podem ser encontrados em GIRALDO et al. (preprint).

Ainda sobre os números naturais, responda:

4) Todo número natural tem um sucessor? Qual a consequência disso?

Objetivo da questão: inicialmente, levar o aluno a concluir que o conjunto dos naturais é infinito. Posteriormente, disparar a discussão sobre a comparação dos conjuntos infinitos {números naturais} e {números naturais pares}.
Se necessário, pode-se argumentar sobre a infinitude do conjunto $\mathbb{N}$*, por exemplo, com um argumento da forma: "Pense no maior número que você conhece. A seguir responda: ele tem sucessor? Qual é? Pronto, você acabou de pensar em um número ainda maior de que aquele que você imaginava ser o maior de todos..."*
Como complementação e avaliação do completo entendimento do argumento, o professor pode lançar aos alunos a questão: "E o conjunto dos números pares é infinito? Como podemos argumentar na tentativa de comprovar este fato?"

Expectativas: É esperada uma estranheza por parte dos alunos por ocasião da discussão sobre cardinalidade, pois ela envolve um novo ponto de vista para eles.

Relato do Professor: sem grandes surpresas, não houve questionamentos em relação à questão de existência de sucessor. Os alunos responderam corretamente e constataram sozinhos a infinitude dos números naturais e, sem demora, constataram também a infinitude dos naturais pares fazendo o uso do mesmo argumento, agora somando 2 ao eventual maior par.
No entanto, quando perguntei se havia mais elementos no conjunto $\mathbb{N}$ *do que no conjunto dos números pares, todos responderam que sim justificando que os ímpares não estavam nesse segundo conjunto e, por isso, seria lógico que há menos elementos no conjunto dos números pares.*
A partir daí lancei a seguinte pergunta: como podemos comprovar esse fato?
Seria possível contar ou associar os números naturais pares com os números naturais?
E então induzi a ideia de que se pensarmos em um conjunto finito contido

propriamente em outro conjunto finito, então é claro que um tem mais elementos do que o outro. Por outro lado, se dois conjuntos finitos têm o mesmo número de elementos então existe uma correspondência um a um entre eles. Assim, chamei a atenção para que eles observassem o que acontece se aproveitamos esta ideia da correspondência um a um entre os conjuntos infinitos {números naturais} e {números naturais pares}. O que eu estava propondo era uma bijeção dos números pares com os naturais e segui o raciocínio para mostrar que no conjunto $\mathbb{N}$ temos tantos elementos quanto no conjunto dos números pares ou no conjunto dos números ímpares.

No entanto, surgiu a curiosidade do que significava a frase que afirma existir “infinitos diferentes” e então expliquei que o que o matemático Cantor percebeu é que não existe correspondência um a um entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números reais, o que comprova que existem, de fato, “infinitos diferentes”.

5) Podemos afirmar que todo número natural é sucessor de algum número natural?

Objetivo da questão: oportunizar a discussão de que esta é uma das diferenças entre os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, o que servirá de motivação para a construção, ao final deste trabalho de revisão e aprofundamento, de um quadro comparativo entre os conjuntos numéricos (do tipo “o que passa a valer e o que deixa de valer”, traduzindo-se na forma: em $\mathbb{N}$ existe o primeiro elemento, em $\mathbb{Z}$ não).

Relato do professor: alguns alunos (por volta de 8 que se manifestaram) disseram, instantaneamente, que sim, mas os outros falaram que não, justificando que o zero não é sucessor de nenhum número natural. Esperei então pela concordância desses 8 alunos. A seguir, expontaneamente apontaram como consequência que, em $\mathbb{N}$, existe um primeiro elemento.

6) Muitas vezes você já ouviu em matemática a palavra *fatorar*. O que é, em matemática, *fator*? E o que é *fatorar*?

Objetivo da questão: esclarecer ao aluno o que, de fato, significam esses termos. Fator é qualquer um dos termos utilizados na operação denominada multiplicação. Fatorar um número é, portanto, reescrevê-lo na forma de um produto.

Ao professor: as ideias de fatoração e fatoração em primos são imprescindíveis para provar a insuficiência aritmética de $\mathbb{Q}$, fato que motiva a expansão do universo numérico de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$. Tal insuficiência é tratada na Atividade 32, na qual se mostra que não existe número racional cujo quadrado é 2. Por isso esta e as próximas atividades sobre números naturais revisam tais ideias.

Expectativas: que os alunos respondam “fatorar é encontrar o mínimo múltiplo comum” (resposta já escutada antes pelo professor). Os alunos associam a imagem (abaixo) de um número com um risco grande do seu lado à ideia de encontrar o mmc entre dois ou mais números, (infelizmente *eles trazem esse vício do Ensino Fundamental).*

60	*2*
30	*2*
15	*3*
5	*5*
1	

Relato do professor: como imaginava, tive que interferir. Da minha experiência, percebo que os alunos trazem nomenclaturas do Ensino Fundamental sem pensarem no seu significado. Essa pergunta comprovou isso, quando muitos deles (ou quase todos) que se manifestaram declararam que já tinham ouvido falar em fatoração mas não conseguiam explicar, nem com suas próprias palavras, o seu significado.
Um aluno perguntou, como já era esperado, se "fatorar significava encontrar o mmc".
Expliquei o conceito de fatoração (como colocado acima) e ressaltei a esse aluno o que era encontrar o mínimo múltiplo comum entre números destacando que a palavra "comum" necessitava de mais de um número, ou seja, que só fazia sentido encontrar o mmc entre dois ou mais números.

7) Fatore o número 60 de três formas distintas.

Objetivo da questão: mostrar que fatorar um número equivale a escrevê-lo como um produto de quaisquer fatores, não necessariamente primos.
Aqui pretende-se também oportunizar as questões seguintes, que falam sobre números primos.

Expectativas: talvez não ocorra aos alunos envolverem o 1 como fator. Se isto acontecer, espera-se que a próxima atividade chame sua atenção para tal possibilidade.

Relato do professor: sem dificuldades, cada aluno fatorou o 60 de diversas maneiras e nenhum usou como fator o número 1 (o que permitiu que as respostas dadas às próximas questões fossem como havíamos esperado).

8) Existe alguma fatoração de 60 que envolva uma maior quantidade de fatores possível? Em caso afirmativo, qual?

Objetivo da questão: que os alunos reconheçam a resposta negativa pela possibilidade de se envolver o fator 1 e que a fatoração em primos é aquela que envolve o maior número de fatores diferentes de 1.

Expectativas: esperamos que surja o fator 1. Por ser o elemento neutro da multiplicação, espera-se que os alunos respondam então negativamente, argumentando que o 1 pode ser incluído infinitas vezes em uma fatoração. Caso não surja espontaneamente o fator 1, essa discussão deve ser lançada pelo professor.

Pretende-se dar continuidade à discussão, repetindo a pergunta, mas agora excluindo o 1 como fator.
Espera-se que apareça mais do que uma resposta, porque a multiplicação é comutativa. Cabe então ser ressaltado que todas elas envolvem exatamente os mesmos fatores, repetidos exatamente o mesmo número de vezes.

Relato do professor: aqui cinco alunos responderam que sim, sem qualquer argumentação, e um deles destacou em voz alta: "Sim, a que possui apenas fatores primos" (já respondendo a questão seguinte). Quanto à discussão sobre o fator 1 e à correção da resposta dada, resolvi adiá-las para as próximas atividades.

9) Caso a resposta da pergunta anterior seja afirmativa, o que você observa em tal fatoração?

Objetivo da questão: que os alunos reconheçam a fatoração em primos como aquela que envolve o maior número de fatores diferentes de 1.

Expectativas: que algum aluno comente que qualquer uma dessas fatorações que envolvem o maior número possível de fatores diferentes de 1 é a fatoração em primos.

Relato do professor: coloquei no quadro uma fatoração de 60 que envolvia três fatores iguais a 1 e repeti a pergunta: Acham mesmo que existe alguma fatoração que envolva um maior número de fatores?
Os alunos responderam que, se considerarmos o 1, que é elemento neutro da multiplicação, a resposta é negativa e, portanto, todas as respostas anteriores seriam diferentes.

10) Observe as duas definições escritas no quadro pelo professor e justifique se são afirmações equivalentes, isto é, se elas dizem, afinal, a mesma coisa.

Definição 1: número primo é aquele que só é divisível por 1 e por ele mesmo.

Definição 2: número primo é aquele que possui exatamente dois divisores.

Objetivo da questão: deixar clara a definição de número primo (aquela que garante que 1 não é número primo) e destacar a precisão requerida pela ciência matemática.

Expectativas: que algum aluno se dê conta que o 1 seria primo em uma e não o seria em outra. Caso isto não ocorra, então será perguntado: "pela Definição 1, o número 1 é primo? E pela Definição 2?"Caso algum aluno pergunte por que a Definição 2 é a escolhida, pretende-se apenas comentar sobre a conveniência de se poder falar na unicidade de fatoração em fatores primos que um número possui, a menos da ordem dos fatores (assunto não aprofundado na Educação Básica).

Relato do professor: a maioria dos alunos disse que sim, que eram frases

equivalentes e exatamente 5 dos 40 alunos destacaram que não. Em seguida, para essa minoria, perguntei por quê? E a resposta foi unânime: "O problema é o número 1", ou seja, destacaram que, pela primeira definição, o número 1 seria primo e, pela segunda, não.
De fato, com essa colocação, os demais se convenceram de que as definições não dizem, de fato, a mesma coisa e, portanto, a Definição 2 é a correta. Foi aí que aproveitei a oportunidade para destacar a precisão requerida pela ciência matemática. Nenhum aluno questionou sobre a escolha entre as definições.

4.1.2 NÚMEROS INTEIROS

Com a introdução dos negativos, os números ganham um novo atributo: a orientação. Assim, passam a representar uma quantidade orientada, isto é, uma quantidade acompanhada de um referencial.

11) O parágrafo acima faz referência a "orientação" e, para isso, é necessária a existência de um referencial. Que referencial seria esse? O que você entende quando se afirma que os números passam a representar uma quantidade orientada?

Objetivo da questão: introduzir a discussão sobre a concepção dos números negativos e que o aluno reconheça, no conjunto dos números inteiros, o zero como o referencial e ainda compreenda que, quando visualizados em uma reta numerada, de um lado deste referencial estarão os positivos e do outro lado os negativos. Ainda, que o aluno reconheça que os números inteiros obedecem à seguinte ordem amparada também pela reta numerada e que estende a ordem dos naturais:

- *todo número inteiro negativo é menor que zero.*
- *todo número inteiro positivo é maior que zero.*

E por isso, todo número inteiro negativo é menor do que qualquer número positivo.

Expectativas: que os alunos demorem a concordar com o texto introdutório, por tratar-se provavelmente de uma forma diferente daquela concebida no Ensino Fundamental.

Relato do professor: os alunos ficaram, inicialmente, confusos com a ideia de referencial, pois destacaram que nunca tinham ouvido falar nos números inteiros dessa maneira. No entanto, em relação ao referencial, mais da metade da turma de 40 alunos respondeu em voz alta que este seria o zero.
A partir daí, a expressão "orientação" fez sentido e alguns alunos destacaram que a "quantidade orientada" em questão refere-se aos números positivos e negativos.

12) Resolva e interprete o seguinte problema:

(Giovanni, 2010; FTD, adaptada): Se um mergulhador A está a 20m de profundidade e outro mergulhador B está a 15m, qual deles está a uma maior profundidade? Como você representaria essa situação fazendo uso de números inteiros?

Objetivo da questão: destacar que a ideia de número negativo está implícita na expressão "20m de profundidade" e ressaltar a ordem no conjunto ℤ.
Além disso, com o objetivo de aprofundar a discussão sobre números inteiros, pretende-se propor as seguintes questões:
12.1) a que profundidade pode estar um mergulhador que está entre os mergulhadores A e B?
12.2) O mergulhador A deve subir ou descer para alcançar o mergulhador B? Que distância? Como transformar/expressar isso em uma soma de números inteiros?
12.3) No mesmo desenho feito inicialmente, ilustre a posição de um mergulhador C, a 18m de profundidade e de um mergulhador D, a 28m de profundidade.

Expectativas: que os alunos sugiram, em algum momento da discussão, uma representação em uma reta vertical.
É claro que, pensando-se em profundidade, a resposta à questão é aquele que está a 20m de profundidade. No entanto, se pensarmos em associar números inteiros correspondentes a essas medidas, tomando o nível do mar como referencial, escreveríamos

$$-20 < -15.$$

Na expressão "20m de profundidade" a ideia de número negativo está implícita e o que está sendo questionado é a distância até o referencial, no caso, o nível do mar.

Relato do professor: na questão anterior, os alunos representaram o referencial e também os dois sentidos de orientação através de uma reta numerada horizontal. A partir desse problema, todos fizeram uso de uma reta vertical para melhor ilustrar tal situação. Sendo assim, destaquei que não precisamos, forçosamente, representar a reta numerada em posição horizontal, mas o que realmente importa é que se tenha claro o referencial que separa os números positivos dos números negativos.
Além disso, nessa questão, os alunos se mostraram bastante confortáveis com a ideia de que profundidade pode ser representada por números negativos e, assim, não apresentaram dificuldades em relação às questões 12.1, 12.2 e 12.3.

Hoje sabemos que, para representar os números negativos, fazemos uso do sinal "-", que também serve para associar o oposto/simétrico de um número natural em relação ao referencial (o zero). Sendo assim, responda:

13) O que significa -5? Qual o significado da expressão -(-2)?

Objetivo da questão: Verificar se o aluno absorveu a ideia de oposto em relação ao referencial.

Expectativas: -5 é o oposto do número natural 5 em relação ao referencial zero, por isso é chamado de número negativo -5. Assim, o sinal "-" do número -5 pode ser interpretado como "determinar, em relação ao referencial zero, o oposto de". Aqui chamaremos a atenção de que, na escola, um fato importante é que o aluno saiba comparar números negativos também pela representação desses números na reta numerada. Os alunos já conhecem a ordem definida para os números naturais e a representação dos naturais na reta numerada de maneira compatível com esta ordem. Assim, por exemplo, a desigualdade 2 < 5 fica evidenciada na reta numerada pelo fato de que 2 está à esquerda do 5. Esta ordem dos naturais não só é preservada para a comparação dos números inteiros positivos como é ampliada para os inteiros, mantendo-se esta mesma caracterização geométrica, isto é, a ordem dos inteiros amplia a ordem dos naturais e a representação dos inteiros na reta numerada continua compatível com ela.
Além disso, se pensarmos no sinal "-" como "determinar, em relação ao referencial zero, o oposto de", na expressão -(-2) estamos representando "o oposto do oposto" do número positivo +2 (ou simplesmente 2). Ou seja, -(-2) nada mais é do que o próprio número (positivo) 2.

Relato do professor: nenhum aluno aparentou não ter compreendido a questão, e alguns responderam em voz alta que –5 representa o oposto do número natural 5 em relação ao referencial zero. Além disso, sem nenhum problema, responderam que –(–2) representa o oposto do oposto do número natural 2 em relação ao referencial zero, concluindo que –(–2) é, então, o próprio número natural 2.

14) – *x* representa sempre um número negativo?

Objetivo da questão: alertar para o erro comum entre alunos da Escola Básica (pela experiência de um dos autores) de –x ser interpretado como um número negativo.

Expectativas: a partir da discussão originada pela questão anterior, espera-se que os alunos respondam "não", explicando que, se x for um número negativo, -x será positivo. Se x for um número positivo, -x será um número negativo.

Relato do professor: também conforme esperado, não houve dúvidas que se x for um número negativo, –x será positivo; e que, se x for um número positivo, então –x será um número negativo. Além disso, os alunos foram alertados de que é um erro comum –x ser interpretado como negativo, o que justifica a importância dessa questão.

15) É verdade que todo número inteiro possui um sucessor? É verdade que todo número inteiro é sucessor de alguém? Comparando o conjunto dos números inteiros com o conjunto dos números naturais, o que podemos dizer sobre sucessor?

Objetivos da questão: estabelecer a comparação entre os conjuntos dos números inteiros e dos números naturais, com relação à existência de sucessor e levar os alunos a concluírem que o conjunto dos números inteiros não possui um primeiro elemento no que diz respeito à ordem.
Além disso, pretende-se, aqui, lançar a questão: Existem, então, mais números inteiros do que naturais? Já que $\mathbb{Z}$ é "infinito para os dois lados"?
A partir da projeção do vídeo O Hotel de Hilbert (ver referências), pretende-se estimular os alunos a fazerem a seguinte adaptação: cada quarto n muda para o quarto 2n, e assim todos os naturais ocupam os quartos pares, provando, através de uma função bijetora

$$\{naturais\} \longrightarrow \{pares\},$$

que há tantos números naturais quanto números pares; ainda, sobrando todos os quartos ímpares para serem ocupados pelos negativos: o número "–n" (n natural) ocupa o quarto 2n–1, é possível também construir uma bijeção

$$\{naturais\} \longrightarrow \{inteiros\}.$$

Logo, temos argumentos para mostrar que, se pensarmos em correspondência biunívoca,

- *no conjunto {0,1,2,...} temos tantos elementos quanto no conjunto {1,2,3,...}*
- *no conjunto $\mathbb{N}$ temos tantos elementos quanto no conjunto dos números pares ou no conjunto dos números ímpares.*
- *no conjunto $\mathbb{Z}$ temos tantos elementos quanto no conjunto $\mathbb{N}$.*

Expectativas: que os alunos se reportem às Atividades 4 e 5, para refletirem sobre as questões "É verdade que todo número inteiro possui um sucessor?" e "É verdade que todo número inteiro é sucessor de alguém?" para, então, estabelecerem a comparação questionada.

Relato do professor: nessa questão, as perguntas em relação a sucessor foram respondidas corretamente. Os alunos destacaram que já aparecia uma diferença entre os números naturais e os números inteiros porque o zero não era sucessor de nenhum número natural mas é o sucessor do número inteiro
–1.
Quando lancei a pergunta se existiam, então, mais números inteiros do que naturais, todos os alunos que se manifestaram disseram que sim, pois existem inteiros não são naturais. Esta afirmação não está errada se pensarmos na relação de inclusão entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, que é *própria. Destaquei, então, que o fato de os naturais formarem um subconjunto próprio dos inteiros comprova que existem números do conjunto $\mathbb{Z}$ que não estão no subconjunto próprio $\mathbb{N}$ e, por isso, seriam conjuntos infinitos diferentes.*

15) É verdade que todo número inteiro possui um sucessor? É verdade que todo

todos se mostraram bastante interessados. Quando discutimos sobre o vídeo, um aluno manifestou-se, perguntando: "Então, quando se trata de um conjunto de infinitos números, sempre é possível acrescentar mais números sem mexer na quantidade de números do conjunto?" O que ele disse pode, matematicamente, ser associado à ideia de cardinalidade: não fica alterada a cardinalidade do conjunto. Aí expliquei que, quando contamos elementos de um conjunto finito, podemos associar seus elementos, um a um, com um subconjunto dos números naturais. Aproveitando essa ideia de correspondência um a um, para determinados conjuntos infinitos como o dos números inteiros, poderíamos pensar em associar os inteiros positivos com os naturais pares e os inteiros negativos com os naturais ímpares, o que acarretaria uma bijeção entre $\mathbb{Z}$ *e* $\mathbb{N}$. *Assim, teríamos a mesma quantidade de elementos nos dois conjuntos.*

Esta conclusão gerou visivelmente uma inquietação nos alunos: todos queriam saber o que era certo e o que era errado. Concluí com eles que as duas maneiras de pensar estão corretas, dependendo do que estamos tratando, da relação de inclusão ou da existência de uma correspondência biunívoca.

16) (Giovanni, 2010; FTD) Quando você estudou números inteiros no EF, deve ter passado por problemas que envolvem situações como a seguinte: O saldo de gols é calculado pela diferença entre o número de gols marcados e o número de gols sofridos. Observe a tabela e responda:

Time	Gols marcados	Gols sofridos
A	15	20
B	20	15
C	12	23
D	17	11

a) Qual o saldo de gols de cada time?

b) A quê você associa a expressão "diferença entre" apresentada no problema?

Objetivo da questão: destacar a presença dos números negativos no dia a dia.

Expectativas: que os alunos respondam no item (a) A = –5 , B = + 5 , C = –11 , D = + 6. Espera-se que, no ítem (b) o aluno associe a expressão à subtração de números naturais, mas necessitando ampliá-la para o conjunto dos números inteiros, porque às vezes o resultado é negativo (com uma interpretação adequada). Pretende-se aproveitar a oportunidade para reiterar que subtrair o número inteiro b do número inteiro a é o mesmo que *adicionar a ao oposto de b.*

Relato do professor: durante a implementação desta atividade, me dei conta de que a pergunta do item (b) não estava clara e objetiva para os alunos. Então reformulei-a para "A qual operação entre números inteiros você associa a expressão...".
Fora isso, a questão era só para destacar a naturalidade da presença dos números negativos e, por ser uma questão simples do EF, não causou dúvidas na sua execução.

17) Você provavelmente já ouviu ou até mesmo guardou na memória a seguinte "receita": *menos com menos dá mais*. Podemos afirmar que (–2) + (–3) = + 5 já que *menos com menos dá mais*?

Objetivo da questão: corrigir o que muitos alunos devem trazer como "macetes" do Ensino Fundamental mesmo sem ter claros seus significados.

Expectativas: discussões não irão faltar. Mais uma vez aproveitarei a oportunidade para destacar a precisão exigida pela ciência matemática, sobre a maneira como as coisas são ditas (ou não) matematicamente... A frase "a ordem dos fatores não altera o produto" é um outro exemplo que será mencionado, uma vez que os alunos já estudaram matrizes e saberão falar sobre a sua não aplicabilidade a este contexto.
Após deixar claro que a expressão "menos com menos dá mais" só se refere à multiplicação desses números inteiros (e, futuramente, racionais e reais) passamos à discussão das perguntas seguintes.

Relato do professor: dos que se manifestaram, 5 alunos responderam que sim, seria (–2) + (–3)= + 5 e os demais disseram que não, pois essa receita funciona apenas para multiplicação e divisão.
Em seguida fiz a pergunta: "Em relação às questões anteriores, como poderíamos interpretar, geometricamente, o resultado de (–2) + (–3)?" E um aluno respondeu: "Na questão da profundidade! Podemos interpretar que se descermos 2m de profundidade e depois mais 3m, chegaremos a uma profundidade de 5m e isso se representa por números negativos."
Além disso, destaquei, conforme planejado, que muitas vezes guardamos frases prontas e as carregamos sem pensar nos seus significados e abrangências, como por exemplo: a ordem dos fatores não altera o produto. Quando isso vale? Sempre? Somente para números? Quais? Ninguém soube dar uma resposta confiante de que, por exemplo, no produto de matrizes isso nem sempre ocorre.

18) Como você explicaria que 2 × (–3) = – 6?

Objetivo da questão: retomar a multiplicação de números inteiros, começando pelo caso em que se pode aproveitar a ideia de adição de parcelas iguais e, em seguida, evidenciando a necessidade da ampliação do significado de multiplicação (nem sempre é possível se restringir à "adição *de parcelas iguais") objetivando o significado da multiplicação em $\mathbb{Z}$ sem calcar somente nas "regras de sinais".*

Expectativas: que os alunos saibam explicar que $2 \times (-3) = (-3) + (-3) = -6$, ou seja, o número – 3 adicionado a ele mesmo duas vezes. Assim como $4 \times (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12$, imitando o que se faz em $\mathbb{N}$.
Em seguida, lançaremos a pergunta: E se trocássemos para $(-2) \times 3$, seria possível adaptar a ideia de repetição de parcelas iguais para este caso?
Após conscientizar os alunos da impossibilidade de se adaptar a multiplicação de naturais para este caso, e que, portanto, alguma nova definição deve ser adotada, anunciamos que, para que continuem válidas as propriedades da multiplicação de naturais para a multiplicação de inteiros, então devemos definir $(-2) \times 3$ como o oposto de 2×3. Assim, $(-2) \times 3 = -(2 \times 3) = -6$.
Assim, utilizando como propriedade a comutatividade da multiplicação dos inteiros, bem como as demais propriedades da multiplicação de inteiros, sai com consequência a questão abaixo.

Relato do professor: todas as manifestações foram que $2 \times (-3)$ significa
$$(-3) + (-3),$$
resultando, então, em –6, o que nos leva ao oposto do número 6.
No entanto, quando lancei a pergunta: "E se trocássemos para $(-2) \times 3$, seria possível adaptar a ideia de repetição de parcelas iguais para este caso?", os alunos destacaram que o resultado seria o mesmo mas não saberiam explicar por quê. Aí, também pelo tempo que estava acabando, expliquei que uma definição precisaria ser adotada para que as propriedades da multiplicação de naturais continuassem valendo para a multiplicação de inteiros e fiz isso conforme o planejamento acima.

19) E como você explicaria que $(-2) \times (-3) = 6$?

Objetivo da questão: concluir os casos da multiplicação de dois números inteiros.

Expectativas: Espera-se que o aluno defina $(-2) \times (-3)$ como o oposto, em relação ao referencial zero, de $2 \times (-3)$ que, por sua vez, é o oposto, em relação ao referencial zero, de 2×3. Ou seja, é o oposto do oposto de 2×3. Assim, $(-2) \times (-3) = -[2 \times (-3)] = -(-6) = 6$.

Relato do professor: nesta questão, aqueles que participaram da discussão sobre a definição anterior, destacaram que interpretariam $(-2) \text{ x } (-3) = 6$ como esperado, ou seja, como
$$(-2) \text{ x } (-3) = -[2 \text{ x } (-3)] = -(-6) = 6.$$

20) A partir dessas discussões, o que você pode dizer sobre a divisão de números inteiros?

Objetivo da questão: "montar" a divisão de inteiros com base no que foi feito para a multiplicação, isto é, considerando todas as combinações de *sinal entre dividendo e divisor, para o caso em que o resto da divisão é zero.*

Expectativas: que os alunos escrevam o raciocínio numa espécie de conclusão. Sem aquelas frases viciadas de "menos com menos", etc. reescrevendo as informações, mantendo a coerência e dizendo o que acontece quando dividimos dois inteiros positivos, um positivo por um negativo, etc.

Relato do professor: os alunos forneceram exemplos de divisões, destacando que as regras de sinais envolvidas na multiplicação permanecem porque a divisão é o inverso da multiplicação. Aí destaquei que estamos em $\mathbb{Z}$, ou seja, devemos tomar cuidado quando afirmamos que a divisão é a operação inversa da multiplicação em $\mathbb{Z}$ porque, em $\mathbb{Z}$, não podemos dividir qualquer inteiro por outro inteiro.
Além disso, concluí com os alunos que, quando a divisão estiver bem definida em $\mathbb{Z}$, podemos interpretar que $a:b = c$ como $c \times b = a$ e, portanto, como alguns já haviam afirmado, as regras de sinais na divisão são as mesmas da multiplicação.

4.1.3 NÚMEROS RACIONAIS

Dando continuidade ao estudo de conjuntos numéricos:

21) Dê exemplo(s) de uma questão(ões) associada(s) a uma situação do dia a dia cuja resolução não pode envolver apenas números inteiros.

Objetivo da questão: motivar a necessidade de ampliação do universo numérico $\mathbb{Z}$. Evidenciar o problema da medida, situação em que, em geral, os números naturais (inteiros positivos neste caso) não são suficientes para resolver.

Expectativas: aqui esperamos que apareçam os exemplos clássicos: a pizza, a barra de chocolate, uma receita, etc. A relação parte-parte não é esperada que apareça porque muitas vezes envolve o conceito de razão, que é um assunto pouco dominado pelos estudantes.
Nem todas as quantidades com as quais lidamos no dia a dia são representáveis por números inteiros. A partir da necessidade de medir empiricamente (isto é, de tentar determinar quantas vezes uma determinada quantidade cabe naquilo que se quer medir) se torna necessário exprimir quantidades não inteiras. Acreditamos que uma das primeiras dificuldades na compreensão e tratamento com números racionais reside no fato de, ao lidar com frações (e com números racionais), está sendo necessário não só envolver o conhecimento de uma unidade, mas também de uma subunidade que determina por (dupla) contagem uma fração correspondente ao número racional que se quer representar:

> *De fato, no caso de uma quantidade (aqui denotada por* u *e chamada de unidade) não caber um número inteiro de vezes em outra (aqui denotada por* a*), uma estratégia para obter a comparação entre ambas é subdividir a unidade* u*, com o objetivo de buscar uma subunidade* u'*, (isto é, tal que* u = q · u'*, para algum* q ϵ $\mathbb{N}$*), que caiba uma quantidade inteira* p *de vezes na outra quantidade a (isto é, tal que* a = p · u'*). Ou seja,* u *e* a *são múltiplos inteiros de uma unidade comum* u'*. Diz-se então que as grandezas* u *e* a *são comensuráveis. Neste caso particular, a medida ainda pode ser determinada por um processo de dupla contagem: basta contar quantas vezes* u' *cabe em* u *e quantas vezes* u´ *cabe em* a*. A comparação entre as grandezas pode, portanto, ser expressa por uma comparação entre números naturais, e se diz que o número racional* p/q *é a medida de* a*. Desta forma, o conceito de número racional (positivo) emerge da noção de medida, no caso particular de grandezas comensuráveis.(GIRALDO et al., preprint)*

Relato do professor: muitos alunos responderam esta questão em forma de situações envolvendo divisão, do tipo: "Tenho três pães e preciso dividi-los entre duas pessoas. Para isso, cada uma ficará com um pão e meio."
Todos as situações diziam respeito a divisão em partes iguais, ninguém trouxe situações envolvendo medida, isto é, situações em que se questiona "quantas vezes cabe?". Por isso, tive que interferir mais, dando o exemplo de que ninguém na sala de aula possuía 1 metro ou 2 metros de altura, mas sim valores intermediários. A partir daí a ideia de medida surgiu naturalmente.

22) Qual a relação entre fração e número racional? Fração e número racional são sinônimos?

Objetivo da questão: distinguir o conceito matemático de número racional de sua representação como fração.

Expectativas: aqui esperamos que os alunos escrevam o que de fato eles entendem por fração, mesmo que seja por meio de exemplos. Imaginamos que a maioria fará uso da relação do tipo parte/todo.
De acordo com os PCN, uma fração pode estar relacionada a vários significados: indicando uma medida, uma razão, uma relação do tipo parte/todo ou uma divisão.
Embutida nesta discussão, pretende-se encaixar a pergunta: "Seria $\mathbb{Q}$ *o conjunto das frações?"*
Espera-se que a discussão leve os alunos a concluírem que número racional é uma quantidade (a metade de um inteiro, por exemplo) que pode ser representada por diversas frações: 1/2 , 2/4, etc. .
Além disso, espera-se ter a oportunidade de encaixar nesta discussão a questão "O que queremos dizer ao escrevermos 1/2 = 2/4? Ou será que a igualdade 1/2 = 2/4 está errada?", esclarecendo que, de fato, por um lado, 1/2 e 2/4 representam o mesmo número racional, portanto são iguais. Por outro lado, se olharmos estas notações como as frações 1/2 e 2/4, elas não

são iguais, mas estão relacionadas, isto é, são frações equivalentes. Sendo assim, depende de como estamos olhando 1/2 e 2/4, como frações ou como números racionais.

Relato do professor: muitos alunos externaram que não haviam compreendido a primeira pergunta, o que me fez perceber que a pergunta estava um pouco vaga. Por isso, sugerimos a modificação para "Qual a relação entre fração e número racional? Por exemplo, fração e número racional são sinônimos?"
Querer que o aluno relacione fração com número racional nessa fase tão inicial de revisão de números racionais não é algo simples e imediato devido a um fato não evidenciado no Ensino Fundamental: tenho duas formas de representar os racionais, fazendo uso da representação fracionária e fazendo uso da representação decimal. Sendo assim, precisei explicar melhor, começando por pedir a eles que escrevessem o que de fato eles entendem por fração, mesmo que através de exemplos. Aí surgiram novamente ideias de problemas comuns: pizzas divididas, barras de chocolates, etc.
Quanto à segunda pergunta, 27 alunos responderam, oralmente, que fração e número racional são a mesma coisa e apenas 13 disseram que não. No entanto, esses 13 alunos não tinham uma justificativa, apenas confessaram que achavam que não era a mesma coisa e, inclusive, alguns destacaram que número racional era todo número "quebrado". De acordo com isso, evidenciei que, realmente, os alunos trazem do Ensino Fundamental ainda muitas dificuldades no que diz respeito a números racionais.

23) Observe as duas definições abaixo de frações equivalentes e decida se se tratam de frases equivalentes, isto é, se elas dizem, afinal, a mesma coisa.

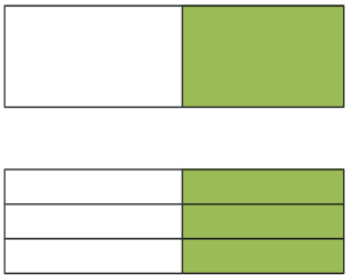
Definição 1: duas frações são ditas equivalentes quando representam a mesma quantidade.
Definição 2: duas frações são ditas equivalentes quando o numerador e o denominador de uma delas são multiplicados por um mesmo número inteiro e os resultados são, respectivamente, o numerador e o denominador da outra.

Objetivo da questão: novamente aqui enfatizar a precisão que a ciência matemática requer, definindo, de forma precisa, o que são frações equivalentes.

Expectativas: talvez alguns alunos tenham uma certa dificuldade de reconhecer a diferença entre as duas definições e, por isso, digam que são frases equivalentes. O que nos faz engatilhar a próxima questão.
Para deixar clara a diferença, encaixamos, caso necessário, a pergunta: "O que dizer, então, sobre as frações 4/6 e 14/21?" Essas duas frações são sim equivalentes e, no entanto, não existe um mesmo número inteiro que multiplique o numerador e o denominador de uma das frações que gere a outra.
Queremos também motivar a discussão "como justificar a equivalência

$$a/b = c/d \leftrightarrow ad = bc\ ?\text{''},$$

salientando ao aluno o método dedutivo de que faz uso a ciência matemática.
Inicialmente, para uma melhor compreensão, incluímos a ilustração abaixo, em que podemos notar que 1/2 e 3/6 representam uma mesma quantidade, simplesmente porque, ao subdividirmos cada metade do primeiro retângulo em três partes iguais, obtemos uma subdivisão do mesmo retângulo em 6 partes iguais. Daí, ao tomarmos três dessas partes, estamos tomando exatamente uma das metades do retângulo. Com isso, 1/2 e 3/6 representam a mesma quantidade.



Sem perda de generalidade, sendo d um número inteiro, nos convencemos (por uma generalização da ilustração acima) que a/b e ad/bd são frações equivalentes. Analogamente, sendo b um número inteiro, c/d e bc/bd são frações equivalentes.

Assim,
***(→)**: Se a/b é equivalente a c/d então ad/bd = bc/bd, de modo que ad = bc. (Pois os denominadores são iguais).*
***(←)**: Se ad é igual a bc então, dividindo por bd, temos frações iguais: ad/bd = bc/bd. No entanto, a primeira é equivalente a a/b e a segunda é equivalente a c/d, por isso a/b e c/d são frações equivalentes, portanto os números racionais por elas representados são iguais: a/b = c/d.*

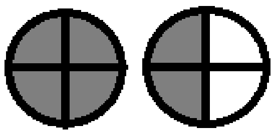
Relato do professor: posso afirmar que a intuição dos alunos nessa questão foi garantir que as definições não dizem a mesma coisa. No entanto, diferente da questão de definição de números primos no questionário anterior (onde, quem disse que não, afirmou que o que tinha de complicador entre uma e outra definição era o fato de 1 ser primo ou não), não conseguiram apontar o motivo da não equivalência.
Foi aí então que coloquei o desenho acima no quadro e perguntei como se representaria cada parte pintada em cada retângulo. Sem demora, eles responderam que na primeira tínhamos 1/2 e na segunda, 3/6 e que essas frações são, de fato, equivalentes pois representam a mesma quantidade. Aí aconteceu que um aluno disse: "mas então cabe a segunda definição também! Pois existe o número inteiro 3 que, quando multiplicado pelo numerador e pelo denominador de 1/2, obtém-se a fração equivalente 3/6."
Diante desse comentário, engatilhei a pergunta já planejada: "e quanto às frações 4/6 e 14/21?"
E todos se deram conta que essas podiam ser simplificadas em 2/3 mas que não existia nenhum número inteiro tal que quando multiplicado pelo numerador e pelo denominador de uma delas, gerasse a outra.
Assim, concluímos que frações equivalentes são aquelas que representam a mesma quantidade.
No que diz respeito à discussão sobre a equivalência:

$$a/b = c/d \leftrightarrow ad = bc,$$

decidi dispensá-la, tendo em vista que o tempo disponibilizado para a discussão de números racionais estava correndo e ainda havia muito a discutir sobre eles.

24) Relacione a segunda coluna de acordo com a primeira.

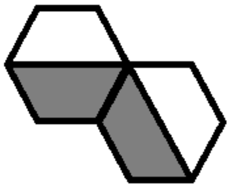
(A)



(B) 1,25

(C) 3/5 + 7/3

(D)



(   ) 1/2

(   ) 3/4

( ) 5/4

( ) 44/15

( ) 1

( ) 3/2

Objetivo da questão: conscientizar o aluno de que números racionais podem ser representados tanto na forma fracionária como na forma decimal, e que um número racional admite infinitas representações fracionárias. Além disso, ressaltar que, neste novo universo numérico, a escolha da unidade é arbitrária, o que possibilita que uma mesma quantidade possa ser representada por frações que não são equivalentes (como em (A)).

Expectativas: Os alunos terão dificuldades em justificar todas as alternativas da segunda coluna:

(*D*) 1/2 *(Unidade: 2 hexágonos; Subunidade: meio hexágono)*

(*A*) 3/4 *(Unidade: 2 círculos; Subunidade: meio círculo)*

(*B*) 5/4

(*C*) 44/15

(*D*) 1 *(Unidade: 1 hexágono; Subunidade: meio hexágono)*

(*A*) 3/2 *(Unidade: 1 círculo; Subunidade: meia circunferência)*

Relato do professor: nesta questão, os alunos responderam os itens B e C de maneira rápida. No entanto, custaram a entender que A e D podem ter mais de uma resposta e que estas não são frações equivalentes, pois justificaram nunca ter estudado isso dessa maneira. Por exemplo, a figura D, quando pensada tendo 2 hexágonos como o todo (unidade) e 1/4 como a parte do todo (subunidade), a quantidade hachurada representa duas partes das quatro, isto é, 2/4 que é equivalente a 1/2. Já quando pensamos em 1 hexágono como o todo (unidade) e 1/2 como subunidade, a parte hachurada representa 1 inteiro, ou seja, 2 partes das 2 divisões de cada hexágono (a unidade em questão).

Por isso, o que aconteceu, em aula, foi que acabei explicando e resolvendo este exemplo de D juntamente com os alunos e solicitei, em seguida, que fizessem o mesmo raciocínio para a figura A, ou seja, que justificassem as duas possíveis respostas apresentadas na segunda coluna.

Como recém tínhamos feito o exemplo, os alunos entenderam e se manifestaram justificando corretamente que a figura A poderia ser interpretada de forma que o todo fosse igual às duas circunferências e, assim, a parte hachurada seria 6 das 8 divisões e, por isso, 6/8 que é equivalente a 3/4. Por outro lado, se a unidade fosse uma circunferência, a parte hachurada seria um número maior que 1, ou seja, 6/4, nesse caso, que é equivalente a 3/2.

25) Calcule, registrando sua resolução, as seguintes somas:

i) 1/5 + 12,7
ii) 0,23 + 1/3
iii) $0,\overline{7}+0,\overline{3}$

Objetivo da questão: estimular o cálculo ora por representação decimal, ora por representação fracionária e destacar que ambas têm as suas vantagens e desvantagens.

Ao Professor: a discussão aqui proposta ficará mais relevante ainda na abordagem dos irracionais (ver Atividade 32).

Expectativas: espera-se que os alunos escolham a representação decimal para realizar as operações, pois pela experiência do professor, existe entre eles uma resistência a trabalhar com frações. Assim, o ítem (ii) deve gerar alguma discussão (pela presença de uma representação periódica) e o item (iii) deve gerar muita discussão (pela presença de duas representações periódicas). Pretende-se então encaixar nesta discussão a questão: é mais fácil somar números racionais na representação decimal ou na representação fracionária?

Espera-se que, com isso, os alunos percebam que, na forma fracionária, sempre estaremos lidando com um número finito de algarismos, enquanto que na forma decimal quase nunca temos esta garantia.

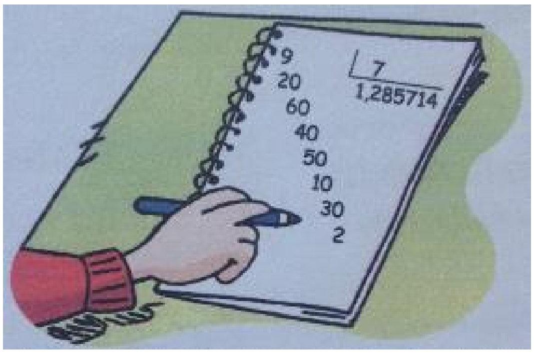
Relato do professor: resolvemos todos os itens, sem problemas, das duas formas: fazendo uso da representação decimal e da representação fracionária. Mas, durante a preparação para a aula, dei-me conta de que eu queria um exemplo que enfatizasse mais a reflexão sobre qual a melhor

escolha. Nos exemplos acima, como resolvemos das duas maneiras, a ideia da escolha em resolver na forma decimal ou na forma fracionária pode ser interpretada como pessoal: alguns preferem de um jeito e outros, de outro.
Aí acrescentei um item iv) E se fizéssemos 9/7 + 1/3?
Imediatamente eles utilizaram a representação fracionária. Sugeri então: "E se quiséssemos utilizar a representação decimal?" Fizemos a divisão de 9 por 7, encontrando a representação decimal de 9/7

$$1,\overline{285714}$$

para ser somada somar a $0,\overline{3}$. *Instantaneamente os alunos se deram conta de que talvez nem conseguissem realizar tal soma pois, por exemplo, o período das representações decimais de 9/7 e de 1/3 são muito diferentes, o que dificulta a operação.*
Concluí com a pergunta: "então o que é mais fácil? Trabalhar com fração ou com representação decimal para somar racionais?"
E todos eles responderam: "depende!"

26) (Centurión - 2012) Mário estava fazendo esta divisão:



Fonte: Matemática – teoria e contexto – 8º ano. Marília Centurión & José Jakubovic. Editora Saraiva – 2012.

Cansado, não quis mais continuar.

Marisa olhou e disse:

- Na verdade, você não precisa continuar! Assim, já dá para perceber qual é o resultado.

Marisa tem razão. Explique por que e depois apresente o quociente da divisão.

Objetivo da questão: destacar que, ao aparecer novamente o resto 2, já temos evidenciado o chamado período da dízima periódica, portanto também a representação decimal do quociente. Isto porque, a partir daqui os restos irão se repetir em sequência e, consequentemente, o quociente pode ser determinado.

Expectativas: Caso os alunos não saibam justificar, serão convidados a continuar a divisão até que percebam a periodicidade.
Pretende-se também encaixar, nesta discussão, as seguintes questões:
- Por que a representação decimal dos racionais pode ser infinita? Porque existem casos em que nunca chegamos a resto zero (como o dessa questão).
- Por que a representação decimal dos racionais, quando infinita, é certamente periódica? Porque os quocientes vão se repetir numa ordem fixada devido ao fato de os restos certamente se repetirem, uma vez que há

apenas um número finito de restos na divisão por b.
Além disso, aqui destacamos (e pretendemos chamar a atenção dos alunos) uma confusão entre número e representação do número no enunciado da questão. Afinal de contas, estamos defendendo que 9/7 representa um número racional. Portanto, o resultado – como a questão sugere – é 9/7. O que Mário cansou de fazer foi tentar determinar a representação decimal de 9/7, achando que, parando nesta etapa, estava com a resposta incompleta. Marisa chamou-lhe a atenção que o seu trabalho já estava completo, sua resposta já era precisa.

Relato do professor: tendo feito a questão anterior, os alunos souberam explicar que os restos se repetiriam e, portanto, os quocientes (que é o que nos interessa) também e, por isso, Marisa tinha razão na sua colocação.
Além disso, destaquei que a representação decimal dos racionais é certamente periódica porque os quocientes vão se repetir numa ordem fixada devido ao fato de os restos certamente se repetirem, uma vez que há apenas um número finito de restos na divisão por b e isso foi de fácil compreensão para os alunos.

27) João pensou em um número racional entre 5/6 e 27/8. Pedro, ao tentar adivinhá-lo, deu um palpite: “2” e recebeu de João a seguinte resposta:

i) Você errou por 2/7.

Essa informação nos permite precisar o número em que João pensou? Justifique sua resposta.

ii) E se a resposta tivesse sido “O erro que você cometeu é menor do que 2/7”, quantos números poderiam ser?

Objetivo da questão: revisar a ordem no conjunto $\mathbb{Q}$ e identificar intervalos que tornam uma estimativa aceitável (ou não), fazendo com que o aluno refine suas habilidades em cálculo e estime valores que devem ir além das relações “maior que”, “menor que” e concentrem-se na relação “estar entre”.

Justificativa para a proposta dessa questão: consideramos de muita importância o aluno estar em contato frequente com os conceitos de aproximação, de estimativa, de erro e de estimativa para o erro, pois, afinal, o tempo todo nos deparamos com aproximações e estimativas que aparecem de forma natural no nosso dia a dia. A presente questão trata de erro, e questões lidando com aproximação, estimativa e estimativa do erro aparecem entre as atividades relativas a números reais (por exemplo, Atividades 32, 33, 34, 37).

Expectativas: Para o ítem (i) espera-se que os alunos respondam “não”, pois o erro pode ser para mais ou para menos: 2 + 2/7 = 16/7 ou 2 – 2/7 = 12/7. Como ambos os valores 16/7 e 12/7 estão no intervalo escolhido por

João, o número 2 pode tanto ser uma aproximação por falta como por excesso para o número pensado por João. Pretende-se então encaixar a pergunta: "Se o palpite de Pedro tivesse sido 26/8, como seria sua resposta em (i)?", pois, em tal caso, a resposta é única, a saber,

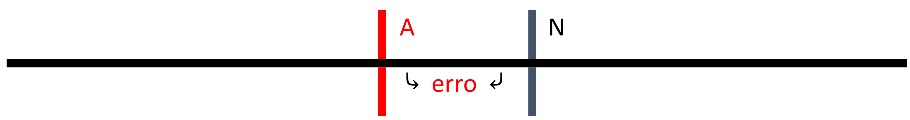
26/8 – 2/7 = 166/56.

Para o ítem (ii), espera-se que os alunos respondam "infinitos".

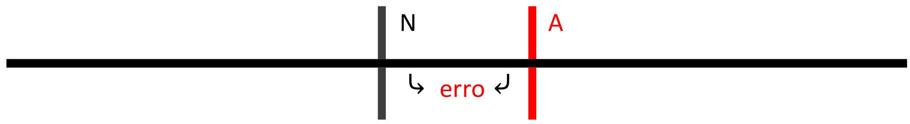
Relato do professor: desde o início, foram colocados os valores na reta numerada (foi natural para os alunos fazerem uso da reta numerada também para os números racionais). Essa questão foi bem detalhada porque um dos objetivos desse questionário é revisar a ordem nos racionais. Assim, fizemos uso de frações equivalentes para todos os casos, com o objetivo de facilitar a representação de tais números na reta numerada. Os alunos escreveram então, por exemplo, 27/8 (o extremo direito) na forma equivalente com denominador 56, ou seja, como 189/56, fazendo o mesmo para o racional 2/7 para compararem 2+2/7 com 27/8.
Com relação à pergunta "Se o palpite de Pedro tivesse sido 26/8, como seria sua resposta em (i)?", os alunos escreveram 26/8 + 2/7 = 198/56 e concluíram que tal número está fora do intervalo escolhido por João, pois é evidente que, se os denominadores são iguais, a comparação entre as frações pode ser diretamente feita pelos seus numeradores.

Toda vez que não fazemos uso do valor exato de um número N, estamos trabalhando com uma aproximação para este número (que vamos aqui denotar por A), e, portanto, gerando um erro (que aqui vamos denotar por e) que é medido pela diferença, em módulo, entre os números N e A:

$$e = |N - A|$$



ou



Ao professor: Na reta numerada, o aluno pode visualizar que o erro cometido é a distância entre o valor exato N e o valor aproximado A.

28) Quantos números racionais existem entre 5/6 e 27/8? E entre 1/3 e 2/3?

Objetivo da questão: destacar uma importante diferença entre os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$: Em $\mathbb{Q}$ existem infinitos números entre quaisquer dois racionais fixados, propriedade raramente explorada no Ensino Fundamental (Por isso colocada em destaque no quadro a seguir).

Expectativas: em seus argumentos, os alunos irão recorrer à representação decimal de tais números, pois acreditamos que terão mais facilidade em compará-los.

Relato do professor: nessa altura, os alunos já se convenceram de que, entre dois quaisquer racionais, existe uma infinidade de outros racionais. O que me surpreendeu e agradou foi que, ao perguntar quantos racionais existem entre 1/3 e 2/3, dois alunos destacaram, instantaneamente, que para encontrarmos números entre 1/3 e 2/3, poderíamos escrever tais números por meio de frações equivalentes com denominador maior. Avaliei positivamente tais colocações dos alunos como resultado de sua reflexão e acompanhamento do trabalho que vem sendo desenvolvido nessa revisitação. Sendo assim, questionei sobre essa tal propriedade dos números racionais e que seria destacada no quadro abaixo e, após a pergunta, 13 alunos que se manifestaram responderam dizendo que existem infinitos racionais entre dois racionais quaisquer. Convidei então os alunos a completarem o quadro a seguir com a frase "Entre dois quaisquer racionais distintos sempre existe uma infinidade de racionais."

Uma importante propriedade dos números racionais:

29) De acordo com as respostas anteriores e a propriedade evidenciada acima, como você faria para encontrar números racionais entre 1/3 e 2/3?

Objetivo da questão: fazer uso de frações equivalentes na explicitação dos infinitos racionais entre 1/3 e 2/3.

Expectativas: que os alunos, utilizando frações equivalentes, reescrevam, por exemplo, 1/3=10/30 e 2/3=20/30. Caso não façam uso da representação decimal, cabe incentivá-los a praticarem a comparação fazendo uso dela também.

Relato do professor: com os comentários feitos na questão anterior, pude perceber maior compreensão por parte dos alunos sobre a densidade do conjunto $\mathbb{Q}$.

30) Com a reflexão feita até aqui sobre números racionais, você consegue apontar situações em que é mais confortável utilizar a representação fracionária e situações em que é mais confortável utilizar a representação decimal?

Objetivo da questão: concluir a importância de ambas as representações, fracionária e decimal, dos números racionais.

Expectativas: que os alunos respondam algo do tipo: para termos uma *estimativa da quantidade embutida em um número racional, a representação decimal é mais confortável porque ela nos informa, de forma mais imediata, sobre a parte inteira (ou decimal ou centesimal, etc) do número (mesmo nos casos de período só formado por 9´s); além disso, em alguns casos, temos dificuldades para operar com números racionais com essa representação.*

Relato do professor: a questão funcionou como uma espécie de avaliação do conhecimento adquirido por parte dos alunos. As respostas dadas repetiram as conclusões da Atividade 25. Pela sua empolgação nas respostas dadas, pude perceber sua satisfação de terem compreendido alguns conceitos que se "arrastaram" de maneira equivocada ou desapercebida desde o Ensino Fundamental.

4.1.4 NÚMEROS REAIS

31) Dê exemplos de questões associadas a uma situação do dia a dia, cuja resolução não pode envolver apenas números racionais.

Objetivo da questão: explicitar a necessidade de ampliar o universo numérico dos racionais.

Expectativas: aqui é esperado que os alunos travem! É consenso que muito pouco eles conhecem de números irracionais (já foi mencionado que uma das principais críticas que fazemos é que os alunos de 9º ano passam quase um trimestre em torno de um capítulo intitulado "Cálculo com Radicais" aplicando uma série de receitas e regras e chegam ao Ensino Médio, muitas vezes, sem saber dizer, por exemplo, se $\sqrt{13}+3\sqrt{5}$ *é maior ou menor do que 10).*
Espera-se que, para muitos alunos, números reais será quase que um conteúdo novo... Se isso acontecer, será sugerido que se concentrem na diagonal de um quadrado de lado racional (por exemplo, igual a 1).
Caso alguém lembre do número π, aproveitaremos a oportunidade para relembrar a sua definição e para informar que a prova de sua irracionalidade exige conhecimentos que não fazem parte do currículo das escolas brasileiras (e provavelmente de nenhuma escola do mundo, uma vez que envolve conteúdos de cálculo diferencial e integral).

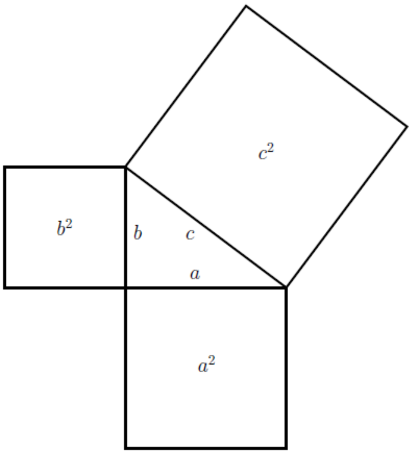
Ao professor: neste momento, poderá muito bem surgir em aula o seguinte encadeamento de ideias:
1. o conjunto dos números racionais é o conjunto das frações
2. fração é um quociente
3. π é o quociente entre o comprimento da circunferência e o diâmetro do círculo.
Por tudo isto, podemos deduzir que π é um número racional!
Confrontando com a notícia que trazem do Ensino Fundamental de que π é irracional, pretendo lançar a pergunta: Onde está o erro no argumento acima?

Relato do professor: alguns alunos manifestaram seu desconforto com esses números dizendo que é muito difícil pensar em um número irracional que seja usado no dia a dia, justificando que os racionais já dão conta de muitas coisas. O que veio na cabeça deles foi de fato o uso do π, mas só porque usavam no colégio para calcular área de circunferência e perímetro. Diante disso, como já esperado, parti para o problema de expressar a medida diagonal do quadrado de lado 1.

Além disso, o conflito proporcionado pelo encadeamento das ideias 1,2 e 3 acima foi rapidamente discutido e, mais uma vez, os alunos se deram conta de quão fundamental é a clareza das definições e dos conceitos para o eficaz entendimento das diversas ideias e questões matemáticas.

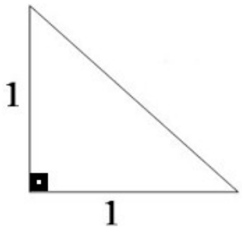
Observe o enunciado (geométrico) do teorema de Pitágoras:

A área do quadrado construído sobre a hipotenusa c é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos a e b.



Para refletir: podemos garantir que se a e b forem números racionais, então c também o será?

Ao professor: Para responder a esta pergunta, sugerimos ser considerado o triângulo retângulo abaixo:



Pelo teorema de Pitágoras, o quadrado sobre a hipotenusa deve ter área igual a 2. Fica motivada, assim, a próxima atividade.

32) Existe algum número inteiro cujo quadrado é 2? Por quê?

Objetivo da questão: demonstrar que $\sqrt{2}$ é irracional.

Expectativas: que os alunos respondam "não". Espera-se que, neste nível, *os alunos já saibam que a resposta é negativa, mas que não saibam argumentar. Pode-se então justificar da seguinte forma:*

$$1^2 = 1 \text{ e } 2^2 = 4$$

e sabemos que se a,b são naturais e a > b então $a^2 > b^2$. Portanto qualquer número maior do que 2 terá um quadrado maior do que 4.
E então perguntamos em seguida: existe algum número racional cujo quadrado é 2? Por quê? Como proceder para responder a esta pergunta?
Aqui pretendemos também lançar a discussão sobre por que esta pergunta é mais difícil que a anterior? De onde vem esta dificuldade? Precisamente devido à densidade dos racionais.

Sendo assim, questionaremos como eles fariam para tentar encontrar tal racional e esperamos o seguinte procedimento:
Procuramos um número racional d tal que $d^2 = 2$. Observe que $1{,}4 < d < 1{,}5$, pois $(1{,}4)^2 = 1{,}96$ e $(1{,}5)^2 = 2{,}25$.
Tomando um número racional qualquer entre 1,4 e 1,5, por exemplo, a média aritmética entre 1,4 e 1,5, que é 1,45, podemos estreitar o intervalo ao qual pertence o número racional d, observando que:

$$(1{,}45)^2 = 2{,}1025 \text{ e } 1{,}4 < d < 1{,}5 \rightarrow 1{,}4 < d < 1{,}45$$

Seguindo o procedimento,

$$(1{,}425)^2 = 2{,}030625 \text{ e } 1{,}4 < d < 1{,}45 \rightarrow 1{,}4 < d < 1{,}425$$

$$(1{,}4125)^2 = 1{,}99515625 \text{ e } 1{,}4 < d < 1{,}425 \rightarrow 1{,}4125 < d < 1{,}425$$

Sabemos que esta estratégia nunca nos levará a uma representação finita e nunca será possível afirmar que descobrimos um período para tal número.
Em outras palavras, podemos continuar esse processo infinitamente e nunca chegaremos a um número com representação decimal finita ou infinita periódica como o valor de d.
Assim, destacaremos que outra possível estratégia é fazer uso da representação fracionária de d, o que vai afinal reforçar uma vantagem da representação fracionária sobre a decimal. Os alunos serão então estimulados a desenvolverem, com o professor, o argumento a seguir.
Para provar que não existe número racional cujo quadrado é 2, vamos mostrar que não se pode escrever $\sqrt{2}$ na forma de fração.
Suponhamos, por absurdo, que existe um racional x = a/b tal que $x^2 = 2$. Como
$a^2 = (-a)^2$, podemos supor, sem perda de generalidade, que a > 0. Então,

$$2 = x^2 = a^2/b^2 \rightarrow 2b^2 = a^2.$$

Assim, o inteiro a^2 é par e, portanto, a também é par, pois, o quadrado de qualquer número inteiro ímpar é também ímpar. Assim, a é um inteiro da forma a = 2k, com k inteiro. Daí:

$$2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2 \rightarrow b^2 = 2k^2,$$

O que nos permite concluir que b^2 é par. Mas então b também é par, o que se torna uma contradição se partirmos de uma fração a/b irredutível.

Assim, pelo que acabamos de provar, constata-se que, para expressar a medida de qualquer segmento de reta, os racionais positivos não são suficientes e, para dar conta desse problema, surge a necessidade de admitir a existência de novos números. Para nomear esses novos números que, junto com os racionais positivos, dão conta do objetivo de expressar a medida de qualquer segmento de reta, em contraposição ao nome "racionais", escolheu-se o nome irracionais (positivos).

Além disso, estendemos o conjunto de tais números irracionais positivos com os seus respectivos simétricos, o que não é nenhuma novidade porque o procedimento repete o que foi feito para construir $\mathbb{Z}$.
Assim, todos os números estudados até agora formam o conjunto dos números reais.

Relato do professor: para a pergunta constante no questionário dos alunos, todos responderam não, justificando que sabiam que $1^2 = 1$ e $2^2 = 4$. Além disso, ampliamos o raciocínio chamando atenção para a grande quantidade de números inteiros que não são quadrados perfeitos. Em seguida, fiz a pergunta : 'E será que existe, então, algum número racional cujo quadrado é 2 ?' Aí um aluno respondeu : '1,4.' A partir daí, fui induzindo os alunos a buscar um número racional, na sua representação decimal, que quando elevado ao quadrado desse resultado igual a 2 com o objetivo de evidenciar a já mencionada insuficiência da representação decimal dos racionais.
Queríamos então um número racional d tal que $d^2 = 2$. E assim fomos calculando a partir dos palpites dos alunos :

$$(1,4)^2 = 1,96$$

$$(1,5)^2 = 2,25. \rightarrow 1,4 < d < 1,5$$

$$(1,45)^2 = 2,1025 \rightarrow 1,4 < d < 1,45$$

Seguindo o procedimento já previsto no planejamento,

$$(1,425)^2 = 2,030625 \text{ e } 1,4 < d < 1,45 \rightarrow 1,4 < d < 1,425$$

$$(1,4125)^2 = 1,99515625 \text{ e } 1,4 < d < 1,425 \rightarrow 1,4125 < d < 1,425$$

Os alunos foram se dando conta que teríamos um trabalho exaustivo, intuindo que podemos nunca chegar no valor desejado para d. Foi então que perguntei : 'Será que essa forma de representar um número racional é, de fato, a melhor para resolver problemas desse tipo ?' E um aluno respondeu imediatamente : 'Talvez não. Nem havia pensado em tentar na forma fracionária'.
No entanto, se deram conta de que também teriam problema para ir 'chutando' números racionais na representação fracionária. Assim, intervi propondo que supuséssemos um número racional genérico d da forma a/b, com a e b inteiros e $b \neq 0$, para tentar chegar de forma mais objetiva à existência (ou não) de d.
Por falta de tempo e de iniciativa dos alunos, a demonstração foi feita no quadro por mim em conjunto com os alunos:
Suponhamos, então, que exista $d = a/b$. Logo, $d^2 = a^2/b^2 = 2$. Assim, $a^2 = 2b^2$, o que nos garante que a^2 é par e, portanto, a também é par, isto é, a é inteiro da forma $a = 2k$, com k inteiro. Daí $2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2 \rightarrow b^2 = 2k^2$, ou seja de onde concluímos que b^2 é par e, consequentemente, b também é par. Contudo, podemos considerar a/b já na forma irredutível (o que pareceu razoável para os alunos) e, assim, seriam contraditórias as conclusões que a e b são pares com a hipótese de que a/b é irredutível.
A reação dos alunos, diante de uma prova por absurdo, foi bastante positiva, alguns inclusive ressaltaram que um tal argumento faz parte do nosso dia a dia, por exemplo, quando queremos mostrar que uma afirmação é válida e nos referimos a ela supondo o contrário e, assim, chegamos a uma contradição.

33) Na reta abaixo, marque o número $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ entre dois inteiros consecutivos. Destaque também os tais inteiros.

Objetivo da questão: destacar algo que deveria ser imediato no estudo de irracionais no EF: saber calcular aproximações racionais para os números reais e, a partir disso, localizar aproximadamente um número irracional na reta numerada.

Expectativas: os alunos vão responder $\sqrt{2} + \sqrt{3} \cong 1{,}4 + 1{,}7 = 3{,}1$ *logo está entre* 3 *e* 4*. Se isto ocorrer, pretende-se perguntar: que garantia temos que as próximas casas decimais destes irracionais não são tais que* $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *se torna um pouco maior do que* 4*?*

Assim, trabalharemos com a cercania: $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ *e* $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$*. Logo,*

$$1{,}4 + 1{,}7 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 1{,}5 + 1{,}8$$

$$3{,}1 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}3$$

Portanto, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *está, de fato, entre* 3 *e* 4*, mas se quisermos ser mais precisos, podemos dizer que está entre* $3{,}1$ *e* $3{,}3$*, aproveitando para destacar que, o que nos garante que estaremos sendo mais precisos, é o fato de estarmos diminuindo o tamanho do intervalo onde a aproximação se encontra.*

Ao professor: Sugere-se que sejam propostos outros exemplos de aproximações para números reais, tais como $\sqrt[3]{2}$ *, a fim de evitar que os números reais sejam encarados pelos alunos apenas como símbolos formais.*

Relato do professor: a partir dessa questão foi sendo desenvolvida uma maior familiaridade com os números irracionais. Alguns alunos destacaram nunca antes terem pensado a respeito deles, por exemplo, calcular aproximações racionais para os números irracionais e localizá-los na reta numerada.

Fizemos o que estava no planejamento, e fiquei com a impressão de que os alunos se familiarizaram rapidamente com a aproximação por cercania, pela rapidez com que executaram a atividade:

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

$$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$$

$$1{,}4 + 1{,}7 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 1{,}5 + 1{,}8$$

$$3{,}1 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}3$$

34) Sabendo apenas que 1,4 < $\sqrt{2}$ < 1,5 e 1,7 < $\sqrt{3}$ < 1,8, é possível determinar uma aproximação para $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ com uma casa decimal de precisão?

Objetivo da questão: evidenciar que uma precisão de décimos na representação decimal de cada parcela não gera uma precisão de décimos na representação decimal da soma.

Expectativas: espera-se que os alunos usem a resolução anterior e percebam que

$$3,1 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,3,$$

o que não determina uma aproximação com uma casa decimal de precisão, pois tal cercania não nos permite decidir se $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *é da forma* $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,1....$ *ou da forma* $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,2....$ *.*

Relato do professor: de acordo com a questão anterior, a resposta foi não. Sendo assim, os alunos se deram conta de que deveriam aumentar a precisão das aproximações escolhidas inicialmente para $\sqrt{2}$ *e* $\sqrt{3}$*. Usando então* $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ *e* $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$*, temos*

$$1,41 + 1,73 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 1,42 + 1,74$$
$$3,14 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,16,$$

o que nos fornece uma aproximação para $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *com precisão de uma casa decimal.*

35) Como você faria para melhorar a precisão encontrada na aproximação do número $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ na questão anterior?

Objetivo da questão: que os alunos percebam que, para melhorar a precisão de um resultado é necessário melhorar a precisão de cada um dos termos que o originaram, no caso, as parcelas da adição.

Expectativas: espera-se que os alunos respondam que, para isso, teríamos que ter uma maior precisão para as aproximações racionais de $\sqrt{2}$ *e de* $\sqrt{3}$*. Tentemos aproximações com duas casas decimais de precisão para eles.*

Usando então $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ *e* $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$*, temos*

$$1,41 + 1,73 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 1,42 + 1,74$$
$$3,14 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,16,$$

o que nos fornece uma aproximação para $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *com precisão de uma casa decimal.*

Relato do professor: notei que a pergunta já havia sido respondida mas destacamos mais uma vez: para uma melhor precisão, aumentamos a precisão das aproximações inicialmente consideradas para $\sqrt{2}$ *e* $\sqrt{3}$*.*
Além disso, destaquei, mais uma vez, que estávamos aproximando números

34) Sabendo apenas que 1,4 < 2 < 1,5 e 1,7 < 3 < 1,8, é possível determinar uma
lidar com as atividades práticas do dia-a-dia).

36) $\sqrt{13} + 3\sqrt{5}$ é maior ou menor que 10?

Objetivo da questão: ressaltar a possibilidade de fazer uso do mesmo processo, mesmo quando estão envolvidas mais de uma operação.

Expectativas: que os alunos façam sozinhos (se antes precisaram de ajuda) o processo utilizado anteriormente, uma vez que estamos partindo da hipótese de que este conteúdo é completa novidade para eles.
Ressaltando que estamos aqui admitindo válidas as propriedades das operações com números reais (ou seja, estamos aceitando a intuição sobre a validade das propriedades das operações bem como a compatibilidade da ordem com as operações de adição e multiplicação, por exemplo, a compatibilidade da ordem com a multiplicação, como na passagem $2 < \sqrt{5} < 2,5 \rightarrow 3\times2 < 3\times\sqrt{5} < 3\times2,5$*).*
Assim,

$$\sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16} \quad e \quad \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$$

$$3 < \sqrt{13} < 4 \quad e \quad 2 < \sqrt{5} < 3$$

portanto, $3\times2 < 3\times\sqrt{5} < 3\times2,5$

ou seja, $6 < 3\sqrt{5} < 7,5.$

Logo,

$$3,5 + 6 < \sqrt{13} + 3\sqrt{5} < 4 + 7,5$$

$$9,5 < \sqrt{13} + 3\sqrt{5} < 11,5$$

Note que com as aproximações feitas em (1), não é possível responder a pergunta. Então o que fazer?
Partir de melhores aproximações para $\sqrt{13}$ *e* $3\sqrt{5}$*. Por exemplo,*

$$(3,6)^2 = 12,96 \text{ e } (3,7)^2 = 13,69 \rightarrow 3,6 < \sqrt{3} < 3,7$$

$$(2,2)^2 = 4,84 \text{ e } (2,3)^2 = 5,29 \rightarrow 2,2 < \sqrt{5} < 2,3$$

$$3,6 < \sqrt{13} < 3,7 \quad e \quad 2,2 < \sqrt{5} < 2,3 \qquad (2)$$

portanto, $3.2,2 < 3\sqrt{5} < 3.2,3$

ou seja, $6,6 < 3\sqrt{5} < 6,9.$

Assim,

$$3,6 + 6,6 < \sqrt{13} + 3\sqrt{5} < 3,7 + 6,9$$

$$10,2 < \sqrt{13} + 3\sqrt{5} < 10,6.$$

As desigualdades obtidas em (2) já são suficientes para responder a questão.

Relato do professor: conforme esperado, os alunos fizeram uso, sozinhos, do processo utilizado anteriormente. Pediram, inclusive, tempo extra para que pudessem executar, individualmente, tal atividade.
Após alguns minutos, solicitei que um aluno viesse ao quadro para mostrar o raciocínio aos colegas. Essa dinâmica foi boa pois se alguns alunos estavam "perdendo o foco" achando a aula monótona, puderam ter uma "nova voz" falando do assunto.

37) Como aproximar o valor de 2^{π} ?

Objetivo da questão: conscientizar o aluno de que no primeiro ano tal número provavelmente fazia parte de seus estudos, mas provavelmente ele não sabia explicar seu significado naquele momento, nem sequer calcular sua parte inteira.

Justificativa para esta questão: Os alunos no primeiro ano estudam função exponencial, que tem para domínio todos os reais. Aqui a ideia é que o aluno não se assuste com esse tipo de número cujo significado ele não sabia explicar muito menos estimar pois, agora, já tendo passado pelas questões anteriores, certamente será natural que ele comece dizendo que se se pretende que as propriedades das operações com os racionais continuem válidas para os reais, então é natural que, uma vez que $3 < \pi < 4$, *tenhamos* $2^3 < 2^{\pi} < 2^4$, *ou seja,* $8 < 2^{\pi} < 16$.
Não pretendemos nos aprofundar na discussão de que a função exponencial mantém a monotonicidade mesmo para expoentes irracionais. Assim, pretendemos aceitar sem maiores discussões o argumento acima, e concluir: $2^{\pi} \in [8;16]$.
Mas, como $\pi = 3{,}14159...$ *Podem achar de maneira mais precisa que*

$$2^{3,1} < 2^{\pi} < 2^{3,2}$$
$$2^{31/10} < 2^{\pi} < 2^{32/10}$$
$$\sqrt[10]{2^{31}} < 2^{\pi} < \sqrt[10]{2^{32}}$$

Claro que o cálculo, a partir daqui, requer muito mais trabalho e aí, para finalizar, indicamos ao aluno que números reais são certamente elementares para a matemática como ciência. Mas, no nosso dia a dia, lidamos apenas com números inteiros e racionais.

Relato do professor: aqui dois alunos se manifestaram dizendo que

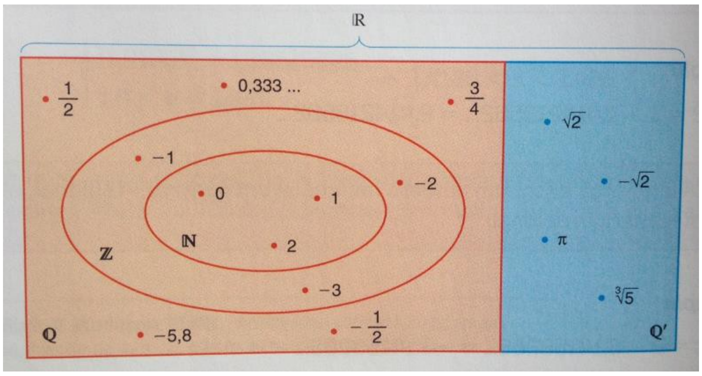
$$2^3 < 2^{\pi} < 2^4,$$

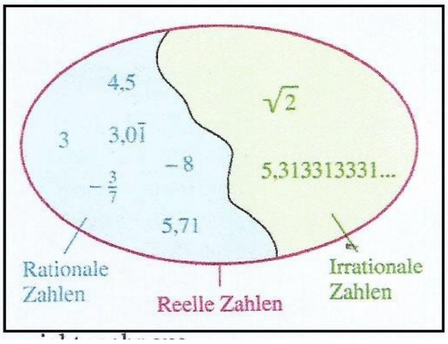
ou seja,

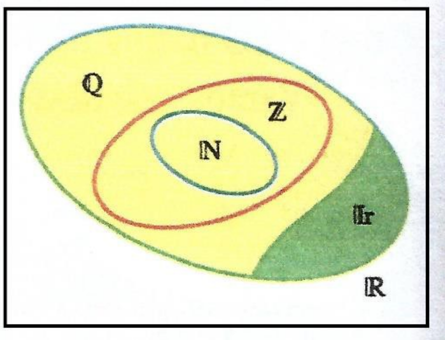
$$8 < 2^{\pi} < 16.$$

Mas destacaram que não conseguiriam fazer uma aproximação melhor e eu então concluí dizendo que essas aproximações podiam ocorrer por meio de expoentes racionais que eles já haviam estudado, mas tal cálculo realizado. Além disso, números reais são certamente necessários para a matemática como ciência, mas, no nosso dia-a-dia, lidamos apenas com números inteiros e racionais.

38) Comparando os conjuntos $\mathbb{Q}$ e I, o que poderia ser intuído a partir das figuras abaixo?

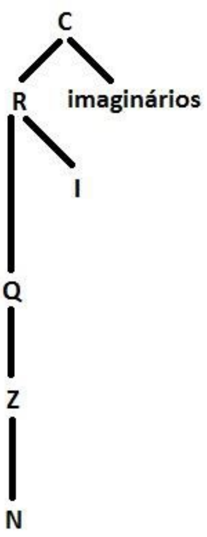






Objetivo da questão: chamar a atenção dos alunos para a inadequação da representação de tais conjuntos numéricos, todas encontradas em livros didáticos (brasileiros e estrangeiros).

Expectativas: que os alunos observem que, a partir das figuras, é possível intuir que existem mais números racionais do que irracionais. Daí serão instigados a refletir sobre a validade desta afirmação.
Como parte da proposta, utilizaremos o exemplo do dado com dez faces: utilizando um dado equilibrado de 10 faces numeradas de 0 a 9, lançamos o dado diversas vezes, anotando, a cada vez, o número que caiu virado para cima, formando uma lista de números. Se fizermos isso algumas vezes e, imaginando que pudéssemos repetir o processo infinitas vezes, atribuirmos essa lista à representação decimal de um número real entre 0 e 1, será que existe alguma chance de que, a partir de um certo momento, defina-se uma repetição nos resultados dos lançamentos de tal forma a formar-se uma dízima periódica e, portanto, construir-se, com os infinitos lançamentos, um número racional ?
Pretendemos aproveitar a oportunidade para confirmar o que anunciamos anteriormente: ℚ e ℝ são ambos densos, isto é, não faz sentido nesses conjuntos a noção de sucessor, porém um conjunto é enumerável e o outro não (destacamos que fica a critério do professor fazer uso desse conceito e nomenclatura em sala de aula). Isto fará parte do quadro comparativo final que pretendemos construir (ver última questão da Atividade Complementar do Produto Final).
Como poderíamos consertar então tais representações? Salientaremos que se levarmos em conta a cardinalidade dos conjuntos, não há diagrama de Venn possível para representá-los. Mas uma ideia para utilizar em sala de aula, que ilustra também a relação de ordem entre os conjuntos é a seguinte:



Ao professor: destacamos que toda representação tem suas limitações, mas o diagrama na forma de reticulado procura evidenciar apenas a relação de inclusão, e o fato de os conjuntos $\mathbb{Q}$ *e* I *não estarem no mesmo nível sugere que, talvez, ambos não tenham a mesma cardinalidade.*

Relato do professor: as primeiras manifestações dos alunos que surgiram destacaram que as figuras mostram que os racionais e os irracionais formam os números reais. Ninguém, inicialmente, falou sobre a quantidade representada em cada um dos conjuntos separadamente, por isso eu questionei : "O que essas figuras nos dizem em relação ao tamanho do conjunto dos racionais e dos irracionais ?" E aí, disseram que uma figura 'dividia' os reais em duas partes iguais : racionais e irracionais e que as outras figuras destacam que existem mais racionais que irracionais. Então eu perguntei : 'E alguma delas está correta ? Qual ?'
Dos 40 alunos, 22 levantaram a mão dizendo que existe a mesma quantidade de racionais e irracionais e 18 levantaram a mão dizendo que as figuras corretas são as que mostram uma quantidade de irracionais inferior à quantidade de racionais alegando que conheciam poucos números irracionais.
A partir daí, sugeri que pensassem na seguinte experiência : utilizando um dado com 10 faces numeradas de 0 a 9, lançamos o dado diversas vezes e cada vez anotamos o número que caiu virado para cima, formando uma lista de números. Se fizermos isso infinitas vezes e atribuirmos essa lista à representação decimal de um número real entre 0 e 1, será que existe alguma chance de que, a partir de um certo momento, defina-se uma repetição nos resultados dos lançamentos de tal forma a formar-se uma dízima periódica e, portanto, um número racional ?
A resposta é claramente negativa e os alunos compreenderam (de maneira intuitiva, por meio do exemplo do dado) que existem muito mais números irracionais que racionais, ou seja, que as ilustrações apresentadas, retiradas todas de livros didáticos, podem levar a uma concepção errada.

39) (FUVEST) Quaisquer que sejam o racional x e o irracional y, pode-se dizer que:

(A) $x \times y$ é irracional.

(B) $x \times y$ é racional.

(C) y^2 é irracional.

(D) $x + y$ é racional.

(E) $x + y$ é irracional.

Objetivo da questão: chamar a atenção dos alunos que discussões sobre números reais fazem parte também de concursos e/ou vestibulares.

Expectativas: Espera-se que alguns alunos respondam e argumentem:

(A) Falsa. Basta tomar $x = 0$. (Mas, se incluirmos a hipótese $x \neq 0$, a sentença é verdadeira.)

(B) Falsa. Basta tomar $x = 1$ e $y = \sqrt{2}$, uma vez que já provamos que é irracional.

(C) Falsa. Basta tomar $y = \sqrt{2}$, pois $(\sqrt{2})^2 = 4$

(D) Falsa. Basta tomar $x = 0$ e $y = \sqrt{2}$, uma vez que já provamos que é irracional.

(E) Verdadeira. Por absurdo, se $x + 2y = z$ fosse racional então z seria da forma c/d. Como x é racional, x é da forma a/b.

Assim, $x + 2y = z \rightarrow a/b + 2y = c/d \rightarrow 2y = c/d - a/b \rightarrow y = (bc-da)/2db$, ou seja, y seria racional. Contradição!

Relato do professor: questões de vestibular sempre despertam um interesse maior nos alunos que estão se preparando para tal. O que destaquei aqui foi justificar as erradas por meio de contraexemplos. A verdadeira, por falta de tempo, não foi demonstrada.

40) (FUVEST - 2014) O número real x, que satisfaz $3 < x < 4$, tem uma expansão decimal na qual os 999.999 primeiros dígitos à direita da vírgula são iguais a 3. Os 1.000.001 dígitos seguintes são iguais a 2 e os restantes são iguais a zero.

Considere as seguintes afirmações:

i) x é irracional.

ii) $x \geq 10/3$.

iii) $x \times 10^{2.000.000}$ é um inteiro par.

Então,

(A) nenhuma das três afirmações é verdadeira.

(B) apenas as afirmações I e II são verdadeiras.

(C) apenas a afirmação I é verdadeira.

(D) apenas a afirmação II é verdadeira.

(E) apenas a afirmação III é verdadeira.

Objetivo da questão: chamar a atenção dos alunos que discussões sobre números reais fazem parte também de concursos e/ou vestibulares.

Expectativas Espera-se que alguns alunos respondam "alternativa E" e argumentem:
Pelo enunciado, o número é da forma:

$$x = 3,\underbrace{333\ldots3}_{10^6-1}\underbrace{222\ldots2}_{10^6+1}0000\ldots = 3,\underbrace{333\ldots3222\ldots2}_{2\times10^6\ algarismos}\overline{0}$$

i) (FALSA) Como o número apresenta um número finito de algarismos não nulos à direita da vírgula, ele é um número racional.
ii) (FALSA) $10/3 = 3{,}333\ldots = 3{,}\overline{3}$ *(dízima periódica). É possível observar que* $3{,}333\ldots > 3{,}333\ldots322\ldots2 = x$.
iii) (VERDADEIRA) $x.10^{2.000.000} = 3{,}3333\ldots322\ldots22 \times 10^{2.000.000} = 3333\ldots222\ldots22$ *que é um inteiro par. Basta contar o número de algarismos não nulos na parte decimal de x.*

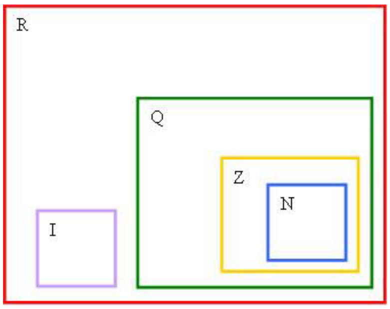
Relato do professor: esta é uma questão muito boa para concluir a revisão sobre números, pois fala em irracional, racional e inteiro par (ou natural). Além disso, os alunos não pensam em números como o mencionado nesta questão e que são muito distantes da sua realidade mas que, no entanto, podem ser bem compreendidos quando se tem um certo conhecimento sobre os conjuntos numéricos e foi assim que aconteceu.
Os alunos destacaram que se o número possui representação decimal com um número finito de casas decimais não nulas, então ele é racional, sem importar o número de casas que ele tenha, com isso descartaram a afirmação I. Quanto à II, a representação decimal para 10/3 os ajudou a comparar o 3,3333... com o 3,333...3332222...2222, isto é, 10/3 sempre tem 3 nas suas infinitas casas decimais e x tem um número finito de 3 nas suas casas decimais e a próxima é um algarismo menor do que 3. Em relação à última afirmação, um aluno destacou que $10^{2.000.000}$ *tem 2 milhões de zeros e isso faz com que* $x \times 10^{2.000.000}$ *seja inteiro, ou seja, "a vírgula some" (nas palavras do aluno) e termina em 2, logo, é par.*

4.2 ATIVIDADE DE AVALIAÇÃO

A seguir apresentamos a avaliação final que foi aplicada aos alunos no formato de prova, com o objetivo de verificar o aprendizado após o estudo feito através dos questionários.

Além das perguntas, mostramos o desempenho dos 39 alunos que fizeram a avaliação dizendo quantos responderam cada questão de forma Totalmente Correta (TC), Parcialmente Correta (PC) ou Incorreta (I).

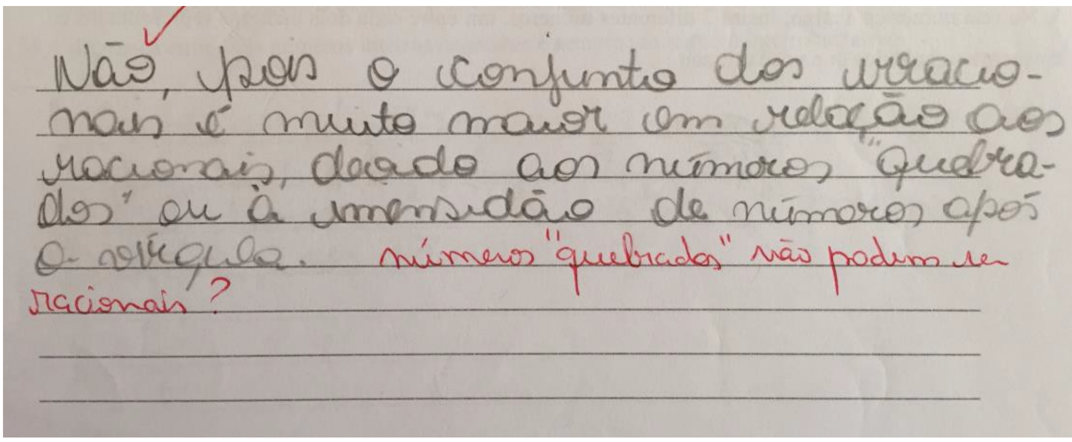
Questão 1) Sobre a representação dos conjuntos numéricos, o que você pode observar na figura abaixo? Seria essa uma representação razoável para resumir esquematicamente esses conjuntos? Justifique.



TC: 0
PC: 34
I: 5

Destacamos que nenhum aluno acertou totalmente a questão pois não se deram conta que, no esquema, há um espaço sem nenhum número, ou seja, está sobrando uma região dentro dos reais que não corresponde nem a números racionais, nem a números irracionais. Aqueles que acertaram parcialmente salientaram que a representação sugere que o conjunto I é menor do que o conjunto $\mathbb{Q}$.

Na figura a seguir tem-se um exemplo de resolução parcialmente correta:

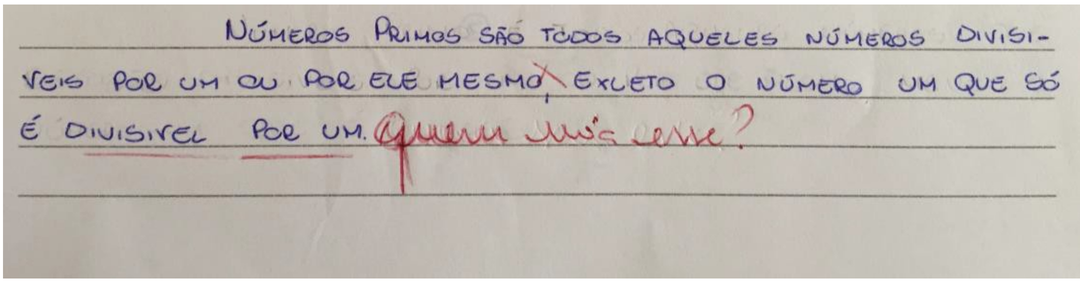

Não, pois o conjunto dos irracionais é muito maior em relação aos racionais, dado aos números "quebrados" ou à imensidão de números após a vírgula. números "quebrados" não podem ser racionais?

Questão 2) Qual a definição de número primo ?

TC: 17
PC: 6
I: 16

Os 16 que erraram insistiram em dizer que um "Número primo é aquele que só é divisível por 1 e por ele mesmo". Aqueles que acertaram parcialmente evidenciaram saber que 1 não é primo, mas não conseguiram redigir a definição.

Na figura a seguir tem-se um exemplo de resolução parcialmente correta:

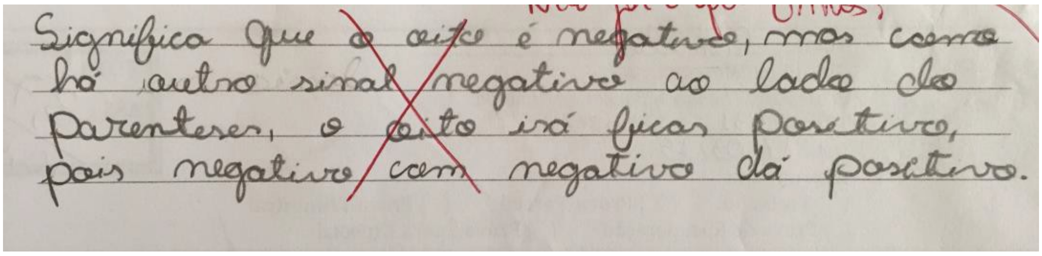

NÚMEROS PRIMOS SÃO TODOS AQUELES NÚMEROS DIVISI-VEIS POR UM OU POR ELE MESMO, EXCETO O NÚMERO UM QUE SÓ É DIVISIVEL POR UM.

Questão 3) Qual o significado da expressão – (– 8) ?

TC: 9
PC: 23
I: 7

Nessa questão, os que acertaram parcialmente esqueceram de destacar o referencial, dizendo apenas que a expressão representava o oposto do oposto do número 8, mas não em relação a quem. (Em sala de aula, destaquei que o oposto de 12 em relação a 10 não é – 12.)

Na figura a seguir tem-se um exemplo de resolução incorreta:

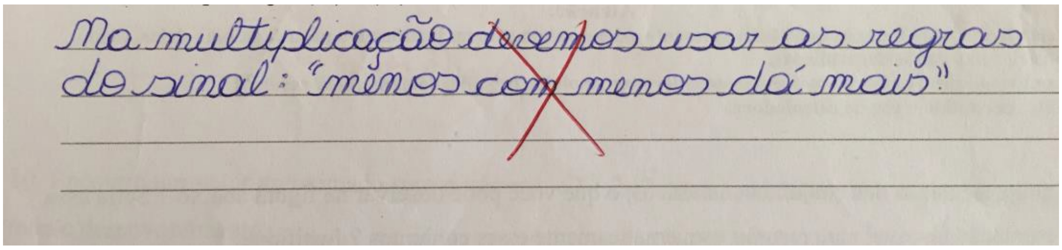

Significa que o oito é negativo, mas como há outro sinal negativo ao lado do parenteses, o oito irá ficar positivo, pois negativo com negativo dá positivo.

Questão 4) Como você explica que (– 3) × (– 4) = 12 ?

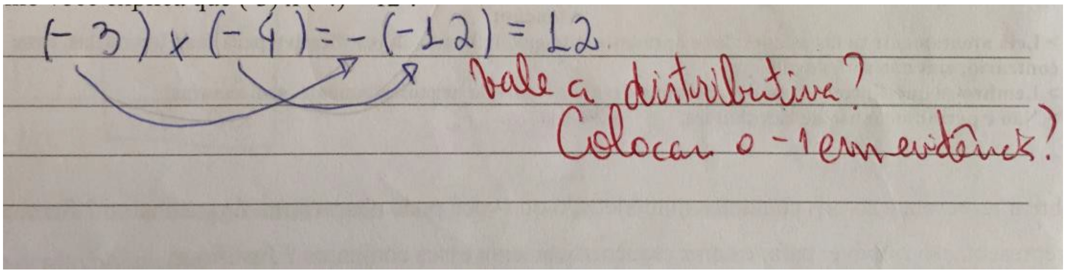
TC: 7
PC: 8
I: 24

Aqui se nota a dificuldade de compreensão e abstração do conceito que a chamada "regra de sinais" não explica. Em diversos momentos da vida escolar, o aluno assume como verdadeira uma regra sem sequer saber o motivo.

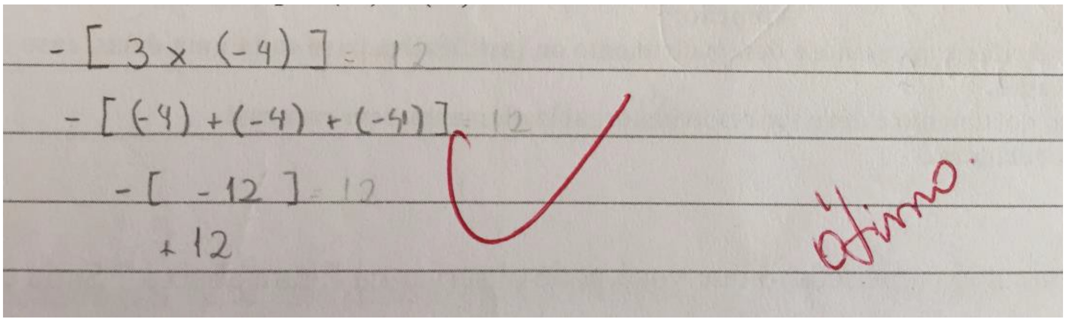
Na figura a seguir tem-se um exemplo de resolução incorreta:



Na figura a seguir tem-se um exemplo de resolução parcialmente correta:



Na figura a seguir tem-se um exemplo de resolução totalmente correta:

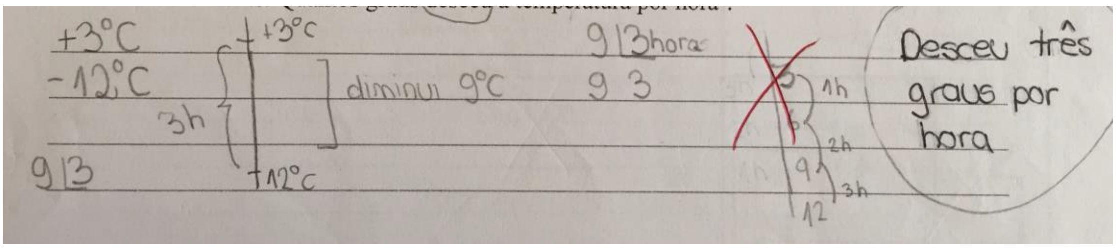


Questão 5) Um aparelho foi programado para baixar a temperatura de um certo ambiente, de forma constante, de +3ºC a – 12ºC em 3 horas. Quantos graus desceu a temperatura por hora ?

TC: 25
PC: 8
I: 6

Sem grandes problemas nessa questão. Os que erraram fizeram confusões com conceitos básicos de adição e subtração de inteiros.

Na figura a seguir tem-se um exemplo de resolução incorreta:



Questão 6) João pensou em um número racional entre 7/6 e 23/8. Pedro ao tentar adivinhá-lo deu um palpite: “2” e recebeu de João a seguinte resposta:
“Você errou por 2/7.”

Essa informação nos permite precisar o número em que João pensou? Justifique sua resposta.

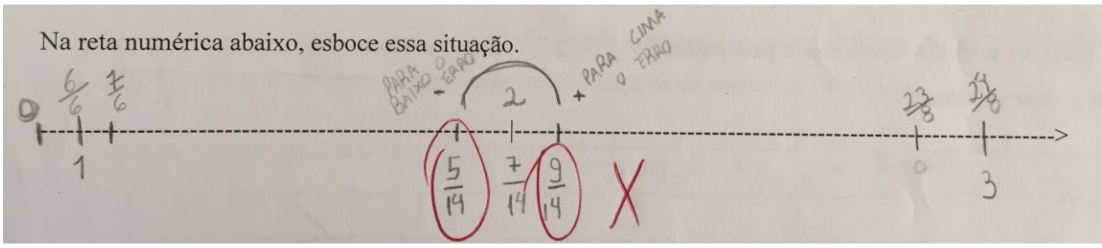
Na reta abaixo, esboce essa situação.

--|--->

TC: 18
PC: 10
I: 11

Os erros aqui cometidos ocorreram na hora de esboçar a situação na reta.

Na figura a seguir tem-se um exemplo de resolução incorreta:



Questão 7) Coloque V ou F, justificando as afirmações falsas:

( ) O produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

( ) A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.

( ) Entre os números reais 3 e 4 existe apenas um número irracional.

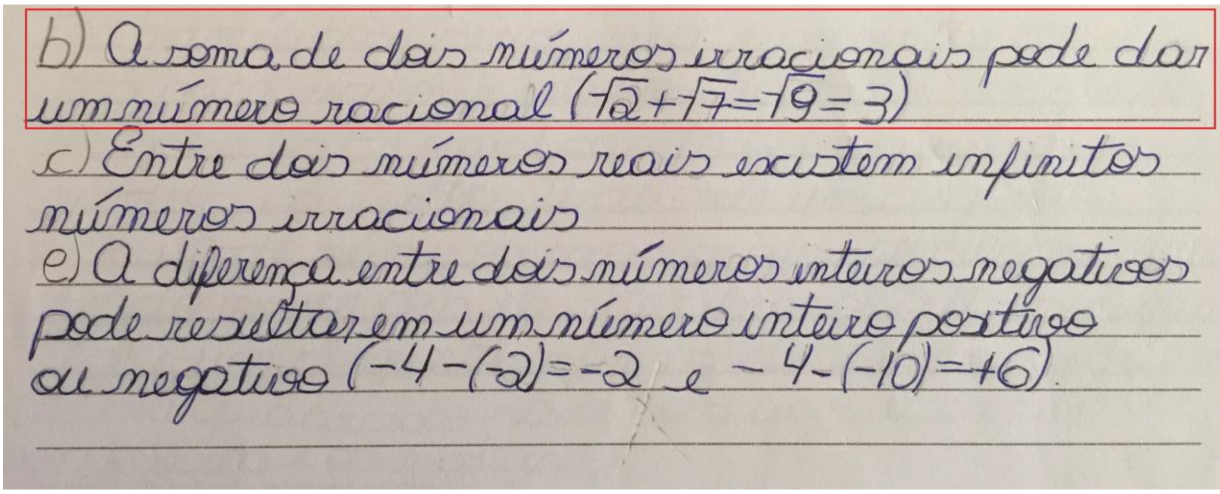
( ) Entre dois números racionais distintos existe pelo menos um número racional.

( ) A diferença entre dois números inteiros negativos é sempre um número inteiro negativo

TC: 5
PC: 33
I: 1

O item que mais teve erro foi o segundo: “A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional”, pela justificativa dada. Os alunos não se deram conta de que se somássemos, por exemplo, um número irracional com o seu oposto, teríamos como resultado um número racional.

Na figura a seguir tem-se um exemplo de justificativa incorreta:

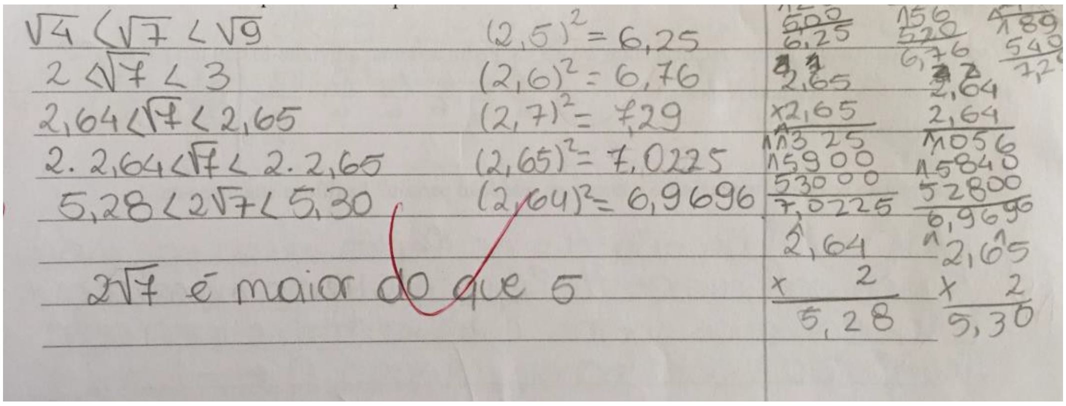

b) A soma de dois números irracionais pode dar um número racional ($\sqrt{2}+\sqrt{7}=\sqrt{9}=3$)
c) Entre dois números reais existem infinitos números irracionais
e) A diferença entre dois números inteiros negativos pode resultar em um número inteiro positivo ou negativo ($-4-(-2)=-2$ e $-4-(-10)=+6$).

Questão 8) $2\sqrt{7}$ é maior ou menor que 5 ? Justifique.

TC: 22
PC: 12
I: 5

Os alunos que não acertaram totalmente a questão, não justificaram os passos que fizeram para chegar à solução.

Na figura a seguir tem-se um exemplo de resolução totalmente correta:

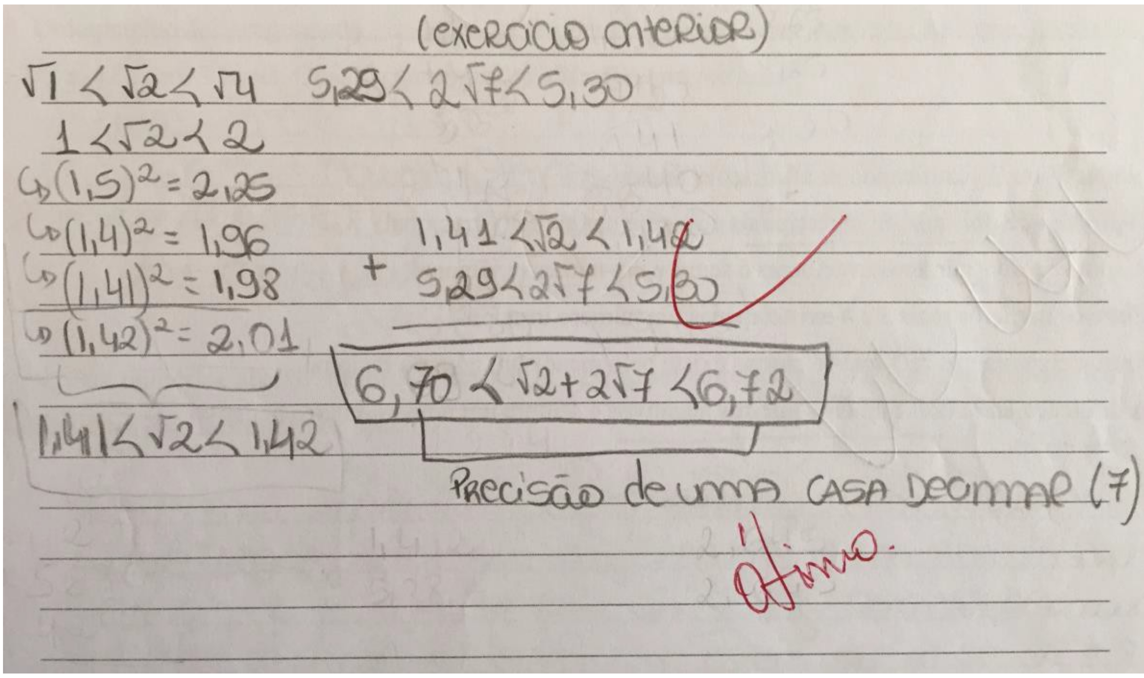

$\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$
$2 < \sqrt{7} < 3$
$2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$
$2 \cdot 2{,}64 < \sqrt{7} < 2 \cdot 2{,}65$
$5{,}28 < 2\sqrt{7} < 5{,}30$
$2\sqrt{7}$ é maior do que 5
$(2{,}5)^2 = 6{,}25$
$(2{,}6)^2 = 6{,}76$
$(2{,}7)^2 = 7{,}29$
$(2{,}65)^2 = 7{,}0225$
$(2{,}64)^2 = 6{,}9696$
$2{,}64 \times 2 = 5{,}28$
$2{,}65 \times 2 = 5{,}30$

Questão 9) Encontre um valor aproximado para o número $\sqrt{2} + 2\sqrt{7}$ com precisão de uma casa decimal. Mostre todo o desenvolvimento.

TC: 2
PC: 20
I: 17

Em geral, os alunos que acertaram parcialmente a questão se perderam nas contas por falta de atenção e acabaram errando algum dígito comprometendo, assim, a resposta final correta.

Na figura a seguir tem-se um exemplo de resolução totalmente correta:



Na avaliação, dos 39 alunos que a realizaram, 24 foram aprovados (nota maior ou igual a 6), ou seja, a turma obteve 61,5% de aprovação, sendo que respostas parcialmente corretas receberam metade da pontuação da questão.

4.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS DA IMPLEMENTAÇÃO

Um dos principais objetivos do ensino básico da matemática diz respeito à preocupação em preparar os estudantes para os desafios da sociedade. Contudo, acreditamos que, muito além disso, na escola básica, essa preocupação em trazer tudo para o cotidiano do aluno não pode ser tomada como critério para a seleção de conteúdos e para a escolha de metodologias de ensino. Nesse sentido, cabe destacar que a aplicabilidade da matemática a tantas áreas distintas do conhecimento decorre justamente de sua natureza abstrata. Essa perspectiva demanda do professor uma visão da matemática escolar que seja profunda e que, por isso, exige uma compreensão da matemática como uma ciência dedutiva e não experimental.

Após a implementação, convencemo-nos ainda mais da relevância do tema escolhido, uma vez que ficou evidente a dificuldade que os alunos trazem do Ensino Fundamental sobre as questões que abordam os diferentes conjuntos numéricos. Além disso, foi possível discutir, reorganizar ideias e pensamentos e elaborar outras atividades para serem sugeridas no produto final da dissertação.

Além de termos implementado nossa proposta para os alunos do Ensino Médio, preparamos, ao longo do ano, uma oficina para ser oferecida em congressos de formação de professores de matemática, intitulada *Uma Revisitação aos Conjuntos Numéricos no Ensino Médio*[3]. O primeiro evento ao qual levamos essa oficina foi o 2º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática realizado de 14 a 16 de agosto de 2015 em Brasília, DF; o segundo foi o XII Encontro Gaúcho de Educação Matemática realizado de 10 a 12 de setembro de 2015 em Porto Alegre, RS; o terceiro foi o 1º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Centro-Oeste realizado de 20 a 22 de novembro de 2015 em Catalão, GO.

Apresentamos no capítulo a seguir o produto final que é, por sua vez, resultado das reflexões ocasionadas pela implementação da proposta na escola e pelas oficinas ministradas para professores e futuros professores.

[3] Tal oficina pode ser acessada em http://anpmat.sbm.org.br/simposio-nacional-2/index.php/materiais.

5 – PRODUTO FINAL

Apresentamos a seguir um roteiro didático para o professor com questões disparadoras que oportunizam, na nossa opinião, uma revisão significativa dos conjuntos numéricos no Ensino Médio.

A proposta inclui, além das questões disparadoras, os principais objetivos, alguns “bilhetes ao professor”, expectativas de cada questão no que diz respeito às argumentações e/ou respostas dadas pelos alunos durante a implementação. Cabe ressaltar que algumas questões sofreram modificações com relação à sequência implementada na seção 4.1.

A reflexão oportunizada por este trabalho nos leva a concluir que, ao final de uma revisitação aos conjuntos numéricos no Ensino Médio, o aluno consiga argumentar sobre os seguintes tópicos.

Números Naturais:

- 0 é um número natural
- Sucessor e antecessor
- Infinitude
- Fatoração
- Definição de número primo

Números Inteiros:

- Ressignificação do conceito de número (quantidade munida de um referencial)
- Sucessor e antecessor
- Oposto
- Infinitude
- Novas definições contemplando a ampliação das operações para este novo universo numérico

Números Racionais:

- Problema da medida
- Número × representação de número
- Unidade e subunidade
- Densidade
- Representação decimal e representação fracionária
- Aproximação, erro e estimativa do erro

- Novas definições contemplando a ampliação das operações para este novo universo numérico
- Insuficiência geométrica dos números racionais

Números Reais:

- Familiarização
- Aproximação
- Representação dos conjuntos
- Novas definições contemplando a ampliação das operações para este novo universo numérico

As atividades a seguir pretendem contemplar estes tópicos.

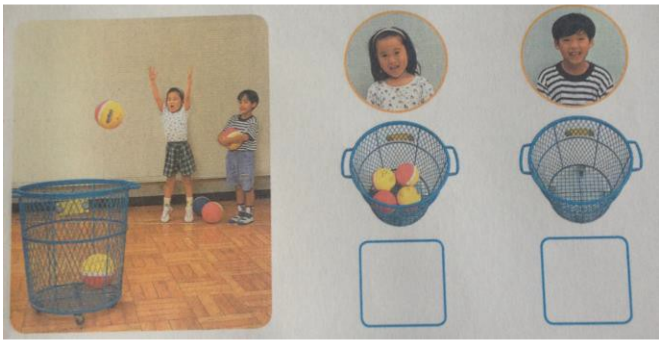
5.1 ATIVIDADES

5.1.1 NÚMEROS NATURAIS

1) Quais os números que são utilizados para contagem?

2) Como são chamados os números que são utilizados para contagem?

3) Descreva, em um parágrafo, a situação sugerida pela figura a seguir.



Fonte: Matemáticas para la educación normal
(livro japonês traduzido para espanhol).
Masani Isoda e Tenoch Cedillo. Editora Pearson – 2012.

4) Todo número natural tem um sucessor? Qual a consequência disso?

5) Podemos afirmar que todo número natural é sucessor de algum número natural?

6) Muitas vezes você já ouviu em matemática a palavra *fatorar*. O que é, em matemática, *fator*? E o que é *fatorar*?

7) Fatore o número 60 de três formas distintas.

8) É possível obter uma fatoração de 60 que envolva um maior número de fatores possível?

9) Caso a resposta da pergunta anterior seja afirmativa, o que você observa em tal fatoração?

10) Sobre a definição de número primo: são as afirmações “número primo é aquele que só é divisível por 1 e por ele mesmo” e “número primo é aquele que possui exatamente dois divisores distintos: 1 e ele mesmo” equivalentes. Mais precisamente, dizem elas a mesma coisa?

Atividade	Objetivo(s) da questão / Bilhetes ao professor	Expectativas relativas à implementação
1	Verificar se, para os alunos, o zero e o um são contemplados pela contagem, para, então, reafirmar, nas próximas atividades, o conjunto ℕ como o conjunto formado pelos números que são utilizados para contagem.	É esperado que as respostas dos alunos irão variar entre 0,1,2,3,4... , 1,2,3,4... e 2,3,4,5,...
2	Reafirmar o conjunto ℕ como o conjunto formado pelos números que são utilizados para contagem.	Espera-se que os alunos não terão dificuldades em dar a resposta “Números Naturais”.
3	Abrir a discussão sobre por que o zero é considerado número natural na escola. Ao professor: A situação mostrada na figura nos permite interpretar o seguinte: Duas crianças brincam de acertar bolas em um cesto. Uma delas acerta 4 bolas e a outra acerta nenhuma. Sendo assim, é provável que uma criança que ainda esteja sendo alfabetizada considere o zero como resultado de uma contagem, portanto como um número natural. Matematicamente, o zero como número natural é opcional. De fato, na axiomatização de Peano para os números naturais, exige-se apenas a existência de um primeiro elemento e de seus sucessivos sucessores, além do axioma da indução. Do ponto de vista histórico, o zero surgiu inicialmente como algarismo para representar ordens ausentes (ou vazias) em representações posicionais e, somente muito tempo depois, como número.	Os alunos, ao tentarem descrever a situação, chegarão, sem maiores dificuldades, ao zero como resultado de contagem, oportunizando então a conclusão: zero é um número natural.
4	Objetivo da questão: inicialmente, levar o aluno a concluir que o conjunto dos naturais é infinito. Posteriormente, disparar a discussão sobre a comparação dos conjuntos infinitos {números naturais} e {números naturais pares}. Ao professor: Se necessário, pode-se argumentar sobre a infinitude do	É esperada uma estranheza por parte dos alunos por ocasião da discussão sobre cardinalidade, pois ela envolve um novo ponto de vista para eles.

	conjunto $\mathbb{N}$, por exemplo, com um argumento da forma: "Pense no maior número que você conhece. A seguir responda: ele tem sucessor? Qual é? Pronto, você acabou de pensar em um número ainda maior de que aquele que você imaginava ser o maior de todos..." Como complementação e avaliação do completo entendimento do argumento, o professor pode lançar aos alunos a questão: "E o conjunto dos números pares é infinito? Como podemos argumentar na tentativa de comprovar este fato?" A partir da projeção do vídeo "O Hotel de Hilbert" (ver referências), o professor pode estimular os alunos a fazerem a seguinte adaptação: cada quarto n muda para o quarto 2n, e assim todos os naturais ocupam os quartos pares, provando, através de uma função bijetora $$\{naturais\} \rightarrow \{pares\},$$ que há tantos números naturais quanto números pares. Logo, temos argumentos para mostrar que, se pensarmos em correspondência biunívoca, • no conjunto {0,1,2,...} temos tantos elementos quanto no conjunto {1,2,3,...}; • no conjunto $\mathbb{N}$ temos tantos elementos quanto no conjunto dos números pares; • no conjunto $\mathbb{N}$ temos tantos elementos quanto no conjunto dos números ímpares. Ainda, a relevância de se revisar neste trabalho a ideia de sucessor recai sobre o fato de que a escrita $$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,...\}$$ com a intenção específica de se caracterizar ou definir o conjunto $\mathbb{N}$ está	

	incompleta, tendo em vista ser impossível descrever-se um conjunto infinito por extensão. Assim, é preciso descrever como são os elementos do conjunto que estão implícitos em “...”. Para isso, precisamos da(s) propriedade(s) que lhe são comuns e que são exclusivas de tais elementos, no caso, dos números naturais. E tal propriedade, para todos os números naturais diferentes do zero é, precisamente, a ideia de “ser sucessor de”. Assim, uma possível descrição do conjunto ℕ poderia ser: ℕ é o conjunto ℕ ={0,1,2,3,...}, sendo, cada elemento a partir do zero, o sucessor do último elemento até então listado.	
5	Oportunizar a discussão de que esta é uma das diferenças entre os conjuntos ℕ e ℤ, o que servirá de motivação para a construção, ao final deste trabalho de revisão e aprofundamento, de um quadro comparativo entre os conjuntos numéricos (do tipo “o que passa a valer e o que deixa de valer”, traduzindo-se na forma: em ℕ existe o primeiro elemento, em ℤ não). Ao professor: o quadro comparativo mencionado acima faz parte da última atividade em Atividade Complementar	É possível que, num primeiro momento, os alunos respondam “sim”, mas espera-se que, ao serem convidados a um maior cuidado, atentem para o zero.
6	Esclarecer ao aluno o que, de fato, significam esses termos: fator é qualquer um dos termos utilizados na operação denominada multiplicação; fatorar um número é, portanto, reescrevê-lo na forma de um produto. Ao professor: As ideias de fatoração e fatoração em primos são imprescindíveis para provar a insuficiência aritmética de ℚ, fato que motiva a expansão do universo numérico de ℚ para ℝ. Tal insuficiência é tratada na Atividade 32, na qual se mostra que não existe número racional cujo quadrado é 2. Por isso esta e as próximas atividades sobre números naturais revisam tais ideias.	É provável que os alunos respondam “fatorar é encontrar o mínimo múltiplo comum” (resposta já escutada algumas vezes pelo autor). Os alunos associam a imagem (abaixo) de um número com um risco grande do seu lado à ideia de encontrar o “mmc” entre dois ou mais números. 60 | 2 30 | 2 15 | 3 5 | 5 1 |

7	Ressaltar que fatorar um número equivale a escrevê-lo como um produto de quaisquer fatores, não necessariamente primos. Pretende-se também oportunizar as questões seguintes, que falam sobre números primos.	Talvez não ocorra aos alunos envolverem o 1 como fator. Se isto acontecer, espera-se que a próxima atividade chame sua atenção para tal possibilidade.
8	Que os alunos reconheçam a resposta negativa pela possibilidade de se envolver o fator 1 e que a fatoração em primos é aquela que envolve o maior número possível de fatores diferentes de 1.	Espera-se que surja o fator 1 e que os alunos respondam então negativamente, argumentando que, . por ser 1 o elemento neutro da multiplicação, ele pode ser incluído infinitas vezes em uma fatoração. Caso não surja espontaneamente o fator 1, essa discussão deve ser lançada pelo professor. Pretende-se dar continuidade à discussão, repetindo a pergunta, mas agora excluindo o 1 como fator.
9	Reconhecer a fatoração em primos como aquela que envolve o maior número de fatores diferentes de 1.	Espera-se que algum aluno comente que qualquer uma das fatorações que envolvem o maior número possível de fatores diferentes de 1 é uma fatoração em primos. Espera-se que apareça mais do que uma fatoração em primos, porque a multiplicação é comutativa. Cabe então ser ressaltado que todas elas envolvem exatamente os mesmos fatores, repetidos exatamente o mesmo número de vezes.
10	Deixar clara a definição de número primo (aquela que garante que 1 não é número primo) e destacar a precisão requerida pela ciência matemática.	Espera-se que algum aluno se dê conta que o 1 seria primo em uma e não o seria em outra. Caso isto não ocorra, então será perguntado: “pela Definição 1, o número 1 é primo? E pela Definição 2?”Caso algum aluno pergunte por que a Definição 2 é, afinal, a escolhida, pode-se apenas comentar sobre a conveniência de se poder falar na unicidade de fatoração em fatores primos que um número possui, a

		menos da ordem dos fatores (assunto não aprofundado na Educação Básica).

5.1.2 NÚMEROS INTEIROS

11) “*Com a introdução dos negativos, os números ganham um novo atributo: a orientação. Assim, passam a representar uma quantidade orientada, isto é, uma quantidade acompanhada de um referencial*”.

O parágrafo acima faz referência a “orientação” e, para isso, é necessária a existência de um referencial. Que referencial seria esse? Explique com suas palavras a afirmação “os números passam a representar uma quantidade orientada”.

12) Resolva e interprete o seguinte problema:

(Giovanni, 2010; FTD): Se um mergulhador A está a 20m de profundidade e outro mergulhador B está a 15m, qual deles está a uma maior profundidade? Como você representaria essa situação fazendo uso de números inteiros?

13) O que significa -5? Qual o significado da expressão $-(-2)$?

14) Podemos afirmar que $-x$ representa sempre um número negativo?

15) Comparando o conjunto dos números inteiros com o conjunto dos números naturais, o que podemos dizer sobre existência de sucessor?

16) (Giovanni, 2010; FTD) Quando você estudou números inteiros no Ensino Fundamental, deve ter passado por problemas que envolvem situações como a seguinte: O saldo de gols é calculado pela diferença entre o número de gols marcados e o número de gols sofridos. Observe a tabela e responda:

Time	Gols marcados	Gols sofridos
A	15	20
B	20	15
C	12	23
D	17	11

a) Qual o saldo de gols de cada time?

b) A qual operação entre números inteiros você associa a expressão “diferença entre” apresentada no problema?

17) Você provavelmente já ouviu ou até mesmo guardou na memória a seguinte "receita": *menos com menos dá mais*. Podemos afirmar que $(-2)+(-3)=+5$, já que menos com menos dá mais?

18) Como você explicaria a igualdade $2\times(-3)=-6$? E a igualdade $(-2)\times 3=-6$?

19) E como você explicaria que $(-2)\times(-3)=6$?

20) Com base nos casos estudados na multiplicação, analise todos os casos de divisão de números inteiros com resto igual a zero.

Atividade	Objetivo(s) da questão / Bilhetes ao professor	Expectativas relativas à implementação
11	Introduzir a discussão sobre a concepção dos números negativos, levando o aluno a reconhecer, no conjunto dos números inteiros, o zero como o referencial e a compreender que, quando visualizados em uma reta numerada, de um lado deste referencial estarão os positivos e do outro lado os negativos e, ainda, que os números inteiros obedecem à seguinte ordem amparada também pela reta numerada e que estende a ordem dos naturais: • todo número inteiro negativo é menor que zero; • todo número inteiro positivo é maior que zero. E por isso, todo número inteiro negativo é menor do que qualquer número positivo.	É esperado que os alunos demorem a concordar com o texto introdutório, por provavelmente tratar-se do conceito de número inteiro, de uma forma diferente daquela concebida no Ensino Fundamental.
12	Destacar que a ideia de número negativo está implícita na expressão “20m de profundidade” e ressaltar a ordem no conjunto $\mathbb{Z}$. Além disso, com o objetivo de aprofundar a discussão sobre números inteiros, pretende-se abordar as seguintes questões: 12.1) a que profundidade pode estar um mergulhador que está entre os mergulhadores A e B? 12.2) O mergulhador A deve subir ou descer para alcançar o mergulhador B? Que distância? Como transformar/expressar isso em uma soma de números inteiros? 12.3) No mesmo desenho feito inicialmente, ilustre a posição de um mergulhador C, a 18m de profundidade e de um mergulhador D, a 28m de profundidade.	É esperado que os alunos sugiram, em algum momento da discussão, uma representação em uma reta vertical. É claro que, pensando-se em profundidade, a resposta à questão é “aquele que está a 20m de profundidade”. No entanto, se pensarmos em associar números inteiros correspondentes a essas medidas, tomando o nível do mar como referencial, escreveríamos $-20 < -15$. Espera-se que algum aluno explicite que, na expressão “20m de profundidade” a ideia de número negativo está implícita e o que está sendo questionado é a distância até o referencial, no caso, o nível do mar.

13	Verificar se o aluno absorveu a ideia de oposto em relação ao referencial. Comparar números negativos também pela representação desses números na reta numerada.	Espera-se que os alunos respondam que -5 é o oposto do número natural 5 em relação ao referencial zero, por isso é chamado de número negativo -5. Assim, o sinal "-" do número -5 pode ser interpretado como "determinar, em relação ao referencial zero, o oposto de". Os alunos já conhecem a ordem definida para os números naturais e a representação dos naturais na reta numerada de maneira compatível com esta ordem. Assim, por exemplo, a desigualdade $2 < 5$ fica evidenciada na reta numerada pelo fato de que 2 está à esquerda do 5. Cabe ao professor chamar a atenção para o fato que a ordem dos naturais não só é preservada para a comparação dos números inteiros positivos como é ampliada para os inteiros, mantendo-se esta mesma caracterização geométrica. Em outras palavras, a ordem dos inteiros amplia a ordem dos naturais e a representação dos inteiros na reta numerada continua compatível com ela. Além disso, espera-se que os alunos argumentem que, se pensarmos no sinal "-" como "determinar, em relação ao referencial zero, o oposto de", na expressão -(-2) estamos representando "o oposto do oposto" do número positivo +2 (ou, simplesmente, 2). Ou seja, -(-2) nada mais é do que o próprio número (positivo) 2.
14	Alertar para o erro comum entre alunos da Escola Básica (pela experiência do autor) de $-x$ ser interpretado como um número negativo.	Espera-se que, a partir da discussão originada pela questão anterior, os alunos respondam "não", explicando que, se x for um número negativo, $-x$ será positivo. Se x for um número positivo, $-x$ será um número negativo.
15	Estabelecer a comparação entre os conjuntos dos números inteiros e dos números naturais, no que diz respeito à existência de sucessor. Levar os alunos a concluírem que o conjunto dos números inteiros não possui um primeiro elemento, no que diz respeito à ordem.	Espera-se que os alunos se reportem às Atividades 4 e 5, para refletirem sobre as questões "É verdade que todo número inteiro possui um sucessor?" e "É verdade que todo número inteiro é sucessor de alguém?", para então estabelecerem a comparação questionada. Sobre a questão "Existem mais números inteiros do que naturais?"

	Além disso, com o objetivo de comparar as cardinalidades de ℕ e de ℤ, pretende-se, aqui, lançar a questão: Existem, então, mais números inteiros do que naturais, já que ℤ é “infinito para os dois lados”?	espera-se que todos os alunos respondam que sim, pois existem inteiros que não são naturais. Esta afirmação não está errada, se pensarmos na relação de inclusão entre ℕ e ℤ, que é própria. Cabe destacar, então, que o fato de os naturais formarem um subconjunto próprio dos inteiros comprova que existem números do conjunto ℤ que não estão n conjunto ℕ e, por isso, existem mais números inteiros do que naturais. Espera-se que os alunos também tentem argumentar usando ideias do vídeo “O Hotel de Hilbert” (que foi trazido por ocasião da Atividade 4), procurando estabelecer uma bijeção entre os conjuntos {números naturais} e {números inteiros}. De fato, a partir do vídeo, os alunos podem ser estimulados a fazer a seguinte adaptação: cada quarto *n* muda para o quarto 2*n*, e assim todos os naturais ocupam os quartos pares, sobrando todos os quartos ímpares para serem ocupados pelos negativos: o número “–*n*” (n natural) ocupa o quarto 2*n*–1. É possível, assim, construir uma bijeção {naturais} → {inteiros}. Logo, temos argumentos para mostrar que, se pensarmos em correspondência biunívoca, no conjunto ℤ temos tantos elemento quanto no conjunto ℕ.
16	Destacar a presença e utilidade dos números negativos no dia a dia. Ressaltar a necessidade de ampliar a ideia de subtração a uma operação em ℤ. Reiterar que subtrair um número inteiro *b* de um número inteiro *a* é o mesmo que adicionar *a* ao oposto de *b*.	Espera-se que os alunos respondam, no item (a), A = –5 , B = + 5 , C = –11 , D = + 6. E que, no ítem (b), os alunos associe a expressão à subtração de números naturais, mas necessitando ampliá-la para o conjunto dos números inteiros, porque às vezes o resultado é negativo (com uma interpretação adequada). Cabe aqui aproveitar-se a oportunidade para reiterar que subtrair o número inteiro *b* do número inteiro *a* é o mesmo que adicionar *a* ao oposto de *b*.
17	Corrigir o que muitos alunos devem trazer como “macetes” do Ensino Fundamental, mesmo sem ter claros seus significados. Reiterar a precisão exigida pela ciência matemática,	É provável que não faltem discussões com relação à *receita* trazida do Ensino Fundamental.

	sobre a maneira como as coisas são ditas (ou não) matematicamente. Ao professor: Sugere-se que seja aqui aproveitada a oportunidade para enfatizar a precisão exigida pela ciência matemática. A frase “a ordem dos fatores não altera o produto” é um outro exemplo que pode ser aqui mencionado, principalmente se os alunos já estudaram matrizes, caso em que saberão falar sobre a sua não aplicabilidade a este contexto. Só após deixar-se claro que a expressão “menos com menos dá mais” só se refere à multiplicação de números inteiros (e, futuramente, de racionais e de reais), é que cabe passar-se à discussão da próxima questão.	
18	Retomar a multiplicação de números inteiros, sem calcar somente na chamada “regras de sinais”. Conscientizar os alunos da necessidade da ampliação do significado de multiplicação, começando pelo caso em que se pode aproveitar a ideia de adição de parcelas iguais para definir o produto de um número positivo por número negativo, como em 2 × (–3) e evidenciando a não aplicabilidade dessa ideia nem para o produto de número negativo por número positivo nem para o produto de números negativos.	Espera-se que os alunos apelem para a soma de parcelas iguais no primeiro caso, escrevendo 2 × (–3) = (–3) + (–3) = –6, explicando que 2 × (–3) pode ser definido como o número – 3 adicionado a ele mesmo duas vezes, assim como 4 × (–3) = (–3) + (–3) + (–3) + (–3) = –12, imitando um dos significados da multiplicação em ℕ. Em seguida, pode-se lançar a pergunta “E se trocássemos para (–2) × 3, seria possível adaptar a ideia de repetição de parcelas iguais para este caso?”, com o propósito de conscientizar os alunos da impossibilidade de se adaptar a multiplicação de naturais para este caso, e que, portanto, alguma outra definição deve ser adotada para este caso. E uma maneira possível é observar que 2 × (–3), afinal, é igual ao oposto se 2 × 3 em relação ao zero e aproveitar a mesma ideia de oposto para definir (–2) × 3 como o oposto de 2 × 3 em relação ao referencial zero. Assim, (–2) × 3 = – (2 × 3) = – 6.
19	Concluir os casos de multiplicação de dois números inteiros, sem calcar somente na chamada “regras de sinais”.	Espera-se que os alunos percebam que nesse caso é possível aproveitar também a ideia de oposto em relação ao referencialzero, sugerindo como definição para (–2) × (–3) o oposto, em relação ao referencial zero, de 2

		× (–3) que, por sua vez, é o oposto, em relação ao referencial zero, de 2 × 3. Ou seja, é o oposto do oposto de 2 × 3. Assim, (–2) × (–3) = – [2 × (–3)] = – (–6) = 6.
20	Com base no que foi feito para a multiplicação, considerar todas as combinações de sinal entre dividendo e divisor, para o caso em que o resto da divisão é zero, sendo aqui possível recorrer à multiplicação, uma vez que se o resto é zero então o dividendo é igual ao quociente multiplicado pelo quociente.	Espera-se que os alunos reescrevam o raciocínio fazendo uso da multiplicação, sem as expressões viciadas “menos com menos”, etc., e sim reescrevendo as informações de forma coerente, dizendo o que acontece com o quociente de dois inteiros positivos, de um inteiro positivo por um inteiro negativo, etc.

5.1.3 NÚMEROS RACIONAIS

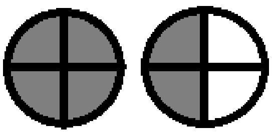
21) Dê exemplos de questões associadas a uma situação do dia a dia cuja resolução não pode envolver apenas números inteiros.

22) Qual a relação entre *fração* e *número racional*? Por exemplo, *fração* e *número racional* são sinônimos?

23) Sobre a definição de frações equivalentes: são equivalentes as afirmações “duas frações são ditas equivalentes quando representam a mesma quantidade” e “duas frações são ditas equivalentes quando o numerador e o denominador de uma delas são multiplicados por um mesmo número inteiro não nulo e os resultados são, respectivamente, o numerador e o denominador da outra”?

24) Relacione todas as opções da segunda coluna com a primeira.

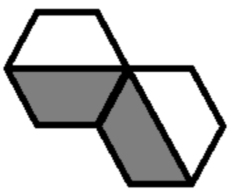
(A)



(B) 1,25

(C) 3/5 + 7/3

(D)



(E) 3/4 × 124

( ) 1/2

( ) 3/4

( ) 5/4

( ) 44/15

( ) 93

( ) 3/2

( ) $2,9\overline{3}$

( ) 1

( ) 186/2

25) Calcule as seguintes somas, registrando sua resolução:

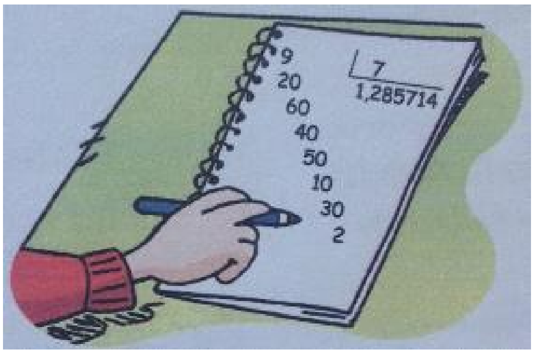
i) 1/5 + 12,7

ii) 0,23 + 1/3

iii) $0,\overline{7} + 0,\overline{3}$

iv) 9/7 + 1/3

26) (Centurión - 2012) Mário estava fazendo esta divisão:



Fonte: Matemática – teoria e contexto – 8º ano.
Marília Centurión & José Jakubovic. Editora Saraiva – 2012.

Cansado, não quis mais continuar.

Marisa olhou e disse:

- Na verdade, você não precisa continuar! Assim, já dá para perceber qual é o resultado.

Explique por que Marisa tem razão e depois apresente o quociente da divisão.

27) João pensou em um número racional entre 5/6 e 27/8. Pedro, ao tentar adivinhá-lo, deu um palpite: “2” e recebeu de João a seguinte resposta: “Você errou por 2/7.”

Responda:

a) O palpite de Pedro é razoável?

b) A resposta dada por João em relação ao erro permite-nos determinar o número por ele pensado? Justifique sua resposta.

c) E se a resposta de João para Pedro tivesse sido “O erro que você cometeu é menor do que 2/7”, quantas respostas, satisfazendo tais condições, Pedro poderia dar?

28) Quantos números racionais existem entre 5/6 e 27/8 ? E entre 1/3 e 2/3?

29) Como você faria para encontrar 100 números racionais entre 1/3 e 2/3?

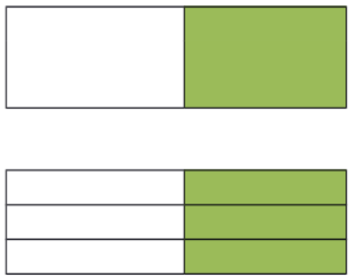
30)

i) Apresente uma estimativa para a parte inteira do racional 7789/7, sem calculá-la.

ii) Calcule a parte inteira de 7789/7 e compare-a com a estimativa que você fez em (i).

Atividade	Objetivo(s) da questão / Bilhetes ao professor	Expectativas relativas à implementação
21	Motivar a necessidade de ampliação do universo numérico $\mathbb{Z}$. Evidenciar o problema da medida, situação em que, em geral, os números naturais (inteiros positivos neste caso) não são suficientes para resolver. Ao professor: Nem todas as quantidades com as quais lidamos no dia a dia são representáveis por números inteiros. A partir da necessidade de medir empiricamente (isto é, de tentar determinar quantas vezes uma determinada quantidade cabe naquilo que se quer medir) torna-se necessário exprimir quantidades não inteiras. Acreditamos que uma das primeiras dificuldades na compreensão e tratamento com números racionais reside no fato de, ao lidar com frações (e com números racionais), está sendo necessária a identificação não só de uma unidade, mas também de uma subunidade que ajuda a determinar, por (dupla) contagem, uma fração correspondente ao número racional que se quer representar: De fato, no caso de uma quantidade (aqui denotada por *u* e chamada de unidade) não caber um número inteiro de vezes em outra (aqui denotada por *a*), uma estratégia para obter a comparação entre ambas é subdividir a unidade *u*, com o objetivo de buscar uma subunidade *u*', (isto é, tal que $u = q \cdot u'$, para algum $q \in \mathbb{N}$), que caiba uma quantidade inteira *p* de vezes na outra quantidade a (isto é, tal que $a = p \cdot u'$). Ou seja, *u* e *a* são múltiplos inteiros de uma unidade comum *u*'. Diz-se então que as grandezas *u* e *a* são comensuráveis. Neste caso particular, a medida ainda pode ser determinada por um processo de dupla contagem: basta contar quantas ve- zes *u*' cabe em *u* e quantas vezes *u*´ cabe em *a*. A compara-	É esperado aqui que apareçam os exemplos clássicos: a pizza, a barra de chocolate, uma receita, etc. É provável que a relação parte-parte não apareça porque ela envolve o conceito de razão, que é um assunto pouco dominado pelos estudantes (fato constatado pela experiência do autor). Neste caso, é conveniente trazer situações tais como “em uma urna com bolas coloridas, existem 20 bolas azuis e 30 bolas amarelas. Como podemos comparar a quantidade de bolas azuis com a quantidade de bolas amarelas?

	ção entre as grandezas pode, portanto, ser expressa por uma comparação entre números naturais, e se diz que o número racional *p/q* é a medida de *a*. Desta forma, o conceito de número racional (positivo) emerge da noção de medida, no caso particular de grandezas comensuráveis.(GIRALDO et al., preprint)	
22	Distinguir o conceito matemático de número racional de sua representação fracionária.	É esperado que os alunos escrevam o que eles entendem por fração, mesmo que seja por meio de exemplos. Imaginamos que a maioria fará uso da relação do tipo parte-todo. De acordo com os PCN, uma fração pode estar relacionada a vários significados: indicando uma medida, uma razão, uma relação do tipo parte-todo ou uma divisão. Embutida nesta discussão, pretende-se encaixar a pergunta: "Seria $\mathbb{Q}$ o conjunto das frações?" Espera-se que a discussão leve os alunos a concluírem que número racional é uma quantidade (a metade de um inteiro, por exemplo) que pode ser representada por diversas frações: 1/2, 2/4, etc.. Além disso, espera-se ter a oportunidade de encaixar nesta discussão a questão "O que queremos dizer ao escrevermos 1/2 = 2/4? Ou será que a igualdade 1/2 = 2/4 está errada?", esclarecendo que, de fato, por um lado, 1/2 e 2/4 representam o mesmo número racional, portanto são iguais. Por outro lado, se olharmos tais notações como as frações 1/2 e 2/4, elas não são iguais, mas estão relacionadas, isto é, são frações equivalentes. Sendo assim, depende de como estamos olhando 1/2 e 2/4, como frações ou como números racionais.

23	Novamente aqui enfatizar a precisão que a ciência matemática requer, definindo, de forma precisa, frações equivalentes. Motivar a discussão "como justificar a equivalência $a/b = c/d \leftrightarrow ad = bc$?", salientando ao aluno o método dedutivo de que faz uso a ciência matemática. Ao professor: para uma melhor compreensão dos alunos, sugere-se começar a argumentação sobre a equivalência citada pela a ilustração abaixo, em que é possível ter-se certeza que 1/2 e 3/6 representam uma mesma quantidade, simplesmente porque, ao subdividirmos cada metade do primeiro retângulo em três partes iguais, obtemos uma subdivisão do mesmo retângulo em 6 partes iguais. Daí, ao tomarmos três dessas partes, estamos tomando exatamente uma das metades do retângulo.  A ideia pode ser aproveitada no caso geral: sem perda de generalidade, sendo *d* um número inteiro, e possível convencer-se, por uma generalização da ilustração acima, que a/b e ad/bd são frações equivalentes. Analogamente, sendo *b* um número inteiro, c/d e bc/bd são frações equivalentes. Assim, **(→)**: Se a/b é equivalente a c/d então $ad/bd = bc/bd$, de modo que $ad = bc$. (Pois os denominadores são iguais).	Talvez alguns alunos tenham uma certa dificuldade de reconhecer a diferença entre as duas definições e, por isso, digam que são frases equivalentes. Para deixar clara a diferença, sugere-se encaixar, caso necessário, a pergunta: "O que dizer, então, sobre as frações 4/6 e 14/21?" Essas duas frações são, sim, equivalentes e, no entanto, não existe um mesmo número inteiro pelo qual possa-se multiplicar o numerador e o denominador de uma das frações e gerar a outra fração. Fica, assim, motivada a discussão "como justificar a equivalência $a/b = c/d \leftrightarrow ad = bc$?",

	(←): Se *ad* é igual a *bc* então, dividindo ambas as quantidades por *bd*, temos frações iguais: *ad/bd = bc/bd.* No entanto, a primeira é equivalente a *a/b* e a segunda é equivalente a *c/d*, por isso *a/b* e *c/d* são frações equivalentes, portanto os números racionais por elas representados são iguais: *a/b = c/d*.	
24	Conscientizar os alunos de que números racionais podem ser representados tanto na forma fracionária como na forma decimal, e que um número racional admite infinitas representações fracionárias. Além disso, ressaltar que, neste novo universo numérico, a escolha da unidade é arbitrária, o que possibilita que uma mesma quantidade possa ser representada por frações que não são equivalentes (como em (A)). Ao Professor: no item (E) pode-se aproveitar a oportunidade para discutir a ampliação da multiplicação de $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{N}$) para $\mathbb{Q}$. De maneira análoga a que acontece em $\mathbb{Z}$, é natural definir-se m × a/b, sendo m natural ou inteiro como a soma de m parcelas iguais a a/b, caso m seja natural, ou como o oposto disso, caso m seja inteiro. Já esta ideia não pode ser adaptada ou ampliada para o caso em que m é um racional não inteiro, tal como em 3/4×124. Neste caso, tal produto é definido como igual a "3/4 de 124", ou seja, 124 é tomada como unidade e estamos calculando 3/4 de tal unidade: quarta parte de 124 = 124 : 4 = 31 3/4 de 124 = 3 vezes a quarta parte de 124 = 3 × 31 = 93.	É esperado que os alunos tenham dificuldades em justificar todas as alternativas da segunda coluna: (D) 1/2 (Unidade: 2 hexágonos; Subunidade: meio hexágono) (A) 3/4 (Unidade: 2 círculos; Subunidade: meio círculo) (B) 5/4 (C) 44/15 (E) 93 (A) 3/2 (Unidade: 1 círculo; Subunidade: meia circunferência) (C) $2{,}9\overline{3}$ (D) 1 (Unidade: 1 hexágono; Subunidade: meio hexágono) (E) 186/2
25	Estimular o cálculo ora por representação decimal, ora por representação fracionária e destacar que ambas têm as suas vantagens e desvantagens, dependendo de como as parcelas são apresentadas. Ao Professor: a discussão aqui proposta ficará mais relevante ainda na abordagem dos números irracionais (ver Atividade 32).	Espera-se que os alunos tenham preferência pela representação decimal para realizar as operações, pois, pela experiência do autor, existe entre eles uma resistência a trabalhar com frações. Assim, o item *(ii)* deve gerar alguma discussão (pela presença de uma representação decimal periódica) e

		o item *(iii)* deve gerar mais discussão (pela presença de duas representações decimais periódicas com períodos formados por um só algarismo mas cuja soma é igual a 10). É no item *(iv)* que aparece a maior complexidade, pois as parcelas envolvem períodos de tamanhos diferentes. Cabe então encaixar nesta discussão a questão: é mais fácil somar números racionais na representação decimal ou na representação fracionária? Espera-se que, com isso, os alunos percebam que, na forma fracionária, sempre estaremos lidando com um número finito de algarismos, enquanto que, na forma decimal, quase nunca se tem tal garantia.
26	Destacar que, ao aparecer novamente o resto 2, já temos evidenciado o chamado período da dízima periódica, portanto também a representação decimal do quociente.	Caso os alunos não saibam justificar, serão convidados a continuar a divisão até que percebam a periodicidade dos algarismos no quociente, a partir da repetição dos restos. Cabe também encaixar, nesta discussão, as seguintes questões: - Por que a representação decimal dos racionais pode ser infinita? Espera-se que os alunos percebam que é porque existem casos em que nunca chegamos a resto zero (como o dessa questão). - Por que a representação decimal dos racionais, quando infinita, é certamente periódica? Espera-se que, depois de analisado o exemplo, os alunos respondam “Porque os quocientes vão se repetir numa ordem fixada, devido ao fato de os restos certamente se repetirem, uma vez que há sempre apenas um número finito de restos na divisão por um número natural *b*.” Além disso, aqui deve-se chamar a atenção dos

		alunos) para a diferença entre número e representação do número no enunciado da questão. Afinal de contas, estamos defendendo que 9/7 representa um número racional. Portanto, o resultado – como a questão sugere – é 9/7. O que Mário cansou de fazer foi tentar determinar a representação decimal de 9/7, achando que, parando nesta etapa, estava com a resposta ainda incompleta. Marisa chamou-lhe a atenção que o seu trabalho já estava completo, a resposta precisa já podia ser dada no momento em que Mário se cansou.
27	Revisar a ordem no conjunto $\mathbb{Q}$ e identificar intervalos que tornam um palpite aceitável (ou não), fazendo com que os alunos refinem suas habilidades em cálculo e estime valores que devem ir além das relações "maior que", "menor que" e concentrem-se na relação "estar entre". Justificativa para a proposta dessa questão: consideramos muito importante o aluno estar em contato frequente com os conceitos de aproximação, de estimativa, de erro e de estimativa para o erro, pois, afinal, o tempo todo deparamo-nos com aproximações e estimativas que aparecem de forma natural no nosso dia a dia. A presente questão trata de erro, e questões lidando com aproximação, estimativa e/ou estimativa do erro aparecem na Atividade 30, bem como entre as atividades relativas a números reais (por exemplo, Atividades 32, 33, 34, 37).	Para o item *(a)* espera-se que os alunos reconheçam como "razoável" qualquer número x satisfazendo $5/6 < x < 27/8$; para o item *(b)* espera-se que os alunos respondam "não", pois o erro pode ser para mais ou para menos: 2 + 2/7 = 16/7 ou 2 – 2/7 = 12/7 e, como ambos os valores 16/7 e 12/7 estão no intervalo escolhido por João, o número 2 pode tanto ser uma aproximação por falta como por excesso para o número pensado por João. Pode-se então encaixar a pergunta: "Se o palpite de Pedro tivesse sido 26/8, como seria sua resposta em *(b)*?", pois, em tal caso, a resposta é única, a saber, 26/8 – 2/7 = 166/56, Uma vez que 26/8 + 2/7 > 27/8. Para o item *(c)*, espera-se que os alunos respondam "infinitos".
28	Destacar uma importante diferença entre os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$: Em $\mathbb{Q}$ existem infinitos números entre quaisquer dois racionais fixados, propriedade (chamada densidade) raramente explorada no Ensino Fundamental.	Espera-se que, em seus argumentos, os alunos recorram à representação decimal de tais números, pela maior facilidade em comparar nessa forma.

	Ao professor: Sugere-se que, após respondida a questão, os alunos sejam convidados a comparar os conjuntos ℤ e ℚ com relação à propriedade de densidade.	
29	Fazer uso de frações equivalentes na explicitação, por meio de um raciocínio genérico, dos infinitos racionais entre 1/3 e 2/3. Ao professor: Sugere-se que os alunos sejam incentivados a praticar a comparação fazendo uso de ambas as representações para os números racionais.	Espera-se que os alunos, utilizando frações equiva-lentes, reescrevam, por exemplo, 1/3=10/30 e 2/3=20/30 e a partir daí expliquem como gerar infinitos racionais, fazendo uso de um raciocínio generalizador.
30	Oportunizar o conceito de estimativa.	Espera-se que os alunos arredondem os valores do numerado e/ou do denominador, por exemplo “7789 é próximo de 7777, portanto este número é da ordem de milhar.

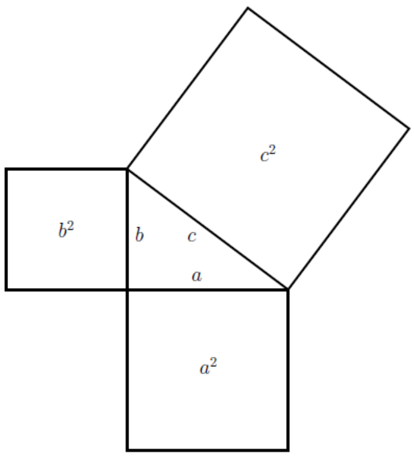
5.1.4 NÚMEROS REAIS

31) Dê exemplos de questões associadas a uma situação do dia-a-dia, cuja resolução não pode envolver apenas números racionais.

Para refletir:

Observe o enunciado (geométrico) do teorema de Pitágoras:

A área do quadrado construído sobre a hipotenusa *c* é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos *a* e *b*.



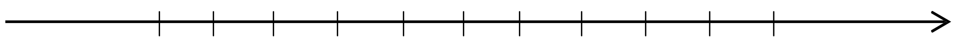
Podemos garantir que se *a* e *b* forem números racionais, então *c* também o será?

32) Existe algum número racional cujo quadrado é igual a 2?

33) $2 + \sqrt{2}$ é um número racional ou irracional?

34) Sabendo apenas que $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ e $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, é possível determinar uma aproximação para $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ com uma casa decimal de precisão? Como você faria para melhorar a precisão na aproximação desse número?

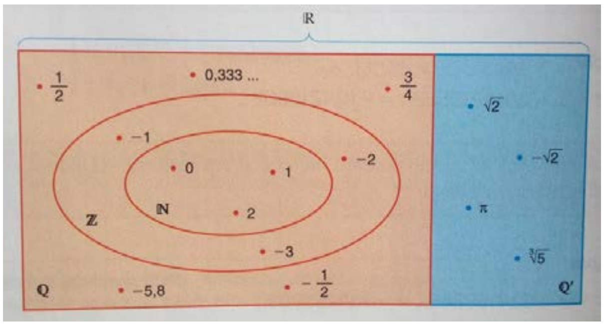
35) Localize, na reta numerada abaixo, o número $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ com uma casa decimal de precisão. Além disso, marque quais são os números naturais consecutivos que ocupam os extremos destacados na reta numerada.



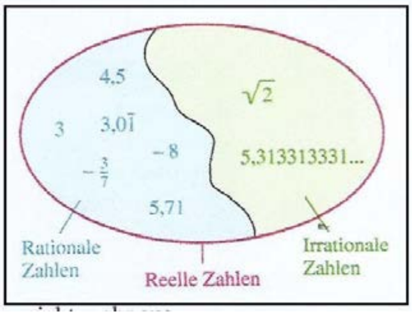
36) $\sqrt{13} + 3\sqrt{5}$ é maior ou menor que 10?

37) Como aproximar o valor de 2^{π} ?

38) Comparando os conjuntos $\mathbb{Q}$ e I, o que, na sua opinião, as figuras abaixo sugerem?



Fonte: Matemática.
Manoel Rodrigues Paiva. Editora Moderna – 2009.



Fonte: Elemente der Mathematik
Griesel, H., Postel, H. & Suhr, F..
Baden-Würtenberg, Scroedel – 2007.

39) (FUVEST) Quaisquer que sejam o racional x e o irracional y, pode-se dizer que:

(A) $x \times y$ é irracional

(B) $x \times y$ é racional.

(C) y^2 é irracional.

(D) $x + y$ é racional.

(E) $x + y$ é irracional.

40) (FUVEST - 2014) O número real x, que satisfaz $3 < x < 4$, tem uma expansão decimal na qual os 999.999 primeiros dígitos à direita da vírgula são iguais a 3. Os 1.000.001 dígitos seguintes são iguais a 2 e os restantes são iguais a zero.

Considere as seguintes afirmações:

i) x é irracional. ii) $x \geq 10/3$. iii) $x \times 10^{2.000.000}$ é um inteiro par.

Então,

(A) nenhuma das três afirmações é verdadeira.

(B) apenas as afirmações I e II são verdadeiras.

(C) apenas a afirmação I é verdadeira.

(D) apenas a afirmação II é verdadeira.

(E) apenas a afirmação III é verdadeira.

Atividade	Objetivo(s) da questão / Bilhetes ao professor	Expectativas relativas à implementação
31	Explicitar a necessidade de ampliar o universo numérico dos racionais. Ao professor: ao longo da discussão, poderá muito bem surgir em aula o seguinte encadeamento de ideias, relativo ao número π: 1. *o conjunto dos números racionais é o conjunto das frações* 2. *fração é um quociente* 3. *π é o quociente entre o comprimento da circunferência e o diâmetro do círculo.* *Por tudo isto, podemos deduzir que π é um número racional!* Confrontando com a notícia trazida do Ensino Fundamental de que π é irracional, pode-se lançar a pergunta "Onde está o erro no argumento acima?" que pretende reiterar quão fundamental é a clareza das definições e dos conceitos para o eficaz entendimento das diversas ideias e questões matemáticas.	Aqui é esperado que os alunos travem! É consenso que muito pouco eles conhecem de números irracionais (uma das principais críticas que fazemos é que os alunos de 9º ano passam quase um trimestre em torno de um capítulo intitulado "Cálculo com Radicais" aplicando uma série de receitas e regras; no entanto, chegam muitas vezes ao Ensino Médio sem saber dizer, por exemplo, se $\sqrt{13}+3\sqrt{5}$ é maior ou menor do que 10). Espera-se que, para muitos alunos, o tema *números reais* será praticamente um conteúdo novo... Se isso acontecer, pode-se sugerir que se concentrem na diagonal de um quadrado de lado racional (por exemplo, igual a 1). Caso alguém lembre do número π, pode-se aproveitar a oportunidade para relembrar a sua definição e para informar que a prova de sua irracionalidade exige conhecimentos que não fazem parte do currículo das escolas brasileiras (e provavelmente de nenhuma escola do mundo, uma vez que tal prova envolve conteúdos de cálculo diferencial e integral).
32	Demonstrar que $\sqrt{2}$ é irracional. Ao professor: a argumentação matemática que permite responder a pergunta é por	Espera-se que, neste nível, os alunos já saibam que a resposta é negativa, mas que não saibam argumentar. Pode-se então justificar da seguinte forma: $1^2 = 1$ e $2^2 = 4$ e sabemos que se a,b são naturais e $a > b$ então $a^2 > b^2$. Portanto qualquer

	redução ao absurdo, recurso que também é utilizado em argumentos no nosso dia a dia, quando queremos mostrar que uma afirmação é válida e nos referimos a ela supondo o contrário e, a partir de tal hipótese, chegamos a uma contradição.	número natural maior do que 2 terá um quadrado maior do que 4. Assim, não existe número natural cujo quadrado é igual a 2. Pode-se então perguntar em seguida: existe algum número racional cujo quadrado é 2? Por quê? Como proceder para responder a esta pergunta? Aqui recomenda-se também lançar a discussão sobre “por que esta pergunta é de resolução mais difícil que a anterior? De onde vem esta dificuldade?”, esperando-se que os alunos reconheçam que é precisamente devido à densidade dos racionais, propriedade discutida na Atividade 28. Pode-se então questionar como os alunos fariam para tentar encontrar um tal racional é esperado que façam uso do seguinte procedimento (por cercanias): Procuramos um número racional d tal que $d^2 = 2$. Observe que $1{,}4 < d < 1{,}5$, pois $$(1{,}4)^2 = 1{,}96 \text{ e } (1{,}5)^2 = 2{,}25.$$ Tomando um número racional qualquer entre 1,4 e 1,5, por exemplo, a média aritmética entre 1,4 e 1,5, que é 1,45, podemos estreitar o intervalo ao qual pertence o número racional d, observando que: $$(1{,}45)^2 = 2{,}1025 \text{ e } 1{,}4 < d < 1{,}5 \rightarrow 1{,}4 < d < 1{,}45$$ Seguindo o procedimento, $(1{,}425)^2 = 2{,}030625 \text{ e } 1{,}4 < d < 1{,}45 \rightarrow 1{,}4 < d < 1{,}425$ $(1{,}4125)^2 = 1{,}99515625 \text{ e } 1{,}4 < d < 1{,}425 \rightarrow 1{,}4125 < d < 1{,}425$ Seguindo tanto quanto necessário com o raciocínio por cercanias, pode-se então chamar a atenção dos alunos que a estratégia por eles escolhida não nos está levando a uma representação finita e, se este vir a ser, de fato, o caso, nunca será possível afirmar, por este método por cercanias, que descobrimos um período para tal número racional. Em outras palavras, é possível que continuemos esse processo infinitamente sem nunca chegar a uma representação decimal finita, e neste caso, nunca teremos certeza sobre qual é o período da representação decimal (infinita) periódica de d. Neste momento, cabe então destacar que outra possível estratégia é fazer uso da representação fracionária de d, o que vai afinal reforçar uma outra vantagem da representação fracionária sobre a decimal. Os alunos talvez se questionem sobre

		se existe alguma diferença entre testar valores para a representação decimal e testar valores para a representação fracionária, momento ideal para serem estimulados a recorrerem ao raciocínio genérico e a desenvolver, com o professor, o argumento a seguir. Suponhamos que existe um racional $x = a/b$ tal que $x^2 = 2$. Como $a^2 = (-a)^2$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $a > 0$. Então, $$2 = x^2 = a^2/b^2 \rightarrow 2b^2 = a^2.$$ O inteiro a não é nem igual a 0 nem igual a 1, o mesmo ocorrendo com o inteiro b. Assim, existe fatoração em primos para os inteiros a^2 e $2b^2$. Contando o número de fatores primos envolvidos em tais fatorações, não é difícil concluir que, na fatoração em primos de $2b^2$, tem-se um número ímpar de fatores, enquanto que, na fatoração em primos de a^2, tem-se um número par de fatores, uma contradição. Assim, constata-se que, para expressar a medida de qualquer segmento de reta, os racionais positivos não são suficientes e, para dar conta desse problema, surge a necessidade de admitir a existência de novos números. Para nomear esses novos números que, junto com os racionais positivos, dão conta do objetivo de expressar a medida de qualquer segmento de reta, em contraposição ao nome “racionais”, escolheu-se o nome “irracionais” (positivos). Além disso, estende-se o conjunto de tais números irracionais positivos com os seus respectivos simétricos, o que não é nenhuma novidade porque o procedimento repete o que foi feito para construir $\mathbb{Z}$. Todos os números estudados até agora formam o chamado conjunto dos números reais.
33	Destacar uma habilidade que deveria ser imediata a partir do estudo de irracionais no Ensino Fundamental: saber calcular aproximações racionais para os números reais e, com elas, localizar aproximadamente um número irracional na	Espera-se que os alunos respondam $\sqrt{2} + \sqrt{3} \cong 1{,}4 + 1{,}7 = 3{,}1$, portanto $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ está entre 3 e 4. Se isto ocorrer, pode-se perguntar: que garantia temos que as próximas casas decimais destes irracionais não são tais que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ se torna um pouco maior do que 4? Estimula-se assim, que os alunos trabalhem com a cercania:

	reta numerada. Ao professor: Sugere-se que sejam propostos outros exemplos de aproximações para números reais, tais como $\sqrt[3]{2}$, a fim de evitar que os números reais sejam encarados pelos alunos apenas como símbolos formais, além de oportunizar maior familiaridade com os números irracionais.	$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ e $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8,$ logo, $1{,}4 + 1{,}7 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 1{,}5 + 1{,}8$ $3{,}1 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}3.$ Portanto, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ está, de fato, entre 3 e 4, mas se quisermos ser mais precisos, podemos dizer que está entre 3,1 e 3,3, aproveitando para destacar que, o que nos garante que estaremos sendo mais precisos, é o fato de estarmos diminuindo o tamanho do intervalo onde se encontra o número $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
34	Evidenciar que uma precisão de décimos na representação decimal de cada parcela não gera uma precisão de décimos na representação decimal da soma.	Espera-se que os alunos usem a resolução anterior e percebam que $3{,}1 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}3,$ o que não determina uma aproximação com uma casa decimal de precisão para $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, pois tal cercania não nos permite decidir se $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é da forma $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}1....$ ou da forma $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}2....$. Espera-se, assim, que os alunos concluam que a resposta à pergunta é negativa.
35	Evidenciar que, para melhorar a precisão de um resultado, é necessário melhorar a precisão de cada um dos termos que o originaram, no caso, as parcelas da adição. Ao professor: pode-se aproveitar a oportunidade para destacar que é possível aproximar números irracionais por meio de números racionais com a precisão que se quiser, o que faz com que números racionais sejam suficientes para lidar com a maioria das atividades práticas do dia-a-dia.	Espera-se que os alunos respondam que, para isso, teríamos que ter uma maior precisão para as aproximações racionais de $\sqrt{2}$ e de $\sqrt{3}$, e que tentem aproximações com duas casas decimais de precisão para eles. Por exemplo, usando $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ e $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$, tem-se $1{,}41 + 1{,}73 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 1{,}42 + 1{,}74$ $3{,}14 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}16,$ o que fornece uma aproximação para $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ com precisão de uma casa decimal.
36	Ressaltar a possibilidade de fazer-se uso do mesmo processo (de cercanias), mesmo quando estão envolvidas mais de uma operação.	Espera-se que os alunos façam sozinhos (se antes precisaram de ajuda) o processo utilizado anteriormente, (está-se aqui partindo da hipótese de que este conteúdo é completa novidade para os alunos). Ressaltando que estamos aqui admitindo válidas as propriedades das operações

com números reais (ou seja, que estamos aceitando a intuição sobre a validade das propriedades das operações com números reais, bem como a compatibilidade da ordem com as operações de adição e multiplicação, por exemplo, a compatibilidade da ordem com a multiplicação, como na passagem

$$2 < \sqrt{5} < 2{,}5 \rightarrow 3\times 2 < 3\times\sqrt{5} < 3\times 2{,}5).$$

Assim, espera-se que os alunos façam o seguinte argumento:

$$\sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16} \qquad e \qquad \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9},$$

ou seja,

$$3 < \sqrt{13} < 4 \qquad e \qquad 2 < \sqrt{5} < 3, \qquad (1)$$

portanto, $3\times 2 < 3\times\sqrt{5} < 3\times 2{,}5$

ou seja, $6 < 3\sqrt{5} < 7{,}5.$

Logo,

$$3 + 6 < \sqrt{13} + 3\sqrt{5} < 4 + 7{,}5$$

$$9 < \sqrt{13} + 3\sqrt{5} < 11{,}5$$

Espera-se que os alunos notem que, com as aproximações feitas em (1), não é possível responder a pergunta. E que, ao serem desafiados com a pergunta “Então o que fazer?”, partam de melhores aproximações para $\sqrt{13}$ e $3\sqrt{5}$. Por exemplo,

$$(3{,}6)^2 = 12{,}96 \text{ e } (3{,}7)^2 = 13{,}69 \rightarrow 3{,}6 < \sqrt{13} < 3{,}7$$

$$(2{,}2)^2 = 4{,}84 \text{ e } (2{,}3)^2 = 5{,}29 \rightarrow 2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$$

$$3{,}6 < \sqrt{13} < 3{,}7 \qquad e \qquad 2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3 \qquad (2)$$

portanto, $3 \times 2{,}2 < 3\sqrt{5} < 3 \times 2{,}3$

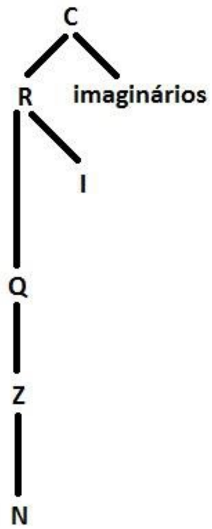
ou seja, $6{,}6 < 3\sqrt{5} < 6{,}9.$

Assim,

$$3{,}6 + 6{,}6 < \sqrt{13} + 3\sqrt{5} < 3{,}7 + 6{,}9$$

		$10{,}2 < \sqrt{13} + 3\sqrt{5} < 10{,}6$. Assim, as desigualdades obtidas em (2) já são suficientes para responder a questão.
37	Conscientizar o aluno de que no primeiro ano do Ensino Médio, tal número provavelmente fazia parte de seus estudos, mas provavelmente na ocasião ele não sabia explicar seu significado, nem sequer calcular sua parte inteira. Justificativa para esta questão: Os alunos no primeiro ano do Ensino Médio estudam função exponencial, que tem para domínio todos os reais. Aqui a ideia é que o aluno não se assuste com esse tipo de número cujo significado ele não sabia explicar, muito menos estimar pois, agora, já tendo passado pelas questões anteriores, certamente será natural que ele comece dizendo que se se pretende que as propriedades das operações com os racionais continuem válidas para os reais, então é natural que, uma vez que $3 < \pi < 4$, tenhamos $2^3 < 2^\pi < 2^4$, ou seja, $8 < 2^\pi < 16$. Não se trata aqui de aprofundar-se na discussão de que a função exponencial mantém a monotonicidade mesmo para expoentes irracionais mas de salientar-se o argumento acima, e concluir: $2^\pi \in [8;16]$. Ao professor: Deve ser salientado também	Espera-se que os alunos precisem revisar o conteúdo de potenciação com expoentes racionais ao serem desafiados a obter maior precisão para 2^π.

	que, como π = 3,14159... , também aqui é possível cehgar-se a uma maior precisão: $2^{3,1} < 2^{\pi} < 2^{3,2} \rightarrow$ $2^{31/10} < 2^{\pi} < 2^{32/10} \rightarrow$ $\sqrt[10]{2^{31}} < 2^{\pi} < \sqrt[10]{2^{32}}$. Claro que o cálculo, a partir daqui, requer muito mais trabalho. Cabe então reiterar aos alunos que números reais são certamente elementares para a matemática como ciência, mas, no nosso dia a dia, em geral lidamos apenas com números inteiros e racionais.	
38	Chamar a atenção dos alunos para a inadequação da representação por diagrama dos conjuntos numéricos, todas encontradas em livros didáticos (brasileiros e estrangeiros), no que diz respeito à comparação por cardinalidade. Ao professor: pode-se aqui aproveitar a oportunidade para confirmar o que foi anunciado anteriormente: $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são ambos conjuntos densos, isto é, não faz sentido nesses conjuntos a noção de sucessor, porém um conjunto é enumerável e o outro não (destacamos que fica a critério do professor fazer uso desse conceito e dessa no-menclatura em sala de aula). Esta diferença pode fazer parte do quadro comparativo final que recomendamos construir (última questão da Atividade Complementar)	Espera-se que os alunos observem que, a partir das figuras, é possível intuir que existem mais números racionais do que irracionais. Daí, devem ser instigados a refletir sobre a validade desta afirmação. Como parte da proposta, pode ser utilizada a seguinte atividade com o dado de dez faces, que tem o objetivo de evidenciar, intuitivamente, que existem muito mais números irracionais do que reais: utilizando um dado equilibrado de 10 faces numeradas de 0 a 9, lançamos o dado diversas vezes, anotando, a cada vez, o número que caiu virado para cima, formando uma lista de números. Se fizermos isso algumas vezes e, imaginando que pudéssemos repetir o lançamento infinitas vezes e pensarmos nessa lista como a representação decimal de um número real entre 0 e 1, será que existe alguma chance de que, a partir de um certo momento, defina-se uma repetição nos resultados dos lançamentos de tal forma a formar-se uma dízima periódica e, portanto, construir-se, com os infinitos lançamentos, um número racional ?

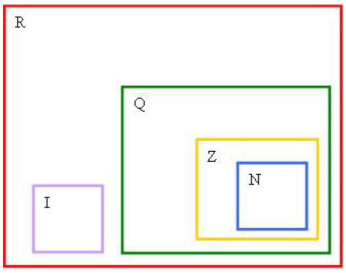
	Após a conclusão de que há (muito) mais números irracionais do que racionais, pode ser então lançada a questão “Que outras representações poderiam ser utilizadas procurando evitar tal erro conceitual?” Salientamos (ao professor) que, se levarmos em conta a cardinalidade dos conjuntos, não há diagrama de Venn possível para representá-los. Mas uma ideia para utilizar em sala de aula, que ilustra também a relação de ordem entre os conjuntos é a seguinte:  Destacamos que toda representação tem suas limitações, mas o diagrama na forma de reticulado procura evidenciar apenas a	

	relação de inclusão, e o fato de os conjuntos $\mathbb{Q}$ e I não estarem no mesmo nível sugere que, talvez, ambos não tenham a mesma cardinalidade.	
39	Chamar a atenção dos alunos que discussões sobre números reais fazem parte também de concursos e/ou vestibulares.	Espera-se que alguns alunos respondam e argumentem: (A) Falsa. Basta tomar $x = 0$. (Mas, se incluirmos a hipótese $x \neq 0$, a sentença é verdadeira.) (B) Falsa. Basta tomar $x = 1$ e $y = \sqrt{2}$, uma vez que já provamos que é irracional. (C) Falsa. Basta tomar $y = \sqrt{2}$, pois $(\sqrt{2})^2 = 4$ (D) Falsa. Basta tomar $x = 0$ e $y = \sqrt{2}$, uma vez que já provamos que é irracional. (E) Verdadeira. Por absurdo, se $x + 2y = z$ fosse racional então z seria da forma c/d. Como x é racional, x é da forma a/b. Assim, $x + 2y = z \rightarrow a/b + 2y = c/d \rightarrow 2y = c/d - a/b \rightarrow y = (bc-da)/2db$, ou seja, y seria racional. Contradição!
40	Chamar a atenção dos alunos que discussões sobre números reais fazem parte também de concursos e/ou vestibulares. Ao professor: esta questão conclui a revisão sobre números, pois envolve números irracionais, racionais e inteiros pares (ou naturais).	Espera-se que alguns alunos respondam "alternativa E" e argumentem: Pelo enunciado, o número é da forma: $$x = 3,\underbrace{333\ldots3}_{10^6-1}\underbrace{222\ldots2}_{10^6+1}0000\ldots = 3,\underbrace{333\ldots3222\ldots2}_{2\times10^6\ a\lg arismos}\overline{0}$$ *i)* (FALSA) Como o número apresenta um número finito de algarismos não nulos à direita da vírgula, ele é um número racional. *ii)* (FALSA) $10/3 = 3{,}333\ldots = 3{,}\overline{3}$ (dízima periódica). É possível observar que $3{,}333\ldots > 3{,}333\ldots322\ldots2 = x$. *iii)* (VERDADEIRA) $x.10^{2.000.000} = 3{,}3333\ldots322\ldots22 \times 10^{2.000.000} = 3333\ldots222\ldots$22 que é um inteiro par. Basta contar o número de algarismos não nulos na parte decimal de x.

		Em geral, os alunos não pensam em números da forma como está mencionado nesta questão e que são muito distantes da sua realidade. No entanto, podem ser bem compreendidos quando se tem um certo conhecimento sobre os conjuntos numéricos. É isso o que se espera que aconteça ao final desta revisão.

5.2 ATIVIDADE COMPLEMENTAR

1. Analisando a representação dos conjuntos numéricos, pergunta-se: na sua opinião, seria essa uma representação razoável para resumir esquematicamente esses conjuntos ? Justifique.



2. Como você explica a "regra de sinais" para a igualdade $(-3)\times(-4)=12$?

3. O valor de $\sqrt{0,\overline{4}}$ é:

(A) $0,\overline{2}$

(B) $0,\overline{3}$

(C) $0,\overline{4}$

(D) $0,\overline{5}$

(E) $0,\overline{6}$

4. Quantos números inteiros pertencem ao intervalo $[-\sqrt{8}\ ;\ \sqrt{48}\ ]$?

(A) Cinco.

(B) Seis.

(C) Sete.

(D) Oito.

(E) Nove.

5. Qual é o menor valor do natural *b* para o qual exista um natural *a* tal que $\frac{3}{5}<\frac{a}{2}<\frac{b}{5}$?

6. Com relação à reta numerada abaixo, em qual alternativa encontramos as melhores aproximações para o número real *a*?

---------------------|-------------------------|---------------------------|--------------------

$\sqrt{3}$ $\qquad\qquad$ $-a$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{7}$

(A) $[2{,}5\,;3]$

(B) $[1{,}7\,;2{,}6]$

(C) $[-2{,}7\ ;-1{,}5]$

(D) $[1{,}5;+\infty[$

(E) $]-\infty;-3]$

7. Se x e y são números reais que satisfazem, respectivamente, às desigualdades $2 \leq x \leq 15$ e $3 \leq y \leq 18$, então todos os números da forma x/y , possíveis, pertencem ao intervalo

(A) $[5, 9]$

(B) $\left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right]$

(C) $\left[\frac{3}{2}, 6\right]$

(D) $\left[\frac{1}{9}, 5\right]$

(E) $\left[-\frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right]$

8. Marque a alternativa que corresponde à soma $1{,}\bar{8} + \frac{1}{9}$.

(A) $\frac{33}{25}$

(B) $\frac{10}{9}$

(C) $\frac{10}{19}$

(D) 2

(E) $\frac{7}{55}$

9. O número $-2\sqrt{7}$ é maior ou menor que -5 ? Justifique.

10. Coloque V ou F, justificando todas as suas respostas:

( ) O produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

( ) A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.

( ) A diferença entre dois números irracionais pode ser um número racional.

( ) Entre os números reais 3 e 4 existe apenas um número irracional.

( ) Entre dois números racionais distintos existe pelo menos um número racional.

( ) A diferença entre dois números inteiros negativos é sempre um número inteiro negativo.

11. Quaisquer que sejam os números racionais *a* e *b*, Podemos afirmar que é INCORRETA a alternativa:

(A) $a/2$ é um número racional.

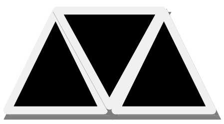
(B) $\sqrt{a}$ é um número racional.

(C) $a - b$ é um número racional.

(D) $a + b$ é um número racional.

(E) $a \times b$ é um número racional.

12. A figura abaixo é composta pela justaposição de 3 triângulos equiláteros congruentes.



i) Faça um desenho tal que a figura acima corresponda a 3/4 do mesmo.
ii) Faça um desenho tal que a figura corresponda a 3/2 do mesmo.

13. Considerem-se as proposições

I. π é um número racional.

II. existe um número racional cujo quadrado é 2.

III. se $a < 0$, então $-a > 0$.

IV. todo número primo é ímpar.

Com base nelas, é correto afirmar que:

(A) A proposição I é verdadeira.

(B) A proposição II é verdadeira.

(C) A proposição III é verdadeira.

(D) As proposições I, II e IV são verdadeiras.

(E) As proposições II, III e IV são verdadeiras.

14. Qual o menor valor de m e de n tais que

i) $\frac{3}{5} < \frac{m}{10^n} < \frac{4}{5}$?

ii) $\frac{3}{7} < \frac{m}{10^n} < \frac{4}{5}$?

15. Assinale, no quadro comparativo abaixo, qual(is) conjunto(s) satisfaz(em) cada uma das propriedades a seguir.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
Tem um primeiro elemento				
Existe antecessor para qualquer elemento				
Existe sucessor para qualquer elemento				
É um conjunto denso				
Cobre toda a reta numerada				
Expressa a medida de qualquer segmento de reta				
Admite uma correspondência um a um com o conjunto $\mathbb{N}$				

6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sabemos que, em todos os tempos, a necessidade de contar e de medir sempre esteve presente, fato esse que justifica o assunto “números” tornar-se primordial no ensino e na aprendizagem da matemática.

Nesta dissertação, apresentamos uma revisitação aos conjuntos numéricos com uma proposta de atividades que visam fazer com que os alunos do início do Ensino Médio reflitam sobre características e propriedades dos diferentes conjuntos numéricos. Acreditamos que, com uma revisão mais aprofundada do que aquela que é usualmente feita nos livros didáticos para o Ensino Médio, os alunos têm a oportunidade de refletir, agora com maior maturidade, sobre números que lhes foram apresentados, por exemplo, nas séries iniciais, aprofundando seus conhecimentos sobre eles. Com tal proposta, tem-se ainda mais uma oportunidade para desenvolver, logo no início do Ensino Médio, o raciocínio matemático, que é indispensável nas séries finais da educação básica, salientando aspectos importantes da ciência Matemática.

Para a execução da proposta didática, fizemos, inicialmente, uma leitura de diversos autores que tratam do assunto (conforme explicitamos durante essa dissertação) e analisamos alguns livros didáticos aprovados no PNLD de 2015.

A pesquisa não é uma tradição do professor brasileiro do Ensino Médio. Normalmente, o livro didático adotado pelo professor é sua única fonte de referência para a sua prática (PCN, 1998). A adoção de um material que desenvolva o conteúdo de forma equivocada, com linguagem não adequada ou mesmo com erros oportuniza que o aluno fixe tais noções equivocadas ou venha a ter dificuldades para aprender os conteúdos exigidos. A desconstrução desse conhecimento, uma vez internalizado, é uma tarefa árdua e a tendência é o aluno carregar consigo esses erros ao longo de sua trajetória até o ensino superior. Se isso ocorre com um aluno que busca uma licenciatura em Matemática, podemos imaginar que os erros, se não detectados na graduação, serão reproduzidos na sala de aula desse futuro professor.

Em vista desse fato, deve-se ter especial atenção à análise dos livros didáticos, não só por alunos da graduação em Matemática, mas principalmente por professores em exercício que costumam usar somente o livro didático como fonte para as suas aulas, tornando-os habilitados a ter um olhar mais crítico ao adotarem o material de apoio. Se temos preocupação com o ensino da Matemática, precisamos dedicar especial atenção à análise crítica do livro didático pois, este deve ser claro e objetivo, com uma adequada sequência de conteúdos e sem erros ou equívocos (HOWSON, 2013). Portanto, nesta análise, apontamos algumas incoerências no decorrer do capítulo de revisão dos conjuntos numéricos, bem como alguns conceitos inadequados e definições mal encaminhadas e que consideramos ruins do ponto de vista da formação matemática do estudante.

Uma vez feita essa análise e a busca de outros autores que falam de números e/ou do ensino de números, elaboramos uma proposta alternativa de revisão que foi aplicada a uma turma de terceiro ano do Ensino Médio, com 40 alunos de uma escola privada da cidade de Porto Alegre, RS. Essas aulas ocorreram durante 3 semanas em um período de sondagem onde se revisam e se exploram conteúdos de séries anteriores com o propósito de melhor preparar os alunos para o que será abordado no decorrer do ano. Foram 12 aulas consecutivas entre fevereiro e março de 2015 que possibilitaram a execução do trabalho; na 13ª aula fizemos uma avaliação para verificar o aprendizado dos alunos. Destacamos ainda que, o fato de a proposta ter sido aplicada em uma turma de terceiro ano, não ocasionou mudanças significativas nas expectativas que foram pensadas para uma turma de início de Ensino Médio.

A proposta em questão partiu de um questionário com o objetivo de aproveitar os primeiros momentos do aluno no Ensino Médio para retomar e discutir muitas das dificuldades usuais que surgem durante o Ensino Fundamental no que diz respeito a números, ao mesmo tempo em que ele se aprofunda nas questões que oportunizam um maior esclarecimento sobre a ciência matemática. Assim, ao desenvolvermos e implementarmos uma sequência didática que contemplasse esta proposta, tivemos não só o cuidado de tentar contemplar as orientações mencionadas nas literaturas consultadas, como também:

- fazer uso de uma linguagem clara e facilitadora aos estudantes;
- estimular nos alunos a reflexão;
- introduzir os alunos ao pensamento matemático, através de explicações que garantissem uma conclusão correta dos conceitos envolvidos em cada conjunto numérico;
- relacionar algumas propriedades de cada conjunto numérico fazendo ligações com o que passa a valer e o que deixa de valer com a ampliação do universo numérico.

Preocupamo-nos também em não reproduzir nem estimular o uso de “receitas” na resolução das atividades propostas, mas sim, em sugerir encaminhamentos que levassem o aluno a construir o conhecimento, e que o mesmo tenha, de fato, clareza da informação que está adquirindo. Confirmou-se, com isso, a expectativa sobre a dificuldade dos alunos com os conceitos que foram mal construídos e/ou sedimentados no ensino fundamental. Por exemplo, no nono ano, se estuda, durante um grande período letivo, um capítulo presente nos livros didáticos intitulado *Cálculo com Radicais*, no qual se trabalha com diversas "receitas" e no qual é esperado que o aluno simplesmente memorize o processo, sem ser provocado com uma questão do tipo "$\sqrt{13}+3\sqrt{5}$ é maior ou menor que 10"?

Durante a implementação, conseguimos perceber, gradativamente, a melhora dos alunos com essas questões e dificuldades. Em nossa avaliação, a estratégia utilizada para trabalhar tais situações fez com que os estudantes se envolvessem no pensamento matemático, a ponto de, ao final da proposta, já tornar-se comum os mesmos procurarem justificar e levantar questões de ligação, similaridades e diferenças entre cada conjunto numérico estudado. Além disso, constatamos o crescimento de uma segurança nos alunos ao se posicionarem sobre a necessidade de ampliação de cada conjunto numérico, sobre as principais relações entre eles, sabendo citar diferenças e propriedades de cada conjunto.

Destacamos, finalmente, que, além da motivação despertada nos alunos durante a implementação da sequência didática, consideramo-nos satisfeitos com os resultados obtidos a partir dessa implementação, com a qual procuramos, e achamos ter conseguido (pelo menos com os 61,5% dos alunos aprovados na avaliação realizada ao final da implementação), aprimorar o estudo de revisão dos conjuntos numéricos no início do ensino médio, pois sabemos da grande importância desse tema na Matemática.

Este trabalho já teve seus desdobramentos durante o ano de 2015 com três oficinas oferecidas sobre o tema; em uma delas, foi possível perceber também entre os professores participantes momentos de "alívio" por verem esclarecidas algumas de suas dúvidas sobre números, como, por exemplo, a questão "Quem é maior, $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$?" No entanto, este trabalho terá atingido plenamente seu objetivo se puder ser útil ao aprimoramento do trabalho docente de outros professores de Matemática. Esperamos ter apresentado a proposta com clareza e objetividade com vistas a este resultado.

REFERÊNCIAS

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.; SILVER, E. Rational-Number Concepts. In LESH, R.; LANDAU, M. (eds) **Acquisition of Mathematical Concepts and Processes**. Orlando: Academic Press, p.91-126, 1983.

BNCC. **Base Nacional Curricular Comum**, 2015. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio Acesso em: 01 de outubro de 2015.

BRASIL. PCNEM – **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio Secretaria de Educação Média e Tecnológica do Ministério da Educação**. Brasília: SEMAT/MEC, 2002.

BRASIL. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Linguagens, códigos e suas tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002.

BRASIL. PNLD 2015 – **Guia de livros didáticos: matemática: ensino médio**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. V.2 - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DEGENSZAJN, D. IEZZI, G. ALMEIDA, N. DOLCE, O. PÉRIGO, R. **Matemática Ciência e Aplicações,** v.1. São Paulo: Saraiva, 2013.

DICKSON, L.; BROWN, M.; GIBSON, O. ***Children Learning Mathematics*****: A teachers guide to recent research**. London: Schools Council Publications, 1993.

FERREIRA, J. **A Construção dos Números**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção Textos Universitários).

FISHBEIN, E.; JEHIAM, R.; COHEN, D. **The concept of irrational numbers in highschool students and prospective teachers**. *Educational Studies in Mathematics*, 29, p.29-44, 1995.

GIRALDO, V. - RANGEL, L. - RIPOLL, C. C. **Comparando Grandezas**. Oficina disponível em <http://anpmat.sbm.org.br/simposio-nacional-2/index.php/materiais>. Acesso em 02 de novembro de 2015.

GIRALDO, V. - RANGEL, L. - RIPOLL, C. C. **Livro do Professor de Matemática da Escola Básica**. SBM, *preprin*t.

HOTEL de Hilbert. Direção de Pedro Siaretta. 10’05’’. Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=pjOVHzy_DVU>. Acesso em 31 de outubro de 2015.

HOWSON, G. **The development of mathematics textbooks: historical reflections from a personal perspective**. ZDM, Volume 45, Issue 5, September 2013.

KLEIN, F. **Matemática de um Ponto de Vista Superior**. V.1. Parte I Aritmética. SPM, Lisboa, 2009.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática,** v.1**.** São Paulo: Moderna, 2013.

LIMA, Elon Lages. **Exame de textos: Análise de livros de matemática para o Ensino Médio**, 1 ed. Rio de Janeiro, 2001.

MOREIRA, Plínio C. **O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica**, Minas Gerais, 2004. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais.

PAIVA, M. **Matemática Paiva,** v.1**.** São Paulo: Moderna, 2013.

RIPOLL, J. B., RIPOLL, C. C., SILVEIRA, J. F. P. **Números Racionais, Reais e Complexos**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011.

SINCLAIR, H.; SINCLAIR, A. Children´s mastery of written numerals and the construction of basic number concepts. In HIEBERT, J. (ED). ***Conceptual and procedural knowledge:*** **the case of mathematics**. N J: Lawrence Erlbaum, p.59-74, 1986.

SOARES, E.F.; FERREIRA, M.C.C.; MOREIRA, P.C. ***Números racionais e reais*****: as concepções dos alunos e a formação do professor.** Relatório de pesquisa. Belo Horizonte: SPEC/UFMG, 1998.

SOUZA, J. **Novo Olhar – Matemática,** v.1**.** São Paulo: FTD, 2013.

SOWDER, J.; ARMSTRONG, B.; LAMON, S.; SIMON, M.; SOWDER, L.; THOMPSON, A. **Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades**. Journal of Mathematics Teacher Education, 1, p.127-155, 1998.