UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

RODRIGO FRANCISCO LAZAROTTI

O ENSINO DE FUNÇÕES ATRAVÉS DO USO DE TAXAS DE VARIAÇÃO EM PROBLEMAS PRÁTICOS.

PORTO ALEGRE
2015

RODRIGO FRANCISCO LAZAROTTI

O ENSINO DE FUNÇÕES ATRAVÉS DO USO DE TAXAS DE VARIAÇÃO EM PROBLEMAS PRÁTICOS.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito Parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Maria Cristina Varriale

Porto Alegre

2015

RODRIGO FRANCISCO LAZAROTTI

O ENSINO DE FUNÇÕES ATRAVÉS DO USO DE TAXAS DE VARIAÇÃO EM PROBLEMAS PRÁTICOS.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito Parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Matemática.
Orientadora: Maria Cristina Varriale.

Aprovado em 08 de Outubro de 2015.

BANCA EXAMINADORA

____

(examinador 1)

____

(examinador 2)

____

(examinador3)

AGRADECIMENTOS

Agradeço...

...à minha orientadora Maria Cristina Varriale pelos ensinamentos e pelas correções aos meus equívocos, pois deles derivou meu aprendizado. E também por toda a dedicação e acompanhamento durante o desenvolvimento do trabalho.

...à Universidade Federal do Rio Grande do Sul e aos professores do programa de Pós-Graduação pela oportunidade e incentivo.

...à minha família pelo apoio, incentivo, pela compreensão da minha ausência em determinados momentos e pelo afeto e amor. Em especial à minha esposa pela motivação e ajuda, pelos aconselhamentos e pelo companheirismo, e à minha filha, Alice, pelo sorriso e afeto sempre cativantes nas horas difíceis.

...à banca examinadora pelas contribuições, considerações e críticas construtivas que virão, visando qualificar este trabalho.

...a todos aqueles que se fizeram presentes, que se preocuparam e que torceram pelo meu sucesso.

RESUMO

Esta pesquisa tem a finalidade de apresentar uma atividade de Ensino de Funções, usando para isso, as diferentes taxas de variação envolvidas. Essa atividade baseia-se no uso de problemas que possam ser formulados de modo a levar ao aprendizado de Funções: afim, quadrática e exponencial. A proposta traz à tona as idéias de pensadores no campo do aprendizado via uso de problemas em sala de aula, destacando-se entre eles os estudiosos: Geogia Polya, Juan Ignacio Pozo e Maria Del Puy Pérez Echeverría, sobre os quais está embasado este trabalho. Com base nesses estudiosos e outros pesquisadores, procurou-se enfatizar o valor que o ensino com problemas contextualizados pode ter no aprimoramento do aprendizado dos alunos. A pesquisa foi desenvolvida na Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha com alunos do 1º ano do Ensino Médio do curso de Técnico em Eletrônica. Foi aplicada uma sequência didática envolvendo problemas de matemática, física e do campo da eletrônica, que podiam ser solucionados sob o enfoque de taxas de variação, e a partir daí, o estudo das funções envolvidas. As atividades tinham o intuito de mostrar aos alunos um novo formato de conhecimento, que aproximava o conteúdo de matemática estudado em sala de aula, daquele praticado no curso de técnico em eletrônica. A fim de avaliar os resultados da sequência didática, foram aplicados um teste inicial e um teste final em duas turmas, sendo uma delas (a turma 4123) a de aplicação da proposta, e a outra (a turma 4124) a de controle, a fim de estabelecer um comparativo entre ambas. Desta forma, foi possível estimar efeito da proposta, no aprendizado dos alunos. Por fim, realizamos uma análise dos resultados, bem como uma avaliação critica da proposta de Ensino, e concluímos que a atividade tinha atingido em boa parte o seu objetivo inicial, que era ensinar a partir das taxas de variação envolvidas em alguns problemas, para depois construir as funções que desejamos estudar.

Palavras-Chave: Funções, Taxas de Variação, Aprendizado via Problemas.

ABSTRACT

This work aims to propose a Function Teaching activity, starting from the different rates of change involved. This activity is based on the use of practical problems which may be formulated so as to lead to learning functions: affine, quadratic and exponential. The proposal brings up the thinkers of ideas in the learning field via use of problems in the classroom, standing out among them the researchers: Geogia Polya, Juan Ignacio Pozo and Maria Del Puy Pérez Echeverría, on which is grounded this work. By presenting the ideas of these and other researchers, we tried to emphasize the value that teaching through contextualized problems can have on student learning improvement, making their knowledge more significant. The research was conducted at the Foundation Technical School Liberato Salzano Vieira da Cunha with students of the 1st year of high school of the Technical Course in Electronics. A didactic sequence based on math, physics and electronics problems was applied, which could be solved starting from the rates of change involved, and then, the study of the functions was carried out. The activities were intended to show to our students a new knowledge format, bringing mathematics closer to the content practiced in the electronics technical course. In order to evaluate the results of the didactic sequence, an initial test and a final test were applied in two groups, one of which (class 4123) where the proposal was implemented, and the other (class 4124) was a control group, in order to make a comparison between both forms of teaching functions. So, it was possible to estimate the actual effect of the proposal on the student learning. Finally, we conducted an analysis of the results as well as a critical evaluation of the Teaching proposal and concluded that the activity had reached in good part its initial goal, which was to teach starting from the rates of change involved in some problems and then build the functions we want to study.

Keywords: Functions, Rates of change, Learning through Problems.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A presente pesquisa, na área de Ensino de Matemática, busca apresentar uma proposta de Ensino de Funções (Afim, Quadrática, Exponencial) a partir do estudo das taxas de variação envolvidas.

O uso de Funções em aulas de Matemática é sempre assunto recorrente, uma vez que tal conteúdo é visto e revisitado em várias oportunidades ao longo dos três anos do Ensino Médio. Por outro lado, a busca por novas metodologias de Ensino que possam auxiliar os alunos nos seus saberes deve ser um ato contínuo por parte dos professores. Neste contexto, propor atividades alternativas para o ensino de Funções, adotando uma abordagem relacionada com taxas de variação e demonstrando a sua aplicabilidade em problemas cotidianos, constitui a atividade principal desse trabalho.

A proposta consiste em identificar diversos problemas matemáticos, ou de outras disciplinas (Física, Química, Biologia, Eletrônica, etc.), a partir dos quais possamos analisar como variam as taxas de variação das suas variáveis dependentes em relação às suas variáveis independentes; adicionalmente, enfatizamos o quanto é relevante, em um problema, fazer a análise dimensional, isto é, verificar as unidades de medida envolvidas nas diversas atividades relativas ao problema em questão. Dessa forma, buscou-se apresentar uma forma de ensino, que inserisse o conhecimento das aulas de matemática na realidade do aluno.

O embasamento teórico deste estudo situa-se em trabalhos de estudiosos e educadores que tiveram um envolvimento com estudos de problemas, tanto no campo matemático, quanto no campo educacional. Destacamos aqui pensadores como: Pérez Echeverría e Pozo (1998) e Polya (1995) por suas concepções sobre o ensino via problemas. Nos referimos a outros pensadores e artigos, que também abordam a solução de problemas em aulas de matemática, seja corroborando idéias, ou ainda trazendo novos questionamentos acerca do assunto.

Essa proposta de Ensino foi aplicada entre os meses de junho e novembro de 2014, na Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha, em duas turmas de 1º ano do Ensino Médio do Curso de Técnico em Eletrônica. Ao longo da atividade foram desenvolvidos materiais, listas de problemas e estudos que envolviam atividades que visavam aplicar diferentes tópicos relacionados com taxas de variação, a saber: taxa de variação constante, taxa de variação média, taxa de variação instantânea e taxa de variação percentual constante, bem como as diferentes funções com estas relacionadas. Foram aplicados testes iniciais e finais nas duas turmas, sendo a turma 4123 a de aplicação da proposta e a turma 4124 a turma controle. Para apresentar com mais detalhe o efeito da nossa proposta de ensino, no aprendizado dos alunos, foram reproduzidas neste trabalho, as respostas de dois alunos para cada aspecto questionado.

O trabalho foi estruturado em quatro capítulos, como especificado a seguir.

Após apresentar, no capítulo 1, os referenciais teóricos que embasaram a pesquisa, o segundo capítulo contém o desenvolvimento da pesquisa, que envolveu a aplicação de listas de problemas sobre o estudo dos diversos tipos de taxas de variação que nos propusemos a enfocar, bem como as funções correspondentes., Para cada problema proposto, escolhemos duas respostas de alunos, as quais estão incluídas neste trabalho, a fim de ilustrar o seu aprendizado sobre os assuntos abordados.

No capítulo seguinte, nos reportamos aos testes iniciais e finais que foram aplicados durante a realização da proposta, tanto na turma 4123, na qual aplicamos nossa proposta de ensino, quanto na turma 4124, de controle. Para uma melhor conclusão sobre os resultados desta pesquisa didática, apresentamos no final deste capítulo, o teste estatístico de veracidade, para os resultados da comparação entre estes testes.

Por fim, reservamos o último capítulo para a discussão sobre os resultados da proposta de Ensino por nós experimentada, bem como sugestões de pesquisas subsequentes.

CAPÍTULO 1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 O USO DE PROBLEMAS COMO ATIVIDADE DE APRENDIZADO ESCOLAR

A escola deve ser um grande espaço de aprendizado contínuo e permanente, e sendo assim, os seus diferentes ambientes, conteúdos e disciplinas devem proporcionar situações que possam envolver, tanto alunos quanto professores, em atividades que estejam direcionadas ao aprendizado.

A busca por metodologias de ensino que venham a tornar o aprendizado mais prazeroso e de melhor aceitação pelos alunos tem levado diferentes estudiosos a elaborar teses e argumentações acerca do desenvolvimento do saber na sala de aula. Parte desses pensadores, dos quais podemos citar Clement e Terrazzan (2011), Sousa (2005), Reitz e Contreras (2012), Pérez Echeverría e Pozo (1998) e Polya (1995), tem concentrado seus esforços na elaboração e estudo do aprendizado via problemas..

O estudo matemático via problemas em sala de aula pode melhorar a compreensão do aluno sobre componentes do conteúdo, tais como: linguagem matemática, visualização de figuras geométricas, utilização de fórmulas e equações. A validação da estratégia de propor atividades visando melhorar o aprendizado dos alunos e, por conseqüência, o seu interesse por matemática, é bem ilustrada por Sousa (2005, p. 3):

> A resolução de problemas é uma importante contribuição para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, criando no aluno a capacidade de desenvolver o pensamento matemático, não se restringindo a exercícios rotineiros desinteressantes que valorizam o aprendizado por reprodução ou imitação.

A resolução de problemas é uma parte importante do aprendizado dos alunos, pois propõe atividades que os desafiem de tal forma que os mesmos sejam capazes de motivar-se ao extremo para resolvê-los. Pérez Echeverría e Pozo (1998) debruçam-se sobre o assunto como poucos, avaliando as diferentes características de cada área do conhecimento. Estes autores acreditam que aulas não só de matemática, mas também de ciências (física, química, bologia), de ciências humanas e de outras áreas, podem apresentar atividades que envolvam e desenvolvam nos alunos argumentos e técnicas de resolução de problemas.

Eles fazem, entretanto, uma clara distinção entre problemas e exercícios de fixação, com podemos perceber em:

> Em outras palavras, sem compreensão da tarefa os problemas se transformam em pseudoproblemas, em meros exercícios de aplicação de rotinas aprendidas por repetição e automatizadas, sem que o aluno saiba discernir o sentido do que está fazendo e, por conseguinte, sem que possa transferi-lo ou generalizá-lo de forma autônoma a situações novas, sejam cotidianas ou escolares. (PÉREZ ECHEVERRÍA; POZO,1998, p. 15).

Os autores defendem situações-problema em que os alunos possam construir, compreender, desenvolver e realizar uma estratégia de resolução de atividades, sendo que essa estratégia pode ser realizada de forma diferente por outro colega, isto é, desenvolvimentos diferentes que podem levar a soluções iguais, o que nesse caso torna a atividade ainda mais interessante para o aluno.

De acordo com Pérez Echeverría e Pozo (1998) a apresentação de problemas em sala de aula deve estar relacionada com atividades que já foram trabalhadas em algum espectro do conteúdo: “[...] um problema é, de certa forma, uma situação nova ou diferente do que já foi aprendido, que requer a utilização estratégica de técnicas já conhecidas”. (PÉREZ ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p.16).

Pérez Echeverría e Pozo (1998) afirmam que a realização de exercícios de repetição é uma atividade que melhora e aperfeiçoa a utilização de técnicas na resolução de problemas, uma vez que são necessários conhecimentos prévios para a tomada de decisões e estratégias no caminho da resolução de um problema. Assim, ao realizar alguns exercícios de mera repetição, o aluno estará aprimorando, ou estabelecendo um novo conhecimento sobre determinado conteúdo, sendo que esse saber lhe será útil ao se deparar frente a um problema. O autor ilustra muito bem essa argumentação na seguinte passagem:

> O aluno que enfrenta pela primeira vez o problema de decidir qual das duas equipes de basquete é mais eficaz no arremesso deve recorrer a uma estratégia baseada na utilização de uma técnica (a comparação de duas razões através de um cálculo proporcional) previamente exercitada. Se o aluno desconhecer a técnica instrumental básica, não será capaz de utilizá-la para resolver um problema novo. (PÉREZ ECHEVERRÍA; POZO,1998. p. 17).

Além disso, mesmo um problema quando repetido algumas vezes, irátornar-se um exercício, uma vez que não representará um desafio novo, mas sim apenas uma repetição de dados anteriormente trabalhados. Por fim, os autores argumentam que a linha que liga um exercício a um problema forma “[...] um continuum educacional

[...]" (PÉREZ ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p. 17) sendo que não são claras as limitações entre ambas, o que torna ainda mais fundamental a relação entre elas.

Não existe uma regra específica para delimitar o que é exercício e o que é um problema, mas esta distinção é diretamente ligada aos saberes já existentes. Assim, pode um indivíduo ter conhecimentos prévios que tornem uma atividade um mero exercício de reprodução; caso, por exemplo, de um mecânico de automóveis ao realizar um conserto de um motor veicular. Por outro lado, mesmo tendo um conhecimento de mecânica, o mesmo indivíduo pode estar diante de um problema, ao realizar tal tarefa em um aeroplano, por exemplo.

Clement e Terrazzan (2011) também tratam da relação entre problemas e exercícios, e afirmam que vários professores que dizem trabalhar em sala de aula com problemas estão, na verdade, trabalhando com exercícios de fixação. Os autores vão mais além ao afirmarem que uma proposta via solução de problemas deve ser de tal forma desenvolvida que o seu aprendizado não deve estar restrito aos bancos escolares, mas deve encontrar-se no contexto do aluno.

Pérez Echeverría e Pozo (1998) fazem uso da expressão "sobreaprendidas" ao se referir à resolução de exercícios e atividades de fixação. As técnicas "sobreaprendidas" são situações rotineiras que são resolvidas com práticas contínuas dessas atividades. Nesse caso, sempre que se estiver frente a uma situação na qual o conhecimento prévio sirva para elucidar a situação, ou sempre que a atividade em questão for uma mera repetição de um saber já formado, se está usando esse conhecimento "sobreaprendido":

> [...] responder a uma 'defesa siciliana' pode ser um problema para um jogador de xadrez inexperiente, mas constitui um exercício para um jogador suficientemente experiente, que já automatizou as aberturas mais comuns. Consertar um circuito elétrico é um simples exercício para algumas pessoas, mas um problema complexo e trabalhoso para outras. (PÉREZ ECHEVERRÍA; POZO,1998, p. 16).

Pérez Echeverría e Pozo (1998) também faz uma defesa do uso de situações problema que venham, ou possam apresentar atividades de conhecimento real dos alunos. Nesse caso, ao se buscar trabalhar com problemas que apresentam situações mais concretas e reais aos alunos, professores e orientadores estão buscando atividades que possam ser utilizadas tanto em uma situação de estudo de um determinado conteúdo de Matemática (Funções Afim, Quadrática, Exponencial, Modular, etc.) ou algum conteúdo de Física (Movimento Retilíneo Uniformemente

Variado, Movimento Retilíneo Uniforme, Movimento de Queda Livre), quanto em uma situação prática em que tal atividade se aplique (gastos no mercado, distância percorrida até a sua casa, energia gasta no mês, consumo de energia elétrica, etc.).

O importante no ensino a partir de problemas, em sala de aula, é a possibilidade de fortalecer atividades que possam gerar nos estudantes um aprofundamento do conhecimento que lhes é proposto na escola, bem como despertar neles uma curiosidade de saber, que pode se dar através de situações envolvendo problemas. Um bom exemplo de tal fato são problemas que podem ser solucionados em uma determinada disciplina (Matemática, Física, etc.) com um formato de resolução específico, e cuja solução em outra disciplina (Economia, Química, etc.) pode ser bastante distinta da anterior. Ou seja, um problema de Função em Matemática pode constituir uma modelação do mercado de capitais na Economia, assim como um exercício de sistemas algébricos em Matemática pode ser utilizado para modelar um balanceamento químico. Porém, o aluno pode usar saberes anteriores em uma resolução, e então aperfeiçoá-los, melhorá-los e reutilizá-los em outros problemas.

Pérez Echeverría e Pozo (1998) afirmam que os problemas podem ser classificados de diferentes formas, sendo que uma dessas classificações clássicas foi desenvolvida por um grupo de psicólogos da Alemanha denominados Gestalt. Esse grupo apresentava suas idéias a partir do que as pessoas iriam desenvolver para realizar uma tarefa, distinguindo entre pensamento produtivo e pensamento reprodutivo. O pensamento produtivo consiste na resolução do problema através de uma organização ou reorganização dos conhecimentos envolvidos no problema; já o pensamento reprodutivo consiste na mera aplicação de saberes que são previamente conhecidos. É interessante perceber que esta classificação do pensamento (em produtivo e reprodutivo) é muito próxima da diferença já enfatizada entre exercícios e problemas.

Outra classificação citada pelos autores refere-se diretamente à formulação de problemas; estes podem ser bem definidos ou mal definidos. Um problema bem definido está ligado diretamente ao começo da atividade (pergunta objetiva, por exemplo: "Qual o valor de *x* na equação?"), seu caminho é desenvolvido ao longo do percurso de realização da tarefa (as operações realizadas ao longo da resolução da atividade), e sua solução é única (uma única resposta para o problema). Um bom exemplo de tal atividade são os problemas de matemática, cujo enunciado define uma situação objetiva a ser buscada; o método de resolução poderá usar operações matemáticas na sua resolução e a resposta final será um único valor.

Por outro lado, problemas mal definidos (ou mal estruturados) são aqueles cujo percurso de realização da atividade não é bem definido (cada indivíduo pode propor um caminho distinto na resolução do problema), o que pode levar a diferentes tipos de solução da atividade; um exemplo de tal atividade poderia ser a pergunta: "Qual a melhor solução para o crescimento do Brasil no curto prazo?" Observe que, nesse caso, cada indivíduo poderá apresentar diferentes soluções do problema, ou seja a resposta poderá ser: reduzir juros, ou reduzir o desemprego, ou ainda aumentar a cadeia produtiva.

Ao resolver problemas, especialistas e principiantes atuam de formas diferentes, uma vez que os especialistas estão mais familiarizados, ambientados com situações corriqueiras e possuem um bom domínio de suas áreas; e isto lhes facilita na escolha da estratégia a ser tomada. Além disso, dependendo da forma como a atividade se coloca para um especialista, tal tarefa pode tornar-se um mero exercício: “Poderíamos dizer que a perícia normalmente permite reduzir aquilo que para um principiante constitui um problema a um simples exercício de aplicação de rotinas automatizadas.” (PÉREZ ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p. 33).

Por outro lado, um principiante, ao tentar solucionar um problema, precisa buscar informações no enunciado, que possam indicar uma rota que o direcione até a solução. Desta forma, o principiante busca a cada novo problema usar estratégias que lhe sejam o mais cabível na solução das atividades, enquanto o especialista está mais interessado na resposta final, não se concentrando tanto no roteiro de solução.

O aprendizado via solução de problemas pode levar o aluno a identificar diversas situações de atividades que precisam ser resolvidas. Assim, será possível criar um conhecimento novo a cada nova experiência de contato com saberes inusitados. Além disso, o aluno e o professor devem estar preparados para não reduzir essa nova busca a uma mera fragmentação de saberes já trabalhados em aula. Em particular, problemas de Física e de Química não podem ficar restritos apenas a informações matemáticas que são dominadas pelos alunos. Por exemplo, todo o conhecimento que envolver força (Física), ou balanceamento químico (Química) não deve ficar restrito apenas aos cálculos já estudados, mas sim sobre todo o saber desenvolvido sobre esses conteúdos.

Uma grande parte do desenvolvimento de conhecimento via a realização e a solução de problemas requer um passo a passo, um pequeno entendimento do que pode ser ou não individualizado. Pérez Echeverría e Pozo (1998) apresentam um roteiro que foi bastante difundido pelo pesquisador Polya (1995) na área de solução de problemas matemáticos. Segundo Polya (1995), os problemas devem ser resolvidos de tal forma que o individuo seja capaz de verificar em que situação ele está e para qual situação deseja ir; assim, através desse prévio conhecimento, será capaz de montar uma estratégia para a resolução das atividades que se apresentam.

1.2 CONHECENDO UM PROBLEMA DE MATEMÁTICA

O conteúdo desenvolvido em matemática nas escolas necessita ser sempre desenvolvido de tal forma que os alunos aprendam não só a partir do conhecimento que lhe é apresentado em aula, mas também a partir dos problemas para a resolução dos quais esse aprendizado pode ser aplicado. Uma boa definição desse formato de atividades encontra-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Médio:

> [...] a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (BRASIL, 1997, p. 44).

A busca por situações de atividades em sala de aula, que tenham por objetivo estimular um aluno mais independente, mais crítico, mas auto-suficiente quanto ao seu aprendizado, tem sido uma grande tarefa de estudo por especialistas da área de matemática, uma vez que nesse conteúdo o uso de problemas é constante. Um grande estudioso dessas situações-problema envolvendo a matemática, e de como essas atividades podem melhorar a compreensão dos alunos, é Polya (1995), que já citamos no subitem anterior.

Esse especialista estudou sobre o uso de problemas matemáticos como formato de ensino em sala de aula, durante boa parte da sua vida acadêmica. Polya (1995) defendia que o uso de problemas na área da matemática não só pode aumentar o aprendizado dos alunos, mas também irá produzir nos alunos a busca por novos conhecimentos, novos horizontes, novos aprendizados matemáticos. É possível notar esta ênfase do autor no seguinte trecho:

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter. (POLYA, 1995, p. 5).

Polya (1995) entendia que o foco do aprendizado nas aulas precisa estar totalmente direcionado aos alunos, e que sobretudo a curiosidade deles se situe no centro dessas atividades de aula. Além disso, cada atividade que lhes for proposta deverá ser sempre estimulada no sentido de que eles possam desenvolver ao máximo as suas aptidões de conhecimento. Por isso, os problemas que vierem a ser usados para tratar determinado conteúdo matemático devem buscar aproveitar ao máximo todas as ramificações nas quais tais conteúdos possam estar inseridos, bem como as diferentes associações entre eles existentes.

Desta forma, um problema sobre Função Afim ou sobre Função Exponencial deve explorar diversas situações contextuais, ou não, mas que tenham por objetivo manter o aluno o mais estimulado possível, a fim de que a sua curiosidade sobre o problema seja sempre num sentido dinâmico e não estático. No caso da função exponencial, especificamente, a atividade deve levar o aluno a associá-la ao estudo da potenciação.

Nessa tarefa de melhor estimular o aprendizado dos alunos, entra o Professor, que não pode ser uma figura meramente decorativa em aula. O professor dos alunos deve sempre estar atento para sugerir, argumentar, propor e elaborar com os alunos roteiros do tipo que avaliem o enunciado, tracem planos de ação para solucionar os problemas e usem conhecimentos anteriormente trabalhados. Entretanto, o professor deve estar atento a não produzir intervenções excessivas que possam desestimular o aluno, diminuindo assim sua capacidade de independência, no sentido de buscar os seus próprios caminhos.

Pérez Echeverría (1998) faz uma análise comportamental do professor de matemática frente a atividades de solução de problemas. Ao estabelecer tal relato a autora faz uso das informações propostas por Schoenfeld (apud PÉREZ ECHEVERRÍA, 1998) sobre o assunto.

Schoenfeld (apud PÉREZ ECHEVERRÍA, 1998) afirma que, em muitas vezes por puro conhecimento das técnicas de resolução de uma atividade, o professor em sala de aula simplesmente esquece de informar aos alunos quais estratégias tomou para obter a resposta; por outro lado, não define explicitamente o seu passo a passo de resolução, o que nesse caso pode vir a prejudicar a análise de sua resolução pelo estudante, devido ao fato de que o aluno ainda não possui todo o saber necessário para a resolução da atividade.

Ainda citando Schoenfeld (apud PÉREZ ECHEVERRÍA, 1998), a autora expõe duas idéias centrais, na sua ótica sobre o comportamento do professor de Matemática, a saber: o professor deve ser um “treinador” em sala de aula, e também, o professor deve ser um "examinador" das diferentes soluções propostas pelos alunos.

O professor "treinador" está focado em ajudar o aluno a obter uma melhor estratégia de resolução do problema, ou seja, o professor poderá auxiliar os alunos com diversas orientações que possam lhe ajudar a solucionar a atividade.

Por outro lado, o professor "examinador" deve, em sala de aula, estar bastante atento às diferentes estratégias de resolução do problema, que forem propostas pelos alunos. Desta forma, os alunos poderão através da troca de experiências melhorar o seu rol de aprendizado, e utilizar algumas das sugestões dos colegas em novos problemas que venham a aparecer.

Além disso, Pérez Echeverría (1998) avalia que o professor deve estar bastante atento aos erros cometidos pelos seus alunos, pois ao avaliá-los o educador poderá encontrar explicações que possam ajudar o aluno em processos futuros. Sempre que achar necessário, o professor poderá retomar conhecimentos, através de novos e antigos problemas, como podemos verificar na seguinte citação: “Nesse sentido, os erros não devem ser tratados como fracassos, mas como fonte de informação para o professor ‘treinador’ e para a auto-avaliação do aluno”. (PÉREZ ECHEVERRÍA, 1998, p. 65).

Já para Reitz e Contreras (2012), o professor deve exercer um papel de "organizador, mediador e orientador" das atividades que serão desenvolvidas. Nesse sentido, os autores propõem que o educador possa tanto intervir, como produzir questionamentos aos alunos, bem como permitir que todos os estudantes façam interferências às soluções obtidas pelos colegas. Além disso, os autores dão grande ênfase ao fato do professor poder controlar a tarefa quanto ao tempo, e aos objetivos que quer transmitir aos alunos. Segundo os autores:

> Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), atribui-se ao professor o papel de incentivador da aprendizagem pelo estímulo à cooperação entre os alunos, na interação professor-aluno, aluno-aluno, e demais profissionais, aluno e pessoas do seu convívio, pelo confronto das ideias numa aprendizagem produtiva. (REITZ; CONTRERAS, 2012, p. 54).

Para Clement e Terrazzan (2011), que visam uma participação ativa dos alunos, o ensino deve ser proposto por "investigação". Tal concepção de ensino é encontrada no construtivismo. Nesse caso, o foco do aprendizado não será a metodologia de Ensino, mas sim os processos de aprendizado. Assim, sempre que o aluno se deparar com um problema, o mesmo será levado a investigá-lo, apropriando-se de suas idéias principais e estabelecendo caminhos para resolvê-lo.

Também fazendo uma análise do professor em sala de aula, Polya (1995) afirma que o educador sempre é levado a apresentar argumentações repetidas, no sentido de auxiliar o seu aluno; estas repetições são descritas pelo autor da seguinte forma: “Qual a incógnita? Do que se precisa? O que é que se quer? O que é que se deve fazer?” (POLYA, 1995, p. 1). Tais questionamentos podem aparecer de forma mais direta como: “Considere a incógnita” (POLYA, 1995, p. 1). É possível perceber que, tanto em questionamentos mais abertos, quanto em questionamentos mais diretos, o objetivo do professor é sempre ajudar o aluno.

O autor estabelece que tais situações podem ser agrupadas, a fim de que possam auxiliar os alunos na atividade de resolução de problemas.

Para isso, o autor busca expressar as argumentações dos professores de forma mais generalista, como por exemplo: “Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?” (POLYA, 1995, p. 2). Assim, a atividade de estímulo do pensar do aluno fica mais geral, podendo ser aplicada a problemas de álgebra, geometria, etc., problemas científicos, ou não.

Cabe aqui ressaltar que a incógnita à qual o autor se refere não é necessariamente o valor de “*x*”, “*y*”, ou “*a*”, mas o principal questionamento do enunciado; para uma melhor compreensão sobre a importância da incógnita podemos observar o seguinte problema, já com as respostas das perguntas (em itálico):

> Calcular a diagonal de um paralelepípedo retângulo do qual são conhecidos o comprimento, a largura e a altura.
> -Qual é a incógnita?
> -*O comprimento da diagonal de um paralelepípedo*.
> -Quais são os dados?
> -*O comprimento, a largura e a altura do paralelepípedo*.
> -Adote uma notação adequada. Qual a letra que deve detonar a incógnita?
> -*x*
> -Quais as letras que escolheria para o comprimento, a largura e a altura?
> - *a, b e c*.
> -Qual a condicionante que relaciona a, b e c com x?
> - *x é a diagonal do paralelepípedo no qual a, b e c são, respectivamente, o comprimento, a largura e a altura*. (POLYA, 1997, p. 5, grifo do autor).

À medida que o professor for usando tais indagações na aula, o aluno perceberá que de fato tais questionamentos podem ser usados na resolução das atividades que lhe são propostas, o que levará o estudante a apropriar-se de tais perguntas sobre a incógnita, o condicionante, e a buscar a melhor linguagem para a resolução do problema.

Sempre que o professor for solucionar um problema em aula, deverá enfatizar junto ao aluno a parte da explicação à qual este deverá estar mais atento. Além, é claro, de reforçar com a turma questionamentos que eles devem buscar fazer, ao realizar uma atividade.

O professor deve buscar agir sempre com bom senso, apresentando situações-problema em que o conteúdo trabalhado esteja de fato inserido no ambiente de aprendizado do aluno. O professor não deve, por exemplo, propor problemas de números complexos a alunos do 6º ano do fundamental, pois precisa estabelecer em aula atividades que possam usar conhecimentos passados anteriormente.

O professor deve estar sempre buscando aperfeiçoar com o aluno um roteiro de resolução, a fim de que o mesmo possa encontrar prazer, não só ao solucionar o problema, mas também ao fomentar um aprendizado novo.

1.3 FASES DE RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE MATEMÁTICA

Ao realizar a atividade de resolução de problemas, um estudante pode iniciar por determinado caminho, pensando que essa seja a melhor decisão para solucionar o problema. Entretanto, Polya (1995) argumenta que essa atividade pode por vezes ser refeita, reavaliada e que a idéia inicial pode ser totalmente posta de lado, tomando nesse caso, outro caminho para solucionar o problema.

Nessa busca de solucionar o problema avaliando suas diferentes etapas, Polya (1995) apresenta-nos uma lista composta de quatro fases, que podem servir de auxílio para a resolução do problema. Essas **quatro fases** são discriminadas como: primeira fase, compreensão de um problema; segunda fase, inter-relação entre os diversos itens do problema; terceira fase, execução do plano de resolução do problema; quarta fase, retrospecto do problema.

É possível que um aluno não siga estas fases, e seja capaz de solucionar perfeitamente o problema, ou que deixe de lado uma das fases e enfrente sérias dificuldades de resolução, ou pior, que saia realizando cálculos desenfreados, sem qualquer critério.

A **primeira fase** consiste em compreender o problema. Essa atividade de entendimento do problema deve ser muito bem orientada pelo professor, sendo que ele deve estar atento em sugerir atividades que sejam compreendidas e interessantes aos alunos. Caso o aluno não se sinta estimulado e instigado a solucionar um problema, a atividade proposta será inútil, uma vez que o estudante estará desinteressado em relação ao problema.

Ao ler um enunciado, o aluno precisa compreender, entender e apropriar-se das principais idéias contidas nele, e estes argumentos podem vir de situações que já foram trabalhadas anteriormente, ou através de questionamentos de seu professor, do tipo: “Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?” (POLYA, 1995, p. 4).

O estudante deve estar atento para caracterizar bem um problema, pois, quanto melhor for essa caracterização, melhores serão os percursos na sua resolução. O aluno precisa compreender quem é o condicionante da atividade; caso exista uma figura geométrica no enunciado, deverá procurar representá-la, e, se for necessário, adotar uma notação adequada para a sua resolução.

A **segunda fase** é o estabelecimento de um plano. Polya (1995) nos informa que estabelecer um plano consiste em entender que cálculos podem ser utilizados em sua resolução, e que figuras geométricas se assemelham aos desenhos do problema. O percurso que um aluno estabelece desde a compreensão do problema até a sua resolução pode ser por vezes bastante difícil. Nesse caso, o professor pode colocar-se na situação do aluno e desta forma servir de guia, indicando-lhe um caminho mais apropriado na tarefa de planejamento.

Ao estabelecer um roteiro de etapas que possam auxiliar na tarefa de solucionar um problema, o estudante não deve descartar qualquer conhecimento que já lhe tenha sido ensinado em outros conteúdos matemáticos, porém deve estar atento a não produzir conhecimentos repetidos sem sentido algum. Assim, a fim de utilizar melhor esse conhecimento, Polya (1995) sugere que o aluno inicie a montagem do plano através do seguinte questionamento: “Conhece algum problema correlato?” (POLYA, 1995, p. 6).

Uma dificuldade que os alunos podem encontrar ao estabelecer tal indagação consiste em encontrar diversos problemas que tem pontos em comum com a atividade na qual estão trabalhando. Nesse caso, qual problema auxiliar deverá ser escolhido? Novamente Polya (1995) propõe uma solução para tal questionamento, com a seguinte sugestão: “Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante” (POLYA, 1995, p. 6).

Por fim, ao se buscar problemas correlatos deve-se estar bastante atento para não permitir uma fuga do foco central do problema; ou seja, o plano principal a ser montado é direcionado a resolver o problema específico no qual se está trabalhando. Logo, para verificar se o plano não se distanciou do seu objetivo principal, o autor defende que se faça uma verificação se todos os dados e condicionantes foram utilizados.

A **terceira fase** consiste na execução do plano. A idéia de resolver um problema é algo que requer um bom conhecimento anterior, uma boa concentração mental e foco no objetivo final que é a solução. Ao conceber um plano para obter a solução de um problema, o aluno está simplesmente tomando um direcionamento central. Entretanto, é preciso estar bastante atento a todos os detalhes, de tal forma que não fique nenhuma dúvida, ou argumentação sem esclarecimento.

Polya (1995) sugere que na atividade de implementação e formação do plano, o estudante não sofra tantas interferências do seu professor, uma vez que o excesso de interferências pode desestimular o aluno, ou até mesmo confundi-lo. O autor também avalia que intervenções devem ocorrer sempre que houver necessidade e com o intuito de auxiliar no aprendizado do aluno.

Ao executar as etapas do plano, o aluno deve estar sempre satisfeito com os resultados obtidos; caso entenda que algum dos passos se mostra imperfeito, pode retomá-lo, ou refazê-lo até que o resultado se mostre satisfatório.

A **quarta fase** envolve o retrospecto do problema. Essa retomada é de suma importância para o aluno, uma vez que ele pode reavaliar seu passo a passo. Além disso, o professor deve argumentar que um problema não se esgota com a resposta e que novos questionamentos podem surgir.

O professor precisa sempre passar aos seus alunos a informação da interligação entre problemas e de como a atividade de retomada do aprendizado de solucionar o problema pode ser significativo para o seu conhecimento. Ao avaliar as diferentes etapas da resolução, o estudante pode ser levado a tomar novos direcionamentos, frente a algumas das etapas que foram desenvolvidas, aperfeiçoando assim o seu aprendizado.

Por fim, o estudante deve se questionar se pode reutilizar conhecimentos desenvolvidos nesses problemas na resolução de outros problemas, ou se as etapas dessa atividade podem ser melhor elaboradas em outras atividades correlatas.

Polya (1995) informa nos seus escritos que abordagens diferentes podem ser desenvolvidas e que, mesmo com soluções comuns, os estudantes podem trilhar caminhos distintos. Além disso, o autor sugere que o professor utilize listas de exercícios sucintas que possam manter o aluno bem focado; listas de exercícios excessivamente grandes tendem a dispersar os alunos.

Nesse aspecto de introduzir fases para solucionar um problema matemático Pérez Echeverría (1998) traz para o debate as idéias de Meyer (apud PÉREZ ECHEVERRÍA,1998). Enquanto Polya (1995) divide em quatro fases as etapas de solucionar um problema (Compreender o Problema, Conceber um Plano, Executar o Plano, Elaborar uma visão retrospectiva) Meyer (apud PÉREZ ECHEVERRÍA,1998) avalia que de fato só existem **duas**, que são: **tradução** e **solução**.

A **tradução** de um problema consiste em avaliar, compreender e apoderar-se do que se está tratando. Nesse caso, o aluno precisa entender bem a informação contida no problema. Além disso, o estudante necessita usar expressões e símbolos matemáticos que possam lhe ajudar nessa resolução.

A **solução** é buscada à medida que o estudante define uma metodologia, ou uma estratégia para resolver diversas submetas que se procuram solucionar. Por fim, ao chegar à solução, o aluno deve ser capaz de fazer uma interpretação dos dados obtidos a fim de reafirmá-los, ou de reposicioná-los.

Quando analisamos esses dois campos encontramos neles um conjunto de fatores muito próximos aos três grandes eixos da matemática que são: “[...]

utilização de diferentes linguagens, utilização de algoritmos e utilização de habilidades”. (PÉREZ ECHEVERRÍA, 1998, p. 51).

Nesse caso, a utilização de diferentes linguagens encontra-se na tradução para compreender a linguagem matemática que circunda o problema; num segundo momento, a utilização de roteiros e habilidades de compreensão e solução do problema que se ligam diretamente à solução, segundo Meyer (apud PÉREZ ECHEVERRÍA,1998).

Para fazer uma tradução do problema é preciso compreender os métodos linguísticos, semânticos e esquemáticos que envolvem o enunciado do problema. Já na questão da solução, é necessário avaliar os procedimentos, as metas que se buscam e quais são os meios para conquistá-las.

1.4 USANDO PROBLEMAS E CONHECIMENTOS ANTERIORES PARA RESOLVER NOVOS PROBLEMAS

Situações de analogia entre problemas de matemática podem facilitar a solução de problemas correlatos. Cada vez que o estudante se deparar com um novo problema, ele deverá observar as situações já vivenciadas direta ou indiretamente relacionadas com o problema no qual está trabalhando, visando estabelecer uma reutilização dos seus conhecimentos anteriores.

Ao se deparar frente a um problema, o aluno sempre poderá verificar se tem conhecimento de alguma atividade correlata (parecida, semelhante, igual). Polya (1995) descreve que é difícil encontrar-se problemas novos; em geral, tem-se uma grande chance de se achar problemas que já foram solucionados e utilizar alguma dessas situações na solução do problema em questão. Por exemplo, em um problema de MRUV (Movimento Retilíneo Uniformemente Variado) cuja equação do movimento seja $S(t)=t^2-5t-6$, a pergunta: “Em que instante o objeto atingiu a altura máxima?”; poderia ser diretamente relacionada com um problema de Função Quadrática, considerando a função $f(x)=x^2-5x-6$ no qual a pergunta fosse: “Quanto vale o x_v (o valor de x do vértice) ?”.

É perceptível que os exercícios tratam de assuntos diferentes, entretanto a sua resolução é bem parecida diferenciando-se apenas no contexto aplicado. Polya (1995) acredita que sempre que o aluno puder estabelecer relações desse tipo, estará não só compreendendo melhor a atividade de solucionar problemas, mas também estará tendo um aumento de aprendizado significativo. Uma boa percepção de tal fato pode ser encontrada na seguinte passagem:

> Já viu antes? É possível que já tenhamos resolvido antes o mesmo problema que ora nos é apresentado, ou ouvido falar dele, ou encontrado um problema muito semelhante. Estas são possibilidades que não devemos deixar de examinar. Tentemos lembrar do que ocorreu. Já o viu antes? Ou já o viu sob uma forma ligeiramente diferente? Mesmo que as respostas sejam negativas, tais indagações podem dar início à mobilização de conhecimentos úteis. (POLYA, 1995, p. 96)

Ao se deparar com um problema, o aluno deve estar sempre focado em considerar a incógnita (principal pergunta do problema), uma vez que esta é a sua meta principal. Depois disso, procurar novas alternativas de resolução, usar conhecimentos outrora feitos, buscar conhecimento em situação análoga e correlata será de grande valia.

Se o estudante se mantiver na trilha do seu objetivo, poderá mudar de rota, fazer novos caminhos, buscar alternativas em outras atividades, mas, mesmo que erre, não se desvirtuará do seu foco inicial que é o de encontrar o valor da incógnita, ou da solução, ou da resposta.

CAPÍTULO 2 DESENVOLVIMENTO

2.1 TRABALHANDO COM TAXAS DE VARIAÇÃO EM PROBLEMAS APLICADOS

Os problemas de aplicação que foram trabalhados durante a proposta de ensino buscavam trazer uma relação com o curso de técnico em eletrônica, turma 4123 do 1º ano do ensino médio. A proposta de ensino foi aplicada, ao longo de 28 períodos de aula de 50 minutos cada um. As atividades foram baseadas no plano curricular do 1º ano do Ensino Médio do curso de técnico em eletrônica da Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha. Assim, buscou-se dar ênfase a situações que pudessem ser analisadas e posteriormente aplicadas como atividades de ensino e aprendizado.

A escolha da turma 4123 foi feita pelo professor a partir da avaliação e do comprometimento dos alunos ao longo do 1º semestre do ano letivo de 2014.

Os exemplos e exercícios usados buscavam tratar diversas situações envolvendo as taxas de variações tanto com valores positivos quanto com valores negativos, a fim de que o aluno pudesse evidenciar a diferença entre ambas. A sequência didática dessa proposta está dividida em 5 etapas, conforme a tabela a seguir.

Tabela 1 - Cronograma das Atividades Desenvolvidas na Turma 4123.

Etapa	Taxa de Variação	Tipo de Função	Períodos de aula de 50 minutos.
1ª	Taxa de Variação Constante	Função Afim	4
2ª	Taxa de Variação Média e Taxa de Variação Instantânea	Função Quadrática	9
3ª	Taxa de variação Percentual Constante	Função Exponencial	6
4ª	Taxa de variação constante e taxa de variação percentual constante	Função Linear e Função Exponencial	4
5ª	Taxa de variação percentual contínua	Função exponencial de base "*e*" (neperiana)	4

Fonte: Elaborado pelo autor.

A **primeira etapa** da sequência didática foi dedicada ao estudo dos problemas com taxas de variação constantes, característica das Funções Afim (demos maior destaque para situações que envolviam o caso de função Afim do tipo função Linear). Foram trabalhados problemas de aplicação matemática envolvendo tabelas, gráficos da função *f(x)* em função de *x* e fórmulas matemáticas.

Posteriormente, foram trabalhados exercícios de aplicação de taxas de variação constante que constam no plano curricular do 1º ano do Ensino Médio do curso de técnico em eletrônica da Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha, tais como: movimento retilíneo uniforme estudando o comportamento da posição em função do tempo, ou movimento retilíneo uniformemente variado estudando o comportamento da velocidade em função do tempo, ou ainda problemas envolvendo o estudo da diferença de potencial em função da corrente. Ao fim foram desenvolvidos exercícios de aplicação envolvendo juros simples e também problemas de dinâmica populacional.

A finalidade foi que, enquanto fossem sendo desenvolvidas as tarefas, os alunos pudessem compreender e interpretar a taxa de variação constante envolvida na função Afim estudada e sua relação com a variável independente. Enfatizamos também a análise dimensional de cada problema, isto é, a análise das unidades de cada variável e de cada parâmetro do problema.

Na **segunda etapa** de aplicação foram realizadas atividades envolvendo taxas de variação média e taxa de variação instantânea em funções Quadráticas. Nesse caso, foram feitas atividades que pudessem ilustrar ambas as taxas de variação, bem como o comportamento da variável dependente da função, tanto no caso em que a taxa de variação é positiva, quanto no caso em que é negativa. Para uma boa compreensão da tarefa, estes conceitos foram aplicados a problemas que envolviam o movimento retilíneo uniformemente variado, em problemas de aplicação de custo e ainda em problemas envolvendo a potência elétrica em função da corrente. Desta forma, buscávamos evidenciar situações problemas nas quais poderíamos ilustrar a taxa de variação média, bem como a taxa de variação instantânea.

Nessa etapa buscamos desenvolver junto aos alunos atividades nas quais eles pudessem aprender, compreender e distinguir entre taxa de variação média e taxa de variação instantânea. Depois disso, os alunos avaliaram situações-problema modeladas através de funções quadráticas que estivessem inseridas nos conteúdos específicos do curso.

A **terceira etapa** foi o desenvolvimento da taxa de variação percentual, reconhecendo que esta é constante em funções exponenciais. Para melhor ilustrar a visualização desta taxa de variação, iniciamos com o uso de problemas com tabelas que envolviam acúmulo de renda, salário e benefícios. Com os dados dessas tabelas, mostramos ao aluno a existência de uma taxa de variação percentual constante.

Num segundo momento foram apresentadas atividades de aplicação com exercícios sobre crescimento populacional, que também envolviam uma taxa de crescimento percentual constante. Complementamos ainda com atividades envolvendo o decaimento da carga elétrica armazenada em um capacitor em função do tempo, bem como problemas de tensão elétrica (voltagem) em um indutor em função da corrente. Na **quarta etapa**, abordamos problemas que pudessem estabelecer um comparativo entre este dois tipos de comportamento: taxa de variação constante e taxa de variação percentual constante. Para isso, trabalhamos com gráficos e tabelas envolvendo juros simples e compostos, condutores ou resistores (Ôhmicos e Não Ôhmicos).

Na **etapa final** (5a. etapa) foi apresentado o número *"e"*, bem como a taxa de variação contínua. Para tal apresentação foram trabalhados problemas e gráficos envolvendo funções do tipo $f(x)=ae^{kt}$, tais como problemas de decaimento com taxa de variação percentual contínua, e enfatizamos a diferença entre taxa de crescimento percentual anual (discreto) e taxa de crescimento percentual contínuo.

2.2 COLETA DOS DADOS

As coletas das informações para a posterior avaliação dos dados sobre a aplicação da atividade proposta foram feitas com: gravação das aulas em áudio, fotografias das atividades realizadas durante o período de aula, coleta e avaliação das atividades que foram realizadas durante a proposta de ensino, portfólio de cada atividade. Além disso, foram realizados testes antes e depois de cada atividade de ensino, a fim de verificar o aprendizado dos alunos. Cada teste tinha duração de 25minutos e foi constituído por três questões sobre o conteúdo trabalhado.

A coleta de informações também utilizou uma turma controle, onde o conteúdo desenvolvido estava de acordo com o encontrado nos livros didáticos e no plano curricular do curso de técnico em eletrônica, não sendo formalizado nenhum estudo aprofundado de questões envolvendo taxas de variação. Nessa turma foram aplicados os mesmos testes que na turma de aplicação da proposta. Assim, buscou-se avaliar se a proposta didática por nós produzida aprimorou de fato o aprendizado dos alunos.

2.3 TAXA DE VARIAÇÃO CONSTANTE EM FUNÇÕES AFIM (4 PERÍODOS DE 50 MIN DISTRIBUÍDOS EM DUAS AULAS.)

A função afim foi introduzida, a partir de um problema que evidenciava uma taxa de variação constante. Assim, buscávamos que o aluno tirasse conclusões acerca do comportamento da função envolvida, de tal forma que pudesse melhor entender o seu significado. Além disso, trabalhávamos a questão da interpretação e compreensão das unidades, a fim de que o aluno pudesse analisar as informações obtidas a partir do fato de que a taxa de variação era constante e o que elas indicavam sobre os dados dos problemas.

2.3.1 Aula Número 1

Nesta aula procuramos introduzir o estudo da taxa de variação constante em funções lineares, de forma que os alunos pudessem compreender o funcionamento e a metodologia de cálculo de uma taxa de variação, e como se verificava que neste caso era constante. Os alunos, então, tiveram a oportunidade de analisar e realizar experiências com tabelas, gráficos e fórmulas podendo, desta forma, ter uma compreensão ampla de diferentes situações.

Atividade 1

A população de uma cidade de 30.000 habitantes cresce a uma taxa de 2.000 pessoas a cada ano. Como a população, P, está crescendo a uma taxa constante de 2.000 pessoas por ano, P é uma função linear do tempo, t, em anos.

a) Qual a taxa média de variação de P em qualquer intervalo de tempo?
b) Faça uma tabela que forneça a população da cidade a cada cinco anos, durante um período de 20 anos. Esboce o gráfico da população.
c) Determine uma fórmula para P como uma função de t.

Com esse problema, apresentamos a taxa de variação constante. Enfatizamos junto aos alunos que essa constante podia trazer informações sobre o comportamento da variável dependente, e que isso seria aplicado em diversos problemas que estudaríamos mais tarde, como por exemplo: o comportamento da diferença de potencial em função da corrente ou o comportamento da velocidade em função do tempo, se o movimento for uniformemente variado.

Assim, trabalhamos a Atividade 1, no sentido de verificar que, para qualquer razão entre variação de população e intervalo de tempo correspondente, o resultado seria o mesmo: $\frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} = k$, assim como $\frac{p_3 - p_2}{t_3 - t_2} = k$ e $\frac{p_3 - p_1}{t_3 - t_1} = k$ (onde *k* é uma constante). Ou seja, indiferente dos valores serem subseqüentes ou não, em uma tabela, a taxa de variação era constante, isto é, o valor era o mesmo.

Num segundo momento foram trabalhadas questões relativas à taxa ser positiva, ou negativa, e como isso influenciava no comportamento dos gráficos e das tabelas. Por fim, analisou-se conjuntamente as informações contidas nas unidades obtidas na constante *k*, bem como que informações essas unidades nos trouxeram.

Atividade 2

Uma laranja é lançada para o ar. Sua velocidade, v, é uma função de t, o tempo a partir do seu lançamento. Uma velocidade positiva indica que a laranja está subindo e uma velocidade negativa indica que ela está descendo. Verifique se os dados na Tabela 1 correspondem a uma função linear. Determine uma fórmula para v em termos de t, supondo que v seja uma função linear de t.

Tabela 1. Velocidade de uma laranja, t segundos após ter sido lançada ao ar

t, tempo (s)	1	2	3	4
v, velocidade (pés/s)	48	16	-16	-48

O que nos indica a taxa de variação constante nesse problema? O que podemos afirmar com relação ao comportamento das unidades?

Nessa atividade, desenvolvemos junto aos alunos questões relativas à verificação de qual é o valor da taxa de variação constante, se esse valor era positivo, ou negativo. Caso fosse negativo, qual seria o seu efeito na variável dependente da função, e como este fato seria observado no gráfico. Também encontramos uma fórmula para representar tal comportamento.

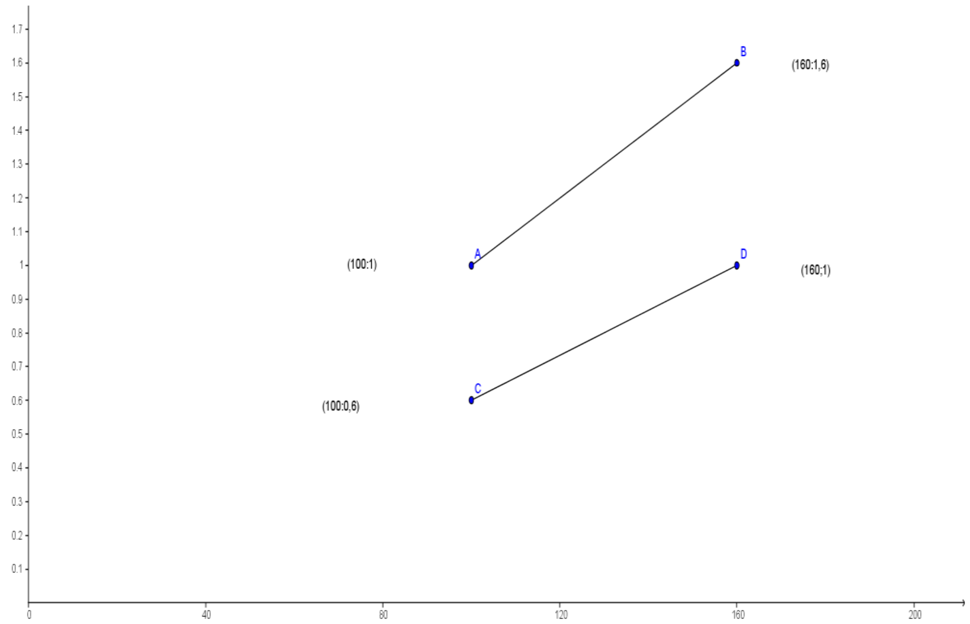
Atividade 3

A figura 1 mostra o consumo de oxigênio como uma função da freqüência dos batimentos cardíacos para duas pessoas.

a) Supondo linearidade, determine fórmulas para estas duas funções.

b) Interprete a inclinação de cada gráfico, em termos do consumo de

Y,consumo de
oxigênio
(litros)



X,
freqüência

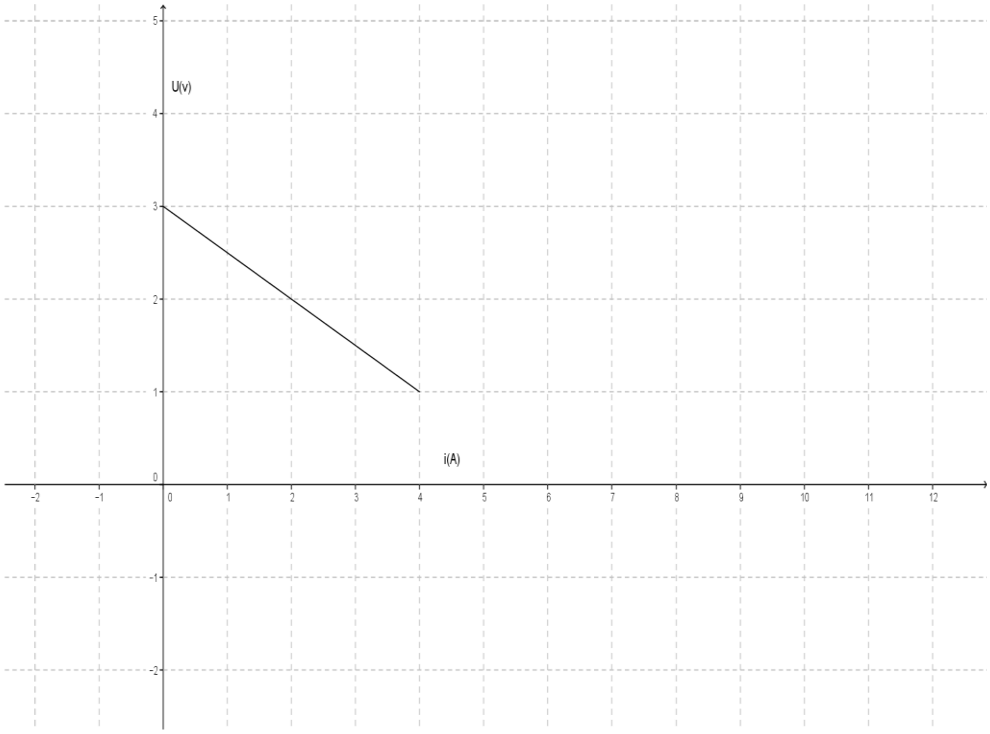
Através dessa atividade, queríamos trabalhar a taxa de variação com o uso do gráfico, assim como interpretar as respostas aos diversos questionamentos evidenciando as funções lineares envolvidas no problema. Além disso, fizemos uma análise dimensional do problema, a fim de que o aluno pudesse perceber que a unidade da constante obtida estava prestando informações sobre os dados envolvidos no problema; assim o aluno seria capaz de apropriar-se desses dados para obter uma melhor compreensão sobre o problema.

2.3.2 Aula Número 2

Na aula número 2 trabalhamos com atividades mais voltadas ao curso de técnico em eletrônica; desta forma procuramos aproximar o conteúdo de aula das atividades práticas do curso.

Atividade 4

Este gráfico representa a diferença de potencial numa bateria em função da corrente que a atravessa. Determine sua força eletromotriz e sua resistência interna.



A taxa de variação nesse exercício nos indica o quê, em relação à diferença de Potencial? Que informação podemos tirar ao analisarmos as unidades obtidas na constante, que referência tais unidades nos explicam

Essa atividade apresentava uma contextualização do exercício que podia ser utilizado pelos alunos do curso de técnico em eletrônica; assim, o aluno poderia visualizar uma situação prática do uso das taxas de variação constantes, quando existentes.

Atividade 5

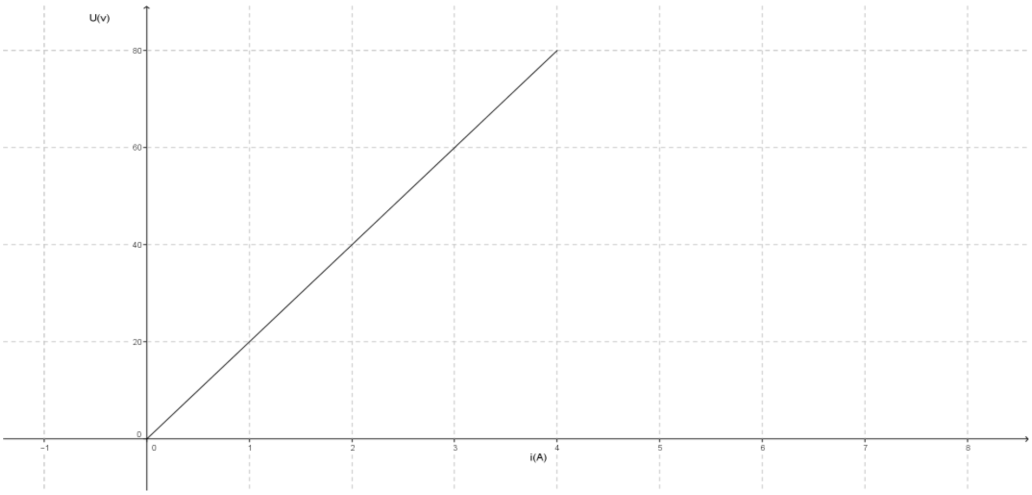
Usando sistema de Juros simples, uma pessoa aplicou R$ 2000,00, à taxa de 3% ao mês, durante 4 meses. No final do período fez uma retirada de R$ 1000,00 e aplicou o restante a 2,5% ao mês, durante 3 meses. Qual é o montante ao final de 7 meses?

Quais informações podem tirar da taxa de variação constante em ambos os casos?

Durante esse problema, construímos uma relação para o montante envolvendo duas taxas de variação distintas. A partir disso verificamos o efeito que cada uma produzia no capital inicial, bem como estudamos a evolução do comportamento do montante ao longo do tempo. Além disso, estabelecemos um quadro comparativo entre ambas as taxas envolvidas no problema (3% a.m. e 2.5% a.m.). Dessa forma, os alunos tiveram a oportunidade de buscar explicações para o comportamento do montante, para ambos os juros, e as correspondentes taxas de variação constantes.

Atividade 6

Um resistor apresenta esta curva característica.



a) Calcule a sua resistência elétrica para U= 60 V.
b) Identifique se ele é ou não um resistor ôhmico e Justifique sua resposta.
c) Calcule a intensidade da corrente elétrica que circulará por ele quando submetido a uma d.d.p. de 120 V.

Durante a aplicação dos exercícios evidenciou-se uma situação de aplicação no curso de técnico em eletrônica; assim aproximamos os problemas de matemática que envolviam taxa de variação constante das atividades aplicadas no curso.

Comentários

Ao final dessa atividade queríamos que os alunos fossem capazes de verificar a importância de reconhecer e encontrar, se existir, a taxa de variação constante envolvida, assim como verificassem o comportamento das variáveis correspondentes, em problemas de aplicação que envolviam o seu cotidiano. Além disso, que fossem capazes de, através da taxa de variação constante, compreender e realizar uma análise dimensional do problema. Foi aplicado um teste final que envolvia situações de problemas de função linear, incluindo alguns aplicados ao curso de técnico em eletrônica.

Assim, queríamos verificar se o aluno era capaz de compreender quais informações podiam ser obtidas, ao se identificar uma taxa de variação constante, bem como as unidades envolvidas, e quais referências elas nos davam sobre os dados dos problemas.

2.3.3 Comentário sobre a Aula Número 1

A aula número 1 foi ministrada no dia 26 de Agosto de 2014, e teve duração de dois períodos de aula de 50 minutos cada. Participaram ao todo 27 alunos.

A aula foi iniciada introduzindo uma situação problema de População (ver Exemplo 1 do Anexo A) envolvendo função Afim e taxa de variação constante positiva; com este problema, procuramos integrar o aluno ao conceito de taxa de variação constante. Para uma boa compreensão por parte do aluno, o problema escolhido trazia no seu desenvolvimento o uso de tabela e de gráfico, além da construção de uma fórmula. Desta forma, esperávamos que o aluno fosse capaz de se ambientar com a atividade que seria desenvolvida logo a seguir.

Num segundo momento, foi trabalhado com os alunos um problema envolvendo função Afim e taxa de variação constante negativa (ver Exemplo 2 do Anexo A). Nessa atividade de introdução, apresentamos aos alunos um problema de física envolvendo variação de velocidade em função do tempo, que fosse descrita por uma função Afim; assim, nossa intenção foi de que os alunos compreendessem a ligação interdisciplinar entre as disciplinas de matemática e física.

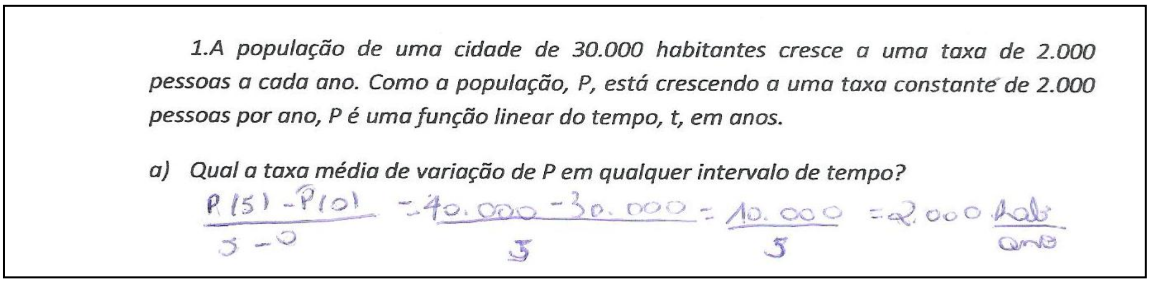
Durante o desenvolvimento da explicação dos problemas introdutórios, ocorreram questionamentos pertinentes por parte dos alunos, tais como: “A aceleração é uma taxa de variação constante”; “A posição em função do tempo dá uma constante que é a velocidade”, “A variação da população sobre a variação do tempo sempre dá a mesma taxa de variação constante“, “As unidades da taxa de variação pessoas por ano indicam o comportamento do y“. Entretanto, uma observação de um aluno foi importante para a compreensão dos demais, a saber: “A taxa de variação constante é o “a” da função Afim (*f(x)* =ax+b), ou seja, o aluno associou e compreendeu de fato o que vem a ser a taxa de variação na função Afim; tal comentário foi de grande valia para a compreensão dos seus demais colegas.

Uma vez encontrada a taxa de variação constante, partimos para a análise dimensional do problema. Nesse caso, procurávamos entender e compreender o comportamento da variável dependente a partir do valor, juntamente com as unidades encontradas, da taxa de variação e assim interpretar o comportamento das variáveis envolvidas.

Após a apresentação e correção dos problemas introdutórios, passamos a desenvolver a atividade de exercícios. Cada aluno participante recebeu uma tarefa a ser respondida individualmente, constituída por três questões que envolviam problemas de Função Afim (Atividade 1, 2 e 3 especificadas acima). As questões propostas envolviam a busca da taxa de variação constante, bem como a interpretação do seu valor juntamente com as unidades pertinentes.

ATIVIDADE 1

- Ao analisarmos as respostas dos alunos ao problema 1.a, duas das quais citamos abaixo, temos:

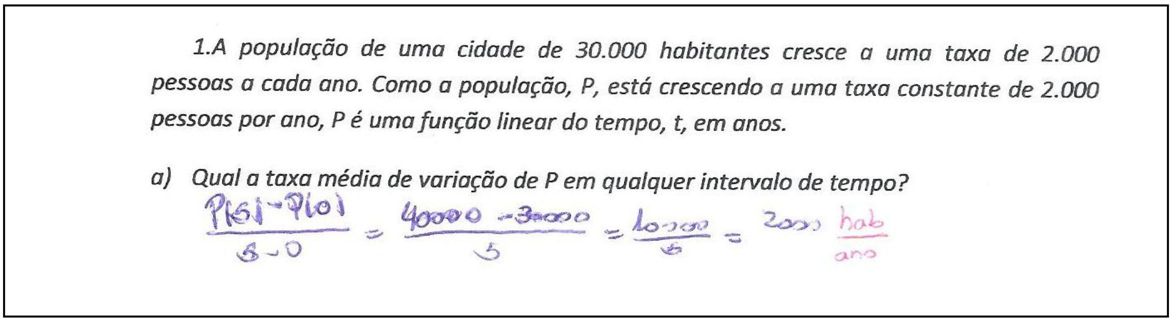


1.A população de uma cidade de 30.000 habitantes cresce a uma taxa de 2.000 pessoas a cada ano. Como a população, P, está crescendo a uma taxa constante de 2.000 pessoas por ano, P é uma função linear do tempo, t, em anos.

a) Qual a taxa média de variação de P em qualquer intervalo de tempo?

$\frac{P(5)-P(0)}{5-0} = \frac{40.000-30.000}{5} = \frac{10.000}{5} = 2.000 \frac{hab}{ano}$

Figura 1: Atividade do aluno F.



1.A população de uma cidade de 30.000 habitantes cresce a uma taxa de 2.000 pessoas a cada ano. Como a população, P, está crescendo a uma taxa constante de 2.000 pessoas por ano, P é uma função linear do tempo, t, em anos.

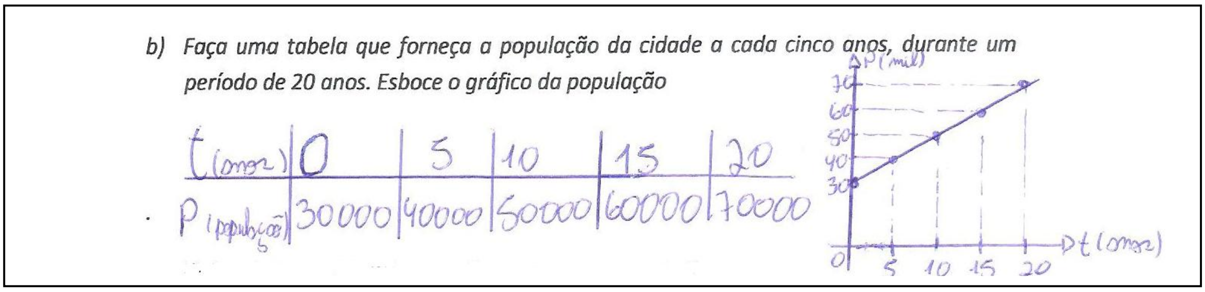
a) Qual a taxa média de variação de P em qualquer intervalo de tempo?

$$\frac{P(5)-P(0)}{5-0} = \frac{40000-30000}{5} = \frac{10000}{5} = 2000 \frac{hab}{ano}$$

Figura 2: Atividade do aluno R.

Foi possível perceber que ambos os alunos compreenderam e encontraram a resposta do exercício. Além disso, ambos procuraram representar as unidades do problema, o que demonstra a preocupação deles em responder de forma completa, o que perguntamos a respeito da taxa de variação constante encontrada. Entretanto, os alunos usaram apenas os dados do primeiro intervalo de tempo. Não mostraram a preocupação em verificar se a taxa se mantinha a mesma para outros intervalos de tempo. Por fim, nenhum desses dois alunos, apesar de terem feito a interpretação correta do comportamento de P em função de t, escreveu formalmente com a notação apropriada de $\frac{\Delta P}{\Delta t}$.

- Ao analisarmos as respostas dos alunos ao problema 1.b, duas das quais citamos abaixo, temos:



b) Faça uma tabela que forneça a população da cidade a cada cinco anos, durante um período de 20 anos. Esboce o gráfico da população

t (anos)	0	5	10	15	20
P (população)	30000	40000	50000	60000	70000

Figura 3: Atividade do aluno M.H.B.

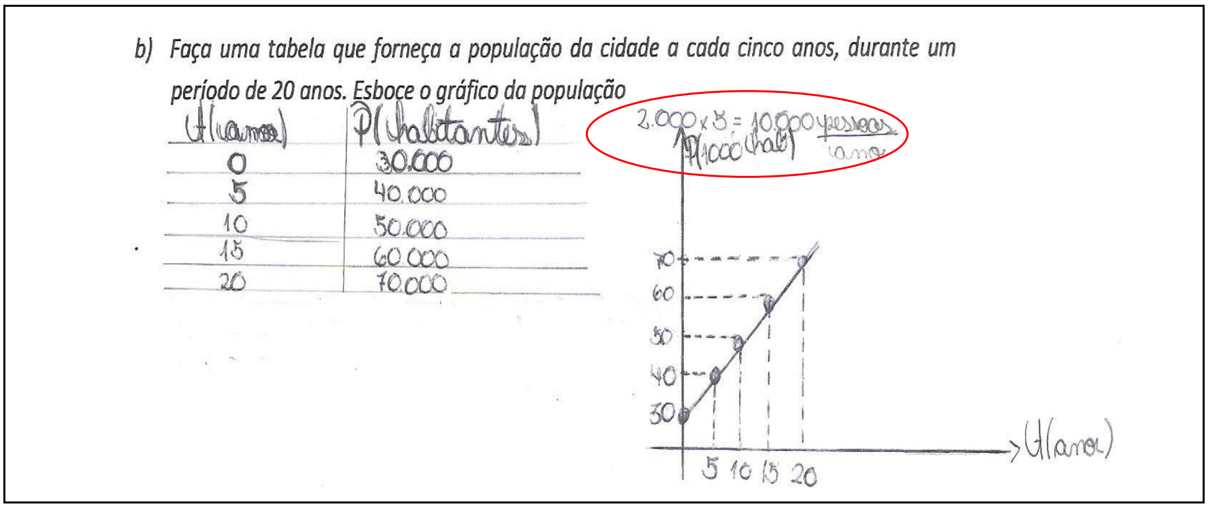


Figura 4: Atividade do aluno S.

Os alunos aqui demonstraram estarem atentos tanto na construção da tabela como do gráfico, pois em ambos os casos tiveram o cuidado de trabalhar com as unidades envolvidas de forma correta. Ao construírem o gráfico, tiveram a preocupação de informar que a população estava em unidades de mil habitantes. O aluno M.H.B. não fez menção alguma à taxa de variação constante; por outro lado, o aluno S. não só fez, como também produziu uma adaptação para o tempo de cinco anos como informado no destaque.

Apesar de a atividade não pedir diretamente a taxa de variação constante, nem solicitar que o aluno a usasse na resolução, os problemas introdutórios traziam, bem claramente a sua importância na resolução do problema. Ao analisarmos as respostas dos alunos ao problema 1.c, duas das quais citamos abaixo, temos:

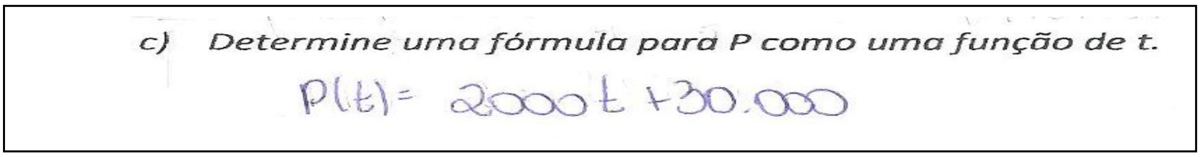


Figura 5: Atividade desenvolvida pela aluna G.P.B.

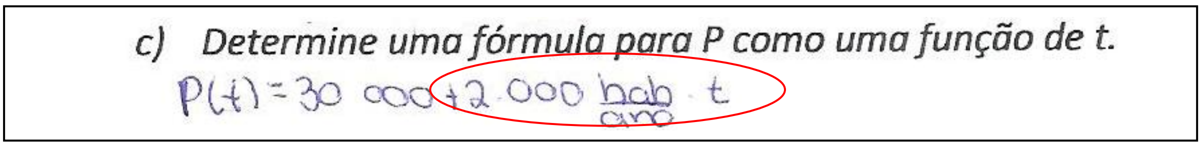


Figura 6: Atividade desenvolvida pela aluna Y.G.

A aluna G.P.B. apresentou de forma correta a fórmula da função afim, inclusive informando como é que a população é calculada em função do tempo. Já a aluna Y.G. também fez de forma correta a transcrição da fórmula, porém procurou enfatizar a unidade da taxa de variação constante, o que demonstra a compreensão do que ela representa no comportamento davariável dependente, nesse caso a População; além disso, evidencia que essa fórmula vale para t em anos.

Apesar de ambas as respostas trazerem os 30.000 habitantes, nenhuma das respostas informava o que vinha a ser esses 30.000 habitantes, ou seja, a população da cidade no instante de tempo zero.

Nesse caso, mesmo que o exercício não solicitasse a informação, o aluno poderia ter informado, ou apresentado tal conhecimento, pois isso tinha sido trabalhado pelo professor.

ATIVIDADE 2

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 2.a, duas das quais citamos abaixo, temos.

Uma laranja é lançada para o ar. Sua velocidade, v, é uma função de t, o tempo a partir do seu lançamento. Uma velocidade positiva indica que a laranja está subindo e uma velocidade negativa indica que ela está descendo. Verifique se os dados na Tabela 1 correspondem a uma função linear. Determine uma fórmula para v em termos de t.

$$\frac{v(2)-v(1)}{2-1} = \frac{16-48}{1} = -32 \text{ pés}/s^2$$

$v(t) = -32t+80$

Figura 7: Atividade desenvolvida pelo aluno G.B.

Uma laranja é lançada para o ar. Sua velocidade, v, é uma função de t, o tempo a partir do seu lançamento. Uma velocidade positiva indica que a laranja está subindo e uma velocidade negativa indica que ela está descendo. Verifique se os dados na Tabela 1 correspondem a uma função linear. Determine uma fórmula para v em termos de t.

$V(t) = a.t+b$ $\quad 80=b$

$V(t) = -32t+b$ $\quad V(t) = -32t+80$

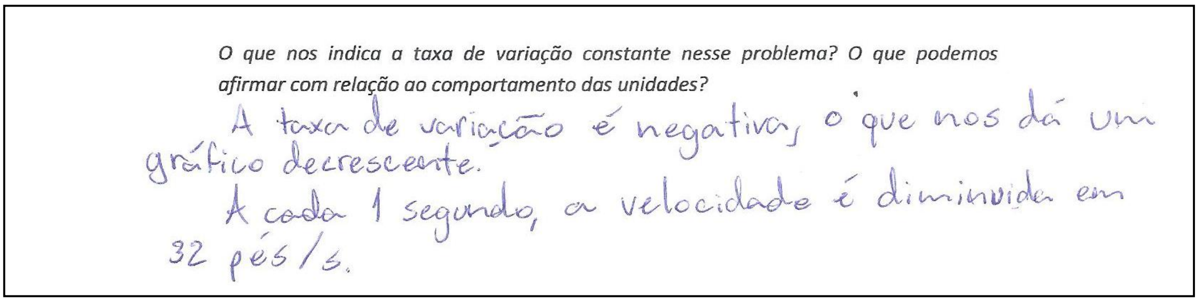
$V(0) = -32.0+b$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(2)-V(1)}{2-1} = \frac{16-48}{1} = -32 \text{ p}$$

Figura 8: Atividade desenvolvida pela aluna S.

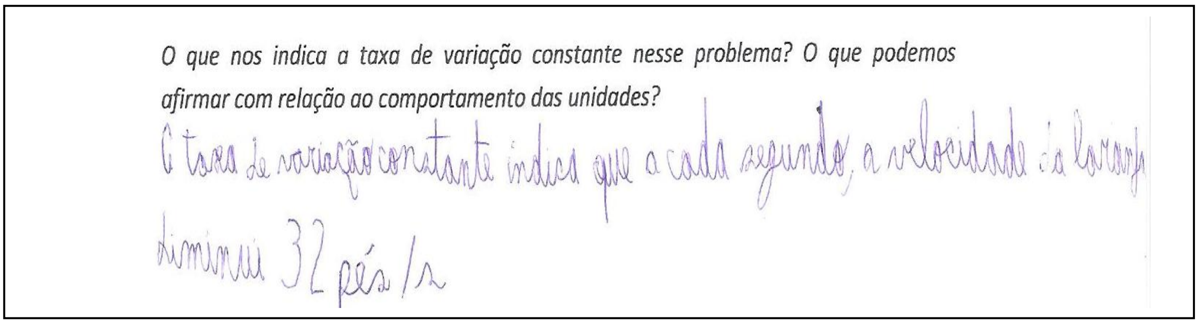
As respostas encontram-se bem desenvolvidas, porém nenhum dos alunos verificou que se tratava de uma função linear. Além disso, ambos os alunos apresentaram desenvolvimentos para a obtenção da taxa de variação no intervalo [1, 2], que é o primeiro intervalo, já pressupondo que ela fosse uma constante. Ambos compreenderam de que forma a velocidade variava com o tempo. Porém, a aluna S. teve a preocupação de calcular o termo independente da função Afim (coeficiente Linear); foi possível verificar que a mesma utilizou o tempo no instante 0, para elaborar esta argumentação. O aluno G.P.B também trouxe esta afirmativa, entretanto não apresentou o cálculo.

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 2.b, duas das quais citamos abaixo, temos.


O que nos indica a taxa de variação constante nesse problema? O que podemos afirmar com relação ao comportamento das unidades?

A taxa de variação é negativa, o que nos dá um gráfico decrescente.
A cada 1 segundo, a velocidade é diminuida em 32 pés/s.

Figura 9: **Atividade desenvolvida pelo aluno L.F.S.**


O que nos indica a taxa de variação constante nesse problema? O que podemos afirmar com relação ao comportamento das unidades?

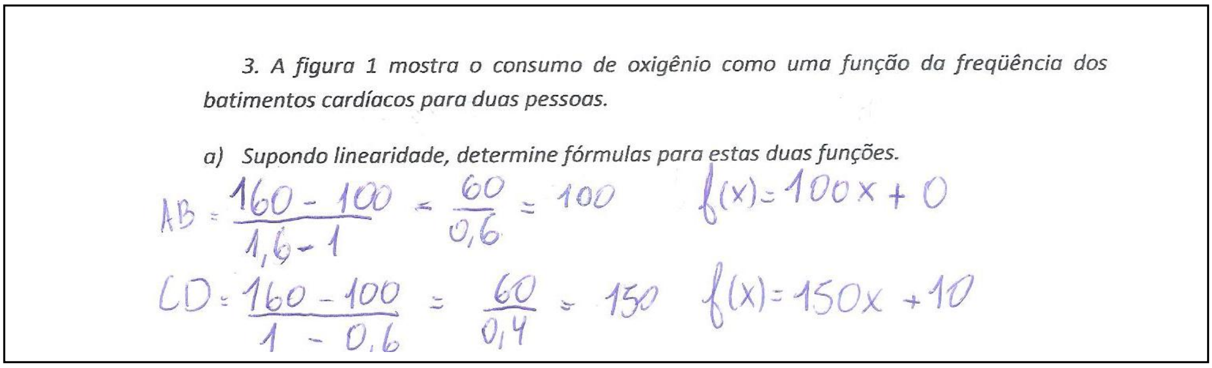
A taxa de variação constante indica que a cada segundo, a velocidade da laranja diminui 32 pés/s

Figura10: Atividade desenvolvida pelo aluno P.M.

Nessas respostas foi possível perceber que ambos os alunos conseguiram compreender o papel exercido pela taxa de variação no problema, uma vez que ao ser calculada a taxa de variação constante, constatou-se que seu sinal era negativo, o que indicaria uma função decrescente, como foi possível observar na escrita do aluno P.M. Nesse caso, os alunos compreenderam o comportamento da variável dependente e a analisaram, a partir das unidades da taxa de variação constante**.**

ATIVIDADE 3

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 3.a, duas das quais citamos abaixo, temos:



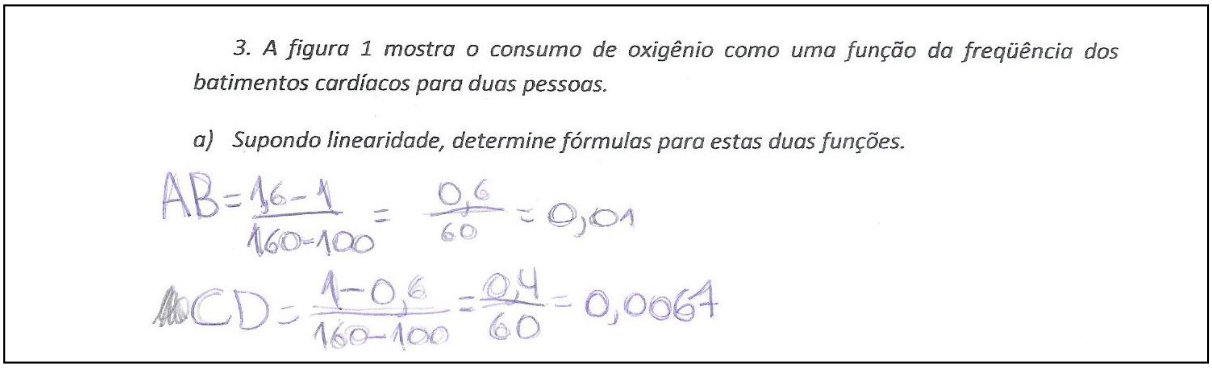
3. A figura 1 mostra o consumo de oxigênio como uma função da freqüência dos batimentos cardíacos para duas pessoas.

a) Supondo linearidade, determine fórmulas para estas duas funções.

$AB = \frac{160-100}{1,6-1} = \frac{60}{0,6} = 100 \quad f(x) = 100x + 0$

$CD = \frac{160-100}{1-0,6} = \frac{60}{0,4} = 150 \quad f(x) = 150x + 10$

Figura 11: Atividade do aluno M.H.B.



3. A figura 1 mostra o consumo de oxigênio como uma função da freqüência dos batimentos cardíacos para duas pessoas.

a) Supondo linearidade, determine fórmulas para estas duas funções.

$AB = \frac{1,6-1}{160-100} = \frac{0,6}{60} = 0,01$

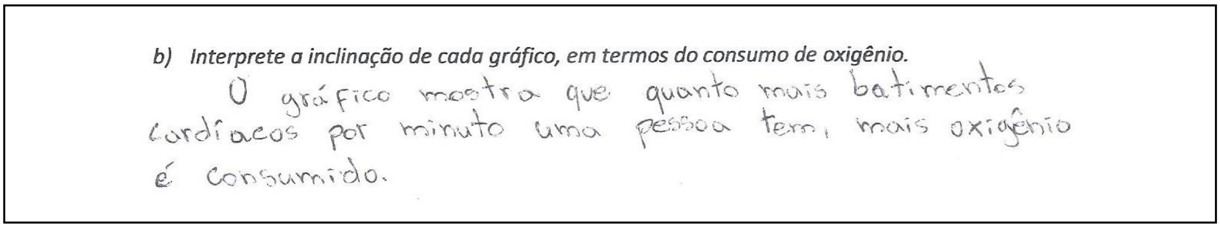
$CD = \frac{1-0,6}{160-100} = \frac{0,4}{60} = 0,0067$

Figura 12: Atividade da aluna S.K.M.

Os alunos fizeram uso da taxa de variação constante para buscar uma solução para o problema. A formatação de S.K.M. está muito boa, pois o aluno conseguiu trabalhar com a variável dependente (*Y*, consumo de oxigênio) em função da variável independente (*x*, frequência cardíaca), porém S.K.M. não buscou evidenciar a fórmula que modela o problema, contentando-se em apenas calcular a taxa de variação constante.

O aluno M.H.B. apresentou um pequeno erro ao trocar a posição das variáveis, assim o aluno não apresentou uma resolução correta do problema, mesmo tendo compreendido e usado a taxa de variação constante. Porém, M.H.B. procurou apresentar, mesmo que incorreta, uma fórmula para modelar o problema usando uma representação de função Afim.

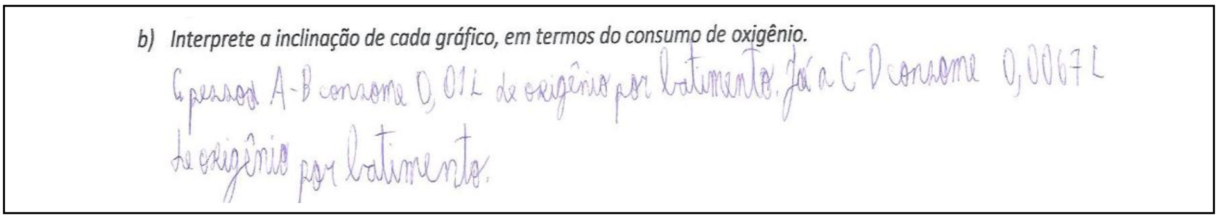
- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 3.b, duas das quais citamos abaixo, temos:



b) Interprete a inclinação de cada gráfico, em termos do consumo de oxigênio.

O gráfico mostra que quanto mais batimentos cardíacos por minuto uma pessoa tem, mais oxigênio é consumido.

Figura13: Atividade do aluno G.S.



b) Interprete a inclinação de cada gráfico, em termos do consumo de oxigênio.

A pessoa A-B consome 0,01L de oxigênio por batimento. Já a C-D consome 0,0067 L de oxigênio por batimento.

Figura14: Atividade do aluno P.M.

Neste item, os dois alunos responderam, ou totalmente, ou da forma mais completa possível. Tanto, G.S. quanto P.M. procuraram enfatizar o que acontecia no problema, à medida que se aumentava a freqüência cardíaca. Nesse caso, G.S. fez uma análise com os dados do gráfico, sem avaliar a taxa de variação constante e a sua unidade.

Já o aluno P.M. fez uma análise da atividade, a partir das taxas de variação de ambas as pessoas envolvidas no problema. Além disso, P.M. demonstrou uma melhor compreensão das unidades da taxa de variação e de seu efeito na variável dependente (Y,consumo de oxigênio).

2.3.4 Comentários sobre a Aula Número 2

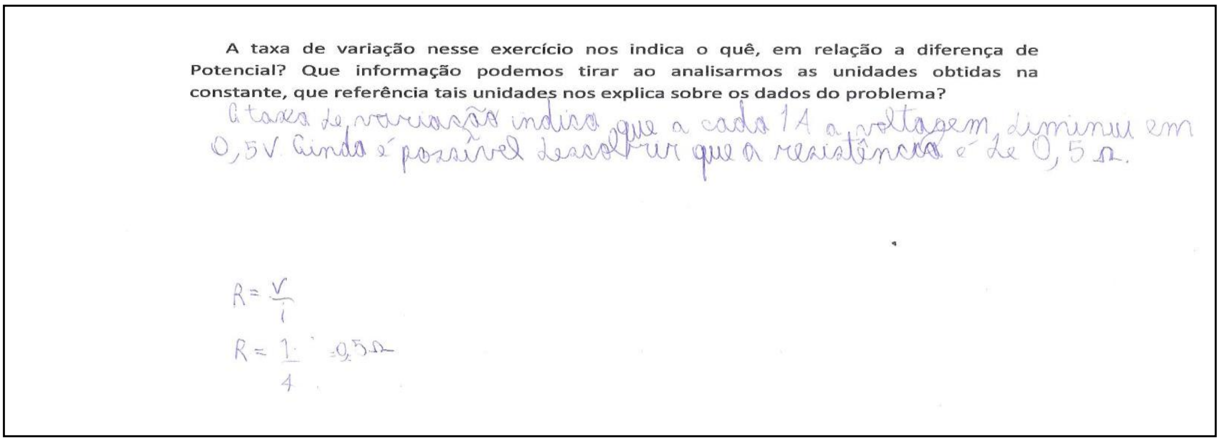
A aula foi ministrada dia 27/08/2014, sendo desenvolvida ao longo de dois períodos de 50 minutos. Participaram da realização dessas atividades, 29 alunos.

Essa tarefa de aula buscava ampliar os exercícios desenvolvidos anteriormente, a fim de que os alunos pudessem melhor compreender, interpretar e relacionar a importância do conhecimento da taxa de variação constante em funções Afim. Assim, de forma a desenvolver um aprendizado melhor por parte dos alunos, optamos por trabalhar problemas que estivessem mais ligados ao curso de técnico em Eletrônica.

O primeiro problema envolvia diferença de potencial, cálculo de força eletromotriz e sua resistência interna. Além disso, foram feitos questionamentos acerca da diferença de potencial envolvida, bem como de sua unidade obtida e que informações podiam ser retiradas a partir da sua compreensão.

ATIVIDADE 4

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 4, duas das quais citamos abaixo, temos:

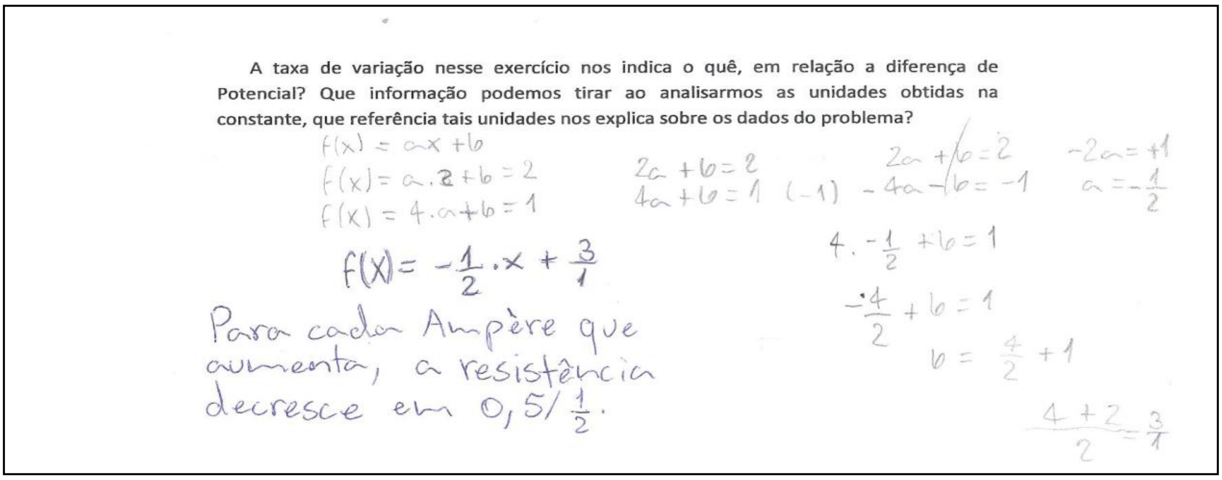

A taxa de variação nesse exercício nos indica o quê, em relação a diferença de Potencial? Que informação podemos tirar ao analisarmos as unidades obtidas na constante, que referência tais unidades nos explica sobre os dados do problema?

A taxa de variação indica que a cada 1A a voltagem diminui em 0,5V. Ainda é possível descobrir que a resistência é de 0,5 Ω.

$R = \frac{V}{i}$

$R = \frac{1}{4} = 0,5\Omega$

Figura15: Atividade do aluno P.M.


A taxa de variação nesse exercício nos indica o quê, em relação a diferença de Potencial? Que informação podemos tirar ao analisarmos as unidades obtidas na constante, que referência tais unidades nos explica sobre os dados do problema?

$f(x) = ax + b$

$f(x) = a.2 + b = 2$

$f(x) = 4.a + b = 1$

$2a + b = 2$

$4a + b = 1 \quad (-1)$

$2a + b = 2$

$-4a - b = -1$

$-2a = +1$

$a = -\frac{1}{2}$

$4 . -\frac{1}{2} + b = 1$

$-\frac{4}{2} + b = 1$

$b = \frac{4}{2} + 1$

$\frac{4+2}{2} = \frac{3}{1}$

$f(x) = -\frac{1}{2} . x + \frac{3}{1}$

Para cada Ampère que aumenta, a resistência decresce em $0,5/\frac{1}{2}$.

Figura 16: Atividade do Aluno L.F.

O aluno P.M. fez uma análise do comportamento da taxa de variação constante; foi possível perceber na sua escrita, a preocupação em descrever o efeito da taxa de variação constante na variável dependente. Além disso, P.M. encontra a resistência interna que nesse caso é a taxa de variação constante do problema, entretanto o aluno efetuou um cálculo incorreto, pois $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}$ o que caracteriza um erro do aluno.

O aluno L.F. procurou utilizar os conhecimentos de função Afim na resolução do problema; assim, pudemos perceber que L.F. encontrou dois pontos distintos e passou a resolver o problema a partir deles. L.F. avança um pouco mais do que P.M., uma vez que apresenta um formato de função Afim que modela o problema. Entretanto, L.F. cometeu um pequeno erro de interpretação por não compreender o modelo de uma bateria, e assim, errou ao avaliar que a cada unidade de acréscimo da corrente, corresponderia um decréscimo de 0,5 na resistência; na verdade, o que sofre decréscimo de 0,5 é a d.d.p. Ambos os alunos não encontraram a f.e.m. que foi solicitada no problema; talvez tal atividade ainda não tivesse sido trabalhada no curso de técnico em eletrônica.

ATIVIDADE 5

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 5, duas das quais citamos abaixo, temos:

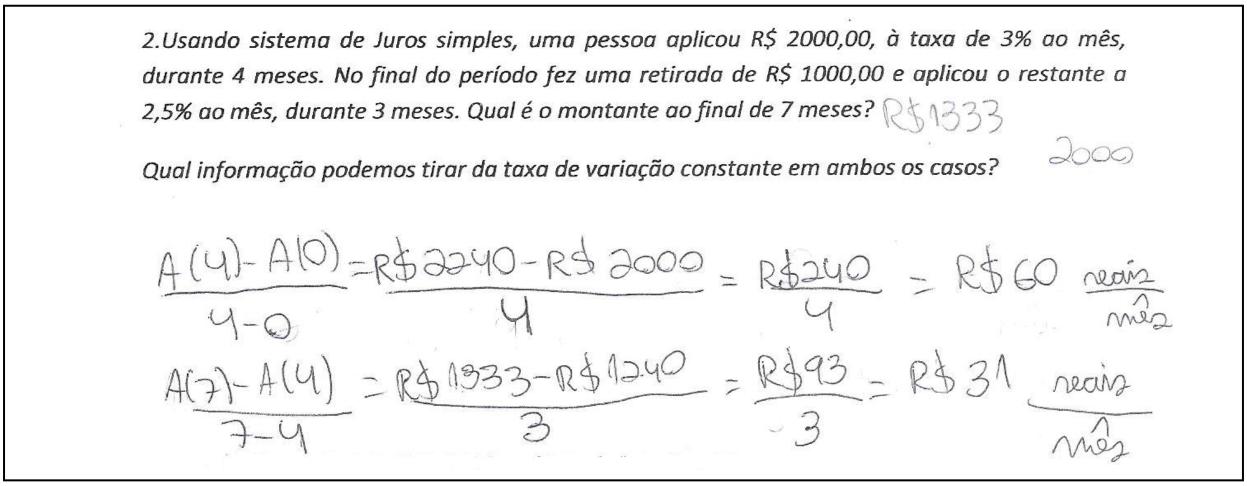
2.Usando sistema de Juros simples, uma pessoa aplicou R$ 2000,00, à taxa de 3% ao mês, durante 4 meses. No final do período fez uma retirada de R$ 1000,00 e aplicou o restante a 2,5% ao mês, durante 3 meses. Qual é o montante ao final de 7 meses?

Qual informação podemos tirar da taxa de variação constante em ambos os casos?

No primeiro caso, a cada mês (entre os 4) há R$ 60,00 a mais na conta da pessoa. Após ela retirar R$1000,00, sobra R$1240,00 e aplicando a taxa de 2,5% ao mês, durante 3 meses, a pessoa tem R$ 1333,00, tendo recebido, com esse sistema de juros simples, R$ 333,00 a mais.

f(0) 2000
f(1) 2000+60
f(2) 2000+120
f(3) 2000+180
f(4) 2000+240 2240 −1000
f(1) 1240+31
f(2)
f(3) 1333

Figura 17: Atividade da aluna G.P.B.



2.Usando sistema de Juros simples, uma pessoa aplicou R$ 2000,00, à taxa de 3% ao mês, durante 4 meses. No final do período fez uma retirada de R$ 1000,00 e aplicou o restante a 2,5% ao mês, durante 3 meses. Qual é o montante ao final de 7 meses? R$1333

Qual informação podemos tirar da taxa de variação constante em ambos os casos? 2000

$$\frac{A(4)-A(0)}{4-0} = \frac{R\$2240 - R\$2000}{4} = \frac{R\$240}{4} = R\$60 \ \frac{\text{reais}}{\text{mês}}$$

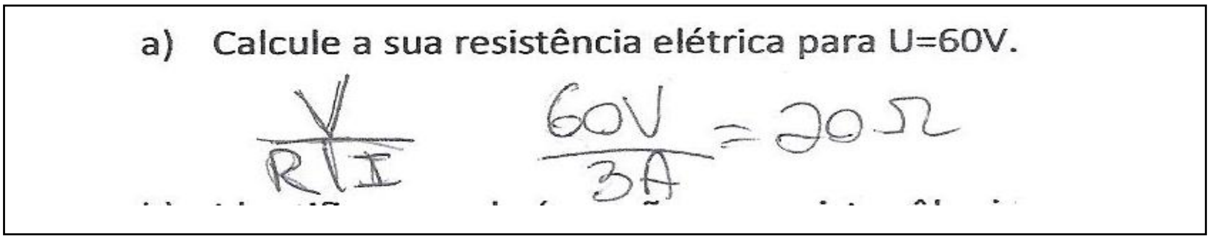
$$\frac{A(7)-A(4)}{7-4} = \frac{R\$1333 - R\$1240}{3} = \frac{R\$93}{3} = R\$31 \ \frac{\text{reais}}{\text{mês}}$$

Figura 18: Atividade do aluno J.F.

A aluna G.P.B. demonstrou que de fato dominava bem o conteúdo trabalhado, e argumentou suas respostas com a utilização de uma tabela. Além disso, a aluna procurou fazer uma minuciosa descrição de como variava o montante, na situação do problema em questão. Já o aluno J.F. apresentou cálculos das duas taxas de variação utilizando valores para A(4) e A(7), que ele não explica de onde vieram.

ATIVIDADE 6

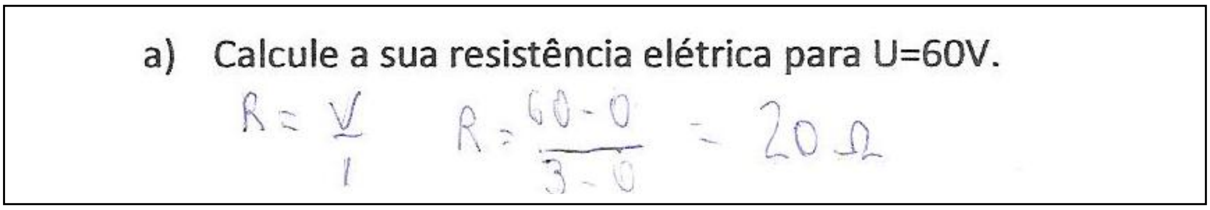
Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 6.a, duas das quais citamos abaixo, temos:



a) Calcule a sua resistência elétrica para U=60V.

$$\frac{V}{R \mid I} \qquad \frac{60V}{3A} = 20\Omega$$

Figura 19: Atividade do aluno J.F.



a) Calcule a sua resistência elétrica para U=60V.

$$R = \frac{V}{I} \qquad R = \frac{60-0}{3-0} = 20\,\Omega$$

Figura 20: Atividade do aluno P.M.

O aluno J.F. tentou resolver o problema utilizando uma fórmula conhecida no seu curso $R = \frac{V}{i}$. O mesmo optou por não desenvolver a atividade trabalhando com taxas de variação constantes, apesar de ter obtido a resposta; porém J.F. utilizou as unidades de diferença de potencial (volts) e de corrente (ampères), para apresentar a unidade de resistência (ohms). O aluno P.M. fez o seu cálculo através da razão entre a variação em V e a variação em i; ele já estava pressupondo que essa taxa de variação era constante.

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 6.b, duas das quais citamos abaixo, temos:

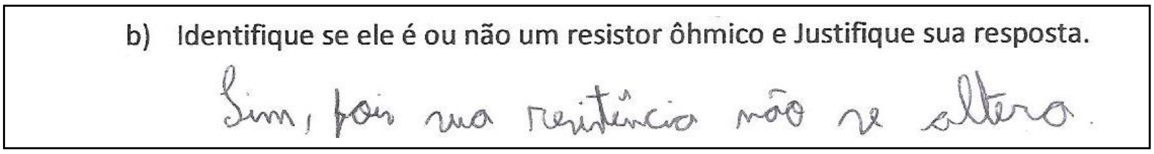

b) Identifique se ele é ou não um resistor ôhmico e Justifique sua resposta.
Sim, pois sua resistência não se altera.

Figura 21: Atividade do aluno A.M.C

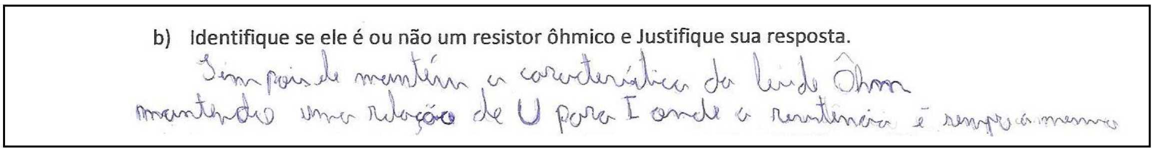

b) Identifique se ele é ou não um resistor ôhmico e Justifique sua resposta.
Sim pois ele mantém a característica da lei de Ôhm mantendo uma relação de U para I onde a resistência é sempre a mesma

Figura 22: Atividade do aluno A.E.B.

Nas escritas dos alunos A.M.C. e A.E.B., foi possível visualizar a presença da taxa de variação constante e de sua importância na aplicação da classificação de um resistor em ôhmico e não ôhmico. Nesse caso, ambos os alunos demonstraram conhecimento acerca da presença de uma constante para caracterizar a existência de um resistor ôhmico.

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 6.c, duas das quais citamos abaixo, temos:

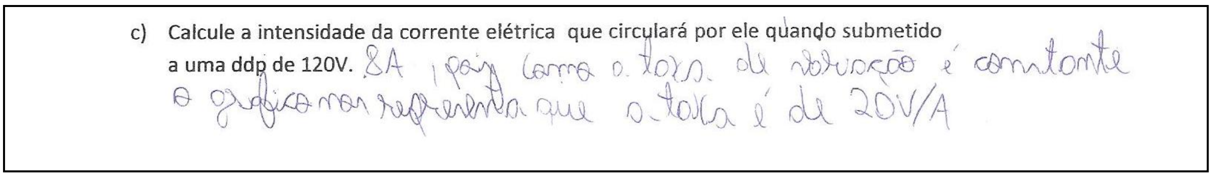
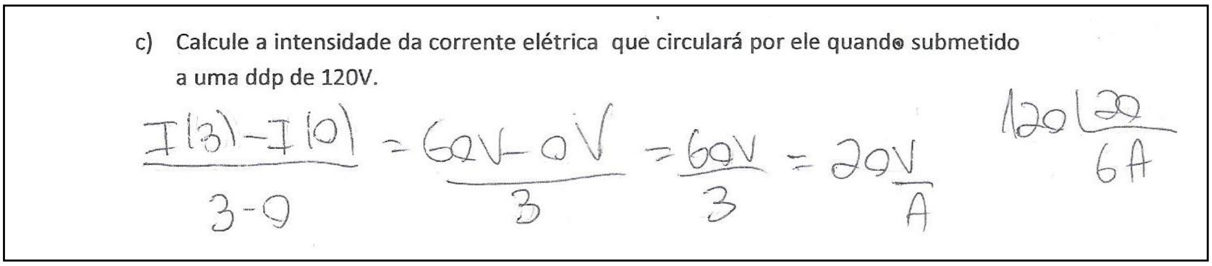

c) Calcule a intensidade da corrente elétrica que circulará por ele quando submetido a uma ddp de 120V. 8A, pois como a taxa de variação é constante o gráfico nos representa que a taxa é de 20V/A

Figura 23: Atividade do aluno A.E.M



c) Calcule a intensidade da corrente elétrica que circulará por ele quando submetido a uma ddp de 120V.

$$\frac{I(3)-I(0)}{3-0} = \frac{60V-0V}{3} = \frac{60V}{3} = 20\frac{V}{A}$$

$120 \,\underline{|\, 20}$
$\quad\;\; 6A$

Figura 24: Atividade do aluno J.F.

Ambas as respostas apresentaram em sua resolução o uso da taxa de variação constante. Entretanto, o aluno J.F. fez uso da explicação de taxas de variação constantes para produzir seus argumentos de resposta. Enquanto que, o aluno A.E.M., apesar de ter feito um erro de cálculo ao escrever 8A em vez de 6A, apresentou a informação de que a taxa de variação era constante e que valia 20 V/A. Os alunos também procuraram representar as unidades que foram utilizadas no gráfico, ao apresentá-las conjuntamente com a taxa de variação constante encontrada.

2.4 TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA E INSTANTÂNEA EM FUNÇÕES QUADRÁTICAS (9 PERÍODOS DE AULA DE 50 MIN.)

Iniciamos o estudo da função quadrática, assim como introduzimos a taxa de variação média, bem como fizemos um estudo acerca do comportamento da mesma. Para este estudo, trabalhamos atividades que podiam ilustrar com exemplos contextualizados tais situações. Assim, desenvolvemos este estudo, de forma que os alunos pudessem compreender e aplicar o seu conhecimento nos diferentes problemas trabalhados. A atividade foi desenvolvida em duas aulas. Na primeira aula foram usados dois períodos de 50 minutos e na segunda aula um período de 50 minutos cada.

2.4.1 Aula Número 1

Atividade 1

Se $f(x)=x^2$.Determine a taxa média de variação de f sobre intervalos de comprimento 2, entre x=-4 e x=4. O que estas taxas querem dizer, a respeito da concavidade do gráfico de f(x)?

Através dessa atividade queríamos que os alunos verificassem o valor da taxa média de variação, e que fossem capazes de interpretar a relação entre a taxa média de variação e a concavidade da parábola.

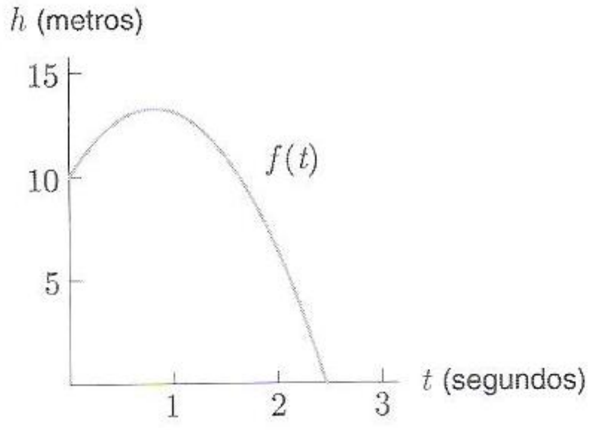
Atividade 2

Um mergulhador salta de um trampolim a 10 metros de altura. Para h em metros e t em segundos após a largada do trampolim, sua altura acima da água está ilustrada na figura 2 e é dada por

$$h=f(t)= -4{,}9t^2+8t +10.$$

a) Determine e interprete o domínio e a imagem da função e as interseções do gráfico.

b) Identifique a concavidade.



Altura de um mergulhador como uma função do tempo

Sobre os intervalos de comprimento 1, entre t=0 e t=2, o que as taxas de variação querem dizer? Que informações obtemos analisando as unidades envolvidas nessas taxas?

Com esse problema podíamos estabelecer uma relação com o problema anterior, pois, desta forma, verificamos a taxa média de variação e a sua relação com a concavidade da parábola. Além disso, podíamos realizar uma análise dimensional do problema.

2.4.2 Aula Número 2

Atividade 3

O percentual de escolas que possuíam leitores de videoteca interativos, entre 1992 e 1996, é apresentado na tabela 2. Se x é dado em anos desde 1992, mostre que estes dados podem ser aproximados pela função quadrática p(x)=

$-0,8x^2+8,8x+7,2$. O que este modelo prevê para o ano de 2004? Quão apropriado é este modelo para fazer previsões futuras?

Tabela 2

Ano	1992	1993	1994	1995	1996
Percentagem	8	14	21	29,1	29,3

Essa taxa de variação não é constante se ela fosse deveria ser qual função?

Atividade aplicada de função quadrática envolvendo tabelas. O que pretendíamos com este problema era verificar o comportamento das taxas médias com o uso de tabelas.

Atividade 4

Um jogador de beisebol “rebate” uma bola verticalmente para cima. A altura da bola acima do solo é dada pela função $y=f(t)= -16t^2+64t+3$, onde t é o tempo em segundos, após a bola ser rebatida, e y está em pés. Assim, pergunta-se:

a) Qual será altura máxima da bola?
b) A concavidade da parábola é para cima ou para baixo?
c) Calcule a taxa média de variação ente t=3s t=5s, em intervalos de tempo de 0,5 em 0,5s..
d) Construa o gráfico dessa função.

Este foi um exercício de função quadrática, aplicado ao estudo de altura em função do tempo, em movimentos perpendiculares ao solo, através do qual queríamos demonstrar aos alunos um exercício com taxa média de variação negativa.

Atividade 5

> A potência elétrica lançada por um gerador é expressa por: $P=12.i-2.i^2$ unidades de medida do S.I. Calcule:
>
> a) a potência máxima que o gerador elétrico pode disponibilizar;
>
> b) a intensidade da corrente de curto-circuito do gerador;
>
> c) a intensidade da corrente no gerador quando estiver produzindo 10 W de potência.
>
> d) usando um intervalo de comprimento de 1 unidade análise o intervalo de $i=0$ até $i=6$, que informações podemos obter da taxa de variação média.

O exercício enfatiza uma situação problema de aplicabilidade ao curso de técnico em eletrônica, assim como uma aproximação do aprendizado de sala de aula com a prática do curso de técnico em eletrônica.

2.4.3 Comentários sobre a Aula Número 1

A aula sobre taxa de variação média foi realizada nos dias 16 e 17 de setembro de 2014, com a participação de 30 alunos. A duração inicialmente prevista de 3 períodos de 50 minutos foi estendida para 4 períodos de 50 minutos, para que os alunos pudessem realizar de forma tranqüila e gradual o desenvolvimento dos exercícios propostos.

A introdução desse conteúdo foi iniciada com uma situação problema (ver Exemplo 1 do Apêndice A) envolvendo função quadrática e a apresentação da taxa de variação média nessa função. A fim de que o aluno pudesse melhor compreender tal comportamento foi desenvolvida uma tabela de valores para os quais x variava entre -2 e 3, em subintervalos de comprimento igual a 1. A tabela utilizada era composta de três colunas uma para x, outra para $f(x)=x^2$ e mais uma para o valor da variável dependente y(x), da função afim com taxa de variação constante igual à taxa de variação média de f(x) calculada em [-2, 3]. Observou-se daí que esta função afim y(x) leva do valor de y(-2) = f(-2), para o valor de y(3) = f(3), não sendo iguais entretanto os valores de y(x) e de f(x), nos valores intermediários de x.

Desta forma, o aluno podia verificar, a partir da montagem da tabela associada ao gráfico que fora obtido, o que vem a ser a taxa de variação média em uma função quadrática, e interpretar a informação nela obtida. Surgiram alguns questionamentos, como: “A variação não é constante”, “As taxas de variação são iguais, porém com o sinal trocado”, “Quando ligamos dois pontos obtemos uma reta”, “É possível obter essa reta”.

Por fim, o professor enfatizou que, se fosse uma função Afim (era uma função quadrática $f(x)=x^2$), sairíamos do mesmo ponto inicial e chegaríamos ao mesmo ponto final utilizando a taxa de variação obtida; também foi mostrado graficamente a reta obtida, assim como a sua fórmula, de forma que o aluno percebesse o que estava ocorrendo com as informações do problema.

O segundo problema (ver Exemplo 2 do Apêndice A) introdutório foi utilizado com uma situação contextual envolvendo velocidade média. Para evidenciar tal relação, o professor propôs uma situação real de problema que envolvesse um percurso já conhecido (distância entre Porto Alegre e Canela, com uma parada em São Leopoldo) e a determinação da velocidade média nesse deslocamento. Ao trabalhar com esta atividade, ficou bem ilustrado que a velocidade média obtida não representava realmente a situação proposta pelo problema, uma vez que fora percorrido uma distância diferente em tempos iguais.

O problema serviu para apresentar aos alunos uma situação de aplicação real envolvendo este conteúdo. Foram construídas duas tabelas, uma que envolvia os termos propostos no problema real e outra caso fosse uma função Afim, com ambos os dados saindo de Porto Alegre (Ponto Inicial) e chegando a Canela (Ponto Final).

Alguns questionamentos dos alunos durante a realização do problema foram interessantes tais como: “A velocidade média é 60km/h, quer dizer que a cada 1 hora andamos 60 km, porém tal dado não bate com o problema”, “Se a velocidade média é de 60 km/h, às 15 horas andamos 60 km, mas o problema fala em 30km, como?”, “Esse 60 km/h seria a taxa de variação constante da função Afim?”.

O terceiro problema (ver Exemplo 3 do Apêndice A) envolveu uma atividade de queda livre de um objeto a partir de uma altura determinada. Nesse problema o professor procurou misturar as duas primeiras atividades de introdução. Assim buscou-se trabalhar com uma situação que complementasse tanto a parte matemática como a de um problema contextualizado.

Nesse problema, sugerimos aos alunos que tentassem resolver o exemplo, sendo depois corrigido conjuntamente.

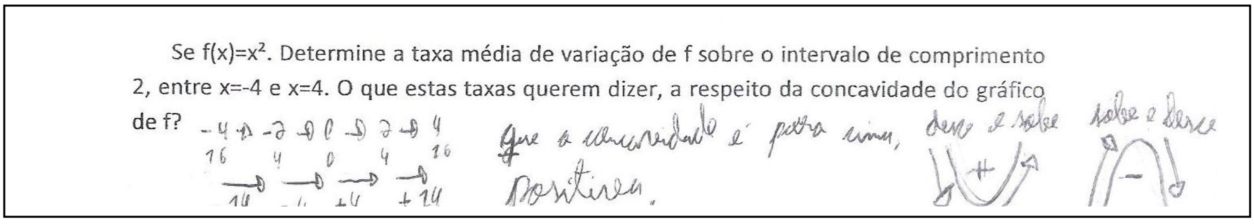
Durante a realização dos problemas, apareceram alguns questionamentos por parte dos alunos como: “A taxa média de variação é negativa, por que o objeto está caindo”, “A taxa obtida é -10m/s, isso indica que a cada segundo descemos dez metros”, “Professor, o fato da taxa de variação média ser negativa indica que a parábola é voltada para baixo”; “Se usarmos a taxa como se fosse uma função Afim temos que no 1º segundo descemos 10m e no 2º segundo estamos no chão”. Ao final dos problemas de introdução, passamos a trabalhar em aula com as atividades abordando a taxa de variação média.

Ao final da aula, os alunos passaram a perceber que a taxa média de variação tinha uma interpretação diferente da taxa de variação constante, apesar de ambas estarem ligadas a uma reta. Enquanto a taxa de variação constante informava se um problema era, ou não, de função Afim, a taxa média de variação informava que, se saíssemos de um mesmo ponto inicial, chegaríamos a um mesmo ponto final usando um valor constante para a taxa de variação.

Após a apresentação e correção dos problemas introdutórios, passamos a desenvolver a atividade de exercícios. Cada aluno participante recebeu uma tarefa a ser respondida individualmente, constituída por seis questões que envolviam problemas de Função quadrática (Atividade 1, 2, 3, 4, 5 e 6 especificadas acima). As questões propostas envolviam a busca da taxa de variação média, e também a interpretação do seu valor, juntamente com as unidades pertinentes.

Atividade 1

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 1, duas das quais citamos abaixo, temos:


Se f(x)=x². Determine a taxa média de variação de f sobre o intervalo de comprimento 2, entre x=-4 e x=4. O que estas taxas querem dizer, a respeito da concavidade do gráfico de f?

Que a concavidade é para cima, positiva.

Figura 25: Atividade do aluno G.C.

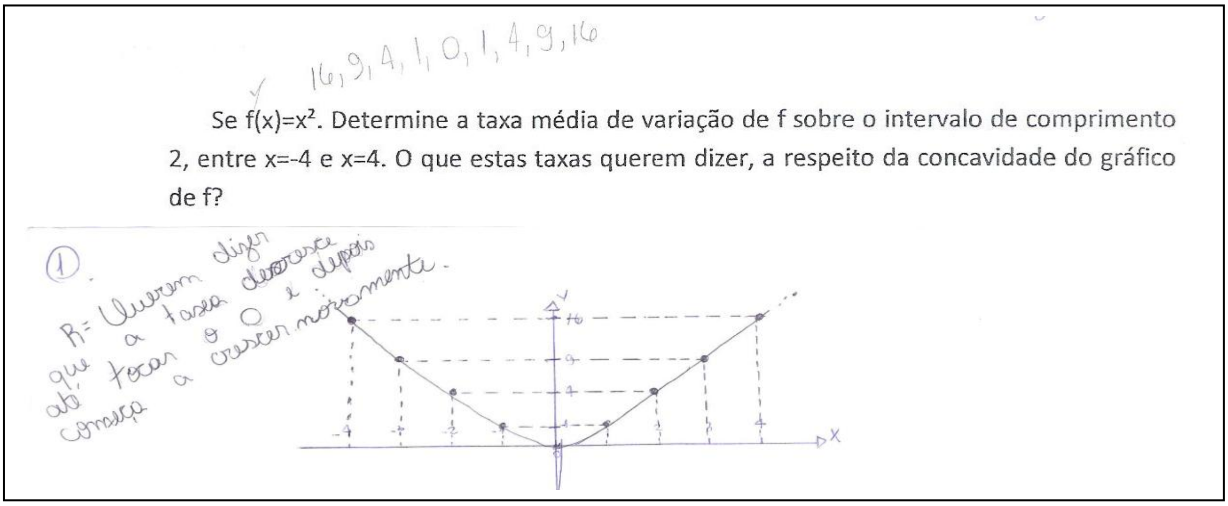


Figura 26: Atividade da aluna T.L.M

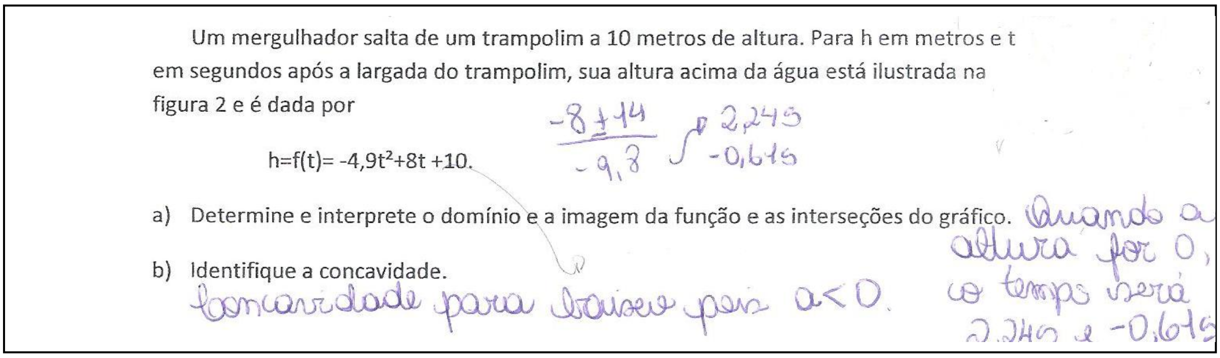
Os dois alunos calcularam e compreenderam o que o exercício estava propondo. Ambos verificaram que a taxa de variação média primeiro decrescia e depois crescia em módulo e que tais valores indicavam o comportamento da concavidade da parábola; nesse caso, uma parábola de concavidade para cima. Além disso, eles procuraram demonstrar graficamente tal comportamento.

O aluno G.C. preocupou-se em evidenciar os formatos de ambas as parábolas a de concavidade para cima e a de concavidade para baixo, além de apresentar o respectivo comportamento da taxa de variação média, ora decrescendo ora crescendo em módulo, e sua influência na concavidade da parábola. Entretanto, o aluno apresentou valores errados de cálculo dos intervalos.

A aluna T.L.M. construiu um gráfico com os valores obtidos pela função indicada, apresentando uma conclusão a respeito dos valores envolvidos. Nesse caso, os valores decresciam até zero em módulo e posteriormente cresciam em módulo, o que é possível perceber em seu gráfico. No entanto, ela não calculou nenhuma taxa de variação.

Atividade 2

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 2, duas das quais citamos abaixo, temos:



Um mergulhador salta de um trampolim a 10 metros de altura. Para h em metros e t em segundos após a largada do trampolim, sua altura acima da água está ilustrada na figura 2 e é dada por

h=f(t)= -4,9t²+8t +10.

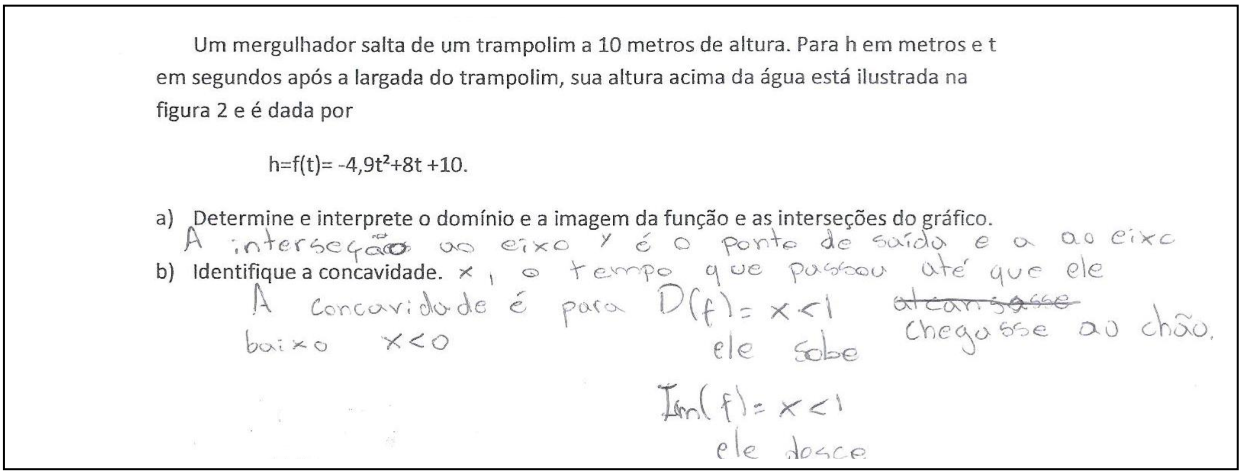
$\frac{-8 \pm 14}{-9,8}$ 2,249 -0,619

a) Determine e interprete o domínio e a imagem da função e as interseções do gráfico. Quando a altura for 0, o tempo será 2,249 e -0,619

b) Identifique a concavidade.

concavidade para baixo pois a<0.

Figura 27: Atividade da aluna G.P.



Um mergulhador salta de um trampolim a 10 metros de altura. Para h em metros e t em segundos após a largada do trampolim, sua altura acima da água está ilustrada na figura 2 e é dada por

h=f(t)= -4,9t²+8t +10.

a) Determine e interprete o domínio e a imagem da função e as interseções do gráfico.

A intersecção ao eixo y é o ponto de saída e a ao eixo x, o tempo que passou até que ele ~~alcançasse~~ chegasse ao chão.

b) Identifique a concavidade.

A concavidade é para baixo x<0

D(f) = x<1 ele sobe

Im(f) = x<1 ele desce

Figura 28: Atividade do aluno G.S.

O aluno G.P. apresenta a intersecção com o eixo x de forma correta, porém a intersecção com o eixo y e a interpretação de domínio e imagem não estão desenvolvidas na tarefa. Já para a concavidade, a resposta está correta, mas o aluno não utilizou a taxa de variação média para tal identificação, utilizando apenas o valor do parâmetro “a” e o fato de o mesmo ser positivo.

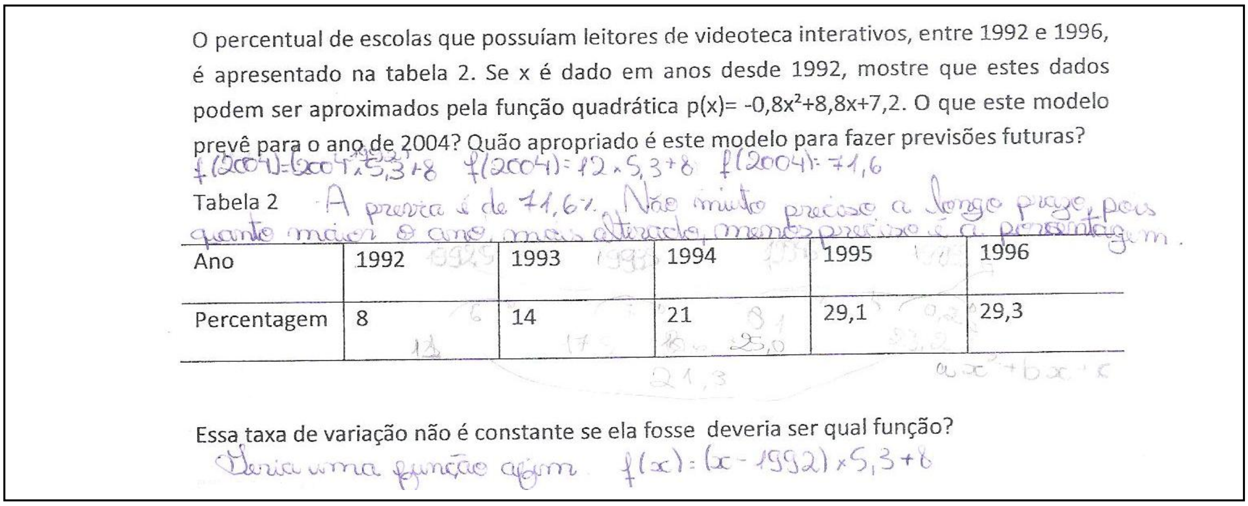
O aluno G.S. fez uma análise dos valores de intersecção com os eixos y e x de forma correta, mesmo sem utilizar números. Além disso, sua interpretação do domínio está boa, porém incompleta, e a análise da imagem está bastante equivocada. Por fim, G.S. fez uma interpretação de concavidade utilizando o valor do x, quando de fato poderia utilizar o parâmetro “a”, ou utilizar a taxa de variação média.

É possível que os alunos não tenham compreendido a atividade, uma vez que ela não se apresenta desenvolvida em seu todo, o que demonstra que à atividade de domínio e imagem necessita ser retomada. Além disso, nem um dos alunos se utilizou da taxa de variação média para verificar a concavidade da parábola, uma vez que tal assunto fora trabalhado nos problemas introdutórios do conteúdo.

2.4.4 Comentários sobre a Aula Número 2

Atividade 3

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 3, duas das quais citamos abaixo, temos



O percentual de escolas que possuíam leitores de videoteca interativos, entre 1992 e 1996, é apresentado na tabela 2. Se x é dado em anos desde 1992, mostre que estes dados podem ser aproximados pela função quadrática p(x)= -0,8x²+8,8x+7,2. O que este modelo prevê para o ano de 2004? Quão apropriado é este modelo para fazer previsões futuras?

f(2004)=(2004-1992)×5,3+8 f(2004)=12×5,3+8 f(2004)=71,6

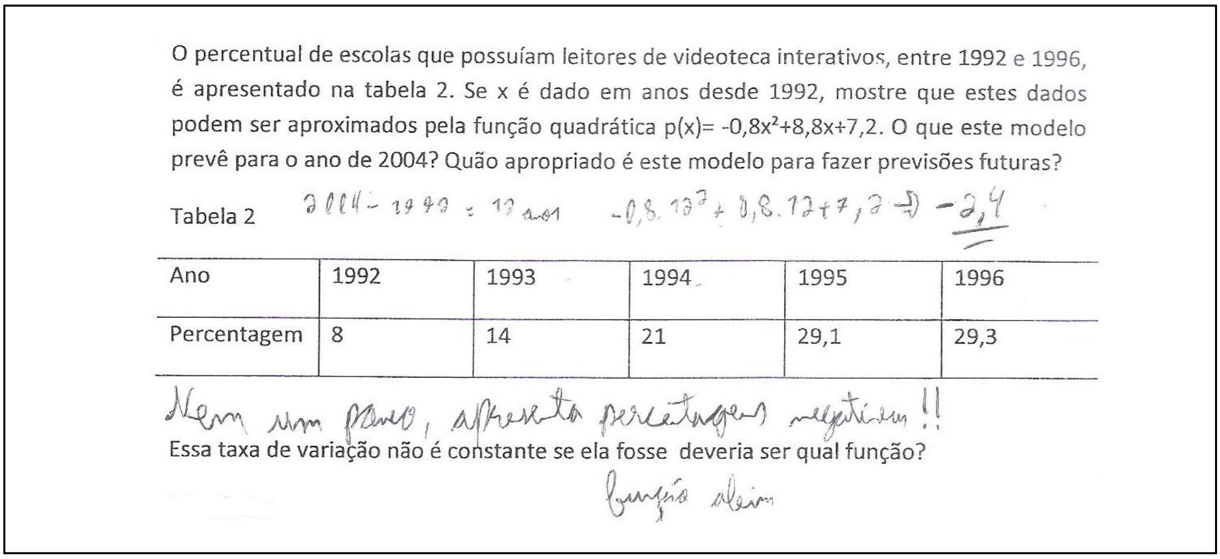
Tabela 2 A previsão é de 71,6%. Não muito preciso a longo prazo, pois quanto maior o ano, mais alterado, menos preciso é a porcentagem.

Ano	1992	1993	1994	1995	1996
Percentagem	8	14	21	29,1	29,3

Essa taxa de variação não é constante se ela fosse deveria ser qual função?

Seria uma função afim f(x)=(x-1992)×5,3+8

Figura 29: Atividade da aluna V.L.



O percentual de escolas que possuíam leitores de videoteca interativos, entre 1992 e 1996, é apresentado na tabela 2. Se x é dado em anos desde 1992, mostre que estes dados podem ser aproximados pela função quadrática p(x)= -0,8x²+8,8x+7,2. O que este modelo prevê para o ano de 2004? Quão apropriado é este modelo para fazer previsões futuras?

Tabela 2 2004-1992 = 12 anos -0,8.12²+8,8.12+7,2 ⇒ -2,4

Ano	1992	1993	1994	1995	1996
Percentagem	8	14	21	29,1	29,3

Nem um pouco, apresenta percentagens negativas!!

Essa taxa de variação não é constante se ela fosse deveria ser qual função?

função afim

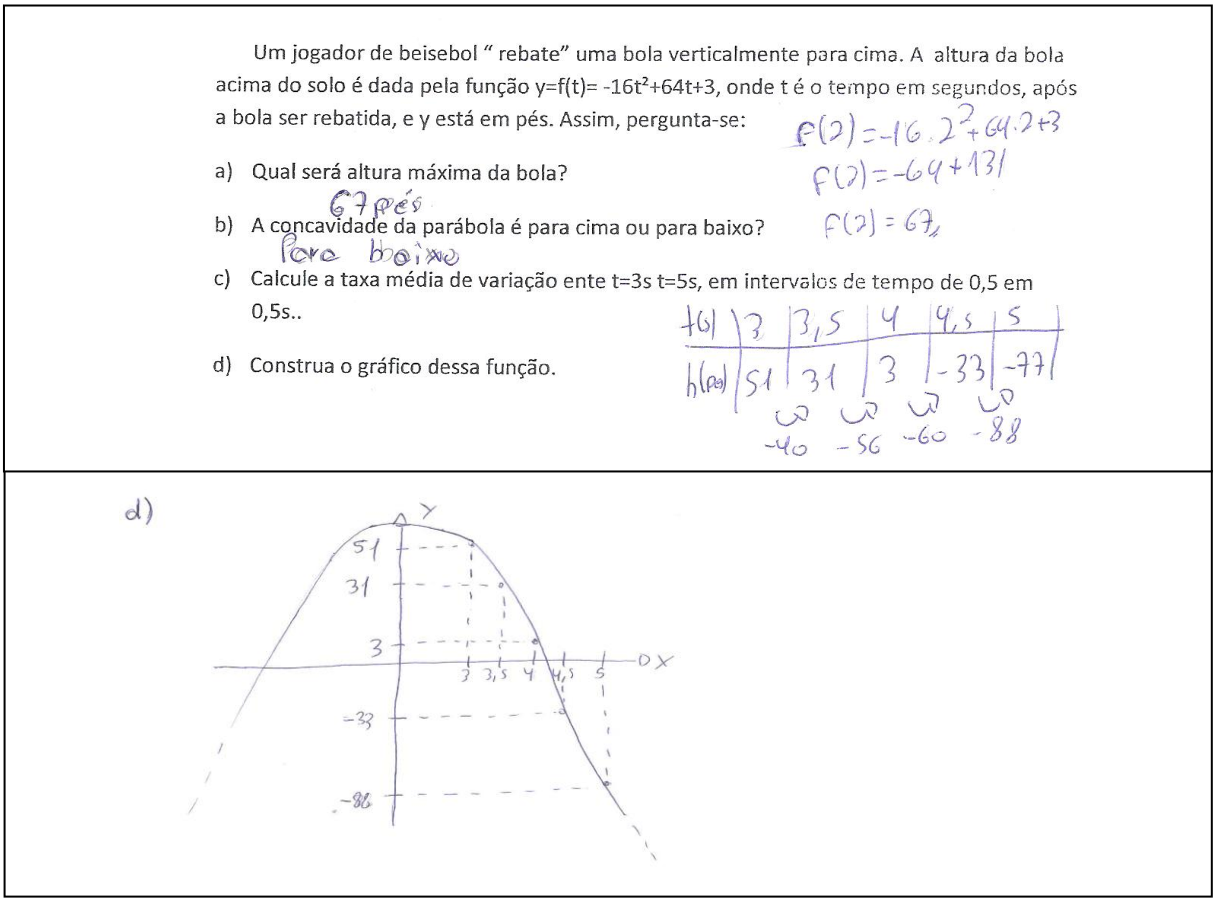
Figura 30: Atividade do aluno G.C.L.

A aluna V.L. apresentou conclusões erradas sobre a tarefa. V.L procurou utilizar a informação de taxa média de variação, porém utilizando apenas os dados da tabela. Ela não procurou verificar o comportamento do problema para anos futuros, pois nesse caso verificaria que a taxa de variação deveria ser negativa e não positiva como ela obteve. Entretanto, se ficar apenas com as informações provenientes da tabela, suas conclusões são bastante relevantes e apropriadas, uma vez que ela encontra a taxa de variação média e estabelece com esta uma relação de função Afim. Assim, ela realiza a atividade concluindo que, caso fosse uma função, essa função seria uma função Afim.

O aluno G.C.L. procurou, ao contrário da aluna V.L., verificar o comportamento da variável *y* no ano de 2004; assim, ele fez o cálculo da variável dependente y para x=12, pois de 1992 até 2004 são decorridos 12 anos. G.C.L. trouxe uma conclusão a respeito de a função ser boa para cálculos futuros, a partir da obtenção do valor obtido em 2004. Por fim, ele trouxe a conclusão de que se caso fosse uma taxa de variação essa taxa seria de uma função Afim. Apesar de fazer cálculos e conclusões corretas, o aluno não utiliza taxa de variação média para realizar nenhum dos seus cálculos, o que nesse caso poderia melhor embasar a sua atividade.

Atividade 4

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 4, duas das quais citamos abaixo, temos:



Um jogador de beisebol " rebate" uma bola verticalmente para cima. A altura da bola acima do solo é dada pela função y=f(t)= -16t²+64t+3, onde t é o tempo em segundos, após a bola ser rebatida, e y está em pés. Assim, pergunta-se:

$f(2) = -16.2^2 + 64.2 + 3$

$f(2) = -64 + 131$

$f(2) = 67$

a) Qual será altura máxima da bola?

67 pés

b) A concavidade da parábola é para cima ou para baixo?

Para baixo

c) Calcule a taxa média de variação ente t=3s t=5s, em intervalos de tempo de 0,5 em 0,5s..

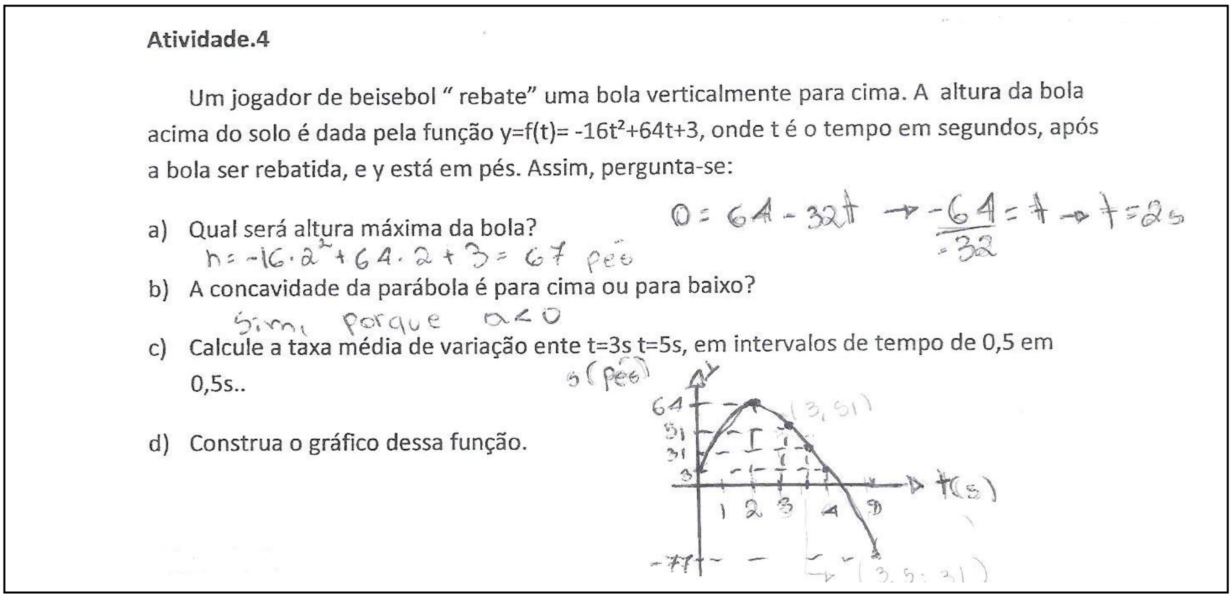
d) Construa o gráfico dessa função.

t(s)	3	3,5	4	4,5	5
h(pés)	51	31	3	-33	-77

-40 -56 -60 -88

d)

Figura 31: Atividade do aluno G.B.M.



Atividade.4

Um jogador de beisebol " rebate" uma bola verticalmente para cima. A altura da bola acima do solo é dada pela função y=f(t)= -16t²+64t+3, onde t é o tempo em segundos, após a bola ser rebatida, e y está em pés. Assim, pergunta-se:

$0 = 64 - 32t \rightarrow \frac{-64}{-32} = t \rightarrow t = 2s$

a) Qual será altura máxima da bola?

$h = -16 \cdot 2^2 + 64 \cdot 2 + 3 = 67$ pés

b) A concavidade da parábola é para cima ou para baixo?

Sim, porque $a < 0$

c) Calcule a taxa média de variação ente t=3s t=5s, em intervalos de tempo de 0,5 em 0,5s..

d) Construa o gráfico dessa função.

Figura 32: Atividade do aluno G.S.

Os alunos tiveram boa compreensão sobre a atividade que lhes foi proposta, ambos responderam a todos os itens, demonstrando boa interpretação e aprendizado.

O aluno G.B.M. usou conhecimentos já trabalhados em aula, sobre o valor de x do ponto do ponto de vértice para responder ao item sobre a altura máxima atingida pela bola, enquanto que o aluno G.S. utilizou o conhecimento do x vértice para encontrar tal altura.

No item sobre concavidade eles usaram o fato de que o sinal do parâmetro “a" era negativo, para afirmar que a concavidade da parábola seria para baixo, como é possível perceber em ambos os gráficos.

No item sobre taxa média de variação, os alunos simplesmente calcularam os intervalos que lhes foram solicitados, sem verificar que informação essas taxas traziam sobre o problema, nem o que essas taxas podiam informar sobre o comportamento da concavidade da parábola. Assim, mesmo os itens sendo respondidos corretamente, a atividade sobre a taxa média de variação caracterizou-se apenas como atividade de cálculo, sem foco de interpretação.

Atividade 5

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 5, duas das quais citamos abaixo, temos:

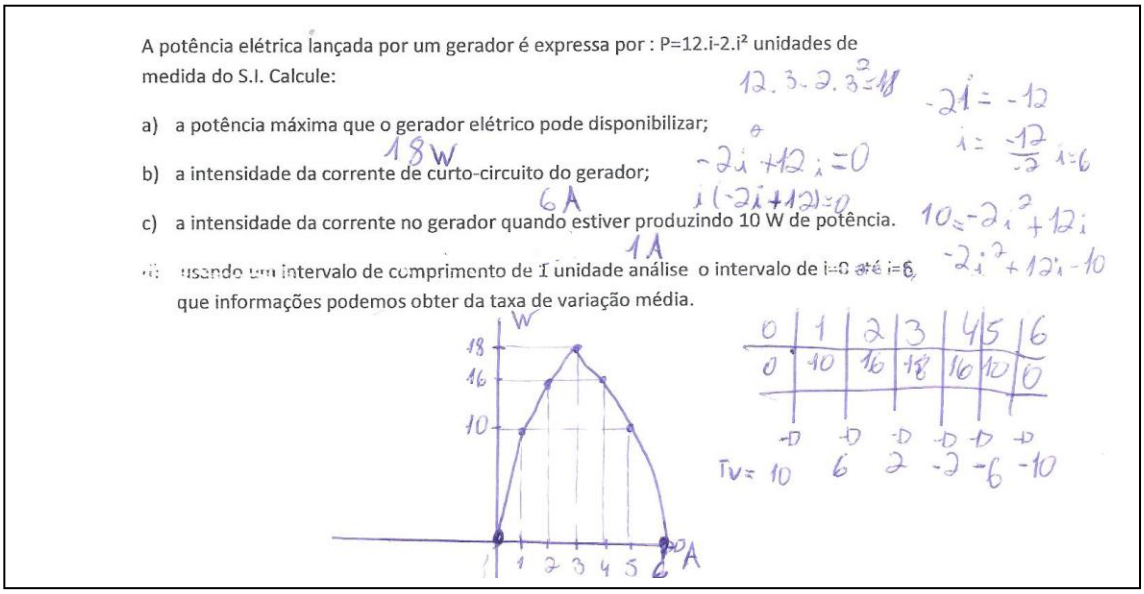
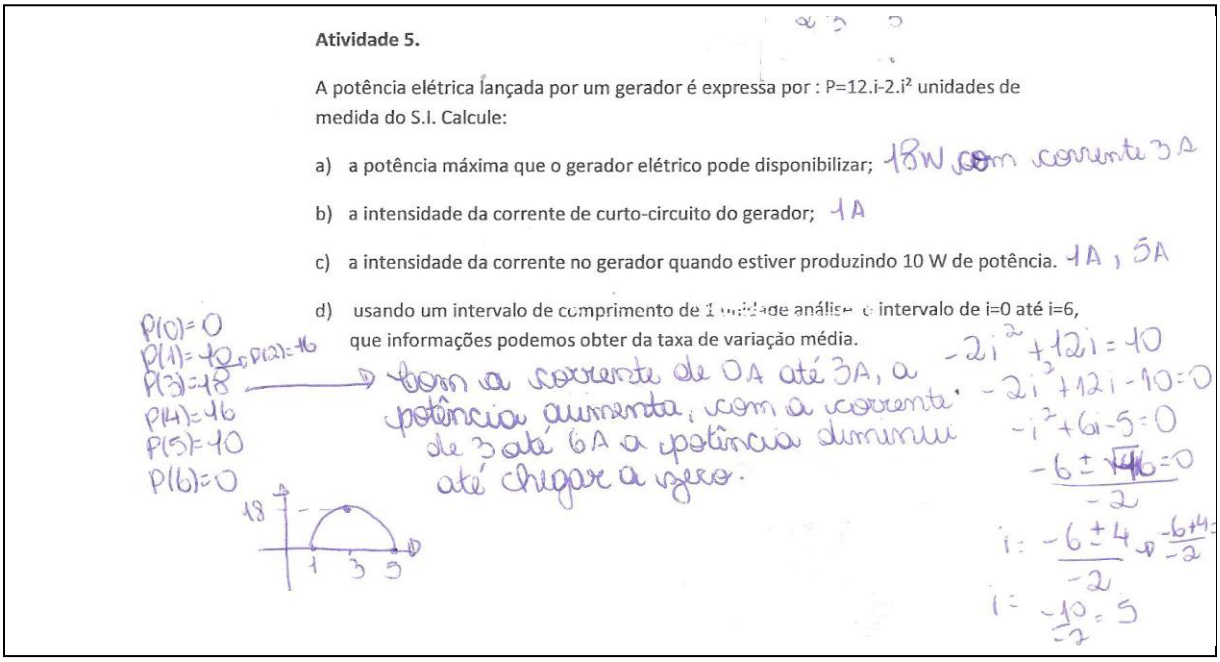


Figura 33: Atividade do aluno M.H.B.



Atividade 5.

A potência elétrica lançada por um gerador é expressa por : P=12.i-2.i² unidades de medida do S.I. Calcule:

a) a potência máxima que o gerador elétrico pode disponibilizar; 18W com corrente 3A

b) a intensidade da corrente de curto-circuito do gerador; 1A

c) a intensidade da corrente no gerador quando estiver produzindo 10 W de potência. 1A , 5A

d) usando um intervalo de comprimento de 1 unidade analise o intervalo de i=0 até i=6, que informações podemos obter da taxa de variação média.

P(0)=0
P(1)=10, P(2)=16
P(3)=18 → com a corrente de 0A até 3A, a potência aumenta, com a corrente de 3 até 6A a potência diminui até chegar a zero.
P(4)=16
P(5)=10
P(6)=0

$-2i^2+12i=10$
$-2i^2+12i-10=0$
$-i^2+6i-5=0$
$\frac{-6\pm\sqrt{16}}{-2}=0$
$i=\frac{-6\pm4}{-2} \rightarrow \frac{-6+4}{-2}$
$i=\frac{-10}{-2}=5$

Figura 34: Atividade da aluna G.P.B.

Os alunos M.H.B. e G.P.B. fizeram gráficos, indicando neles a potência máxima atingida, quando da corrente igual a 3A.

No item b, o aluno M.H.B. fez a interpretação correta da atividade, sendo também encontrada tal argumentação em seu gráfico, onde aparecem os pontos de intersecção com o eixo i, enquanto que a aluna G.P.B. não desenvolveu a atividade completamente, tendo apresentado resultados sem mostrar as contas intermediárias.

No item c, a aluna G.P.B. escreveu a igualdade, encontrando os valores corretos para a resposta, porém a construção do seu gráfico apresentou-se de forma equivocada em relação aos valores de intersecção com o eixo i. Já o aluno M.H.B. obteve apenas uma das respostas, apresentando apenas um formato de conta sem desenvolvimento.

No item d, que envolvia taxa de variação média, ambos procuraram apresentar a construção de uma tabela. O aluno M.H.B. utilizou-se dela para evidenciar o comportamento da taxa, sendo visível em seus cálculos o seu comportamento não constante. Ele, porém, não apresentou quaisquer conclusões sobre os valores encontrados na taxa.

A aluna G.P.B. fez afirmações sobre o comportamento da taxa de variação média, a partir da construção de uma tabela. Além disso, buscou interpretar a informação proveniente dessa taxa e de sua respectiva importância no desenvolvimento, analisando o comportamento da potência com relação à corrente. Entretanto, a construção do seu gráfico está feita de forma equivocada, não quanto à concavidade, mas quanto à intersecção com o eixo i.

2.4.5 Aula Número 3

Após termos estudado, nas aulas número 1 e número 2, a taxa de variação média em função quadrática, a aula número 3, que detalharemos abaixo, foi dedicada ao estudo da taxa de variação instantânea em funções quadráticas.

Ao contrário da taxa de variação média, que buscava valores médios em intervalos, como no exemplo número 1 da atividade anterior, a taxa de variação instantânea busca valores em um determinado instante. Nesse caso, seria possível verificar, por exemplo: a velocidade de um móvel no instante 3s, ou a população de uma determinada espécie em um tempo t qualquer. Para essa atividade começamos com uma fala a respeito das retas secantes e tangentes, bem como da importância das mesmas no estudo de taxas de variação média e instantânea.

Através do traçado das tangentes à curva $y = f(t)$, no plano ty, pode-se alcançar o conceito de derivada instantânea. Além disso, usamos as informações da taxa média de variação para encontrarmos uma representação para taxa de variação instantânea. A duração dessa atividade foi de três períodos de 50 minutos cada.

Atividade 1

Obtenha a taxa de variação de $f(x)=4x^2$ no ponto $x=3$. Como você interpreta o valor obtido?

Com esse problema introduzimos a taxa de variação instantânea, bem como a sua relação com a reta tangente. Estabelecemos também uma análise dimensional do problema.

Atividade 2

Um ponto material se move com movimento uniformemente variado. A função horária do espaço é $S=10+t+1{,}2t^2$. Encontre a taxa de variação instantânea no t=4s e t=6s. Com você interpreta os valores obtidos?

Nesse caso, o aluno poderia estabelecer uma relação da taxa de variação instantânea com a velocidade, e posteriormente da velocidade com a aceleração.

Atividade 3

A quantidade de água em um tanque t minutos após ele começar a ser esvaziado é dado por $W=100(t-15)^2$ Gal.

a) Com que taxa a água está fluindo no final de 5 minutos?
b) Qual é a taxa média segundo a qual a água flui durante os 5 primeiros minutos?

Nesta atividade, tanto a taxa de variação instantânea quanto a taxa de variação média foram abordadas. Além disso, fizemos um estudo sobre as informações da variável dependente da função, com relação a cada uma destas taxas.

Atividade 4

A resistência elétrica R de certo fio é dada por $R=k/r^2$, onde k é uma constante e r o raio do fio. Supondo que o raio tenha um erro possível de $\pm 5\%$, use diferencial para estimar o erro percentual em R (supondo k exato).

Este foi um problema de aplicação de taxa de variação instantânea, envolvendo uma situação ligada ao curso técnico de eletrônica. Assim, o aluno visualizaria uma situação contextual.

Comentários

Nosso objetivo era de que, ao final dessa atividade, o aluno pudesse identificar a diferença entre taxa de variação média e taxa de variação instantânea. Além disso, procuramos relacionar a taxa de variação instantânea com atividades contextualizadas que fossem facilmente identificadas pelos alunos.

2.4.6 Comentários sobre a Aula Número 3

As aulas sobre função quadrática envolvendo taxa de variação instantânea foram ministradas nos dias 07, 08 e 14 de outubro de 2014, com duração total de 6 períodos, cada um deles de 50 minutos, tendo participado um total de 28 alunos.

No dia 07/10/2014, introduzimos um exemplo genérico (ver exemplo 3 do Anexo A) através do qual os alunos poderiam compreender o que vem a ser uma taxa de variação instantânea. A atividade procurava ilustrar aos alunos a definição tanto geométrica como através de cálculos, do que vem a ser a taxa de variação instantânea e da importância do seu estudo. Posteriormente, foi apresentado aos alunos a terminologia de derivada e sua simbologia usual, assim como a sua relação direta com a taxa de variação instantânea.

O exemplo (ver exemplo 4 do Anexo A) seguinte tratava de encontrar a derivada de uma função em um ponto preciso: buscava-se a derivada da função $f(x)=x^3$ no ponto $x_0=2$. Nesse exemplo, procuramos analisar conjuntamente com os alunos o que vinha a ser a taxa de variação instantânea no ponto $x_0=2$, a partir da função proposta. Assim apareceram algumas contribuições à aula por parte dos alunos, bastante interessantes, como: “À medida que x_1 se aproxima de x_0 o intervalo se aproxima de zero”, outra “À medida que nos deslocamos de x_1 para x_0, $f(x_1)$ desloca-se para $f(x_0)$”.

Apesar de os alunos estarem bastante atentos aos desenvolvimentos dos cálculos e fazerem bons questionamentos na aula, a manipulação via uso de limites mostrou-se bastante complexa por parte dos alunos, o que poderia desmobilizá-los em relação ao seu aprendizado.

A fim de facilitar o aprendizado dessa atividade e das subsequentes, foi desenvolvido com os alunos a definição da derivada da função potência com expoente natural (ver exemplo 1 do Anexo B): $f(x)=x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Nesse caso, o objetivo era facilitar o aprendizado dos alunos e mostrar-lhes uma ferramenta importante para o cálculo de funções derivadas. Para a análise dos alunos foram sugeridos dois exemplos (ver exemplos 5 e 6 do Anexo A), sendo o primeiro realizado pelo professor e o segundo realizado pelos alunos, são eles: $f(x)=x^6$, então $f'(x)=6x^5$; $f(x)=x^2$, então $f'(x)=2x$.

Outro exemplo trabalhado em aula envolvia um exercício de física (ver exemplo 7 do Anexo A) através da equação horária S(t)=t²-2t +5, onde era solicitado a velocidade do ponto material no instante t_0=2s.

Após as explicações sobre a derivada da potência, os alunos conseguiram realizar conjuntamente com o professor o exercício solicitado. Além disso, os alunos trouxeram bons argumentos durante o desenvolvimento da atividade, como: “A derivada da posição é a velocidade”, outro: “Se a derivada da posição é a velocidade, então a derivada da velocidade é a aceleração”.

Por fim, foi trabalhado com os alunos a interpretação Geométrica da derivada (ver exemplo 8 do Anexo A). Assim, a fim de se obter uma melhor compreensão por parte dos alunos, foram trabalhadas atividades genéricas que apresentavam a equação da reta com o uso da derivada em determinado ponto.

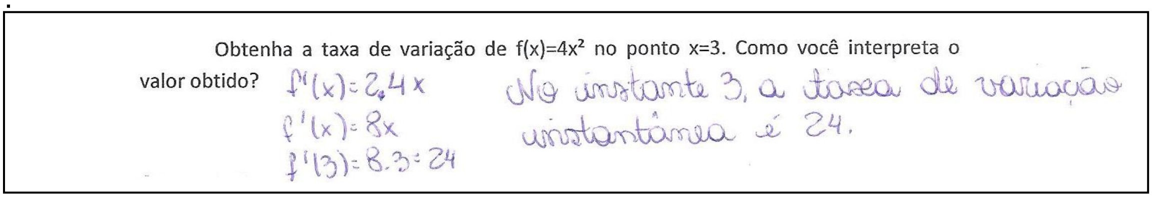
Ao realizarmos esta tarefa em aula, nosso objetivo foi o de trabalhar com exemplos que pudessem apresentar aos alunos atividades de fácil visualização e obtenção da equação da reta com o uso das derivadas.

No decorrer da atividade os alunos trouxeram algumas contribuições bastante interessantes tais como: “A derivada de f(x)= x² no ponto x_0=1 produz uma equação de reta y=2x-1, onde o 2 é a taxa de variação constante”, outro: “Quando fazemos isso no exemplo anterior de posição, obtemos a reta da velocidade naquele instante de tempo informado”. Logo, ao encerrar a parte introdutória, foi possível verificar o aluno fazendo relação com atividades já estudadas.

Atividade 1

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 1, duas das quais citamos abaixo, temos

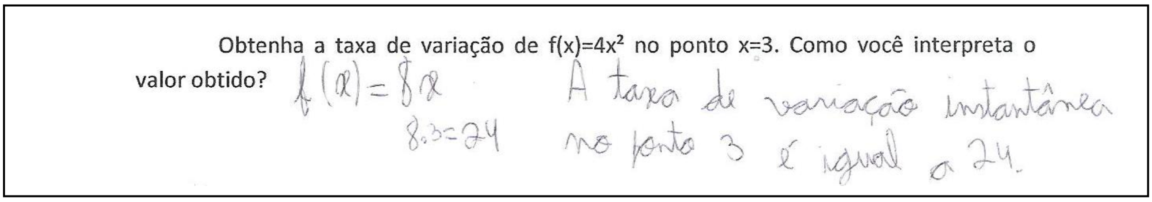
:


Obtenha a taxa de variação de f(x)=4x² no ponto x=3. Como você interpreta o valor obtido?

$f'(x)=2.4x$
$f'(x)=8x$
$f'(3)=8.3=24$

No instante 3, a taxa de variação instantânea é 24.

Figura 35: Atividade da aluna G.P.B.



Obtenha a taxa de variação de $f(x)=4x^2$ no ponto x=3. Como você interpreta o valor obtido?

$f(x) = 8x$

$8.3 = 24$

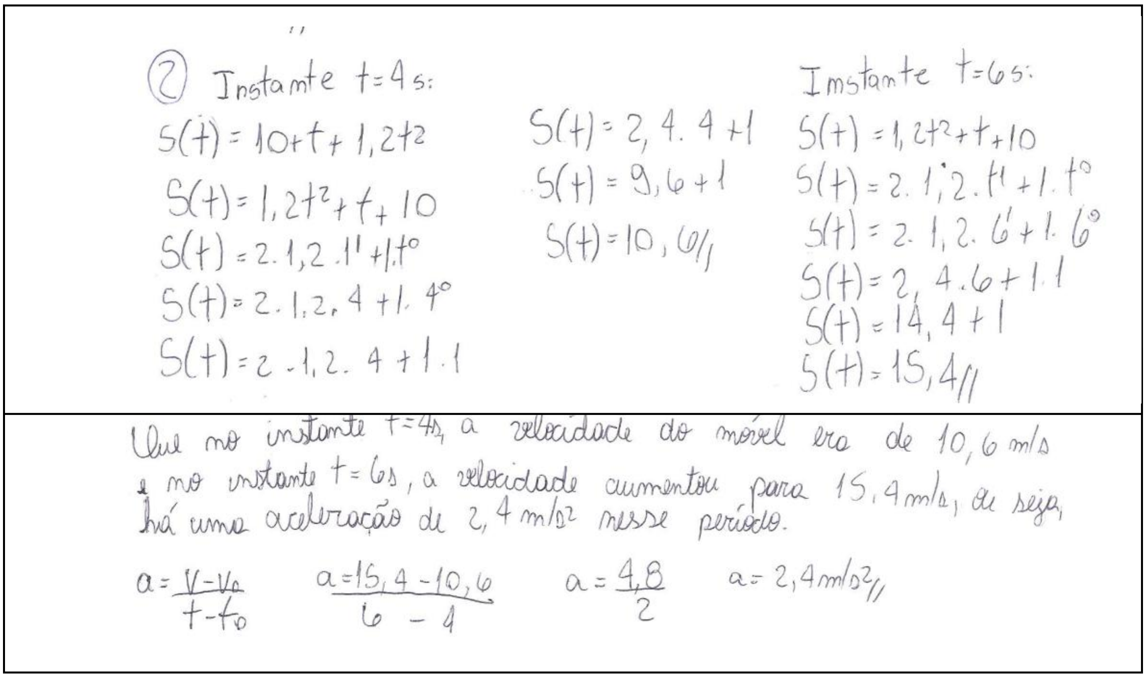
A taxa de variação instantânea no ponto 3 é igual a 24.

Figura 36: Atividade do aluno A.M.C.

Tanto a aluna G.P.B. quanto o aluno A.M.C. utilizaram a derivada da potência para encontrar o valor da derivada no instante x=3, o que demonstra boa compreensão da técnica. Entretanto, é possível verificar na escrita da aluna G.P.B. a preocupação em apresentar a simbologia correta da derivada, enquanto o aluno A.M.C. apresenta apenas o formato da função já derivada.

Atividade 2

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 2, duas das quais citamos abaixo, temos:



② Instante t=4s:

$S(t) = 10 + t + 1{,}2t^2$

$S(t) = 1{,}2t^2 + t + 10$

$S(t) = 2.1{,}2.1^1 + 1.t^0$

$S(t) = 2.1{,}2.4 + 1.4^0$

$S(t) = 2.1{,}2.4 + 1.1$

$S(t) = 2{,}4.4 + 1$

$S(t) = 9{,}6 + 1$

$S(t) = 10{,}6$//

Instante t=6s:

$S(t) = 1{,}2t^2 + t + 10$

$S(t) = 2.1{,}2.t^1 + 1.t^0$

$S(t) = 2.1{,}2.6^1 + 1.6^0$

$S(t) = 2{,}4.6 + 1.1$

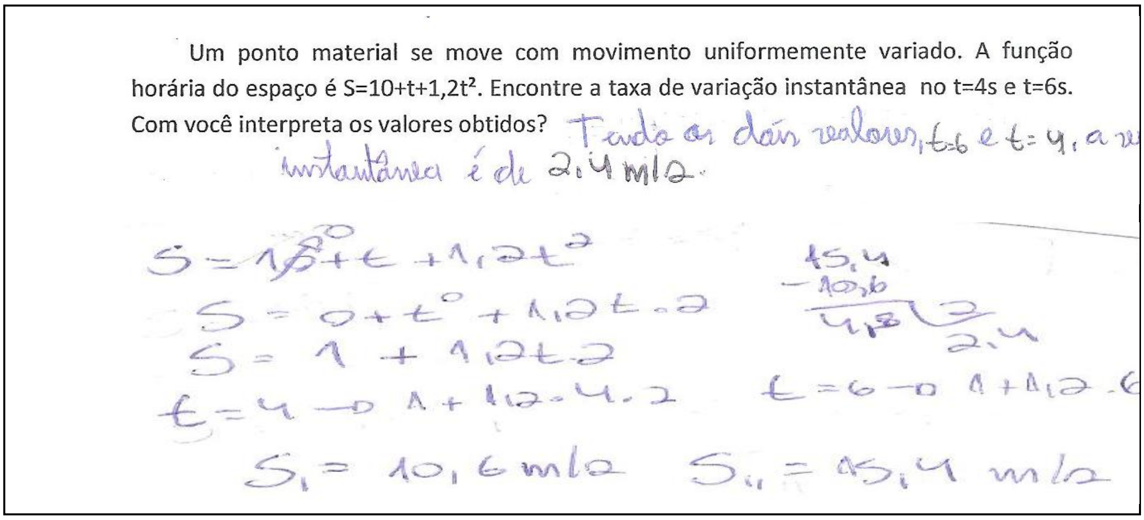
$S(t) = 14{,}4 + 1$

$S(t) = 15{,}4$//

Que no instante t=4s, a velocidade do móvel era de 10,6 m/s e no instante t=6s, a velocidade aumentou para 15,4 m/s, ou seja, há uma aceleração de 2,4 m/s² nesse período.

$a = \frac{V - V_0}{t - t_0}$ $a = \frac{15{,}4 - 10{,}6}{6 - 4}$ $a = \frac{4{,}8}{2}$ $a = 2{,}4 m/s^2$//

Figura 37: Atividade da aluna T.L.M.


Um ponto material se move com movimento uniformemente variado. A função horária do espaço é S=10+t+1,2t². Encontre a taxa de variação instantânea no t=4s e t=6s. Com você interpreta os valores obtidos? Tendo os dois valores, t=6 e t=4, a va instantânea é de 2,4 m/s².

$S = \cancel{10} + t + 1,2t^2$

$S = 0 + t^0 + 1,2t.2$

$S = 1 + 1,2t.2$

$t = 4 \rightarrow 1 + 1,2.4.2$ $\quad t = 6 \rightarrow 1 + 1,2.6$

$S_1 = 10,6\ m/s$ $\quad S_{11} = 15,4\ m/s$

$15,4 - 10,6 = 4,8$; $4,8 \div 2 = 2,4$

Figura 38: Atividade do aluno J.F.

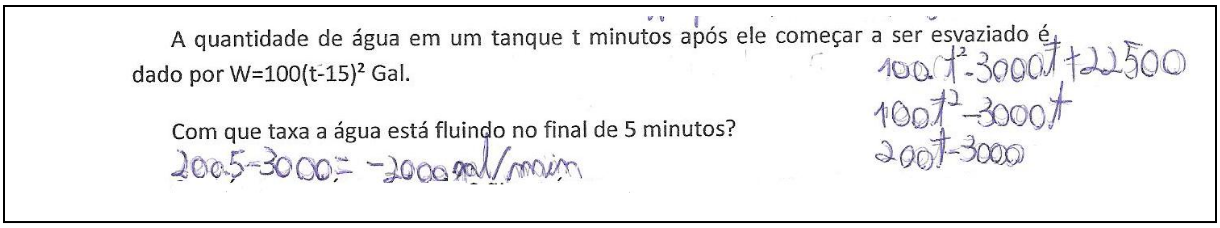
Os alunos nesse exercício demonstraram uma boa compreensão sobre a taxa de variação instantânea, pois ambos encontram a taxa de variação instantânea nos tempos requisitados e ambos informam que essa taxa de variação instantânea é a velocidade obtida para os tempos informados.

A aluna T.L.M. apresentou uma excelente interpretação do que vem a ser a taxa de variação instantânea nos instantes de tempo propostos, e é possível observar que ela interpreta corretamente a taxa de variação instantânea como sendo a velocidade nesse instante. Além disso, a aluna buscou ir além do que lhe era proposto, informando a aceleração do ponto material entre os instantes t=4s e t=6s. Entretanto, faltou à aluna uma melhor resposta sobre a derivada obtida, pois até o final da primeira parte do exercício ela escreveu *S(t)*, enquanto o correto seria S'(t)=V(t), como foi trabalhado nos exemplos de aula.

O aluno J.F. apesar de usar muito bem a ferramenta da derivada da potência para a resolução do exercício, e de informar corretamente a velocidade nesses tempos, como sendo a taxa de variação instantânea, fez uma interpretação equivocada ao final da atividade, pois ele afirma que a taxa de variação é a aceleração do ponto material.

Atividade 3

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 3, duas das quais citamos abaixo, temos:



A quantidade de água em um tanque t minutos após ele começar a ser esvaziado é dado por $W=100(t-15)^2$ Gal.

Com que taxa a água está fluindo no final de 5 minutos?

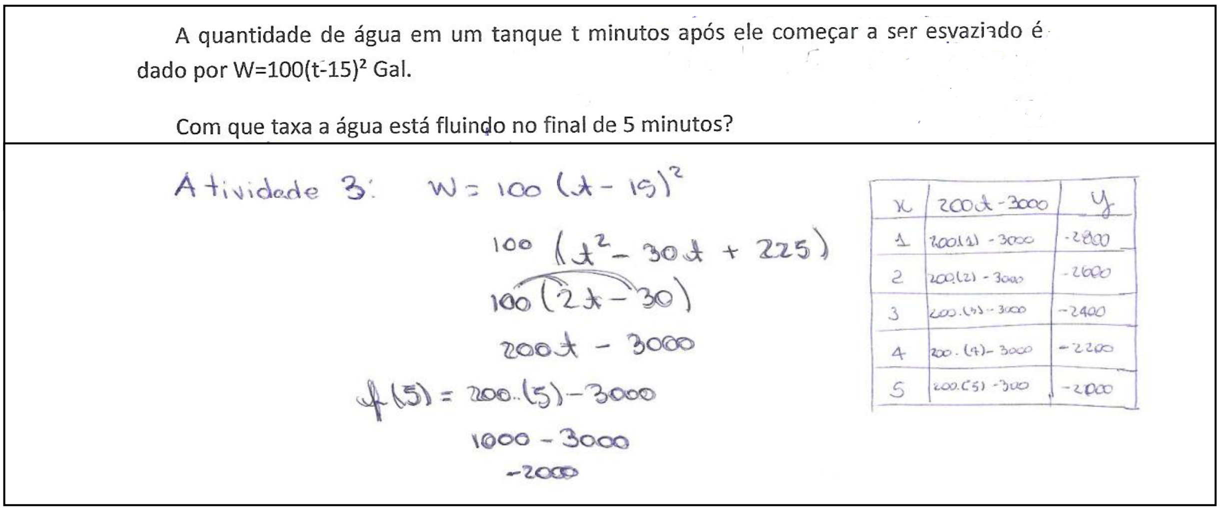
$200.5-3000 = -2000$ gal/min

$100t^2-3000t+22500$

$100t^2-3000t$

$200t-3000$

Figura 39: Atividade do aluno A.G.D.



A quantidade de água em um tanque t minutos após ele começar a ser esvaziado é dado por $W=100(t-15)^2$ Gal.

Com que taxa a água está fluindo no final de 5 minutos?

Atividade 3: $W = 100\,(t-15)^2$

$100\,(t^2 - 30t + 225)$

$100\,(2t - 30)$

$200t - 3000$

$f(5) = 200.(5) - 3000$

$1000 - 3000$

-2000

x	200t-3000	y
1	200(1) - 3000	-2800
2	200(2) - 3000	-2600
3	200.(3) - 3000	-2400
4	200.(4) - 3000	-2200
5	200.(5) - 3000	-2000

Figura 40: Atividade da aluna E.M.S

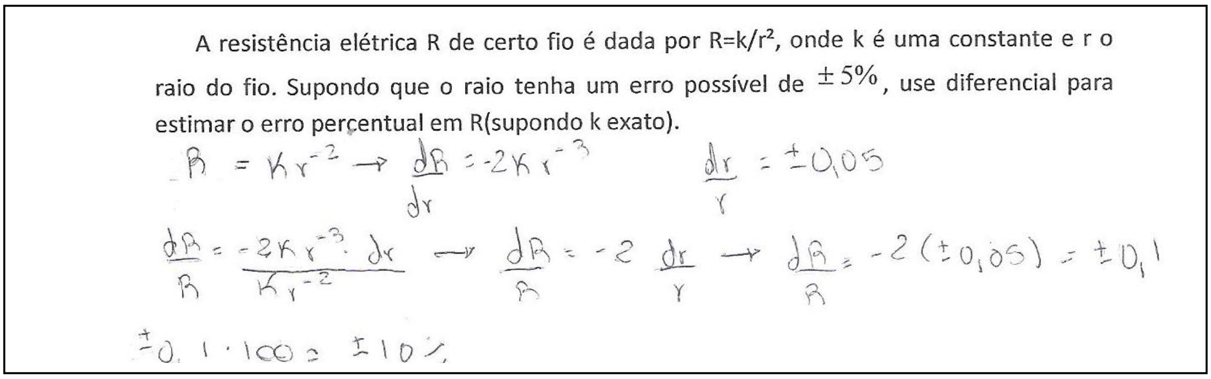
O aluno A.G.D. fez uso da derivada da potência para a resolução do exercício, e além disso ele encontrou a taxa de variação instantânea no tempo de 5 minutos, conforme solicitado no enunciado.

A.G.D tem a preocupação de enfatizar em sua resolução as unidades trabalhadas no exercício, porém não as interpreta ao final, avaliando o que está ocorrendo no tanque. A.G.D. também não apresenta a variável dependente ao longo da sua resolução, bem como não fez o uso formal da derivada no desenvolvimento do exercício.

A aluna E.M.S. começou a resolver o seu exercício fazendo o desenvolvimento do produto notável que ali se apresentava, e posteriormente utilizando a derivada da potência. Na sua resolução, a aluna trouxe uma tabela com pontos entre x=1 e x=5. Nesse caso, a aluna encontrou as taxas de variação instantânea em todos esses pontos. Apesar de não formalizar corretamente o uso simbólico da derivada, a aluna teve a preocupação de apresentar uma função f(x) para o instante 5 minutos.

Atividade 4

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 4, duas das quais citamos abaixo, temos:



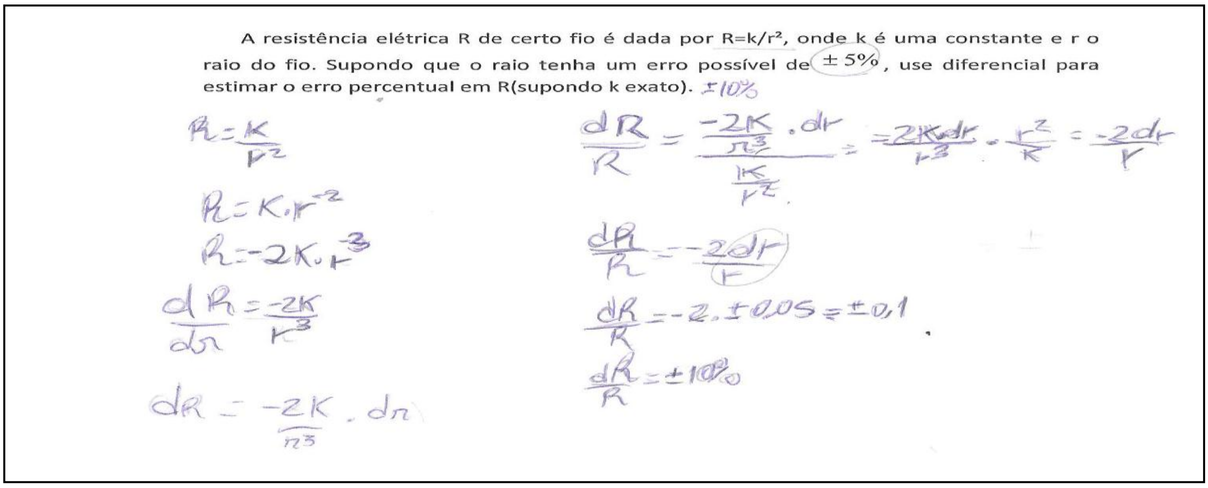
A resistência elétrica R de certo fio é dada por R=k/r², onde k é uma constante e r o raio do fio. Supondo que o raio tenha um erro possível de ±5%, use diferencial para estimar o erro percentual em R(supondo k exato).

$R = Kr^{-2} \to \frac{dR}{dr} = -2Kr^{-3}$ $\quad \frac{dr}{r} = \pm 0{,}05$

$\frac{dR}{R} = \frac{-2Kr^{-3}\cdot dr}{Kr^{-2}} \to \frac{dR}{R} = -2\frac{dr}{r} \to \frac{dR}{R} = -2(\pm 0{,}05) = \pm 0{,}1$

$\pm 0{,}1 \cdot 100 = \pm 10\%$

Figura 41: Atividade do aluno G.S.



A resistência elétrica R de certo fio é dada por R=k/r², onde k é uma constante e r o raio do fio. Supondo que o raio tenha um erro possível de ±5%, use diferencial para estimar o erro percentual em R(supondo k exato). ±10%

$R = \frac{K}{r^2}$

$R = K\cdot r^{-2}$

$R = -2K\cdot r^{-3}$

$\frac{dR}{dr} = \frac{-2K}{r^3}$

$dR = \frac{-2K}{r^3}\cdot dr$

$\frac{dR}{R} = \frac{\frac{-2K}{r^3}\cdot dr}{\frac{K}{r^2}} = \frac{2Kdr}{r^3}\cdot\frac{r^2}{K} = \frac{-2dr}{r}$

$\frac{dR}{R} = -\frac{2dr}{r}$

$\frac{dR}{R} = -2\cdot\pm 0{,}05 = \pm 0{,}1$

$\frac{dR}{R} = \pm 10\%$

Figura 42: Atividade do aluno R. A.

Tanto o aluno G.S. quanto o aluno R.A. desenvolveram corretamente esta atividade. Ambos procuraram utilizar a derivada da potência em suas resoluções, e ambos fizeram o desenvolvimento algébrico muito bom, com substituição de variáveis corretamente.

Ao final, os alunos trouxeram a mesma resposta, porém não evidenciaram qualquer interpretação a respeito da mesma, o que deixou a atividade um tanto vaga, tornando-a meramente matemática e não contextual ao curso.

2.5. TAXA DE VARIAÇÃO PERCENTUAL CONSTANTE (6 PERÍODOS DE AULA DE 50 MIN.)

As funções exponenciais que aqui foram estudadas são sobre a taxa de variação percentual constante. Para a compreensão dessa taxa foram apresentados problemas que envolvem tabelas, gráficos e fórmulas. Além disso, foram trabalhadas atividades que envolviam exercícios contextualizados direcionadas ao curso de Técnico em Eletrônica, tais como situações envolvendo capacitores em carga e descarga. A atividade teve a duração de seis períodos de 50 minutos.

Os problemas foram desenvolvidos de tal forma que os alunos pudessem aprender a identificar uma taxa percentual constante, assim como efetuar uma análise dimensional do problema e a partir de tal análise obter informações sobre a constante obtida e sua influência na variável dependente.

2.5.1 Aula Número 1

Atividade 1

Após graduar-se na faculdade, você irá, provavelmente, procurar um trabalho. Suponha que você receba uma oferta de trabalho com um salário Inicial de R$ 40.000 por ano Para reforçar a oferta, a empresa promete aumentos anuais de 6% durante pelos menos os primeiros cinco anos.

a) Monte uma tabela dos cinco primeiros anos $t_0 = 0$ até $t_4 = 4$. Análise as informações, verifique se é possível encontrar alguma taxa constante? Que taxa é essa?
b) Monte um gráfico a partir da tabela. Faça uma análise dimensional do problema.
c) Que informação podemos obter coma taxa percentual constante.

Esse problema trouxe a noção de taxa percentual constante, e mostrou a diferença entre esta e a taxa de variação constante. Além disso, ao montar o gráfico, o aluno percebeu que não teríamos uma reta, mas sim uma curva.

Atividade 2

A partir de 2000, a população do México cresceu a uma taxa percentual constante de 2 % ao ano. (Em 2000, a população do México era de 100 milhões)

a) Monte um tabela para os 5 primeiros anos de $t_0=0$ até $t_4=4$ e a partir dela determine a taxa percentual constante.
b) Encontre uma fórmula para essa questão e faça uma análise dimensional do problema.
c) Qual será a população do México em 2020?

Nessa tarefa trabalhou-se a questão da composição de uma fórmula geral para a família das funções exponenciais.

Atividade 3

Em 2005, o número de pessoas infectadas por um certo vírus era P_0. Em virtude de uma nova vacina, o número de pessoas infectadas decresceu 20 % a cada ano, desde 2005. Em outras palavras, a cada ano foram infectadas apenas 80% do número de pessoas no ano anterior. Determine a fórmula para P=f(n), o número de pessoas infectadas em “n” anos após 2005. Desenhe o gráfico de f(n). Faça uma análise dimensional do problema, interpretando as informações contidas nas taxas de variação

Nesse caso temos um problema sobre taxa de decrescimento percentual constante. Com isso, buscávamos evidenciar a influência da taxa percentual constante na variável dependente, quando ocorre uma função decrescente.

2.5.2 Aula Número 2

Atividade 4

O capacitor é o componente de um circuito elétrico que pode armazenar carga elétrica. A quantidade de carga armazenada decaí exponencialmente com o tempo. Se o circuito permitir Amplificadores estereofônicos constituem um exemplo familiar: Quando um amplificador é desligado, as luzes do painel enfraquecem lentamente porque leva algum tempo para os capacitores descarregarem. Se t é o número de segundos após o circuito ter sido desligado, suponha que a quantidade de carga armazenada (em microcoulombs) seja dada por:

$$Q=200(0,9)^t,\ t \geq 0,$$

a) Descreva em palavras como a carga armazenada varia com o tempo.
b) Que quantidade de carga permanece após 10 segundos? 20 segundos? 30 segundos? 1 minuto? 2 minutos? 3 minutos?
c) Desenhe o gráfico da carga durante o primeiro minuto. O que a assíntota

Exercício de aplicação envolvendo um problema com capacitores, diretamente ligado ao curso de técnico em eletrônica. Demonstração, verificação e compreensão da taxa percentual constante numa situação real.

Atividade 5

A Figura 1 apresenta a voltagem, V(t), de um elemento de um circuito elétrico, no instante de tempo t segundos. Para t<0, a voltagem é constante, de 80 volts; para $t \geq 0$, a voltagem decai exponencialmente.

a) Determine uma fórmula por partes para V(t).

b) Para que valor de t irá a voltagem alcançar o valor 0,1?

c) Qual a taxa percentual constante obtida? Faça uma análise das unidades envolvidas, bem como interprete as informações contidas na mesma.

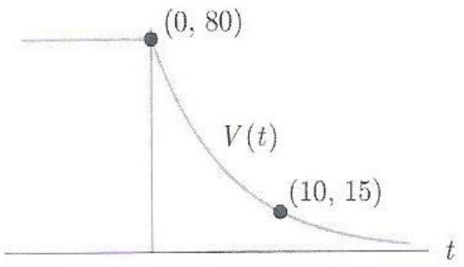


Figura 1

Contextualização de uma situação prática envolvendo taxa de variação percentual constante em funções Exponenciais, incluindo atividades que serão utilizadas no curso de técnico em Eletrônica.

Atividade 6

O isótopo gálio-67 radioativo decai para Gálio1,48% a cada hora;(não radioativo) considere que se tem, inicialmente, 100 miligramas da substância numa substância.

a) Determine uma fórmula para a quantidade de isótopo gálio-67 remanescente na amostra após t horas.

b) Quantos miligramas permanecem após 24 horas? E após 1 semana?

Nesse problema temos mais um exercício de contextualização, que envolve substâncias químicas. Além disso, o formato desse exercício se aplica a diversas situações como decaimento radioativo, de medicamentos, e outros.

2.5.3 Comentários sobre a Aula Número 1

Das atividades realizadas nos dias 22 de Outubro, 04 e 05 de novembro, com duração total de 6 períodos, cada um deles de 50 minutos, participaram 30 alunos. No dia 22 de Outubro foram realizadas as atividades de introdução do conteúdo, envolvendo taxa de variação percentual constante em funções Exponenciais.

O primeiro problema (ver exemplo 4 do Apêndice A) de introdução trabalhado pelo professor envolvia um exercício de aumento salarial. Com esse problema, procuramos apresentar aos alunos uma situação que envolvia a taxa de variação percentual constante em funções exponenciais. Foi construída uma tabela, bem como um gráfico, para representar a função exponencial obtida; também foi calculada a taxa de variação percentual no problema e construída uma fórmula representando o problema.

Alguns alunos trouxeram um questionamento acerca da atividade, como: “A taxa é constante para quaisquer intervalos”, “Por que aparece o número 1 antes da vírgula”, “o valor do aumento não é constante para intervalos diferentes”.

O segundo problema (ver exemplo 5 do Apêndice A) envolvia uma situação de decaimento radioativo de uma amostra. Nesse caso, procuramos mostrar aos alunos uma situação envolvendo a taxa de variação percentual constante em uma função exponencial decrescente. Novamente, construiu-se uma tabela, o gráfico e uma fórmula representando o problema.

Ao longo da construção da tabela encontrávamos a taxa de variação percentual constante que caracterizava o problema. Novamente apareceram boas contribuições dos alunos, como: “Quando o valor decimal é menor que 1 a função exponencial é decrescente”, outra contribuição: “Se tiramos de 100% a taxa envolvida no problema temos a taxa de variação percentual constante”.

O terceiro problema (ver exemplo 9 do Anexo A) envolvia um exercício sobre investimentos que rendiam juros anuais. Através dessa situação problema, o professor procurou apresentar aos alunos a situação de aplicação envolvendo taxa de variação percentual constante. A fim de verificar como estava ocorrendo o aprendizado, solicitamos aos alunos que eles fizessem o exercício. Quase todos os alunos acertaram a atividade e analisaram conjuntamente com o professor as duas perguntas que eram propostas no problema.

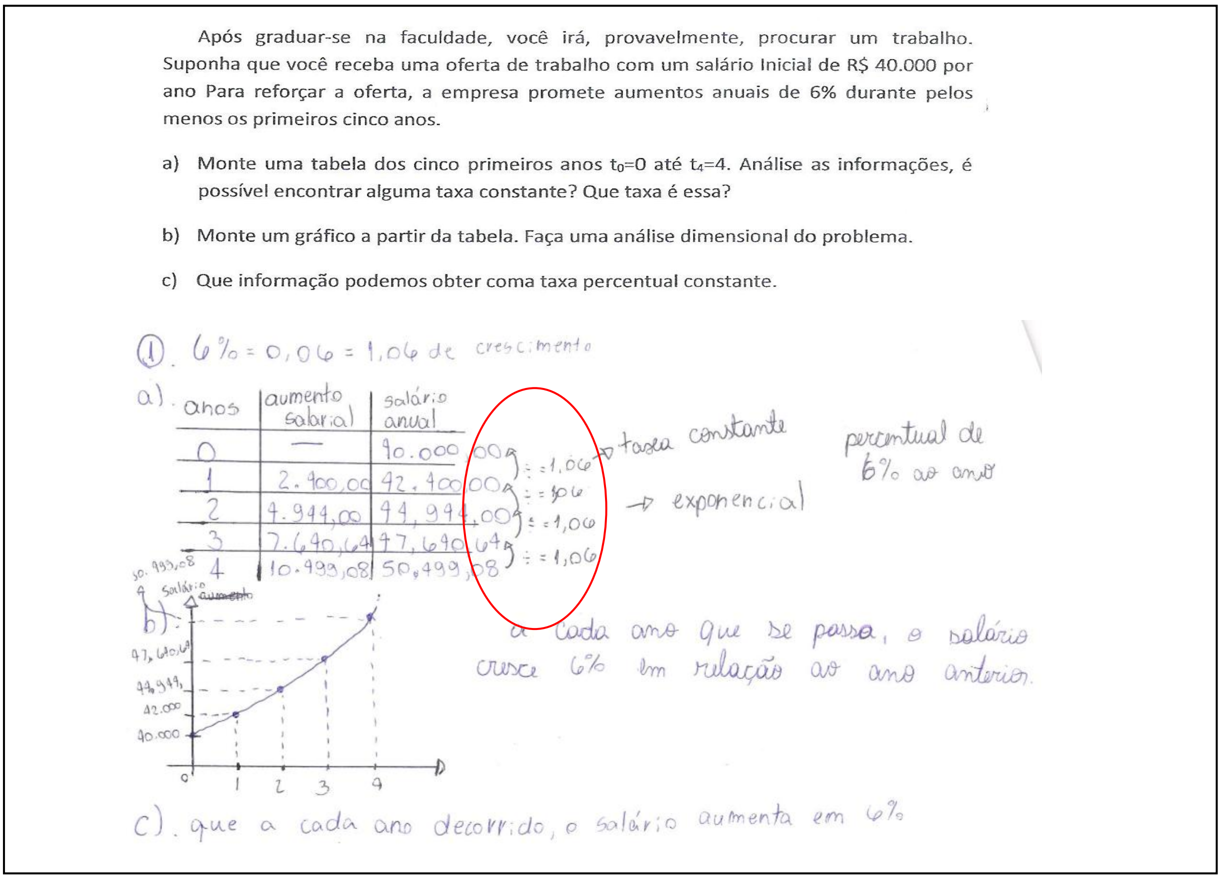
O quarto problema (ver exemplo 10 do Anexo A) envolvia uma atividade de decaimento. Esse exercício tinha como enunciado o consumo de uma xícara de café e de como ocorria a metabolização desse café no organismo. Novamente, solicitamos aos alunos que realizassem a atividade.

Todos os alunos presentes acertaram a atividade, tendo um dos alunos apresentado o seguinte questionamento (para o item *b* do exercício): “Professor essa curva exponencial decrescente tende a zero”. Assim, o professor fez a explicação acerca desse questionamento retomando os outros problemas que já haviam sido realizados para que os alunos pudessem compreender a explicação feita acerca do valor tender a zero.

Na aula seguinte, cada aluno recebeu individualmente uma lista com seis exercícios para trabalharem durante a aula.

Atividade 1

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 1, duas das quais citamos abaixo, temos:


Após graduar-se na faculdade, você irá, provavelmente, procurar um trabalho. Suponha que você receba uma oferta de trabalho com um salário Inicial de R$ 40.000 por ano Para reforçar a oferta, a empresa promete aumentos anuais de 6% durante pelos menos os primeiros cinco anos.

a) Monte uma tabela dos cinco primeiros anos $t_0=0$ até $t_4=4$. Análise as informações, é possível encontrar alguma taxa constante? Que taxa é essa?

b) Monte um gráfico a partir da tabela. Faça uma análise dimensional do problema.

c) Que informação podemos obter coma taxa percentual constante.

① $6\% = 0{,}06 = 1{,}06$ de crescimento

a)

anos	aumento salarial	salário anual
0	—	40.000,00
1	2.400,00	42.400,00
2	4.944,00	44.944,00
3	7.640,64	47.640,64
4	10.499,08	50.499,08

÷ = 1,06 → taxa constante

÷ = 1,06 → exponencial

÷ = 1,06

÷ = 1,06

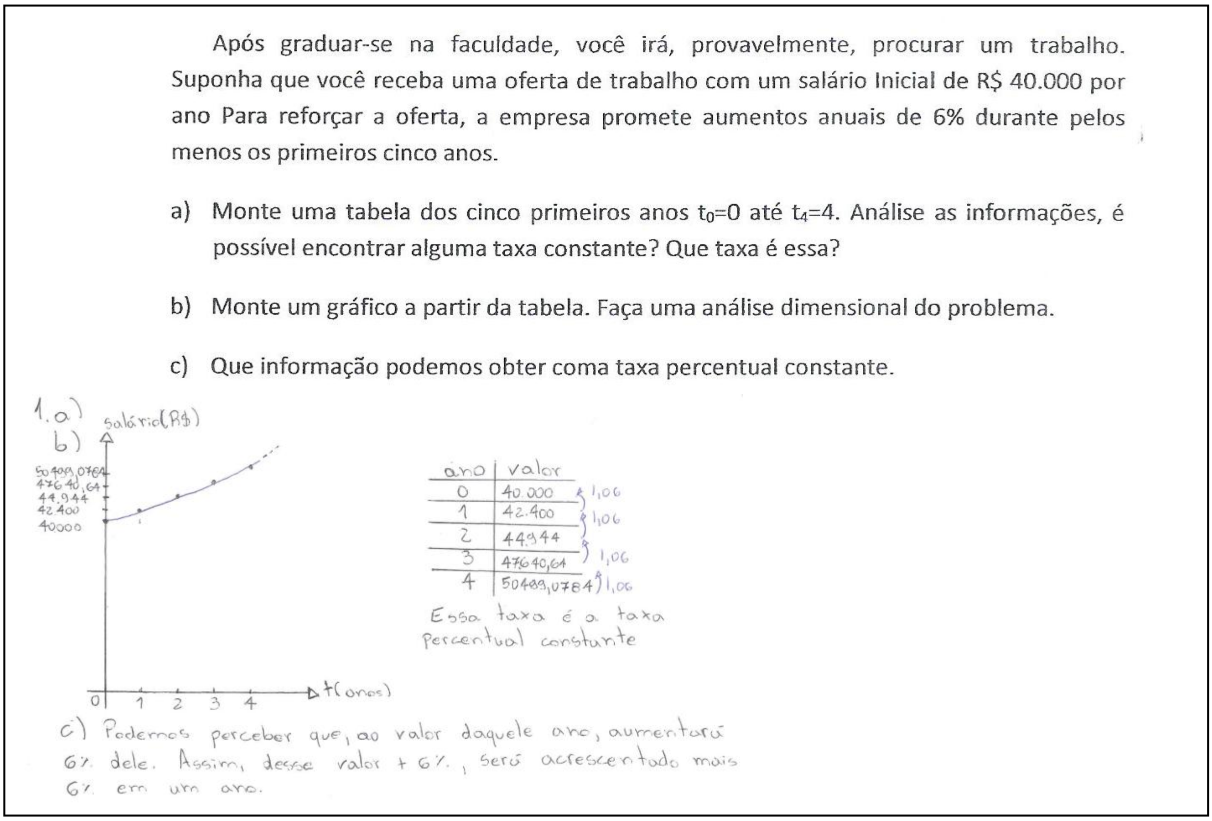
percentual de 6% ao ano

a cada ano que se passa, o salário cresce 6% em relação ao ano anterior.

b)

c). que a cada ano decorrido, o salário aumenta em 6%

Figura 43: Atividade da aluna T.L.M.



Após graduar-se na faculdade, você irá, provavelmente, procurar um trabalho. Suponha que você receba uma oferta de trabalho com um salário Inicial de R$ 40.000 por ano Para reforçar a oferta, a empresa promete aumentos anuais de 6% durante pelos menos os primeiros cinco anos.

a) Monte uma tabela dos cinco primeiros anos $t_0=0$ até $t_4=4$. Análise as informações, é possível encontrar alguma taxa constante? Que taxa é essa?

b) Monte um gráfico a partir da tabela. Faça uma análise dimensional do problema.

c) Que informação podemos obter coma taxa percentual constante.

1.a)
b)

ano	valor
0	40.000
1	42.400
2	44.944
3	47640,64
4	50489,0784

1,06
1,06
1,06
1,06

Essa taxa é a taxa percentual constante

c) Podemos perceber que, ao valor daquele ano, aumentará 6% dele. Assim, desse valor + 6%, será acrescentado mais 6% em um ano.

Figura 44: Atividade do aluno G.S.

No item “a” da atividade número 1, ambos os alunos apresentaram o preenchimento correto da tabela. A aluna T.L.M. apresentou também o valor do aumento salarial por ano, o que caracterizou um bom aprendizado do conteúdo. Além disso, vê-se que ambos calcularam corretamente o valor da taxa percentual constante, utilizando para isso os valores obtidos na tabela.

No item “b”, ambos os alunos construiram o gráfico de forma correta. Apesar de estarem fora de escala foi possível verificar a construção de um gráfico de função exponencial crescente.

No item “c”, o aluno G.S. e a aluna T.L.M. apresentaram respostas de formas diferentes, mas ambas corretas, pois em ambos os casos os alunos enfatizaram o aumento do salário em 6% em relação ao valor do ano anterior. Novamente, eles fizeram uso da taxa percentual constante para apresentar tal resposta.

Atividade 2

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 2, duas das quais citamos abaixo, temos:

A partir de 2000, a população do México cresceu a uma taxa percentual constante de 2 % ao ano. → 100 milhões

a) Monte um tabela para os 5 primeiros anos de $t_0=0$ até $t_4=4$ e a partis dela determine a taxa percentual constante. tabela →

A taxa percentual é de 2%

b) Encontre uma fórmula para essa questão e faça uma análise dimensional do problema.

100 000 000 . $(1{,}02)^t$ A cada ano, a pop do México aumenta em 2%.

c) Qual será a população do México em 2020?

148.594.739,6

2 A)

ano	população
0	100 milhões
1	102 milhões
2	104,04 milhões
3	106,1208 milhões
4	108,243216 milhões

Figura 45: Atividade do aluno A.M.C.

A partir de 2000, a população do México cresceu a uma taxa percentual constante de 2 % ao ano. A população do México é 100 milhões.

a) Monte um tabela para os 5 primeiros anos de $t_0=0$ até $t_4=4$ e a partis dela determine a taxa percentual constante. verso da 1ª folha

b) Encontre uma fórmula para essa questão e faça uma análise dimensional do problema. verso da 1ª folha

c) Qual será a população do México em 2020? verso da 1ª folha

2. a)

anos decorridos	aumento populacional	população
0	0	100 milhões
1	2 milhões	102 milhões
2	2,04 milhões	104,04 milhões
3	2,0808 milhões	106,12 milhões
4	2,1224 milhões	108,2424 milhões

1,02 1,02 1,02 1,02

A taxa percentual constante é de 1,02.

b) Fórmula: $p(t) = 100.000.000\,(1{,}02)^t$

A cada ano a população aumenta com uma taxa de 2% ao ano.

c) $p(t)$: 100 milhões $(1{,}02)^t$

$p(20)$ = 100 milhões $(1{,}02)^{20}$

$p(20)$ = 148,59 milhões.

Figura 46: Atividade da aluna G.P.B.

No item “a” da atividade 2, os alunos construiram corretamente a tabela; porém, a aluna G.P.B. apresentou na sua tabela o aumento populacional por ano, bem como evidenciou na sua tabela o valor obtido para a taxa percentual constante do problema. Assim, a aluna fez uso da taxa percentual constante ao apresentar a sua resposta.

No item “b” da atividade 2, ambos os alunos apresentaram a fórmula correta para o problema proposto; novamente, foi possível notar o uso da taxa percentual constante para responder ao item. Ao fazerem a análise dimensional do problema, ambos apresentaram argumentos muito parecidos para as unidades envolvidas e fizeram uso da taxa para esclarecer as suas respostas.

No item “c”, a aluna G.P.B. trouxe o desenvolvimento passo a passo da sua atividade, e fez uso da fórmula obtida no item “b,” apresentando uma boa compreensão da substituição dos termos do problema e das unidades envolvidas no mesmo. Por outro lado, o aluno A.M.C. apenas apresentou a resposta final, sem enfatizar as etapas envolvidas, apresentando apenas um número sem unidade.

Atividade 3

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 3, duas das quais citamos abaixo, temos:

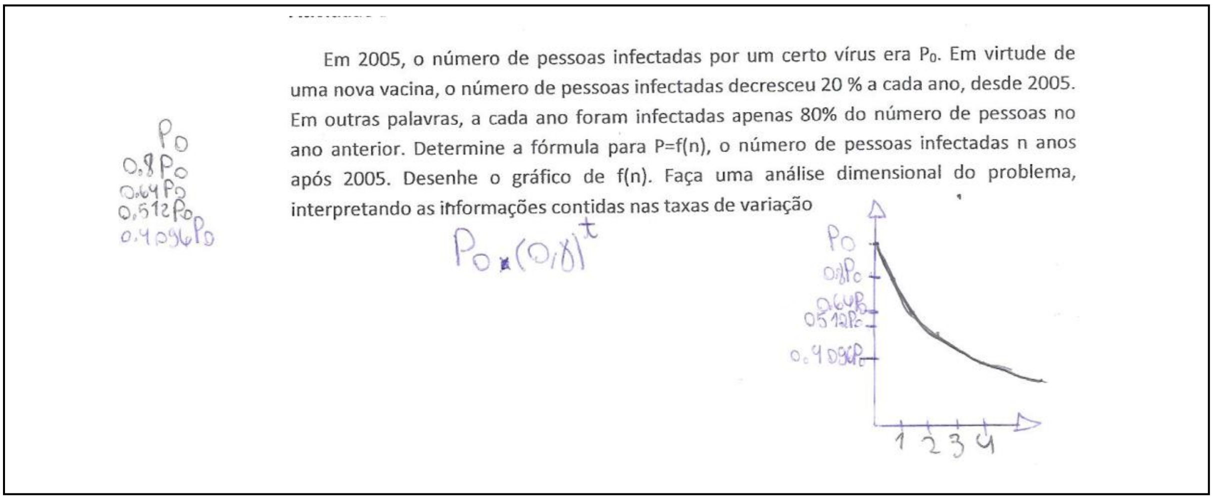


Figura 47: Atividade do aluno A.E.B.

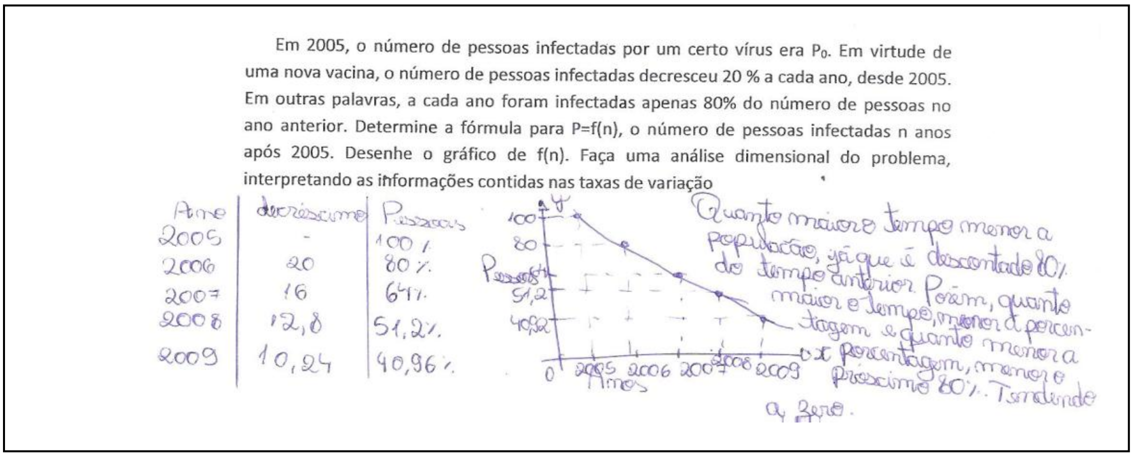


Figura 48: Atividade da aluna V.I.

A aluna V.L. não apresentou uma fórmula para a atividade, porém ela buscou construir uma tabela para solucionar o problema. Foi possível verificar na sua escrita a apresentação de uma População inicial de 100% e que com o decorrer dos anos essa população apresentava uma redução de 20% de pessoas infectadas por ano.

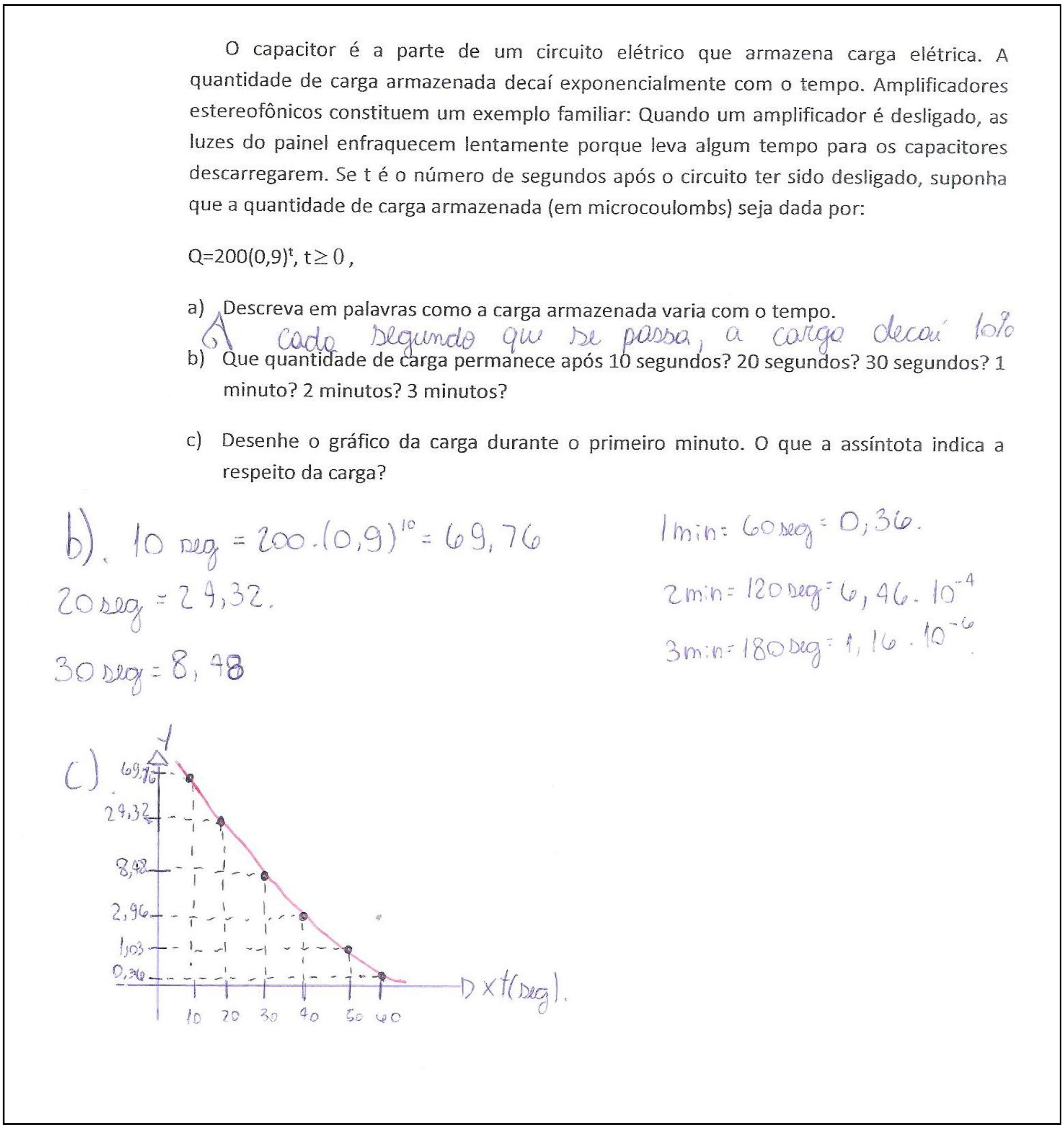
V.L. apresentou um gráfico bem próximo do formato do gráfico de uma função exponencial decrescente, conforme seria o gráfico para esse problema. Porém, ao interpretar o comportamento das variáveis do problema, a aluna confundiu a taxa de decaimento fornecida no problema, que era de 20%, com o fator de crescimento que nesse problema era de 0,8. Como o fator de crescimento é menor que 1, indicava que a população infectada estava decrescendo. Assim, V.L. afirmou que 80% das pessoas não estavam infectadas; mas o que na verdade se tinha era que 20% da população não estava mais infectada, em relação ao ano anterior.

O aluno A.E.B. apresentou na sua resolução a fórmula, bem como utilizou essa fórmula para construir o seu gráfico; assim era possível verificar através da sua escrita o comportamento da população de infectados nos anos 0, 1, 2, 3, 4, onde o tempo t = 0 corresponderia ao ano de 2005. Entretanto, apesar de ter uma demonstração correta da atividade, o aluno não fez nenhuma interpretação sobre as variáveis envolvidas no problema, o que poderia ter sido feito utilizando o seu gráfico.

2.5.4 Comentários sobre a Aula Número 2

Atividade 4

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 4, duas das quais citamos abaixo, temos:



O capacitor é a parte de um circuito elétrico que armazena carga elétrica. A quantidade de carga armazenada decaí exponencialmente com o tempo. Amplificadores estereofônicos constituem um exemplo familiar: Quando um amplificador é desligado, as luzes do painel enfraquecem lentamente porque leva algum tempo para os capacitores descarregarem. Se t é o número de segundos após o circuito ter sido desligado, suponha que a quantidade de carga armazenada (em microcoulombs) seja dada por:

$Q=200(0,9)^t$, $t \geq 0$,

a) Descreva em palavras como a carga armazenada varia com o tempo.

A cada segundo que se passa, a carga decai 10%

b) Que quantidade de carga permanece após 10 segundos? 20 segundos? 30 segundos? 1 minuto? 2 minutos? 3 minutos?

c) Desenhe o gráfico da carga durante o primeiro minuto. O que a assíntota indica a respeito da carga?

b). 10 seg $= 200.(0,9)^{10} = 69,76$

20 seg $= 24,32$.

30 seg $= 8,48$

1 min: 60 seg $= 0,36$.

2 min: 120 seg $= 6,46 . 10^{-4}$

3 min: 180 seg $= 1,16 . 10^{-6}$.

c)

Figura 49: Atividade da aluna T.L.M.

O capacitor é a parte de um circuito elétrico que armazena carga elétrica. A quantidade de carga armazenada decaí exponencialmente com o tempo. Amplificadores estereofônicos constituem um exemplo familiar: Quando um amplificador é desligado, as luzes do painel enfraquecem lentamente porque leva algum tempo para os capacitores descarregarem. Se t é o número de segundos após o circuito ter sido desligado, suponha que a quantidade de carga armazenada (em microcoulombs) seja dada por:

$Q=200(0,9)^t,\ t \geq 0$,

a) Descreva em palavras como a carga armazenada varia com o tempo.

A cada segundo as luzes enfraquecem 90%.

b) Que quantidade de carga permanece após 10 segundos? 20 segundos? 30 segundos? 1 minuto? 2 minutos? 3 minutos?

c) Desenhe o gráfico da carga durante o primeiro minuto. O que a assíntota indica a respeito da carga?

4.b) $Q=200(0,9)^t$

$Q(10)=200(0,9)^{10} \rightarrow Q(10)=69,73$

$Q(20)=200(0,9)^{20} \rightarrow Q(20)=24,31$

$Q(30)=200(0,9)^{30} \rightarrow Q(20)=8,47$

$Q(60)=200(0,9)^{60} \rightarrow Q(60)=0,36$

$Q(120)=200(0,9)^{120} \rightarrow Q(120)=0,00064$

$Q(180)=200(0,9)^{180} \rightarrow Q(180)=0,00000116$

c)

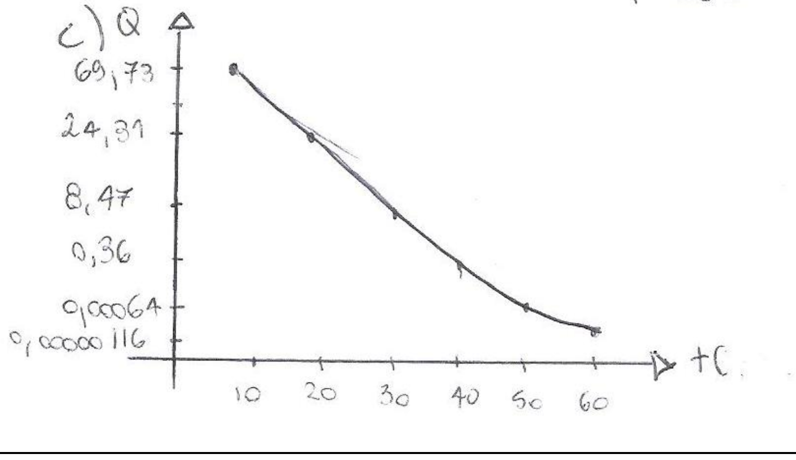


Figura 50: Atividade do aluno G.S.

No item “a” da atividade 4, a aluna T.L.M. fez corretamente a análise da atividade, uma vez que ela interpretou o exercício a partir da fórmula fornecida no problema. Assim, ao verificar o valor do fator de crescimento de 0,9 a aluna concluíu que a carga decresce 10% a cada segundo.

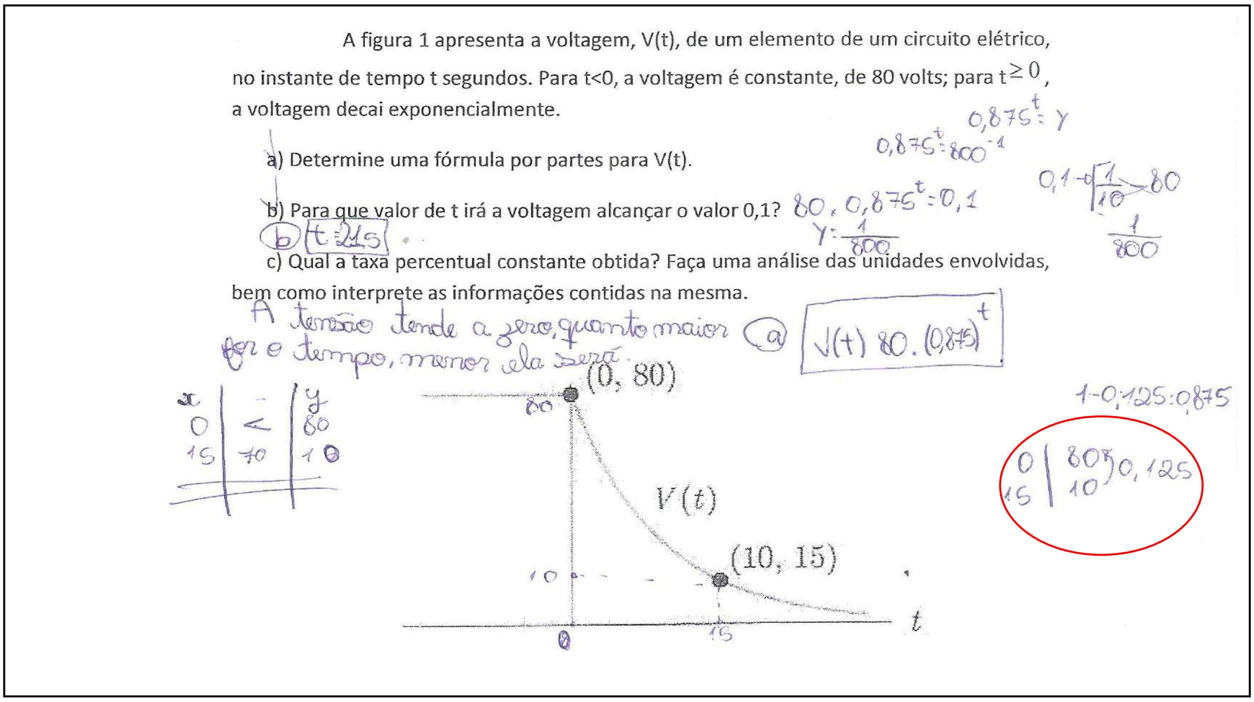
O aluno G.S. fez uma interpretação incorreta, pois analisou a taxa percentual constante como se ela indicasse o valor ao qual a carga decaía, ou seja, afirmou que a carga decaía 90% em um segundo.

No item “b”, ambos os alunos chegaram à resposta corretamente. Entretanto, o aluno G.S. fez todo o desenvolvimento passo a passo apresentando boa compreensão sobre o conteúdo; além disso, percebe-se na sua escrita um bom domínio das variáveis envolvidas no problema. A aluna T.L.M. também fez uso da fórmula para a resolução da atividade, porém construiu suas respostas, de forma incompleta.

No item “c”, ambos os alunos fizeram a construção correta do gráfico. Foi possível analisar pela escrita de ambos que o formato do gráfico é o de uma função decrescente. Isso vai ao encontro da taxa percentual constante obtida para o exercício, pois como seu valor é inferior a 1 temos então uma função decrescente.

Atividade 5

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 5, duas das quais citamos abaixo, temos:


A figura 1 apresenta a voltagem, V(t), de um elemento de um circuito elétrico, no instante de tempo t segundos. Para t<0, a voltagem é constante, de 80 volts; para $t \geq 0$, a voltagem decai exponencialmente.

a) Determine uma fórmula por partes para V(t).

b) Para que valor de t irá a voltagem alcançar o valor 0,1?

c) Qual a taxa percentual constante obtida? Faça uma análise das unidades envolvidas, bem como interprete as informações contidas na mesma.

Figura 51: Atividade da aluna V.L.

A figura 1 apresenta a voltagem, V(t), de um elemento de um circuito elétrico, no instante de tempo t segundos. Para t<0, a voltagem é constante, de 80 volts; para $t \geq 0$, a voltagem decai exponencialmente.

a) Determine uma fórmula por partes para V(t).

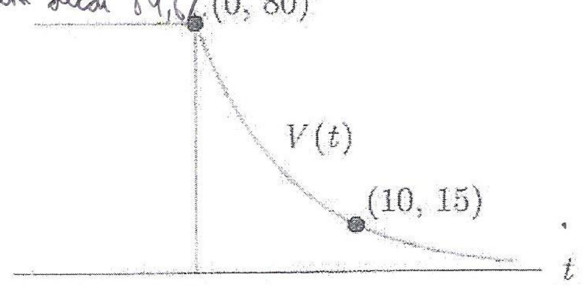
$V = 80 \cdot 0{,}846^t$

b) Para que valor de t irá a voltagem alcançar o valor 0,1?

$0{,}1 = 80 \cdot 0{,}846^t \,/\, \frac{0{,}1}{80} = 0{,}846^t \,/\, 0{,}846^t = 0{,}00125 \,/\, 0{,}846^t = 0{,}846^{40} \,/\, t = 40$

c) Qual a taxa percentual constante obtida? Faça uma análise das unidades envolvidas, bem como interprete as informações contidas na mesma.

a taxa percentual é de aproximadamente 84,6% V por t. A cada t que passa a voltagem decai 84,6%



$15 = 80 \cdot x^{10} \,/\, \frac{15}{80} = x^{10} \,/\, x^{10} = 0{,}1875 \,/\, x = 0{,}846$

Figura 52: Atividade do aluno A.M.C.

No item “a”, a aluna V.L. fez a construção da fórmula a partir de uma tabela; porém, ao construir a sua tabela, ela trocou o par ordenado (10,15) pelo par ordenado (15,10). Assim, ao construir a sua tabela, ela determinou a taxa percentual constante de forma incorreta, uma vez que os valores usados estavam incorretos.

O aluno A.M.C. usou a expressão que representa o problema $(V(t)=V_0.(x)^t)$ para encontrar o valor da taxa percentual constante. Ao contrário da aluna V.L., o aluno A.M.C. fez o uso correto do par ordenado, ao determinar a taxa percentual constante do problema.

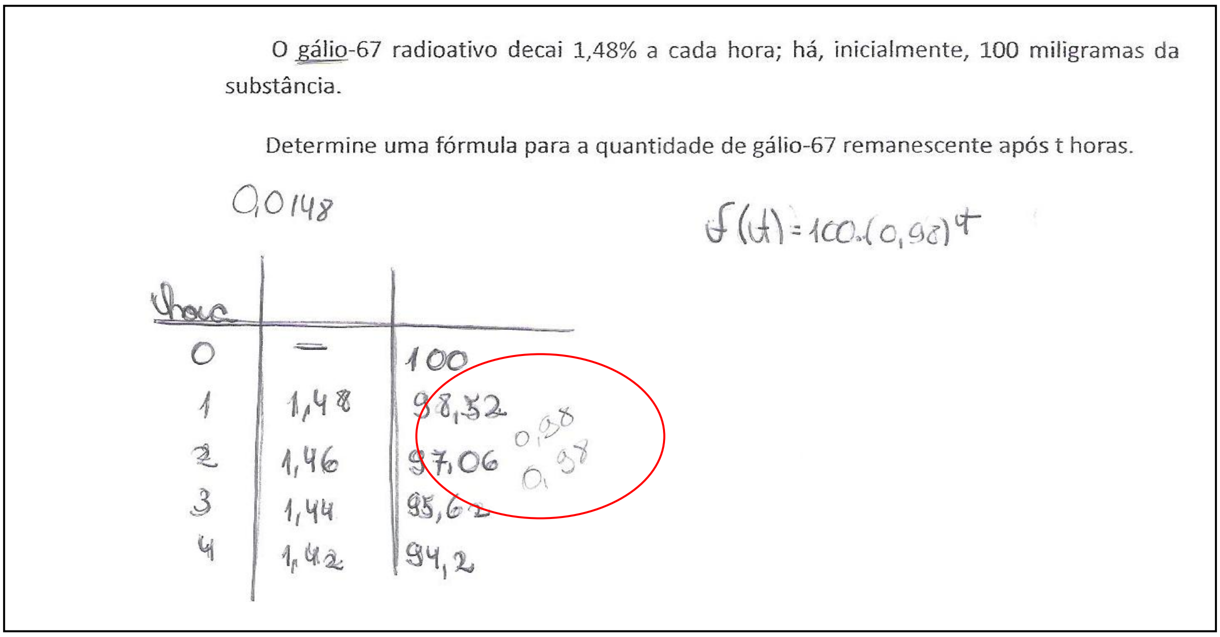
No item “b”, mesmo tendo encontrado, e usado a fórmula incorreta, a aluna V.L. apresentou um desenvolvimento de substituição das variáveis envolvidas no problema. Já o aluno A.M.C procurou usar também a substituição das variáveis envolvidas no problema e, para a resolução do mesmo, ele utilizou conceitos de equações exponenciais apresentando a resposta correta para este item.

No item “c”, apesar de informar corretamente a taxa percentual constante, o aluno A.M.C. afirmou que a tensão decaía a uma taxa de 84,6%, quando na verdade a taxa de decaimento era de 15,4%, ou seja, o aluno confundiu fator de decaimento com taxa percentual constante. Quanto à análise das unidades, o aluno fez uma boa interpretação das unidades envolvidas, inclusive afirmando que a tensão ia diminuindo com o passar do tempo.

A aluna V.L. fez uma boa avaliação das unidades, ao informar que com o passar do tempo a tensão tenderia a zero, porém a aluna não fez qualquer referência à taxa percentual constante nem sobre a informação que poderíamos retirar dela.

Atividade 6

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 6, duas das quais citamos abaixo, temos:



O gálio-67 radioativo decai 1,48% a cada hora; há, inicialmente, 100 miligramas da substância.

Determine uma fórmula para a quantidade de gálio-67 remanescente após t horas.

0,0148

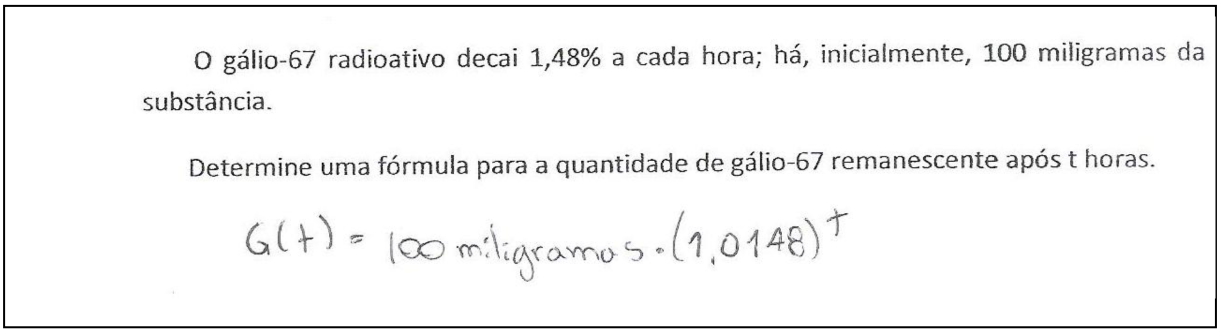
$f(t) = 100.(0,98)^t$

hora		
0	—	100
1	1,48	98,52
2	1,46	97,06
3	1,44	95,62
4	1,42	94,2

0,98

0,98

Figura 53: Atividade da aluna S.



O gálio-67 radioativo decai 1,48% a cada hora; há, inicialmente, 100 miligramas da substância.

Determine uma fórmula para a quantidade de gálio-67 remanescente após t horas.

$G(t) = 100 \text{ miligramas} \cdot (1,0148)^t$

Figura 54: Atividade do aluno G.S.

O aluno G.S. fez uma interpretação incorreta, ao usar a taxa de decaimento de 1,48% como se ela fosse a taxa percentual constante, além disso, por ser uma taxa de decaimento, deveria ter uma taxa percentual com um valor menor que 1 e não superior a 1 como fez o aluno.

A aluna S. fez uso de uma tabela, para determinar a taxa percentual constante; foi possível observar na sua tabela a redução dos valores em 1,48% conforme o enunciado. Além disso, a aluna obteve essa taxa em dois intervalos constantes, obtendo assim a fórmula correta para o problema.

2.6 COMPARANDO FUNÇÕES LINEARES E FUNÇÕES EXPONENCIAIS (4 PERÍODOS DE AULA DE 50 MIN.)

Neste tópico trabalhamos com os alunos a questão da comparação entre taxa de variação percentual constante e taxa de variação constante, bem como entre as fórmulas para as funções correspondentes.

2.6.1 Aula Número 1

Atividade 1

A ***tabela 3*** fornece valores de uma função linear e de uma função exponencial.

X	29	25	30	35	40	45
f(x)	30	45	60	75	90	105
g(x)	1.000	1.200	1.440	1.728	2.073,6	2.488,32

a) Determine as taxas de variação e percentual.
b) Determine uma fórmula pra f(x) e g(x). Construa um gráfico com ambas as funções
c) Faça um estudo comparativo entre ambas.

Com este problema, trouxemos uma situação na qual o aluno podia verificava o comportamento de ambas as taxas e estabelecia uma conclusão acerca das mesmas.

Atividade 2

> No instante t=0 ano, um espécie de tartaruga é solta em um banhado. Quando t=4 anos, um biólogo estima que haja 300 tartarugas no banhado. Três anos mais tarde, o biólogo estima que haja 450 tartarugas. Seja P o tamanho da população de tartarugas no ano t.
>
> a) Determine uma fórmula para P=f(t), supondo crescimento linear. Interprete a inclinação e a intersecção com o eixo do P de sua fórmula em termos da população de tartarugas.
>
> b) Determine uma fórmula para P=g(t), supondo um crescimento exponencial. Interprete os parâmetros de sua fórmula em termos da população de tartarugas.
>
> c) No ano t=12, o biólogo estima que haja 900 tartarugas no banhado. O

O problema estabeleceu um quadro comparativo entre taxas de variação e percentual, assim como buscou apresentar aos alunos o comportamento de ambas. Além disso, mostrou que o modelo exponencial sempre supera o modelo linear a partir de um determinado instante.

2.6.2 Aula Número 2

Atividade 3

> A população de um país é inicialmente de 2 milhões de habitantes e está crescendo a uma taxa de 4% ao ano. O suprimento anual de alimentos deste país, inicialmente adequado para 4 milhões de habitantes, está crescendo a uma taxa constante adequada para um adicional de 0,5 milhão de habitantes ao ano?
>
> a) Baseado nestas suposições, em que ano, aproximadamente, irá este país experimentar o primeiro desabastecimento .
>
> b) Se o país duplicar a sua oferta inicial de alimentos, irá ainda ocorrer este desabastecimento? Em caso afirmativo, quando?
>
> c) Se o país duplicar a taxa na qual o suprimento de alimento cresce, além de duplicar sua oferta inicial de alimentos, ainda irá ocorrer desabastecimento? Em caso afirmativo, quando?

Novamente, nesse problema procurávamos enfatizar que o modelo exponencial superará o modelo linear em algum instante. Além disso, o aluno o modelo Malthusiano, como atividade de aplicação no contexto histórico.

Atividade 4.

A tabela abaixo apresenta os resultados obtidos com medidas de intensidade de corrente elétrica e d.d.p. em dois condutores diferentes.

Condutor 1

i (A)	U (V)
0	0
0,5	2,18
1,0	4,36
2,0	8,72
4,0	17,44

Condutor 2

i (A)	U (V)
0	0
0,5	3,70
1,0	6,18
2,0	9,16
4,0	11,44

Com base na tabela, verifique se os condutores são ou não ôhmicos.

2.6.3 Comentários sobre a Aula Número 1

Da atividade realizada nos dias 11 e 12 de novembro com duração de 4 períodos, participaram 31 alunos. No dia 11 de Novembro foram realizadas as atividades de introdução do conteúdo envolvendo problemas que comparassem a taxa de variação constante em funções Afim e a taxa de variação percentual constante em funções Exponenciais.

No primeiro problema (ver exemplo 11 do Anexo A) que trabalhamos em aula, apresentamos duas tabelas de cada uma das funções (Afim, Exponencial) com duas colunas uma para a variável independente “x” e outra para a variável dependente “y”.

Nesse caso, nosso objetivo era verificar quais funções eram fornecidas pelas tabelas e qual taxa de variação constante obteríamos em ambas as tabelas. Desta forma, o problema buscava apresentar aos alunos situações nas quais eles pudessem visualizar a importância de conhecer tais taxas e de como elas são importantes para a identificação da função envolvida, nesse caso, Afim ou Exponencial.

Alguns alunos trouxeram bons comentários para a atividade, tais como: “ As duas tabelas não podem representar funções Afim, pois a segunda tabela não mantém o valor constante para intervalos diferentes”; outra contribuição: “É possível obter fórmula para ambas as tabelas, por que podemos obter as taxas de variação em ambas”.

O segundo problema (ver exemplo 12 do Anexo A) que apresentamos em aula, como atividade de introdução, envolvia a aplicação da fórmula de Montante a Juros simples e a fórmula de Montante a juros compostos. Nesse problema, procuramos explorar as duas taxas de variação: tanto a constante, quanto a percentual constante. O problema aplicava o mesmo capital inicial a juros simples e a juros compostos. Assim, ao montar a tabela, foi possível verificar qual dos juros tinha taxa de variação constante, ou taxa de variação percentual constante; desta forma, o aluno podia verificar qual dos juros estava relacionado a uma Função Afim e qual se referia a uma função Exponencial.

Novamente, apareceram boas contribuições dos alunos para a atividade, tais como: “A aplicação a Juros compostos vai sempre superar a de juros simples”; outro questionamento de um aluno: “É possível encontrar o valor de encontro entre as aplicações a juros simples e a juros compostos”.

O terceiro problema (ver exemplo 13 do Anexo A) envolvia uma situação de depreciação de um carro; este exercício procurava apresentar tanto uma depreciação exponencial, quanto uma depreciação linear.

A finalização da atividade se dava com uma comparação, e a partir daí a conclusão a respeito da depreciação do carro ao final de 4 anos: por uma taxa de variação percentual constante representando uma função exponencial, ou por uma taxa de variação constante representado uma função Linear?

O último problema (ver exemplo 14 do Anexo A) introdutório do conteúdo referia-se a um condutor ôhmico e não ôhmico. Assim, procuramos explorar uma situação contextual envolvendo o curso de técnico em eletrônica. Desta forma, foi possível apresentar um conhecimento prático da utilização da taxa de variação constante, aplicada a um exercício prático envolvendo condutores.

A atividade foi bem recebida pelos alunos, uma vez que estava diretamente ligada ao seu curso. Foi possível verificar que o problema foi solucionado facilmente pelos alunos, pois os mesmos já dominavam o conteúdo. Além disso, um aluno trouxe uma excelente contribuição que foi: “Se a taxa de variação é constante então temos um condutor ôhmico, porém se o condutor não é ôhmico a sua taxa não precisa ser necessariamente percentual constante".

Na aula seguinte cada aluno recebeu individualmente uma lista com quatro exercícios para trabalharem durante a aula.

Atividade 1

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 1, duas das quais citamos abaixo, temos:

A tabela 3 fornece valores de uma função linear e de uma função exponencial.

X	20	25	30	35	40	45
f(x)	30	45	60	75	90	105
		15	15	15	15	15
g(x)	1.000	1.200	1.440	1.728	2.073,6	2.488,32
		1,2	1,2	1,2	1,2	1,2

a) Determine as taxas de variação e percentual.

b) Determine uma fórmula pra f(x) e g(x). Construa um gráfico com ambas as funções

c) Faça um estudo comparativo entre ambas.

f(x) é uma função linear e g(x) é uma função exponencial

1) a) $f(x) = at + b$

$f(x) = \cancel{10t}\ 15t + 30$

$g(x) = 1000 \cdot (1,2)^t$

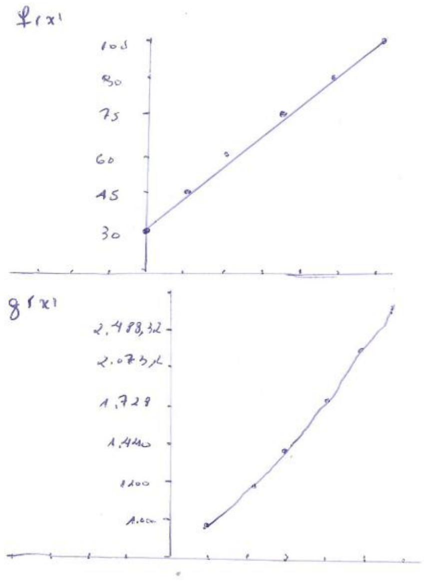
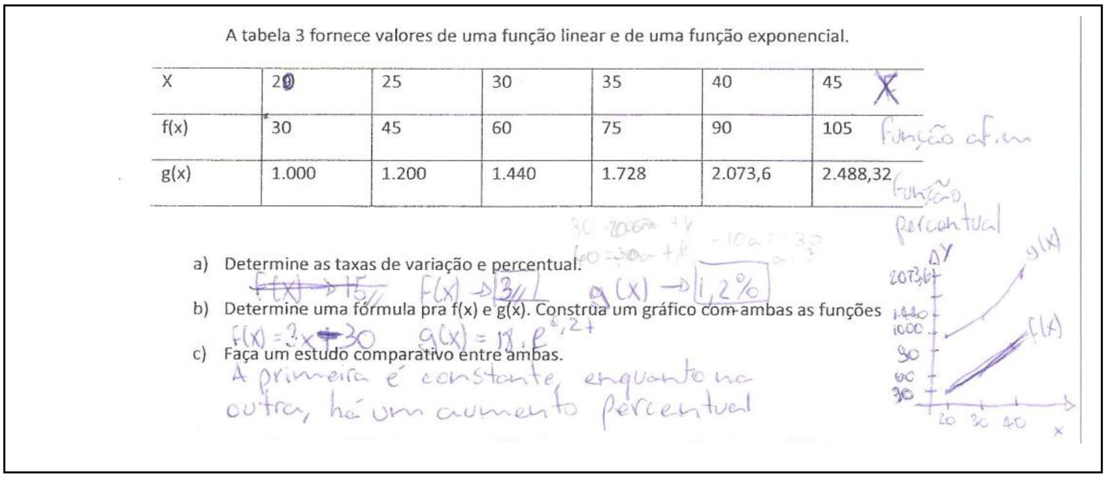


Figura 55: Atividade do aluno F.B.


A tabela 3 fornece valores de uma função linear e de uma função exponencial.

X	20	25	30	35	40	45
f(x)	30	45	60	75	90	105
g(x)	1.000	1.200	1.440	1.728	2.073,6	2.488,32

Função afim

Função percentual

a) Determine as taxas de variação e percentual.

~~f(x) → 15~~ f(x) → 3 g(x) → 1,2%

b) Determine uma fórmula pra f(x) e g(x). Construa um gráfico com ambas as funções

f(x) = 3x + 30 g(x) = 18 . e

c) Faça um estudo comparativo entre ambas.

A primeira é constante, enquanto na outra, há um aumento percentual

Figura 56: Atividade do aluno L.F.

Na atividade número 1.a, o aluno F.B. apresentou o cálculo da taxa percentual constante corretamente na função g(x); porém a taxa de variação constante f(x) foi calculada incorretamente, pois o aluno não fez uso da razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ utilizando apenas a variação Δy. Já o aluno L.F. encontrou corretamente o valor da taxa de variação constante em f(x) e também encontrou a taxa percentual constante em g(x).

Na atividade número 1.b, ambos os alunos trouxeram um formato de gráfico muito parecido com o que representa as funções f(x) (função Afim) e g(x) (função Exponencial). Entretanto, o aluno F.B. apresentou um equívoco na construção do gráfico de f(x), uma vez que inseriu no seu gráfico o par ordenado (0,30), quando o correto deveria ser (20,30).

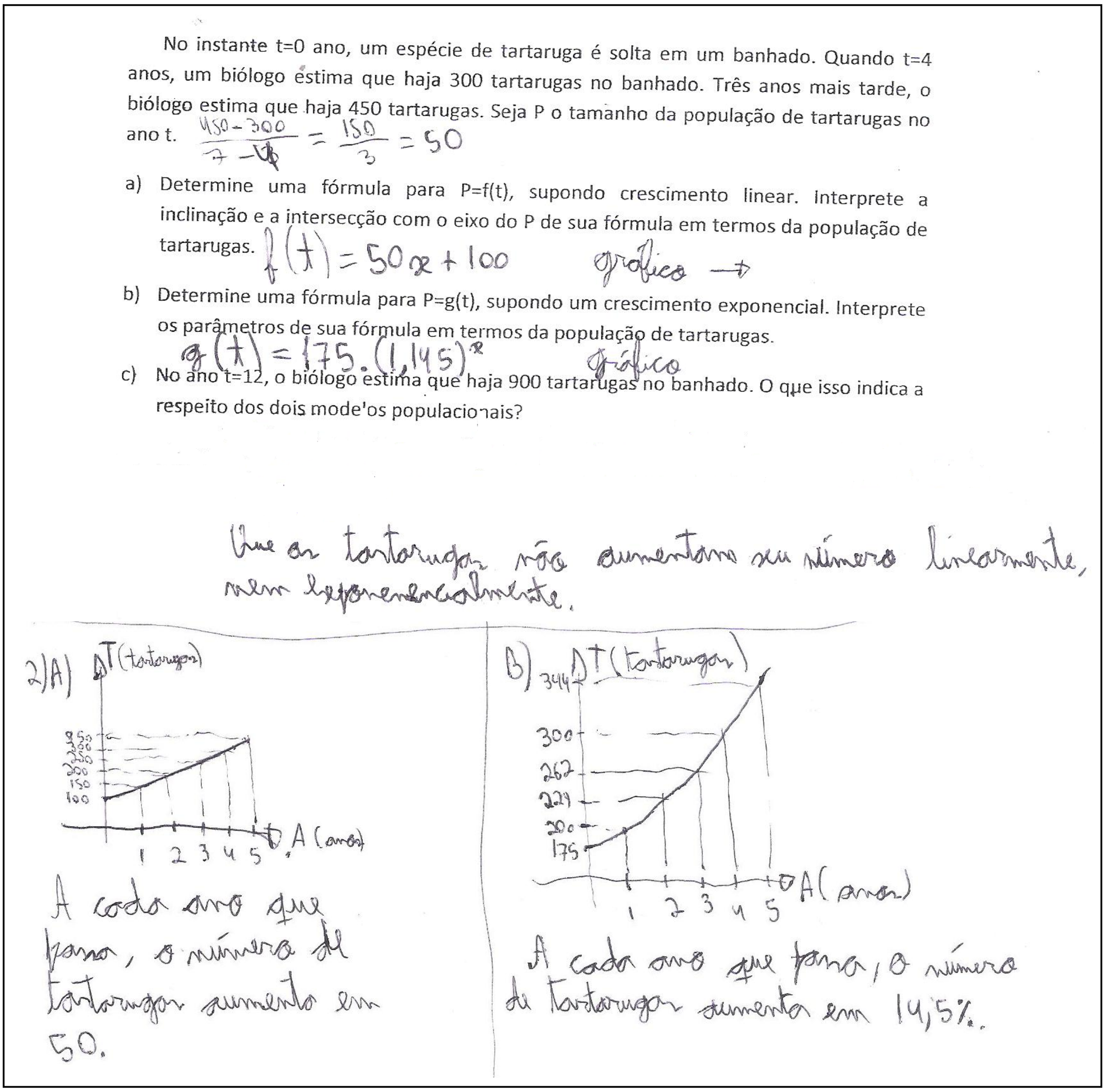
Na parte da apresentação das fórmulas, ambos os alunos encontraram fórmulas incorretas para as funções f(x) e g(x). O aluno F.B., apesar de encontrar a taxa de variação percentual constante correta, fez uso do valor inicial incorreto para construir a fórmula. O aluno L.F. confundiu taxa de variação percentual constante com taxa de variação constante que, que ele usou incorretamente na atividade. Na construção da Fórmula de f(x) o aluno L.F. usou a taxa correta, porém o valor inicial estava incorreto; já o aluno F.B. usou a taxa incorreta e o valor inicial também estava incorreto.

A atividade 1.c foi respondida corretamente pelo aluno F.B. Ele afirmou que f(x) representava uma função Afim, o que de fato estava correto, uma vez que se obteve uma taxa de variação constante, apesar de que o valor da taxa encontrada pelo aluno estava incorreto.

O aluno L.F. esqueceu de mencionar que ambas as taxas eram constantes, informando apenas que f(x) era constante, enquanto que g(x) era percentual; entretanto, na escrita de L.F. foi possível encontrar o significado correto na sua interpretação acerca das taxas envolvidas no problema.

Atividade 2

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 2, duas das quais citamos abaixo, temos:



No instante t=0 ano, um espécie de tartaruga é solta em um banhado. Quando t=4 anos, um biólogo estima que haja 300 tartarugas no banhado. Três anos mais tarde, o biólogo estima que haja 450 tartarugas. Seja P o tamanho da população de tartarugas no ano t. $\frac{450-300}{7-4} = \frac{150}{3} = 50$

a) Determine uma fórmula para P=f(t), supondo crescimento linear. Interprete a inclinação e a intersecção com o eixo do P de sua fórmula em termos da população de tartarugas. $f(t) = 50x + 100$ gráfico →

b) Determine uma fórmula para P=g(t), supondo um crescimento exponencial. Interprete os parâmetros de sua fórmula em termos da população de tartarugas. $g(t) = 175.(1,145)^x$ gráfico

c) No ano t=12, o biólogo estima que haja 900 tartarugas no banhado. O que isso indica a respeito dos dois modelos populacionais?

Que as tartarugas não aumentam seu número linearmente, nem exponencialmente.

A cada ano que passa, o número de tartarugas aumenta em 50.

A cada ano que passa, o número de tartarugas aumenta em 14,5%.

Figura 57: Atividade do aluno A.M.C.

No instante t=0 ano, um espécie de tartaruga é solta em um banhado. Quando t=4 anos, um biólogo estima que haja 300 tartarugas no banhado. Três anos mais tarde, o biólogo estima que haja 450 tartarugas. Seja P o tamanho da população de tartarugas no ano t.

a) Determine uma fórmula para P=f(t), supondo crescimento linear. Interprete a inclinação e a intersecção com o eixo do P de sua fórmula em termos da população de tartarugas. $ax+b$ $300 = a4 + b$ $\frac{450-300}{7-4} = \frac{150}{3} = 50$

$P(x) = 50.t + 100$

b) Determine uma fórmula para P=g(t), supondo um crescimento exponencial. Interprete os parâmetros de sua fórmula em termos da população de tartarugas.

$P_g = P.(1,5)^t$

c) No ano t=12, o biólogo estima que haja 900 tartarugas no banhado. O que isso indica a respeito dos dois modelos populacionais? Que a função afim Não funciona para este tempo daria 600 tartarugas segundo a função afim

Figura 58: Atividade do aluno M.L.

A atividade 2.a foi resolvida de forma correta por ambos os alunos. Foi possível perceber nas suas escritas a utilização da razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para a obtenção da taxa de variação constante.

Na parte de apresentação de uma fórmula que representasse o crescimento linear, ambos os alunos obtiveram a mesma resposta; nas suas escritas, eles informam corretamente na fórmula o valor da população inicial, o que demonstra boa compreensão do enunciado. Na obtenção da população inicial, o aluno A.M.C., usou uma interpretação gráfica localizando a população inicial interceptando corretamente o eixo P= f(t). Além disso, A.M.C. fez uma análise correta do comportamento da variável dependente P=f(t) com relação à taxa de variação constante.

Na atividade 2.b, o aluno A.M.C. obteve corretamente o valor da taxa de variação percentual constante, e ele utilizou essa taxa para identificar corretamente a população inicial. Além disso, A.M.C. trouxe um gráfico evidenciando o crescimento da população ano a ano, utilizando para tal argumentação a taxa de variação percentual constante. O aluno M.L. cometeu um equívoco no exercício ao informar incorretamente a taxa de variação percentual constante. Ele simplesmente dividiu 450 por 300, esquecendo de observar que o tempo passava de 4 anos para 7 anos.

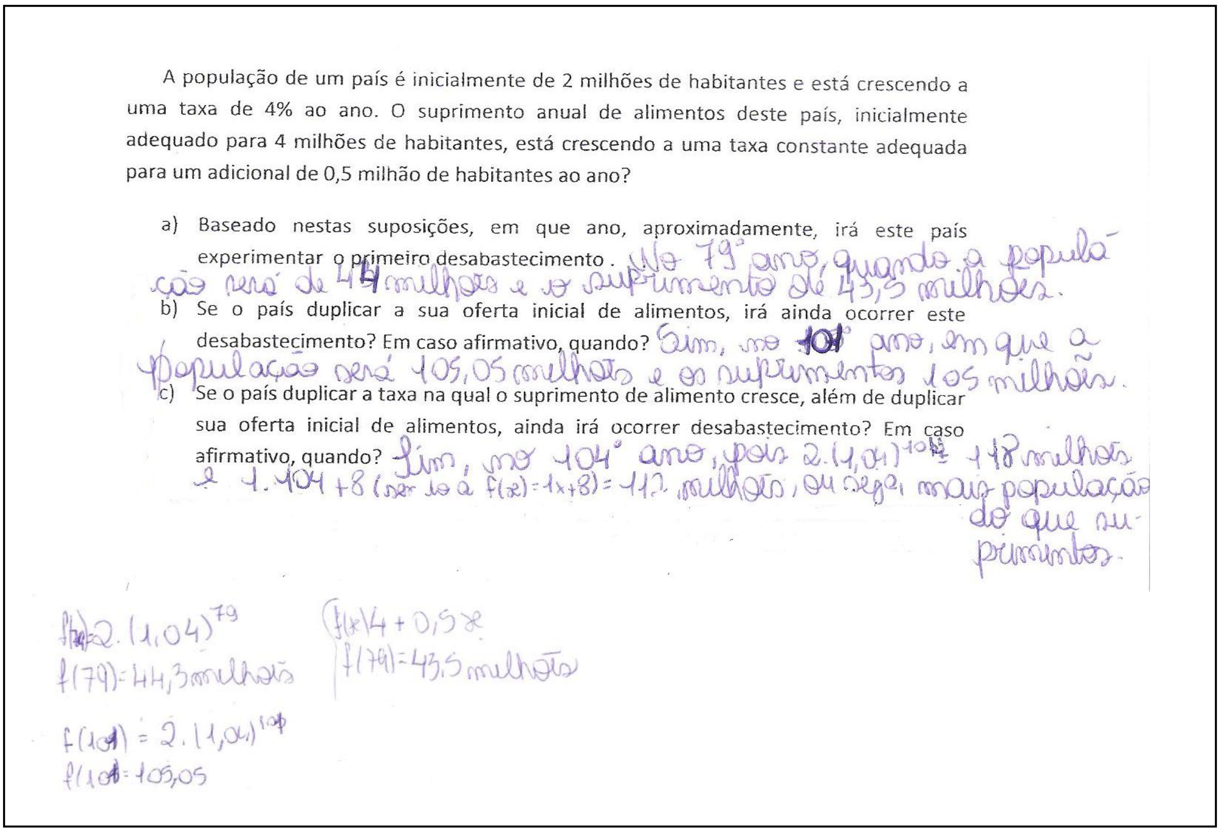
Na atividade 2.c, o aluno M.L. fez uma boa análise com relação ao crescimento linear (função Afim); porém o seu valor deveria ser de 700 tartarugas e não de 600; além disso, ele não trouxe qualquer argumentação sobre o crescimento exponencial.

O aluno A.M.C. resolveu a atividade de forma um pouco equivocada, pois de fato nenhum dos valores levaria a 900 tartarugas em 12 anos; porém, a fórmula exponencial aproxima-se bastante desse valor.

2.6.4 Comentários sobre a Aula Número 2

Atividade 3

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 3, duas das quais citamos abaixo, temos:



A população de um país é inicialmente de 2 milhões de habitantes e está crescendo a uma taxa de 4% ao ano. O suprimento anual de alimentos deste país, inicialmente adequado para 4 milhões de habitantes, está crescendo a uma taxa constante adequada para um adicional de 0,5 milhão de habitantes ao ano?

a) Baseado nestas suposições, em que ano, aproximadamente, irá este país experimentar o primeiro desabastecimento. No 79° ano, quando a população será de 44 milhões e o suprimento de 43,5 milhões.

b) Se o país duplicar a sua oferta inicial de alimentos, irá ainda ocorrer este desabastecimento? Em caso afirmativo, quando? Sim, no 104° ano, em que a população será 105,05 milhões e os suprimentos 105 milhões.

c) Se o país duplicar a taxa na qual o suprimento de alimento cresce, além de duplicar sua oferta inicial de alimentos, ainda irá ocorrer desabastecimento? Em caso afirmativo, quando? Sim, no 104° ano, pois $2.(1,04)^{104} = 118$ milhões e $1.104 + 8$ (por ser a $f(x) = 1x + 8$) $= 112$ milhões, ou seja, mais população do que suprimentos.

$f(x) = 2.(1,04)^{79}$
$f(79) = 44,3$ milhões

$f(x) = 4 + 0,5x$
$f(79) = 43,5$ milhões

$f(104) = 2.(1,04)^{104}$
$f(104) = 105,05$

Figura 59: Atividade da aluna G.P.B.

A população de um país é inicialmente de 2 milhões de habitantes e está crescendo a uma taxa de 4% ao ano. O suprimento anual de alimentos deste país, inicialmente adequado para 4 milhões de habitantes, está crescendo a uma taxa constante adequada para um adicional de 0,5 milhão de habitantes ao ano?

a) Baseado nestas suposições, em que ano, aproximadamente, irá este país experimentar o primeiro desabastecimento .

b) Se o país duplicar a sua oferta inicial de alimentos, irá ainda ocorrer este desabastecimento? Em caso afirmativo, quando?

c) Se o país duplicar a taxa na qual o suprimento de alimento cresce, além de duplicar sua oferta inicial de alimentos, ainda irá ocorrer desabastecimento? Em caso afirmativo, quando?

3)

0	2.000.000
1	2.080.000
2	2.163.200
3	2.249.728
4	2.339.717,12
5	2.433.305,69

$\cdot 1,04$

$P(t) = 2000000 \cdot 1,04^t$

$4000000 + 500000t$

$P(79) = 2000000 \cdot 1,04^{79}$

$P(79) = 44.326.536$

ano = 79

$f(79)\ 4000000 + 500000 \cdot 79$

$f(79) = 43500000$

b) Não faltará alimento

c) Não ocorrerá

Figura 60: Atividade do Aluno M.H.B.

No item 3.a, ambos os alunos apresentaram uma formatação de resposta próxima da correta (a resposta correta deveria ser 78 anos), pois ambos obtiveram a população inicial, a partir do enunciado do problema. Além disso, ambos construíram suas fórmulas, com as respectivas taxas informadas também no enunciado do problema.

Outra característica que se percebe do que os alunos escreveram, é o fato de que ambos apresentaram excelente domínio do que é uma taxa de variação percentual constante (função Exponencial) e uma taxa de variação constante (função Afim). Além de se utilizar do enunciado, o aluno M.H.B. fez uso de uma tabela para a obtenção da taxa de variação percentual constante que satisfizesse os valores ali registrados.

Na atividade 3.b, o aluno M.H.B. fez uma afirmação incorreta, pois faltará alimentação. Além disso, o aluno não apresentou qualquer argumento para a mesma. A aluna G.P.B. apresentou uma argumentação incorreta para a resposta. Na sua escrita, a aluna utilizou a fórmula da função Exponencial, quando deveria na verdade usar a fórmula da função Afim, trocando o valor inicial.

Ao analisarmos a atividade 3.c, podemos perceber que a aluna G.P.B. usou a fórmula da função Exponencial, quando na verdade deveria utilizar a fórmula da função Afim, trocando o valor da taxa de variação constante. O aluno G.H.B. trouxe novamente uma informação incorreta sem apresentar maiores argumentações para a mesma.

Atividade 4

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 4, duas das quais citamos abaixo, temos:

A tabela abaixo apresenta os resultados obtidos com medidas de intensidade de corrente elétrica e ddp em dois condutores diferentes.

é ôhmico — Condutor 1 | Condutor 2 — não ôhmico

Condutor 1		Condutor 2	
i (A)	U (V)	i (A)	U (V)
0	0	0	0
0,5	2,18	0,5	3,70
1,0	4,36	1,0	6,18
2,0	8,72	2,0	9,16
4,0	17,44	4,0	11,44

segue

4,36 para cada 1 A

não segue

Com base na tabela, verifique se os condutores são ou não ôhmicos.

Figura 61: Atividade do aluno G.C.L.

A tabela abaixo apresenta os resultados obtidos com medidas de intensidade de corrente elétrica e ddp em dois condutores diferentes.

Condutor 1		Condutor 2	
i (A)	U (V)	i (A)	U (V)
0	0	0	0
0,5	2,18	0,5	3,70
1,0	4,36	1,0	6,18
2,0	8,72	2,0	9,16
4,0	17,44	4,0	11,44

Condutor 1 = $\frac{8,72-2,18}{2-0,5} = \frac{6,54}{1,5} = 4,36$

$\frac{4,36-2,18}{1-0,5} = \frac{2,18}{0,5} = 4,36$

Com base na tabela, verifique se os condutores são ou não ôhmicos. é constante

O condutor 1 é ôhmico, pois segue a lei de ohm. O condutor 2 não segue a lei de Ohm, ~~portanto não é constante~~, e não segue uma constante.

Figura 62: Atividade do aluno R.A.

Ao analisarmos a atividade 4, verificamos de ambos os alunos um bom domínio sobre o conteúdo da atividade, uma vez que ambos os alunos fizeram uso da taxa de variação constante para concluírem que o condutor 1 era ôhmico. O aluno G.C.L. fez uso do cálculo de taxas para afirmar que o condutor 2 não era ôhmico, enquanto que o aluno R.A. fez uso das leis de Ohm para apresentar esta mesma conclusão.

2.7 TAXA DE CRESCIMENTO CONTÍNUO E O NÚMERO *E* (4 PERÍODOS DE AULA DE 50 MIN)

A taxa de crescimento contínuo está relacionada diretamente com o número e=2,71828182.... Podemos fazer uma troca a partir de uma base positiva b, reescrevendo-a como uma potência de e, como segue:

Com $b=e^k$, temos que, se $b>1$, então k é positiva; se $0<b<1$, então k é negativa. Assim podemos reescrever $Q=ab^t$ em termos de e, pois

$Q=ab^t=a(e^k)^t= ae^{kt}$. A constante k é denominada taxa de crescimento contínuo.

O objetivo aqui foi o de apresentar a constante de Euler, assim como buscar situações problemas que eram trabalhadas com taxas de crescimento contínuo.

2.7.1 Aula Número 1

Atividade 1

Se R$ 1,00 for investido em uma conta bancária que rende 100% de Juros uma vez ao ano, então, supondo que nenhum outro depósito ou saque sejam realizados, após um ano teremos: Se R$ 1,00 for investido em uma conta bancária que rende 50% de Juros duas vezes ao ano, teremos: Se R$ 1,00 for investido em uma conta bancária que rende 25% de Juros quatro vezes ao ano, teremos: Se R$ 1,00 for investido em uma conta bancária que rende 10% de Juros doze vezes ao ano, teremos: Como será o comportamento diariamente, a cada hora, a cada minuto, cada segundo?

Neste problema procuramos apresentar uma situação de problema real, com a formação do número e=2,71828182.... Também salientamos aos alunos que a base e é denominada base natural.

Atividade 2

Obtenha a taxa de crescimento contínuo para cada uma das seguintes funções e desenhe o gráfico de cada função:

$P=5e^{0,2t}$, $Q=5e^{0,3t}$, $R=5e^{-0,2t}$.

Através desses problemas buscamos analisar o comportamento da taxa de crescimento contínuo, bem como identificar características do gráfico das mesmas.

2.7.2 Aula Número 2

Atividade 3

A cafeína é liberada do corpo a uma taxa contínua de 17% por hora. Qual a quantidade de cafeína que permanece no corpo 8 horas após ter-se ingerido uma xícara de café contendo 100mg de cafeína?

Problema que envolve a contextualização da taxa contínua; assim, procuramos dar visibilidade à tarefa desenvolvida na atividade anterior.

Atividade 4

Em novembro de 2005, o Banco Wells fargo ofereceu juros a uma taxa contínua de 2,323% ao ano. Determine a taxa anual equivalente.

Esta atividade possibilitou que ilustrássemos de forma prática a taxa contínua e a relacionássemos com a taxa equivalente, apresentando uma aplicabilidade real da taxa contínua.

2.7.3 Comentários sobre a Aula Número 1

Das duas aulas sobre taxa de variação contínua, realizadas nos dias 18 e 19 de Novembro, participaram 31 alunos. No dia 18 de Novembro, ao longo de 2 períodos de 50 minutos, foram realizadas as atividades de introdução do conteúdo, apresentando problemas que envolviam este tipo de taxa de variação. Assim formalizamos com os alunos o aprendizado do que vinha a ser esta taxa, bem como sua relação com a função exponencial.

A aula teve início com um problema de introdução (ver exemplo 15 do Anexo A), com a finalidade de obter-se a constante de Euler; assim, procuramos familiarizar o aluno com o número "e". Com esse mesmo problema introdutório, apresentamos a função exponencial $f(x)=e^x$, exponencial de base *e*, cujo gráfico comparamos com os de outras funções exponenciais, como $f(x)=2^x$ e $f(x)=10^x$.

O segundo problema (ver atividade 16 do Anexo A) foi uma atividade de demonstração que envolvia a função exponencial $Q=ab^t$; ao trocarmos b por e^k obtivemos, $Q=ae^{kt}$ onde k é a taxa de crescimento contínuo. A partir daí, no caso em que "a" for positivo, verificamos que

- Se $k>0$, então Q é crescente.
- Se $k<0$, então Q é decrescente.

Assim, ao final do segundo problema, o aluno estava familiarizado com a taxa de crescimento contínuo.

No terceiro problema (ver atividade 6 do Apêndice A) o professor explorou algumas funções específicas, tais como $P=4e^{0,4t}$, $P=4e^{0,5t}$, $P=5e^{-0,4t}$,analisando o seu comportamento bem como construindo os gráficos correspondentes.

O quarto problema (ver atividade 17 do Anexo A) envolveu uma aplicação da taxa de crescimento contínuo, a uma substância radioativa que decaía. Nesse caso os alunos verificaram uma situação contextual da aplicação da taxa de crescimento contínuo, que envolvia uma função decrescente. No decorrer dessa atividade, surgiram questionamentos dos alunos sobre a diferença entra a taxa de variação percentual constante e a taxa de crescimento contínuo. Assim o professor estimulou os alunos a apresentarem algumas relações que embasassem seus argumentos acerca das conclusões que estavam tirando.

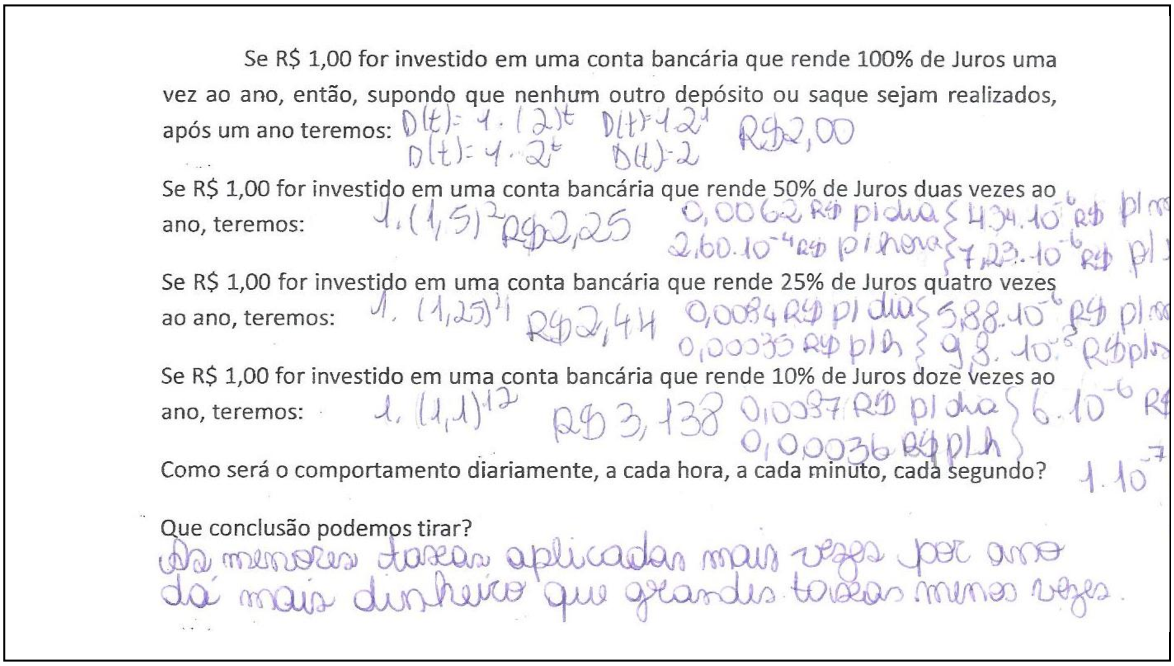
Uma boa argumentação de um aluno foi: "Bom, na taxa de variação percentual constante para ser crescente devemos ter um valor superior a 1, enquanto que na taxa de crescimento contínuo basta o valor estar ente 0 e 1 e ser positivo”. Outro aluno: “Bom, os valores variam entre 0 e 1, por que estão aumentando entre 0 e 100%, o contrário também é valido” .

Por fim, foi trabalhado com os alunos um problema envolvendo uma taxa de crescimento anual e contínuo. Assim o professor procurou apresentar aos alunos situações que poderiam ser contextualizadas no seu cotidiano. Além disso, os alunos puderam verificar via comparação que a taxa de crescimento contínuo é sempre menor que a taxa de crescimento anual equivalente, porém quando aplicadas a um valor P_0 geram o mesmo crescimento em P.

Na aula seguinte, cada aluno recebeu individualmente uma lista com quatro exercícios para trabalharem durante a aula.

Atividade 1

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 1, duas das quais citamos abaixo, temos:



Se R$ 1,00 for investido em uma conta bancária que rende 100% de Juros uma vez ao ano, então, supondo que nenhum outro depósito ou saque sejam realizados, após um ano teremos: $D(t)=1\cdot(2)^t$ $D(t)=1\cdot 2^1$ R$2,00
$D(t)=1\cdot 2^t$ $D(t)=2$

Se R$ 1,00 for investido em uma conta bancária que rende 50% de Juros duas vezes ao ano, teremos: $1\cdot(1,5)^2$ R$2,25 0,0062 R$ p/ dia {$4,34\cdot 10^{-6}$ R$ p/ m
$2,60\cdot 10^{-4}$ R$ p/ hora {$7,23\cdot 10^{-6}$ R$ p/

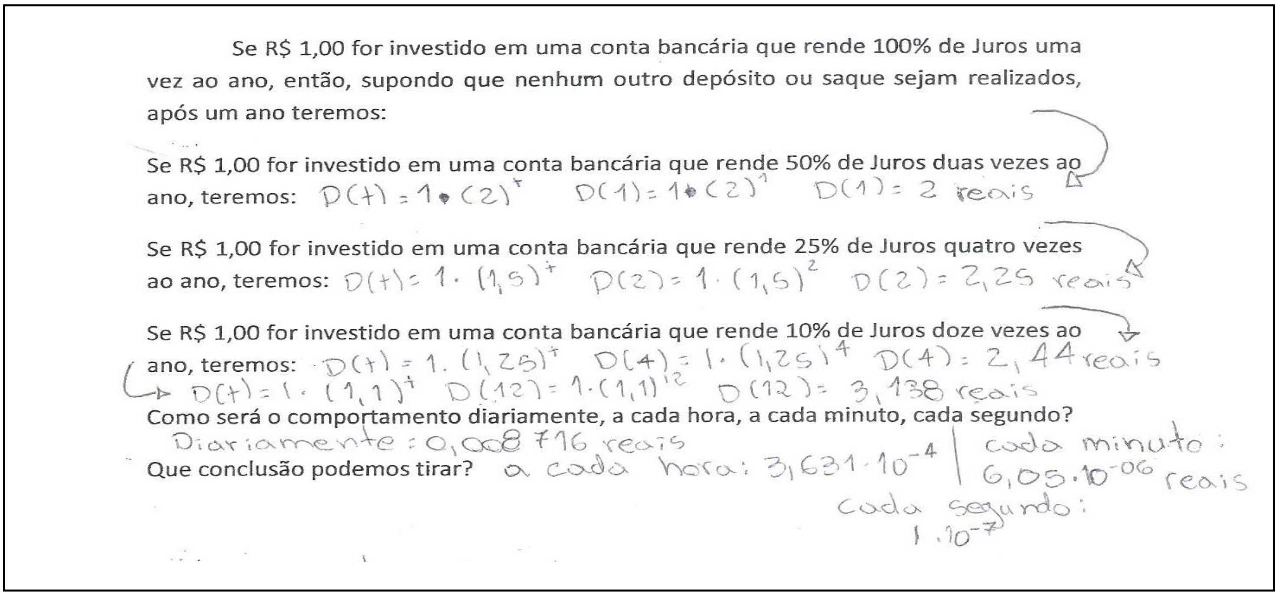
Se R$ 1,00 for investido em uma conta bancária que rende 25% de Juros quatro vezes ao ano, teremos: $1\cdot(1,25)^4$ R$2,44 0,0084 R$ p/ dia {$5,88\cdot 10^{-6}$ R$ p/ m
0,00033 R$ p/ h {$9,8\cdot 10^{-5}$ R$ p/

Se R$ 1,00 for investido em uma conta bancária que rende 10% de Juros doze vezes ao ano, teremos: $1\cdot(1,1)^{12}$ R$3,138 0,0087 R$ p/ dia {$6\cdot 10^{-6}$ R$
0,00036 R$ p/ h }

Como será o comportamento diariamente, a cada hora, a cada minuto, cada segundo? $1\cdot 10^{-7}$

Que conclusão podemos tirar?
As menores taxas aplicadas mais vezes por ano dá mais dinheiro que grandes taxas menos vezes.

Figura 63: Atividade da aluna G.P.B.



Se R$ 1,00 for investido em uma conta bancária que rende 100% de Juros uma vez ao ano, então, supondo que nenhum outro depósito ou saque sejam realizados, após um ano teremos:

Se R$ 1,00 for investido em uma conta bancária que rende 50% de Juros duas vezes ao ano, teremos: $D(t)=1\cdot(2)^t$ $D(1)=1\cdot(2)^1$ $D(1)=2$ reais

Se R$ 1,00 for investido em uma conta bancária que rende 25% de Juros quatro vezes ao ano, teremos: $D(t)=1\cdot(1,5)^t$ $D(2)=1\cdot(1,5)^2$ $D(2)=2,25$ reais

Se R$ 1,00 for investido em uma conta bancária que rende 10% de Juros doze vezes ao ano, teremos: $D(t)=1.(1,25)^t$ $D(4)=1\cdot(1,25)^4$ $D(4)=2,44$ reais

$D(t)=1\cdot(1,1)^t$ $D(12)=1\cdot(1,1)^{12}$ $D(12)=3,138$ reais

Como será o comportamento diariamente, a cada hora, a cada minuto, cada segundo?

Diariamente: 0,008716 reais

Que conclusão podemos tirar? a cada hora: $3,631\cdot10^{-4}$ | cada minuto: $6,05\cdot10^{-06}$ reais

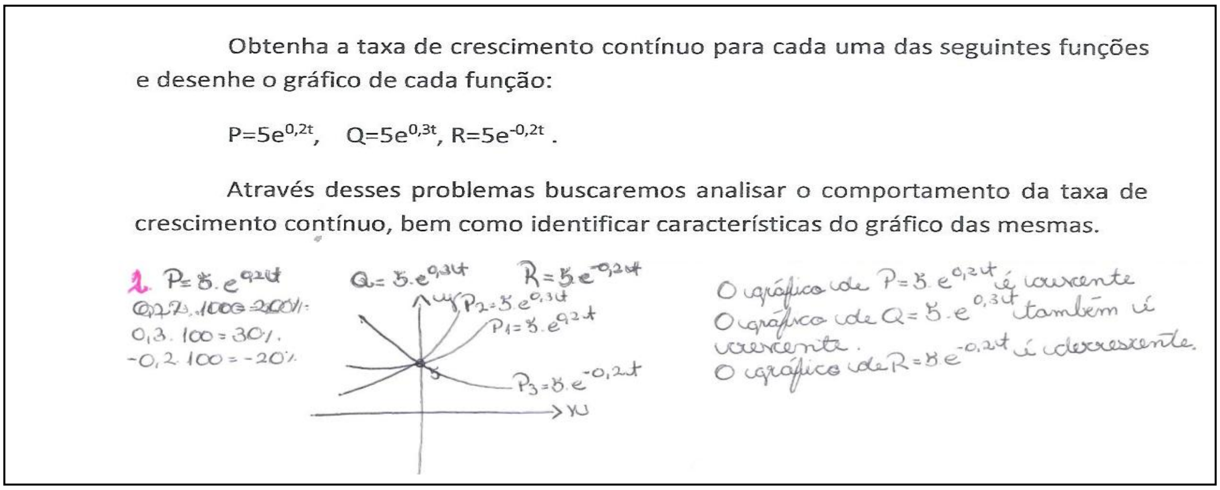
cada segundo: $1\cdot10^{-7}$

Figura 64: Atividade do aluno G.S.

Ambos os alunos tiveram dificuldade em concluir a atividade, envolvendo o valor da constante de Euler, sendo que eles apresentavam respostas corretas até a aplicação quadrimestral. Porém, ambos traziam respostas incorretas aos itens que se referiam ao investimento anual, diário, por hora, por minuto e por segundo o que dificultou a conclusão do problema de forma correta.

Atividade 2

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 2, duas das quais citamos abaixo, temos:



Obtenha a taxa de crescimento contínuo para cada uma das seguintes funções e desenhe o gráfico de cada função:

$P=5e^{0,2t}$, $Q=5e^{0,3t}$, $R=5e^{-0,2t}$.

Através desses problemas buscaremos analisar o comportamento da taxa de crescimento contínuo, bem como identificar características do gráfico das mesmas.

1. $P=5.e^{0,2t}$ $Q=5.e^{0,3t}$ $R=5e^{-0,2t}$

$0,2.100=20\%$

$0,3.100=30\%$

$-0,2.100=-20\%$

O gráfico de $P=5.e^{0,2t}$ é crescente

O gráfico de $Q=5.e^{0,3t}$ também é crescente.

O gráfico de $R=5.e^{-0,2t}$ é decrescente.

Figura 65: Atividade da aluna S.

Obtenha a taxa de crescimento contínuo para cada uma das seguintes funções e desenhe o gráfico de cada função:

$P=5e^{0,2t}$, $Q=5e^{0,3t}$, $R=5e^{-0,2t}$.

Através desses problemas buscaremos analisar o comportamento da taxa de crescimento contínuo, bem como identificar características do gráfico das mesmas.

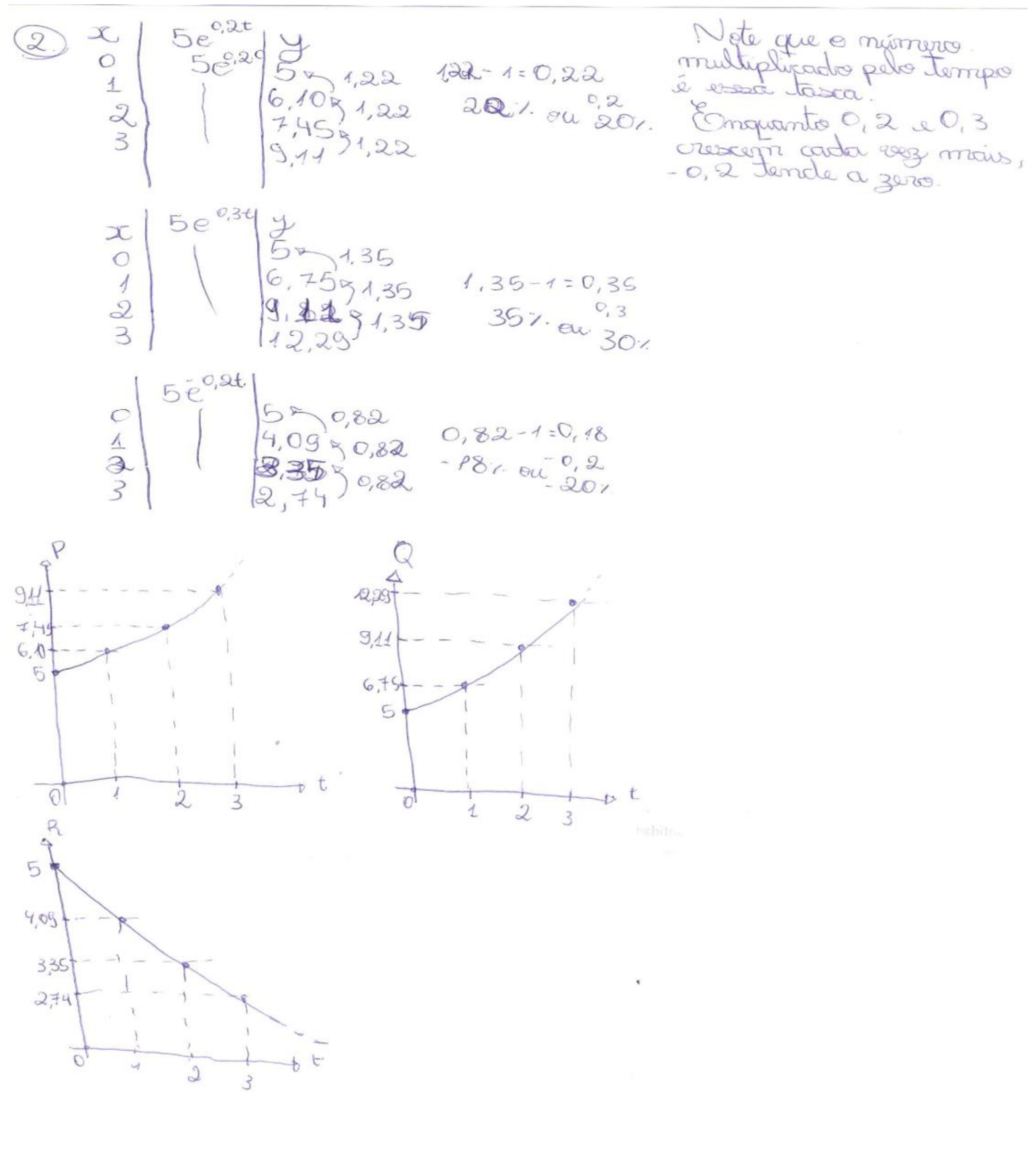


Figura 66: Atividade da aluna V.L.

Nessa atividade a aluna S. apresentou as taxas de forma correta apresentando-as tanto em valor decimal como percentual, e concluiu corretamente a respeito das funções serem crescentes ou decrescentes. Por fim, é possível verificar através da escrita da aluna um bom conhecimento do problema, uma vez que seu gráfico interceptou de forma correta o eixo y no ponto (0,5).

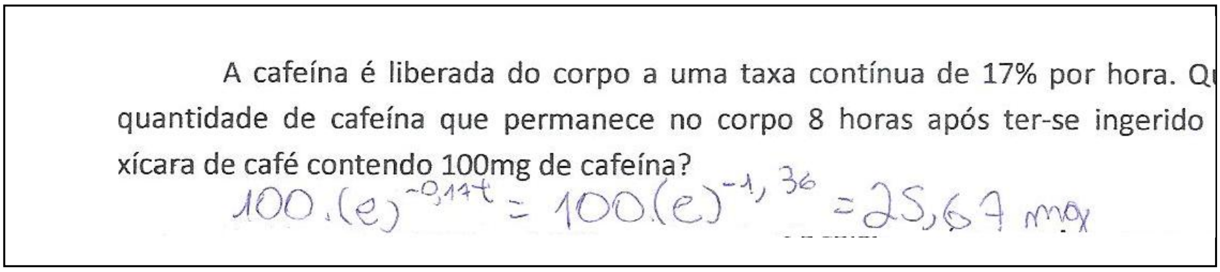
A aluna V.L. apresentou explanação inicial de qual era o valor da taxa de variação contínua no problema, e de quais desses valores correspondiam a funções crescentes ou decrescentes. Apesar de cometer alguns equívocos, com relação à comparação da taxa com a função, a aluna mostrou bom entendimento do conteúdo.

V.L. realizou alguns equívocos na montagem das tabelas, pois notou-se através da sua escrita uma confusão entre a taxa de variação percentual constante e a taxa de variação contínua. Assim, a aluna comprometeu o cálculo da taxa de variação contínua, principalmente na abordagem envolvendo percentuais, o que por conseqüência comprometeu a realização correta dos seus gráficos.

2.7.4 Comentários sobre a Aula Número 2

Atividade 3

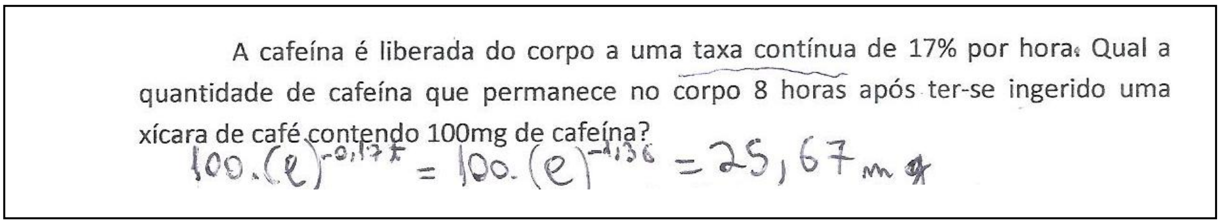
- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 3, duas das quais citamos abaixo, temos:



A cafeína é liberada do corpo a uma taxa contínua de 17% por hora. Q quantidade de cafeína que permanece no corpo 8 horas após ter-se ingerido xícara de café contendo 100mg de cafeína?

$100.(e)^{-0,17t} = 100(e)^{-1,36} = 25,67$ mg

Figura 67: Atividade do aluno S.K.M.



A cafeína é liberada do corpo a uma taxa contínua de 17% por hora. Qual a quantidade de cafeína que permanece no corpo 8 horas após ter-se ingerido uma xícara de café contendo 100mg de cafeína?

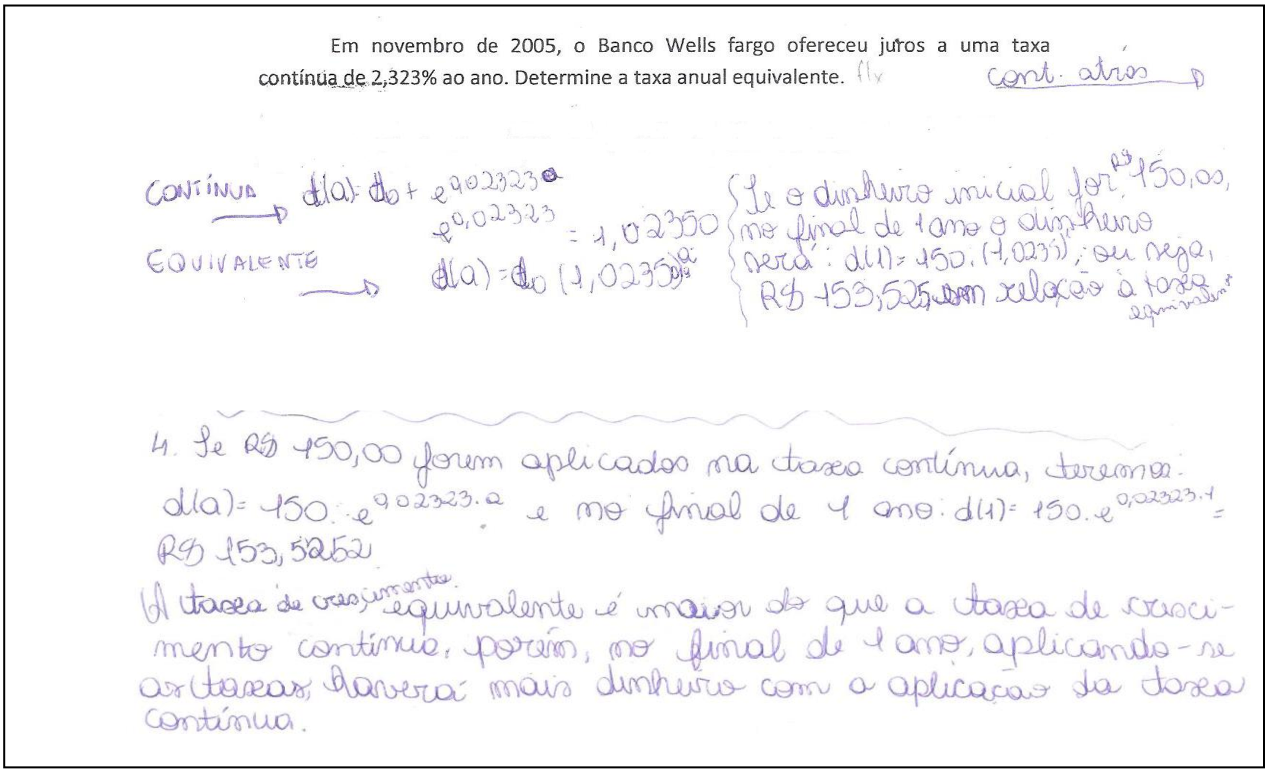
$100.(e)^{-0,17t} = 100.(e)^{-1,36} = 25,67$ mg

Figura 68: Atividade do aluno A.M.C

Os dois alunos responderam corretamente ao problema, e apresentaram ter aprendido o conteúdo trabalhado, incluindo desta vez uma taxa de variação contínua negativa.. Além disso, observou-se a preocupação de ambos em formalizar a resposta passo a passo, esclarecendo cada etapa envolvida na resolução. Além disso, ambos apresentaram corretamente o valor numérico solicitado, acompanhado da respectiva unidade.

Atividade 4

- Ao analisarmos as respostas dos alunos à Atividade 4, duas das quais citamos abaixo, temos:


Em novembro de 2005, o Banco Wells fargo ofereceu juros a uma taxa contínua de 2,323% ao ano. Determine a taxa anual equivalente.

cont. atros

CONTÍNUA → $d(a) = d_0 \cdot e^{0{,}02323a}$

$e^{0{,}02323} = 1{,}02350$

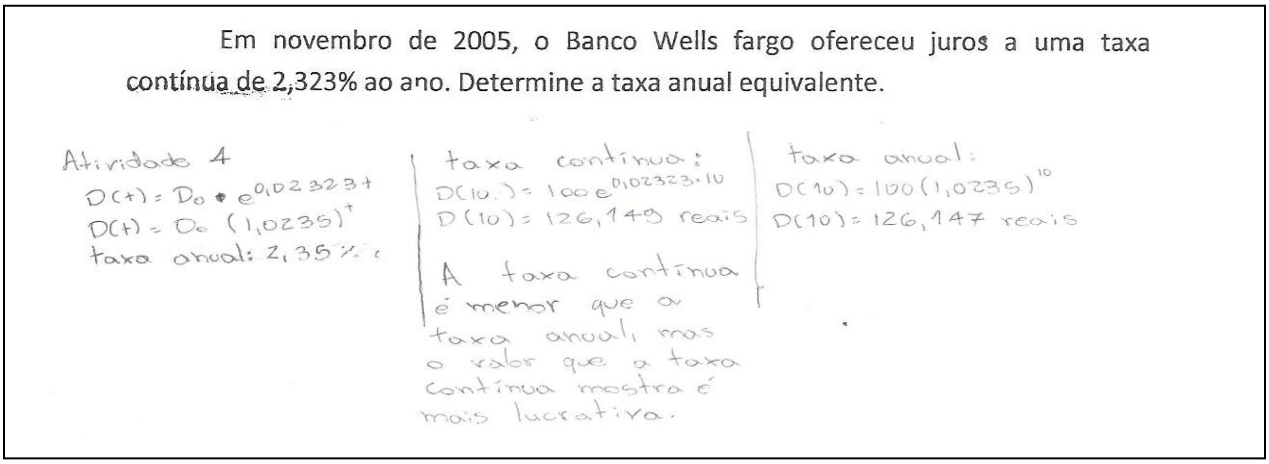
EQUIVALENTE → $d(a) = d_0 (1{,}0235)^a$

Se o dinheiro inicial for R\$ 150,00, no final de 1 ano o dinheiro será: $d(1) = 150 \cdot (1{,}0235)$, ou seja, R\$ 153,525 em relação à taxa equivalente

4. Se R\$ 150,00 forem aplicados na taxa contínua, teremos: $d(a) = 150 \cdot e^{0{,}02323 \cdot a}$ e no final de 1 ano: $d(1) = 150 \cdot e^{0{,}02323 \cdot 1} =$ R\$ 153,5252

A taxa de crescimento equivalente é maior do que a taxa de crescimento contínuo, porém, no final de 1 ano, aplicando-se as taxas, haverá mais dinheiro com a aplicação da taxa contínua.

Figura 69: Atividade da aluna G.P.B.


Em novembro de 2005, o Banco Wells fargo ofereceu juros a uma taxa contínua de 2,323% ao ano. Determine a taxa anual equivalente.

Atividade 4

$D(t) = D_0 \cdot e^{0{,}02323t}$

$D(t) = D_0 (1{,}0235)^t$

taxa anual: 2,35%

taxa contínua:

$D(10) = 100 e^{0{,}02323 \cdot 10}$

$D(10) = 126{,}149$ reais

A taxa contínua é menor que a taxa anual, mas o valor que a taxa contínua mostra é mais lucrativa.

taxa anual:

$D(10) = 100 (1{,}0235)^{10}$

$D(10) = 126{,}147$ reais

Figura 70: Atividade do aluno G.S.

Ambos os alunos resolveram o problema usando tanto a taxa anual como a taxa contínua. Os aluno G.S. e G.P.B. usaram um valor de aplicação inicial de R$ 100,00 e de R$ 150,00, respectivamente. Ambos os alunos apresentaram os cálculos da taxa equivalente anual a partir da taxa contínua. Além disso, G.S. preocupou-se em apresentar a taxa anual em valores percentuais, o que não ocorreu com a aluna G.P.B.

Nas conclusões sobre as taxas encontradas, a aluna G.P.B. apesar de afirmar que a taxa anual foi maior que a taxa contínua apresentou um pequeno equívoco na sua resposta, pois afirmou que a taxa contínua produzia uma rentabilidade melhor que a taxa anual ao final de um ano. Nesse caso, a aluna não observou que a sua resposta, tanto para a taxa contínua quanto para a taxa anual, eram iguais ao final de um ano. O aluno G.S. também fez uma afirmação correta em relação a qual taxa foi maior, afirmando que a taxa anual foi maior que a contínua. Porém cometeu o mesmo equivoco que a aluna G.P.B., pois afirmou que a aplicação ao final de 10 anos foi melhor em taxa contínua, quando o valor seria o mesmo.

CAPÍTULO 3 ANÁLISE DOS TESTES INICIAL E FINAL VISANDO AVALIAR O ESTUDO DE CADA UMA DAS TAXAS DE VARIAÇÃO EM FUNÇÕES

Com o intuito de verificar se de fato as atividades envolvendo a proposta de Ensino desenvolvida no capítulo anterior estava surtindo efeito no aprendizado dos alunos. Foi aplicado sempre antes e depois de cada atividade de ensino um teste avaliativo que envolvia diretamente o conteúdo aplicado na proposta. Assim, ao longo da proposta realizaram-se três testes iniciais e três testes finais, sobre: Taxa de variação constante em função Afim (primeiro teste), taxa de variação média e instantânea em função Quadrática (segundo teste) e taxa de variação percentual constante e taxa de variação contínua (terceiro teste).

Cada um dos testes envolviam três atividades ligadas diretamente ao conteúdo estudado. Sempre antes da aplicação do teste inicial, o professor apresentava brevemente o conteúdo. Após a aplicação desse teste inicial o professor desenvolvia a proposta de ensino a partir das taxas de variação, de forma mais aprofundada na turma 4123 (ver atividades desenvolvidas no capítulo anterior). Quando a atividade de ensino se dava por encerrada, o professor aplicava novamente um teste, a fim de avaliar o ganho de aprendizado dos alunos; a esse, denominamos teste final.

Foi estabelecida com a turma 4123 (turma da proposta de ensino) uma comparação com outra turma 4124 (turma controle) que não estava diretamente ligada ao desenvolvimento da atividade, servindo apenas como parâmetro de comparação. Nesse caso, queríamos verificar comparativamente se a proposta de ensino de funções, via estudo das taxas de variação envolvidas, melhorava a compreensão dos alunos sobre problemas envolvendo funções.

Para uma melhor compreensão dos dados recolhidos, foi elaborada uma tabela para cada turma com os respectivos resultados dos testes aplicados. Nessa tabela foram registradas, para cada questão proposta, a quantidade de alunos que a responderam correta e incorretamente. Além disso, para cada atividade também foi feito um gráfico de barras, onde a barra de cor vermelha representava as respostas incorretas e a barra de cor azul as respostas corretas. Assim, após cada coleta de dados referentes aos testes, envolvendo o estudo de uma das taxas, foi realizado um estudo comparativo para verificar em quais itens ocorreu um ganho de aprendizado pelos alunos.

A fim de, validar os resultados aplicou-se o Teste Estatístico (abaixo) para a diferença entre duas proporções.

Nosso interesse será em testar os seguintes casos:

H_0: $P_1=P_2$

H_1: $P_1 \neq P_2$, onde

Hipótese Nula (H_0): é aquela que simplesmente afirma que não existe diferença entre os grupos estudados.

Hipótese Alternativa (H_1): é aquela que afirma que existe diferença entre os grupos estudados.

A fórmula a ser utilizada para tal comparação é:

$$Z = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{\frac{P_{1.}(1-P\,)}{n_1} + \frac{P_{2.}(1-P_2)}{n_2}}}$$, onde temos:

$P_1 = \frac{X_1}{n_1}$, $P_2 = \frac{X_2}{n_2}$

Onde, X_1 e X_2 são número de sucessos na amostra 1 e na amostra 2 respectivamente.

n1 e n2 são de itens na amostra 1 e na amostra 2 respectivamente.

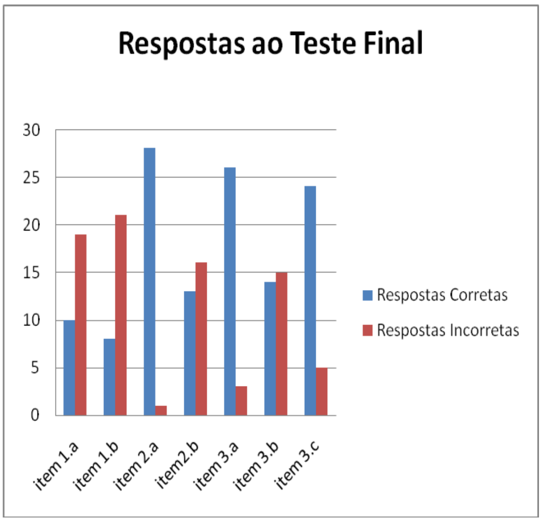
Sendo usado no teste o valor de significância de 5% e $-1{,}96 < Z < 1{,}96$ (valor tabelado)

Nesse caso, foram comparados os testes iniciais e finais de ambas as turmas.

3.1 ANÁLISES DOS TESTES INICIAL E FINAL SOBRE TAXA DE VARIAÇÃO CONSTANTE EM FUNÇÕES AFIM TURMAS 4123 (APLICAÇÃO DA PROPOSTA DE ENSINO ATRAVÉS DAS TAXAS DE VARIAÇÃO) E TURMA 4124 (TURMA CONTROLE)

	Respostas corretas	Respostas incorretas
item 1.a	15	15
item 1.b	10	20
item 1.c	10	20
item 2.a	24	6
item 2.b	7	23
item 2.c	1	29
item 3.a	8	22
item 3.b	1	29
Total	76	164
Percentual	31,70%	68,30%

	Respostas Corretas	Respostas Incorretas
item 1.a	10	19
item 1.b	8	21
item 2.a	28	1
item2.b	13	16
item 3.a	26	3
item 3.b	14	15
item 3.c	24	5
Total	123	80
Percentual	60,60%	39, 40%



Fonte: Próprio Autor

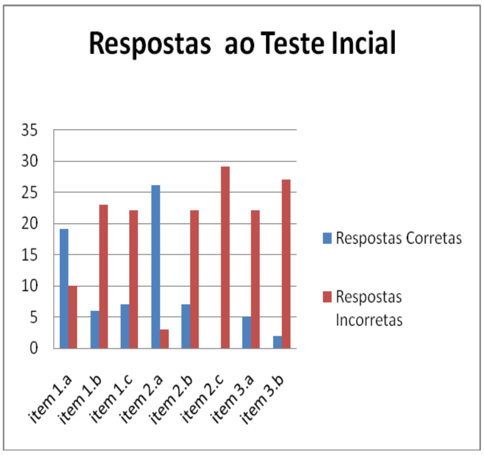
(a)

Fonte: Próprio Autor

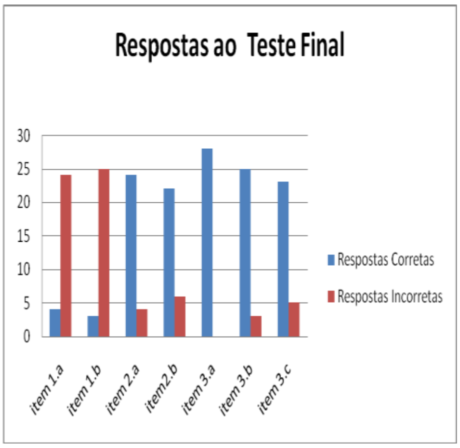
(b)

Figura 1- Respostas sobre taxa de variação constante em Função Afim na turma (4123) da Proposta de Ensino: a) Teste Inicial (Exemplo 1 do ANEXO C) b) Teste Final (Exemplo 2 do ANEXO C)

	Respostas Corretas	Respostas Incorretas
item 1.a	19	10
item 1.b	6	23
item 1.c	7	22
item 2.a	26	3
item 2.b	7	22
item 2.c	0	29
item 3.a	5	22
item 3.b	2	27
Total	72	158
Percentual	31,30%	68,70%



	Respostas Corretas	Respostas Incorretas
item 1.a	4	24
item 1.b	3	25
item 2.a	24	4
item2.b	22	6
item 3.a	28	0
item 3.b	25	3
item 3.c	23	5
Total	129	67
Percentual	65,82%	34,18%



Fonte: Próprio Autor **Fonte: Próprio Autor**

(a) **(b)**

Figura 2- Respostas sobre taxa de variação constante em Função Afim na turma (4124) Controle: a) Teste Inicial (Exemplo 1 do ANEXO C) b) Teste Final (Exemplo 2 do ANEXO C)

3.2 COMENTÁRIO SOBRE OS RESULTADOS ENVOLVENDO OS TESTES INICIAL E FINAL SOBRE TAXA DE VARIAÇÃO CONSTANTE EM FUNÇÃO AFIM

A análise dos resultados envolvendo o teste inicial (ver figura 1.a e figura 2.a) de ambas as turmas (4123 e 4124) nos apresentou um valor maior de respostas incorretas frente ao número de respostas corretas. O que pode estar ligado ao fato de na maioria dos exercícios haver questões sobre análise e interpretação da taxa de variação constante em funções Afim. Nesse caso, ficou evidente que um contato apenas breve com o conteúdo não acrescentou um aprendizado aos alunos.

Quando fizemos uma análise mais individualizada dos resultados percebemos que o item 2.a (figura 1. a) apresentou mais respostas corretas do que incorretas e o item 1.a (figura 1. a) apresentou um valor igual de respostas corretas e incorretas para a turma 4123. Já a turma 4124 apresentou dois itens onde os alunos tiveram mais respostas corretas do que incorretas, são eles: o item 1.a (figura 2.a) e o item 2.a (figura 2.a).

O item 1.a era um mero teste de cálculo da taxa de variação constante na função linear. Nesse caso, apesar de a turma 4123 ter apresentado valores iguais de respostas corretas e incorretas o item pareceu ser ter sido bem compreendido por ambas as turmas. Uma vez que, as duas apresentaram um bom desempenho no teste

No item 2.a foi preciso uma reflexão acerca dos dados: Por que o item 2.a (ver figura 1.a e figura 2.a) foi respondido pela maioria das turmas de forma correta? Quando analisávamos o item, verificamos que tratava-se de uma situação bastante corriqueira no curso de técnico em eletrônica, uma vez que podia ser resolvido através de uma fórmula de cálculo de resistência. Isso então justificou um melhor desempenho dos alunos, uma vez que tal atividade já deveria ter sido trabalhada em outra disciplina do curso, o que facilitou a compreensão e a resolução da atividade.

Aplicando o teste de Hipótese para a diferença de duas proporções no teste Inicial.

Queremos testar às seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 \\ H_a : P_1 \neq P_2 \end{cases}$$

Fixamos o nível de significância α =0,05

Assim, temos sobe a hipótese nula:

$$Z = \frac{0{,}317 - 0{,}313}{\sqrt{\frac{0{,}317.(1-0{,}317)}{240} + \frac{0{,}313.(1-0{,}313)}{230}}}$$

$$Z = \frac{0{,}004}{0{,}043} = 0{,}09$$

Como resultado, temos: $-1{,}96 < Z = 0{,}09 < 1{,}96$, não há evidência para se rejeitar a hipótese nula, ou seja, a diferença observada poderia ter ocorrido por acaso. Portanto não é possível se concluir que uma turma tenha tido um resultado melhor do que a outra, aprendido mais do que a outra.

Ao analisarmos os resultados do teste final (ver figura 1.b e figura 2.b) verificamos que os alunos (turmas 4123 e 4124) apresentaram mais itens respondidos de forma correta do que incorreta. Observamos que na turma 4123 os itens 1.a, 1.b e 2.b (figura 2.a) ainda tiveram mais respostas incorretas do que corretas, mas na turma 4124 os itens 1.a e 1.b (figura 2.b) constam com respostas incorretas em maior número que as corretas.

Ao interpretarmos tais respostas verificamos que o item 1.a e 1.b (ver figura 1.b e figura 2.b) apresentavam atividades de interpretação de dados de uma tabela. Nesse caso, podemos avaliar que, por ser uma questão interpretativa, gerou nos alunos certa dúvida acerca do seu desenvolvimento. Uma vez que, era necessário que o aluno avançasse no seu aprendizado, a fim de que pudessem compreender e melhor solucionar o problema.

No item 2.b (figura 2.b) a turma 4123 apresenta novamente mais itens incorretos do que corretos. Aqui podemos novamente perceber que os alunos tiveram dificuldade de interpretação do item, pois ao analisarmos as respostas da atividade percebemos que boa parte deles informou que V (diferença de potencial) dividido por i (corrente) gerava uma resistência. Observemos que os alunos compreendem o assunto do problema, porém tiveram dificuldade em respondê-lo, pois essa resistência era constante em quaisquer intervalos o que caracterizava um resistor ôhmico. Já na turma 4124 (ver figura 2.b), boa parte dos alunos associou esse valor de resistência constante, indiferente do intervalo, com o fato de ser um resistor ôhmico.

Aplicando o teste de Hipótese para a diferença de duas proporções no teste Final.

Queremos testar às seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 \\ H_a : P_1 \neq P_2 \end{cases}$$

Fixamos o nível de significância α =0,05

Assim, temos sobe a hipótese nula:

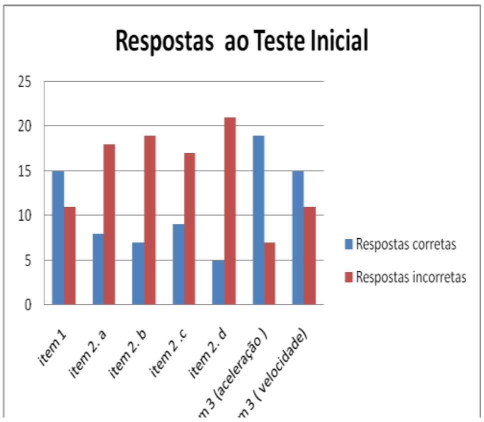
$$Z = \frac{0{,}606 - 0{,}658}{\sqrt{\frac{0{,}606.(1-0{,}606)}{203} + \frac{0{,}658.(1-0{,}658)}{196}}}$$

$$Z = \frac{-0{,}052}{0{,}048} = -1{,}08$$

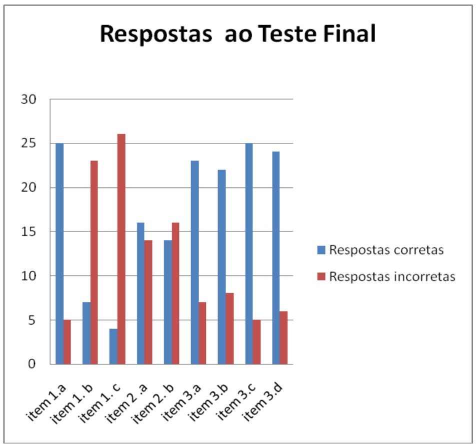
Como resultado, temos: $-1{,}96 < Z = -1{,}08 < 1{,}96$, não há evidência para se rejeitar a hipótese nula, ou seja, a diferença observada poderia ter ocorrido por acaso. Portanto não é possível se concluir que uma turma tenha tido um resultado melhor do que a outra, aprendido mais do que a outra.

3.3 ANÁLISES DOS TESTES INICIAL E FINAL SOBRE TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA E INSTANTÂNEA EM FUNÇÕES QUADRÁTICAS NA TURMA 4123 (APLICAÇÃO DA PROPOSTA DE ENSINO ATRAVÉS DAS TAXAS DE VARIAÇÃO) E TURMA 4124 (TURMA CONTROLE)

	Respostas corretas	Respostas incorretas
item 1	15	11
item 2. a	8	18
item 2. b	7	19
item 2 .c	9	17
item 2. d	5	21
item 3 (aceleração)	19	7
item 3 (velocidade)	15	11
Total	78	104
Percentual	42,86%	57,14



	Respostas corretas	Respostas incorretas
item 1.a	25	5
item 1. b	7	23
item 1. c	4	26
item 2 .a	16	14
item 2. b	14	16
item 3.a	23	7
item 3.b	22	8
item 3.c	25	5
item 3.d	24	6
Total	160	110
Percentual	76,19%	23,81%

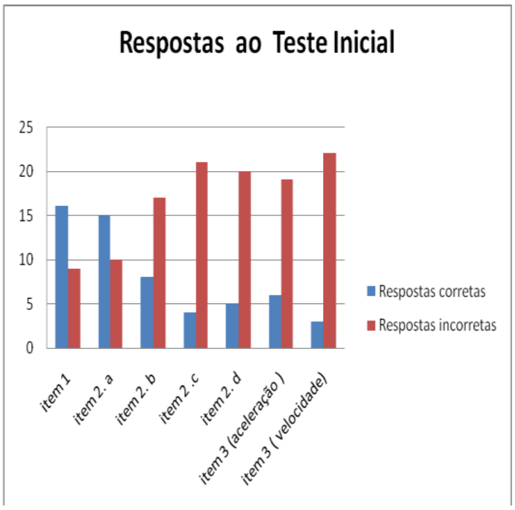


Fonte: Próprio Autor **Fonte: Próprio Autor**

(a) **(b)**

Figura 3- Respostas sobre taxa de variação média e instantânea em Função Quadrática na turma (4123) da Proposta de Ensino: a) Teste Inicial (Exemplo 3 do ANEXO C) b) Teste Final (Exemplo 4 do ANEXO C)

	Respostas corretas	Respostas incorretas
item 1	16	9
item 2. A	15	10
item 2. B	8	17
item 2 .c	4	21
item 2. D	5	20
item 3 (aceleração)	6	19
item 3 (velocidade)	3	22
Total	57	118
Percentual	32,57%	67,43%



	Respostas corretas	Respostas incorretas
item 1.a	7	22
item 1. b	1	28
item 1. c	4	25
item 2 .a	0	29
item 2. b	1	28
item 3.a	20	9
item 3.b	22	7
item 3.c	23	6
item 3.d	8	21
Total	86	175
Percentual	39,95%	60,05%

Fonte: Próprio Autor

(a)

Fonte: Próprio Autor

(b)

Figura 4- Respostas sobre taxa de variação média e instantânea em Função Quadrática na turma (4124) Controle: a) Teste Inicial (Exemplo 3 do ANEXO C) b) Teste Final (Exemplo 4 do ANEXO C)

3.4 COMENTÁRIO SOBRE OS RESULTADOS ENVOLVENDO OS TESTES INICIAL E FINAL SOBRE A TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA E INSTANTÂNEA EM FUNÇÃO QUADRÁTICA

Ao analisarmos os itens do Teste inicial (ver figura 3.a e figura 4. a) de ambas as turmas (4123 e 4124) verificamos que o número de respostas incorretas foi superior ao de respostas corretas, o que nos leva a crer que, mesmo com uma introdução inicial, os alunos não conseguiram captar totalmente o conteúdo.

Quando observamos os itens, percebemos que o item 1(ver figura 3.a e figura 4.a) apresentou um número maior de respostas corretas, frente ao de incorretas, em ambas as turmas (4123 e 4124). Isto pode ter sido influenciado pela possibilidade de resolver o problema, sem usar o conceito de taxa de variação média. No item 2.a (figura 4.a) a turma 4124 teve um número de respostas corretas superior ao de respostas incorretas o que identificou que a turma apresentou boa compreensão do problema, usando características de conteúdos encontrados no curso de técnico em eletrônica para resolvê-los.

A turma 4123 apresentou mais respostas corretas do que incorretas para o item 3 (figura 3.a) que envolvia velocidade e aceleração de um móvel. Nesse caso, percebeu-se que a turma fez uso de conteúdos de física conjuntamente com conhecimentos de matemática para tal resolução. Além disso, percebeu-se que os alunos utilizaram mesmo que de forma superficial os seus conhecimentos a respeito de taxa de variação média e taxa de variação instantânea para a resolução do teste. O que nos demonstrou que mesmo o conteúdo ainda não sendo trabalhado de forma aprofundada, surtiu efeito no aprendizado dos alunos.

Aplicando o teste de Hipótese para a diferença de duas proporções no teste Inicial.

Queremos testas às seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 \\ H_a : P_1 \neq P_2 \end{cases}$$

Fixamos o nível de significância α =0,05

Assim, temos sobe a hipótese nula:

$$Z = \frac{0,429 - 0,326}{\sqrt{\frac{0,429.(1-0,429)}{182} + \frac{0,326.(1-0,326)}{175}}}$$

$$Z = \frac{0,103}{0,051} = 2,019$$

Como resultado, temos: Comparando os dois grupos através do Teste estatístico, obtivemos Z=2,109> 1,96 . Nesse caso, observamos diferença significativa nos resultados obtidos com aplicação da metodologia de ensino.

Na análise dos resultados do Teste Final (ver figura 3.b e figura 4.b) podemos verificar que a turma 4123 apresentou mais respostas corretas do que incorretas; o que pode ter sido influenciado pelo conhecimento mais aprofundado do conteúdo de taxas de variação média e instantânea em funções quadráticas.

Ao analisarmos os itens percebemos que a turma 4123 apresentou mais respostas incorretas do que corretas nos itens 1.b, 1.c, 2.b (figura 3.b). Nesse caso, podemos verificar que o item 1.b e 1.c (figura 3.b) eram atividades de interpretação que deveriam ser feitas a partir de uma análise mais aprofundada da tabela, mas tal qual o item 1.a (figura 3.b) poderiam ser resolvidas através do uso de taxa de variação média nos respectivos intervalos informados. Já o item 2.b (figura 3.b) estava diretamente ligado ao item 2.a (figura 3.b), envolvendo a taxa de variação instantânea; verificamos aí um pequeno decréscimo de respostas corretas do item 2.a para o item 2.b o que indica que os alunos possuíram certa dificuldade de interpretação do problema 2.b.

A turma 4124 apresentou mais respostas incorretas do que corretas para os itens 1.a, 1.b, 2.a, 2.b e 3.d (figura 4.b). Nesse caso, verificamos que são os itens diretamente ligados à taxa de variação média e instantânea em funções quadráticas o que pode ter influenciado tal dado. Porém, os itens 1,a, 1.b e 3.d (figura 3.b) poderiam ser resolvidos diretamente através da observação e interpretação dos assuntos específicos envolvidos nos problemas.

Aplicando o teste de Hipótese para a diferença de duas proporções no teste Inicial.

Queremos testas às seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 \\ H_a : P_1 \neq P_2 \end{cases}$$

Fixamos o nível de significância α =0,05

Assim, temos sobe a hipótese nula:

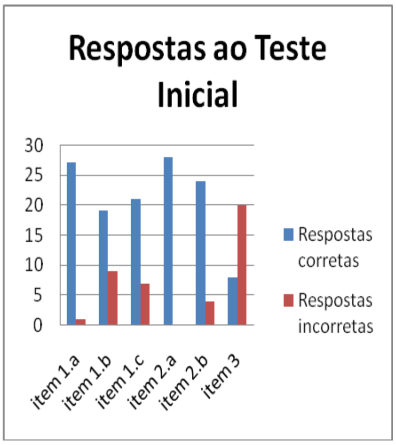
$$Z = \frac{0{,}762 - 0{,}399}{\sqrt{\frac{0{,}762.(1-0{,}762)}{270} + \frac{0{,}326.(1-0{,}762)}{261}}}$$

$$Z = \frac{0{,}363}{0{,}039} = 9{,}308$$

Como resultado, temos: Comparando os dois grupos através do Teste estatístico, obtivemos Z=9,308> 1,96 . Nesse caso, observamos diferença significativa nos resultados obtidos com aplicação da metodologia de ensino.

3.5 ANÁLISES DOS TESTES INICIAL E FINAL SOBRE TAXA DE VARIAÇÃO PERCENTUAL CONSTANTE E TAXA DE VARIAÇÃO CONTÍNUA EM FUNÇÕES EXPONENCIAIS TURMAS 4123 (APLICAÇÃO DA PROPOSTA DE ENSINO ATRAVÉS DAS TAXAS DE VARIAÇÃO) E TURMA 4124 (TURMA CONTROLE)

	Respostas corretas	Respostas incorretas
item 1.a	27	1
item 1.b	19	9
item 1.c	21	7
item 2.a	28	0
item 2.b	24	4
item 3	8	20
Total	127	41
Percentual	75,60%	24,2



Fonte: Próprio Autor

(a)

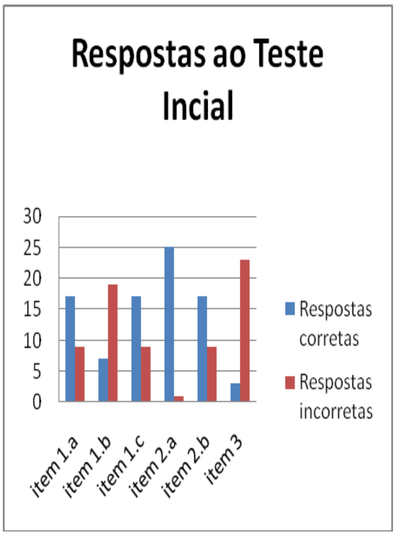
	Respostas corretas	Respostas incorretas
item 1.a	22	7
item 1.b	22	7
item 2.a	25	4
item 2.b	20	9
item 3.a	2	27
item 3.b	2	27
item 3.c	5	24
Total	98	105
Percentual	48,30%	51,70%

Fonte: Próprio Autor

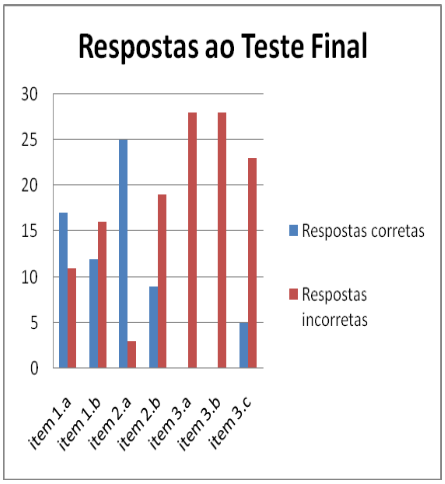
(b)

Figura 5- Respostas sobre taxa de variação percentual constante e taxa de variação contínua na turma (4123: a) Teste Inicial (Exemplo 5 do ANEXO C) b) Teste Final (Exemplo 6 do ANEXO C)

	Respostas corretas	Respostas incorretas
item 1.a	17	9
item 1.b	7	19
item 1.c	17	9
item 2.a	25	1
item 2.b	17	9
item 3	3	23
Total	86	70
Percentual	55,10%	44,90%



	Respostas corretas	Respostas incorretas
item 1.a	17	11
item 1.b	12	16
item 2.a	25	3
item 2.b	9	19
item 3.a	0	28
item 3.b	0	28
item 3.c	5	23
Total	68	128
Percentual	34,70%	65,3



Fonte: Próprio Autor **Fonte: Próprio Autor**

(a) **(b)**

Figura 6- Respostas sobre taxa de variação percentual constante e taxa de variação contínua na turma (4124) Controle: a) Teste Inicial (Exemplo 5 do ANEXO C) b) Teste Final (Exemplo 6 do ANEXO C)

3.6 COMENTÁRIOS SOBRE OS RESULTADOS ENVOLVENDO OS TESTES INICIAL E FINAL SOBRE A TAXA DE VARIAÇÃO PERCENTUAL CONSTANTE E TAXA DE VARIAÇÃO CONTÍNUA EM FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Ao analisarmos os resultados dos dados referentes ao teste inicial (ver figura 5.a e figura 6.a) de ambas as turmas (4123 e 4124), verificamos que houve um número maior de acertos do que de erros cometidos nos testes aplicados. Além disso, percebemos através dos dados que a turma 4123 apresentou somente o item 3 (figura 5.a) com o número de respostas incorretas superior ao de respostas corretas. Já a turma 4124, apresentou mais respostas incorretas do que corretas para os itens 1.b e o item 3 (figura 6.a). No item 1.b temos uma atividade interpretativa o que pode ter dificultado um pouco a compreensão por parte dos alunos da turma 4124, uma vez que se solicitava uma prévia análise de dados. Já para o item 3, temos uma atividade diretamente ligada ao cálculo de taxa de variação contínua, o que pode sugerir que os alunos tiveram dificuldade na compreensão dessa taxa, ou que a confundiram com a taxa de variação percentual constante.

Outro fato bastante relativo está associado ao item 2.a (figura 6. a) com todos os alunos da turma 4123 respondendo de forma correta. Nesse caso, podemos verificar que mesmo se tratando de um teste inicial os alunos compreenderam e associaram os conhecimentos que já haviam obtido no estudo das taxas de variação constante, taxa de variação média e instantânea e mesmo que de forma superficial as de taxa de variação percentual constante e taxa de variação contínua para resolver os problemas.

Foi possível notar pelo teste inicial da turma 4123 que o número de respostas corretas foi bem superior ao de respostas incorretas (com exceção do item 3) o que pode estar diretamente ligado ao fato dos alunos já terem previamente resolvido problemas e desenvolvido atividades que envolviam diretamente o uso das taxas (constante, média e instantânea foram estudas anteriormente). Além disso, já possuíam um domínio prévio de tópicos importantes do estudo de Funções (Afim e Quadrática). Por outro lado, os problemas propostos mostraram-se de fácil compreensão pelos alunos, o que nesse caso demonstra que o aluno está de fato se integrando ao conteúdo estudado.

Aplicando o teste de Hipótese para a diferença de duas proporções no teste Inicial.

Queremos testas às seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 \\ H_a : P_1 \neq P_2 \end{cases}$$

Fixamos o nível de significância α =0,05

Assim, temos sobe a hipótese nula:

$$Z = \frac{0,756 - 0,551}{\sqrt{\frac{0,756.(1-0,756)}{168} + \frac{0,551.(1-0,551)}{156}}}$$

$$Z = \frac{0,205}{0,052} = 3,94$$

Como resultado, temos: Comparando os dois grupos através do Teste estatístico, obtivemos Z=3,94> 1,96 . Nesse caso, observamos diferença significativa nos resultados obtidos com aplicação da metodologia de ensino.

Ao analisarmos as respostas do teste final (ver figura 5.b e figura 6.b) verificamos que a turma 4123 teve um número de respostas corretas superior ao de repostas incorretas, e, por outro lado, a turma 4124 teve um número de respostas incorretas maior que o de corretas. Nesse caso, podemos associar tal desempenho com o fato da turma 4123 ter se aprofundado mais nos conteúdos de taxas de variação percentual constante e taxa de variação contínua, ou seja, vê-se o efeito positivo da nossa proposta de ensino.

Quando partimos para uma análise por itens, percebemos que a turma 4123 apresenta o número de respostas corretas superior ao de respostas incorretas para os itens 1 e 2 (figura 5.b). Nesse caso, verificamos que os assuntos que envolviam taxa de variação percentual constante (item 1) e comparação entre taxas (item 2) mostraram um bom aprendizado pelos alunos, uma vez que o número de respostas corretas nesses itens é bem superior ao de respostas incorretas. Entretanto, ao analisarmos o item 3 (figura 5.b) percebemos que os alunos da turma 4123 tiveram bastante dificuldade na compreensão do assunto tratado no teste (taxa de variação contínua), pois boa parte deles tentou resolver o item via taxa de variação percentual constante o que demonstra certa confusão por parte dos alunos com relação às definições desses assuntos. Desta forma, poderíamos ter explorado melhor ambos os conceitos de taxa de variação percentual constante e taxa de variação contínua, bem como proposto mais problemas que pudessem apresentar de forma mais clara aos alunos quais características cada uma dessas taxas possui; assim, poderíamos levar o aluno a compreender qual a diferença entre ambas, bem como associar melhor o que essas taxas possuem de comum, visto que ambas estão ligadas à Função Exponencial.

A turma 4124 apresentou somente dois itens com respostas corretas superior ao de incorretas que foram os testes 1.a e 2.a (figura 6.b). Ao analisarmos isso verificamos que os alunos conseguiram responder aos itens que envolviam cálculo direto de taxas, mas quando os testes requeriam um conhecimento mais interpretativo de tais situações os alunos apresentaram certa dificuldade na elaboração de suas respostas, uma vez que com estes alunos não foram aprofundados maiores conhecimentos sobre taxas de variação.

Aplicando o teste de Hipótese para a diferença de duas proporções no teste Final.

Queremos testas às seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 \\ H_a : P_1 \neq P_2 \end{cases}$$

Fixamos o nível de significância α =0,05

Assim, temos sobe a hipótese nula:

$$Z = \frac{0,483 - 0,347}{\sqrt{\frac{0,483.(1-0,483)}{203} + \frac{0,347.(1-0,347)}{196}}}$$

$$Z = \frac{0,136}{0,049} = 2,78$$

Como resultado, temos: Comparando os dois grupos através do Teste estatístico, obtivemos Z=2,78> 1,96 . Nesse caso, observamos diferença significativa nos resultados obtidos com aplicação da metodologia de ensino.

CAPÍTULO 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Consideramos que nossa proposta de Ensino de Funções Afim, Quadrática e Exponencial a partir das Taxas de Variação entre as suas variáveis (Taxa de variação constante, média, instantânea, Percentual constante e contínua) foi muito boa, uma vez que os alunos conseguiram na maioria das vezes resolver as atividades que lhes foram propostas. Além disso, foi possível perceber que problemas mais ligados à realidade dos alunos aumentam seu interesse pelos conteúdos, mantendo neles um espírito investigador.

A parte de estudo da taxa de variação constante em Função Afim foi bem compreendida pelos alunos, pois boa parte deles respondeu de forma correta, ou parcialmente correta a todos os itens. Entretanto, boa parte dos alunos que participaram das atividades, não se preocupou em verificar em mais intervalos se a taxa se mantinha sempre constante. Nesse caso era preciso realizar tal verificação, uma vez que essa é a principal característica da taxa de variação constante em funções Afim.

O resultado acima mostra a necessidade de retomadas de explicações acerca desse item, tão importante para manter o aprendizado fortalecido e correto.

Quanto aos problemas aplicados diretamente ao curso de técnico em eletrônica, foi possível verificar a compreensão dos alunos e de que forma o seu conhecimento sobre taxa de variação constante lhes seria útil nessa realização. Além de poderem visualizar problemas de matemática, os estudantes também puderam verificar que a taxa de variação constante é aplicável a problemas de resistência, velocidade, aceleração, resistores ôhmicos, entre outras atividades envolvendo Função Afim.

Já o estudo de Função Quadrática, com as taxas de variação média e instantânea, foi bem satisfatório com relação ao aprendizado dos alunos. Como os alunos estavam bastante ambientados com os conceitos de taxa de variação constante, o estudo de taxa de variação média foi relativamente fácil.

Além disso, os problemas de Física que utilizavam velocidade média tornaram a compreensão da taxa de variação média em Função quadrática bem mais significativa. No estudo sobre taxa de variação instantânea, os alunos puderam utilizar a derivada da função Potência, o que nesse caso foi um grande acerto desse trabalho, pois o objetivo sempre é tornar o aprendizado dos alunos mais produtivo e fácil para eles. Ao utilizar o ensino de derivadas, pudemos constatar que os alunos aprimoraram conhecimentos tanto de exercícios de Física, como exercícios que envolviam conhecimentos de resistência e potência. Além disso, foi perceptível as análises que eles produziram nos exercícios enfatizando linguagem correta, bem como demonstrações de resoluções passo a passo. Por fim, foi a atividade em que todos os alunos apresentaram um desempenho bem acima dos demais conteúdos trabalhados em aula, o que só reforçou o seu aprendizado.

A taxa de variação percentual constante em Função exponencial tornou-se uma atividade de fácil compreensão pelos alunos, pois boa parte deles associou o conteúdo à taxa de variação constante da Função Afim. Isso fica bastante evidente nos exercícios que envolviam diretamente tabelas, para determinarem que tipo de Função era satisfeita pelos dados da tabela. Nesse caso, pudemos verificar que boa parte dos alunos identificou-as corretamente, a partir das taxas de variação envolvidas.

Outro aspecto bem significativo foi que os estudantes puderam aplicar seu conhecimento de taxa de variação percentual constante em problemas sobre: crescimento populacional, juros, carga armazenada em capacitores, voltagem, entre outros. O que na verdade dá ênfase ao uso de taxas, é o fato de que, desta forma, pode-se trabalhar com os alunos atividades envolvidas diretamente com seus interesses e mais próximas à sua realidade.

Há também que se ressaltar o fato de os alunos estabelecerem excelentes quadros comparativos entre a taxa de variação constante e a taxa de variação percentual constante. Nesse caso, foi nítido através das suas escritas a compreensão que faziam de uma e da outra, além de apresentarem argumentos muito sólidos para visualizar o comportamento de ambas, quando eram crescente ou decrescente.

A taxa de variação contínua com certeza foi a de maior dificuldade de compreensão pelos alunos, pois boa parte deles não soube diferenciá-la em relação à taxa de variação percentual constante. Além disso, os alunos não compreenderam que os problemas indicavam qual taxa deveriam utilizar, pois aqueles que envolviam taxa de variação contínua traziam em seus enunciados a palavra “contínua”.

Outro aspecto que deve ser levado em consideração é que foram desenvolvidas poucas atividades desse conteúdo em sala de aula, o que pode ter comprometido o aprendizado dos alunos sobre o assunto. Nesse caso, a atividade precisará ser melhor repensada, com a utilização de mais atividades que possam deixar claro aos alunos a diferença entre ambas as taxas, bem como a característica individual de cada uma.

Quando avaliamos os testes iniciais e finais, eles reforçaram a idéia que aqui foi desenvolvida, apesar de na taxa de variação constante os índices de aprendizado não terem se mostrado significativos. No que se refere a taxa média, taxa de variação instantânea, taxa de variação percentual constante e taxa de variação contínua, a avaliação dos resultados mostrou um aprendizado bem melhor da turma 4123, o que reforça a proposta em tais atividades.

Quando analisamos os resultados dos testes finais e iniciais, verificamos que a proposta produz o efeito desejado, pois em sua quase maioria o resultado mostrou que o desempenho da turma 4123 foi muito bom do ponto de vista do aprendizado.

Por fim, é preciso frisar o fato de termos realizado atividades com problemas contextualizados. Essa forma de ensino via problemas talvez tenha sido o grande achado da proposta, pois foi possível visualizar em aula o comprometimento dos alunos com as tarefas, além de mantê-los sempre interessados em discutir, argumentar e tentar compreender os problemas, comprovando o seu real interesse nos assuntos.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard. **Cálculo**: um novo horizonte. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

ARTUSO, Alisson Ramos; WRUBLEWSKI, Marlon. **Física 3**. 1. ed. Curitiba: Positivo, 2013.

BONJORNO, Roberto José et al**. Física. Eletromagnetismo. Física Moderna**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.

BRASIL Ministério da Educação e do Desporto Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília, DF: Ministério da Educação e do Desporto, 1997. 10 v.

CLEMENT, Luiz; TERRAZZAN, Eduardo Adolfo. Atividades didáticas de resolução de problemas e o ensino de conteúdos procedimentais. **REIEC**, Tandil, v. 6, n. 1, ene./jul. 2011. Disponível em: <http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1850-66662011000100008&lng=es&nrm=iso&tlng=pt>. Acesso em: 1 maio 2015.

CONNALLY, Eric et.al. **Funções para modelar variações, uma preparação para o cálculo**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

DANTE, Luiz Roberto**. Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2000.

______. **Matemática: contexto e aplicações 1**. São Paulo: Ática, 1999.

______. **Matemática: contexto e aplicações 2**. São Paulo: Ática, 1999.

______. **Matemática: contexto e aplicações 3**. São Paulo: Ática, 1999.

DOCA, Ricardo Helou; BOAS, Newton Villas; BISCUOLA, Gualter José. **Física 3**. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

FERRUZI, Elaine Cristina; FRANCISCO, Devanil Antônio. **Material de apoio de derivadas**. [S.l.], 2010.Disponível em: http://www.pb.utfpr.edu.br/daysebatistus/derivadas_A.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2013.

GARDNER, Howard. **Estruturas da mente**: a teoria das inteligências múltiplas. Porto Alegre: Artes Medicas, 1994.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**. 3. ed. São Paulo: Atual, 1985. 10 v.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar**. 2. ed. São Paulo: Atual, 1978-1980. v. 10.

HUGHES-HALLET, Deborah et al. **Cálculo aplicado.** 4. ed. Rio de Janeiro; LTC, 2012.

SIM (Org.). **Física 3**. 2. ed. São Paulo: SIM, 2013.

PEREZ ECHEVERRÍA, María Del Puy; POZO, Juan Ignacio. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. *In:* POZO, Juan Ignacio (Org.)**. A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 13-41.

PEREZ ECHEVERRÍA, María Del Puy. A solução de problemas em matemática. *In:* POZO, Juan Ignacio (Org.)**. A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 43-63.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POZO, Juan Ignacio; GOMEZ CRESPO, Miguel Ángel. A solução de problemasnas ciências da natureza. *In:* POZO, Juan Ignacio (Org.)**. A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 67-98.

REITZ, Maria Dorotéia de Carvalho; CONTRERAS, Humberto Silvano Herrera. Resolução de problemas matemáticos: desafio na aprendizagem. **Revista Chão da Escola**, Curitiba, n.10, out. 2012. Disponível em: <http://www.imap.curitiba.pr.gov.br/wpcontent/uploads/2014/03/Maria%20Dorot%C3%A9ia_SME.pdf>. Acesso em: 1 maio 2015.

RODRIGUES, Edson da S. **uma proposta para o ensino da noção de taxa de variação instantânea no ensino médio**. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2012.

SCHREINER, Ingo V. **Construção do conceito de função**: o pensamento variacional e a alfabetização funcional. Lajeado: UNIVATES, 2004.

SOUSA, Ariana Bezerra de. **A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática**. 2005. 12 f. Monografia (Graduação em Matemática) – Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2005.

YAMAMOTO, Kazuhito; FUKE, Luiz Felipe; SHIGEKIYO, Carlos Tadashi. **Física para o ensino médio**. 3. ed.. São Paulo: Saraiva, 2013.

APÊNDICE A - PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS

Exemplo 1.

f: R$\rightarrow$R é a função definida por f(x)=x^2.

A partir desses dados, construir:

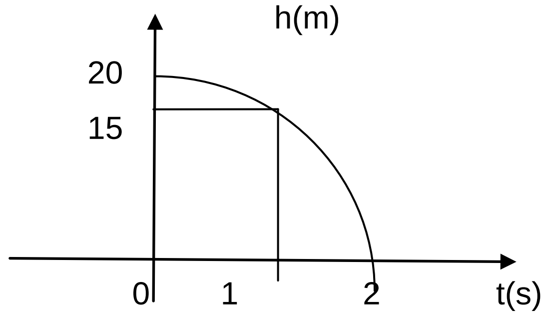
a) Uma tabela com variação de uma unidade no intervalo de [-2,3]
b) Determine a taxa de variação média saindo de x=-2 e chegando em x=3
c) Que conclusões podemos tirar sobre a taxa de variação média.
d) Construa o gráfico dessa função com a taxa de variação média do item b.

Exemplo 2.

Um automóvel ao sair de Porto Alegre passa pela placa indicando Km 20 exatamente às 14 horas percorre 30 km e chega ao município de São Leopoldo às 15 horas. Mantém seu trajeto percorrendo mais 90 km até o seu destino final o município de Canela chegando lá às 16 horas. Qual foi a velocidade média do automóvel. Construa uma tabela para melhor visualizar os dados. Quais conclusões podemos tirar sobre a taxa de variação média?

Exemplo 3.

Um corpo é solto com velocidade inicial nula e com a aceleração valendo 10m/s², conforme ilustra a figura.



A partir da observação:

a) Calcule a velocidade média de descida?
b) Construa uma tabela que evidência o comportamento da taxa de variação média em tal problema.
c) A partir da taxa de variação média apresente conclusões sobre o comportamento das unidades envolvidas no problema.

Exemplo 4.

Uma empresa paga a um de seus Funcionários um salário anual de R$ 20.000,00 por ano. Com o intuito de garantir que o funcionário permaneça na empresa, os donos prometeram a esse funcionário aumentos de 8% durante pelo menos os próximos 5 anos. A partir desses dados, determine:

a) Uma tabela do comportamento do salário do funcionário nos 5 primeiros anos.
b) Uma fórmula que represente o salário (S) em função do tempo (t) em anos.
c) Que conclusões podemos tirar a respeito da taxa de variação percentual constante?

Exemplo 5

Sabendo que o Carbono-14 radioativo decaí a uma taxa de 11,4% a cada 1.000 anos, determine a quantidade de carbono-14 remanescente, em uma amostra de 200 μg de carbono-14, após 1.000, 2.000 e 3.000 anos. Além disso, construa também um gráfico e uma fórmula que ilustre tal problema.

Exemplo 6.

Obtenha a taxa de crescimento contínuo para cada uma das seguintes funções e desenhe o gráfico de cada função:

a) $P=4e^{0,4t}$,
b) $P=4e^{0,5t}$.
c) $P=5e^{-0,4t}$

ANEXO A – PROBLEMAS DE LIVROS

Exemplo 1. (CONNALLY, Eric et.al, 2009, p.23)

Em 2006, a população de uma cidade era de 18.310 pessoas e seu crescimento era de 58 pessoas por ano. Determine:

a) Uma tabela que forneça a população da cidade a cada ano, durante um período de 10 anos a contar de 2006. Esboce o gráfico dessa População.
b) Qual é a taxa média de variação da População em qualquer intervalo de tempo?
c) Determine uma fórmula para P (população) como uma função de t (tempo).

Exemplo 2. (Chiquetto, 2000, p.28)

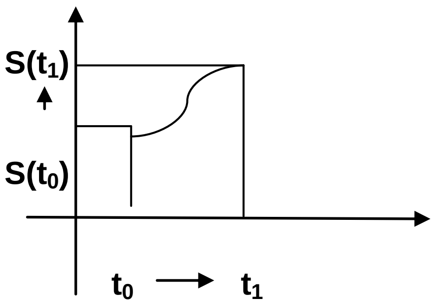
Um carrinho foi lançado de baixo para cima num plano inclinado. A tabela fornece as velocidades do carrinho em vários instantes.

v(m/s)	10	7,5	5	2,5	0	-2,5	-5
t(s)	0	1	2	3	4	5	6

a) Faça um diagrama da velocidade em função do tempo.
b) Escreva a equação horária da velocidade.
c) Qual é o valor da taxa de variação constante? O que podemos concluir acerca das suas unidades?

Exemplo 3. (Dante, 1999, p.278)

Se a variável independente é o tempo t e S é o espaço percorrido por um ponto móvel nesse tempo, temos que S é função de t e escrevemos S=S(t), que é equação horária do ponto material em movimento.



Entre os instantes t_0 e t_1, o ponto material se desloca de $S(t_0)$ até $S(t_1)$. A variação média da função S nesse trecho ou a velocidade média com que o ponto material se desloca entre t_0 e t_1 é dada por:

$$Vm = \frac{S(t_1) - S(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Observemos que, fixando x_0, a variação média da função, relativamente à variação da variável, não é constante e depende de x_1. Assim, tomando vários x_1 cada vez mais próximos de x_0 é possível (mas nem sempre) que essa variação média tenda a um determinado valor. Ocorrendo isso, no limite, quando x_1 tende a x_0, a variação média tende a um valor que será chamado de taxa de variação instantânea no ponto x_0. À taxa de variação instantânea da função no ponto x_0 chamamos derivada da função f em relação à variável x no ponto x_0 e representamos por:

$$f'(x_0)$$

Exemplo 4. (Dante,1999,p.279)

Qual é a derivada da função $f(x)=x^3$ no ponto $x_0= 2$?

Exemplo 5. (Dante,1999,p.281)

Se $f(x)=x^6$, então $f'(x)=6x^5$

Exemplo 6. (Dante, 1999,p.290)

Se $f(x)=x^2$, então $f'(x)=2x$

Exemplo 7. (Dante, 1999, p.281)

Um ponto material se move sobre uma trajetória qualquer segundo a equação horária $S(t)=t^2-2t+5$, em que S é dado em metros (m) e t é dado em segundos (s). Determine a velocidade do ponto material no instante $t_0=2s$.

Exemplo 8. (Dante, 1999, p.284)

Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função:

a) $f(x)=x^2$ no ponto $x_0=1$; b) $f(x)=x^3$ no ponto $x_0=2$.

Exemplo 9. (**Adaptado.** CONNALLY, Eric et.al, 2009, p.101)

O valor, V, de um investimento de R$ 100.000 que recebe 3% de Juros anualmente é dado por V=f(t), sendo que t está em anos. De quanto será o lucro do investimento em 3 anos? O que podemos observar sobre a taxa de variação percentual constante?

Exemplo 10. (CONNALLY, Eric et.al, 2009, p.101)

Uma xícara de café contém cerca de 100mg de cafeína; a cada hora, aproximadamente 16% da quantidade de cafeína no corpo é metabolizada e eliminada.

a) Escreva C, a quantidade de cafeína presente no corpo, em mg, como uma função do número, t, de horas desde que o café foi consumido.
b) Qual a quantidade de cafeína presente no corpo após 5 horas?

Exemplo 11. (Adpatado**.** CONNALLY, Eric et.al, 2009, p.108**)**

As tabelas abaixo contêm valores de uma função exponencial ou de uma função linear. Em cada problema:

a) Decida se a função é linear ou exponencial.
b) Determine uma fórmula possível para cada função e desenhe o gráfico.

R	1	3	7	15	31
p(r)	13	19	31	55	103

X	6	9	12	18	24
q(x)	100	110	121	146,41	177,16

Exemplo 12. (Adaptado. Dante, 1999, p.303)

Em qual situação a aplicação de R$ 4.000,00 terá maior rendimento e de quanto a mais:

- No sistema de Juros Simples, à taxa de 3% ao mês, durante 2 meses?
- No sistema de juros Compostos, à taxa de 2% ao mês, durante 3 meses?

a) Construa uma tabela identificando ambos os Juros.
b) Construa um gráfico com ambos os Juros
c) Determine uma fórmula para cada um dos Juros.
d) O que podemos identificar através das taxas envolvidas na atividade?

Exemplo 13. (CONNALLY, Eric et.al., 2009, p.109)

Um automóvel Lexus, ano 2006, custa US$ 61.055 e deprecia 46% durante os primeiros 7 anos.

a) Suponho que a depreciação seja exponencial. Determine uma fórmula para o valor do carro em um instante t.
b) Suponha, em vez disso, que a depreciação seja linear. Determine uma fórmula para o valor do carro em um instante t.

Exemplo 14. (Adaptado. Biscuola, Bôas, Doca, 2013, p.116**)**

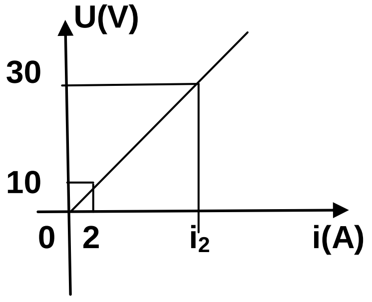
No gráfico a seguir está representada a curva característica de um resistor mantido em temperatura constante.

Analise as seguintes afirmações:

I. O resistor em questão é ôhmico.

II. A resistência elétrica é igual a 5Ω e isso significa que são necessários 5 volts para produzir nele 1 ampère de corrente.

III. A intensidade de corrente i_2 indicada no diagrama é igual a 6ª.



Quais afirmações são corretas? Qual a influência das taxas num resistor ôhmico?

Exemplo 15. (Dante, 1999, p.1997)

Vamos considerar a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ com n $\in$ {1,2,3,4,...}:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, ..., \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}, ..., \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}, ..., \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, ...$$

2,000 2,250 2,370 2,594 2,705

Quando n aumenta indefinidamente, a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tende ao

número

Irracional e=2 ,7182818284...

Uma função exponenical muito importante em matemática é aquele cuja base é e:

$f(x)= e^x$

Exemplo 16. (CONNALLY, Eric et.al, 2009, p. 117)

Qualquer base positiva b pode ser escrita como uma potência de e:

$$b=e^k$$

Se $b>1$, então k é positivo; se $0<b<1$, então k é negativo. A função $Q=ab^t$ pode ser reescrita em termos de e:

$Q= ab^t =a(e^k)^t=ae^{kt}$.

A constante K é denominada taxa de crescimento contínuo. Em geral:

Para a função exponencial $Q= ab^t$, a taxa de crescimento contínuo, k, é obtida resolvendo $e^k=b$.

Logo

$Q= ae^{kt}$.

Se a for positivo,

- Se $k>0$, então Q é crescente.
- Se $k<0$, então Q é decrescente.

Exemplo 17. (CONNALLY, Eric et.al., 2009, p.120)

Uma substância radioativa decai a uma taxa contínua de 14% ao ano, e 50 mg desta substância está presente no ano 2000.

a) Escreva uma fórmula para a quantidade presente, A (em mg), t anos após 2000.

b) Que quantidade desta substância estará presente no ano 2010?

c) Estime quando a quantidade cai abaixo de 5 mg.

ANEXO B - DEFINIÇÃO

(Dante, 1999, p.289)

Derivada da Função potência com expoente natural:

f(x)=x^n, n$\in$N.

Consideramos a função f:R$\rightarrow$R definida por f(x)= x^n, n$\in$N. A derivada de f é dada por:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

Usando o desenvolvimento do binômio de Newton, temos:

$$(x+h)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}hx^{n-1}+\binom{n}{2}h^2x^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}h^{n-1}x+\binom{n}{n}h^n=$$

$$=x^n+nhx^{n-1}+\binom{n}{2}h^2x^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}h^{n-1}x+h^n$$

Logo:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{[x^n+nhx^{n-1}+\binom{n}{2}h^2x^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}h^{n-1}x+h^n]-x^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}[nx^{n-1}+\binom{n}{2}hx^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}h^{n-2}x+h^{n-1}]=nx^{n-1}$$

ANEXO C – TESTES INICIAIS E FINAIS

Exemplo 1

FUNDAÇÃO ESCOLA TÉCNICA LIBERATO SALZANO VIEIRA DA CUNHA

NOME: **DATA:**
TURMA: **PROFESSOR:**

TESTE INICIAL (Taxa de Variação Constante)

(Adaptado. Dante, 1999, p.53)

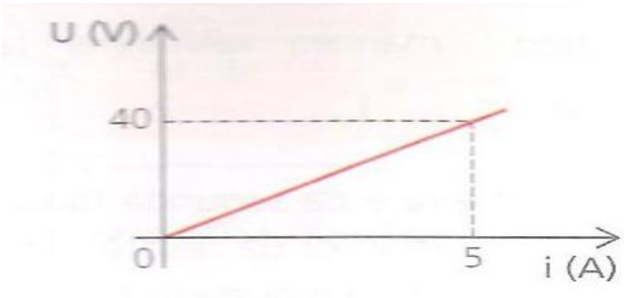
1. Uma máquina fabrica 2m de corda por minuto. A tabela descreve a produção dessa máquina em função do tempo.

Tempo (min)	Produção(m)
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

a) Determine a taxa de variação da Produção em função do tempo.
b) Qual a influência dessa taxa na variável dependente?
c) Qual informação podemos obter a partir da análise das unidades dessa constante?

(Adaptado. Yamamoto e Fuke, 2013, p.117)

2. A curva característica de um resistor ôhmico está representada no diagrama. Determine:



a) A resistência elétrica do resistor;

b) Essa resistência é a taxa de variação constante? Justifique.

c) Qual informação obtemos analisando a unidade dessa constante?

(CONNALLY, Eric et.al, 2009, p.27)

3. Temos US$24 para gastar em refrigerantes e batatas fritas para uma festa. Uma embalagem com seis garrafas de refrigerante custa US$3 e um saco de batatas fritas custa US$2. O número de embalagens de seis garrafas que podemos comprar,y, é uma função do número, x, de sacos de batatas fritas que decidimos comprar.

a) Determine uma equação relacionando x e y.

b) Desenhe o gráfico da equação. Interprete as intersecções e a inclinação, no contexto da festa.

Exemplo 2

FUNDAÇÃO ESCOLA TÉCNICA LIBERATO SALZANO VIEIRA DA CUNHA

NOME: **DATA:**
TURMA: **PROFESSOR:**

TESTE FINAL (Taxa de Variação Constante)

(CONNALLY, Eric et.al, 2009, p.20)

1. A antiga República da Iugoslávia exportou para os EUA, entre 1985 e 1989, carros denominados Yugos. O carro é agora item de colecionador. A tabela 1 mostra a quantidade de Yugos vendidos, Q, e o preço, p, para cada ano desde 1985 até 1988.

a) Usando a Tabela 1, explique por que Q poderia ser uma função linear de p.
b) O que a taxa de variação desta função indica a respeito dos yugos?

Tabela 1 Preço e vendas de Yugos nos EUA.

Ano	Preço em US$, p	Número vendido, Q
1985	**3990**	**49.000**
1986	**4110**	**43.000**
1987	**4200**	**38.500**
1988	**4330**	**32.000**

(Bonjorno, Roberto José et al , 2013, p.95)

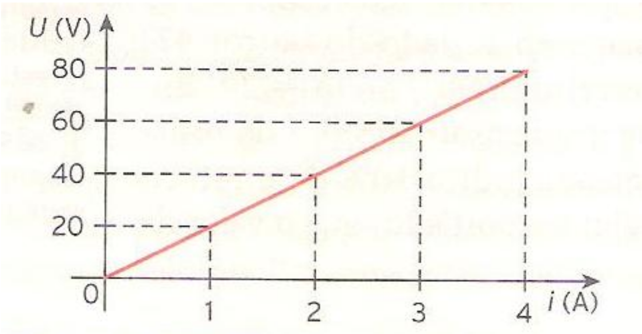
2. A partir de um experimento, um grupo de alunos registrou os valores da corrente (i) para as correspondentes ddp (V) nos terminais de uma lâmpada, obtendo a tabela:

Corrente (i) e Diferença de Potencial (V)	Medida 1	Medida 2	Medida 3	Medida 4
i(A)	**1,0**	**2,0**	**3,0**	**4,0**
V(V)	**10**	**20**	**30**	**40**

a) Construa o gráfico Vxi num sistema cartesiano.
b) O resistor da lâmpada é ôhmico? Explique.

(Organizadora Edições Sim, 2013, p.60)

3. Um resistor apresenta esta curva característica.



a) Calcule sua resistência elétrica para U=60 V.
b) Identifique se ele é ou não um resistor ôhmico e justifique sua resposta.
c) Calcule a intensidade da corrente elétrica que circulará por ele quando submetido a uma ddp de 120 V.

Exemplo 3

FUNDAÇÃO ESCOLA TÉCNICA LIBERATO SALZANO VIEIRA DA CUNHA

NOME: **DATA:**
TURMA: **PROFESSOR:**

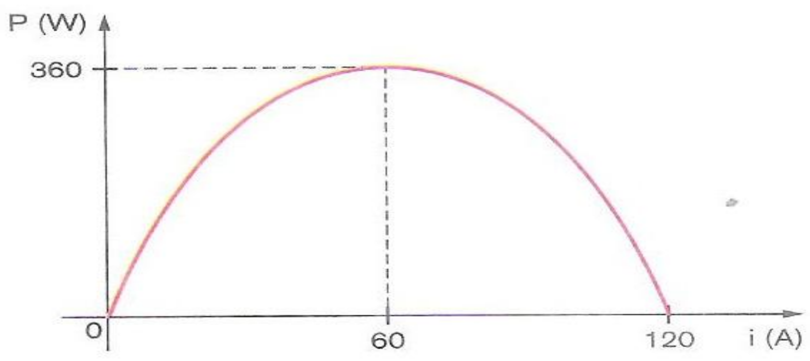
TESTE INICIAL (Taxa de Variação Média e Instantânea)

(CONNALLY, Eric et.al, 2009, p.84)

1. Determine a concavidade do gráfico de f(x)=4-x² entre x=-1 e x=5, calculando as taxas médias de variação em intervalos de comprimento 2.

(Bonjorno, Roberto José et al, 2013, p.127)

2. (UFJF-MG) Uma bateria de automóvel tem uma força eletromotriz $\varepsilon = 12V$ e resistência interna r desconhecida. Essa bateria é necessária para garantir o funcionamento de vários componentes elétricos embarcados no automóvel. Na figura a seguir, é mostrado o gráfico da potência útil P em função da corrente i para essa bateria, quando ligada a um circuito elétrico externo.



a) Determine a corrente de curto-circuito da bateria e a corrente na condição de potência útil máxima. Justifique a sua resposta
b) Calcule a resistência interna r da bateria.

c) Calcule a resistência R do circuito externo nas condições de potência máxima.

d) Determine a taxa de variação média de da corrente entre 0 e 60 e entre 60 e 120, indicando as unidades. Faça uma interpretação das unidades envolvidas.

(Ferruzi e Francisco, 2010, p.15)

3. Um móvel se desloca numa trajetória de equação $S = 5t^2$, S em metros e t em segundos, determine a velocidade e a aceleração instantânea do móvel para t = 3 s.

Exemplo 4.

FUNDAÇÃO ESCOLA TÉCNICA LIBERATO SALZANO VIEIRA DA CUNHA

NOME: **DATA:**
TURMA: **PROFESSOR:**

TESTE FINAL (Taxa de Variação Média e Instantânea)

(HUGHES-HALLET, Deborah et al., p.82)

1. A tabela a seguir fornece o percentual da população dos Estados Unidos morando em áreas urbanas em função do ano.

Ano	1800	1830	1860	1890	1920
Percentual	**6,0**	**9,0**	**19,8**	**35,1**	**51,2**
Ano	**1950**	**1980**	**1990**	**2000**	
Percentual	**64,0**	**73,7**	**75,2**	**79,0**	

a) Determine a taxa de variação média do percentual da população que mora em áreas urbanas entre 1890 e 1990.
b) Estime a taxa percentual de crescimento no ano 1990.
c) Estime a taxa de variação desta função em 1830 e explique o que isso significa.

(Ferruzi e Francisco, 2010, p.15)

2. A voltagem de um certo circuito elétrico é de 100 volts. Se a corrente (em ampères) é I e a resistência (em ohms) é r, então, pela lei de Ohms, $I = \frac{100}{R}$. Se R está aumentando, ache a taxa instantânea de variação de I em relação a R em:

a) qualquer resistência R.

b)uma resistência de 20 ohms.

(Adaptado. Dante, 1999, p.288)

3.Seja $V(t)= t^2-4t+4$, a velocidade de um objeto em metros por segundo.

a) Qual a velocidade inicial do objeto?

b) Quando é que o objeto está em repouso?

c) Identifique a concavidade do gráfico da velocidade.

d) Encontre a aceleração no instante $t=2s$.

Exemplo 5

FUNDAÇÃO ESCOLA TÉCNICA LIBERATO SALZANO VIEIRA DA CUNHA

NOME: **DATA:**
TURMA: **PROFESSOR:**

TESTE INICIAL

(Taxa de Variação Percentual Constante, Taxa de Variação Contínua e Comparação entre taxas)

(CONNALLY, Eric et.al, 2009, p.108)

1. A tabela 1 informa o número aproximado de assinantes, A, de telefones celulares, no mundo inteiro.

Ano	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Assinantes (milhões)	91	138	210	320	485	738

a) Explique como é possível saber que uma função exponencial se ajusta aos dados. Determine uma fórmula para A em termos de número de anos, t, após 1995

b) Interprete a taxa de crescimento em termos do número de assinantes de telefone celulares.

c) Em 2004, havia 1.340 milhões de assinantes. Isto se ajusta ao padrão.

(CONNALLY, Eric et.al, 2009, p.107)

2. As tabelas do problema 2 contêm valores de uma função exponencial ou de uma função linear. Em cada problema:

a) Decida se a função é linear ou exponencial

b) Determine uma fórmula possível para cada função e desenhe o seu gráfico.

X	f(x)
0	12,5
1	13,75
2	15,125
3	16,638
4	18,301

X	f(x)
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8

(CONNALLY, Eric et.al, 2009, p.119)

3. Quanto tempo levará para que um investimento t duplique seu valor, se ele cresce de acordo com a fórmula V=537 $e^{0,015t}$? Suponha t em anos.

Exemplo 6.

FUNDAÇÃO ESCOLA TÉCNICA LIBERATO SALZANO VIEIRA DA CUNHA

NOME: **DATA:**
TURMA:

PROFESSOR:

TESTE FINAL

(Taxa de Variação Percentual Constante, Taxa de Variação Contínua e Comparação entre taxas)

(CONNALLY, Eric et.al, 2009, p.101)

1) Você deve US$ 2.000 ao cartão de crédito. O cartão cobra 1,5% de juros ao mês sobre o saldo devedor e exige um pagamento mínimo mensal de 2,5 % deste saldo devedor. Todas as transações (pagamento e juros) são debitadas no final do mês. Você paga apenas o mínimo e não sofre nenhum débito adicional.

a) Complete a tabela 1 para um período de 12 meses.
b) Qual o seu saldo devedor após um ano? Naquela ocasião, quanto do seu débito você saldou? Quanto você pagou de juros aos seus credores?

Mês	Saldo (US$)	Juros (US$)	Pagamento Mínimo (US$)
0	2.000	30,00	50,00
1	1.980	29,70	49,50
2	1.960,20		
...	...		

(CONNALLY, Eric et.al, 2009, p.107)

2. As tabelas do problema 2 contêm valores de uma função exponencial ou de uma função linear. Em cada problema:

a) Decida se a função é linear ou exponencial

b) Determine uma fórmula possível para cada função e desenhe o seu gráfico.

X	f(x)
0	14
1	12,6
2	11,34
3	10,206
4	9,185

X	f(x)
0	18
1	14
2	10
3	6
4	2

(CONNALLY, Eric et.al, 2009, p.120)

3) Uma substância radioativa decai a uma taxa contínua de 14% ao ano, e 50 mg desta substância está presente no ano 2000.

a) Escreva uma fórmula para a quantidade presente, A (em mg), t anos após 2000.

b) Que quantidade desta substância estará presente no ano 2010.

c) Estime quando a quantidade caí abaixo de 5mg.

ANEXO D - SEQUÊNCIA DIDÁTICA

1.TAXA DE VARIAÇÃO CONSTANTE NA FUNÇÃO AFIM.

Aplicar os problemas introdutórios do assunto explicando a importância de o aluno conhecer, calcular e aplicar a taxa de Variação Constante.

Enfatizar ao aluno o fato de está taxa de variação ser sempre constante para quaisquer intervalos tomados. $\frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} = k$, como $\frac{p_3 - p_2}{t_3 - t_2} = k$ e $\frac{p_3 - p_1}{t_3 - t_1} = k$ (onde *k* é uma constante). Ou seja, que indiferente dos valores serem subseqüentes ou não, a taxa de variação se manterá constante.

Problemas de Introdução sobre Taxa de Variação Constante.

Com esses problemas o Professor poderá reforçar a definição de taxa de variação constante, bem como aplicar as definições das mesmas para diferentes intervalos.

Exemplo 1.

1. Em 2006, a população de uma cidade era de 18.310 pessoas e seu crescimento era de 58 pessoas por ano. Determine:

a) Uma tabela que forneça a população da cidade a cada ano, durante um período de 10 anos a contar de 2006. Esboce o gráfico dessa População.

b) Qual é a taxa média de variação da População em qualquer intervalo de tempo?

c) Determine uma fórmula para P (população) como uma função de t (tempo).

Exemplo 2.

Um carrinho foi lançado de baixo para cima num plano inclinado. A tabela fornece as velocidades do carrinho em vários instantes.

v(m/s)	10	7,5	5	2,5	0	-2,5	-5
t(s)	0	1	2	3	4	5	6

a) Faça um diagrama da velocidade em função do tempo.
b) Escreva a equação horária da velocidade.
c) Qual é o valor da taxa de variação constante? O que podemos concluir acerca das suas unidades?

Lista de Exercícios sobre Taxa de Variação Constante em Função Afim.

Atividade 1

A população de uma cidade de 30.000 habitantes cresce a uma taxa de 2.000 pessoas a cada ano. Como a população, P, está crescendo a uma taxa constante de 2.000 pessoas por ano, P é uma função linear do tempo, t, em anos.

a) Qual a taxa média de variação de P em qualquer intervalo de tempo?
b) Faça uma tabela que forneça a população da cidade a cada cinco anos, durante um período de 20 anos. Esboce o gráfico da população.
c) Determine uma fórmula para P como uma função de t.

Com esse problema o professor poderá apresentar a taxa de variação constante, enfatizando junto aos alunos que essa constante pode trazer informações sobre o comportamento da variável dependente, como por exemplo: o comportamento da diferença de Potencial em função da corrente, o comportamento da velocidade em função do tempo.

Atividade 2

Uma laranja é lançada para o ar. Sua velocidade, v, é uma função de t, o tempo a partir do seu lançamento. Uma velocidade positiva indica que a laranja está subindo e uma velocidade negativa indica que ela está descendo. Verifique se os dados na Tabela 1 correspondem a uma função linear. Determine uma fórmula para v em termos de t. Assumindo que V e função Linear de t.

Tabela 1. Velocidade de uma laranja, t segundos após ter sido lançada ao ar

t, tempo (s)	1	2	3	4
v, velocidade (m/s)	12	4	-4	-12

O que nos indica a taxa de variação constante nesse problema? O que podemos afirmar com relação ao comportamento das unidades?

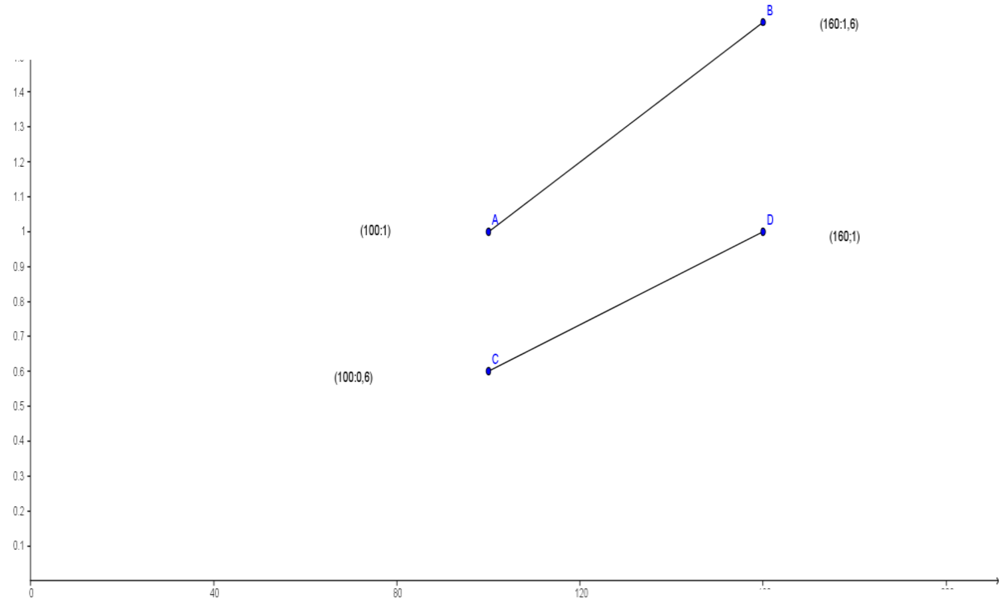
Nessa atividade o professor pode desenvolver junto aos alunos questões relativas à verificação de qual é o valor da taxa de variação constante, se esse valor é positivo, ou negativo. Caso fosse negativo qual seria o seu efeito na variável dependente da função, assim como qual seria o seu efeito no gráfico.

Atividade 3

A figura 1 mostra o consumo de oxigênio como uma função da freqüência dos batimentos cardíacos para duas pessoas.

a) Supondo linearidade, determine fórmulas para estas duas funções.
b) Interprete a inclinação de cada gráfico, em termos do consumo de oxigênio.

Y, consumo de oxigênio

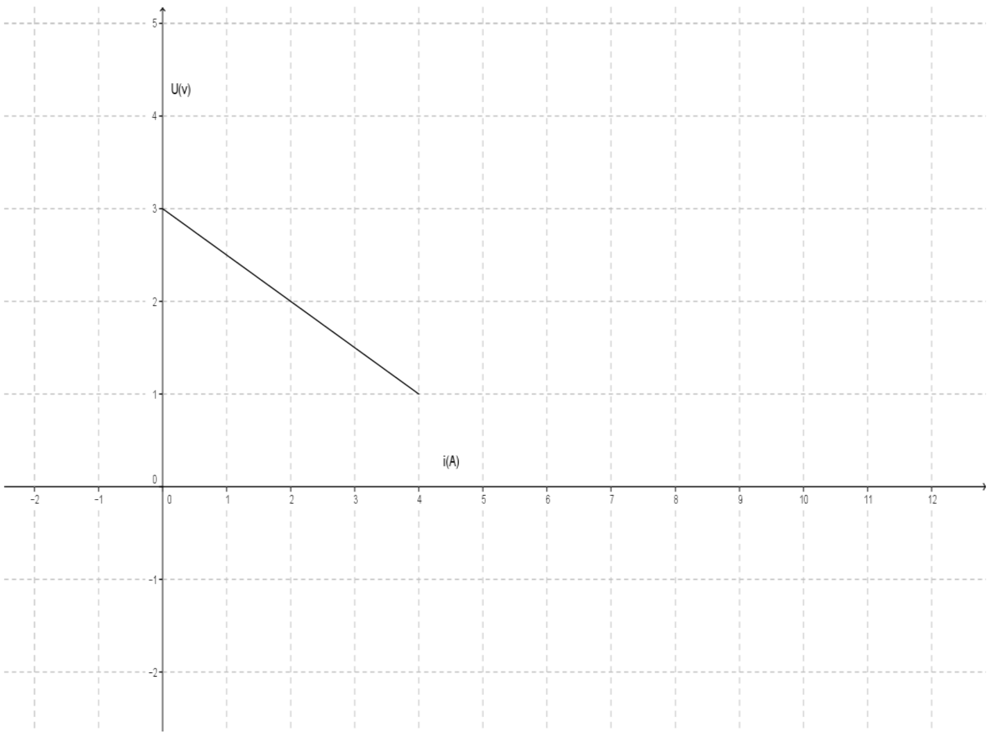


X, freqüência cardíaca

Através desse problema pode-se trabalhar a taxa de variação com o uso do gráfico, assim como interpretar as respostas evidenciando a relação com o problema. Além disso, é possível fazer uma análise dimensional (análise das unidades) do problema, afim de que o aluno perceba que a unidade da constante obtida estava em consonância com os dados envolvidos no problema; assim o aluno será capaz de apropriar-se desses dados para obter uma melhor compreensão sobre o problema.

Atividade 4

Este gráfico representa a diferença de potencial numa bateria em função da corrente que a atravessa. Determine sua força eletromotriz e sua resistência interna.



A taxa de variação nesse exercício nos indica o quê, em relação à diferença de Potencial? Que informação podemos tirar ao analisarmos as unidades obtidas na constante, que referência tais unidades nos explicam sobre os dados do problema?

Essa atividade apresentava uma contextualização do exercício que pode ser utilizado pelos alunos tanto em matemática, como em Física. Assim, o aluno poderá visualizar uma situação prática do uso das taxas de variação constante.

Atividade 5

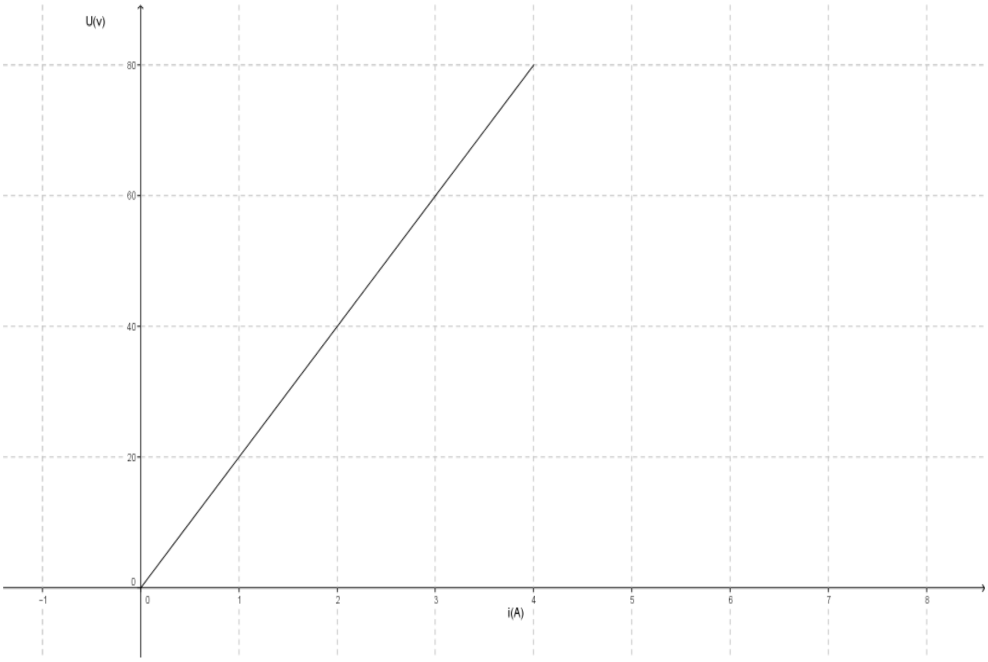
Usando sistema de Juros simples, uma pessoa aplicou R$ 2000,00, à taxa de 3% ao mês, durante 4 meses. No final do período fez uma retirada de R$ 1000,00 e aplicou o restante a 2,5% ao mês, durante 3 meses. Qual é o montante ao final de 7 meses?

Quais informações podem tirar da taxa de variação constante em ambos os casos?

O objetivo deste exercício é o de construir uma relação com o Montante envolvendo duas taxas de variação. A partir disso será possível verificar o efeito que cada uma produz no Capital inicial, bem como estudar a evolução do comportamento desse capital ao longo do tempo. Além disso, será possível estabelecer um quadro comparativo entre ambas as taxas envolvidas no problema (3%a.m. e 2.5% a.m.), de modo que, o aluno possa buscar explicações para o comportamento de ambos os Juros em função das taxas de variação constantes.

Atividade 6

Um resistor apresenta esta curva característica.



a) Calcule a sua resistência elétrica para U= 60 V.

b) Identifique se ele é ou não um resistor ôhmico e Justifique sua resposta.

c) Calcule a intensidade da corrente elétrica que circulará por ele quando submetido a uma d.d.p. de 120 V.

Durante a aplicação dos exercícios evidenciou-se a importância das aplicações contextuais. Assim, o professor podia aproximar os problemas de matemática que envolviam taxa de variação constante, das atividades aplicadas em outros campos do conhecimento

.

2 TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA

No estudo da função quadrática será explorada a taxa de variação média, bem como um estudo acerca do comportamento da mesma. Para tal estudo o professor poderá trabalhar atividades que possam ilustrar com exemplos contextualizados tais situações.

Cabe aqui o professor utilizar a definição de taxa Média de Variação

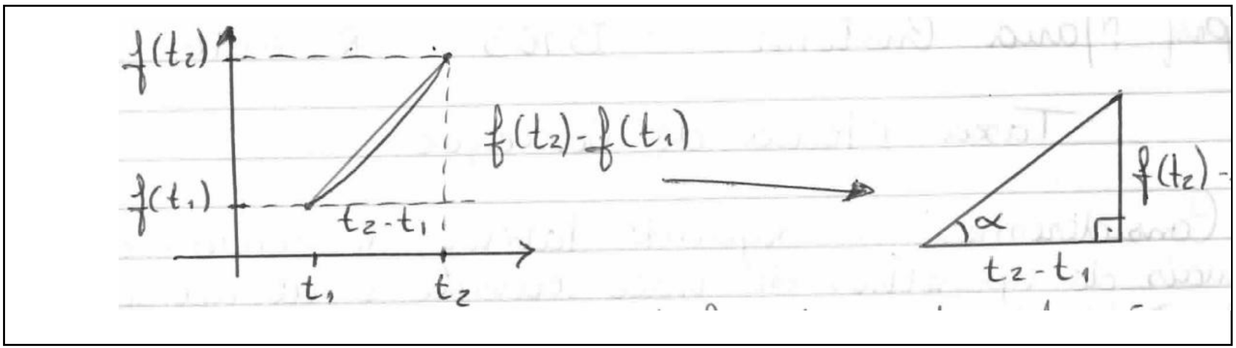


Figura 1: Definição da Taxa

A declividade da reta é a taxa Média tgα

Se tivermos y=*f(x)*, calculamos a taxa média de variação de y (variação média de y por unidade de x) ,quando x (no intervalo de [x_1, x_2]) tem um incremento de x_1 para x_2 através de:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Cabe ao professor ressaltar com o aluno que na taxa de Variação Constante da Função Afim o valor é sempre constante, enquanto que na taxa média esse valor poderá variar.

Problemas de Introdução do Conteúdo.

Após a definição, o professor poderá utilizar os problemas de introdução do conteúdo para reforçar as diferenças e similaridades entre as taxas de variação constante e a taxa de variação média, bem como construir ambas as definições.

Exemplo 1.

f: $R \rightarrow R$ é a função definida por $f(x)=x^2$.

A partir desses dados, construir:

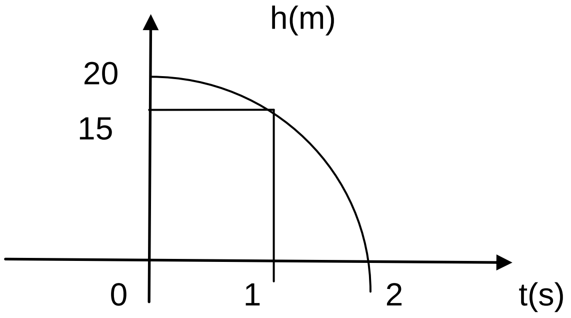
a) Uma tabela com variação de uma unidade no intervalo de [-2,3]
b) Determine a taxa de variação média saindo de x=-2 e chegando em x=3
c) Que conclusões podemos tirar sobre a taxa de variação média.
d) Construa o gráfico dessa função com a taxa de variação média do item b.

Exemplo 2.

Um automóvel ao sair de Porto Alegre passa pela placa indicando Km 20 exatamente às 14 horas percorre 30 km e chega ao município de São Leopoldo às 15 horas. Mantém seu trajeto percorrendo mais 90 km até o seu destino final o município de Canela chegando lá às 16 horas. Qual foi a velocidade média do automóvel. Construa uma tabela para melhor visualizar os dados. Quais conclusões podemos tirar sobre a taxa de variação média

Exemplo 3.

Um corpo é solto com velocidade inicial nula e com a aceleração valendo $10m/s^2$, conforme ilustra a figura.



A partir da observação:

a) Calcule a velocidade média de descida?
b) Construa uma tabela que evidência o comportamento da taxa de variação média em tal problema.
c) A partir da taxa de variação média apresente conclusões sobre o comportamento das unidades envolvidas no problema.

Lista de problemas para o aluno.

Atividade 1

Se $f(x)=x^2$.Determine a taxa média de variação de f sobre intervalos de comprimento 2, entre x=-4 e x=4. O que estas taxas querem dizer, a respeito da concavidade do gráfico de f(x)?

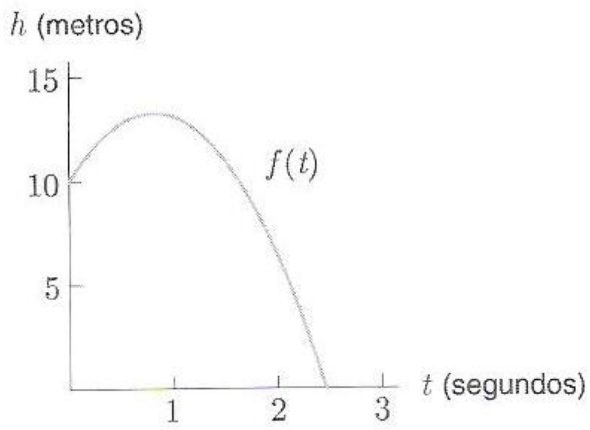
Através dessa atividade gostaríamos que os alunos verificassem o valor da taxa média de variação. Assim como fossem capazes de interpretar a relação entre a taxa média de variação e a concavidade da parábola.

Atividade 2

Um mergulhador salta de um trampolim a 10 metros de altura. Para h em metros e t em segundos após a largada do trampolim, sua altura acima da água está ilustrada na figura 2 e é dada por

$$h=f(t)= -4,9t^2+8t +10.$$

a) Determine e interprete o domínio e a imagem da função e as interseções do gráfico.
b) Identifique a concavidade.



Altura de um mergulhador como uma função do tempo

Sobre os intervalos de comprimento 1, entre t=0 e t=2, o que as taxas de variação querem dizer? Que informações obtemos analisando as unidades envolvidas nessas taxas?

Com esse problema podemos estabelecer uma relação com o problema anterior, pois, desta forma, verificamos a taxa média de variação e a sua relação com a concavidade da parábola. Além disso, podemos realizar uma analise dimensional do problema

Atividade. 3

O percentual de escolas que possuíam leitores de videoteca interativos, entre 1992 e 1996, é apresentado na tabela 2. Se x é dado em anos desde 1992, mostre que estes dados podem ser aproximados pela função quadrática $p(x)= -0{,}8x^2+8{,}8x+7{,}2$. O que este modelo prevê para o ano de 2004? Quão apropriado é este modelo para fazer previsões futuras?

Tabela 2

Ano	1992	1993	1994	1995	1996
Percentagem	8	14	21	29,1	29,3

Essa taxa de variação não é constante se ela fosse deveria ser qual função?

Atividade aplicada de função quadrática envolvendo tabelas. O que se pretende com tal problema é verificar o comportamento das taxas médias com o uso de tabelas.

Atividade 4.

Um jogador de beisebol “rebate” uma bola verticalmente para cima. A altura da bola acima do solo é dada pela função $y=f(t)= -16t^2+64t+3$, onde t é o tempo em segundos, após a bola ser rebatida, e y está em metros. Assim, pergunta-se:

a) Qual será altura máxima da bola?
b) A concavidade da parábola é para cima ou para baixo?
c) Calcule a taxa média de variação ente t=3s t=5s, em intervalos de tempo de 0,5 em 0,5s..
d) Construa o gráfico dessa função.

Exercício de função quadrática aplicado ao estudo de altura em função do tempo. Demonstrar aos alunos um exercício com taxa média de variação negativa.

Atividade 5.

A potência elétrica lançada por um gerador é expressa por: $P=12.i-2.i^2$ unidades de medida do S.I. Calcule:

a) a potência máxima que o gerador elétrico pode disponibilizar;
b) a intensidade da corrente de curto-circuito do gerador;
c) a intensidade da corrente no gerador quando estiver produzindo 10 W de potência.
d) usando um intervalo de comprimento de 1 unidade análise o intervalo de i=0 até i=6, que informações podemos obter da taxa de variação média.

O exercício enfatiza uma situação problema de aplicabilidade em Física. Trata-se de uma aproximação do aprendizado de sala de aula com a prática do curso de técnico em eletrônica.

3.TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA EM FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Ao contrário da taxa média de variação que buscava valores médios em intervalos como no exemplo número 1 da atividade anterior, a taxa de variação instantânea busca valores em um determinado instante. Nesse caso, seria possível verificar, por exemplo: a velocidade de um móvel no instante 3s, ou a população de uma determinada espécie em um tempo t qualquer. Para essa atividade o professor pode introduzir o conteúdo conversando com os alunos sobre das retas secantes e tangentes, bem como a importância das mesmas em taxas de variação média e instantânea.

Através do traçado das tangentes a f(t), pode-se alcançar o conceito de derivada instantânea. Além disso, usamos as informações da taxa média de variação para encontrarmos uma representação para taxa de variação instantânea.

A fim de tornar a atividade mais fácil para o aprendizado dos alunos sugerimos que o professor apresente aos alunos a derivada da função potência, uma vez que essa ferramenta será bastante utilizada pelos alunos.

Problemas de introdução do conteúdo.

Aqui nesses problemas, o professor poderá trabalhar a derivada da função Potência, que servirá bastante para os alunos solucionarem os problemas.

Exemplo 1. (Dante,1999,p.279)

Qual é a derivada da função $f(x)=x^3$ no ponto $x_0= 2$?

Exemplo 2. (Dante,1999,p.281)

Se $f(x)=x^6$, então $f'(x)=6x^5$

Exemplo 3. (Dante, 1999,p.290)

Se $f(x)=x^2$, então $f'(x)=2x$

Exemplo 4. (Dante, 1999, p.281)

Um ponto material se move sobre uma trajetória qualquer segundo a equação horária $S(t)=t^2-2t+5$, em que S é dado em metros (m) e t é dado em segundos (s). Determine a velocidade do ponto material no instante $t_0=2s$.

Exemplo 5. (Dante, 1999, p.284)

Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função:

b) $f(x)=x^2$ no ponto $x_0=1$; b) $f(x)=x^3$ no ponto $x_0=2$.

Lista para os alunos

Atividade 1

Obtenha a taxa de variação de $f(x)=4x^2$ no ponto $x=3$. Como você interpreta o valor obtido?

Com esse problema será trabalhada a taxa de variação instantânea, bem como faremos a sua relação com a reta tangente, e estabeleceremos uma análise dimensional do problema.

Atividade 2

Um ponto material se move com movimento uniformemente variado. A função horária do espaço é $S=10+t+1,2t^2$. Encontre a taxa de variação instantânea no t=4s e t=6s. Com você interpreta os valores obtidos?

Nesse caso, o aluno poderá estabelecer uma relação da taxa de variação instantânea com a velocidade, e posteriormente da velocidade com aceleração.

Atividade 3

A quantidade de água em um tanque t minutos após ele começar a ser esvaziado é dado por $W=100(t-15)^2$ litros.

a) Com que taxa a água está fluindo no final de 5 minutos?
b) Qual é a taxa média segundo a qual a água flui durante os 5 primeiros minutos?

Trabalhamos nesse tópico a taxa instantânea e média. Além disso, pode ser feito um estudo sobre as informações da variável dependente da função com relação a cada taxa de variação.

Atividade 4.

A resistência elétrica R de certo fio é dada por $R=k/r^2$, onde k é uma constante e r o raio do fio. Supondo que o raio tenha um erro possível de $\pm 5\%$, use diferencial para estimar o erro percentual em R(supondo k exato).

Problema de aplicação de taxa de variação instantânea envolvendo situação contextual. Assim, o aluno visualizaria uma aplicação da taxa de variação instantânea.

4.TAXA DE VARIAÇÃO PERCENTUAL CONSTANTE EM FUNÇÃO EXPONENCIAL.

Para a compreensão dessa taxa serão apresentados problemas que envolvem tabelas, gráficos e fórmulas. Além disso, serão trabalhadas atividades que envolvam exercícios contextualizados.

Os problemas foram desenvolvidos de tal forma que os alunos pudessem aprender a identificar uma taxa percentual constante, assim como efetuar uma análise dimensional do problema, e a partir de tal análise obter informações sobre a constante obtida e sua influência na variável dependente.

Cabe ao professor introduzir a definição de taxa de Variação Percentual constante e sua relação com a Função exponencial, que pode assim ser definida:

- A razão entre os valores consecutivos da variável dependente são sempre constantes.

Uma função Exponencial $Q=f(t)$, tem a fórmula $f(t)=a.b^t$, onde a é o valor inicial Q (t=0) e a base b é o fator de crescimento.

$b>1$, indica crescimento exponencial.

$0<b<1$, indica decaimento exponencial.

b=1+r,

r é a representação decimal da taxa percentual de variação.

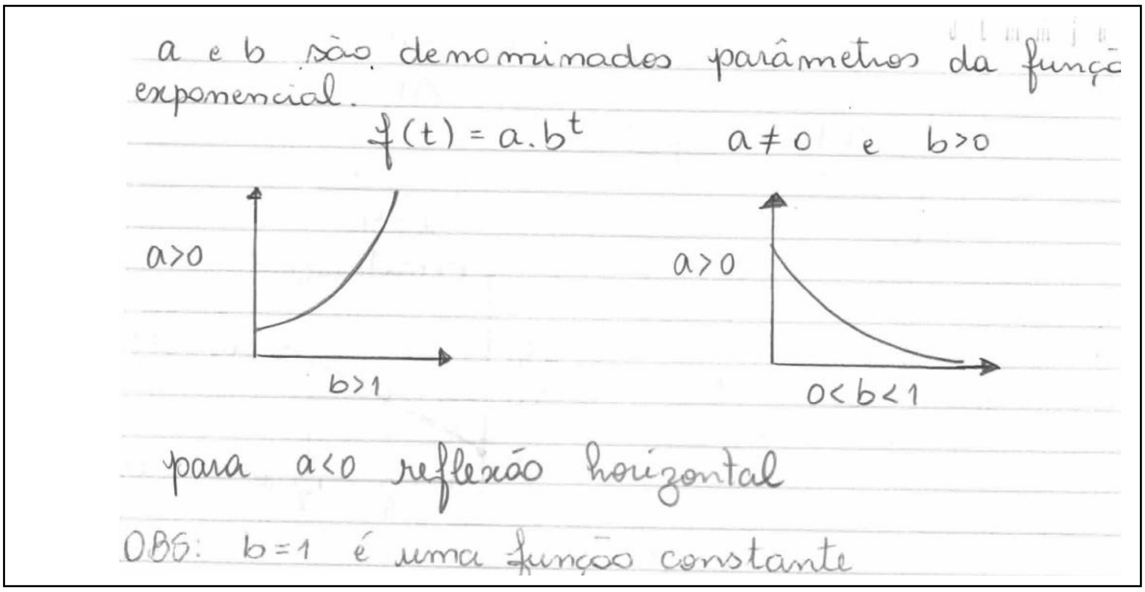


Figura 2: Gráficos da Função Exponencial

Problemas de Introdução do conteúdo

Com esses problemas o professor poderá apresentar aos alunos a taxa de variação percentual constante, assim como trabalhar com eles diferentes situações de aplicação desta taxa.

Exemplo 1. (Dante, 1999, p.284)

Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função:

c) $f(x)=x^2$ no ponto $x_0=1$; b) $f(x)=x^3$ no ponto $x_0=2$.

Exemplo 2. (**Adaptado.** CONNALLY, Eric et.al, 2009, p.101)

O valor, V, de um investimento de R$ 100.000 que recebe 3% de Juros anualmente é dado por V=f(t), sendo que t está em anos. De quanto será o lucro do investimento em 3 anos? O que podemos observar sobre a taxa de variação percentual constante?

Exemplo 3. (CONNALLY, Eric et.al, 2009, p.101)

Uma xícara de café contém cerca de 100mg de cafeína; a cada hora, aproximadamente 16% da quantidade de cafeína no corpo é metabolizada e eliminada.

a) Escreva C, a quantidade de cafeína presente no corpo, em mg, como uma função do número, t, de horas desde que o café foi consumido.
b) Qual a quantidade de cafeína presente no corpo após 5 horas?

Lista para os alunos.

Atividade 1

Após graduar-se na faculdade, você irá, provavelmente, procurar um trabalho. Suponha que você receba uma oferta de trabalho com um salário Inicial de R$ 40.000 por ano Para reforçar a oferta, a empresa promete aumentos anuais de 6% durante pelos menos os primeiros cinco anos.

a) Monte uma tabela dos cinco primeiros anos $t_0= 0$ até $t_4= 4$. Análise as informações, verifique se é possível encontrar alguma taxa constante? Que taxa é essa?
b) Monte um gráfico a partir da tabela. Faça uma análise dimensional do problema.
c) Que informação podemos obter coma taxa percentual constante.

Esse problema traz a noção de taxa percentual constante, bem como mostra a diferença da mesma em relação à taxa de variação constante. Além disso, o aluno pode montar o Gráfico e será capaz de perceber que não teríamos uma reta, mas sim uma curva.

Atividade 2

A partir de 2000, a população do México cresceu a uma taxa percentual constante de 2 % ao ano. (Em 2000, a população do México era de 100 milhões)

a) Monte um tabela para os 5 primeiros anos de $t_0=0$ até $t_4=4$ e a partir dela determine a taxa percentual constante.
b) Encontre uma fórmula para essa questão e faça uma análise dimensional do problema.
c) Qual será a população do México em 2020?

Nessa tarefa trabalhamos a questão da composição de uma fórmula geral para a família das funções exponenciais.

Atividade 3

Em 2005, o número de pessoas infectadas por um certo vírus era P_0. Em virtude de uma nova vacina, o número de pessoas infectadas decresceu 20 % a cada ano, desde 2005. Em outras palavras, a cada ano foram infectadas apenas 80% do número de pessoas no ano anterior. Determine a fórmula para P=f(n), o número de pessoas infectadas em “n” anos após 2005. Desenhe o gráfico de f(n). Faça uma análise dimensional do problema, interpretando as informações contidas nas taxas de variação

Nesse caso temos um exercício sobre taxa de decrescimento percentual constante, bem como podemos observar um gráfico com taxa percentual de decaimento. Com isso, buscamos evidenciar a influência da taxa percentual constante na variável dependente, quando ocorre uma função decrescente.

Atividade 4

O capacitor é o componente de um circuito elétrico que pode armazenar carga elétrica. A quantidade de carga armazenada decaí exponencialmente com o tempo. Se o circuito permitir Amplificadores estereofônicos constituem um exemplo familiar: Quando um amplificador é desligado, as luzes do painel enfraquecem lentamente porque leva algum tempo para os capacitores descarregarem. Se t é o número de segundos após o circuito ter sido desligado, suponha que a quantidade de carga armazenada (em microcoulombs) seja dada por:

$$Q=200(0,9)^t,\ t \geq 0,$$

a) Descreva em palavras como a carga armazenada varia com o tempo.

b) Que quantidade de carga permanece após 10 segundos? 20 segundos? 30 segundos? 1 minuto? 2 minutos? 3 minutos?

c) Desenhe o gráfico da carga durante o primeiro minuto. O que a assíntota indica a respeito da carga?

Exercício de aplicação envolvendo um problema com capacitores. Nesse caso, o aluno poderá demonstrar, verificar e compreender o uso da taxa percentual constante numa situação real.

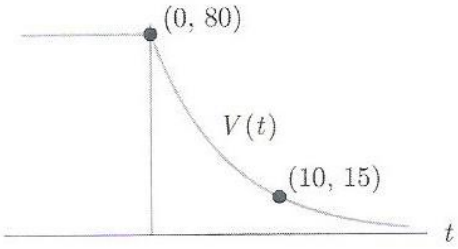
Atividade 5.

A figura 1 apresenta a voltagem, V(t), de um elemento de um circuito elétrico, no instante de tempo t segundos. Para t<0, a voltagem é constante, de 80 volts; para $t \geq 0$, a voltagem decai exponencialmente.

a) Determine uma fórmula por partes para V(t).

b) Para que valor de t irá a voltagem alcançar o valor 0,1?

c) Qual a taxa percentual constante obtida? Faça uma análise das unidades envolvidas, bem como interprete as informações contidas na mesma.



Contextualização de uma situação prática envolvendo taxa de variação percentual constante em funções Exponenciais e que envolviam atividades que serão utilizadas também na disciplina de física.

Atividade 6.

O isótopo gálio-67 radioativo decai para Gálio1,48% a cada hora;(não radioativo) considere que se tem, inicialmente, 100 miligramas da substância numa substância.

a) Determine uma fórmula para a quantidade de isótopo gálio-67 remanescente na amostra após t horas.
b) Quantos miligramas permanecem após 24 horas? E após 1 semana?

Nesse problema temos mais um exercício de contextualização que envolve substâncias químicas. Além disso, o formato desse exercício se aplica a diversas situações como decaimento radioativo, de medicamentos, entre outros.

5.COMPARANDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS E FUNÇÕES LINEARES

Neste tópico o professor poderá trabalhar com os alunos a questão da comparação entre taxas percentual constante e taxa de variação constante, bem como procurávamos encontrar e modelar fórmulas para ambas às funções.

Cabe ao professor, se achar necessário, retomar as características de Taxa de variação constante na Função Afim e da Taxa de variação percentual constante na Função Exponencial.

Problemas de Introdução do conteúdo.

Nesse caso, o professor poderá reforçar com os alunos as definições de taxa de variação constante e da taxa de variação percentual constante, bem como evidenciar com os alunos as principais características de cada uma.

Exemplo 1. (Adpatado**.** Connaly, Hughes-Hallett, Gleason, et al, 2009, p.108**)**

As tabelas abaixo contêm valores de uma função exponencial ou de uma função linear. Em cada problema:

a) Decida se a função é linear ou exponencial.
b) Determine uma fórmula possível para cada função e desenhe o gráfico.

R	1	3	7	15	31
p(r)	13	19	31	55	103

X	6	9	12	18	24
q(x)	100	110	121	146,41	177,16

Exemplo 2. (Adaptado. Dante, 1999, p.303)

Em qual situação a aplicação de R$ 4.000,00 terá maior rendimento e de quanto a mais:

- No sistema de Juros Simples, à taxa de 3% ao mês, durante 2 meses?
- No sistema de juros Compostos, à taxa de 2% ao mês, durante 3 meses?

a) Construa uma tabela identificando ambos os Juros.
b) Construa um gráfico com ambos os Juros
c) Determine uma fórmula para cada um dos Juros.
d) O que podemos identificar através das taxas envolvidas na atividade?

Exemplo 3. (CONNALLY, Eric et.al., 2009, p.109)

Um automóvel Lexus, ano 2006, custa US$ 61.055 e deprecia 46% durante os primeiros 7 anos.

a) Suponho que a depreciação seja exponencial. Determine uma fórmula para o valor do carro em um instante t.
b) Suponha, em vez disso, que a depreciação seja linear. Determine uma fórmula para o valor do carro em um instante t.

Exemplo 4. (Adaptado. Biscuola, Bôas, Doca, 2013, p.116**)**

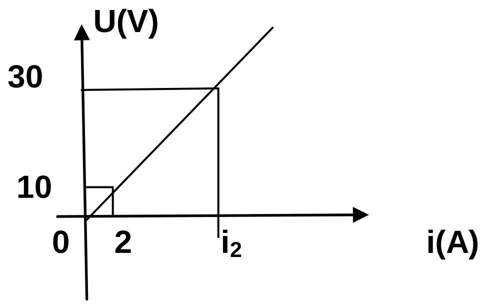
No gráfico a seguir está representada a curva característica de um resistor mantido em temperatura constante.

Analise as seguintes afirmações:

I. O resistor em questão é ôhmico.

II. A resistência elétrica é igual a 5Ω e isso significa que são necessários 5 volts para produzir nele 1 ampère de corrente.

III. A intensidade de corrente i_2 indicada no diagrama é igual a 6ª.



Quais afirmações são corretas? Qual a influência das taxas num resistor ôhmico?

Lista de Exercícios dos alunos.

Atividade 1

A ***tabela 3*** fornece valores de uma função linear e de uma função exponencial.

X	29	25	30	35	40	45
f(x)	30	45	60	75	90	105
g(x)	1.000	1.200	1.440	1.728	2.073,6	2.488,32

a) Determine as taxas de variação e percentual.
b) Determine uma fórmula pra f(x) e g(x). Construa um gráfico com ambas as funções
c) Faça um estudo comparativo entre ambas.

Com esse problema, trouxemos uma situação na qual o aluno verificará o comportamento de ambas as taxas e estabelecerá uma conclusão acerca das mesmas.

Atividade 2

No instante t=0 ano, um espécie de tartaruga é solta em um banhado. Quando t=4 anos, um biólogo estima que haja 300 tartarugas no banhado. Três anos mais tarde, o biólogo estima que haja 450 tartarugas. Seja P o tamanho da população de tartarugas no ano t.

a) Determine uma fórmula para P=f(t), supondo crescimento linear. Interprete a inclinação e a intersecção com o eixo do P de sua fórmula em termos da população de tartarugas.
b) Determine uma fórmula para P=g(t), supondo um crescimento exponencial. Interprete os parâmetros de sua fórmula em termos da população de tartarugas.
c) No ano t=12, o biólogo estima que haja 900 tartarugas no banhado. O que isso indica a respeito dos dois modelos populacionais?

O problema estabelece um quadro comparativo entre taxas de variação e percentual, assim como busca apresentar aos alunos o comportamento de ambas. Além disso, mostra que, a partir de um determinado instante, o comportamento exponencial sempre supera o comportamento linear.

Atividade 3

A população de um país é inicialmente de 2 milhões de habitantes e está crescendo a uma taxa de 4% ao ano. O suprimento anual de alimentos deste país, inicialmente adequado para 4 milhões de habitantes, está crescendo a uma taxa constante adequada para um adicional de 0,5 milhão de habitantes ao ano?

a) Baseado nestas suposições, em que ano, aproximadamente, irá este país experimentar o primeiro desabastecimento .
b) Se o país duplicar a sua oferta inicial de alimentos, irá ainda ocorrer este desabastecimento? Em caso afirmativo, quando?

c) Se o país duplicar a taxa na qual o suprimento de alimento cresce, além de duplicar sua oferta inicial de alimentos, ainda irá ocorrer desabastecimento? Em caso afirmativo, quando?

Novamente, nesse problema procura-se enfatizar que o modelo exponencial superará o modelo linear em algum instante. Além disso, o aluno poderá observar e compreender o modelo de Malthus como atividade de aplicação no contexto histórico.

Atividade 4.

A tabela abaixo apresenta os resultados obtidos com medidas de intensidade de corrente elétrica e d.d.p. em dois condutores diferentes.

Condutor 1		Condutor 2	
i (A)	U (V)	i (A)	U (V)
0	0	0	0
0,5	2,18	0,5	3,70
1,0	4,36	1,0	6,18
2,0	8,72	2,0	9,16
4,0	17,44	4,0	11,44

Com base na tabela, verifique se os condutores são ou não ôhmicos.

A atividade busca trazer um exercício ligado a disciplina de Física, o que mostra uma aplicabilidade das taxas em outras disciplinas.

6. TAXA DE CRESCIMENTO CONTÍNUO E O NÚMERO "e".

A taxa de crescimento contínuo envolve uma relação direta com número e=2,71828182.... .Nesse caso, fazemos uma troca da base positiva b e a reescrevemos com uma potência de e, observe:

Cabe ao professor apresentar a definição da Taxa de Variação Contínua na Função Exponencial, como:

Funções exponenciais com base "*e*", representam crescimentos contínuas (taxa de crescimento aplicada continuamente).

Se $b=e^k$. Se $b>1$, então k é positiva; se $0<b<1$, então k é negativo. Assim podemos reescrever $Q=ab^t$ em termos de e,

$Q=ab^t=a(e^k)^t= ae^{kt}$. A constante k é denominada taxa de crescimento contínuo.

O objetivo aqui e apresentar a constante de Euler, assim como buscar situações problemas que são trabalhadas com taxas de crescimento contínuo.

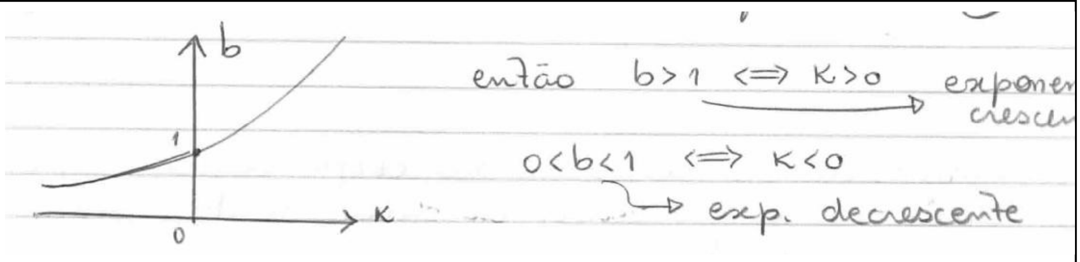


Figura 3: Gráfico da Taxa de Variação contínua.

Problemas de Introdução do Conteúdo.

Nesses problemas o professor poderá enfatizar com os alunos situações de aplicação da taxa de variação contínua, bem como da troca de base $b=e^k$. Desta forma, poderá estabelecer uma relação entre taxa de variação percentual constante e taxa de variação contínua.

Exemplo1

Vamos considerar a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ com n $\in\{1,2,3,4,...\}$:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, ..., \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}, ..., \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}, ..., \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, ...$$

2,000 2,250 2,370 2,594 2,705

Quando n aumenta indefinidamente, a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tende ao número

Irracional e=2 ,7182818284...

Uma função exponenical muito importante em matemática é aquele cuja base é e:

$f(x)= e^x$

Exemplo 2. (CONNALLY, Eric et.al, p. 117)

Qualquer base positiva b pode ser escrita como uma potência de e:

$$b=e^k$$

Se $b>1$, então k é positivo; se $0<b<1$, então k é negativo. A função $Q=ab^t$ pode ser reescrita em termos de e:

$$Q= ab^t =a(e^k)^t=ae^{kt}.$$

A constante K é denominada taxa de crescimento contínuo. Em geral:

Para a função exponencial $Q= ab^t$, a taxa de crescimento contínuo, k, é obtida resolvendo $e^k=b$.

Logo

$$Q= ae^{kt}.$$

Se a for positivo,

- Se $k>0$, então Q é crescente.
- Se $k<0$, então Q é decrescente.

Exemplo 3. (CONNALLY, Eric et.al 2009, p.120)

Uma substância radioativa decai a uma taxa contínua de 14% ao ano, e 50 mg desta substância está presente no ano 2000.

a) Escreva uma fórmula para a quantidade presente, A (em mg), t anos após 2000.

b) Que quantidade desta substância estará presente no ano 2010?

c) Estime quando a quantidade cai abaixo de 5 mg.

Lista de Exercícios para os alunos.

Atividade 1

Se R$ 1,00 for investido em uma conta bancária que rende 100% de Juros uma vez ao ano, então, supondo que nenhum outro depósito ou saque sejam realizados, após um ano teremos:

Se R$ 1,00 for investido em uma conta bancária que rende 50% de Juros duas vezes ao ano, teremos:

Se R$ 1,00 for investido em uma conta bancária que rende 25% de Juros quatro vezes ao ano, teremos:

Se R$ 1,00 for investido em uma conta bancária que rende 10% de Juros doze vezes ao ano, teremos:

Como será o comportamento diariamente, a cada hora, a cada minuto, cada segundo?

Que conclusão podemos tirar?

Tal problema procurou apresentar uma situação de problema real a formação do número e=2,71828182..... O professor também pode salientar aos alunos que a base “*e*“é denominada base natural.

Atividade 2

Obtenha a taxa de crescimento contínuo para cada uma das seguintes funções e desenhe o gráfico de cada função:

$P=5e^{0,2t}$, $Q=5e^{0,3t}$, $R=5e^{-0,2t}$.

Através desses problemas buscamos analisar o comportamento da taxa de crescimento contínuo, bem como identificar características do gráfico das mesmas.

Atividade 3

A cafeína é liberada do corpo a uma taxa contínua de 17% por hora. Qual a quantidade de cafeína que permanece no corpo 8 horas após ter-se ingerido uma xícara de café contendo 100mg de cafeína?

Problema que envolve a contextualização da taxa contínua, assim, procuramos dar visibilidade a tarefa desenvolvida na atividade anterior.

Atividade 4

Em novembro de 2005, o Banco Wells fargo ofereceu juros a uma taxa contínua de 2,323% ao ano. Determine a taxa anual equivalente.

Mostra o comportamento prático da taxa contínua em relação à taxa equivalente, e apresenta uma aplicabilidade real da taxa contínua.