UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática

Geometria Vetorial na escola: uma leitura geométrica para sistemas de equações

Pedro Sica Carneiro

Porto Alegre

2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática

Geometria Vetorial na escola: uma leitura geométrica para sistemas de equações[1]

Pedro Sica Carneiro

Reservado para a Banca

____

____

____

[1] Trabalho parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior CAPES

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha mãe, minha eterna professora;
a meu pai, exemplo de força de vontade e razão do meu orgulho;
à vó Camilla, a maior incentivadora para a realização desse mestrado;
à Carola, que me apoiou incondicionalmente durante essa jornada,
mostrando-se companheira em todas as horas, e confirmando ser o grande amor da minha vida.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, *Maria Alice Gravina*, por quem tenho profunda admiração, que me conduziu na elaboração do presente trabalho, sempre me incentivando nos momentos mais difíceis, demonstrando não apenas um vasto conhecimento em Matemática, mas também uma profunda preocupação com as questões de ensino e o processo de aprendizagem.

A todos os meus professores, que contribuíram para minha formação profissional.

Aos meus alunos, que são a verdadeira razão da minha busca por aprimoramento; e em especial, aos da turma 201 de 2006, do Colégio Província de São Pedro, que se mostraram inteiramente solidários durante toda realização da experiência.

Aos meus colegas de mestrado, cúmplices importantes nessa jornada.

À *Belissa Schönardie*, professora auxiliar e amiga, que colaborou também com a filmagem para documentação da experiência.

Ao *Carlos Eduardo Souza Ferreira*, responsável pelo design gráfico e programação do objeto de aprendizagem “Vetores e Operações“.

À *Cecília Gravina da Rocha*, pela colaboração na confecção das figuras que compõem parte da seqüência de atividades.

À *Simone da Rocha da Silveira*, minha irmã de coração, pelo auxilio incansável nas traduções de Inglês para Português.

RESUMO

Nesta dissertação tivemos como principal objetivo, conceber, implementar, analisar, reconstruir e validar uma proposta didática que agregasse um maior valor formativo ao ensino do tópico de sistemas de equações, através da geometria vetorial.

No referencial teórico buscamos naturais aproximações entre álgebra e geometria, através de exemplos tomados da história e de exemplos que tratam de conteúdos presentes nos programas escolares. Nessas aproximações, também fazemos uma discussão que se apóia no trabalho de Douady (1998), onde é sugerido, sempre que possível, a utilização de pelo menos dois *domínios de conhecimento* (algébrico e geométrico) no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

A metodologia de investigação escolhida, a Engenharia Didática (Artigue, 1996), nos permitiu um acurado trabalho de validação do material didático produzido. Este material assim se constitui: na fundamentação matemática de conteúdos relativos à geometria vetorial, de forma que estes pudessem ser trabalhados no Ensino Médio; na construção de uma seqüência didática, na forma de coletânea de atividades acompanhada de plano de execução; e na construção de um pequeno software “Vetores e Operações”, com o propósito de trazer um recurso que é facilitador da aprendizagem.

Consideramos que nossa hipótese de investigação – através da geometria vetorial é possível desenvolver, na escola, o tópico de sistema de equações, de forma a ter-se nele agregado um maior valor formativo – se valida no contexto de nossa experiência. E com as devidas adaptações, de modo a atenderem as especificidades de cada turma de alunos, é com confiança que apostamos na sua viabilidade para outras situações de ensino e aprendizagem sobre sistemas de equações.

Palavras chave: Educação Matemática, Engenharia Didática, geometria vetorial, sistemas de equações.

ABSTRACT

In this paper our main purpose is to conceive, implement, analyze, rebuild and validate an educational proposal that can provides a wide formative value to the teaching of the topic of system of equations through vectorial geometry.

The theoretical frame is based on natural approach between algebra and geometry, through examples taken from History and examples related to subjects which are part of school programs. To support this approach, we have also made a discussion based on Douady's work (1988), where it is stressed the importance of the interactions of different domains (geometrical and algebraic) in the student learning process.

The methodology of investigation chosen, the Educational Engineering (Artigue, 1966), allowed us an accurate work of validation of the produced material. This material is in this way constituted: the mathematical foundation of the contents related to vectorial geometry, in a way to become possible to work in the high school level; an educational sequence, made of a collection of mathematical activities and an execution plan; a learning object (a small software) named " Vectors and Operations", with the purpose of bring a resource that can make easy the act of learning.

We consider that our investigation hypothesis – through vectorial geometry it is possible to develop in the school, the topic of system of equation in a way that it carries a maximum formative value – was validate in the context of the experience. And, with the proper adaptation, in a way to attend the specificities of each group of students, it is with confidence that we believe in its applicability for other teaching and learning situations about these subject .

Key Words: Mathematics Education, Educational Engineering, Vectorial Geometry , System of Equations

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

No presente trabalho apresenta-se uma proposta de material didático que pode viabilizar, na escola, o ensino de conteúdos que tratam da geometria vetorial e de sistemas de equações. O interesse pelo assunto advém de minha experiência como professor de Matemática do Ensino Médio desde 2002. Ao ensinar sistemas lineares, uma indagação sempre se apresentava de forma incessante: como fazer o estudo sobre as possíveis soluções de um sistema de equações de modo que os alunos compreendessem, de forma muito clara, o significado das clássicas expressões que aparecem nos livros didáticos - "sistemas determinados", "sistemas indeterminados", "sistemas impossíveis" - sempre motivo de grande confusão?

Na escola o tópico sobre resolução de sistemas é, usualmente, trabalhado apenas através de manipulações algébricas com equações, matrizes e determinantes, baseada em um conjunto de regras, sem maiores explicações, portanto desprovidas de significado para os alunos. Geralmente é apresentada a regra de Cramer, que resolve somente sistemas n X n e é conclusiva apenas quando o sistema admite solução única. Nesta regra, os alunos fazem os cálculos envolvendo determinantes, mas não entendem porque estes cálculos levam à solução do sistema, trata-se de uma regra de resolução a ser memorizada e não compreendida. Já o método do escalonamento, mais compreensível nas manipulações algébricas a serem feitas para transformar um sistema em outro equivalente mais simples, resolve sistemas gerais m x n. Mas ainda com este método, as possíveis soluções do sistema ainda se apresentam de difícil compreensão para os alunos, pois no geral estão desprovidas de leitura geométrica, quando se trata de sistemas de três variáveis.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006)[2] nos dizem que:

> *"Quanto à resolução de sistemas de equação 3 X 3, a regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única. Dessa forma, fica também dispensado o estudo de determinantes (p.78)."*

Por outro lado, temos nas palavras de Lima (1992, p.8) em artigo publicado na Revista do Professor de Matemática nº23, referências à importância do estudo de sistemas de equações.

> *"Os sistemas de equações lineares constituem um tópico de grande interesse prático. Seu estudo é acessível aos estudantes, pois não requer o emprego de conceitos sutis ou complicados. Além disso, pode servir como ponto de partida para diversas teorias matemáticas relevantes e atuais. Por estes três motivos, é mais do que justa sua inclusão nos currículos escolares. Entretanto sua abordagem nos compêndios adotados em nossas escolas é, na maioria das vezes obsoleta, árida e desmotivada. Em certos casos, até mesmo contém erros de matemática de fato*[3]*."*

---

[2] "As Orientações Curriculares para o Ensino Médio foram elaboradas a partir de ampla discussão com as equipes técnicas dos Sistemas Estaduais de Educação, professores e alunos da rede pública e representantes da comunidade acadêmica. O objetivo deste material é contribuir para o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente (2006, p.7)." Esse documento retoma a discussão dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, aprofundando a compreensão, apontando e desenvolvendo indicativos de modo a oferecer alternativas didático-pedagógicas para a organização do trabalho pedagógico.

[3] Para maiores detalhes o autor sugere ver o livro *Coordenadas no espaço*, publicado na coleção do professor de Matemática da SMB.

O ingresso no mestrado profissionalizante em Ensino de Matemática na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em 2005, possibilitou-nos o amadurecimento de nossa indagação: **através da geometria vetorial é possível desenvolver, na escola, o tópico de sistema de equações, de forma a ter-se nele agregado um maior valor formativo?**

É das Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) que tomamos a expressão “valor formativo”, e pela sua importância no contexto do nosso trabalho, merece ser esclarecida:

> *“A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. (p.69)”*

Na busca de resposta a nossa pergunta desenvolvemos um material didático constituído de:

– fundamentação matemática dos conteúdos relativos à geometria vetorial, de forma que pudessem ser trabalhados no Ensino Médio;

– a construção de uma seqüência didática, na forma de coletânea de atividades acompanhada de plano de execução para ser desenvolvido em aproximadamente 16 horas de aula;

– a construção do objeto de aprendizagem “Vetores e operações”[4], disponibilizado em CD no anexo 3, com o propósito de trazer um recurso que é facilitador da aprendizagem, por ter-se no dinamismo das animações a

[4] É um pequeno software voltado para um conteúdo específico, com recursos de interação, de tal forma que através da manipulação direta na tela do computador o aluno pode aprender o referido conteúdo.

veiculação de conceitos que, em um primeiro momento, apresentam dificuldades para os alunos.

No CD que contém o objeto de aprendizagem também apresentamos um vídeo com aproximadamente 6 minutos de duração, com o propósito de oferecer ao leitor deste trabalho um pouco do “clima” do desenrolar da situação didática projetada e realizada.

A concepção do material didático foi norteada pela metodologia de investigação conhecida como Engenharia Didática (Artigue, 1996). Nela se tem a possibilidade de implementar a investigação em sala de aula – ela é “*um esquema experimental baseado em “realizações didáticas” em sala de aula, o que quer dizer, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino (p.196).*”

Diferentes reflexões deram suporte à construção do material didático, dentro de uma perspectiva de investigação profissional aplicada, voltada para o desenvolvimento de produto de natureza educacional em Matemática.

No capítulo 2 apresentamos interessantes exemplos de aproximações entre álgebra e geometria trazidos da história da Matemática e também sugestões de aproximações que poderiam ser feitas no âmbito dos conteúdos que já fazem parte dos usuais programas das escolas. Nestas sugestões também fazemos uma discussão que se apóia no trabalho de Douady (1998), onde é sugerido, sempre que possível, a utilização de pelo menos dois *domínios de conhecimento* (aritmético, algébrico, geométrico, dentre outros) no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Segundo esta autora, é através da *interação entre diferentes domínios* que o aluno consegue avançar na construção de conhecimento, desta forma vivendo um processo de aprendizagem que se assemelha ao processo de criação em Matemática. Nas reflexões deste capítulo procuramos sinalizar o valor formativo que pode ser agregado ao processo de aprendizagem quando são feitas aproximações entre álgebra e geometria, assim preparamos o cenário para fazer a proposta relativa ao específico tópico de sistemas de equações.

O capítulo 3 inicia com uma análise de como o tópico sobre sistemas de equações é trabalhado na escola, apontando para o pouco valor formativo a ele associado. Segue com detalhamento dos conteúdos de geometria vetorial que precisam ser inseridos no currículo do ensino médio, bem como uma sugestão de possível adaptação da proposta aos programas de matemática usualmente praticados nas escolas, isto na intenção de mostrar que a proposta é viável. Finalizamos o capítulo 3, trazendo de Tall & Poynter (2005), uma análise sobre as dificuldades que os alunos têm com o conceito de vetor, crucial para a construção da seqüência de atividades que fazem parte do material didático.

No capitulo 4 trazemos o processo de concepção da seqüência de atividades e a análise da experiência que tratou de validar o material produzido. A metodologia de investigação escolhida, a Engenharia Didática, nos permitiu um acurado trabalho de validação do material produzido. Tendo-se como parte desta metodologia a realização da experiência didática, tivemos no processo de construção do material uma constante necessidade de ajustes e refinamentos de propósitos, com conseqüente adequação da seqüência de atividades que compõem o produto final.

No capítulo 5 trazemos as considerações finais, à luz do propósito deste nosso Mestrado Profissionalizante quanto à melhoria da qualificação profissional do professor de Matemática. Trazemos reflexões sobre a nossa caminhada intelectual ao longo deste período de mestrado. Também registramos a nossa constante preocupação, ao longo da elaboração desta dissertação, quanto à produção de material com potencial para ser usado pelos nossos colegas professores que estão nas escolas, sinalizando possibilidades de desdobramentos deste trabalho.

Nos Anexos apresentamos: a concepção inicial da proposta (anexo 1), a seqüência didática implementada na escola (anexo 2), a seqüência didática concebida após a realização da experiência (anexo 3), o objeto de aprendizagem (Vetores e operações) e o vídeo, disponibilizados em CD (anexo 4).

2. SOBRE AS APROXIMAÇÕES ENTRE A ÁLGEBRA E A GEOMETRIA

Na escola, em diversos momentos, podemos observar a ênfase que é dada aos processos algoritmos de álgebra, com pouca associação a idéias geométricas. No ensino da geometria analítica, raramente são colocadas em destaque as deduções da equação da reta e da circunferência através do raciocínio geométrico. No estudo de funções, o gráfico da função quadrática é chamado de "parábola" sem maiores explicações quanto à razão deste nome. Números complexos e operações, em geral, são manipulações puramente algébricas, sendo pouca a ênfase nas representações geométricas. Enfim, na escola poucas são as aproximações entre álgebra e geometria.

Com o objetivo de contribuir na direção de um ensino escolar em que, na medida do possível, estes conteúdos sejam interligados, neste capítulo nos concentramos nos seguintes aspectos:

– apontar interessantes exemplos de aproximações entre álgebra e geometria na história da Matemática;

– apontar exemplos de possíveis aproximações entre álgebra e geometria que poderiam ser trabalhados na escola.

Dessa forma, pretendemos preparar um cenário natural para nos próximos capítulos apresentar, através de uma seqüência didática detalhada, nossa proposta de intervenção na escola: a geometria vetorial e os sistemas de equações.

2.1 Exemplos na história

O objetivo desta secção é apontar alguns exemplos, registrados na história da Matemática, em que a álgebra e a geometria estão intimamente ligadas na resolução dos problemas. O enfoque, ao longo do que segue, são demonstrações de igualdades algébricas e resoluções de equações através de raciocínios de natureza geométrica.

Segundo Charbonneau (1996), a álgebra muitas vezes é vista como um produto da evolução da aritmética, porém na história da Matemática vê-se que a geometria teve um importante papel na evolução da álgebra. Alguns exemplos podem ser encontrados na geometria grega, como nos seguintes axiomas do livro I dos Elementos de Euclides[5]:

> *"I) As cousas, que são iguais a uma terceira, são iguais entre si.*
> *II) Se a cousas iguais se juntarem outras iguais, os todos serão iguais.*
> *III) E sé de cousas iguais se tirarem outras iguais, os restos serão iguais. (p.7)"*

Estes princípios são muito familiares à álgebra moderna. O primeiro é a transitividade da igualdade, o segundo e o terceiro são utilizados na resolução de equações (principio aditivo).

Boyer (1974) comenta que na Grécia antiga já existia uma álgebra, porém ainda desprovida da linguagem simbólica atual:

> *"Diz-se as vezes que os gregos não possuíam uma álgebra, mas isto é evidentemente falso. Tinham o Livro II de Os elementos, que é uma álgebra geométrica servindo aos mesmos fins que a nossa álgebra simbólica. (p.79)"*

No livro II dos Elementos de Euclides, muitas proposições são provas geométricas de identidades algébricas, conforme ilustramos a seguir em quatro delas. A idéia central em todas é olhar para a área de uma mesma figura de duas formas distintas: por um lado é área da figura como um todo e, por outro lado, é a sua área como a soma de áreas de uma certa decomposição (da mesma).

---

[5] Para as transcrições dos "Elementos de Euclides", feitas nesta secção, estamos usando como referência "Euclides – Elementos de Geometria", versão latina de Frederico Comandino São Paulo: Edições Cultura, 1944 disponível em http: www.portal.mec.gov.br

‘’PROP. I. TEOR.

Se houver duas linhas retas, e uma delas fôr dividida em quantas partes se quiser, será o retângulo compreendido pelas duas retas igual, aos retângulos compreendidos pela reta inteira, e pelos segmentos da outra (p.31).”

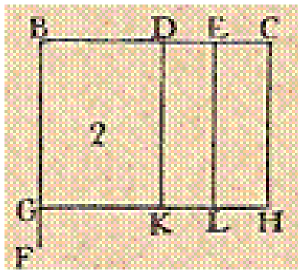


Fig. 1 – Proposição I

Essa proposição, em linguagem matemática atual, diz que: se um retângulo for decomposto (usando segmentos paralelos a um de seus lados) em vários sub-retângulos, sua área será igual à soma das áreas de todos estes sub-retângulos. Isto corresponde à propriedade algébrica:

$$a.(b + c + d + ...) = ab + ac + ad + ...$$

“PROP. II. TEOR.

Se uma linha reta fôr dividida, como se quiser, os retângulos compreendidos pela reta tôda, e por cada uma das partes, são iguais ao quadrado da linha inteira (p.31)”

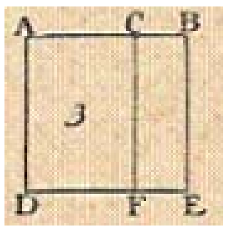


Fig. 2 – Proposição II

A segunda proposição, em linguagem matemática atual, diz que: se um segmento de reta for dividido em duas partes, a área do retângulo formado por esse segmento com uma de suas partes, somada a área do retângulo formado por esse segmento com a outra parte, é igual à área do quadrado formado pelo segmento. Isto corresponde à propriedade algébrica:

$$(a + b)a + (a+b)b = (a+b)^2$$

“PROP. III. TEOR.

Se uma linha reta fôr dividida, como se quiser, será o retângulo compreendido pela mesma reta, e por uma parte dela, igual ao retângulo das partes juntamente com o quadrado da dita parte (p.32)”

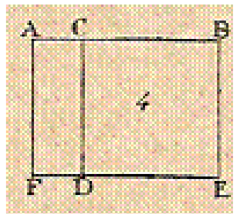


Fig. 3 – Proposição III

A terceira proposição, em linguagem matemática atual, diz que: se um segmento de reta for dividido em duas partes, a área do retângulo formado pelo segmento todo e uma das partes será igual à soma da área do retângulo formado pelas partes com a área do quadrado formado pela da dita parte. Isto corresponde à propriedade algébrica:

$$(a+b)a = ab + a^2$$

"PROP. IV. TEOR.

Se uma reta fôr cortada em duas partes quaisquer, será o quadrado da tôda igual aos quadrados das partes, juntamente com o retângulo das mesmas partes, tomado duas vêzes (p.32)."

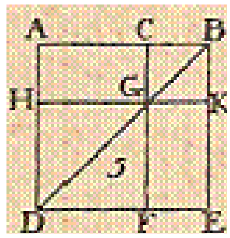


Fig. 4 – Proposição IV

Essa proposição, em linguagem matemática atual, diz que: se um segmento for dividido em duas partes quaisquer, a área do quadrado formado pelo segmento todo será igual à soma das áreas dos quadrados formados por cada uma das partes com o dobro da área do retângulo formado pelas partes. Isto corresponde à propriedade algébrica conhecida na escola como "produto notável":

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

A maneira como é apresentada esta seqüência de proposições sugere uma predominância do pensamento geométrico. Sob o ponto de vista algébrico, a proposição IV poderia ser demonstrada a partir das proposições II e I; $(a + b)(a + b) = (a + b).a + (a + b).b = a.a + b.a + a.b + b.b$. No entanto, nos Elementos de Euclides, cada uma das proposições é demonstrada a partir de uma nova figura e sua decomposição.

O argumento geométrico é também utilizado, no mesmo livro II, para provar a existência de solução de uma equação, como na proposição 11 que segue.

"PROP. XI. PROB.
Dividir uma linha reta de sorte que o retângulo da tôda e de uma parte seja igual ao quadrado da outra parte (p.37)"

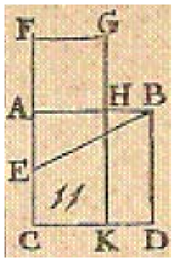


Fig. 5 – Proposição XI

Esse problema, na linguagem matemática atual, coloca a exigência de construção de um ponto H, que divida um segmento $\overline{AB}$ em duas partes, de tal forma que a área do retângulo formado pelo segmento com a menor de suas partes seja igual a área do quadrado formado pela outra parte.

Vamos apresentar a construção do ponto H, bem como a demonstração de que o mesmo satisfaz a condição da proposição, a fim de comparar a solução puramente geométrica (encontrada nos Elementos de Euclides) com a solução puramente algébrica.

Construção:
Seja AB o segmento dado. Constrói-se o quadrado ABCD de lado AB. Seja E o ponto médio do segmento AC. Prolonga-se AC e marca-se sobre este prolongamento o ponto F, de modo que EF = BE. Constrói-se o quadrado AFGH de lado AF. Prolonga-se o segmento GH e seja K o ponto de intersecção do prolongamento com CD.

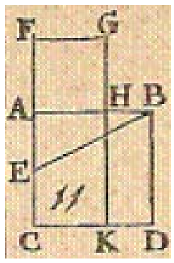


Fig. 6 – Demonstração da Proposição XI

Demonstração:
Área do quadrado de lado EF :
EF.EF = (EA+AF).(EA + AF) =
AE .AE +AF.(EA + EA +AF) =
Área do quadrado AE + Área do retângulo AF x FC
Como EF = EB segue que
EB . EB = Área do quadrado AE + Área do retângulo AF x FC (1)

Do teorema de Pitágoras vem que EB.EB = AE.AE + AB.AB (2)

Portanto, substituindo (2) em (1) obtemos AE.AE + AB.AB =

Área do quadrado AE + Área do retângulo AFxFC

Donde: AB . AB = AF . FC

Subtraindo a parte comum em ambas áreas acima, a saber retângulo AHKC, obtemos:

Área quadrado AFGH = Área retângulo HBDK

Entretanto, o mesmo problema, pode ser resolvido através de uma equação algébrica.

Queremos dividir tal segmento AB , tomando nele um ponto H de tal forma que o quadrado com lado AH e o retângulo com lados AB e BH tenham a mesma área.

Escrevendo:

med ($\overline{AB}$) = *a e med* ($\overline{AH}$) = *x*

temos que med ($\overline{BH}$) = *a – x.*

Para que as áreas sejam iguais devemos ter:

$$a.(a-x) = x^2.$$

Resolvendo a equação de grau dois encontramos:

$$x = a\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$$

Como x > 0, temos que:

$$x = a\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

A partir do valor obtido para "x" é que se dá a construção da figura que representa geometricamente a solução do problema, conforme na figura 7.

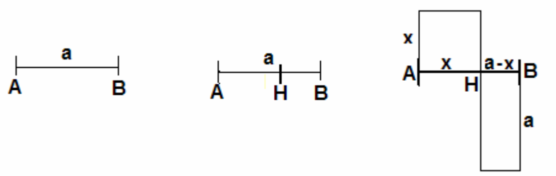


Fig. 7 – Solução algébrica da Proposição XI

Estabelecemos, a seguir, um contraponto entre as soluções geométrica e algébrica, procurando evidenciar que, por um lado, a resolução algébrica do problema é mais simples, mas por outro lado, a resolução geométrica guarda um maior entendimento sobre a forma de obter a desejada igualdade entre áreas. Sob o ponto de vista prático a solução algébrica é satisfatória; sob o ponto de vista de entendimento matemático, a solução geométrica pode ser mais interessante.

Solução geométrica	Solução algébrica
→ A resolução do problema no contexto geométrico não é de todo simples, pois trata-se da construção de um ponto. → No final da construção geométrica obtemos com precisão a localização do ponto que soluciona o problema. → No entanto, após a construção da solução geométrica é necessário um argumento dedutivo que prova a sua veracidade.	→ O problema em linguagem algébrica é bastante simples, pois trata-se de trabalhar com a equação: $a.(a\text{-}x) = x^2$ → Tendo-se a equação de grau 2 que modela o problema, a sua solução torna-se trivial. → Com o valor solução da equação não se pode marcar de forma imediata o ponto que resolve o problema.

Ainda segundo Charbonneau (1996), até a metade do século XIX, os livros dos Elementos de Euclides foram considerados como modelos teóricos de Matemática. Esta pode ser uma das razões pela qual a geometria foi usada muitas vezes para resolver problemas de natureza algébrica. A seguir seguem alguns destes problemas e suas soluções.

O primeiro problema apresenta a resolução de uma equação de segundo grau, proposta pelo astrônomo e matemático Al-Khowarizmi (780 – 850 AC), que viveu em Bagdá no período do reinado do califa Al-Mamum. Segundo Boyer (1974, p.166), Al-Khowarizmi escreveu livros de aritmética e de álgebra, que ocupam importante papel na história da Matemática. Em um deles, que sobrevive apenas numa única cópia de uma tradução latina com o título *De numero hindorum* (Sobre a arte hindu de calcular), ele explicava minuciosamente o sistema de numeração hindu. Na Europa, este livro foi traduzido para o latim e passou a ser muito consultado por aqueles que queriam aprender a nova numeração. Apesar de Al-Khowarizmi, honestamente, explicar que a origem daquelas idéias era hindu, a nova numeração tornou-se conhecida como a de Al-Khowarizmi. Com o tempo, o nome do matemático árabe foi modificado para algorismi que, na língua portuguesa, acabou virando algarismo. Do título de seu livro mais importante, *Al-jabr wa'l muqabalah*[6], surgiu o termo "álgebra". O livro contém uma exposição direta da resolução de equações, especialmente as de segundo grau.

O quebra cabeça de Al-Khowarizmi ($x^2 + 10x = 39$)[7]

A resolução de Al-Khowarizmi para a equação $x^2 + 10x = 39$ é baseada na interpretação da mesma como uma igualdade de áreas. O primeiro membro da igualdade representa a soma da área de um quadrado de lado x com um retângulo de área 10x, e o segundo membro, um retângulo de área 39, como na figura 8.

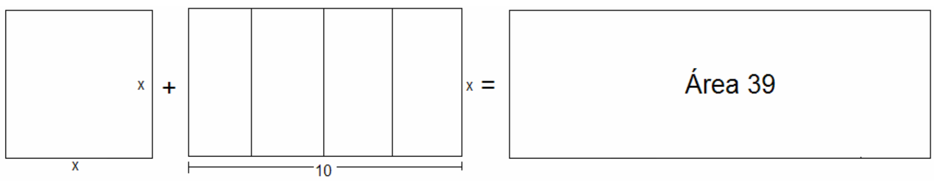


Fig. 8 – Resolução de Al-Khowarizmi (parte a)

Dividindo o retângulo de área 10x em quatro retângulos de área 10x/4, e colocando cada parte sobre um lado do quadrado de lado x, a figura (em forma de cruz) permanece com área igual a 39, conforme a figura 9.

---

[6] Não se sabe ao certo a tradução, porém Boyer (1974, p.167) comenta que a interpretação usual da palavra *Al-jabr* é a de transposição de termos subtraídos para o outro lado da equação, enquanto a palavra *muqabalah* refere-se a redução ou equilíbrio.

[7] Para apresentação deste exemplo estamos tomando como referência Charbonneau (1996, p.26).

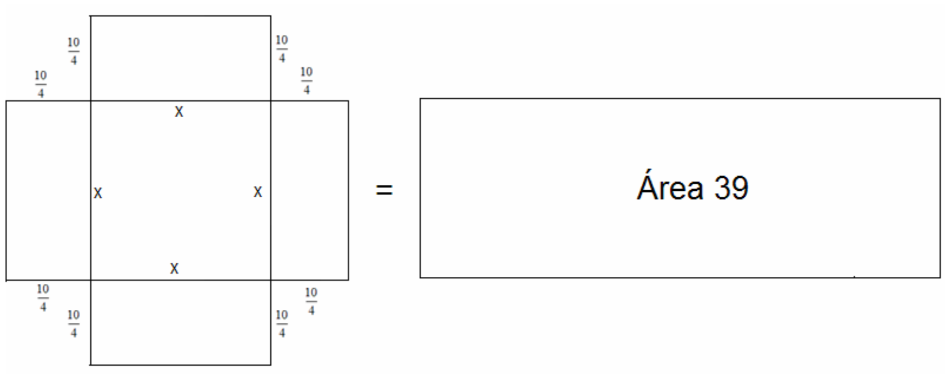


Fig. 9 – Resolução de Al-Khowarizmi (parte b)

Para completar um quadrado é preciso acrescentar 4 quadrados pequenos nos cantos, conforme a figura 10.

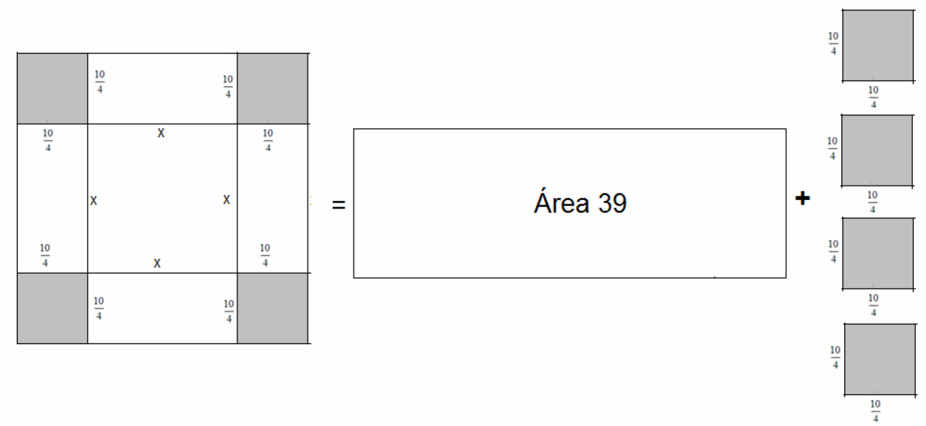


Fig. 10 – Resolução de Al-Khowarizmi (parte c)

Como cada quadrado acrescentado tem área $\left(\frac{10}{4}\right)^2$*, a área do quadrado obtido é 39 +* $4\left(\frac{10}{4}\right)^2$*, ou simplesmente, 39 + 25 = 64 (como fica claro no segundo membro da equação). Assim, o lado do quadrado grande mede 8 unidades e subtraindo de 8 duas vezes 10/4 obtemos x = 3.*

É interessante observar que a argumentação de Al-Khowarizmi é composta por sucessivas equivalências de áreas, sem que haja manipulação algébrica. Todas as operações utilizadas são geométricas ou aritméticas. Entretanto, na sua resolução, encontra-se apenas a raiz positiva da equação $x^2 + 10x = 39$. Além disso, nem todas as equações do tipo $x^2 + bx = c$ podem ser resolvidas através deste procedimento. A generalização só é possível se os coeficientes b e c são positivos. Vale a pena comentar que, apesar da álgebra de Al-Khowarizmi ser completamente expressa em palavras – não utilizando símbolos nem mesmo para os números – uma diferença marcante entre sua resolução e as resoluções gregas de equações é a presença de números.

No mesmo espírito trazemos a resolução de uma equação literal de primeiro grau, proposta pelo matemático, físico e médico, Gerônimo Cardano (1501-1576). Em sua principal obra, *Ars Magna*, ele apresentou as resoluções das equações cúbicas e quárticas. A importância desta publicação foi tão grande que o ano de 1545 passou a ser considerado o marco inicial do período moderno da história da Matemática.

A resolução de Cardano para a equação $x^2 = ax + cxy$[8]

Cardano, na sua Ars Magna, propôs o seguinte problema, cuja escrita em notação atual seria:

"Encontrar y se x é conhecido em $x^2 = ax + cxy$".

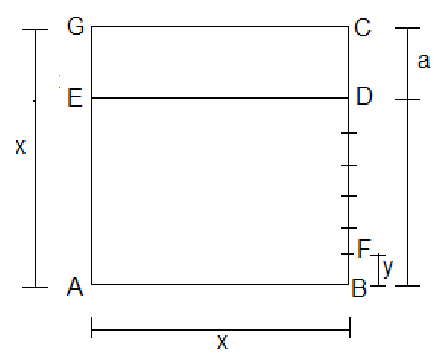


Fig. 11 – Resolução de Cardano

[8] Para apresentação deste exemplo estamos tomando como referência Charbonneau (1996, p.27).

Sejam $x = AB = BC$, $a = CD$, $y = BF$ e c o número exato de vezes que BF cabe em BD, conforme na figura 11.
A resolução da equação advém de duas leituras geométricas dessa representação simbólica:

Por um lado, através de relações entre áreas, temos que o quadrado ABCG, de área x^2, é formado pelo retângulo de área $a.x$ (DE por CD) e pela soma de c retângulos de área $x.y$ (AB por BD). Assim obtemos $x^2 = ax + cxy$.
Por outro lado, através da relação entre comprimentos, temos que a diferença entre os comprimentos dos segmentos BC e CD é igual ao comprimento de BD, ou seja, $x – a = c.y$.
De onde vem que $y = (x – a)/c$.

Nesta resolução é interessante observar que Cardano obtém a expressão para y sem fazer uso de manipulações algébricas em ambos os lados da equação. E mais, conforme aponta Charbonneau (1996, p.27), nesta argumentação, a multiplicação é interpretada de duas formas diferentes: a multiplicação como área (em x.x, a.x e c.x.y) e multiplicação como adição de segmentos de mesmo comprimento (em c.y).

A resolução de Cardano para isolar y em $x^2 = ax + cxy$ somente é válida quando c é um número inteiro positivo. Novamente da argumentação geométrica advém a perda de generalidade.

Na resolução das equações acima é muito tênue a presença de manipulação algébrica, o que sinaliza quanto às equações, na história da Matemática, começam a ser trabalhadas sempre com uma forte interpretação geométrica.

Segundo Boyer (1974, p.222), no final do século XVI, a álgebra árabe fora perfeitamente dominada e aperfeiçoada, tanto pela resolução das cúbicas e quárticas, quanto por um uso parcial de simbolismo. A transição da renascença para o mundo moderno se fez através de um grande número de estudiosos, da Europa Ocidental, dentre os quais destacava-se François Viète (1540 – 1603).

Charbonneau (1996), comenta que Viète foi o primeiro matemático que conseguiu distinguir claramente a álgebra da geometria e da aritmética, ao publicar a obra *"Introdução a Arte Analítica"*.

O objetivo de sua *arte analítica* era proporcionar um método para resolver qualquer problema em três etapas: *a zetética, a porística e a exegética ou retórica*. No artigo de Esteve (2001) temos as palavras de Viète:

> *"Finalmente, a arte analítica, composta de suas três formas zetética, porística e exegética, atrai para si a solução do maior de todos os problemas que é SOLUCIONAR TODOS OS PROBLEMAS[9] (p.707)."*

A *zetética*, primeira etapa da arte, corresponde à construção de um simbolismo que permite representar todas as grandezas, conhecidas e desconhecidas, e expressar as relações que as unem, de modo a obter uma equação que resume o problema proposto. A *porística*, segunda etapa da arte, transforma e resolve a equação por sucessivas proposições equivalentes, garantindo que a corrente de implicações desta análise possa ser revertida. A terceira etapa, *exegética* ou *rética*, volta ao problema concreto e resolve a equação por construções geométricas ou por cálculos numéricos.

Boyé (1997, p.271) sintetiza as idéias expostas acima no seguinte esquema:

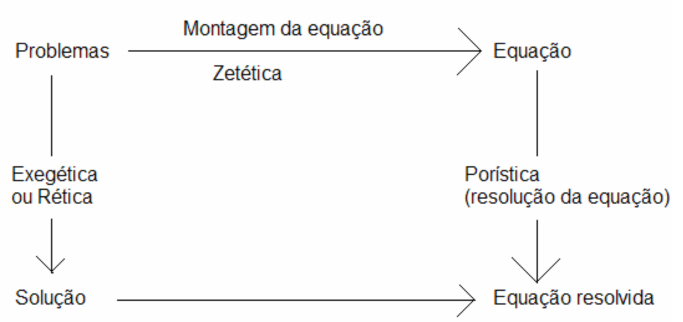


Fig. 12 – Esquema da Arte Analítica

[9] Escrito em maiúsculas por Viète.

A título de ilustração, segue um exemplo[10] da arte analítica em ação. O problema abaixo é o primeiro do livro I de Viète, publicado em 1591, que se intitula *Sobre as Zetéticas*.

> *"Dada diferença de dois lados e sua soma encontrar os lados. Seja B a diferença entre os lados e D a sua soma. Temos que determinar os lados. Seja A o lado menor e logo A + B é a medida do lado maior. Por isto a soma de ambos será 2A + B. Ou seja, 2A + B será igual a D. Então 2A será igual a D – B (por antítese) e dividindo todos por 2, A será igual a D/2 – B/2. Seja E o lado maior. O menor será então E – B. Por este motivo a soma dos lados será 2E – B. Ou seja, 2E – B será igual a D. Então 2E será igual a D+B e dividindo todos por 2, E será igual a D/2+ B/2.*
> *De modo que dada a diferença de dois lados e sua soma pode se achar os lados. Com efeito, a metade da soma dos dois menos a metade da diferença dos dois é igual a o lado menor e as mesmas quantidades somadas dão o lado maior. Esta era a investigação a realizar. Sendo B 40, D 100, A resulta ser 30 e E 70".*

Neste problema, a zetética corresponde, em linguagem matemática atual, à montagem do sistema de equações $\begin{cases} A + E = D \\ E - A = B \end{cases}$, onde D e B são conhecidos. A porística corresponde às manipulações algébricas que resolvem o sistema, obtendo A = D/2 – B/2 e E = D/2 + B/2. E, finalmente, a rética corresponde ao cálculo numérico apresentado no final do problema: sendo B = 40 e D = 100, temos que A = 30 e E = 70.

O motivo de Viète apresentar no final de suas provas um cálculo numérico particular, ou uma prova usando a argumentação geométrica, talvez fosse para que os céticos se convencessem da veracidade de sua argumentação. Conforme comenta Boyé (1997):

---

[10] Para apresentação desse exemplo estamos tomando como referência BOYÉ (1997, p.272)

"É sem dúvida a primeira vez na história da Matemática que vemos em ação um tratamento algébrico puramente literal de um problema matemático. Isto é, dispomos de fórmulas que podem se aplicar a qualquer problema numérico. É assim que Viète propõe ao final de cada um de seus problemas uma aplicação numérica. Talvez para mostrar aos céticos que seu método é bom (p.271)."

Conforme Esteve (2001, p.708), no princípio do século XVII, graças à difusão da obra de Viète, alguns matemáticos se empenharam em comprovar que o método algébrico era uma ferramenta muito útil na resolução de problemas geométricos. Mas com certeza, Descartes é o nome que geralmente é associado à introdução da álgebra na geometria. Esta introdução está no seu livro *La géométrie*, um dos três apêndices de sua principal obra, *Discours de la méthode*.

Segundo Boyer (1974), o objetivo de Descartes, em *La géométrie*, era duplo: através de processos algébricos libertar a geometria de figuras (que fatigavam a imaginação desnecessariamente) e dar significado às operações da álgebra (arte confusa e obscura que embaraçava a mente) por meio de interpretação geométrica.

La géométrie, única publicação matemática de Descartes, está dividida em três livros. No livro I, Descartes constrói uma aritmetização da geometria. Através de um segmento unitário, mostra como representar por meio de segmentos de reta, o produto de duas variáveis, assim como, as potências de uma variável. De acordo com Eves (1997, p.384), no tempo em que *La géométrie* foi escrita, uma variável correspondia a um segmento, um produto de duas variáveis a uma área e o produto de três variáveis a um volume. Portanto, Descartes revelou um avanço no sentido em que percebia que x^2 e x^3, assim como outras potências de x, também podiam ser representadas por segmentos de reta.

"Num ponto essencial ele rompeu com a tradição grega, pois em vez de considerar x^2 e x^3, por exemplo, como uma área e um

volume, ele também os interpretava como segmentos (Boyer, 1974, p.248).”

É interessante observar que, ainda no livro I de *La géométrie*, Descartes apresenta instruções detalhadas para resolver equações de grau dois ainda não no sentido algébrico, mas no sentido geométrico, como os gregos antigos[11]. A título de ilustração segue o método de resolução[12] apresentado por Descartes para resolver a equação $z^2 = a.z + b^2$.

Constrói-se um triângulo NLM, reto em L,

com LM = b e LN = $\frac{1}{2}a$ *.*

Prolonga-se MN até O, sendo NO = NL.

Da semelhança dos triângulos OLM e LPM vem que OM . PM = LM^2 *(I).*

Sendo OM = z, temos PM = z - a, substituindo em (I) obtemos $z.(z – a) = b^2$*.*

Ou seja, $z^2 = az + b^2$*.*

Por Pitágoras temos que MN = $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ *.*

Como z = ON + MN temos que z = $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$

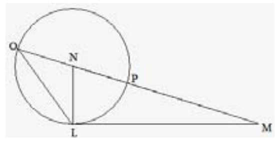


Fig 13 – Resolução de Descartes

O livro II de *La géométrie* traz, entre outras coisas, uma classificação para curvas, que hoje já foi superada e um método para construir tangentes a curvas.

Segundo Boyer (1974), nos livros I e III de *La géométrie*, Descartes está sempre preocupado com problemas geométricos redutíveis a equações

[11] O método permite apenas encontrar a raiz positiva.

[12] Para a transcrição do livro de “*La géométrie*“ de Descartes estamos usando como referência GEOMETRY OF RENÉ DESCARTES, tradução por Smith, E. & Latham. M. , Dover Publications , 1954, p.13.

algébricas com apenas uma quantidade desconhecida. No livro III, entre outras coisas, são abordadas algumas equações com grau maior do que dois, o método para reduzir o grau de uma equação quando se conhece uma raiz, como determinar, caso existam, as raízes racionais de uma equação, e como encontrar o número de raízes positivas (consideradas verdadeiras) e negativas (consideradas falsas).

Eves (1997) afirma que um outro avanço de Descartes foi certamente em sua notação. O uso de letras do começo do alfabeto para indicar parâmetros, e letras do final para indicar incógnitas e a notação de potência (x^2, x^3, …) foi herdado dele. Contudo, é importante ressaltar que a geometria algébrica de Descartes era muito diferente da geometria analítica atual:

> *"Praticamente toda La géométrie está dedicada a uma completa aplicação da álgebra à geometria e da geometria à álgebra; mas há pouco no tratado que se assemelhe ao que hoje se considera como geometria analítica. Não há nada de sistemático sobre coordenadas retangulares, pois ordenadas oblíquas são geralmente assumidas; portanto, não há fórmulas para distâncias, inclinação, ponto de divisão, ângulo de duas retas, ou outro material introdutório semelhante. Além disso, em toda a obra não há uma única curva nova traçada diretamente a partir da equação, e o autor se interessava tão pouco por esboçar curvas que nunca entendeu completamente o significado de coordenadas negativas. Ele sabia de modo geral que as ordenadas negativas são orientadas em sentido oposto ao tomado como positivo, mas nunca usou abscissas negativas. Ainda mais, o princípio fundamental da geometria analítica – a descoberta de que equações indeterminadas em duas incógnitas correspondem a lugares – só aparece no segundo livro, e mesmo então só incidentalmente (Boyer, 1974, p.251)."*

Nas considerações feitas acima procuramos ilustrar como o nascimento do pensamento algébrico está fortemente vinculado à geometria. Conforme vimos, as equações eram extremamente associadas a uma representação geométrica. Além disso, suas resoluções envolviam uma argumentação que era também geométrica. Contudo, é importante ilustrar uma situação marcante, na história da Matemática, em que a álgebra é ferramenta para solucionar problemas da geometria: são os teoremas de natureza algébrica que mostram a impossibilidade de determinadas construções geométricas, utilizando apenas régua e compasso. Estes problemas de construção – a saber: a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo – foram tão perseguidos na geometria grega que, segundo Boyer (1974, p.48) ficaram conhecidos como os "três problemas famosos (ou clássicos)" da antiguidade. Somente cerca de 2200 anos após, seria provada a impossibilidade de tais construções com régua e compasso, com as teorias desenvolvidas principalmente por Gauss (1777 – 1855) e Galois (1811 – 1832). Veloso (2005, p.64) comenta que, nesta longa história, o passo fundamental foi compreender como traduzir uma construção geométrica para a linguagem da álgebra.

> *"É precisamente esta conexão, esta equivalência entre um tipo específico de construções geométricas e um conjunto específico de operações algébricas que permitiu resolver, pela negativa — ou seja, pela demonstração da sua impossibilidade — os três famosos problemas da geometria grega."*

É claro que, com a evolução da Matemática, a álgebra passou a ser uma área de conhecimento que se desenvolve sem mais ter a necessidade de uma leitura geométrica. Estruturas teóricas (grupos, anéis, corpos entre outras) foram desenvolvidas e nelas têm-se, nos dias de hoje, interrogações de pesquisa de natureza puramente algébrica.

No entanto, na Matemática a ser trabalhada na escola, sempre que possível, álgebra e geometria devem ser colocadas em estreita relação. Isto contribui para a construção de conhecimento mais pleno de significado por parte do aluno. Os exemplos de resoluções de equações trazidos da história nesta seção, poderiam ilustrar na escola a presença da geometria no desenvolvimento da linguagem algébrica. É claro que a resolução algébrica de equações deve ser ensinada, até mesmo porque a resolução geométrica trata de casos especiais de equações e considera, dentre as possíveis soluções, somente as soluções positivas.

Na próxima seção, trazemos alguns exemplos de possíveis aproximações entre a álgebra e a geometria que poderiam ser feitas na escola, no âmbito dos conteúdos que fazem parte dos tradicionais programas de Matemática.

2.2 Exemplos na escola

O objeto de estudo dessa dissertação é uma proposta de aproximação entre a álgebra e a geometria na escola: a geometria vetorial e os sistemas de equações. No intuito de justificar nossa escolha apresentamos, na secção anterior, uma série de exemplos da história da Matemática que ilustram como o nascimento do pensamento algébrico estava, diversas vezes, associado a uma concretude geométrica.

Nesta secção, buscamos apontar, sob um ponto de vista mais pedagógico, as vantagens de se trabalhar dessa forma, onde a álgebra e a geometria se explicam mutuamente. Destacamos também o valor formativo agregado a uma proposta que contemple uma *interação* entre dois *domínios*: o algébrico e o geométrico, conforme bem documentado em trabalho de Douady (1998).

Os *domínios*, acima referidos, como aponta Maranhão (2002), em referência ao trabalho de Douady, podem ser ramos de conhecimento matemático (numérico, geométrico, algébrico,...) e, por vezes, parte deles.

> *"De acordo com Douady, é necessário que os problemas fornecidos envolvam, pelo menos dois domínios, de modo que um sirva de referência ao outro e possibilitem meios de validação pela ação (Maranhão, 2005, p.118)."*

Considerar que um problema possa ser encarado em dois *domínios*, o algébrico e o geométrico, faz com que o aluno procure soluções ora no campo da álgebra ora no campo da geometria. Esta *interação* provoca o surgimento de novas questões, conjeturas e estratégias de resolução, aproximando o processo de aprendizagem do processo de criação em Matemática.

Esta aproximação se propicia no momento em que os alunos, não conseguindo avançar, pela insuficiência de conhecimentos em um *domínio*, lançam mão de conhecimentos que possuem de outros *domínios*.

Segundo Douady (artigo em inglês, p.174), a geometria permite que os alunos adentrem no problema com algumas idéias, vindas de percepções visuais ou da familiaridade com o ambiente em que vivemos. Entretanto, tais idéias (às vezes) podem conduzir ou a uma interpretação equivocada ou a um impasse para avançar no entendimento do problema. Aí então se fazem necessárias outras ferramentas capazes de contornar o problema. A álgebra, ainda segundo Douady, pode fornecer tais ferramentas[13]. Contudo, o conhecimento dos alunos em álgebra, muitas vezes, ainda pode ser insuficiente para dar conta da situação. Assim, o apelo para o raciocínio numérico ou o retorno a um ponto de vista geométrico, possivelmente diferente do primeiro, pode fazer o aluno avançar no problema. As representações gráficas são freqüentemente utilizadas para colocar em jogo conhecimentos desses *domínios*.

É importante ressaltar, como afirma Maranhão (2005), que o termo adequado neste contexto é *interação entre domínios*[14] e não apenas troca de *domínio*. É nesta interação que aluno avança e somente transferindo ou aplicando conhecimentos de um *domínio* a outro.

> *"Esse termo, interação, prevê idas e vindas entre domínios, estabelecendo relações matemáticas relevantes entre as noções estudadas (Maranhão, 2005, p.130)."*

---

[13] Um exemplo que ilustra muito bem a idéia acima é o problema de encontrar uma reta tangente ao gráfico de $y = x^3$ na origem. Geometricamente, os alunos acreditam que a reta não existe, pois imaginam que a mesma não possa interceptar a curva. No entanto, conseguem avançar quando lançam mão de ferramentas algébricas, calculando a inclinação da reta, através da derivada.

[14] Em francês, *jeux des cadres*.

A título de ilustração, seguem alguns exemplos de possíveis aproximações entre álgebra e geometria, no âmbito dos conteúdos que já fazem parte dos tradicionais programas de Matemática das escolas. Nesses exemplos, buscamos evidenciar, como a *interação* entre os *domínios* agrega, aos conteúdos, um maior valor formativo.

Primeiro exemplo: Áreas e identidades algébricas

Um tópico que aparece usualmente na 7ª serie é o estudo dos produtos notáveis. Dentre esses produtos, se encontra o quadrado de uma soma, cuja leitura geométrica, tomada da proposição IV (apresentada na seção anterior), agrega uma nova interpretação matemática para a identidade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

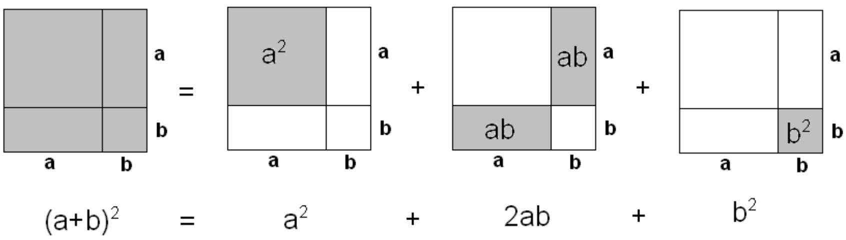


Fig. 14 – Relações entre áreas e a identidade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Assim, ao invés das operações puramente algébricas $(a+b)^2 = (a+b).(a+b) = a.(a+b) + b.(a+b) = a^2 + ab + b^2 + ab = a^2 + 2ab + b^2$, que validam a identidade, a prova geométrica agrega novo significado ao utilizar relações de áreas: a área do quadrado de lado (a + b) é equivalente à soma da área do quadrado de lado a, com a área de dois retângulos de lados a e b, com a área do quadrado de lado b.

É interessante observar que, historicamente, a leitura geométrica desta igualdade precede da leitura algébrica, pois a mesma estava presente no livro II dos Elementos de Euclides.

Contudo, em alguns livros didáticos, a representação geométrica é mostrada e, em seguida, abandonada por uma representação puramente algébrica. É importante reforçar então, que é a *interação* entre os *domínios* algébrico e geométrico (neste caso até mesmo o *domínio* numérico) que pode contribuir para a superação do freqüente erro cometido pelos alunos, ao afirmarem que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

O próprio teorema de Pitágoras, quando é demonstrado no geral, faz uso de semelhança de triângulos e manipulações algébricas nas identidades entre as razões em proporção:

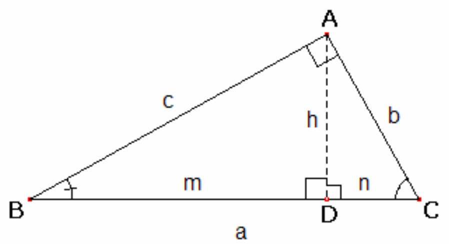


Fig. 15 – Semelhança de triângulos e o teorema de Pitágoras

Da semelhança dos triângulos ABC e DBA vem que:

$\frac{c}{a} = \frac{m}{c}$ *(I)*

Da semelhança dos triângulos ABC e DCA vem que:

$\frac{b}{a} = \frac{n}{b}$ *(II)*

Como BC = BD + DC vem que $a = m + n$ *(III)*

De (I) temos que $c^2 = a.m$ *(IV)*

De (II) temos que $b^2 = a.n$ *(V)*

Assim, temos de (IV) e (V) que $c^2 + b^2 = a.m + a.n$*, ou ainda*

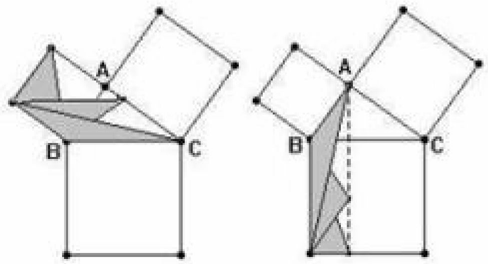
$c^2 + b^2 = a.(m+n)$ *(VI)*

Assim, substituindo (III) em (VI) temos que:

$c^2 + b^2 = a.a = a^2$

Logo $a^2 = b^2 + c^2$.

Porém, a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$, que já está provida de uma leitura geométrica (relação entre as medidas a, b e c, dos lados de um triângulo retângulo) pode ser mais significativa, sob o ponto de vista geométrico, se demonstrada via equivalência de áreas: a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.



O deslocamento de vértice dos triângulos assinalados, mantém a área constante. Assim, fazendo o mesmo raciocínio sobre o quadrado de lado AC, podemos concluir que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa.

Fig. 16 – Relações entre áreas e o teorema de Pitágoras

E mais, é ainda através dessa leitura geométrica, que se coloca a natural pergunta: como se relacionam as áreas dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo que não é retângulo?

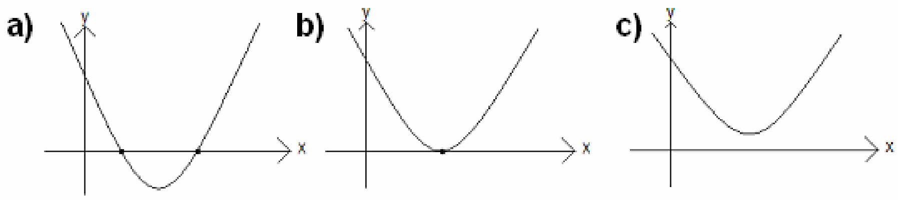
A desigualdade das áreas nesses triângulos pode gerar novas questões e conjeturas, a partir das quais pode-se deduzir a lei dos cossenos. Dessa forma, o processo de aprendizagem aproxima-se do processo de criação em Matemática, conforme comentado anteriormente.

Segundo exemplo: Equações de grau dois e a função quadrática

O estudo das equações de grau dois e das funções quadráticas usualmente aparece nos livros de 8ª série (do ensino fundamental) ou de 1º ano (do ensino médio). Entretanto, estes conteúdos são, muitas vezes, tratados de forma isolada, sendo apresentadas inicialmente as equações e, somente quando o estudo de equações chega ao fim, é que é apresentada a função.

Porém, resolver a equação $a.x^2 + b.x + c = 0$, é equivalente a determinar para que valores de x a função $y = a.x^2 + b.x + c$ é igual a zero. Ou ainda, trata-se de determinar a(s) coordenada(s) x do(s) ponto(s) em que o gráfico da função corta o eixo das abscissas.

Se tais tópicos não fossem trabalhados de forma isolada, a discussão sobre o número de raízes da equação $a.x^2 + b.x + c = 0$, passaria também a ter uma leitura geométrica, onde a existência de raízes corresponderia a pontos de intersecção do gráfico da função com o eixo x, conforme a figura 17.



a) a equação possui duas raízes reais e distintas

b) a equação possui duas raízes reais e iguais

c) a equação não possui raízes reais

Fig. 17 – Discussão sobre as raízes da equação de grau 2

Ainda é interessante observar que, apesar das equações e funções quadráticas aparecerem em livros de 8ª série e de 1º ano, a definição geométrica da parábola – conjunto dos pontos do plano que se mantém a igual distância de um dado ponto F (o foco) e de uma dada reta r (a diretriz), conforme a figura 18 – quando encontrada, figura apenas em livros de 3º ano do ensino médio. Assim, o gráfico da função quadrática é usualmente chamado de "parábola" sem maiores explicações.

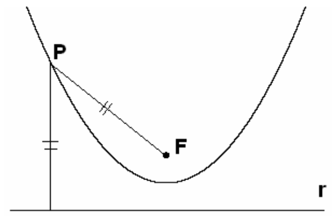


Fig. 18 – Definição geométrica da parábola

Entretanto, é a definição geométrica que dá origem à equação e significado ao nome da curva[15], tornando o gráfico de $y = x^2$ especial, na família de funções $y = x^n$ com n par.

[15] Uma situação por mim vivenciada, inúmeras vezes em sala de aula, ao discutir sobre como é o gráfico das funções seno e co-seno, é a de alunos afirmarem que são várias "parábolas", umas côncavas para cima e outras côncavas para baixo.

Contudo, a partir da definição geométrica e do conceito algébrico de reta tangente à curva, uma propriedade interessante poderia ser explorada: a reflexão de um raio paralelo ao eixo da parábola passa por seu foco.

A demonstração da propriedade enunciada acima, requer argumentos algébricos (equação da reta, equação da parábola, coeficiente angular,...) e geométricos (ângulos, bissetriz, reta tangente...). Portanto, é através da *interação* entre esses *domínios*, que podemos compreender a propriedade que nos ajuda a entender o funcionamento de uma antena parabólica.

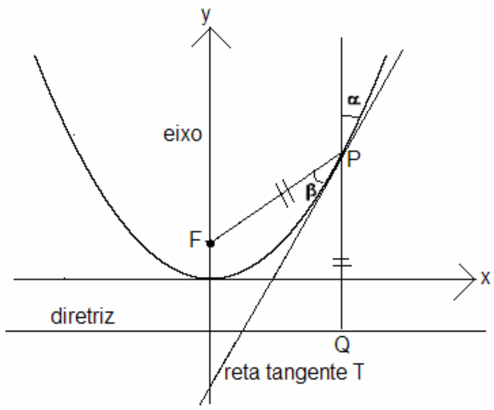


Fig. 19 – Propriedade da parábola

A partir da definição geométrica é possível mostrar que, no sistema de coordenadas escolhido na figura 19, a parábola tem como equação $y = ax^2$*, sendo* $a > 0$*,* $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ *e diretriz* $y = -\frac{1}{4a}$.

Definindo reta tangente à parábola no ponto (x_o, y_o)*, como a reta que tem inclinação* $2.a.x_o$ *e que passa pelo ponto* (x_o, y_o)*, pode-se mostrar que a reta que contém os pontos F e Q é perpendicular à reta tangente.*

Do perpendicularismo das retas, vem que a reta tangente é bissetriz do ângulo P, no triângulo isósceles FPQ, e então podemos afirmar que $\alpha = \beta$.

Usando o princípio segundo o qual, quando um raio incide sobre uma superfície refletora, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, temos que a reflexão de um raio paralelo ao eixo da parábola passa por seu foco.

Terceiro exemplo: As equações na geometria analítica

No ensino médio, a geometria analítica é a parte da Matemática onde, através do sistema de coordenadas, a geometria e a álgebra deveriam se integrar naturalmente. Nesse estudo, seria muito interessante que os alunos, já tendo uma representação geométrica do problema a ser resolvido, fossem freqüentemente provocados a fazer a escolha do sistema de coordenadas, entendendo que uma dada escolha pode facilitar ou dificultar a resolução do problema. Esta ação possui grande valor formativo, pois resgata o propósito da geometria analítica: resolver algebricamente um problema de natureza geométrica. Entretanto, na maior parte das vezes, o sistema de coordenadas é a primeira parte feita no desenho.

A aprendizagem da geometria analítica seria mais significativa se os alunos fossem provocados a raciocinar tanto da álgebra para geometria, como da geometria pra a álgebra. Da álgebra para geometria: por exemplo, as soluções da equação y = 2, deveriam ser entendidas como o conjunto de todos os pontos do plano cuja segunda coordenada é igual a 2, ou seja, uma reta paralela ao eixo das abscissas. Da geometria para a álgebra: dada uma reta, escolher um sistema de coordenadas no plano para descrever, através de uma equação, o conjunto dos pontos (x, y) que pertencem a esta reta, como é mostrado a seguir.

> *Dada uma reta r (figura 20), vamos escolher um sistema de coordenadas[16] para descrever a reta, através de uma equação (figura 21).*

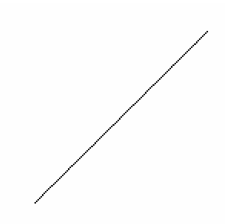


Fig. 20 – A reta

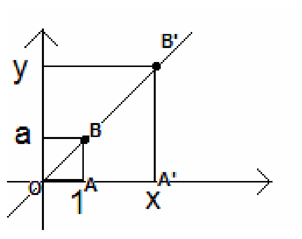
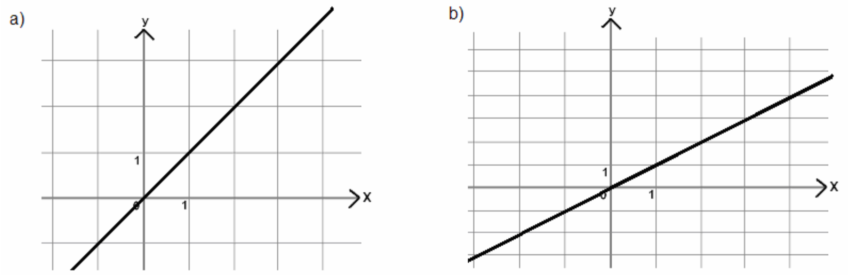


Fig. 21 – Equação da reta

[16] No sistema de coordenadas escolhido, a reta passa pela origem, porém, caso isto não ocorra, basta fazer uma translação de eixos no sistema de coordenadas.

Da semelhança dos triângulos OAB e AO'B' vem que $\frac{y}{a} = \frac{x}{1}$*, de onde escrevemos que y = ax.*

Uma vez deduzida a equação da reta, podemos obter outras representações gráficas da mesma ao utilizarmos escalas distintas nos eixos x e y, conforme a figura 22, onde estão duas representações gráficas da reta de equação y = x.



a) Representação gráfica de y = x com a mesma escala nos eixos x e y.

b) Representação gráfica de y = x com escalas diferentes nos eixos x e y.

Fig. 22 – Representações gráficas da reta y = x

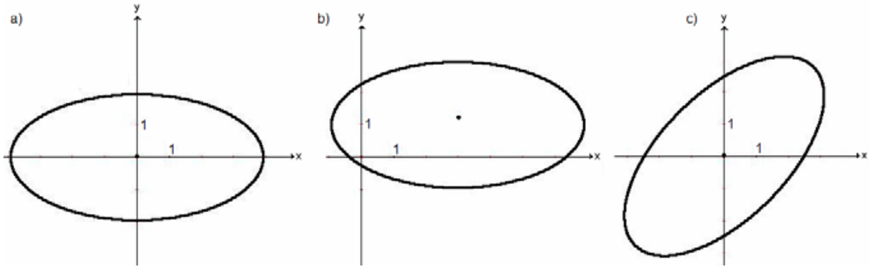
Como podemos observar através do exemplo acima, é fundamental levar em conta as escalas dos eixos coordenados e não somente a inclinação geométrica da reta. O coeficiente angular da mesma só coincide com a tangente da inclinação geométrica, quando utilizamos uma mesma escala em ambos os eixos. Portanto, é com a leitura algébrica de taxa de variação, que deve ser interpretado o coeficiente angular[17].

Ainda neste tópico de equações, a *interação* entre álgebra e geometria pode fundamentar o estudo completo da equação $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$. O ganho no valor formativo advindo dessa discussão, em comparação aos casos pontuais da reta, do círculo e da parábola (aqui bem particular, apenas y em função de x) é muito grande. Além do entendimento das curvas

---

[17] O coeficiente angular da reta que passa por (x_1, y_1) e (x_2, y_2), com $x_1 \neq x_2$ é dado por $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

que correspondem a essa equação, também se apresenta a questão da complexidade da equação em função da escolha do sistema de coordenadas, conforme podemos observar na figura 23.



a) Equação da elipse na posição padrão centrada na origem: $3x^2 + 12y^2 = 46$

b) Equação da elipse transladada: $3x^2 + 12y^2 – 18x – 24y – 7 = 0$

c) Equação da elipse rotacionada: $15x^2 – 18xy + 15y^2 – 92 = 0$

Fig. 23 – Equações da elipse em diferentes posições

Quarto exemplo: perímetros, áreas e funções

No estudo das funções é muito enriquecedor tratar de problemas que envolvem a geometria. Argumentos geométricos podem ser utilizados para compreender o comportamento de funções. Duas situações ilustram estas possibilidades:

1ª situação: Estudar a variação da área de um retângulo, de perímetro fixo, em função de um de seus lados.

Se o perímetro do retângulo é P, temos que:

$2x + 2y = P$

$x + y = P/2$

$y = P/2 – x$ *(I)*

A área do retângulo é dada por:

$A = x.y = x.(P/2 – x)$ *(II)*

Através dos gráficos das funções[18] *(I) e (II) podemos fazer um estudo qualitativo dos retângulos de perímetro constante:*

[18]Com softwares como o Winplot, de domínio público, esses gráficos podem ser facilmente implementados.

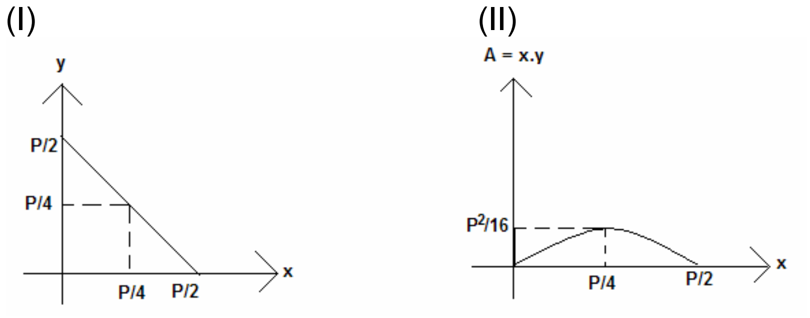


Fig. 24 – Esboço dos gráficos das funções (I) e (II)

No gráfico de (I) vemos que a família de retângulos de perímetro constante é infinita e que existe variação na área.
No gráfico de (II) vemos que existe uma área máxima.

É interessante observar que o problema de área máxima pode ser resolvido na escola, pois trata-se de determinar o ponto de máximo de uma função quadrática. Entretanto, a resolução apresentada a seguir, através da *interação* da álgebra e da geometria, viabiliza este estudo, mesmo antes do ensino das funções quadráticas.

Transferindo o problema para o domínio geométrico, a representação gráfica, na figura 24, sugere o "quadrado" como candidato ao retângulo de área máxima.
A comprovação de que realmente, para $x = P/4$ a função assume seu máximo, pode ser feita algebricamente.
Se para $x = P/4$ a área é máxima, então $A(x) \le A(P/4)$ para todo x no intervalo [0, P/2].
Porém, $x.(P/2 - x) \le P/4.(P/2 - P/4) \Leftrightarrow$
$Px/2 - x^2 \le P^2/16 \Leftrightarrow$
$-x^2 + Px/2 - P^2/16 \le 0 \Leftrightarrow$
$-(x^2 - Px/2 + P^2/16) \le 0 \Leftrightarrow$
$-(x - P/4)^2 \le 0 \Leftrightarrow (x - P/4)^2 \ge 0$
Como $(x - P/4)^2$ é sempre maior ou igual a zero, temos para todo $0 \le x \le P/2$, $A(x) \le A(P/4)$.
Assim, em $x = P/4$ a área é máxima.

2ª situação: Estudar a variação do perímetro de um retângulo, de área fixa, em função de um de seus lados.

Se a área do retângulo é A, temos que:

$x.y = A \rightarrow y = A/x$ (III)

O perímetro do retângulo é dado por:

$P = 2x + 2y \rightarrow P = 2x + 2A/x$ (IV)

Observando os gráficos das funções[19] (III) e (IV) podemos fazer um estudo qualitativo dos retângulos de área constante:

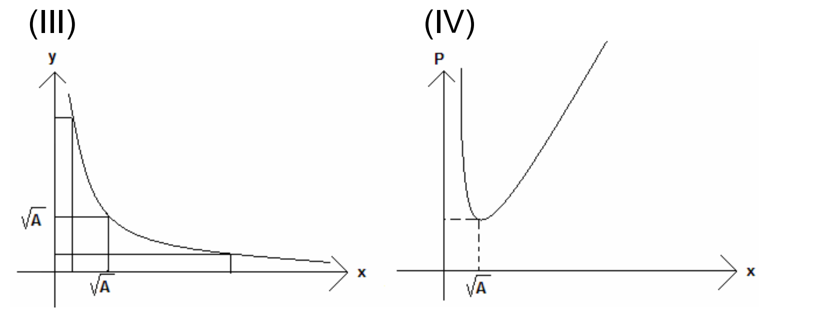


Fig. 25 – Esboço dos gráficos das funções (III) e (IV)

No gráfico de (III) vemos que a família de retângulos de área constante é infinita e que existe variação no perímetro.

No gráfico de (IV) vemos que existe um perímetro mínimo.

O problema de encontrar o perímetro mínimo é dificilmente abordado na escola, pois sua resolução algébrica utiliza, usualmente, o conceito de derivada. Entretanto, é interessante reforçar que, conforme comenta Douady (artigo em inglês, p.174), quando o conhecimento dos alunos em álgebra é ainda insuficiente para dar conta da situação, o apelo para o raciocínio geométrico pode fazer o aluno avançar no problema. Assim, através da *interação* entre os *domínios* algébrico e geométrico, podemos encontrar o

[19] Com softwares como o Winplot, de domínio público, esses gráficos podem ser facilmente implementados.

retângulo de perímetro mínimo e área constante, de maneira similar a que apresentamos para o retângulo de área máxima e perímetro constante.

> *Transferindo o problema para o domínio geométrico, a representação gráfica, na figura 25, sugere o "quadrado" como candidato ao retângulo de perímetro mínimo.*
>
> *A comprovação de que, para x = $\sqrt{A}$, a função assume seu mínimo, pode ser feita algebricamente:*
>
> *Se P(x) é mínimo para x=$\sqrt{A}$, então P(x) ≥ P($\sqrt{A}$) para x > 0.*
>
> *Porém,* $\frac{2x^2+2A}{x} \geq \frac{2A+2A}{\sqrt{A}}$ *para x > 0* $\Leftrightarrow$
>
> $\sqrt{A}\ (2x^2+2A) \geq$ *4Ax para x > 0* $\Leftrightarrow$
>
> $2\sqrt{A}\cdot x^2 - 4\cdot A\cdot x + 2A\sqrt{A} \geq 0 \Leftrightarrow$
>
> $\sqrt{A}\cdot x^2 - 2A\cdot x + A\sqrt{A} \geq 0 \Leftrightarrow$
>
> $x^2 - 2\sqrt{A}\cdot x + A \geq 0 \Leftrightarrow$
>
> $\left(x-\sqrt{A}\right)^2 \geq 0$
>
> *Como* $\left(x-\sqrt{A}\right)^2$ *é sempre maior ou igual a zero, temos que, para todo x > 0, P(x) ≥ P($\sqrt{A}$).*
>
> *Assim, em x =$\sqrt{A}$ o perímetro é mínimo.*

Quinto exemplo: Números complexos e a equação $x^n - 1 = 0$

Um número complexo possui uma representação algébrica, z = a + b.i (onde i é a unidade imaginária e a e b são números reais) e uma representação geométrica, onde é estabelecida uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e cada número complexo. As duas representações aparecem na escola e nos livros didáticos, porém muitas vezes separadas. Primeiramente são trabalhadas a forma algébrica e as operações nessa forma, para somente depois iniciar o estudo da forma geométrica.

Um estudo apoiado simultaneamente nas duas representações daria mais significado para este conteúdo. Se cada número complexo for representado por uma seta com origem na origem dos eixos coordenados, então, na adição, pode-se mostrar que a soma de números complexos corresponde à soma dos vetores representados pelas setas.

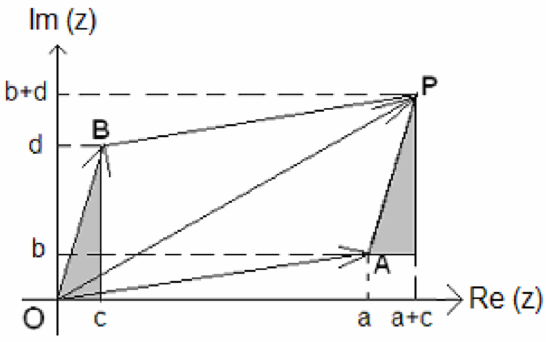


Fig. 26 – Representação vetorial da soma de números complexos

Dentro das operações poderia se discutir também qual o efeito geométrico da multiplicação. O produto de z pela unidade imaginária, por exemplo, equivale a uma rotação de 90º de z, em torno da origem no sentido anti-horário (figura 27). E mais geralmente, o produto de z por qualquer complexo de módulo 1, gera uma rotação de z ao redor da origem.

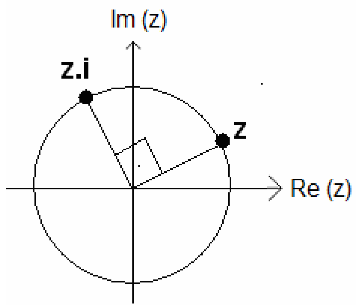


Fig. 27 – Representação geométrica de z e z.i

A interação entre a forma algébrica e geométrica dos números complexos, ao invés de cálculos isolados em cada uma destas representações, agrega maior valor formativo a este estudo no momento em que coloca o foco das atividades no pensamento matemático.

Na escola, usualmente são poucas as equações polinomiais que os alunos aprendem a resolver: as de grau 1 e 2, as de grau 3 (com uma raiz conhecida) e as biquadradas. Entretanto, se no estudo de números complexos forem abordadas as raízes enésimas da unidade, é possível resolver geometricamente, uma nova família de equações: $x^n - 1 = 0$.

Dizemos que um número complexo z é raiz enésima da unidade, se $z^n = 1$. Assim, escrevendo os dois lados da igualdade, na forma trigonométrica obtemos:

$[r.(\cos\theta + i.\text{sen}\,\theta)]^n = 1.(\cos 0^o + i.\text{sen}\, 0^o)$

$r^n.[\cos(n\theta) + i.\text{sen}\,(n\theta)] = 1.(\cos 0^o + i.\text{sen}\, 0^o)$

De onde vem que:

$$r^n = 1 \text{ e } \begin{cases} \cos\ (n\theta) = \cos\ 0^o \\ sen\ (n\theta) = sen\ 0^o \end{cases}$$

Se $r^n = 1$, então $r = 1$ (pois r é real não negativo).

Se $\begin{cases} \cos\ (n\theta) = \cos\ 0^o \\ sen\ (n\theta) = sen\ 0^o \end{cases}$, então $n.\theta = 0^o + k.360^o$, de onde vem que $\theta = k.360^o/n$, sendo $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.

Geometricamente, podemos visualizar as raízes enésimas da unidade como sendo os vértices de um polígono regular de n lados, inscrito em uma circunferência de raio 1. Como uma das raízes será sempre a unidade, através de n -1 rotações de 360º/n ao redor da origem, a partir do ponto (1, 0), podemos obter rapidamente as demais raízes. A título de ilustração, segue um exemplo.

Uma resolução geométrica para a equação $x^6 - 1 = 0$.

Como uma raiz é a própria unidade, podemos obter as demais raízes, através de 5 rotações de 60º, a partir do ponto (1, 0), ao redor da origem. Assim,

$x_1 = 1.(\cos 0^o + i.\text{sen}\, 0^o) = 1$,

$x_2 = 1.(\cos 60^o + i.\text{sen}\, 60^o) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$x_3 = 1.(\cos 120^o + i.\text{sen}\, 120^o) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

,$x_4 = 1.(\cos 180^o + i.\text{sen}\, 180^o) = -1$

$$x_5 = 1.(\cos 240^o + i.\text{sen } 240^o) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x_6 = 1.(\cos 300^o + i.\text{sen } 300^o) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

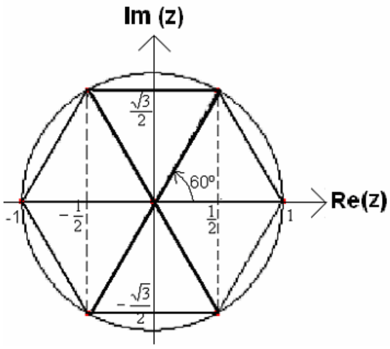


Fig. 28 – Raízes sextas da unidade

Uma outra conclusão que pode ser obtida da representação geométrica é que as raízes não reais ocorrem como vértices simétricos em relação ao eixo horizontal, de onde concluímos que essas raízes são duas a duas conjugadas.

Nos exemplos acima, procuramos mostrar que raciocínios de natureza geométrica podem estar presentes em situações, que na escola, são tratadas normalmente apenas com raciocínios de natureza algébrica. Essa predominância das representações algébricas pode ter razão na presença de regras de manipulação bem definidas e de procedimentos algorítmicos que resolvem, às vezes, de forma quase mecânica, as equações. Já resoluções geométricas, de um modo geral, exigem procedimentos de construção, para os quais não existem regras pré-definidas. Cada novo problema proposto corresponde à criação de uma nova estratégia de resolução. Porém, conforme já comentamos, na álgebra da escola uma representação geométrica dá significado aos procedimentos algébricos, além de agregar aos conteúdos um maior valor formativo.

Uma outra aproximação entre a álgebra e a geometria que pode ser trabalhada na escola é na resolução qualitativa de sistemas de equações, através da geometria vetorial. Isto é objeto de detalhamento no próximo capítulo.

3. A GEOMETRIA VETORIAL E OS SISTEMAS DE EQUAÇÕES – UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO NA ESCOLA

Neste capítulo será apresentada uma proposta para a introdução da geometria vetorial na escola, dentro do espírito da aproximação entre geometria e álgebra, de forma a ter-se no conteúdo escolar que trata de sistemas de equações um maior valor formativo.

Iniciamos com uma análise sobre como o tópico de sistemas de equações é trabalhado na escola e trazemos sugestões sobre como isto poderia ser feito na escola. Apresentamos cuidadosamente os conteúdos que necessitam ser inseridos no currículo do ensino médio para viabilizar a proposta e também sugerimos como adaptar a proposta ao currículo do ensino médio, sendo a sua viabilidade objeto de comprovação na descrição e análise da experiência, a ser feita no capítulo 4.

Finalizamos o capítulo com uma análise especial sobre as dificuldades que os alunos têm com o conceito de vetor, crucial para realização da proposta. Breves considerações sobre o surgimento do conceito de vetor (século XVII), na época um conceito surpreendente por integrar aspectos algébrico e geométrico, indicam que o conceito pode apresentar naturais dificuldades de compreensão por parte dos alunos.

3.1 Como o assunto é tratado na escola

Uma análise de alguns livros didáticos de ensino médio sinaliza que os sistemas de equações lineares são estudados usualmente no contexto da álgebra. A resolução do sistema é feita segundo a regra de Cramer e também pelo método do escalonamento. A primeira, além de muito árdua e demorada na maior parte dos casos, só permite solucionar sistemas quadrados com única solução. Além disso, esta regra está associada a um conjunto de fórmulas que exigem do aluno apenas memorização. Já o método do escalonamento, mais compreensível nas manipulações algébricas a serem feitas para transformar um sistema em outro equivalente mais simples, resolve sistemas gerais m x n.

Mas, mesmo com este método, as possíveis soluções do sistema ainda se apresentam de difícil compreensão para os alunos, pois no geral estão desprovidas de leitura geométrica, quando se trata de sistemas de três variáveis.

Nesta análise de livros didáticos observa-se que a discussão sobre a existência de soluções aparece de diferentes formas.

- A classificação do sistema é feita através da regra de Cramer:

Discussão de um sistema n×n com base na regra de Cramer

Discutir um sistema linear de **n** equações com **n** incógnitas é analisá-lo mediante determinado critério, e concluir se ele é **possível e determinado possível e indeterminado** ou **impossível**.

Já sabemos, pela regra de Cramer, que:

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D},\ \ldots,\ x_n = \frac{D_n}{D}$$

As seguintes situações podem ocorrer:

1ª) Quando $D \neq 0$, o sistema é **possível e determinado**, não importando o valor que cada um dos demais determinantes assuma.

2ª) Quando $D = 0$ e $D_1 = D_2 = D_3 = \ldots = D_n = 0$, o sistema é **possível e indeterminado**.

Neste caso, temos $x_1 = \frac{0}{0}$, $x_2 = \frac{0}{0}$, $x_3 = \frac{0}{0}$, ..., $x_n = \frac{0}{0}$ e, como sabemos, não temos como determinar o quociente $\frac{0}{0}$.

3ª) Quando $D = 0$ e **pelo menos um** dos demais determinantes é diferente de zero, o sistema é **impossível**.

De fato, quando ocorre $\frac{D_i}{0}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, com $D_i \neq 0$, o quociente **não existe**, logo, fica impossível concluir o cálculo.

Fig. 1 – Livro didático A

Além de ser apenas um conjunto de regras para que os alunos decorem, a segunda afirmativa está incorreta, visto que existem sistemas impossíveis que atendem a condição $D = D_1 = D_2 = D_3 = \ldots = D_n = 0$. Como, por exemplo, no sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$, que na interpretação geométrica, fica evidentemente impossível (visto que se tratam de três planos paralelos).

- Outra classificação também feita pela regra de Cramer:

5. Classificação de um sistema linear

Um sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções que ele admite. Se o sistema admitir pelo menos uma solução, dizemos que ele é **possível** (ou **compatível**), e se não admitir solução, dizemos que é **impossível** (ou **incompatível**).

Um sistema **possível** é chamado de **determinado** quando admitir uma única solução, ou **indeterminado** quando admitir infinitas soluções.

Quando estudamos a resolução de um sistema linear pela regra de Cramer, vimos que, se $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado, pois apresentava solução única.

No caso em que $D = 0$, duas situações podem ocorrer:

- se o determinante de alguma das incógnitas for diferente de zero, o sistema é impossível;
- se todos os determinantes das incógnitas forem nulos, o sistema, se tiver solução, será indeterminado.

Fig. 2 – Livro didático B

Novamente um conjunto de regras, com linguagem complicada, desprovido de significado. Apesar do método apresentado não conter erros, ele é insuficiente para determinar o que acontece quando todos os determinantes são nulos, pois como saber se o sistema tem ou não solução? Além de não justificarem o exposto acima, os autores não conseguem apresentar um esquema capaz de dar conta da classificação de todos os sistemas.

- A classificação é feita através do método do escalonamento e da regra de Cramer:

8 Discussão de um sistema

Consideremos novamente o sistema $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$, cuja forma escalonada é:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ \underbrace{(ad - bc)}_{D} \cdot y = (af - ce) \quad (*) \end{cases}$$

em que $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ é o determinante da matriz incompleta do sistema.

Já vimos que, se $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado e a solução pode ser obtida através da Regra de Cramer.

Se $D = 0$, o 1º membro de (*) se anula. Dependendo do anulamento, ou não, do 2º membro de (*), temos SPI ou SI.

Em geral, sendo D o determinante da matriz incompleta dos coeficientes de um sistema linear, temos:

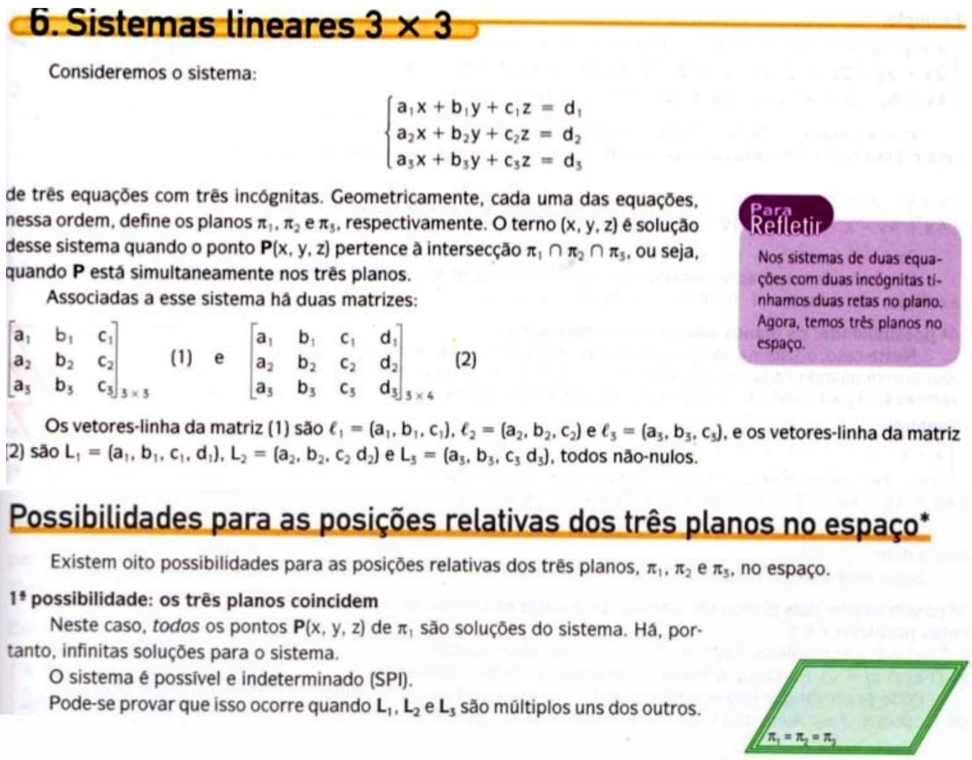
$D \neq 0 \longrightarrow$ SPD
$D = 0 \longrightarrow$ (SPI ou SI)

Esse resultado é válido para qualquer sistema linear de n equações e n incógnitas, $n \geqslant 2$.

Fig. 3 – Livro didático C

Neste caso, a discussão utiliza determinantes e escalonamento. Inicialmente, calcula-se o determinante da matriz formada pelos coeficientes das incógnitas. Caso o resultado seja diferente de zero, o sistema admite solução única, porém se ele é zero, para classificar o sistema é necessário o escalonamento. Mas, por que então não trabalhar apenas com o escalonamento, dado que resolve sistemas de ambos os tipos?

Em alguns livros, para os sistemas de duas equações e duas incógnitas aparece um estudo geométrico qualitativo, através da análise das posições relativas entre duas retas. Mas quando o número de variáveis é maior do que dois, a representação geométrica usualmente não é abordada, sendo comum o escalonamento ou a regra de Cramer. Neste caso, a resposta é só algébrica: ao final da resolução, os alunos não entendem x = 3, y = 2 e z = 1, por exemplo, como o ponto de intersecção entre 3 planos, afirmando incessantemente que o sistema possui 3 soluções. Porém, em um livro de ensino médio, encontramos a apresentação da representação geométrica para sistemas de ordens 2 e 3. No caso 2 x 2 são analisadas as posições entre retas e no caso 3 x 3 são analisadas as posições entre planos.



6. Sistemas lineares 3 × 3

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

de três equações com três incógnitas. Geometricamente, cada uma das equações, nessa ordem, define os planos π_1, π_2 e π_3, respectivamente. O terno (x, y, z) é solução desse sistema quando o ponto **P**(x, y, z) pertence à intersecção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, ou seja, quando **P** está simultaneamente nos três planos.

Associadas a esse sistema há duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}_{3\times 3} \quad (1) \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}_{3\times 4} \quad (2)$$

Para Refletir

Nos sistemas de duas equações com duas incógnitas tínhamos duas retas no plano. Agora, temos três planos no espaço.

Os vetores-linha da matriz (1) são $\ell_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\ell_2 = (a_2, b_2, c_2)$ e $\ell_3 = (a_3, b_3, c_3)$, e os vetores-linha da matriz (2) são $L_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, $L_2 = (a_2, b_2, c_2\ d_2)$ e $L_3 = (a_3, b_3, c_3\ d_3)$, todos não-nulos.

Possibilidades para as posições relativas dos três planos no espaço*

Existem oito possibilidades para as posições relativas dos três planos, π_1, π_2 e π_3, no espaço.

1ª possibilidade: os três planos coincidem

Neste caso, *todos* os pontos **P**(x, y, z) de π_1 são soluções do sistema. Há, portanto, infinitas soluções para o sistema.

O sistema é possível e indeterminado (SPI).

Pode-se provar que isso ocorre quando L_1, L_2 e L_3 são múltiplos uns dos outros.

Fig. 4 – Livro didático D

Porém, o autor não explica nem de onde vem a equação do plano, nem as afirmações que faz ao classificar o sistema. Além disso, apresenta uma linguagem complicada – “vetor linha da matriz”, “L_1, L_2, L_3 são múltiplos uns dos outros” – pois desprovida de maior significado geométrico. E assim seguem os demais casos com afirmativas que não são justificadas. Desta forma, são apenas mais regras para decorar, sendo a apresentação desnecessária.

Na próxima seção exibimos cuidadosamente nossa proposta de intervenção na escola – que trata da geometria vetorial e os sistemas de equações – na intenção de trazer para o estudo de sistemas uma leitura repleta de significado geométrico, agregando assim a esse conteúdo, um maior valor formativo.

3.2 Como poderia ser feito na escola

O objetivo da proposta de introdução da geometria vetorial na escola é tornar possível a interpretação geométrica de sistemas de equações. No caso dos sistemas com duas variáveis, as equações correspondem a retas no plano. Já no caso dos sistemas com três variáveis, as equações devem ser entendidas como correspondentes a planos no espaço. Com esse entendimento, a resolução de um sistema fica provida de leitura geométrica: existência de soluções significa existência de intersecções entre retas ou planos.

Para fazer um estudo geométrico dos sistemas com três incógnitas é então necessário introduzir a equação do plano no ensino médio. Sabemos que este conceito exige alguns pré-requisitos. Portanto, anteriormente devem ser abordados conceitos básicos da geometria vetorial, os quais tornarão possível a interação entre a geometria e álgebra, no estudo dos sistemas. A seguir delineamos de forma breve os conceitos a serem trabalhados na escola, e na próxima seção apresentamos cuidadosamente estes conceitos.

Inicialmente é trabalhado o conceito de vetor, ponto crucial para o desenvolvimento de toda seqüência de conteúdos. Após o estudo deste conceito, são trabalhadas a soma de vetores e a multiplicação de vetor por escalar no contexto geométrico. Com a introdução do sistema de coordenadas, são deduzidas coordenadas da soma de vetores e da multiplicação de vetor por escalar no contexto algébrico. Através de simples aplicação do teorema de Pitágoras, é também deduzida a condição de ortogonalidade de vetores.

À luz da ortogonalidade de vetores, a equação da reta $ax + by = c$, passa a ter uma nova leitura: a equação corresponde à reta perpendicular ao vetor $n = (a, b)$ que passa pelo ponto $(0, c/b)$.

O passo seguinte é reconstruir, no espaço tridimensional, os conceitos que foram construídos no plano. Além disso, é introduzida a equação paramétrica da reta e, por último, é deduzida a equação do plano, também através da ortogonalidade de vetores.

Desta forma, como uma generalização do que foi feito para a equação da reta $ax + by = c$, o conjunto solução da equação $ax + by + cz = d$, passa a ser interpretado como o plano perpendicular ao vetor $n = (a, b, c)$ passando pelo ponto $(0, 0, d/c)$.

Na transposição dos tópicos da geometria vetorial para uma proposta que possa ser aplicada ao ensino médio, percebeu-se que alguns assuntos não precisariam ser abordados de forma geral. De início o conceito de produto interno pareceu ser necessário e um grande ganho didático foi concluir que o mesmo não precisaria ser discutido, uma vez que para compreender a equação do plano é necessária apenas a condição de ortogonalidade entre vetores.

Resumindo, a seqüência de conteúdos a ser trabalhada seria a seguinte:

- Conceito de vetor e operações geométricas (soma, diferença e produto por escalar).
- Coordenadas do vetor no plano e operações algébricas (soma, diferença e produto por escalar).
- Ortogonalidade de vetores e a equação da reta no plano.
- Vetores no espaço e operações (soma, diferença e produto por escalar).
- A equação paramétrica da reta no espaço.

- Ortogonalidade de vetores e a equação do plano no espaço.

Feito isso, os alunos estão prontos para entenderem os sistemas de equações com três variáveis de forma geométrica, pois trata-se apenas de posições relativas de planos no espaço.

Apesar da proposta apresentada nesta dissertação encerrar com a análise geométrica qualitativa dos sistemas de três incógnitas, na escola este estudo de sistemas de equações naturalmente avança na resolução algébrica, via o escalonamento que trata de determinar as soluções numericamente. Neste caminho percebemos, para o estudo de sistemas, uma aproximação qualitativa de natureza geométrica quando se discute a existência e quantidade de soluções. Ao mesmo tempo, também existe uma aproximação quantitativa, de natureza algébrica, quando se buscam as soluções numéricas através do processo de escalonamento.

De acordo com as reflexões apresentadas no capítulo 2, fundamentadas em trabalhos de Douady (1998), percebemos na *interação entre dois domínios* – algébrico e o geométrico – uma maneira de contribuir, de forma significativa, na compreensão da classificação dos sistemas, quando se fala em "sistemas determinados", "sistemas indeterminados" e "sistemas impossíveis", sempre motivo de grande confusão para os alunos. No caso de um sistema que possui uma única solução, permite que esta seja interpretada como um ponto do plano ou um ponto do espaço[20]. No caso dos sistemas que possuem infinitas soluções, permite que as mesmas sejam interpretadas como pontos que determinam ou uma reta ou um plano. No caso dos sistemas impossíveis, fornece uma justificativa geométrica da inexistência de solução, dada pelo paralelismo das retas ou dos planos.

Contudo, é fundamental destacar uma preocupação constante que esteve por trás ao longo da elaboração desta proposta, com objetivo de

[20] Uma concepção errada, que usualmente percebia em meus alunos, era confundir a quantidade de soluções com a quantidade de variáveis. Em um sistema que admite, por exemplo, apenas $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$ como solução, muitos alunos afirmavam que o sistema tinha exatamente três soluções.

contribuir na direção de um ensino de Matemática com maior valor formativo: a questão da demonstração. Mesmo sem a utilização das palavras “teorema” e “demonstração”, sempre houve a preocupação de fundamentar e explicar matematicamente o que estava sendo trabalhado. A razão dessa escolha encontra-se apoiada no princípio de que quando o aluno estabelece conjeturas e justificativas, se apropria de um conhecimento matemático de forma mais significativa, pois ao longo das atividades participa de forma ativa no seu processo de aprendizagem. A título de exemplo, vale a pena observar a igualdade entre a soma de vetores na forma geométrica e na forma algébrica, bem como a dedução da equação do plano, não sendo apenas dito a equação é $ax + by + cz = d$. Assim, os problemas sugeridos têm o foco no pensamento matemático, e não em cálculos árduos e exaustivos.

Também é importante destacar que neste trabalho estamos concentrados nos aspectos estritamente matemáticos relativos a este conteúdo que trata de resolução de sistemas de equações. Mas uma pergunta natural a ser feita é: por que ensinar este conteúdo na escola? Aqui entra em questão uma importante e pertinente discussão sobre o ensino de Matemática na escola: a sua aplicabilidade. Isto não foi tomado como objeto de discussão neste trabalho, já que nosso foco foi a fundamentação matemática da geometria vetorial passível de ser trabalhada na escola de modo a ter-se um entendimento também geométrico dos sistemas de equações[21]. Quanto aos conteúdos de geometria vetorial, uma aplicabilidade imediata tem-se no ensino da Física escolar, nos diferentes conceitos que se fazem presentes (força, velocidade, aceleração, etc).

3.3 Os novos conceitos a serem trabalhados na escola

3.3.1 Vetores no plano

[21] As aplicações da matemática, sempre que possível, devem ser consideradas. Neste sentido, para este tópico de sistemas de equações, sinalizamos as aplicações apresentadas na Coleção A Matemática do Ensino Médio – Volume 3)

Na figura 5, o triângulo foi transladado da posição 1 para posição 2.

Fig. 5 – Translação

Para que possamos compreender o efeito desta translação são suficientes as seguintes informações:

⇒ a direção segundo a qual a translação foi feita;

⇒ o sentido da translação;

⇒ e o comprimento do deslocamento.

Este efeito de translação pode ser representado por setas de mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento, como na figura 6.

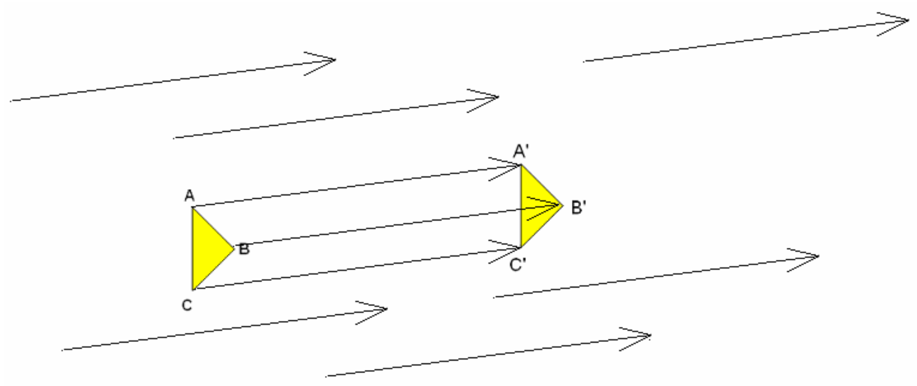


Fig. 6 – Setas representantes da translação

No conceito de vetor a idéia de comprimento é facilmente entendida. Já a compreensão das idéias de direção e sentido é mais delicada, por isso vamos discuti-las com mais detalhes.

Na figura 7, apenas as retas s e t são paralelas. Assim, as retas r e s definem direções distintas. Já a reta t possui a mesma direção da reta s. Portanto, o conceito de direção é caracterizado por um conjunto de retas paralelas[22]. Em outras palavras, um conjunto de retas paralelas define uma direção.

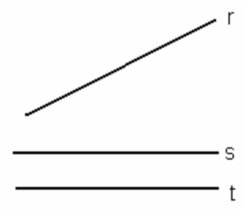


Fig. 7 – Conceito de direção

Agora, consideremos a reta definida pelos pontos A e B (figura 8). Podemos imaginar um deslocamento sobre ela em dois sentidos diferentes: o sentido que vai de A para B e o sentido que vai de B para A. Assim, para uma dada direção existem dois sentidos.

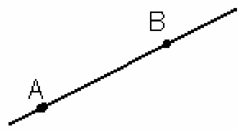


Fig. 8 – Conceito de sentido

De forma muito intuitiva podemos entender um **vetor** como uma coleção de setas que tem:

⇒ a mesma direção;

⇒ o mesmo sentido;

⇒ e o mesmo comprimento.

Portanto, setas que não diferem em nenhuma das três características acima **representam o mesmo vetor**.

Assim, a idéia de vetor nos conduz a uma coleção de setas tais como:

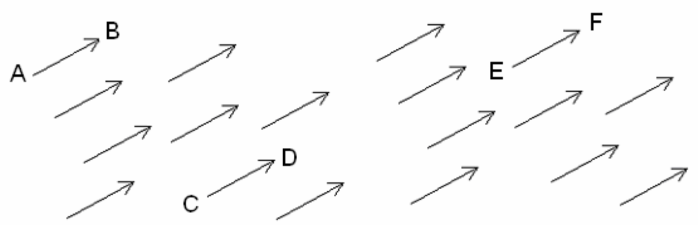


Fig. 9 – Conceito de vetor

[22] De uma maneira mais formal, uma direção é uma classe de equivalência da seguinte relação de equivalência: duas retas r e s estão relacionadas $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ r // s.

.

Quando escrevermos $\vec{v}$ = $\overrightarrow{AB}$ significa que $\vec{v}$ tem como representante a seta $\overrightarrow{AB}$. Porém, qualquer outra seta com a mesma direção, o mesmo sentido, e o mesmo comprimento, representa também o mesmo vetor $\vec{v}$. Assim, na figura 9, temos $\vec{v}$ = $\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{CD}$ = $\overrightarrow{EF}$ = ...

Um vetor – definido com maior rigor matemático – é uma classe de equivalência da seguinte relação de equivalência: duas setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ estão relacionadas $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ o quadrilátero ABDC for paralelogramo (figura 10) ou existir uma seta $\overrightarrow{EF}$ tal que os quadriláteros ABFE e EFDE sejam paralelogramos (figura 11).

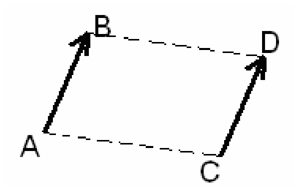


Fig. 10 – Setas equivalentes (caso 1)

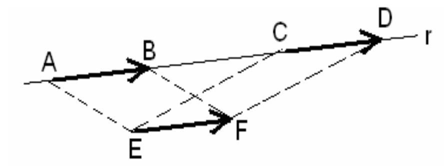


Fig. 11 – Setas equivalentes (caso 2)

- Operações com vetores: sob o ponto de vista geométrico
  - Soma de vetores

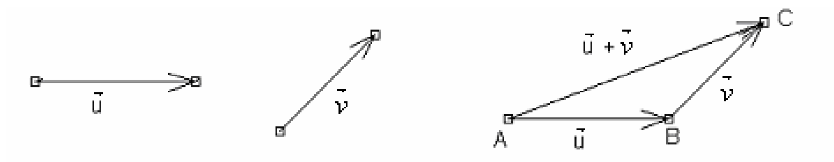


Fig. 12 – Soma de vetores

A soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pode ser determinada da seguinte maneira: escolhemos um ponto A qualquer (figura 12) e com origem nele traçamos uma seta $\overrightarrow{AB}$ representante do vetor $\vec{u}$. Utilizamos a extremidade B, para traçar a seta $\overrightarrow{BC}$, representante do vetor $\vec{v}$. O vetor representado pela seta $\overrightarrow{AC}$ é, por definição, o vetor soma.

É importante salientar que a soma $\vec{u} + \vec{v}$ dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ independe da escolha de seus representantes, conforme ilustrado na figura 13.

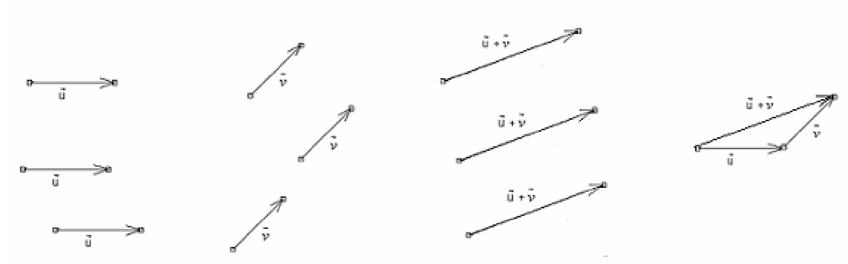


Fig. 13 – Independência dos representantes na soma

- Diferença de vetores

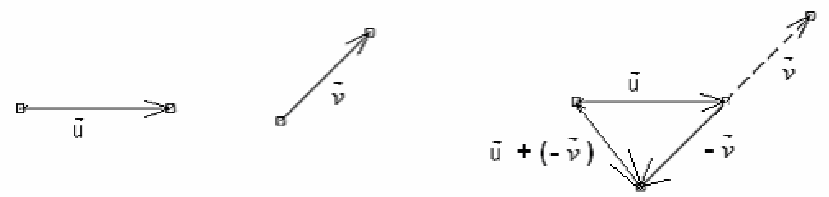


Fig. 14 – Diferença de vetores

Se $\vec{v}$ tem como representante $\overrightarrow{AB}$, então o oposto de $\vec{v}$ tem como representante $-\vec{v}$ e escrevemos $-\vec{v} = \overrightarrow{BA}$.

Assim definimos $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$, operação representada na figura 14.

- Uma releitura da soma e da diferença de vetores através de paralelogramos

Observe que os vetores soma $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ são as diagonais do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, conforme a figura 15.

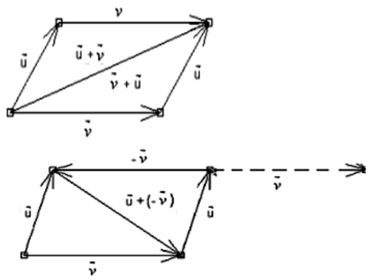


Fig. 15 – Soma e diferença de vetores através de paralelogramos

- Multiplicação de vetor por escalar

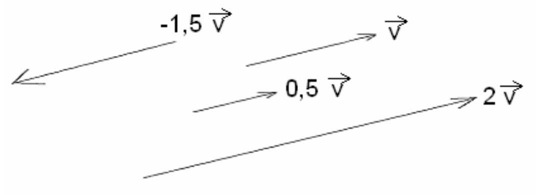


Fig. 16 – Multiplicação de vetor por escalar

Dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número real k, multiplicação de k por $\vec{v}$, é o vetor k. $\vec{v}$ tal que:

a) k. $\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção (isto é, estão sobre uma mesma reta, ou sobre retas paralelas)

b) k. $\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo sentido se k > 0 e k. $\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários se k < 0.

c) o comprimento de k. $\vec{v}$ é igual ao comprimento de $\vec{v}$ multiplicado por $|k|$.

Obs. Se k = 0 ou $\vec{v} = \vec{0}$, então k. $\vec{v} = \vec{0}$.

- As coordenadas de um vetor

  O vetor $\vec{v}$ é representado por diferentes setas no plano cartesiano.

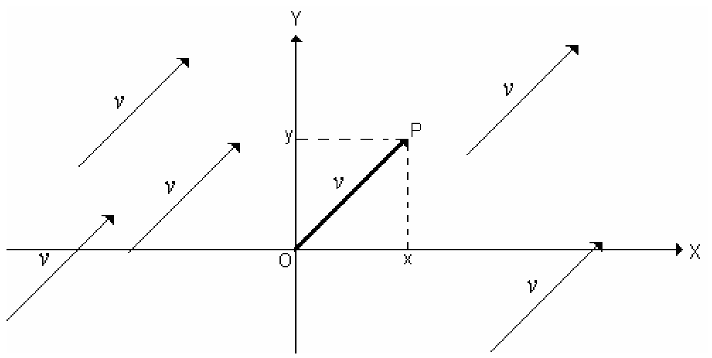


Fig. 17 – Coordenadas de um vetor (caso 1)

Dentre elas, destacamos a seta $\overrightarrow{OP}$, que fica determinada pelas coordenadas de sua extremidade P.

As coordenadas do ponto P(x, y) são definidas como as coordenadas do vetor $\vec{v}$, e escrevemos $\vec{v}$ = (x, y). Essa escolha se torna muito natural, pois nela está toda informação do efeito de translação que é armazenado no par de coordenadas (x ,y) do vetor: a primeira coordenada indica translação paralela ao eixo “ox” (para direita, se a coordenada é positiva, e para esquerda, se a coordenada é negativa); a segunda coordenada indica a translação paralela ao eixo “oy” (para cima, se a coordenada é positiva, e para baixo, se a coordenada é negativa).

Assim, quando $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, determinar as coordenadas de $\vec{v}$, é o mesmo que determinar as coordenadas do ponto P tal que $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{OP}$.

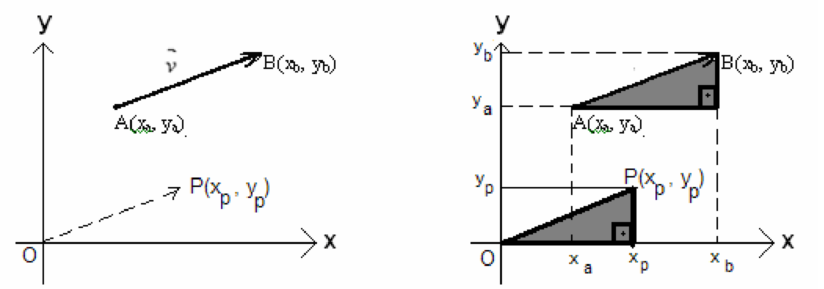


Fig. 18 – Coordenadas de um vetor (caso 2)

Da congruência dos triângulos sombreados na figura 18 vem que:

$x_p - x_o = x_b - x_a \Leftrightarrow x_p - 0 = x_b - x_a \Leftrightarrow x_p = x_b - x_a$ e

$y_p - x_o = x_b - y_a \Leftrightarrow x_p - 0 = x_b - y_a \Leftrightarrow x_p = x_b - y_a$

Assim $\vec{v}$ = ($x_b - x_a$, $y_b - y_a$).

- Operações com vetores: sob o ponto de vista algébrico
    - Soma de vetores

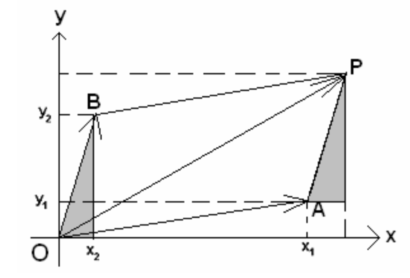


Fig. 19 – Soma de vetores em coordenadas

Se $\vec{u}$ = (x_1, y_1) e $\vec{v}$ = (x_2, y_2), da congruência dos triângulos sombreados na figura 19, vem que: $x_p - x_1 = x_2 \Leftrightarrow x_p = x_1 + x_2$ e $y_p - y_1 = y_2 \Leftrightarrow y_p = y_1 + y_2$

Podemos provar que o mesmo ocorre inclusive se as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são estritamente positivas.

Assim, se $\vec{u}$ = (x_1, y_1) e $\vec{v}$ = (x_2, y_2) então $\vec{u}$ + $\vec{v}$ = ($x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$).

- Multiplicação de vetor por escalar

Se $\vec{v}$ = (x_1, y_1) e k $\in$ IR, vejamos como encontrar as coordenadas de k$\vec{v}$.

1º caso: k > 0

Da semelhança dos triângulos representados na figura 20.1 vem que:

$$\frac{|k \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{x_p}{x_1} \Leftrightarrow \frac{|k|.\cdot|\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{x_p}{x_1} \Leftrightarrow x_p = |k|.x_1$$

$$\frac{|k \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{y_p}{y_1} \Leftrightarrow \frac{|k|.\cdot|\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{y_p}{y_1} \Leftrightarrow y_p = |k|.y_1$$

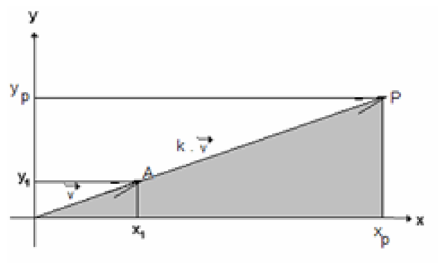


Fig. 20.1 – Produto de vetor por escalar em coordenadas (caso 1)

Como k > 0, temos que $|k|$ = k, então $x_p = k.x_1$ e $y_p = k.y_1$.

2º caso k < 0

Da semelhança dos triângulos representados na figura 20.2 vem que:

$$\frac{|k \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{-x_p}{x_1} \Leftrightarrow \frac{|k|\cdot|\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{-x_p}{x_1} \Leftrightarrow x_p = -|k|.x_1$$

$$\frac{|k \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{-y_p}{y_1} \Leftrightarrow \frac{|k|\cdot|\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{-y_p}{y_1} \Leftrightarrow y_p = -|k|.y_1$$

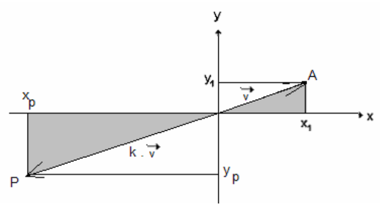


Fig. 20.2 – Produto de vetor por escalar em coordenadas (caso 2)

Como k < 0 temos que $|k|$ = - k e então $x_p = k.x_1$ e $y_p = k.y_1$.

Observação: Se k = 0 ou $\vec{v}$ = (0, 0) temos que k.$\vec{v}$ = (0, 0),

Assim, se $\vec{v}$ = (x_1, y_1) então k.$\vec{v}$ = (k.x_1, k.y_1).

- Ortogonalidade de vetores e a equação da reta

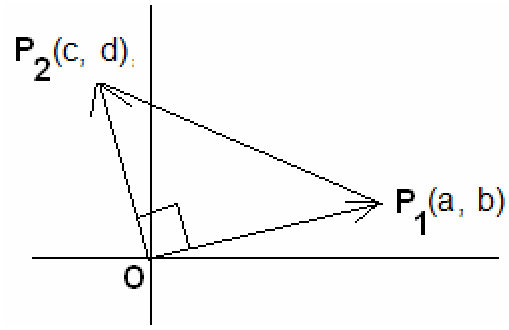


Fig.21 – Ortogonalidade de vetores

Se os vetores $\vec{u}$ = $\overrightarrow{OP_1}$ = (a, b) e $\vec{v}$ = $\overrightarrow{OP_2}$ = (c, d), representados na figura 21, são ortogonais, então o triângulo OP_1P_2 é retângulo em O.

Calculando as medidas dos lados do triângulo OP_1P_2, obtemos:

$P_1P_2 = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$

$P_1P_3 = \sqrt{a^2 + b^2}$

$P_2P_3 = \sqrt{c^2 + d^2}$

Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$\left(\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\sqrt{c^2 + d^2}\right)^2$$

$$a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

$$a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = 0$$

$$-2ac - 2bd = 0$$

$$ac + bd = 0$$

Se $\vec{u}$ = (a, b) e $\vec{v}$ = (c, d) são ortogonais, então a.c + b.d = 0.

Através da ortogonalidade de vetores também é possível descrevermos as coordenadas de todos os pontos de uma reta.

Assim como por um ponto P_o passam infinitas retas, dado um vetor $\vec{n}$ existem infinitas retas ortogonais à $\vec{n}$. Entretanto, dado um ponto P_o e um vetor $\vec{n}$ = (a, b), existe uma única reta que passa por P_o e é ortogonal à $\vec{n}$, conforme podemos ver na figura 22.

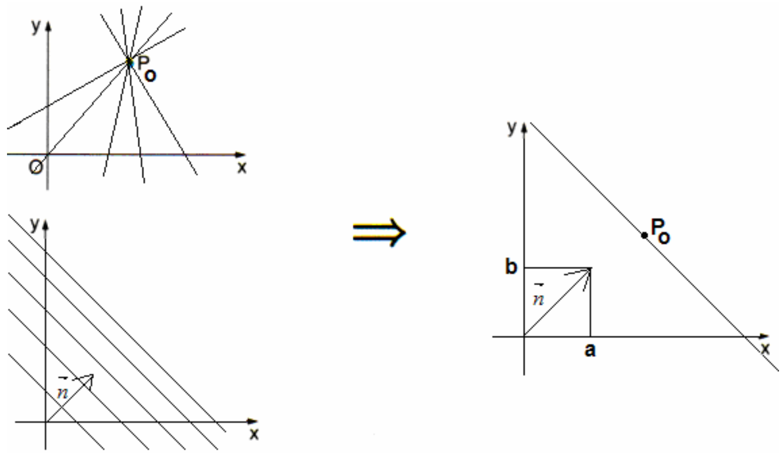


Fig. 22 – Reta passando por P_o e ortogonal a $\vec{n}$

Um ponto P(x, y) pertence à reta r se e somente se os vetores $\vec{n}$ = (a, b) e $\overrightarrow{P_0P}$ = (x - x_o, y - y_o) forem ortogonais.

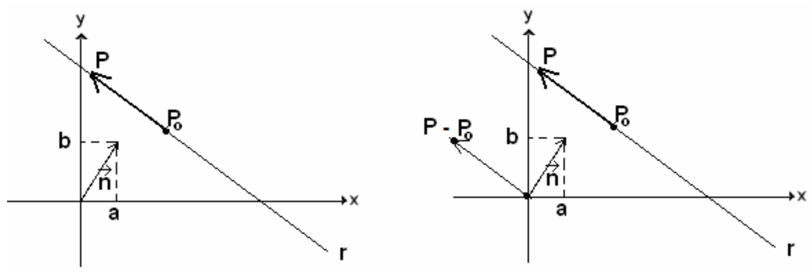


Fig. 23 – Ortogonalidade e a equação da reta

Da ortogonalidade de $\vec{n}$ = (a, b) e $\overrightarrow{P_0P}$ = (x - x_o, y - y_o) vem que:

a(x - x_o) + b(y - y_o) = 0

a.x + b.y = a.x_o + b.y_o

Como a.x_o + b.y_o é constante, podemos escrever ax + by = c.

Assim, a equação ax + by = c, representa uma reta que passa pelo ponto (0, c/b) e é ortogonal ao vetor $\vec{n}$ = (a, b). Com esta leitura, é possível estudar de forma qualitativa os sistemas de duas equações e duas incógnitas. A titulo de ilustração, vejamos a classificação do sistema $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = -3 \end{cases}$.

A primeira equação representa uma reta ortogonal ao vetor $\vec{n_1}$ = (2, 1) que passa por (0, 1). A segunda equação representa uma reta que é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{n_2}$ = (4, 2) e passa por (0, -3/2).

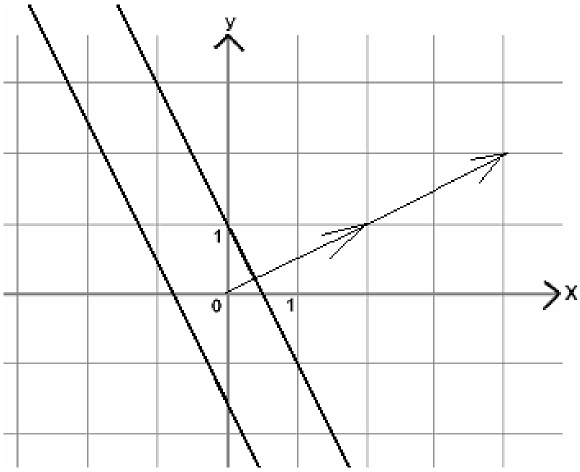


Fig. 24 – Resolução geométrica qualitativa no plano

Os vetores $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$ têm a mesma direção e, portanto as retas também têm a mesma direção. Elas são distintas, pois interceptam o eixo das ordenadas em pontos diferentes. Assim, não existe nenhum ponto (x, y) que pertença às duas retas e, portanto, o sistema não admite solução.

3.3.2 Vetores no espaço

- Sistema de coordenadas no espaço e as coordenadas de um vetor

É um sistema de coordenadas formado por três eixos OX, OY e OZ, ortogonais e com a mesma origem O (figura 25). Com este sistema, é possível associar a cada ponto do espaço uma tripla (x, y, z) de números reais.

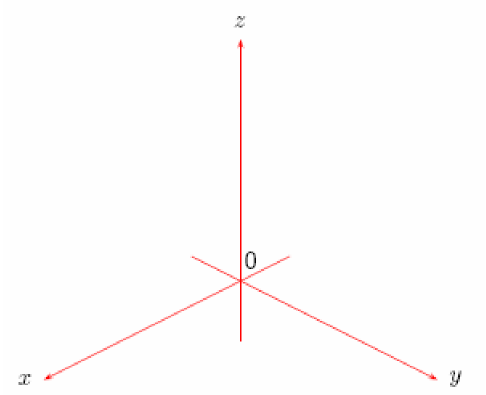


Fig. 25 – Sistema de coordenadas no espaço

Vejamos como localizar no sistema de coordenadas o ponto P(1, 2, 3):

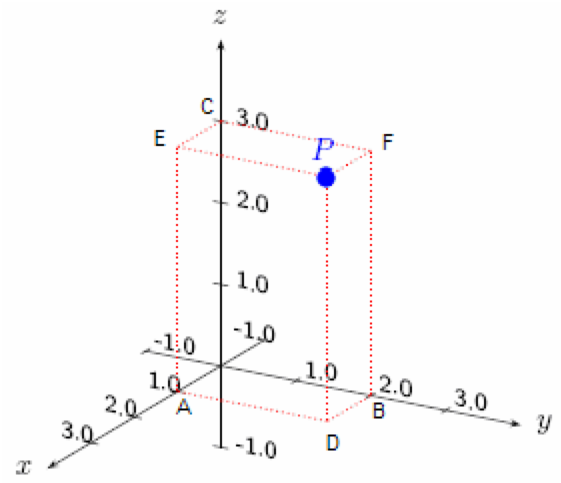


Fig. 26 – Representação do ponto P(1, 2, 3)

Marcamos os pontos A(1, 0, 0), B(0, 2, 0) e C(0, 0, 3) sobre os eixos x, y e z, respectivamente. Na intersecção da reta paralela ao eixo x, passando pelo ponto B, com a reta paralela ao eixo y, passando pelo ponto A, obtemos o ponto D(1, 2, 0). Na intersecção da reta paralela ao eixo x, passando pelo ponto C, com a reta paralela ao eixo z, passando pelo ponto A, obtemos o ponto E(1, 0, 3). Na intersecção da reta paralela ao eixo y, passando pelo ponto C, com a reta paralela ao eixo z, passando pelo ponto B, obtemos o ponto F(0, 2, 3). Na intersecção da reta perpendicular ao plano xy passando por D, com a reta perpendicular ao plano xz passando por E, e com a reta perpendicular ao plano yz, passando por F, obtemos o ponto P(1, 2, 3).

No espaço, o vetor $\vec{v}$ também pode ser representado por diferentes setas.

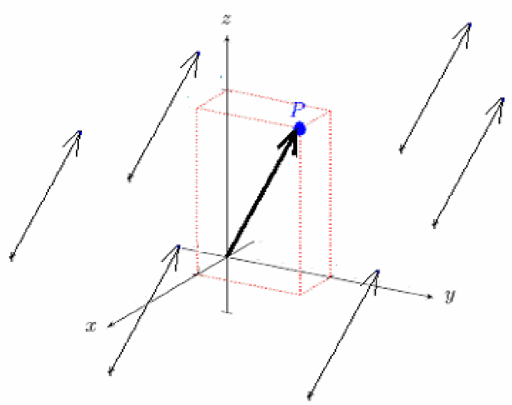


Fig.27 – Coordenadas de um vetor no espaço (caso 1)

De forma análoga à que acontece no plano, as coordenadas de $\vec{v}$ são as coordenadas da extremidade da seta com origem em (0, 0, 0), (conforme a figura 27).

Assim, as coordenadas de $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, são iguais às coordenadas do ponto P tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$, como na figura 28.

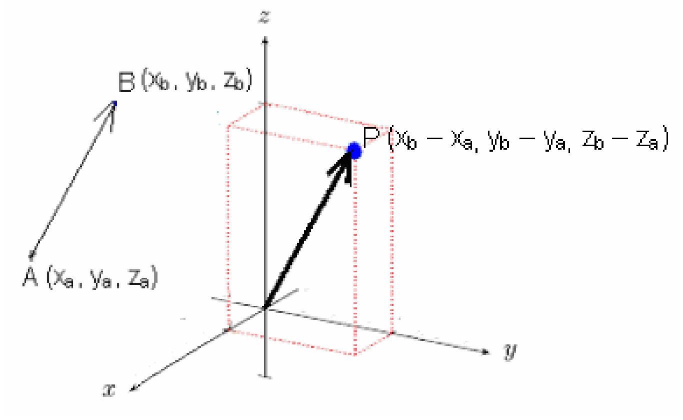


Fig.28 – Coordenadas de um vetor no espaço (caso 2)

Podemos mostrar que, de forma similar a que ocorre no plano, as coordenadas de $\vec{v}$ são $(x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)$.

A soma de vetores e a multiplicação de vetor por escalar também podem ser realizadas de forma análoga à que fazíamos no plano. Isto é, se $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ então $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ e $k.\vec{u} = (k.x_1, k.y_1, k.z_1)$.

- A equação da reta no espaço:

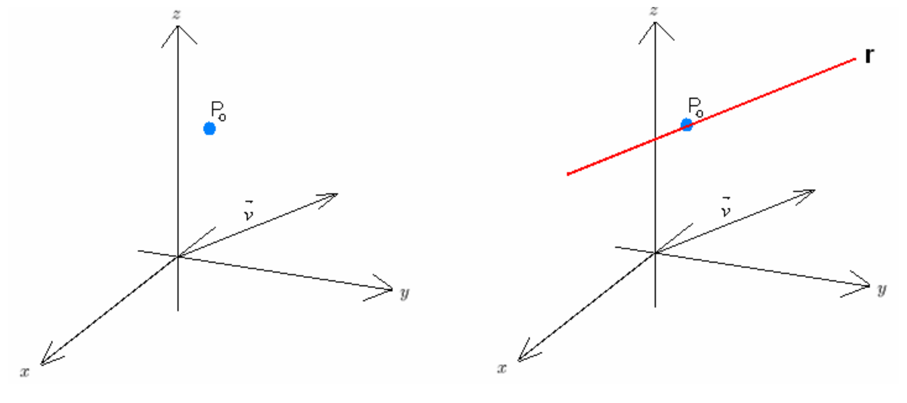


Fig. 29 – Reta passando por P_o com direção dada por $\vec{v}$

Dado o ponto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ e o vetor $\vec{v}$ = (a, b, c), existe uma única reta que passa por P_o e tem direção dada por $\vec{v}$ (figura 29).

Um ponto P(x, y, z) vai estar na reta se e somente se $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_o} + t \cdot \vec{v}$, com $t \in$ IR, conforme a figura 30.

Assim, temos:

$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + t.\ (a, b, c)$

$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + (t.a, t.b, t.c)$

$(x, y, z) = (x_o + t.a, y_o + t.b, z_o + t.c)$

De onde vem que $\begin{cases} x = x_o + t.a \\ y = y_o + t.b \\ z = z_o + t.c \end{cases}$,

para todo $t \in$ IR.

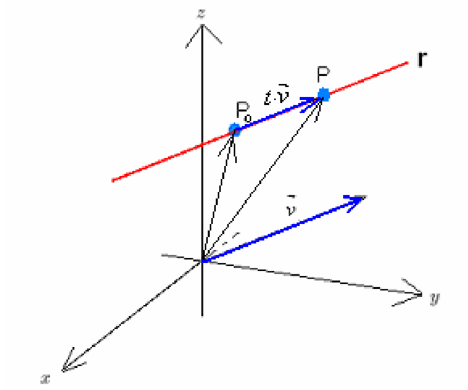


Fig. 30 – A equação vetorial da reta

As equações acima são chamadas de equações paramétricas da reta r.

- Ortogonalidade de vetores e a equação do plano:

De modo similar ao que fizemos no plano, podemos no espaço concluir que $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{w} = (x_2, y_2, z_2)$ são ortogonais se e somente se $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$. Para demonstrar a condição de ortogonalidade, vamos utilizar distância entre dois pontos no espaço, que pode ser obtida através de duas aplicações do teorema de Pitágoras.

Vejamos como determinar a distância entre os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

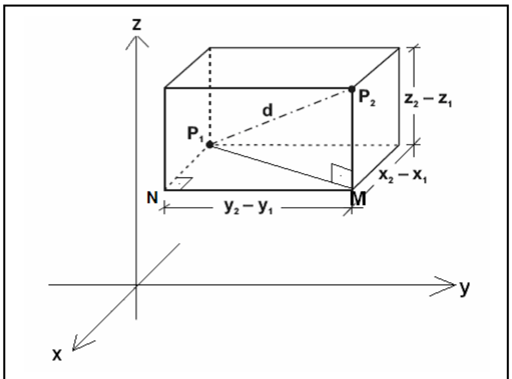


Fig. 31 – Distância entre dois pontos

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo MNP_1 temos:

$(MP_1)^2 = (NP_1)^2 + (MN)^2$

$(MP_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y)^2$ (I)

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo MP_1P_2 temos:

$(P_1 P_2)^2 = (MP_1)^2 + (MP_2)^2$

$(P_1 P_2)^2 = (MP_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ (II)

Substituindo (I) em (II) obtemos:

$(P_1\ P_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 – z_1)^2$

$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Considere agora dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ ortogonais, conforme a figura 32.

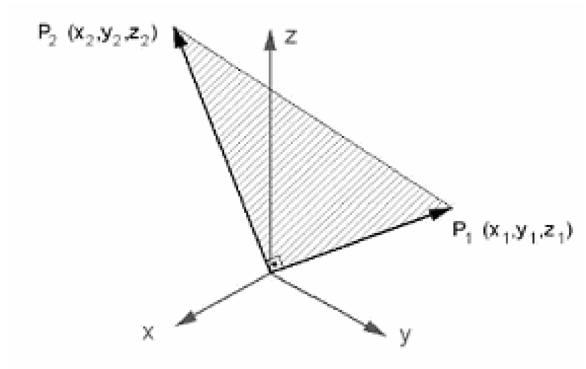


Fig. 32 – Ortogonalidade de vetores no espaço

Da ortogonalidade de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vem que o triângulo $P_1O\ P_2$ é retângulo em P_1. Aplicando o teorema de Pitágoras temos:

$(P_1P_2)^2 = (OP_1)^2 + (OP_2)^2$

Substituindo as distâncias obtemos:

$$\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}}\right)^2 + \left(\sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} + z_2^{\ 2}}\right)^2$$

$x_2^2 – 2x_1x_2 + x_1^2 + y_2^2 – 2y_1y_2 + y_1^2 + z_2^2 – 2z_1z_2 + z_1^2 = x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2$

$– 2x_1x_2 – 2y_1y_2 – 2z_1z_2 = 0 \rightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$

Através da ortogonalidade de vetores também é possível descrevermos as coordenadas de todos os pontos de um plano.

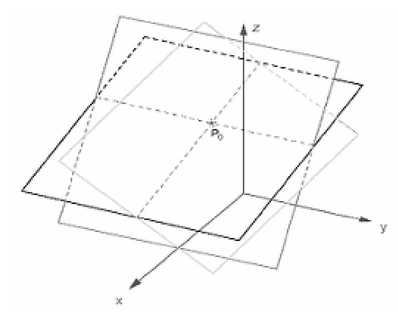


Fig. 33 – Planos que passam por P_o

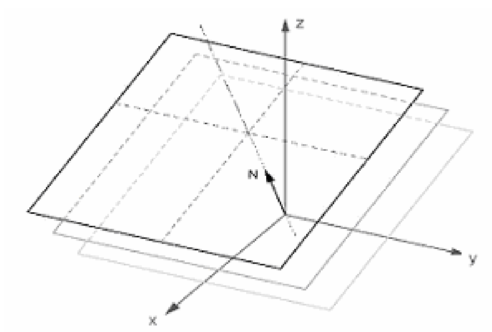


Fig. 34 – Planos ortogonais à $\vec{n}$

Dado um ponto P_0, existem infinitos planos que o contém (figura 33). Dado um vetor $\vec{n}$, existem infinitos planos que são ortogonais à $\vec{n}$ (figura 34). Porém, dado um ponto P_0 e um vetor $\vec{n}$, existe um único plano que é ortogonal à $\vec{n}$ passando por P_o (figura 35).

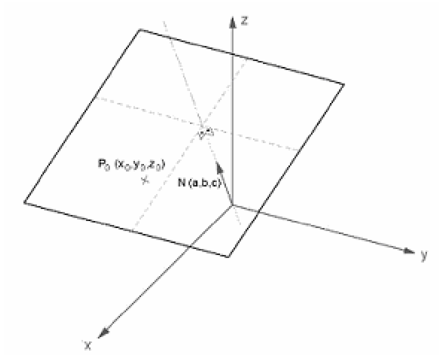


Fig. 35 – Plano passando por P_o e ortogonal ao vetor $\vec{n}$

Um ponto P(x, y, z) pertence ao plano se e somente se os vetores $\overrightarrow{P_oP}$ e $\vec{n}$ são ortogonais, como na figura 36.

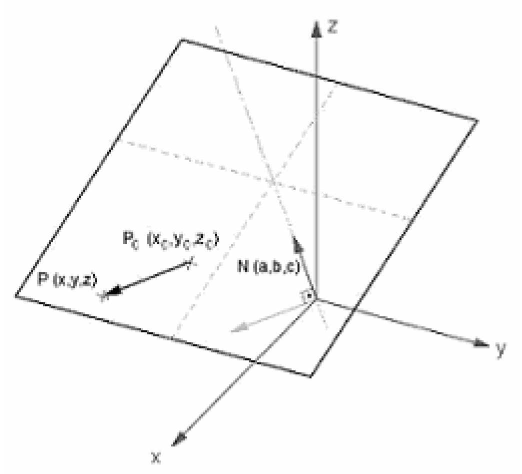


Fig. 36 – A equação do plano

Da ortogonalidade de $\vec{n}$ = (a, b, c) e $\overrightarrow{P_oP}$ = ($x – x_o$, $y – y_o$, $z – z_o$) temos:

$a.(x - x_o) + b.(y - y_o) + c.(z - z_o) = 0$

$ax – ax_o + by – by_o + cz – cz_o = 0$

$ax + by + cz = ax_o + by_o + cz_o$

Como $ax_o + by_o + cz_o$ é constante, podemos escrever ax + by + cz = d. Assim, a equação a.x + b.y + c.z = d, representa um plano que passa pelo ponto (0, 0, d/c) e é ortogonal ao vetor $\vec{n}$ = (a, b, c).

Com esta leitura, é possível estudar de forma qualitativa os sistemas de duas equações e três incógnitas. A título de ilustração, vejamos a classificação qualitativa geométrica do sistema $\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x + 0{,}5y + 1{,}5z = 3 \end{cases}$.

A equação 2x + y + 3z = 1 representa um plano que passa por (0, 0, 1/3) e é ortogonal ao vetor $\vec{n}$ = (2, 1, 3). A equação x + 0,5y + 1,5z = 3 representa um plano que passa por (0, 0, 2) e é ortogonal ao vetor $\vec{n}$ = (1, 1/2, 3/2). Como os vetores têm a mesma direção, os planos também têm mesma direção (ortogonal a dos vetores), e como interceptam o eixo z em pontos diferentes, não podem ser coincidentes. Assim, os planos são paralelos e o sistema não admite solução.

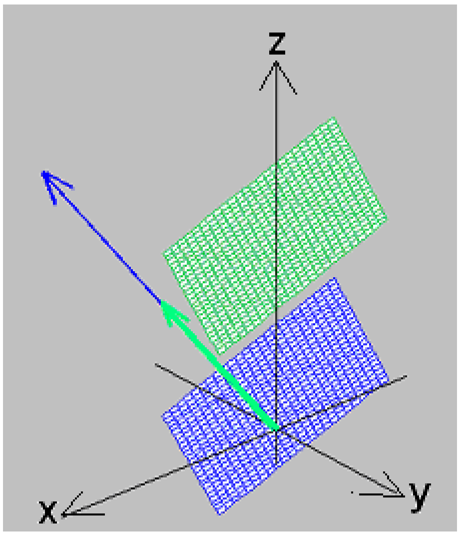


Fig. 37 – Resolução geométrica qualitativa no espaço

3.4 Adaptação da proposta ao programa do Ensino Médio

Um dos principais objetivos de nossa proposta é que os alunos tenham, através da geometria vetorial, ferramentas para analisar geometricamente os sistemas lineares que envolvam duas ou três incógnitas, agregando assim a esse estudo, um maior valor formativo. Dessa forma, o ideal é aplicá-la antes do estudo dos sistemas lineares.

Usualmente os tópicos que antecedem o estudo de sistemas são as matrizes e os determinantes. O estudo que é proposto sobre estes assuntos, por alguns livros didáticos, é realmente uma manipulação algébrica (muitas vezes até numérica) envolvendo operações com matrizes, matriz transposta, matriz inversa, matriz simétrica, matriz anti-simétrica, determinantes de ordem n, propriedades dos determinantes e etc. Os exercícios apresentados exigem apenas a repetição dos argumentos utilizados nos exercícios resolvidos. Quanto aos sistemas lineares, em muitos casos, é feito um estudo desprovido da sua representação geométrica, diferente do que é sugerido nas orientações curriculares para o ensino médio (2006)[23]:

---

[23] Esse documento retoma a discussão dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, aprofundando a compreensão, apontando e desenvolvendo indicativos de modo a oferecer alternativas didático-pedagógicas para a organização do trabalho pedagógico.

“No estudo de sistemas de equações, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas, é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria. (p.77)”

Na análise de alguns livros didáticos de Ensino Médio utilizados em escolas, encontramos freqüentemente a disposição de capítulos e conteúdos, como a que foi retirada de um destes livros e apresentada a seguir:

Fig. 38 – Livro didático E

Nas orientações curriculares para o ensino médio (2006), quanto às questões de conteúdos, é sugerido priorizar as idéias matemáticas no lugar de fórmulas e regras de memorização.

> *“Sugestões quanto à forma de trabalhar os conteúdos acompanham o detalhamento sempre que possível, destacando-se o valor formativo agregado e descartando-se as exigências de memorização, as apresentações de ‘regras’ desprovidas de explicações, a resolução de exercícios repetitivos de ‘fixação’ ou a aplicação direta de fórmulas (p.70).”*

Para o estudo de sistemas lineares, os determinantes são utilizados com freqüência apenas na regra de Cramer (que só pode ser aplicada em sistemas quadrados de solução única). Como no mesmo documento é sugerido o abandono de tal regra, este estudo acaba ficando dispensado. Nas palavras dos autores:

> *“Quanto à resolução de sistemas de equação 3 X 3, a regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única. Dessa forma, fica também dispensado o estudo de determinantes (p.78).”*

Então, no lugar do estudo de determinantes, poderia se fazer o estudo dos vetores. Assim, o conceito de vetor, que no ensino médio vem sendo explorado apenas na Física, deixaria de ser tão amarrado aos conceitos de força, velocidade e aceleração, conforme referido no mesmo documento.

> *“É desejável, também, que o professor de Matemática aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado pelas suas coordenadas). Em particular, é importante relacionar*

as operações executadas com coordenadas (soma multiplicação por escalar) com seu significado geométrico. A inclusão da noção de vetor nos temas abordados nas aulas de matemática viria a corrigir a distorção causada pelo fato de que é um tópico de matemática importante, mas que está presente no ensino médio somente nas aulas de Física (p.77)."

Com a introdução da geometria vetorial é possível agregar ao estudo de sistemas um maior valor formativo. Assim, alunos seriam capazes de fazer uma leitura geométrica das equações do sistema, bem como de sua solução (quando existir). Além disso, a capacidade de argumentar e de deduzir é exigida quando se prioriza o pensamento matemático em detrimento dos cálculos árduos e exaustivos.

É das Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) que tomamos a expressão "valor formativo", e pela sua importância no contexto do nosso trabalho, merece ser esclarecida:

"A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva (p.69)."

.

Assim, com a implementação da nova proposta, teríamos os seguintes assuntos distribuídos nos seguintes capítulos:

Capitulo A – Vetores

a.1) A definição de vetor

a.2) As operações com o vetor geométrico

a.3) As coordenadas do vetor

a.4) As operações com o vetor algébrico
a.5) A ortogonalidade de vetores
a.6) A equação da reta
a.7) As coordenadas e os vetores no espaço
a.8) A equação da reta no espaço
a.9) A equação do plano

Capitulo B – Sistemas Lineares e Matrizes
b.1) Resolução de sistemas lineares por escalonamento
b.2) Matrizes e sistemas lineares
b.3) Operações com matrizes

As sugestões para adaptar a proposta ao ensino médio foram subsidiadas por realização de experiência e análise dos resultados obtidos, que são objeto de detalhamento no próximo capítulo.

3.5 Considerações sobre as dificuldades de aprendizagem do conceito de vetor

Iniciamos essa seção com breves considerações sobre o surgimento conceito de vetor (século XVII, na época um conceito surpreendente por integrar aspectos algébrico e geométrico), sinalizando que o conceito pode apresentar naturais dificuldades de compreensão por parte dos alunos.

Segundo Crowe (1967), a adição de vetores, cujos primeiros indícios apareciam na Grécia antiga, já era utilizada para velocidades e forças na Física nos séculos XVI e XVII. Entretanto, até o final do século XIX não havia nenhuma teoria ou conjunto de regras bem definidas que pudéssemos chamar de álgebra linear.

Na tentativa de conectar álgebra e geometria e legitimar o conjunto dos números complexos, alguns matemáticos, especialmente nos séculos XVII e XVIII, começaram a desenvolver um sistema de representação geométrica, que originou os métodos da análise vetorial.

Em 1831 Gauss[24] (1777 – 1855), com grande propriedade, apresentou um sistema de representação geométrica que legitimou o conjunto dos complexos. No entanto, o primeiro sistema de representação vetorial, em três dimensões, só foi criado na década seguinte.

Contudo, importantes idéias conduziram à construção da análise vetorial. Dentre elas, destacamos a apresentada por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), numa carta datada de 8 de setembro de 1679 para Christian Huygens (1629 – 1695), onde discute sobre a possibilidade de criar um sistema que servisse como um método direto para análise espacial. Nas palavras de Leibniz[25]:

> *"Eu ainda não estou satisfeito com a álgebra porque ela não nos dá o método mais curto ou as mais belas construções na geometria. Esta é a razão pela qual eu acredito que, tanto quanto a geometria é concebida, nós ainda precisamos de uma outra análise que seja distintivamente geométrica ou linear e na qual seja expressa a posição [situs] diretamente como a álgebra expressa magnitudes diretamente. Estou enviando a você um ensaio que me parece importante".*

Neste ensaio, contido na carta de Leibniz, ele descreve sua descoberta.

> *"Eu descobri certos elementos com uma nova característica inteiramente diferente da álgebra e que terá grandes vantagens em representação para mente, exatamente e de uma maneira acreditável por sua natureza, mesmo sem figuras tudo dependerá de um senso de percepção. Álgebra é a característica para números indeterminados ou magnitudes somente, mas, não*

[24] Pode-se dizer que pelo menos cinco matemáticos, trabalhando de forma independente, descobriram e publicaram a representação geométrica dos números complexos: Wessel, Gauss, Argand, Warren e Mourey.

[25] Na transcrição dos trechos da carta de Leibniz estamos tomando como referência CROWE, M. **A history of Vector Analysis**, University of Notre Dame Press, London, 1967.

expressa posição, ângulos ou direção de movimento. Portanto é difícil analisar as propriedades de uma figura pelo cálculo, e é ainda mais difícil conseguir construções e demonstrações geométricas convenientes, mesmo quando o cálculo algébrico está completo. Mas, esta nova característica, que segue figuras visuais, não pode falhar em dar a solução, a construção geométrica e a demonstração, tudo ao mesmo tempo, e de um modo natural em uma análise".

Embora os detalhes de sua idéia nunca tenham sido totalmente trabalhados, Leibniz conseguiu realizar os primeiros avanços nessa direção, tornando-se o precursor da primeira análise vetorial.

Como podemos perceber, a análise vetorial, muito recente na história da Matemática, traz uma nova maneira de representar entidades geométricas através da álgebra. Entretanto, o objeto matemático que está sendo representado, muitas vezes, possui uma série de significados que não são perceptíveis de imediato na sua representação, como no conceito de vetor.

Como já afirmamos, este conceito é ponto crucial da proposta apresentada nesta dissertação. Portanto, uma análise sobre as dificuldades cognitivas envolvendo o assunto se justifica e é o que faremos a seguir.

No artigo "What do mathematics and physics teacheares think that students will find difficult? A challenge to accepted practices of teaching" de Anna Poynter e David Tall, encontramos considerações sobre a diferença entre o desenvolvimento do conceito de vetor, o qual é considerado como força e aceleração na Física e como translação em Matemática. São apresentados os problemas cognitivos que surgem com tais abordagens e testada uma nova abordagem para o conceito de vetor, focada no efeito físico da translação.

Neste artigo encontramos uma análise de dois professores de Matemática e dois professores de Física sobre um questionário (que já havia sido respondido por alunos) apontando, em suas concepções, quais dificuldades que os alunos poderiam encontrar. Muito do previsto se confirmou na análise das respostas dos alunos. As questões eram as seguintes[26]:

(i) Na figura o triângulo foi movimentado da posição A para a posição B. Como você pode representar a translação do triângulo? Você pode representar um vetor começando na origem (0, 0), o qual representará a translação do triângulo de A para B? Se possível, mostre no desenho. Você pode representar um vetor, não começando na origem e não tocando em nenhum dos triângulos, que represente a translação de A para B? Se possível mostre no desenho.

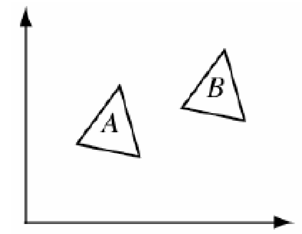


Fig. 39 – Questão (i)

Desempenho dos alunos: conforme previsto pelos professores, os alunos mostraram falta de flexibilidade para desenhar a seta começando em qualquer ponto. Em alguns casos, usaram a decomposição horizontal e vertical para desenhar os triângulos em outras posições (figura 40), confundindo o movimento de translação com o objeto a ser transladado. Além disso, outro equívoco freqüente foi não indicar o sentido da seta, construindo apenas um segmento (figura 41).

[26] Na tradução das questões manteve-se a palavra vetor embora nos desenhos tenham-se setas representantes dos vetores. Nos comentários sobre o desempenho dos alunos tivemos o cuidado no uso das palavras: seta, setas equivalentes e vetor.

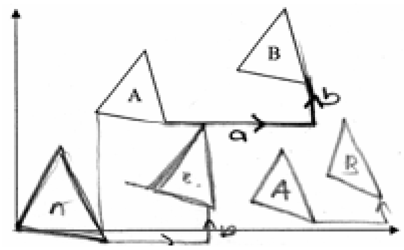


Fig. 40 – Solução de aluno A

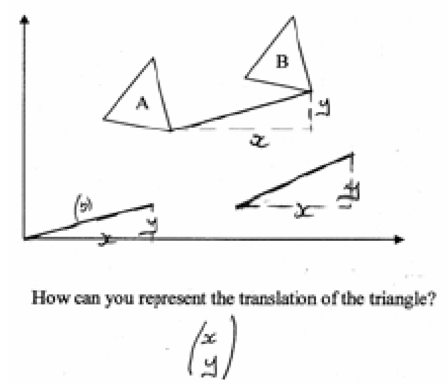


Fig. 41 – Solução de aluno B

(ii) Adicione os vetores

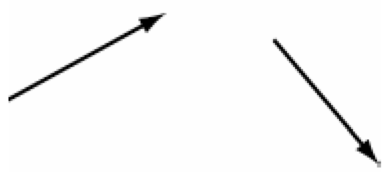


Fig. 42 – Questão (ii)

Desempenho dos alunos: conforme previsto pelos professores de Matemática, alguns alunos desenharam uma seta juntando o final da primeira seta com o início da segunda seta (como se fosse preencher parte de um caminho) e então o vetor soma seria representado pela seta destacada na figura abaixo. Novamente falta de desenvoltura para trabalhar com setas equivalentes.

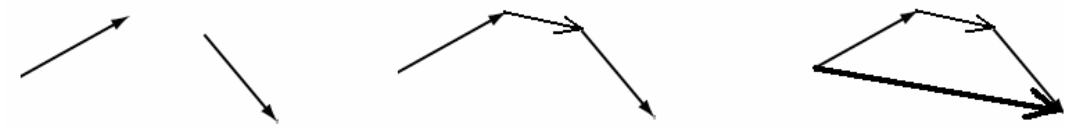


Fig. 43 – Solução de aluno C

(iii) Adicione os vetores

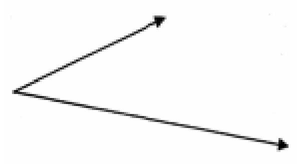


Fig. 44 – Questão (iii)

Desempenho dos alunos:

Como os professores de Matemática comentaram, neste exercício alunos desenharam a origem de uma das setas na extremidade da outra, porém não representaram a soma (3º lado do triângulo), como na figura abaixo. O que pode sinalizar que os alunos não estão entendendo a operação de soma, para eles somar dois vetores é colocar um seta seguida da outra.

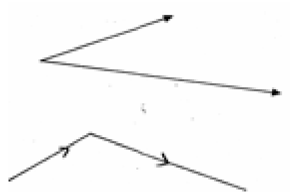


Fig. 45 – Solução de aluno D

Outro tipo de equívoco cometido pelos alunos foi inverter o sentido de um dos vetores e representar a soma como o terceiro lado de um triângulo, indicado por "–b + a" ou "a – b". Acredito que, pela posição em que as setas estavam, os alunos tenham pensado que esta seria a única forma de somar os vetores (inverter o sentido de um para depois somá-lo ao outro). O que indica novamente uma dificuldade dos alunos em trabalhar com setas equivalentes (como se desenho dado não pudesse ser alterado).

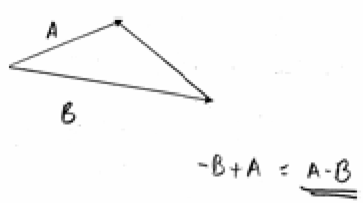


Fig. 46 – Solução de aluno E

Ainda sobre este problema, os autores comentaram que somente um dos trinta e quatro alunos que responderam ao questionário aplicou a regra do paralelogramo, contrariando as expectativas dos professores de Física.

(iv) Adicione os vetores

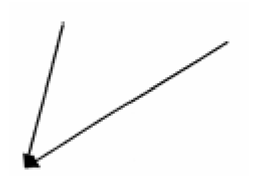


Fig. 47 – questão (iv)

Desempenho dos alunos:

Neste caso, um erro freqüente foi considerar a soma como o terceiro lado de um triângulo (como na figura abaixo), pois o conceito de setas equivalentes não foi compreendido.

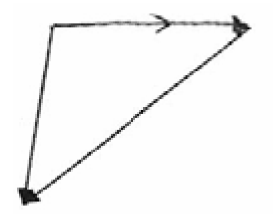


Fig. 48 – Solução de aluno F

Sumarizando, os alunos não têm a idéia de vetor como um conjunto de setas equivalentes que guardam a informação de direção, sentido e comprimento. Recorrentemente eles não conseguem desenhar uma seta equivalente a uma seta dada de modo a conseguir realizar a operação de soma.

Segundo os autores, para que os alunos compreendam o conceito de vetor como conjunto de setas equivalentes, a transformação translação pode ser bastante adequada. Porém, é importante que o foco não esteja sobre a transformação de translação, mas sim em seu efeito físico. No momento em que tal efeito é incorporado, a transformação pode ser representada através de uma seta com um comprimento, uma direção e um sentido. A escolha particular da seta não importa, não precisando estar fixada ao objeto transladado. Qualquer seta de mesmo tamanho, direção e sentido produzirá o mesmo efeito, ou seja, será representante do mesmo vetor.

Assim, o conceito de vetor $\overrightarrow{AB}$ (coleção de todas as setas que têm o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido $\overrightarrow{AB}$) passa a ser iluminado de um significado: representação do efeito físico de uma translação. Em um esquema coerente de construção de significados, a soma de dois vetores é um terceiro vetor que tem o mesmo efeito físico que a combinação de um dos vetores seguido do outro. O vetor soma é representado por qualquer seta cujo comprimento, a direção, e o sentido são obtidos pela regra do triângulo ou do paralelogramo, as quais são colocadas como visões diferentes de uma mesma idéia. Neste mesmo contexto, a comutatividade da adição de vetores livres fica evidente, conforme apontam os autores do artigo.

Nas palavras dos autores:

> "*Uma possível solução seria tentar construir o essencial significado matemático de 'vetor livre'*[27] *e então aplicá-lo à adição de vetores em diferentes contextos, de forma que as leis do paralelogramo e do triângulo e a adição de componentes de vetores sejam todas vistas como diferentes aspectos do mesmo conceito."* (2005, p.132)

Na seqüência sugerida acima (translação, efeito físico, representação via seta, setas equivalentes, vetor e operações), a transição da seta para o vetor é extremamente importante e deve ser muito pensada. É fundamental que o aluno consiga diferenciar vetor e seta, pois é impraticável tentar compreender um objeto matemático sem distingui-lo de sua representação. São inúmeras as situações em que percebemos que esta atividade se impõe presente na aprendizagem de Matemática: no número e no símbolo que o representa, em uma função e em seu gráfico (ou sua lei), em uma reta e no traçado de sua figura, em um vetor e em sua seta representante. É ainda mais agravante, conforme já comentamos, quando a representação armazena muitas informações que não são perceptíveis de imediato.

[27] No sentido de mobilidade de setas equivalentes.

Em Castro (2001) temos um outro trabalho voltado para o entendimento das dificuldades enfrentadas pelos alunos na aprendizagem do conceito de vetor. Usando o referencial teórico de Duval (apud Castro), o trabalho classifica os diferentes registros de representação de vetores no plano e no espaço:

-simbólico: são os registros que fazem uso de n–uplas e combinações lineares.

-figural: é o registro dado no desenho da “seta”, um representante da classe de equivalência que define o vetor.

-língua natural: é a palavra “vetor”

A partir desta classificação, a autora projetou e implementou uma seqüência didática, junto a alunos universitários que estavam cursando ou já tinham cursado a disciplina de “Geometria Analítica e Vetores”, visando promover o aprendizado destes conteúdos através da articulação dos diferentes registros do conceito de vetor.

Ao evidenciar os diferentes registros de representação - o figural, o simbólico, o da língua natural – temos em Duval uma importante contribuição para o entendimento de dificuldades que acompanham os alunos nos seus processos de aprendizagem. Nas palavras deste autor:

> *“O ponto comum à grande maioria dos bloqueios dos alunos, quaisquer que sejam os domínios de atividade matemática e qualquer que seja o nível de currículo, é a incapacidade de converter a representação de um objeto em outra representação do mesmo objeto.” (p.13)*

As palavras de Duval destacam a importância de trabalhar-se com os alunos os diferentes registros sob os quais se apresenta o conhecimento matemático. Vemos nos “registros de representação” de Duval uma estreita relação com a “interação de domínios geométrico e algébrico” da proposta de Douady, referida no capítulo 2. Diríamos que o registro figural está fortemente associado ao domínio geométrico, enquanto que o registro simbólico está fortemente associado ao domínio algébrico.

Esta sinalização de dificuldades relativas ao aprendizado do conceito de vetor bem como a importância da interação entre diferentes registros, ou de outra forma, entre diferentes domínios nos momentos de aprendizagem, vão subsidiar a nossa concepção e realização da situação didática em que pretendemos colocar os sistemas de equações sob o olhar da geometria.

4. A CONCEPÇÃO DA SITUAÇÃO DIDÁTICA E A REALIZAÇÃO DA EXPERIÊNCIA

Neste capítulo nos concentramos: no processo de concepção da situação didática para implementar uma seqüência de atividades sobre geometria vetorial e sistemas de equações; no relato e análise da experiência visando a validação da situação didática proposta, desta forma procurando responder a questão norteadora enunciada na introdução desta dissertação.

Iniciamos o capítulo com a descrição da metodologia de investigação que se constitui como Engenharia Didática. Descrevemos o cenário onde a experiência foi realizada e para cada um dos encontros trazemos um registro de expectativas, ao qual segue-se uma análise do desenrolar da experiência através das diferentes atividades propostas.

Também discutimos o dinâmico processo de construção da seqüência de atividades. Vale registrar que iniciamos a experiência com uma proposta de situação didática pré-definida, com justificativas baseadas em uma análise *a priori*, a qual foi se readequando, em função da análise *a posteriori* que sempre acompanhou o desenrolar da experiência, em cada um dos seus encontros. Isto nos conduziu a uma primeira reconstrução da seqüência de atividades, no próprio momento de realização da experiência. Ao final da experiência, uma segunda reconstrução da proposta se apresentou como necessária para, então, afinar a relação entre o conteúdo eleito como objeto de ensino e o tempo necessário para o seu aprendizado. Também como parte desta segunda reconstrução, desenvolvemos o objeto de aprendizagem[28] "Vetores e Operações", com o propósito de trazer um recurso que é facilitador da

[28] É um pequeno software, voltado para um conteúdo especifico, com recursos de interação que facilitam o aprendizado através de manipulação direta de animações e/ou simulações na tela do computador.

aprendizagem, por ter-se no dinamismo das animações/simulações a veiculação dos conceitos.

4.1 Sobre a metodologia de investigação

A experiência se constitui como uma Engenharia Didática. Segundo Artigue (1996), a noção de Engenharia Didática teve origem em didática da Matemática, no início da década de 1980, inspirada no trabalho de um engenheiro, que para realizar um projeto necessita de um sólido conhecimento cientifico de seu domínio, mas também se submete a enfrentar problemas práticos, os quais a ciência não quer ou ainda não é capaz de se encarregar.

A Engenharia Didática foi criada para atender a duas questões: as relações entre a pesquisa e a ação no sistema de ensino; e o papel que se convém reservar para as *realizações didáticas* entre as metodologias de pesquisa. Portanto, através dessa dupla função, a Engenharia Didática viabiliza o desenvolvimento de produções para o ensino de Matemática derivadas ou baseadas em resultados de pesquisa, e também se designa como uma metodologia específica de pesquisa, baseada em experiências de sala de aula.

> *"Efetivamente, é com essa dupla função que a noção de engenharia didática traça seu caminho no edifício didático, chegando a designar, ao mesmo tempo, produções realizadas para o ensino na seqüência de investigações que fazem apelo a metodologias externas à sala de aula, e uma metodologia de investigação científica." (Artigue, 1996, p.196)*

Na procura de respostas referentes a questões sobre o ensino e aprendizagem da Matemática, a Engenharia Didática viabiliza implementar a investigação na sala de aula:

> *"A engenharia didática, vista como metodologia de investigação, caracteriza-se antes de mais nada por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, o que quer*

dizer, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino." (Artigue, 1996, p.196)

Na Engenharia Didática a investigação se organiza em quatro fases:

– a fase 1: das análises preliminares.

– a fase 2: da concepção da situação didática, análise *a priori* e formulação de hipóteses.

– a fase 3: da experimentação

- a fase 4 : da *análise a posteriori*.

A seguir descrevemos estas fases em contexto mais geral e no contexto deste trabalho.

4.1.1 Análise Preliminar

Esta primeira fase da Engenharia consiste na busca de subsídios para o tratamento do problema. Segundo Artigue (1996), alguns aspectos considerados nessa fase são: análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino; análise do ensino habitual e dos seus efeitos; análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam sua evolução e a análise de restrições presentes nas realizações didáticas.

No contexto desse trabalho, a fase da análise preliminar se apresenta em diferentes momentos: no capitulo 2, isto ocorre na procura de naturais aproximações entre álgebra e geometria que poderiam ser feitas na escola, através de exemplos tomados da história e de exemplos que tratam de conteúdos presentes nos programas escolares; no capítulo 3, isto ocorre na análise sobre como o assunto de sistemas é tratado na escola – com poucas explicações e muitas regras – bem como na análise das dificuldades que os alunos têm com o conceito de vetor[29].

4.1.2 Concepção da situação didática, *análise a priori* e formulação de hipóteses

[29] Ver nas seções 3.1 e 3.5, respectivamente.

Na fase 2 são feitas as escolhas didáticas que supõem-se pertinentes para enfrentar o problema. Estas escolhas orientam a concepção da situação didática, a qual se faz acompanhar de uma análise *a priori*. A análise *a priori*, de uma maneira preditiva, descreve de que forma a seqüência de atividades pode contribuir para a construção do conhecimento relativo aos conteúdos escolhidos. A concepção da situação didática culmina com a formulação de uma hipótese a ser validada no desenrolar da experimentação.

No contexto desse trabalho, a concepção da situação didática se constitui nos seguintes aspectos:

a) A concepção da situação didática quanto ao aspecto de conteúdos

Como parte da análise preliminar, escolhemos os conteúdos que seriam necessários inserir na escola para que os alunos compreendessem a equação do plano, detalhados na seção 3.3. Conforme lá relatamos, um grande ganho foi concluir que o produto interno de vetores (que de início apresentou-se inevitável) não precisaria ser trabalhado com os alunos, uma vez que para compreender a equação do plano basta a condição de ortogonalidade de vetores.

Levando em consideração as análises preliminares feitas nos capítulos 2 e 3, em particular a escolha dos conteúdos que deveriam ser inseridos na escola, elaboramos o material didático para a realização da experiência, constituído de duas partes: uma teórica e uma de atividades[30]. Tendo como intenção a participação ativa dos alunos no processo de construção do conhecimento, organizamos o material, para cada encontro, na seguinte forma: uma parte teórica relativa aos novos conteúdos a serem trabalhados, mas com partes a serem completadas pelos alunos ao longo do momento de discussão em grande grupo; uma parte de atividades a serem trabalhadas pelos alunos nos momentos de discussão em pequenos grupos[31]. Este tipo de material se justifica na proposta de uma implementação de situação didática em que os

---

[30] Esse material está disponibilizado em sua íntegra no Anexo 2.

[31] Na elaboração da seqüência de atividades tomamos como principal referência TERRACHER, P., FERACHOGLOU R., Math Seconde, Hachette *Éducation*, Paris 1994.

alunos dedicam a maior parte do tempo para a discussão dos novos conceitos, livres da preocupação de ficar “copiando a aula“.

b) concepção da situação didática quanto ao aspecto da organização didática.

A *realização didática* foi projetada de forma a contemplar, em cada encontro, dois momentos:

— o primeiro momento onde, através de uma discussão em grande grupo, são trabalhados os novos conceitos ou são feitas sistematizações da discussão das questões mais relevantes da seqüência de atividades;

— o segundo momento onde, através das discussões em pequenos grupos, os alunos resolvem atividades com foco principal nas idéias matemáticas e não nos cálculos árduos e exaustivos, nisso colocando-se sempre como relevante o valor formativo agregado a cada atividade proposta.

c) formulação da hipótese de investigação.

Apresentamos como hipótese a ser testada ao longo do desenrolar da experiência: **através da geometria vetorial é possível desenvolver, na escola, o tópico de sistema de equações, de forma a ter-se nele agregado um maior valor formativo.**

Esta hipótese será colocada sob validação no desenrolar da experiência, através do confronto de *análises a priori* e *a posteriori* que acompanham os diferentes encontros que compõem a implementação da situação didática projetada.

4.1.3 Experimentação, *análise a posteriori* e validação

A experimentação corresponde ao momento de implementar a investigação na sala de aula. A partir dos dados obtidos nessa etapa, se fundamenta a *análise a posteriori* da seqüência de atividades. Segundo Artigue (1996, p.208), as observações nas seções de ensino e também nas produções realizadas pelos alunos, na sala de aula ou fora dela, são as principais ferramentas na elaboração dessa análise. É no confronto direto da *análise a* *priori* com a *análise a posteriori* que se dá a validação das hipóteses formuladas na fase 2.

No contexto deste trabalho, a fase 3 encontra-se na secção seguinte, com o relato da experiência e análise *a posteriori* das atividades mais significativas, e na secção 4.3, na validação da hipótese de investigação.

4.2 A experiência acompanhada de *análises a priori* e *a posteriori*

A experiência foi realizada no Colégio Província de São Pedro, uma instituição privada de ensino de Porto Alegre, na turma 201 do 2º ano do Ensino Médio, no período de 14 de novembro a 01 de dezembro de 2006. A turma era composta por 29 alunos, na faixa etária de 16 a 17 anos, distribuídos entre 14 meninas e 15 meninos. As aulas ocorreram nas terças-feiras, em período de 100 minutos (das 7h 45 min às 9h 25 min), e nas sextas-feiras, em período de 100 minutos (das 10h 30 min às 12h 10 min), num total de 7 encontros.

Nessa escola, as salas de aula do Ensino Médio possuem grandes mesas retangulares (e não mesas escolares convencionais), que acomodam os alunos em duplas. Todas as mesas ficam dispostas no "formato da letra u". Um dos objetivos da escola, ao utilizar essa disposição, é possibilitar um maior entrosamento entre professores e alunos. Assim, os alunos já estão habituados a discutir e trabalhar em grupo, o que vem ao encontro dos objetivos e expectativas delineados na concepção da situação didática na seção anterior. Outra importante particularidade da escola é ter, para cada disciplina, além do professor titular, também um professor auxiliar, que participa de algumas aulas. O professor auxiliar ajuda no atendimento de dúvidas dos alunos nos momentos em que são realizadas as atividades em pequenos grupos, e também presta atendimento aos alunos em certos horários extra-classe.

Diversos motivos conduziram à escolha da turma 201 para a realização da experiência, dentre eles: ser uma turma sob nossa responsabilidade desde o início do ano, portanto com um contrato didático já definido e estabelecido; ser uma turma, no geral, muito receptiva às atividades propostas ao longo das aulas de Matemática; ter-se em todas as aulas previstas para a experiência a presença da professora auxiliar; apresentar autonomia e um ritmo de aprendizagem bastante homogêneo, com poucos casos de alunos exigindo muitas orientações para a realização das atividades. Com esta escolha da turma procuramos minimizar as inúmeras variáveis que se fazem presentes nas situações didáticas, de forma a termos sob foco de análise, sobretudo, a validação do material didático a ser nosso produto final, nisso dependendo de implementação em uma situação real de sala de aula, no nosso caso, com algumas características diferenciadas, e que sabemos, nem sempre se fazem presentes no dia-a-dia dos professores de Matemática.

No relato da experiência buscamos evidenciar, para cada um dos sete encontros, os objetivos e expectativas gerais, bem como os diferentes momentos que foram contemplados – intervenção do professor, discussão em grande grupo, discussão em pequenos grupos – conforme previsto na concepção da situação didática.

Decidimos apresentar no relato, de forma conjunta, as *análises a priori* e *a posteriori* de cada atividade, desta forma procurando deixar mais claro o desenrolar da experiência, principalmente quanto aos ajustes didáticos que foram se fazendo necessários para bem atender os ritmos de aprendizagem dos alunos.

Inicialmente organizamos a seqüência de atividades para 6 encontros, o que na fase da experimentação se mostrou uma expectativa acima do que seria viável[32]. Dificilmente o professor espera até o final de uma experiência para analisar os seus resultados, e desta forma, na nossa experiência as propostas de trabalho para cada novo encontro foram readaptadas através de um refinamento da *análise a priori* já feita: as dificuldades dos alunos detectadas em cada *análise a posteriori* contribuíram para uma primeira reconstrução da seqüência de atividades (ao longo de sua implementação), retroagindo sobre toda a Engenharia. Neste sentido Gravina (2001, p.116) fala sobre a importância de estar-se atento às atitudes dos alunos não previstas para a fase da experimentação.

[32] Uma análise a priori da primeira versão é apresentada de forma breve no anexo 1.

> *“No decorrer da seqüência de atividades também podem surgir dificuldades e obstáculos não previstos na análise preliminar. Nessas condições faz-se necessária a reformulação e reestruturação da engenharia didática proposta, então tomada como uma primeira aproximação para a superação das dificuldades apontadas na análise preliminar e com estratégia de ataque explicitada na análise a priori. É uma metodologia de caráter dialético: o próprio desenrolar da experimentação retroage sobre a engenharia concebida.”*

Para cada encontro foram escolhidas as atividades[33] que julgamos mais significativas no sentido de mostrar, via confronto de *análise a priori* e *análise a posteriori*, a pertinência da atividade proposta quanto provocação para construção de conhecimento por parte do aluno.

4.2.1 Encontro 1

Objetivos e expectativas gerais

No primeiro encontro o objetivo principal era a apropriação, por parte dos alunos, do conceito de vetor e das operações de soma e multiplicação por escalar, no domínio geométrico. A grande expectativa era de que, com a resolução das atividades propostas, a ser feita após o momento inicial de discussão coletiva, os alunos tivessem clareza quanto a diferença de significados associados às palavras “vetor” e “seta”, e que, desta forma, operassem corretamente com vetores na forma geométrica. O material usado neste encontro está no Anexo 2 em “Encontro 1”.

Momento de discussão em grande grupo: o conceito de vetor e as operações no domínio geométrico

A descrição da transformação de translação aplicada a triângulo foi o ponto de partida da discussão, com foco na construção do conceito de vetor.

[33] A numeração das atividades respeita aquela do material que se encontra no Anexo 2.

Com diferentes perguntas provocativas, o professor[34] tratou de colocar em evidência a necessidade de conhecer-se um comprimento, uma direção e um sentido, para bem descrever o movimento de translação. Assim, a uma dada seta foram atribuídos os significados destas três informações. Destacou-se, com muita ênfase, que setas de mesmo comprimento, mesma direção e o mesmo sentido descrevem uma mesma translação e, assim foi apresentado, neste primeiro momento, o conceito de vetor como sendo uma coleção de setas de mesmo comprimento, direção e sentido.

Tendo sempre presente a importância do valor formativo agregado em cada momento de aprendizagem, avançamos com o conceito de vetor com o propósito de não deixar dúvidas quanto a leitura matemática da idéia de sentido – introduzimos, através de paralelogramos, a relação de "AB e CD setas equivalentes".

Também foi a transformação de translação que motivou a discussão da definição de soma de vetores, pois a translação de um objeto segundo o vetor $\vec{u}$ + $\vec{v}$ é equivalente a duas translações sucessivas do mesmo objeto: uma segundo o vetor $\vec{u}$, e a outra, segundo o vetor $\vec{v}$.

Ainda neste primeiro encontro foi discutida a operação de multiplicação por escalar "k", tendo-se cuidado de trazer para análise os dois casos – "k" positivo e "k" negativo.

Momento de discussão em pequenos grupos

Atividade 1: Fazer a translação do triângulo abaixo segundo cada uma das setas indicadas na figura:

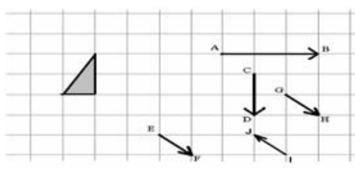


Fig. 1 – Atividade 1 (Encontro 1)

[34] Ao longo do relato, ao mencionar "o professor" estamos nos referindo ao autor desta dissertação.

***Análise a priori*:** a atividade se apresenta com uma cuidadosa escolha de setas, com diferentes comprimentos, diferentes direções e diferentes sentidos. O conceito de vetor é o pano de fundo nessa atividade, daí ter-se: as setas $\overrightarrow{GH}$ e $\overrightarrow{EF}$ como representantes de um mesmo vetor, portanto produzindo o mesmo efeito de translação; as setas $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{IJ}$ somente com os sentidos opostos, portanto produzindo efeitos simétricos na translação.

***Análise a posteriori*:** os alunos, em número significativo, apresentaram dificuldades com o conceito de translação. Muitos solicitaram a ajuda do professor.

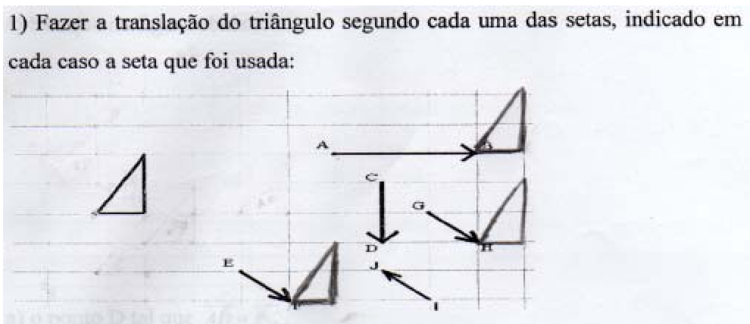


Fig. 2 – Solução de aluno A (Atividade 1/ Encontro 1)

Um dos erros freqüentes, registrado na figura 2 que documenta a solução de um aluno, foi desenhar o triângulo transladado na extremidade das setas. Este erro sinaliza que os alunos estão atribuindo, até com coerência, um certo significado à seta, mas totalmente dissociado do significado matemático debatido no momento de discussão coletiva. Ou seja, o erro sinaliza, além da incompreensão da translação, uma falta de mobilidade de setas, conforme previsto na secção 3.5 do capítulo 3, onde foram discutidas as dificuldades cognitivas em relação ao conceito de vetor.

Atividade 2: Identifique na figura abaixo, outras setas que são representantes dos vetores dados pelas setas $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AD}$.

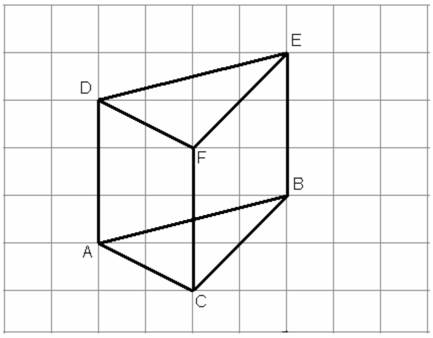


Fig. 3 – Atividade 2 (Encontro 1)

Análise a priori: esta atividade visa provocar uma clara diferenciação entre os conceitos de segmento e seta ("segmento orientado"), pois cabe ao aluno fazer as escolhas de setas equivalentes, especialmente no que diz respeito a ter o "mesmo sentido". As idéias de "mesmo comprimento", via congruência de segmentos, e de "mesma direção", via paralelismo de retas, são geometricamente mais visíveis para os alunos, e, portanto mais compreensíveis; diferentemente da idéia de sentido, registrada visualmente como o símbolo.

Analise a posteriori: nesta atividade os alunos não apresentaram maiores dificuldades de compreensão, pois restrita ao conceito de vetor (diferentemente da anterior onde deveriam trabalhar com "vetor" e "transformação de translação"). Porém, muitos não deram atenção ao sentido da seta, escrevendo $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FC}$ no lugar de $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CF}$, fazendo-se necessária uma intervenção do professor. Este comportamento dos alunos não é motivo de surpresa, pois conforme apontado na secção 3.5, a questão do sentido sempre é motivo de confusão para os alunos, que estão habituados a trabalhar somente com segmentos.

Atividade 3: A figura abaixo é obtida através da junção de três hexágonos regulares. Quantos vetores distintos os lados destes polígonos determinam?

Fig. 4 – Atividade 3 (Encontro 1)

Análise a priori: tem-se na atividade, novamente, a exigência de diferenciar segmento e seta. Mas diferentemente da anterior, nesta atividade devem ser identificados todos os vetores que estão representados em uma figura geométrica. Além disto, a identificação das diferentes direções exigem maior atenção dos alunos, pois os segmentos paralelos não se encontram em posição tão conhecida para os alunos, como aqueles que se apresentam na figura da atividade anterior (que sugere um prisma triangular reto). É a identificação de pares de segmentos paralelos, junto com os dois sentidos possíveis, que vai responder à pergunta: espera-se que os alunos contem a quantidade de direções definidas e multipliquem a mesma por dois.

Análise a posteriori: a grande maioria da turma resolveu a atividade corretamente, com interessantes momentos de discussão em pequenos grupos. Grupos que foram atendidos pelo professor em suas dificuldades na atividade anterior, nesta atividade se mostraram bastante seguros com o conceito de vetor. Diferentes soluções foram apresentadas.

Foi interessante observar a discussão entre dois grupos, na confrontação de argumentos de validação de suas soluções, pois ficou muito evidente a construção do conceito de vetor por parte dos alunos.

O primeiro grupo, conforme previsto na análise *a priori*, observando que os lados eram todos de mesmo comprimento, contou primeiro as direções distintas definidas por estes lados (no caso 3) e multiplicou esse número por 2, já que dada uma direção existem 2 sentidos. Esta resolução, feita por um dos alunos do grupo, está registrada na figura 5.

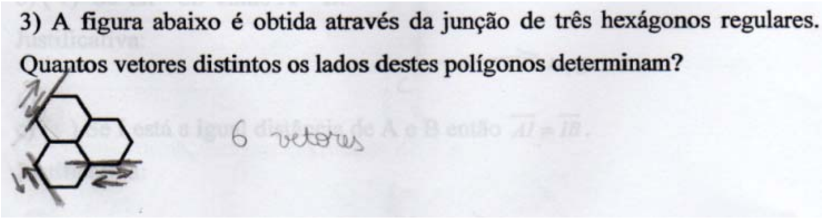


Fig. 5 – Solução de aluno A (Atividade 3/ Encontro 1)

O segundo grupo inicialmente contou 12 setas representantes de vetores distintos. Desenharam setas ao longo dos lados de um hexágono, no sentido horário, obtendo assim 6 setas representantes de vetores diferentes. Fizeram o mesmo para outro sentido (conforme apresentado na figura 6 na resolução de um dos alunos). Porém, durante a discussão com o outro grupo, perceberam que as 6 setas obtidas seriam equivalentes às 6 setas anteriormente representadas.

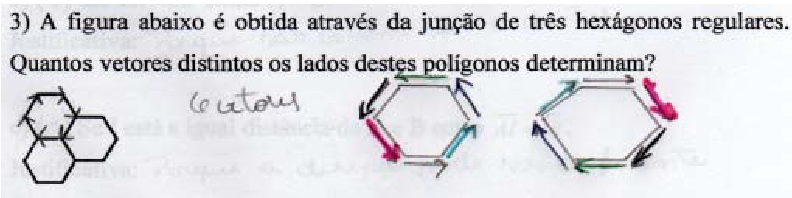
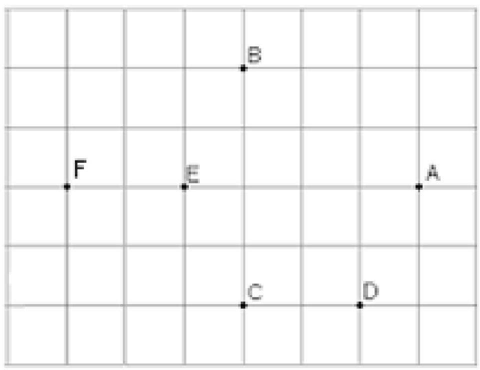


Fig. 6 – Solução de aluno B (Atividade 3/ Encontro 1)

Atividade 6: Encontre na figura abaixo, sem acrescentar novos pontos, um representante do vetor que é igual a:



a) $\overline{DB} + \overline{BA} =$

b) $\overline{AB} + \overline{AD} =$

c) $\overline{AD} + \overline{EF} =$

Fig. 7 - Atividade 6 (Encontro 1)

Análise a priori: esta atividade visa provocar a operação de soma de vetores com setas representantes em diferentes situações, encerrando diferentes níveis de complexidade. No item (a) as setas representantes dos vetores são consecutivas, com extremidade de uma delas coincidindo com a origem da outra; no item (b) as duas setas representantes têm mesma origem; já no item (c) as setas representantes não têm pontos em comum.

Os diferentes níveis provocam a realização de soma via resultante de setas consecutivas, via diagonal do paralelogramo e, por último, via construção de setas equivalentes, para então determinar a seta resultante representante do vetor soma. Esta atividade, diferentemente das anteriores, exige a construção de setas equivalentes, e de forma provocativa solicita que o vetor soma seja representado por seta que faz uso de pontos que já estão na figura.

Análise a posteriori: Esta é a primeira atividade sobre soma de vetores. Através das resoluções e perguntas de um número significativo de alunos, constatamos que a soma de vetores não ficou bem compreendida para boa parte do grupo. Neste momento de discussão em pequenos grupos, muitos alunos mostraram a idéia de que a soma de dois vetores é dada pelo terceiro lado de um triângulo formado pelas duas setas iniciais, sem qualquer atenção ao significado do sentido dado no símbolo “seta”, conforme documentado na resolução apresentada na figura 8, aspecto este também referido na análise de dificuldades da seção 3.5.

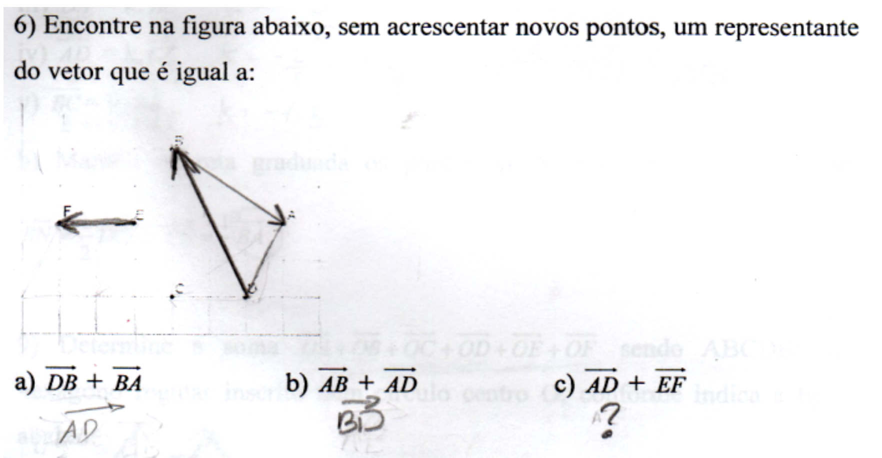


Fig. 8 - Solução de aluno A (Atividade 6/ Encontro 1)

Mas também registramos resoluções de vários alunos onde o vetor soma foi determinado corretamente, via uma seta representante atendendo a solicitação de ser dada através de pontos que já estavam na figura. Nestas soluções, exemplificadas na figura 9, com registro de produção de um aluno, detectamos um pleno controle dos conceitos de vetor e de soma de vetores, tendo-se nestes casos uma plena correspondência de atitudes previstas para os alunos, na *análise a priori*, e aquelas efetivamente apresentadas na *análise a* posteriori.

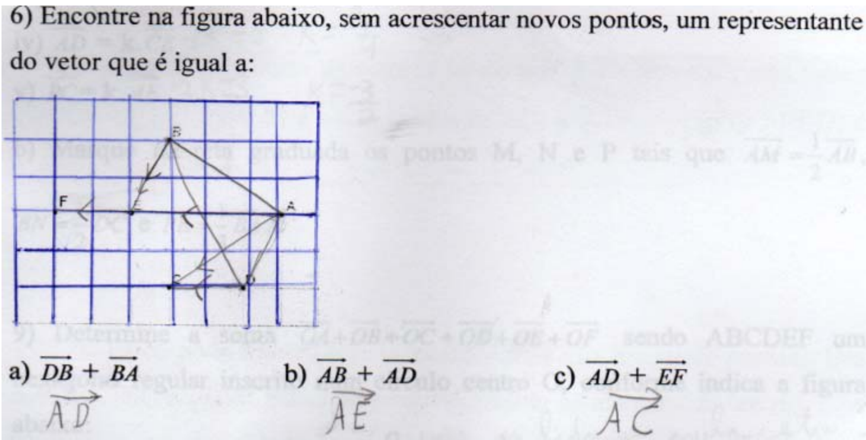


Fig. 9 – Solução de aluno B (Atividade 6/ Encontro 1)

Ainda como parte da análise a posteriori, registramos que no decorrer do trabalho em pequenos grupos, constatamos que seria interessante propor um item (d) de maior nível de complexidade, a saber: ter-se as setas representantes dos dois vetores, a serem somados, com as extremidades coincidentes. Vale ressaltar que nosso propósito não é simplesmente criar complicações para o aluno, mas sim, provocá-lo para o pleno entendimento do significado da expressão “seta representante do vetor”. Este entendimento, com certeza, se reflete na versatilidade do aluno em criar setas representantes equivalentes de forma a bem operar com os vetores, mesmo em situação tão atípica como esta pensada para um adicional item (d).

Neste primeiro encontro, a grande maioria dos alunos não chegou a terminar a lista de atividades proposta. O trabalho em sala de aula encerrou, no geral, em torno da atividade 7.

Resumindo o Encontro 1

Considerando que estávamos dando início ao estudo da geometria vetorial, reconhecemos de imediato a nossa pretensão, um tanto exagerada, quanto ao conteúdo que pretendíamos trabalhar neste primeiro dia: conceito de vetor, soma e multiplicação por escalar sob o ponto de vista geométrico. Com esta proposta inicial, muito dos 100 minutos do encontro foram dedicados ao momento de discussão coletiva. Ao final da discussão do conceito de soma geométrica de vetores, os alunos começaram a se mostrar cansados e dispersos, comportamento que se revela no crescente volume de ruído das conversas "paralelas"[35].

Além da complexidade do conceito de vetor e do necessário domínio para então bem operar com vetores, os alunos foram bastante exigidos, tanto no momento de discussão coletiva quanto de discussão em pequenos grupos, nas solicitações de apresentação de explicações. E no caso, explicações envolvendo sobretudo raciocínios matemáticos que não faziam uso de qualquer cálculo numérico, uma atitude que também foi colocada como objeto de desenvolvimento, a ser trabalhada ao longo de toda a experiência.

Os alunos não conseguiram avançar em todas as atividades propostas, o que justifica a ausência de análise de atividades relativas à operação de multiplicação por escalar .

Mas, de um modo geral, o primeiro encontro foi extremamente positivo, por diversas razões. Nos mostrou, especialmente no momento de discussão em pequenos grupos, que muitos alunos, através das diferentes atividades propostas, construíram de forma pertinente o conceito de vetor, tendo nele

[35] Este comportamento dispersivo dos alunos foi levado em consideração na segunda reconstrução da seqüência de atividades apresentada na seção 4.3.

implícita a noção de relação de equivalência. Para estes alunos as atividades relativas à soma de vetores também não apresentaram maiores dificuldades.

A discussão em pequenos grupos também nos mostrou as dificuldades e os significados equivocados que muitos dos alunos estavam atribuindo ao símbolo “seta”. Mostrou de forma muito clara o quanto pode ser difícil para o aluno trabalhar com a idéia de vetor no contexto de transformação geométrica. Nas dificuldades para trabalhar com a operação de soma, os alunos revelaram, sobretudo, uma falta de versatilidade para desenhar setas equivalentes com variados pontos de origem.

O encontro também nos mostrou que a grande maioria dos alunos precisaria de mais tempo para completar as atividades propostas.

As dificuldades resumidas acima, bem como a necessidade de mais tempo para concluir as atividades previstas para o Encontro 1, modificaram os objetivos e expectativas do segundo encontro.

4.2.2 Encontro 2

Objetivos e expectativas gerais

No segundo encontro o objetivo central passou a ser uma retomada das atividades do encontro 1, em que os alunos apresentaram maiores dificuldades, bem como o trabalho com as atividades que não chegaram a ser trabalhadas por falta de tempo. A expectativa para este encontro era de que os alunos conseguissem esclarecer as dúvidas e concluir as atividades do encontro anterior de maneira satisfatória.

Momento de discussão em grande grupo: sistematização de conteúdos relativos ao conceito de vetor e operações

Foram discutidas as atividades iniciais propostas no Encontro 1. Foi retomada a transformação de translação, tendo-se o cuidado de iniciar a discussão com a translação sendo aplicada a cada vértice do triângulo, para então recuperar o triângulo transladado. Foi novamente colocado em evidência a necessária atenção a ser dada ao sentido de um vetor e foi retomada, novamente, a operação de soma, mas agora no contexto das atividades. Foram discutidas, com tempo e detalhes, as atividades 1, 2, 3, 5, 6 e 8.

Através da atividade 5 (figura 10), que trata de determinar afirmações que são verdadeiras ou falsas, em momento de discussão em grande grupo, foi trabalhado o significado matemático de provar a veracidade ou falsidade de uma certa afirmação. Assim, os alunos entenderam que quando a afirmação é falsa, isto se explica com um contra-exemplo, porém, quando ela é verdadeira, no lugar dos exemplos, é necessária uma argumentação lógica, provando sua veracidade.

Atividade 5: Verdadeiro ou Falso?

a) ( ) Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Justificativa:

b) ( ) Se $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$, então A = B.

Justificativa:

c) ( ) Se I está a igual distância de A e B, então $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

Justificativa:

d) ( ) Se I é o ponto médio do segmento AB, então $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

Justificativa:

e) ( ) Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$, então os quatro pontos estão alinhados.

Justificativa:

Fig. 10 – Atividade 5 (Encontro 1)

A discussão em grande grupo foi chegando no seu limite de exigência de atenção dos alunos, e então foi encaminhado o trabalho de discussão em pequenos grupos, momento em que todos os alunos têm participação mais ativa.

<u>Momento de discussão em pequenos grupos</u>

Foi proposto aos alunos que se concentrassem nas atividades do primeiro encontro que ainda não haviam sido trabalhadas.

Nesse momento os alunos trabalharam de forma satisfatória e demonstraram ter superado consideravelmente as dificuldades do encontro anterior.

Atividade 8: Os pontos A, B, C, D e E foram marcados na reta graduada abaixo.

a) Determine o valor da constante real k tal que:

i) $\overrightarrow{AC}$ = k. $\overrightarrow{AB}$ ii) $\overrightarrow{DB}$ = k. $\overrightarrow{AB}$ iii) $\overrightarrow{DA}$ = k. $\overrightarrow{BC}$

iv) $\overrightarrow{AD}$ = k. $\overrightarrow{CE}$ v) $\overrightarrow{BC}$ = k. $\overrightarrow{AE}$

b) Marque na reta graduada os pontos M, N e P tais que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{PE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

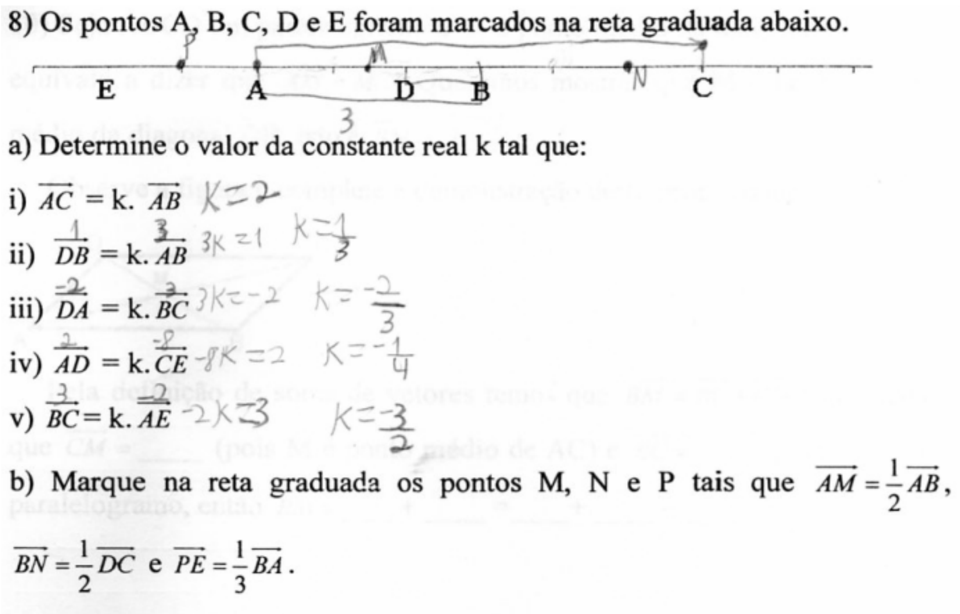
Fig. 11 – Atividade 8 (Encontro 1)

***Análise a priori*:**

O item (a) dessa atividade visa provocar reflexões sobre a operação de multiplicação por escalar, em diferentes níveis de complexidade: $k > 1$, $0 < k < 1$ e $k < 0$. No item (b), o escalar é conhecido e tem-se que determinar um ponto (de origem ou de extremidade) de tal forma que uma seta dada seja múltipla de outra.

***Análise a posteriori*:**

A maior parte dos alunos resolveu a atividade satisfatoriamente, conforme registrado na figura 12. Entretanto, um grupo pequeno, que já apresentava dificuldade em Matemática, se equivocou na determinação do escalar, errando o sinal e também escrevendo $\overrightarrow{DB}$ = 3. $\overrightarrow{AB}$ no lugar de $\overrightarrow{DB}$ = (1/3). $\overrightarrow{AB}$, conforme registrado na figura 13.


8) Os pontos A, B, C, D e E foram marcados na reta graduada abaixo.

a) Determine o valor da constante real k tal que:

i) $\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB}$ $K=2$

ii) $\overset{1}{\overrightarrow{DB}} = k.\overset{3}{\overrightarrow{AB}}$ $3K=1$ $K=\frac{1}{3}$

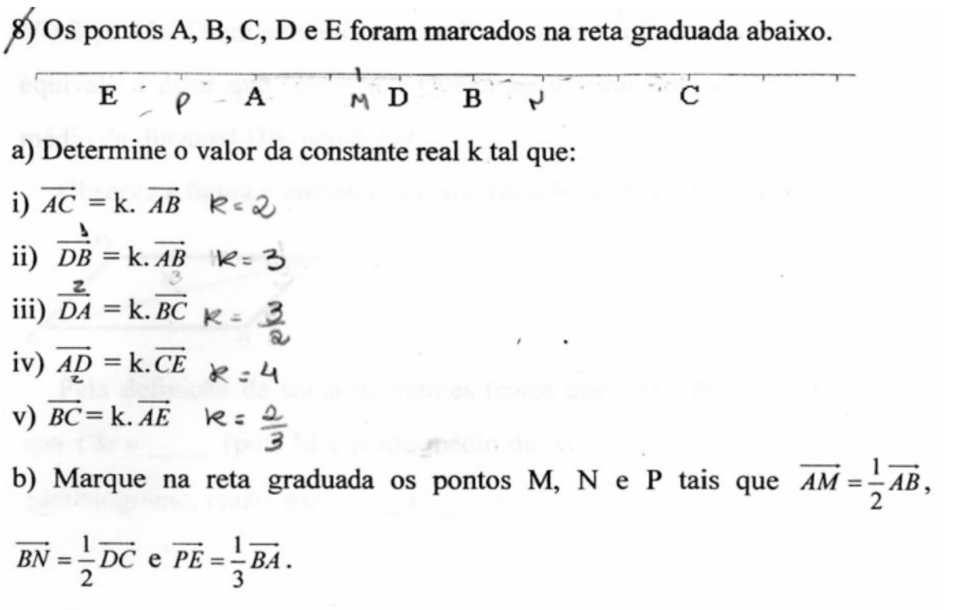
iii) $\overset{-2}{\overrightarrow{DA}} = k.\overset{3}{\overrightarrow{BC}}$ $3K=-2$ $K=-\frac{2}{3}$

iv) $\overset{2}{\overrightarrow{AD}} = k.\overset{-8}{\overrightarrow{CE}}$ $-8K=2$ $K=-\frac{1}{4}$

v) $\overset{3}{\overrightarrow{BC}} = k.\overset{-2}{\overrightarrow{AE}}$ $-2K=3$ $K=-\frac{3}{2}$

b) Marque na reta graduada os pontos M, N e P tais que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{PE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

Fig. 12 – Solução de aluno A (Atividade 8/ Encontro 1)


8) Os pontos A, B, C, D e E foram marcados na reta graduada abaixo.

a) Determine o valor da constante real k tal que:

i) $\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB}$ $k=2$

ii) $\overset{1}{\overrightarrow{DB}} = k.\overrightarrow{AB}$ $k=3$

iii) $\overset{2}{\overrightarrow{DA}} = k.\overset{3}{\overrightarrow{BC}}$ $k=\frac{3}{2}$

iv) $\underset{2}{\overrightarrow{AD}} = k.\overrightarrow{CE}$ $k=4$

v) $\overrightarrow{BC} = k.\overrightarrow{AE}$ $k=\frac{2}{3}$

b) Marque na reta graduada os pontos M, N e P tais que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{PE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

Fig. 13 – Solução de aluno B (Atividade 8/ Encontro 1)

Resumo do Encontro 2

Com a intervenção inicial do professor, focada nos aspectos em que os alunos apresentaram dificuldades, e com o maior tempo de encontro reservado para o momento de discussão em pequenos grupos, os alunos avançaram na resolução das atividades que compõem o Encontro 1 do Anexo 2.

Neste encontro, como no primeiro, tivemos que lidar com os diferentes ritmos de aprendizagem que encontramos em uma turma de alunos. Mas ao final do encontro, constatamos um domínio bastante satisfatório dos conceitos de vetor e operações sob o ponto de vista geométrico. O desenrolar destes dois encontros nos trouxe subsídios para a reorganização da proposta didática, a ser detalhada na seção 4.3. Identificamos a necessidade de desdobrar a seqüência de conteúdos e atividades de forma a contemplar, em cada encontro, um maior tempo para os momentos de discussão em pequeno grupo, principalmente porque é neste momento que todos os alunos se tornam ativos aprendizes. Nas discussões em grande grupo, muitos alunos são privados dos seus momentos de chegar às suas próprias conclusões, pois a voz ativa de colegas antecipa um possível raciocínio, o qual perturba a linha de pensamento daqueles que ainda estão elaborando as suas idéias.

4.2.3 Encontro 3

Objetivos e expectativas gerais

No terceiro encontro, o objetivo principal era que os alunos se apropriassem de uma nova maneira de representar e operar com vetores, agora no domínio algébrico: através de pares de números em sistema de coordenadas. A grande expectativa era de que através dos diferentes momentos de discussão, em grande e em pequenos grupos, os alunos entendessem que através de um sistema de coordenadas, o vetor passa a ter uma leitura algébrica muito compacta – é um par de números que armazena todas as características do vetor, a saber: comprimento, direção e sentido.

Momento de discussão em grande grupo: coordenadas de vetor e operações no domínio algébrico

O encontro começou com uma conversa sobre como representar vetores em um sistema de coordenadas. Foram definidas as coordenadas do vetor como as coordenadas da extremidade da seta representante que possui origem na origem do sistema de coordenadas. Essa escolha se torna muito natural, pois nela está toda informação do efeito de translação que é armazenado no par de coordenadas (a ,b) do vetor: a coordenada “a” indica translação paralela ao eixo “ox” (para direita, se a coordenada é positiva, e para esquerda, se a coordenada é negativa); a coordenada “b” indica a translação paralela ao eixo “oy” (para cima, se a coordenada é positiva, e para baixo, se a coordenada é negativa).

Após a definição de coordenadas de um vetor, ainda em momento de discussão coletiva, foi proposta a atividade apresentada na figura 11, aqui buscando-se intercalar um pequeno momento de discussão em pequenos grupos, antes de avançar nas operações algébricas.

Atividade: a partir das informações dadas em cada uma das três situações abaixo, determine as coordenadas do vetor v

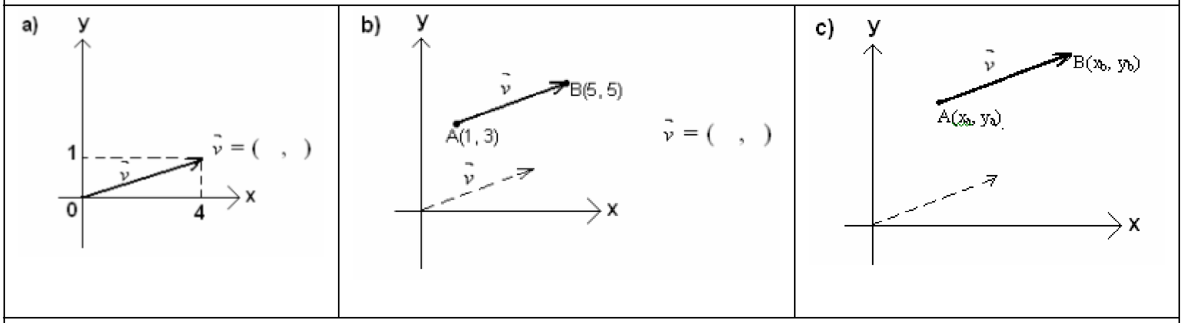


Fig. 14 – Atividade sobre coordenadas do encontro 3

A situação (c), a mais complexa, trata da determinação das coordenadas de um vetor a partir de uma seta representante com origem em qualquer ponto do sistema de coordenadas. A situação (b) é um caso numérico particular de (c), e aqui é interessante observar que os alunos resolveram (a) e (b), sem maiores dificuldades, mas muitos deles encontraram dificuldades para resolver (c), o que nos remete ao importante aspecto de aprendizagem da matemática no que diz respeito a raciocínios generalizadores.

Após a discussão da atividade, iniciou-se o trabalho como soma de vetores e multiplicação de vetor por escalar, agora no domínio da álgebra.

Neste encontro houve uma cuidadosa atenção para que os alunos se colocassem na situação de entenderem que o vetor resultante da soma geométrica tem como coordenadas a soma das coordenadas dos vetores que estão sendo somados. Sem explicitar as palavras "teorema", "demonstração" e "c.q.d", demonstramos para os alunos, usando argumentos de congruência de triângulos, o seguinte teorema, aqui enunciado com precisão: *"Se $\vec{v}$ = (a , b) e $\vec{w}$ = (c , d), então o vetor resultante da soma geométrica $\vec{v}$ + $\vec{w}$ tem como coordenadas (a + c , b + d)."*

O mesmo procedimento de discutir com os alunos uma demonstração matemática, agora usando argumentos de semelhança de triângulos, foi feito para justificar o teorema relativo à multiplicação de vetor por escalar, que enunciamos aqui com precisão: "*Se $\vec{v}$ = (a , b) e k é um número real, então o vetor resultante da multiplicação geométrica por escalar k. $\vec{v}$ tem como coordenadas (k.a , k.b)"*

Para ambas as demonstrações, nas figuras usadas, foram escolhidos vetores com coordenadas positivas e, no caso particular da multiplicação, o escalar foi escolhido maior do que um. Estas escolhas foram com o intuito de deduzirmos as coordenadas da soma de vetores e da multiplicação de vetor por escalar, sem ter que distinguir os casos em que, no triângulo da figura, os comprimentos dos lados não correspondem diretamente às coordenadas de pontos (caso de coordenadas negativas). Mesmo com estas particularidades de escolhas, o argumento apresentado continua geral o suficiente para se caracterizar como uma demonstração que traz entendimento sobre as operações com vetores, ora realizadas no domínio geométrico, ora no domínio algébrico.

Mas vale observar que após o argumento relativo à multiplicação de vetor por escalar e correspondente efeito nas coordenadas, um aluno questionou a figura argumentando que o vetor k.$\vec{v}$ poderia "ser menor" do que o vetor $\vec{v}$. Este questionamento nos levou à discussão, agora em um segundo momento natural de desdobramento, de casos: $0 < k < 1$ e $k < 0$.

Momento de discussão em pequenos grupos

Atividade 1: Determine as coordenadas do vetor $\vec{v}$ representado pela seta $\overrightarrow{AB}$ quando:

a) A(3, 3) e B(5, 4)   b) A(1, 3) e B(4, -1)

Fig. 15 – Atividade 1 (Encontro 3)

Análise a priori: nesta atividade apresenta-se a necessidade de determinar as coordenadas do vetor (representação algébrica) utilizando setas (representação geométrica) que não estão na origem. A presença do sistema de coordenadas tem como propósito colocar os alunos em trabalho tanto no domínio geométrico como no domínio algébrico. Espera-se que os alunos desenhem a seta equivalente com origem na origem e determinem as coordenadas do vetor algebricamente (pela diferença entre as coordenadas) ou geometricamente (por triângulos congruentes). Mas é fato que, da forma como está enunciada a atividade, os alunos podem resolvê-la somente no quadro algébrico, sem maior identificação das coordenadas com as características de comprimento, direção e sentido associadas de forma explícita ao conceito de vetor geométrico.

Análise a posteriori: é interessante registrar as diferentes estratégias de resolução apresentadas pelos alunos, conforme previsto na *análise a priori*. Alguns alunos construíram a seta equivalente com origem na origem do sistema e determinaram graficamente (e portanto, de forma mais geométrica) as coordenadas do vetor dado pelas setas AB (ver figura 16); outros construíram um triângulo retângulo com hipotenusa igual ao segmento AB e, através do comprimento dos catetos, determinaram as coordenadas do vetor (ver figura 17); e alguns simplesmente não usaram a representação geométrica, calculando diretamente a diferença entre as coordenadas de A e B (ver figura 18).

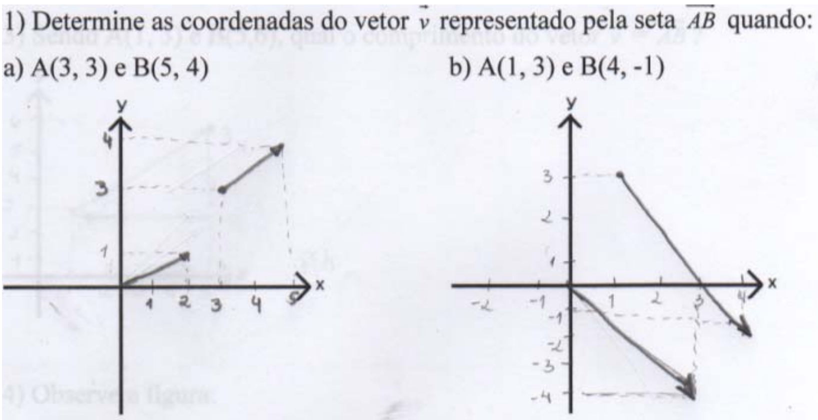


Fig. 16 – Solução de aluno A (Atividade 1/ Encontro 3)

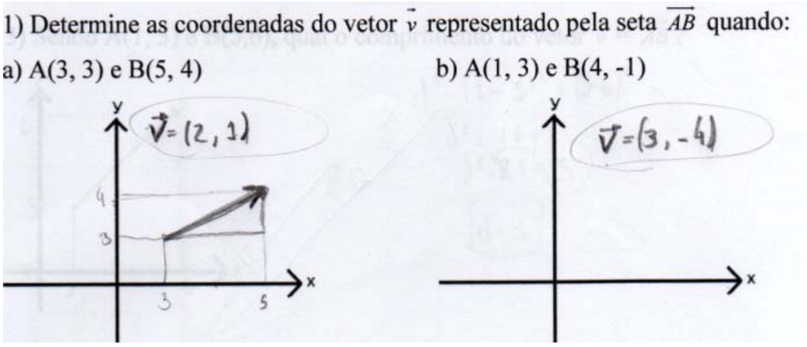


Fig. 17 – Solução de aluno B (Atividade 1/ Encontro 3)

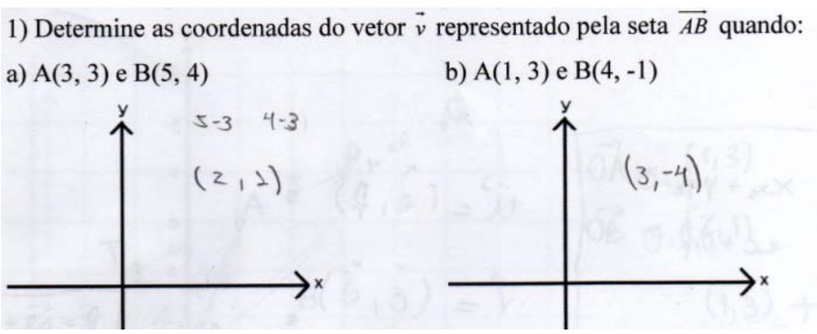


Fig. 18 – Solução de aluno C (Atividade 1/ Encontro 3)

Na resolução abaixo (caso (b) da figura 19), registramos uma falta de integração de raciocínios nos domínios algébrico e geométrico. O aluno representou corretamente a seta AB. Depois, fez o cálculo algébrico das coordenadas do correspondente vetor, e cometeu erros neste cálculo (seriam de falta de atenção?). Tendo calculado as coordenadas, fez o desenho da seta correspondente ao vetor, agora com origem na origem do sistema de coordenadas. Neste ponto, fica evidente a ausência de raciocínio geométrico, por parte do aluno: têm-se duas setas em situação de transversalidade quando deveriam estar situação de paralelismo, dado que são representantes de um mesmo vetor.

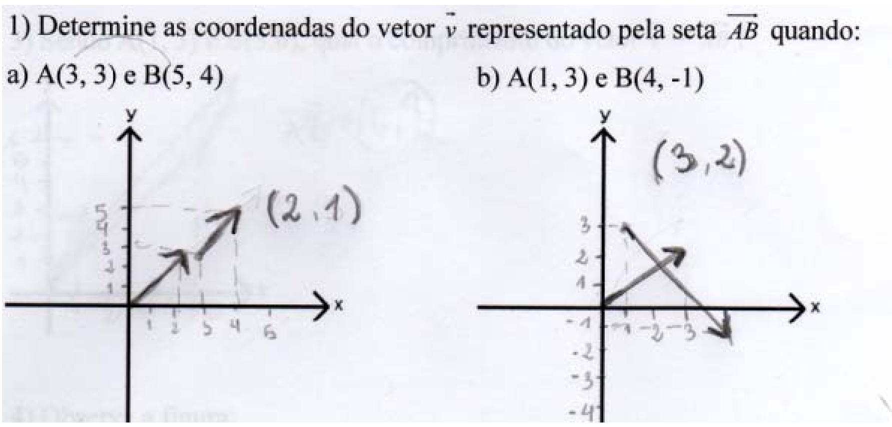


Fig. 19 – Solução de aluno D (Atividade 1/ Encontro 3)

Nesta resolução do aluno, temos mais uma situação que evidencia a importância do trabalho de Douady, ao colocar em destaque os ganhos para o aprendizado que podem advir da integração dos *domínios* geométrico e algébrico nas situações de ensino – um raciocínio geométrico, por parte do aluno, teria redirecionado a sua solução.

Também registramos resoluções onde os alunos consideraram as coordenadas do vetor sempre positivas, talvez por estarem pensando apenas no deslocamento horizontal (sem considerar se o mesmo foi para a direita ou para a esquerda) e no deslocamento vertical (sem considerar se o mesmo foi para cima ou para baixo). Este tipo de erro sinaliza a importância de trabalhar com os alunos, de forma enfática, a relação entre sinal de coordenadas e deslocamentos, no momento da introdução ao trabalho com coordenadas de vetor.

Atividade 2: Determine x e y sendo $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$ em cada caso:

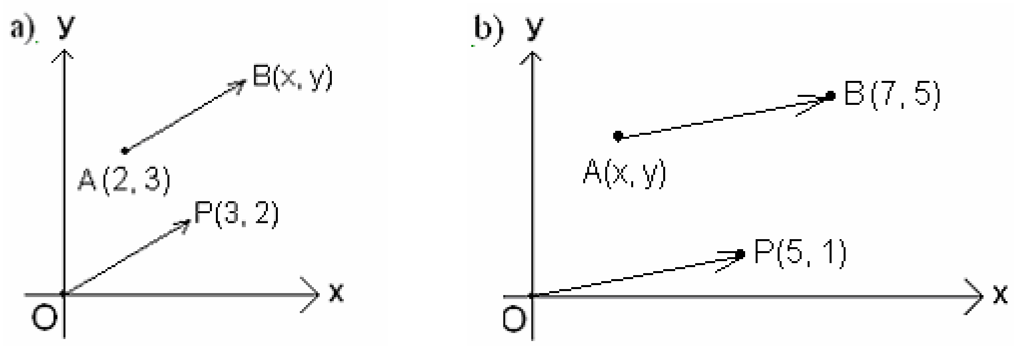


Fig. 20 – Atividade 2 (Encontro 3)

***Análise a priori*:** nesta atividade tem-se novamente, como foco principal o trabalho com coordenadas em situações de setas que representam um mesmo vetor. Vale destacar que na atividade anterior foi solicitado determinar as coordenadas de um vetor, conhecendo-se as coordenadas dos pontos origem e extremidade de uma dada seta representante do vetor. Nesta nova atividade, temos o caminho inverso: são dadas as coordenadas de um vetor e devem então ser recuperadas as coordenadas de extremidade (caso (a) da figura 20) e da origem (caso (b) da figura 20) de outras setas representantes do vetor. São expectativas para os tipos de solução: o aluno pode resolver a atividade no domínio geométrico (através de congruência de triângulos) e / ou no domínio algébrico (operando diretamente com coordenadas).

***Análise a posteriori*:** os alunos não apresentaram maiores dificuldades para resolver a atividade. De acordo com o previsto na *análise a priori,* apareceram diferentes soluções: alguns resolveram de forma essencialmente algébrica, ao escreverem as duas equações que determinam os valores das coordenadas dos pontos B e A, conforme registrado na solução documentada na figura 21. Outros alunos indicaram uma solução que integra os domínios geométrico e algébrico, ao colocarem em destaque triângulos congruentes que registram nos catetos os deslocamentos horizontais e verticais associados à seta representante que está na origem do sistema, conforme registrado na solução documentada na figura 22.

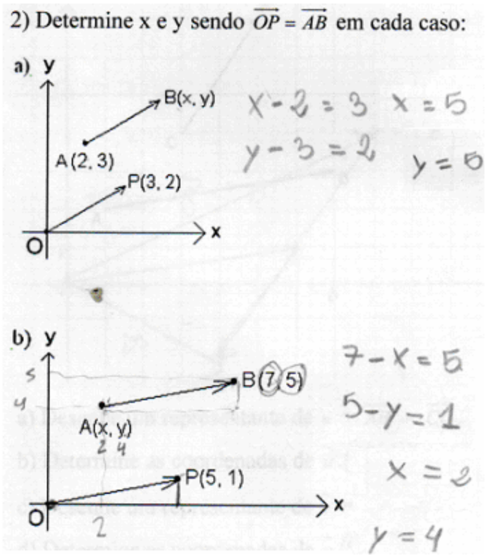


Fig. 21 – Solução de aluno A
(Atividade 2/ Encontro 3)

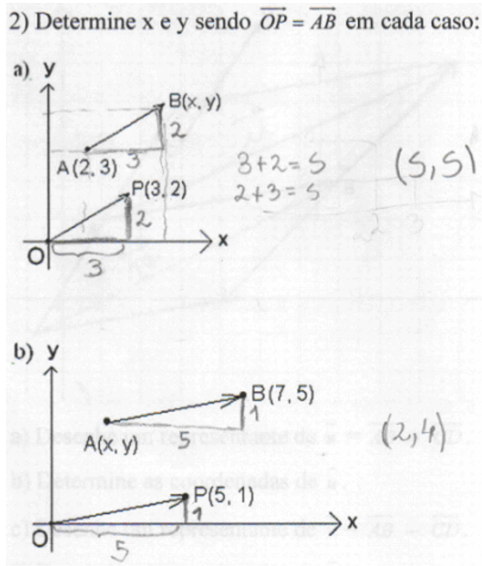
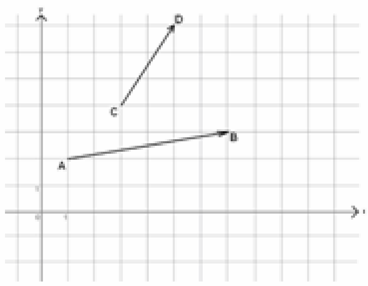


Fig. 22 – Solução de aluno B
(Atividade 2/ Encontro 3)

Atividade 4: Observe a figura:



a) Desenhe um representante de $\bar{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

b) Determine as coordenadas de $\bar{u}$.

c) Desenhe um representante de $\bar{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$.

d) Determine as coordenadas de $\bar{v}$.

Fig. 23 – Atividade 4 (Encontro 3)

Análise a priori: Esta é a primeira atividade sobre soma de vetores via coordenadas. Esta atividade foi elaborada de forma a provocar raciocínios nos domínios geométrico e algébrico. Com o enunciado proposto quer-se evitar a freqüente atitude dos alunos de priorizar soluções puramente algébricas (no caso, seria o trabalho apenas com as coordenadas dos vetores). A partir da formulação escolhida para o enunciado, espera-se dos alunos uma representação geométrica de cada uma das operações.

A proposital posição das setas, ambas com origem em pontos diferentes da origem do sistema, permite diferentes caminhos para a solução do problema, sempre exigindo a manipulação de setas equivalentes: a soma/diferença pode ser realizada geometricamente, sem a preocupação de ter-se setas equivalentes na origem do sistema, e depois disto serão então determinadas as coordenadas dos vetores resultantes. Ou de outra forma: de início são determinadas as setas equivalentes já com origem no sistema de coordenadas, e então são determinadas geometricamente as setas representantes dos vetores soma/diferença e, de forma quase simultânea, as correspondentes coordenadas. A presença do quadriculado também é intencional, pois coloca o aluno na posição de buscar as informações de coordenadas do vetor, via coordenadas de pontos origem e extremidade das setas ou via triângulos que têm as setas como hipotenusa.

***Análise a posteriori*: **Os alunos não apresentaram maiores dificuldades nesta atividade. Fizeram apropriadas escolhas de setas equivalentes de forma a realizarem, inicialmente, as operações de soma e diferença dentro do domínio geométrico, para então fazerem os cálculos das coordenadas dos vetores resultantes.

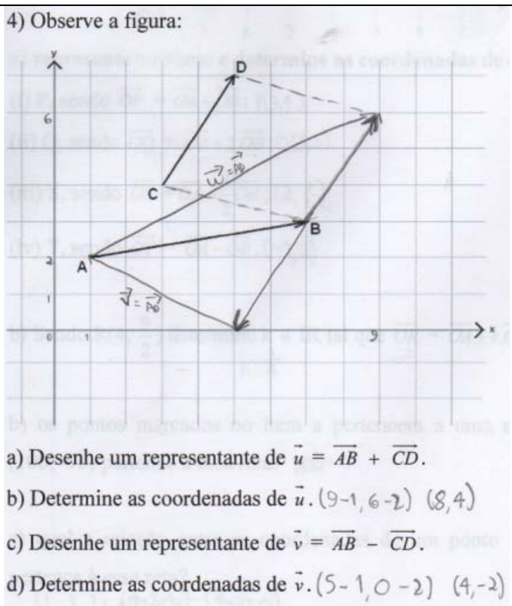


Fig. 24 - Solução de aluno A
(Atividade 4/ Encontro 3)

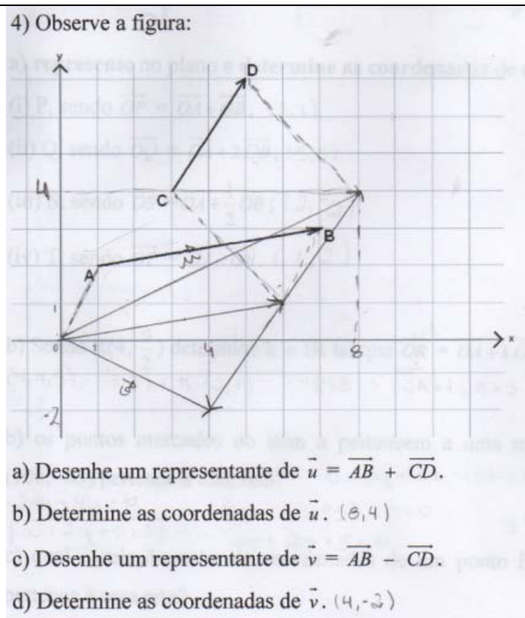


Fig. 25 - Solução de aluno B
(Atividade 4/ Encontro 3)

É interessante comparar as duas resoluções documentadas nas figuras 24 e 25. Na figura 24 temos o caminho de solução correspondente à primeira descrição apresentada na *análise a priori*: as operações são feitas, com o apoio do quadriculado para a precisão do desenho, de forma puramente geométrica, e depois disto, ainda via leitura essencialmente geométrica, são indicados os cálculos numéricos das coordenadas e correspondentes resultados, nisso também fazendo o uso do quadriculado.

Já na figura 25 temos o segundo caminho previsto na *análise a priori*: são desenhadas setas representantes na origem do sistema de coordenadas, e com estas são feitas as operações geométricas de soma e diferença de vetores; as coordenadas dos vetores resultantes são lidas diretamente na seta resultante, conforme indicação dada pelo aluno ao marcar, no sistema de coordenadas aquelas correspondentes aos pontos extremidades das setas resultantes das operações geométricas.

Assim como nas duas soluções apresentadas acima, constatamos na produção da grande maioria dos alunos o pouco uso das correspondentes operações algébricas para determinar as coordenadas dos vetores soma e diferença. Isto nos provoca na direção de incluir, como parte (b) desta atividade uma situação em que o vetor resultante não possa ser desenhado no quadriculado disponível. Desta forma, por força das circunstâncias, os alunos seriam provocados a trabalhar de forma algébrica.

Resumo do Encontro 3

Inicialmente os alunos apresentaram alguma dificuldade para trabalhar com vetores cujas coordenadas fossem negativas, talvez por estarem pensando na primeira coordenada apenas como um deslocamento horizontal (sem considerar se o mesmo é para a direita ou para a esquerda, dependendo do sinal da coordenada) e na segunda coordenada como um deslocamento vertical (sem considerar se o mesmo é para cima ou para baixo, dependendo do sinal da coordenada).

Nas atividades sobre operações de soma de vetores e de multiplicação de vetor por escalar, foi nossa intenção sempre provocar os alunos com raciocínios nos domínios geométrico e algébrico. Isto no sentido de estar sempre retomando, de uma forma ou outra, a construção de uma estreita relação entre as operações de natureza geométrica e algébrica, de forma a se estabelecer nas atitudes dos alunos uma natural postura para leituras geométricas e algébricas. Esta postura pode muito contribuir para o entendimento das equações da reta e do plano no contexto da geometria vetorial.

4.2.4 Encontro 4

Objetivos e expectativas gerais

No quarto encontro é a releitura da equação da reta, sob o ponto de vista da geometria vetorial, que se apresenta como objetivo principal. A expectativa maior é de que, tendo sido a reta entendida sob este ponto de vista, os alunos analisem qualitativamente as possibilidades de soluções de sistemas lineares com duas variáveis. A interpretação da reta de equação "a x + by = c" em que o vetor $\vec{n}$ = (a , b) indica a direção ortogonal à direção da reta, fornece informações sobre a existência (ou não) de solução de sistema de duas equações e duas variáveis; e com alguma atenção ao parâmetro "c" tem-se informação sobre as outras duas possibilidades de soluções, a saber, o caso de infinitas soluções ou o caso de inexistência de solução.

Momento de discussão em grande grupo: a condição de ortogonalidade de vetores e a equação da reta no plano

Inicialmente foi trabalhada a condição de ortogonalidade de vetores, a partir da situação geométrica com setas representantes dos vetores na origem do sistema de coordenadas. A dedução da condição de ortogonalidade iniciou no domínio geométrico, com aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo determinado pelas setas ortogonais, e assim foi deduzida a condição de ortogonalidade no domínio algébrico, a saber "a . c + b . d = 0" .

Estabelecida a condição algébrica de ortogonalidade, iniciou-se nova discussão para dedução da equação da reta no plano. Para isto, dada a reta no sistema de coordenadas, foi tomado um ponto (x_o, y_o) pertencente à reta e um vetor N = (a, b) com direção ortogonal à direção da reta. A figura 26 indica o desenho que deu suporte à argumentação dedutiva, em momento de discussão em grande grupo.

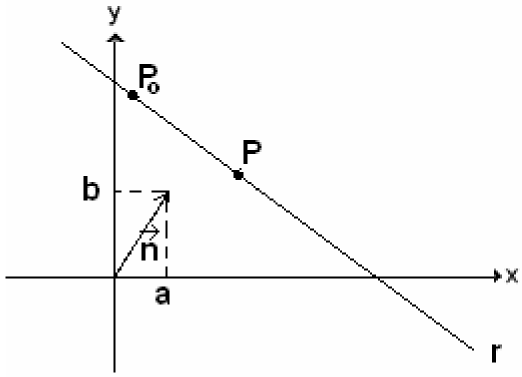


Fig. 26 – Dedução da equação da reta

A grande maioria dos alunos mostrou hesitação na determinação das coordenadas do vetor dado por $\overrightarrow{PoP}$. Assim sendo, foi necessário retomar a determinação das coordenadas de um vetor, conhecendo-se as coordenadas dos pontos origem e extremidade de uma seta representante do vetor. A dificuldade dos alunos talvez se explique no fato da seta representante $\overrightarrow{PoP}$ ter origem diferente da origem do sistema, acrescentando-se a isto a ausência de coordenadas numéricas particulares.

Mas o ponto crucial para os alunos foi a aplicação da condição algébrica de ortogonalidade aos vetores, representados pelas setas $\overrightarrow{PoP}$ e $\vec{n}$. A posição da seta $\overrightarrow{PoP}$ exigiu o intermediário argumento de considerar-se a seta equivalente na origem do sistema.

Vale aqui ressaltar novamente o nosso propósito, sempre presente nos momentos de discussão: desenvolver nos alunos a habilidade para argumentações de natureza dedutiva. Como já feito em encontro anterior, mesmo sem fazer referência às palavras “teorema” e “demonstração“, demonstramos que *“Se $\vec{n}$ = (a , b) é vetor com direção perpendicular à reta r e se P = (x_o, y_o) é um ponto desta reta r, então P = (x , y) pertence à reta se e somente se satisfaz a equação ax + by = c, onde c = ax_o + by_o.”*

<u>Momento de discussão em pequenos grupos</u>

Com a nova leitura da equação da reta, era esperado que os alunos conseguissem discutir qualitativamente as possibilidades de soluções de um sistema linear 2 x 2. Foram propostas 5 atividades para serem resolvidas usando o software Winplot (ver Anexo 2 – Encontro 4). Um dos fatores que levou à escolha deste software foi ter no seu menu as equações da reta (no plano) e do plano (no espaço) na forma a.x + b.y = c e a.(x - x_o) + b.(y - y_o) + c.(z - z_o) = 0, respectivamente. O Winplot é um excelente software em termos de recursos matemáticos para trabalho com geometria analítica e funções, mas tem algumas restrições de interatividade, pois não permite manipular objetos geométricos diretamente na tela do computador e não oferece recursos para manipulação de vetores e operações.

Neste encontro decidimos apresentar a *análise a priori* para duas das atividades propostas e, em seguida, fazer uma única *análise a posteriori* mais global do momento de discussão em pequenos grupos.

Atividade 1: Vá em janela e selecione a opção 2- dim. Vá no menu equação e selecione a opção reta. Atribua valores para os parâmetros a, b e c. Clique em ok e observe o gráfico.

Seguindo os passos acima, observe o gráfico de várias retas e responda:

a) O que acontece sempre que a = 0?

b) O que acontece sempre que b = 0?

c) Usando a interpretação discutida na sala de aula para a equação ax + by = c, justifique as respostas dos itens a e b.

d) Por que não podemos ter a e b simultaneamente nulos?

Fig. 27 – Atividade 1 (Encontro 4)

Análise a priori:

Tem-se na primeira atividade o claro propósito de provocar os alunos a relacionar a equação da reta a.x + b.y = c com seu vetor normal $\vec{n}$ = (a, b). Espera-se que com a visualização, na tela do computador, de diferentes retas e seus respectivos vetores normais, os alunos consigam se apropriar da releitura da equação da reta sob a ótica da geometria vetorial.

Atividade 5: Considere r e s duas retas de equações $a_1 x + b_1 y = c_1$ e $a_2 x + b_2 y = c_2$. Determine o que deve acontecer com os vetores n_1 = (a_1, b_1) e n_2 = (a_2, b_2), e com as constantes c_1 e c_2, para que as retas sejam:

a) coincidentes

b) paralelas

c) concorrentes

Fig. 28 – Atividade 5 (Encontro 4)

Análise a priori:

Espera-se que na resolução dessa atividade os alunos generalizem a análise qualitativa de soluções de sistemas lineares com duas variáveis.

Análise a posteriori: no desenrolar das atividades, dificuldades de diferentes naturezas se apresentaram. Dentre elas, destacamos: a falta de tempo para a familiarização com o software; a pouca versatilidade geométrica do software; a compreensão ainda bastante incipiente da equação da reta sob óptica da ortogonalidade de vetores. Assim, a pertinência do uso do Winplot para um trabalho qualitativo com sistema de equações ficou sob interrogação: como desenvolver uma seqüência de atividades que façam uso do software de modo a somar para o processo de aprendizagem? É nossa experiência frustrada que justifica esta interrogação.

É importante aqui ressaltar que estávamos pressupondo que, ao final deste quarto encontro, os alunos já estariam compreendendo os seguintes conceitos: vetor geométrico, operações com vetores na forma geométrica, vetor algébrico e operações com vetores na forma algébrica, ortogonalidade de vetores e a equação da reta sob a ótica da ortogonalidade.

Mas as dificuldades de compreensão que se apresentaram ao final deste quarto encontro, somadas ao frustrante uso do software Winplot, tornaram clara a necessidade de retomar alguns dos conceitos já trabalhados. Assim, foram alterados os objetivos e expectativas do encontro seguinte e foi elaborada uma nova lista de atividades, de forma a provocar os alunos no entendimento de conceitos ainda não bem compreendidos.

4.2.5 Encontro 5

Objetivos e expectativas gerais

O objetivo central desse encontro foi retomar, através de uma seqüência de atividades, aspectos relativos a coordenadas dos vetores, operações com coordenadas e a condição de ortogonalidade. A grande expectativa era de que compreendendo estes tópicos, os alunos retomassem o problema de discutir qualitativamente os sistemas lineares 2 x 2 através de trabalho com equação da reta sob a leitura vetorial. Esta retomada de conteúdos, com ênfase em atividades sobre ortogonalidade de vetores e equação da reta, se justifica também na intenção de levar-se os alunos ao entendimento seguro de uma situação geométrica no plano, para então ser generalizada para dimensão três, no desenrolar da experiência.

Momento de discussão em grande grupo: sistematização de conteúdos

Iniciamos a sistematização resolvendo a quarta atividade do Encontro 3 (disponível no Anexo 2), pois através da mesma podíamos retomar as coordenadas de vetores e as operações geométricas e algébricas. A ortogonalidade não foi discutida nesse momento, isto para que os alunos tivessem mais tempo para o momento de discussão em pequenos grupos, onde foram então provocados com atividades relativas ao assunto.

Momento de discussão em pequenos grupos

A seqüência de atividades propostas, concebida a partir da análise a posteriori do Encontro 4, colocou seu foco em aspectos que ainda não tinham sido bem compreendidos pelos alunos.

Atividade 3: Sendo $\vec{u}$ = (3, 1) e $\vec{v}$ = (2, 4), determine o que é pedido (representando as operações no sistema de coordenadas sempre que possível).

a) $\vec{u}+\vec{v}$ = (,). b) $8.\vec{u}-.0,5\vec{v}$ = (,).

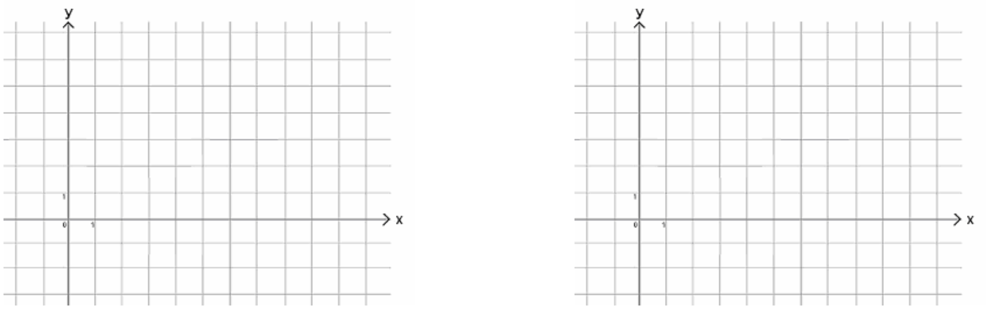
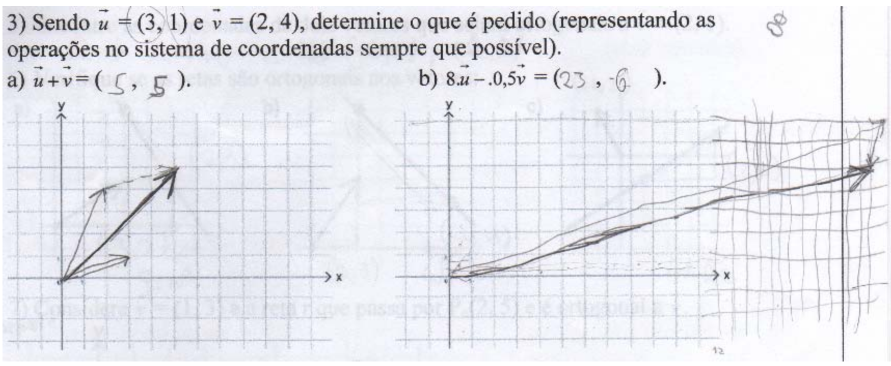


Fig. 29 – Atividade 3 (Encontro 5)

***Análise a priori*:** nesta atividade apresenta-se a necessidade de operar com vetores utilizando representações geométricas (setas) e algébricas (coordenadas). No item (b), propositalmente a seta representante do vetor solução tem o ponto extremidade fora da rede de quadriculados, esperando-se, desta forma, a provocação na direção de uma resolução algébrica.

***Análise a posteriori*:** os alunos conseguiram resolver a atividade de forma satisfatória. Conforme previsto na análise *a priori*, no item (b) a maior parte dos alunos apresentou somente a solução algébrica. Entretanto, alguns alunos aumentaram a rede de quadriculados de forma a ter a solução também geometricamente (figura 30).



3) Sendo $\vec{u}$ = (3, 1) e $\vec{v}$ = (2, 4), determine o que é pedido (representando as operações no sistema de coordenadas sempre que possível).

a) $\vec{u}+\vec{v}$ = (5 , 5). b) $8.\vec{u}-.0,5\vec{v}$ = (23 , -6).

Fig. 30 – Solução de aluno A (Atividade 3/ Encontro 5)

Atividade 4: Verifique se são ortogonais os vetores dados pelas setas abaixo:

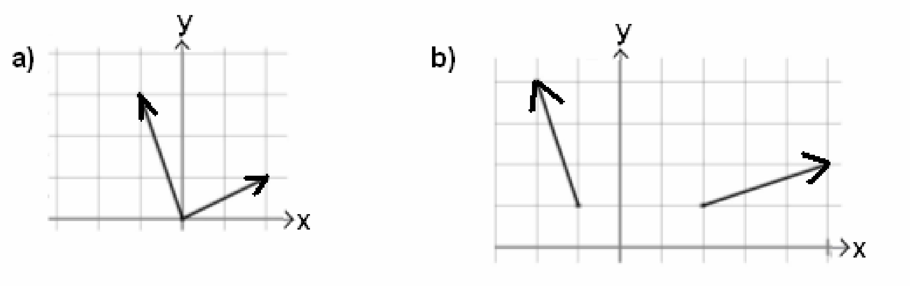


Fig. 31 – Atividade 4 (Encontro 5)

Análise a priori: tem-se nessa atividade claramente a intenção de retomar a ortogonalidade de vetores e aplicá-la a vetores em que os representantes não estão na origem do sistema de coordenadas. Espera-se que os alunos apliquem diretamente a condição de ortogonalidade no item (a); no caso (b), mais exigente nos raciocínios geométricos e algébricos, espera-se que inicialmente os alunos considerem as setas equivalentes na origem do sistema, para então aplicar a condição algébrica de ortogonalidade.

Análise a posteriori: é interessante analisar as diferentes soluções apresentadas nesta atividade. Para o item (a) alguns alunos aplicaram a já conhecida condição algébrica de ortogonalidade (figura 32); porém, outros construíram um triângulo usando as setas e, após calcular as medidas dos lados, aplicaram o teorema de Pitágoras para determinar se o triângulo era ou não retângulo (figura 33) – retomando na solução, de forma natural, a demonstração da condição ortogonalidade.

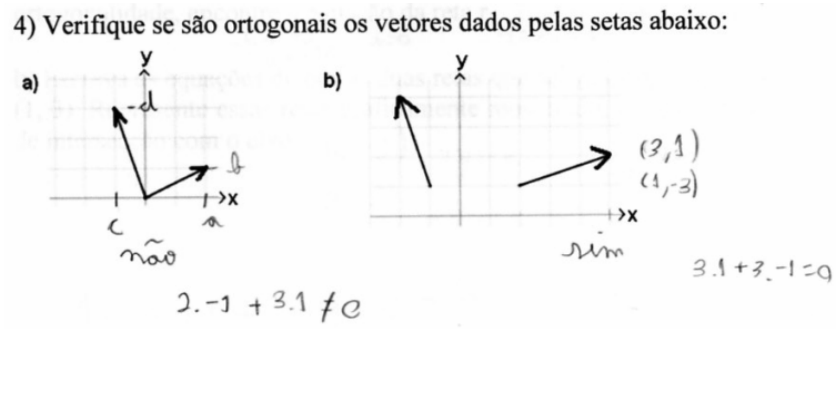


Fig. 32 – Solução de aluno A (Atividade 4/ Encontro 5)

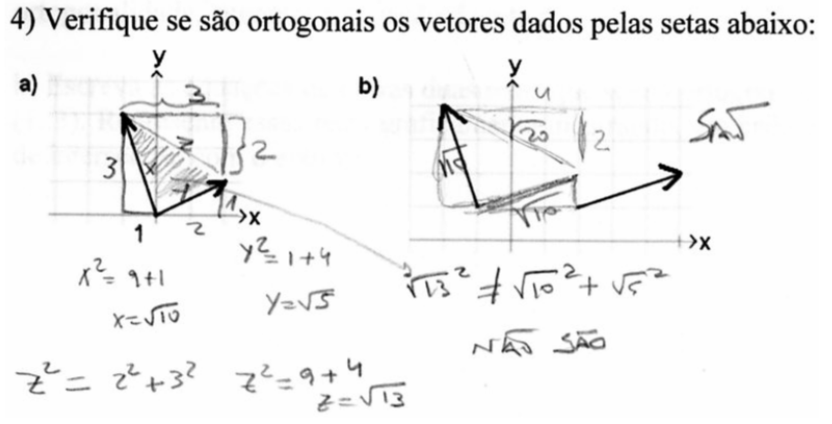
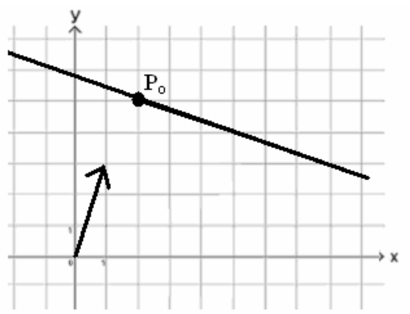


Fig. 33 – Solução de aluno B (Atividade 4/ Encontro 5)

No item (b) alguns alunos colocaram setas equivalentes na origem do sistema e repetiram o mesmo raciocínio que haviam feito no item (a); outros alunos – ainda com dificuldades na mobilidade de setas – necessitaram da intervenção do professor para resolver o problema.

Atividade 7: Considere $\vec{n}$ = (1, 3) e a reta r que passa por $P_o(2, 5)$ e é ortogonal a $\vec{n}$.



a) Um ponto P(x, y) pertence à reta quando os vetores $\vec{n}$ = (1, 3) e $\overrightarrow{P_0P}$ = (________, _______) forem ortogonais. Usando a condição de ortogonalidade, encontre a equação da reta r.

b) Escreva as equações de outras duas retas que sejam ortogonais ao vetor $\vec{n}$ = (1, 3). Represente essas retas graficamente mostrando, em cada caso, o ponto de intersecção com o eixo y.

Fig. 34 – Atividade 7 (Encontro 5)

Análise a priori: esta atividade, através de um exemplo particular, tem como propósito a reconstrução das etapas de raciocínio que levam à dedução da equação da reta via ortogonalidade de vetores. Espera-se que com a realização da atividade, os alunos compreendam a equação da reta, sob esta nova leitura vetorial, a saber, os coeficientes a e b (de ax + by = c) passam a ser entendidos como coordenadas de um vetor ortogonal à reta.

Análise a posteriori: Alguns alunos tiveram dificuldade no item (a), pois queriam representar o ponto P(x, y) no desenho e não sabiam como fazê-lo. Talvez a redação da atividade ficasse mais clara se dito que "*P(x, y) é um ponto qualquer da reta*", ao invés de dizer que "*P(x, y) pertence à reta*". As diferentes soluções apresentadas para o item (b) – registradas nas figuras 35 e 36 – indicam como alguns alunos associaram rapidamente as coordenadas do vetor normal aos coeficientes da equação da reta, enquanto outros repetiram no item (b) as etapas detalhadas para a resolução do item (a).

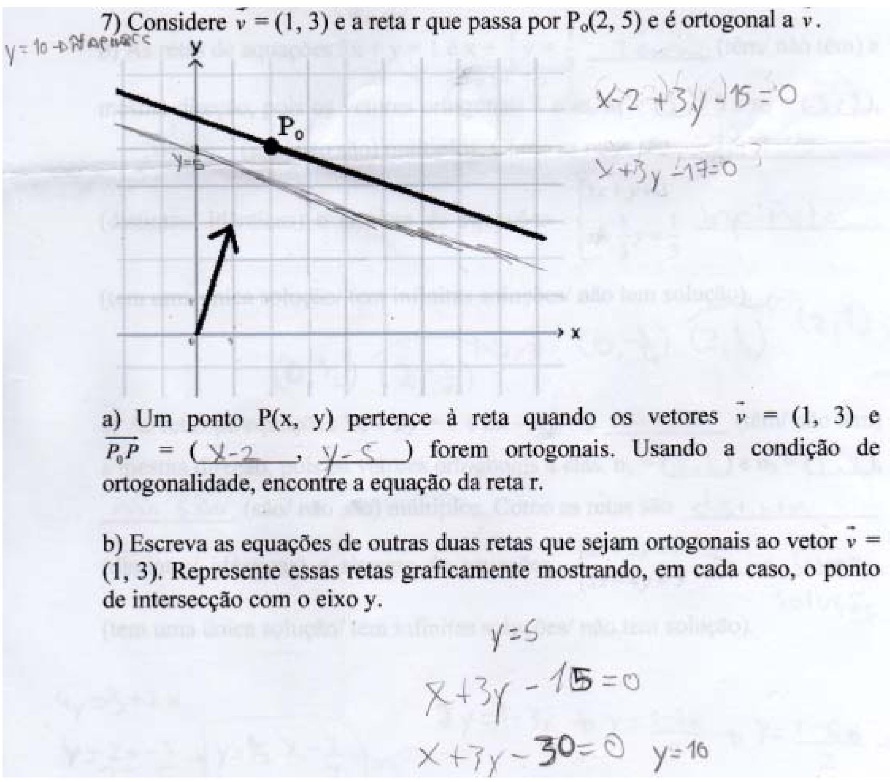
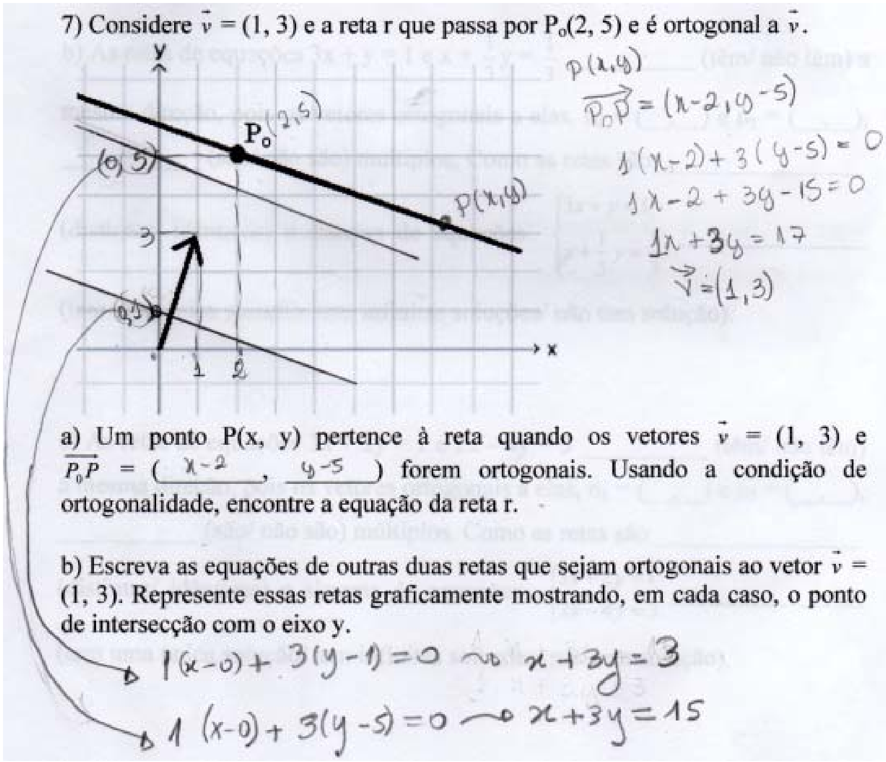


Fig. 35 - Solução de aluno A (Atividade 7/ Encontro 5)



7) Considere $\vec{v} = (1, 3)$ e a reta r que passa por $P_o(2, 5)$ e é ortogonal a $\vec{v}$.

$P(x,y)$

$\overrightarrow{P_oP} = (x-2, y-5)$

$1(x-2) + 3(y-5) = 0$

$1x - 2 + 3y - 15 = 0$

$1x + 3y = 17$

$\vec{v} = (1,3)$

a) Um ponto P(x, y) pertence à reta quando os vetores $\vec{v} = (1, 3)$ e $\overrightarrow{P_0P}$ = (x-2 , y-5) forem ortogonais. Usando a condição de ortogonalidade, encontre a equação da reta r.

b) Escreva as equações de outras duas retas que sejam ortogonais ao vetor $\vec{v}$ = (1, 3). Represente essas retas graficamente mostrando, em cada caso, o ponto de intersecção com o eixo y.

$1(x-0) + 3(y-1) = 0 \rightarrow x + 3y = 3$

$1(x-0) + 3(y-5) = 0 \rightarrow x + 3y = 15$

Fig. 36 - Solução de aluno B (Atividade 7/ Encontro 5)

Resumo dos encontros 4 e 5:

O quarto encontro começou com a dedução da condição de ortogonalidade que usava apenas o teorema de Pitágoras e a distância entre dois pontos. Logo após, foi discutida a nova interpretação da equação da reta: dado um vetor N e um ponto P_o existe uma única reta que passa por P_o e é ortogonal ao vetor N. Mesmo compreendendo esta descrição, a maior parte dos alunos não conseguiu fazer a leitura vetorial desta condição essencialmente geométrica: um ponto P está na reta se e somente se o vetor dado N for ortogonal à $\overrightarrow{PoP}$. Nesse momento ficou extremamente clara a necessidade de retomar as coordenadas dos vetores e a ortogonalidade, em situação em que as setas representantes não estão na origem do sistema de coordenadas.

Esta dificuldade dos alunos indica os cuidados que devem acompanhar uma situação didática, de forma a respeitar-se os ritmos de aprendizagem dos alunos. Uma maior dedicação de tempo ao trabalho com o conceito de ortogonalidade entre vetores poderia ter diminuído as dificuldades (parte delas naturais) dos alunos quanto à compreensão dos argumentos que levam à dedução da equação da reta. Neste tempo poderiam ter sido trabalhadas atividades envolvendo ortogonalidade entre vetores com setas representantes na origem e com setas representantes fora da origem. Ao reestruturar a proposta de trabalho para o Encontro 5 – concretizada na concepção de nova seqüência de atividades – de certa forma tratamos de recuperar aquilo que já deveria ter sido trabalhado no Encontro 4.

4.2.6 Encontro 6

Objetivos e expectativas gerais – uma reconstrução necessária

O Encontro 6 tinha sido previsto para término da implementação da experimentação, e, portanto, neste momento já teríamos o entendimento dos alunos relativo a coordenadas de vetores no espaço, condição de ortogonalidade e dedução da equação do plano. Por serem estes conteúdos essencialmente generalizações dos conteúdos já trabalhados no plano, tínhamos como pressuposto que este trabalho poderia ser realizado, com tranqüilidade, nos Encontros 5 e 6.

Mas as diferentes reorganizações de objetivos e expectativas que foram se apresentando no desenrolar da situação didática, nos fizeram reconsiderar o avanço de conteúdos neste Encontro 6. Em especial destacamos:

- o necessário desdobramento de tempo de trabalho para os conteúdos previstos para o Encontro 1, nisso utilizando-se o momento do Encontro 2;

- o necessário desdobramento de tempo de trabalho para os conteúdos previstos para o Encontro 4, nisso utilizando-se o momento do Encontro 5

Estávamos chegando ao final do ano letivo, ainda nos faltando a realização da experiência relativa aos conteúdos de geometria vetorial no espaço. Buscando garantias de condições para análise dos resultados da experiência, de modo a poder-se colocar sob validação o material didático projetado, decidimos reservar o Encontro 6 para um trabalho de sistematização de todos os conteúdos já trabalhados, especialmente no que diz respeito à atividade relativa a resolução qualitativa de sistemas de duas equações (não resolvida por muitos dos alunos no encontro 5) . Com este redirecionamento de objetivos e expectativas apostamos na consolidação dos conhecimentos de geometria vetorial construídos no plano como sendo o caminho para uma natural generalização, a ser feita no espaço.

Momento de discussão em pequenos grupos

Os alunos terminaram de discutir sobre as atividades do Encontro 5.

Atividade 8: Complete:

a) As retas de equações x + 2y = 1 e – 2x – 4y = 3 __________ (têm/ não têm) a mesma direção, pois os vetores ortogonais a elas, n_1 = (__,__) e n_2 = (__,__), ___________ (são/ não são) múltiplos. Como as retas são _________________(distintas/ idênticas) o sistema de equações $\begin{cases} x+2y=1 \\ -2x-4y=3 \end{cases}$ ________________ (tem uma única solução/ tem infinitas soluções/ não tem solução).

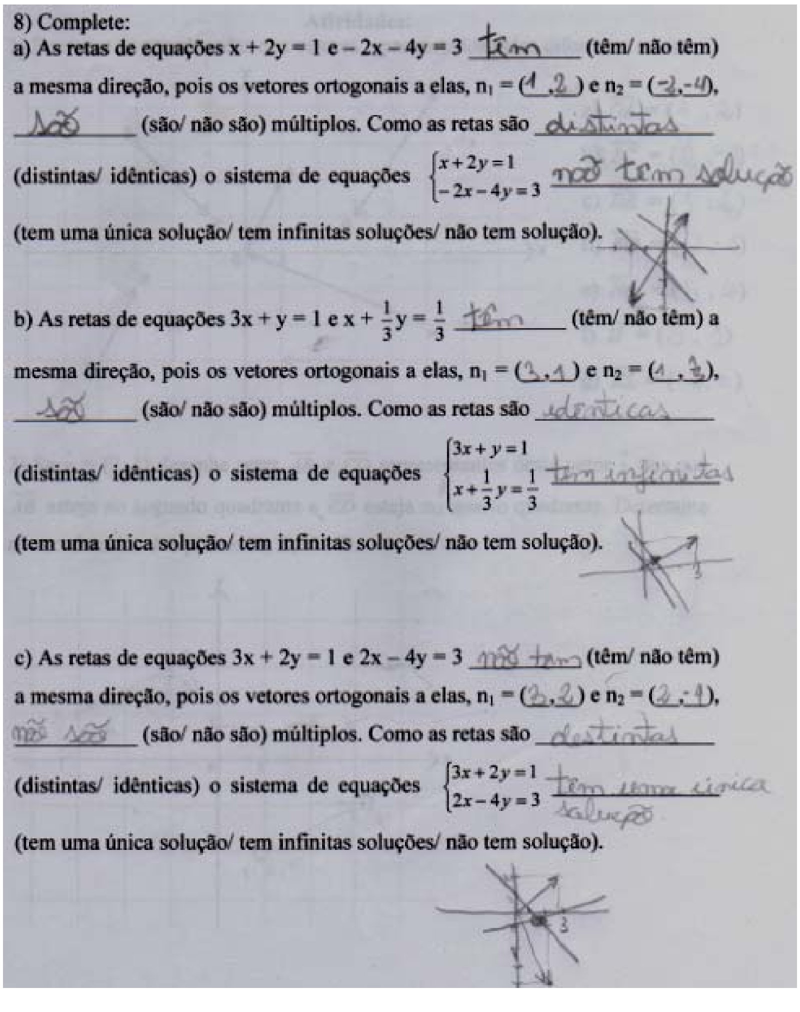
b) As retas de equações 3x + y = 1 e x + $\frac{1}{3}$y = $\frac{1}{3}$ __________ (têm/ não têm) a mesma direção, pois os vetores ortogonais a elas, n_1 = (__,__) e n_2 = (__,__), ___________ (são/ não são) múltiplos. Como as retas são _________________(distintas/ idênticas) o sistema de equações $\begin{cases} 3x+y=1 \\ x+\frac{1}{3}y=\frac{1}{3} \end{cases}$ ________________ (tem uma única solução/ tem infinitas soluções/ não tem solução).

c) As retas de equações 3x + 2y = 1 e 2x – 4y = 3 __________ (têm/ não têm) a mesma direção, pois os vetores ortogonais a elas, n_1 = (__,__) e n_2 = (__,__), ___________ (são/ não são) múltiplos. Como as retas são _________________ (distintas/ idênticas) o sistema de equações $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 2x-4y=3 \end{cases}$ ________________ (tem uma única solução/ tem infinitas soluções/ não tem solução).

Fig. 37 – Atividade 8 (Encontro 5)

Análise a priori: nesta atividade é de forma intencional que o texto é colocado com lacunas a serem preenchidas pelos alunos. A redação do texto visa dar uma organização ao raciocínio matemático que reflete uma análise qualitativa de sistemas de equações. Ou seja, a redação conduz o aluno nos passos necessários para compreender de forma qualitativa como são as soluções do sistema: para a determinação das posições de transversalidade, paralelismo ou coincidência das retas devem ser observados os vetores normais, e são estas posições que determinam a existência de única solução, a inexistência de solução ou a existência de infinitas soluções.

Análise a posteriori: Os alunos resolveram a questão satisfatoriamente e muitos utilizaram a representação geométrica para responder a atividade, apesar de não ter sido solicitado no enunciado do problema (como na figura 38).



8) Complete:

a) As retas de equações x + 2y = 1 e – 2x – 4y = 3 tem (têm/ não têm) a mesma direção, pois os vetores ortogonais a elas, $n_1 = (1, 2)$ e $n_2 = (-2, -4)$, são (são/ não são) múltiplos. Como as retas são distintas (distintas/ idênticas) o sistema de equações $\begin{cases} x+2y=1 \\ -2x-4y=3 \end{cases}$ não tem solução (tem uma única solução/ tem infinitas soluções/ não tem solução).

b) As retas de equações 3x + y = 1 e $x + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}$ têm (têm/ não têm) a mesma direção, pois os vetores ortogonais a elas, $n_1 = (3, 1)$ e $n_2 = (1, \frac{1}{3})$, são (são/ não são) múltiplos. Como as retas são idênticas (distintas/ idênticas) o sistema de equações $\begin{cases} 3x+y=1 \\ x+\frac{1}{3}y=\frac{1}{3} \end{cases}$ tem infinitas (tem uma única solução/ tem infinitas soluções/ não tem solução).

c) As retas de equações 3x + 2y = 1 e 2x – 4y = 3 não tem (têm/ não têm) a mesma direção, pois os vetores ortogonais a elas, $n_1 = (3, 2)$ e $n_2 = (2, -4)$, não são (são/ não são) múltiplos. Como as retas são destintas (distintas/ idênticas) o sistema de equações $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 2x-4y=3 \end{cases}$ tem uma única solução (tem uma única solução/ tem infinitas soluções/ não tem solução).

Fig. 38 - Solução de aluno (Atividade 8/ Encontro 5)

Momento de sistematização

Neste momento foram discutidas as diferentes soluções das atividades e foi feita a sistematização dos conteúdos até então trabalhados: operações com vetores no plano sob o ponto de vista geométrico e algébrico, a ortogonalidade de vetores, a equação da reta e a análise qualitativa de sistemas lineares 2 x 2, sob o ponto de vista geométrico.

Na escola, neste momento, iniciaram-se as atividades de recuperação de final de ano, este então o foco principal de trabalho dos professores com os alunos. Assim sendo, e com o grande objetivo de colocar sob experiência a parte final de nossa proposta, convidamos os alunos para um encontro extra classe, o que se tornou então o nosso sétimo encontro.

4.2.7 Encontro 7

Os alunos se mostraram sensibilizados com a importância de suas participações para que se tornasse possível colocar a proposta didática projetada, na íntegra, sob validação. E assim, no encontro extra classe compareceram 15 dos 29 participantes regulares.

Objetivos e expectativas gerais

O sétimo encontro tinha dois grandes objetivos: retomar no espaço os conceitos já trabalhados no plano e deduzir a equação do plano, pois é o entendimento da equação do plano que coloca os alunos em condições para analisar qualitativamente os sistemas de equações lineares com 3 incógnitas. O tempo previsto para a realização da atividade, das 9h 00 min até 11h 30 min, exigiu uma readaptação da seqüência de atividades originalmente elaborada para ser realizada em dois encontros.

Momento de discussão em grande grupo

A discussão começou com apresentação do sistema de coordenadas no espaço. Assim como no plano, o par (x, y) pode ser o quarto vértice de um retângulo, no espaço, o trio (x, y, z) pode ser visto como o oitavo vértice de um paralelepípedo retângulo. Discutimos com os alunos a marcação de um ponto particular, e a partir disto iniciamos as discussões em pequenos grupos.

<u>Momento de discussão em pequenos grupos</u>

Atividade 1: Determine as coordenadas de cada um dos seguintes pontos:

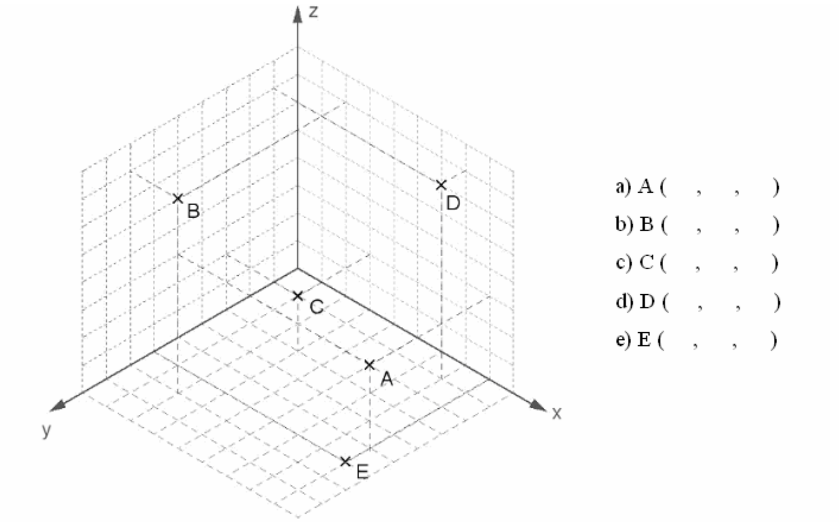


Fig. 39 – Atividade 1 (Encontro 7)

***Análise a priori*:** tem-se na atividade a intenção de explorar a leitura de coordenadas de pontos no espaço. A rede de quadriculados foi intencionalmente colocada na figura, de forma a facilitar a visualização dos pontos no espaço. A posição dos eixos coordenados foi cuidadosamente escolhida visando não se favorecer a visualização de um plano em especial, dentre os três planos xy, xz e yz.

***Análise a posteriori*:** Muitos alunos resolveram a primeira atividade satisfatoriamente. Entretanto, alguns alunos apresentaram dificuldades para visualizar as três dimensões, não tendo sido suficiente, no primeiro momento, a rede de quadriculados, fazendo-se então necessária a intervenção do professor. Alguns alunos usaram o recurso de cores para melhor visualização dos diferentes paralelepípedos retângulos, conforme registrado na figura 40.

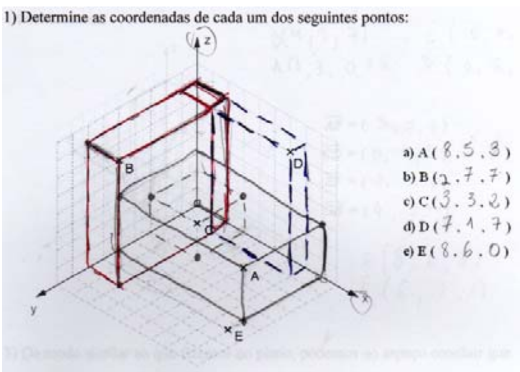
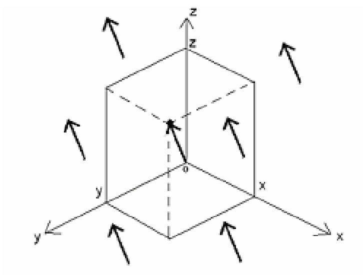


Fig. 40 - Solução de aluno (Atividade 1/ Encontro 7)

Atividade 2: No espaço, o vetor $\vec{v}$ também pode ser representado por diferentes setas. Assim como no plano, as coordenadas de $\vec{v}$ são as coordenadas da extremidade da seta com origem em (0, 0, 0).



Na figura abaixo, encontre as coordenadas dos vetores representados pelas diferentes setas:

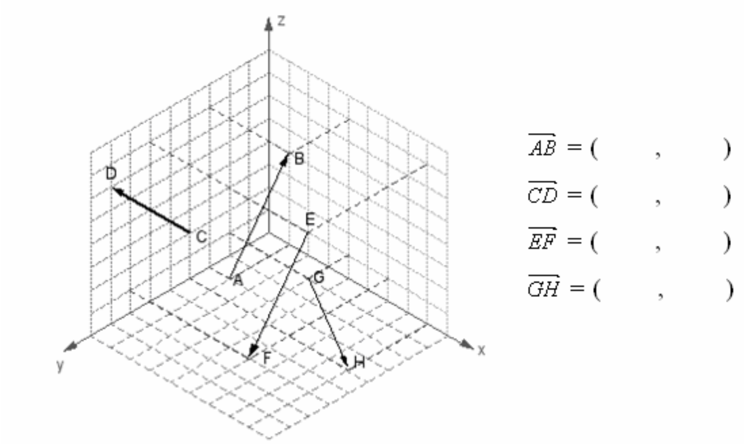


Fig. 41 – Atividade 2 (Encontro 7)

Análise a priori: tem-se na atividade a generalização do conceito de coordenadas do vetor já trabalhado no plano. Espera-se que os alunos, analogamente ao que foi feito no plano, identifiquem as coordenadas do vetor através da diferença entre as coordenadas dos pontos extremidades e pontos origem das setas. Na figura, foram colocados pontilhados e quadriculados para facilitar a visualização das posições das setas.

A atividade é extremamente relevante para versatilizar a leitura das coordenadas de um vetor, já que isto é crucial para o fluir da argumentação que deduz a equação do plano.

***Análise a posteriori* da atividade 2:** nesta segunda atividade os alunos apresentaram duas resoluções distintas. Alguns, conforme previsto na análise *a priori*, escreveram inicialmente as coordenadas de todos os pontos extremidades das setas e, em seguida, determinaram as coordenadas dos vetores pela diferença entre as coordenadas destes pontos (figura 42). Outros, indicando maior desenvoltura para visualização espacial, observaram os três componentes do deslocamento nas direções x, y e z registrado na seta, e surpreendentemente determinaram as coordenadas do vetor (figura 43).

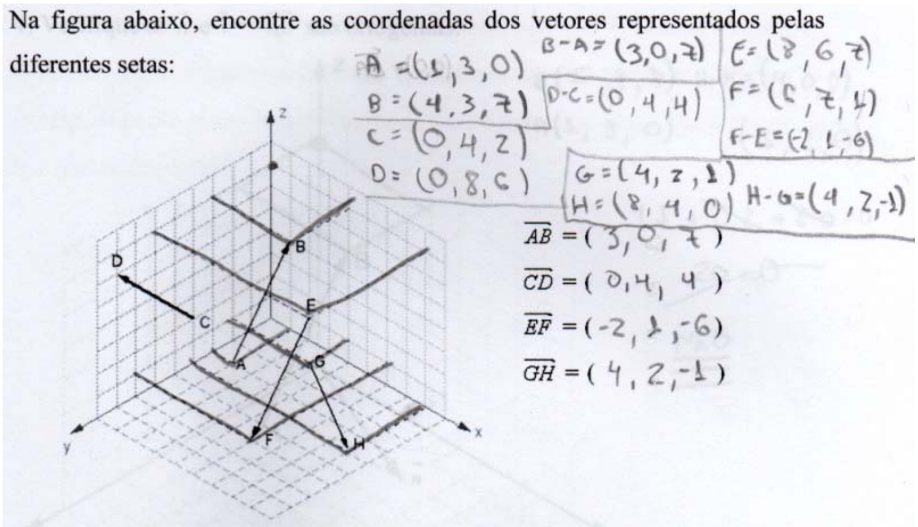


Fig. 42 – Solução de aluno A (Atividade 2/ Encontro 7)

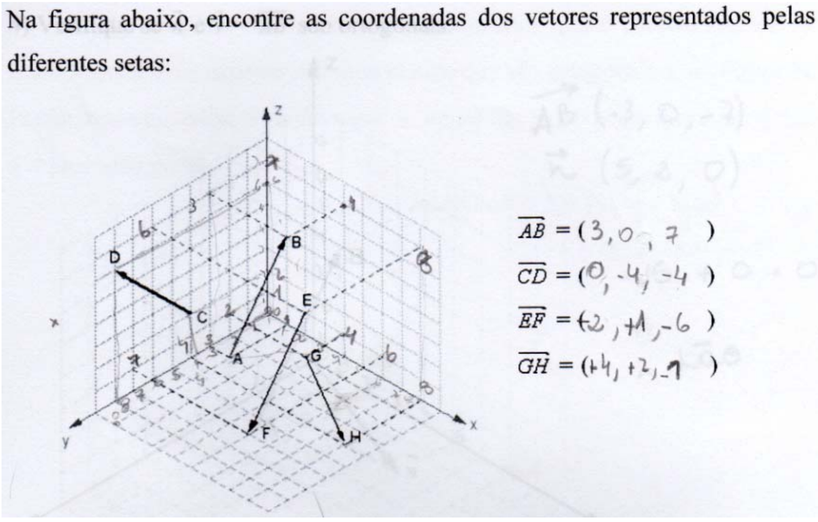
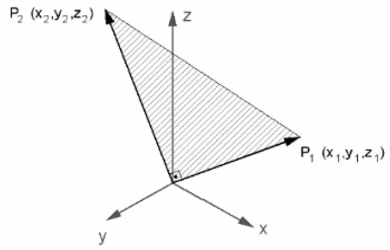


Fig. 43 – Solução de aluno B (Atividade 2/ Encontro 7)

Atividade 3: De modo similar ao que fizemos no plano, podemos no espaço concluir que: $\vec{v}$ = (x_1, y_1, z_1) e $\vec{w}$ = (x_2, y_2, z_2) são ortogonais se e somente se $x_1x_2 + y.y_2 + z_1z_2 = 0$.



Nestas condições, determine:

a) se os vetores $\vec{v}$ = (1, 3, 5) e $\vec{w}$ = (2, 1, -1) são ortogonais.

b) as coordenadas de dois vetores que sejam ortogonais a $\vec{v}$=(1, 3, 5).

Fig. 44 – Atividade 3 (Encontro 7)

Atividade 4: Verifique se $\vec{n}$ e $\vec{v}$ = $\overrightarrow{AB}$ são ortogonais:

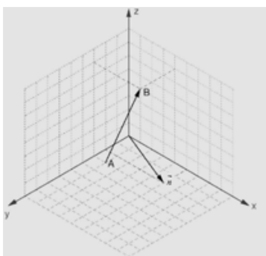


Fig. 45 – Atividade 4 (Encontro 7)

***Análise a priori* das atividades 3 e 4:**

As atividades 3 e 4 também provocam o trabalho com conceitos que já foram construídos no plano. A atividade 3 no item (a), com a figura das setas ortogonais e do triângulo retângulo, remete os alunos para a condição de ortogonalidade já demonstrada para vetores no plano. Aqui, como antes, basta aplicar o teorema de Pitágoras, e através de alguma manipulação algébrica, chega-se a similar condição algébrica de ortogonalidade. Espera-se que os alunos entendam a condição, sem a necessidade de efetiva realização dos cálculos – trata-se de um raciocínio generalizador que refaz mentalmente a demonstração, deixando de lado os detalhes de cálculos. A parte (b) remete à aplicação da condição de ortogonalidade, com esperada resolução no domínio algébrico.

Na atividade 4 as exigências são maiores, pois dependente de visualização espacial para determinar as coordenadas de pontos e de vetores, e também exige a aplicação da condição de ortogonalidade para vetores dados por setas que não estão na origem do sistema de coordenadas.

Em ambas as atividades os desenhos foram apresentados com bastante cuidado, de modo a não se criar dificuldades adicionais à já sempre complicada questão da visualização espacial.

***Análise a posteriori* das atividades 3 e 4:**

Os alunos resolveram as duas atividades sem maiores dificuldades, e nisso foi determinante o consolidado conhecimento para as similares situações no plano. Também foi importante a figura sobre a qual trabalharam.

Entendemos como de extrema relevância a questão do desenho nas atividades envolvendo coordenadas no espaço. A idéia de tridimensionalidade que o desenho da figura guarda, torna mais fácil entender na atividade 4 (por exemplo) a posição da seta que representa o vetor $\vec{n}$. Como ficaria se a figura não tivesse a rede de quadriculados? Isto sinaliza como a limitação de uso do giz e quadro negro e de figuras mal feitas pode atrapalhar a compreensão e, por conseguinte, o processo de aprendizagem.

Momento de discussão em grande grupo: a equação do plano

Passamos ao segundo grande objetivo da aula: compreender a equação do plano, via argumentação dedutiva.

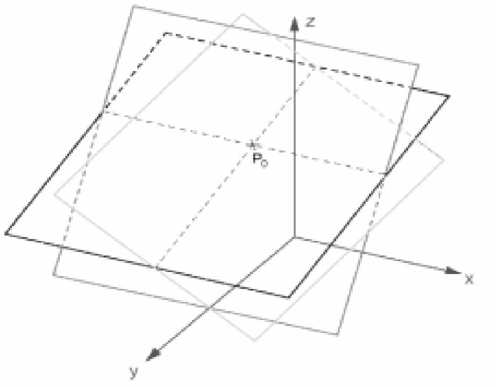


Fig. 46 – Planos por P_o (momento de discussão)

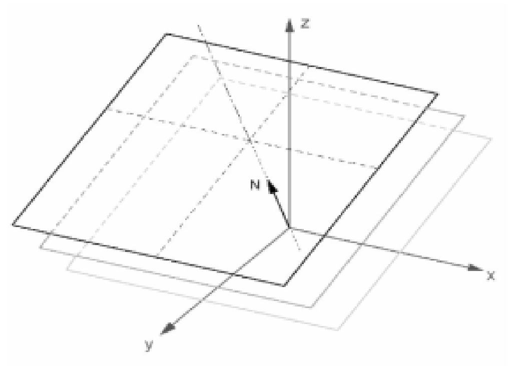


Fig. 47 – Planos ortogonais ao vetor N (momento de discussão)

Através do material que estava sendo usado pelos alunos (ver Anexo 2 – Encontro 7), com figuras feitas de forma muito cuidadosa, o professor iniciou uma discussão em grande grupo, no formato "passo-a-passo", de forma a avançar nos argumentos que levam à dedução da equação do plano.

Neste "passo-a-passo" foi colocado em destaque que: dado um ponto P_0, existem infinitos planos que o contém (figura 46); dado um vetor $\vec{n}$, existem infinitos planos que são ortogonais à $\vec{n}$ (figura 47); porém, dado um ponto P_0 e um vetor $\vec{n}$, existe um único plano que contém P_o e é ortogonal à $\vec{n}$ (figura 48).

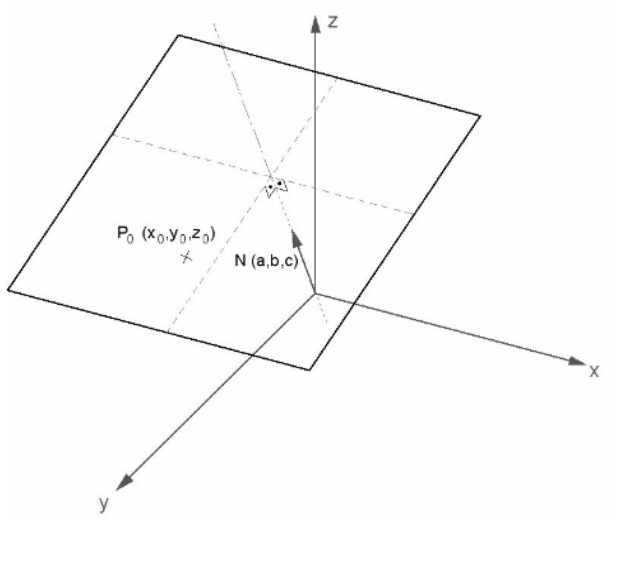


Fig. 48 – Plano passando por P_0 e ortogonal ao vetor N (momento de discussão)

Uma vez caracterizada a unicidade do plano, via vetor normal $\vec{n}$ e ponto P_0, o professor avançou na determinação da condição que deve satisfazer um ponto P(x, y, z) pertencente ao plano. Neste momento, os alunos foram colocados em situação de raciocínio análoga àquela que deduz a equação da reta, mas com a adicional dificuldade advinda da necessidade de visualizar, através da figura, uma situação geométrica no espaço.

Mais uma vez, a escolha cuidadosa da figura de forma a representar da melhor forma a situação espacial, muito ajudou no fluir o argumento. E, desta forma, o professor, em discussão com os alunos, argumentou de forma similar ao que já havia sido feito no plano: um ponto P(x, y, z) pertence a esse plano se e somente se os vetores $\overrightarrow{PoP}$ e $\vec{n}$ forem ortogonais. Da condição de ortogonalidade (já trabalhada nas atividades 3 e 4), e com alguma manipulação algébrica, foi então deduzida a equação do plano na forma $a.(x - x_o) + b.(y - y_o) + c.(z - z_o) = 0$.

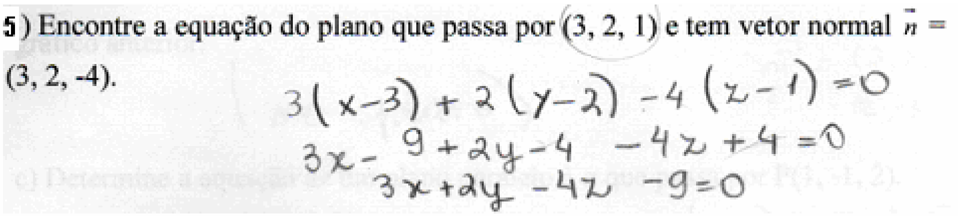
<u>Momento de discussão em pequenos grupos</u>

Atividade 5: Encontre a equação do plano que passa por (3, 2, 1) e tem vetor normal $\vec{n}$ = (3, 2, -4).
Fig. 49 – Atividade 5 (Encontro 7)

***Análise a priori*:** espera-se com essa atividade que os alunos trabalhem com a equação do plano de diferentes maneiras: aplicando os dados do problema na equação do plano; retomando a situação geométrica para então explicitar a equação.

***Análise a posteriori*:**

Conforme previsto, na *análise a priori,* muitos alunos substituíram diretamente as coordenadas do vetor e do ponto na equação, não indicando maiores preocupações com a representação geométrica da situação (figura 50). Entretanto, alguns alunos, de forma surpreendente repetiram “passo-a-passo” todas as etapas feitas na dedução da equação, usando os dados particulares da atividade proposta, uma atitude reveladora da integração de raciocínios nos domínios geométrico e algébrico (figura 51).



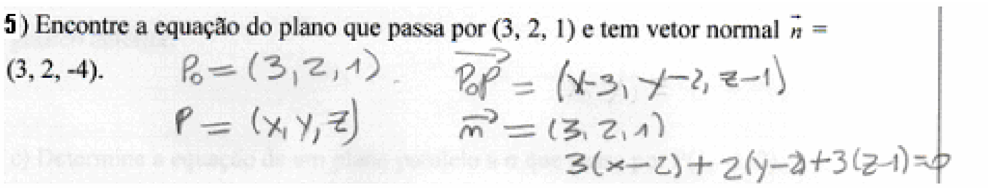
5) Encontre a equação do plano que passa por (3, 2, 1) e tem vetor normal $\vec{n}$ = (3, 2, -4).

$3(x-3) + 2(y-2) - 4(z-1) = 0$

$3x - 9 + 2y - 4 - 4z + 4 = 0$

$3x + 2y - 4z - 9 = 0$

Fig. 50 – Solução de aluno A (Atividade 5/ Encontro 7)



5) Encontre a equação do plano que passa por (3, 2, 1) e tem vetor normal $\vec{n}$ = (3, 2, -4).

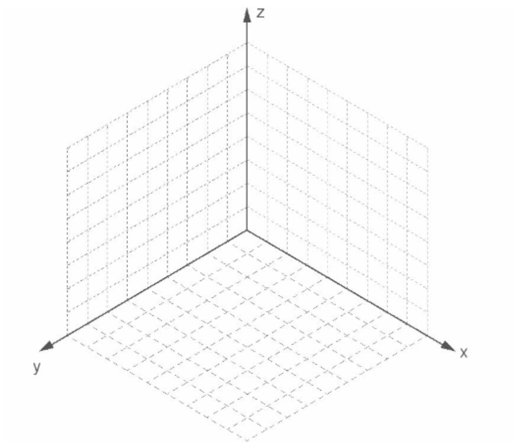
$P_0 = (3, 2, 1)$ $\quad \vec{P_0P} = (x-3, y-2, z-1)$

$P = (x, y, z)$ $\quad \vec{m} = (3, 2, 1)$

$3(x-2) + 2(y-2) + 3(z-1) = 0$

Fig. 51 - Solução de aluno B (Atividade 5/ Encontro 7)

Atividade 6: Considere o plano α de equação 3x + 2y + z = 6.



a) Determine as coordenadas de um vetor normal ao plano α e represente-o no sistema de coordenadas acima.

b) Usando os pontos de intersecção com os eixos, represente α graficamente.

c) Determine a equação de um plano paralelo à α que passa por P(1, -1, 2).

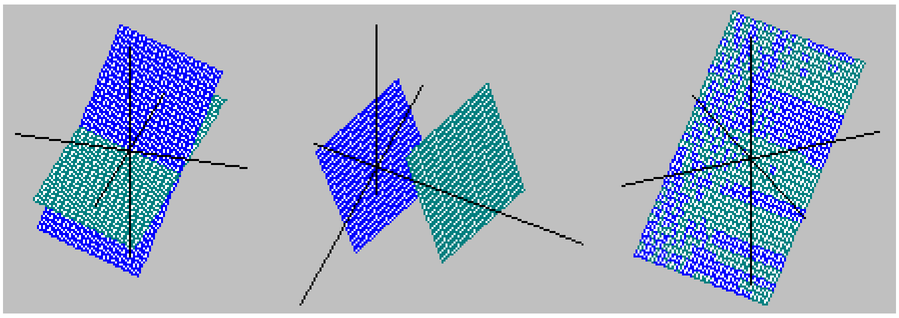
d) Determine a equação de um plano perpendicular à α.

Fig. 52 – Atividade 6 (Encontro 7)

Análise a priori: tem-se nessa atividade uma maior exigência de raciocínios nos domínios geométrico e algébrico. O item (a) exige sobretudo a visualização para fazer a representação gráfica do vetor normal, uma vez entendida a equação do plano. O item (b) exige a determinação de pontos de intersecção, e isto depende de leitura algébrica que faça o registro da condição de intersecção de eixos coordenados e plano, o que não deve ser de todo simples para os alunos. Uma vez determinados os pontos de intersecção, a solicitação e representação gráfica depende essencialmente de visualização espacial. Os itens (c) e (d) colocam uma maior exigência de integração de raciocínios geométricos (de natureza espacial) e raciocínios algébricos: paralelismo de planos corresponde a vetores normais de mesma direção, e esta condição deve ser interpretada algebricamente; a situação de perpendicularismo de planos é mais exigente, pois inicialmente deve ser feita a leitura geométrica da correspondente ortogonalidade de vetores normais, a ser então determinada via raciocínio algébrico.

Análise a posteriori: No item (a), os alunos ainda tiveram dificuldades de natureza visual para representar o vetor normal. Vale observar que nas atividades anteriores os alunos sempre tinham os pontos e setas já desenhadas na figura e deviam apenas ler as coordenadas, o que justifica esta dificuldade inicial apresentada pelos alunos. No item (b), conforme anunciado na *análise a priori*, os alunos apresentaram dificuldades para fazer a leitura algébrica da condição de intersecção de eixos coordenados e plano. No item (c), a maior parte dos alunos conseguiu relacionar planos paralelos com vetores normais de mesma direção, resolvendo assim o problema de forma satisfatória. No item (d) quase todos necessitaram da intervenção do professor para resolver a atividade, argumentando que não sabiam como começar. Assim, percebemos que a situação de planos perpendiculares poderia ser explorada com maior detalhamento.

Atividade 7: Observe as posições relativas entre dois planos e determine:



a) um exemplo de equações de dois planos que se encontrem segundo uma reta.

b) um exemplo de equações de dois planos paralelos.

c) um exemplo de equações de dois planos coincidentes.

Fig. 53 – Atividade 7 (Encontro 7)

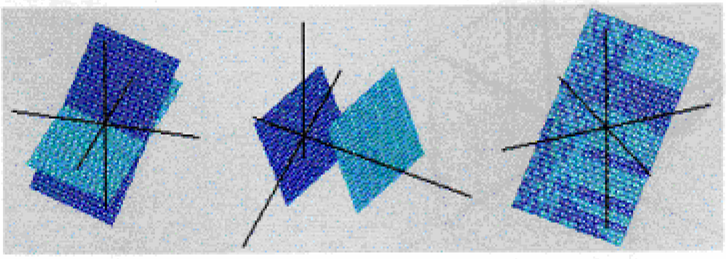
Análise a priori: Tem-se na resolução desta atividade liberdade de escolhas, pois cabe aos alunos a explicitação de equações, em um universo de muitas possibilidades. Espera-se provocar os alunos na leitura algébrica de situação geométrica, e, dessa forma, pretende-se que trabalhem com as idéias fundamentais ao entendimento de sistemas de equações no domínio geométrico. Nesta atividade têm-se planos desenhados em diferentes posições e devem ser criadas equações que correspondam aos desenhos. No estudo de sistemas, o caminho vai ser o inverso: têm-se as equações, que devem então ser entendidas como equações de planos, e é a posição (geométrica) dos planos que vai subsidiar a análise qualitativa de possíveis soluções do sistema.

Para responder a atividade espera-se que os alunos no item (a), percebendo que os planos apresentam diferentes direções, concluam que os vetores normais devam também apresentar diferentes direções. Nos itens (b) e (c), espera-se que os alunos percebam que tratam-se de planos com a mesma direção (e então utilizem vetores normais com iguais direções), e com alguma atenção ao parâmetro “d”, diferenciem o caso de infinitas soluções do caso de inexistência de solução.

***Análise a posteriori*:**

Os alunos resolveram satisfatoriamente o problema, visto que já estava clara a idéia da equação do plano e seu vetor normal. Apresentamos, a título de ilustração, a resolução de um aluno para esta atividade (figura 54).

7) Observe as posições relativas entre dois planos e determine:



a) um exemplo de equações de dois planos que se encontrem segundo uma reta. $\vec{n} = (3,4,6)$ $3x+4y+6z=0$ $5x+y+13z=0$

b) um exemplo de equações de dois planos paralelos.

$3x+5y+4z=0$ $3x+5y+4z=7$

c) um exemplo de equações de dois planos coincidentes.

$3x+5y+4z=0$

$6x+10y+8z=0$

Fig. 54 – Solução de aluno (Atividade 7/ Encontro 7)

<u>Momento de sistematização: a leitura geométrica de sistemas de equações de três variáveis</u>

Ao final do encontro foi feita uma sistematização sobre os assuntos discutidos, com foco especial na análise qualitativa dos sistemas de duas equações e três variáveis.

Através dos exemplos que os alunos criaram na atividade 7, o professor escreveu alguns sistemas de equações no quadro negro, iniciando a análise qualitativa de sistemas com duas equações e três variáveis de maneira muito natural.

Um dos sistemas que foi analisado qualitativamente nesse momento foi $\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x + 0{,}5y + 1{,}5z = 3 \end{cases}$, criado por um dos alunos a partir das equações dos planos da atividade 7.

A equação 2x + y + 3z = 1 representa um plano ortogonal ao vetor $\vec{n}_1$ = (2, 1, 3), e a equação x + 0,5y + 1,5z = 3 representa um plano ortogonal ao vetor $\vec{n}_2$ = (1, 1/2, 3/2). Como estes vetores têm a mesma direção, os planos só podem ser paralelos ou coincidentes. Como interceptam o eixo z em pontos diferentes (um em z = 1/3 e o outro em z= 2), não podem ser coincidentes. Assim, os planos são paralelos e o sistema não admite solução.

Resumindo Encontro 7:

Este encontro teve como objetivo principal o trabalho com os vetores no espaço e com a equação do plano. A seqüência de atividades, diferentemente das outras tantas seqüências que foram propostas aos alunos ao longo do desenrolar da experiência, foi apresentada de forma bastante sumarizada em termos de conteúdos e atividades, dado que se tratava de uma generalização de conteúdos projetada para ser trabalhada em um período de 150 minutos.

Ao final do encontro se evidenciou o alcance dos objetivos propostos: os alunos apresentaram uma satisfatória integração de raciocínios nos domínios algébrico e geométrico. Sem maiores dificuldades, identificaram planos dados em determinada situação geométrica com a correspondente equação (atividade 7). Através da leitura geométrica da equação $a.(x – x_o) + b.(y – y_o) + c.(z – z_o) = 0$, entenderam o que significa fazer uma análise qualitativa de um sistema de equações, mesmo tendo trabalhado com as particulares situações de sistemas de duas equações.

Não foi nosso objetivo, em nenhum momento da experiência, fazer um estudo exaustivo dos sistemas de equações, de modo a associar todas as posições relativas de 3 planos (os três planos coincidem, dois planos coincidem e o terceiro é paralelo a eles, dois planos coincidem e o terceiro os intercepta segundo uma reta, dentre outras) com as correspondentes relações entre os vetores normais. Este é, com certeza, um estudo pertinente e interessante, mas que exige o trabalho com outros conceitos da geometria vetorial, dentre eles as relações de dependência e independência de vetores.

Nosso objetivo maior foi trazer para o contexto do ensino da Matemática escolar um tratamento geométrico para a equação a x + b y + c z = d, não por ser uma natural generalização da bem conhecida equação da reta a x + b y = c, mas principalmente porque desta forma é possível agregar um maior valor formativo ao estudo de sistemas de equações (o qual muitas vezes fica restrito a memorização de regras de resolução e de palavras um tanto incompreensíveis para muitos dos alunos, tais como "possível e determinado", "possível e indeterminado" e "impossível").

4.3 Sobre a validação da hipótese

Na secção anterior, no confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori*, verificamos que os alunos, de modo geral, se apropriaram corretamente da idéia de vetor (representado por uma coleção de setas que possuem: o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido) e das operações com vetores na forma geométrica (soma de vetores e multiplicação de vetor por escalar). Conseguiram compreender as coordenadas do vetor, as operações através das coordenadas e a releitura da equação da reta segundo a ortogonalidade de vetores – apesar de fazer-se necessário disponibilizar um tempo maior nessa etapa e elaborar um novo conjunto de atividades para sistematizar estes conceitos.

No último encontro, onde foram abordados os vetores no espaço e a equação do plano, as análises feitas nos sugerem que, se a construção dos principais conceitos no plano estiver bem sedimentada, a generalização das idéias do plano para o espaço pode ocorrer de maneira natural.

Durante toda fase da experimentação, os alunos se mostraram extremamente solidários, realizando as atividades propostas com afinco, participando ativamente das discussões em grande e em pequenos grupos e comparecendo (em número significativo) ao último encontro que foi extra classe. A colaboração encontrada nos alunos durante a etapa da experimentação, sinaliza a importância da relação estabelecida entre professor e alunos, que muitas vezes acaba por si só invalidando qualquer experiência.

É importante ressaltar que somente ao longo da experimentação percebemos que nossa concepção inicial era de certa forma ambiciosa, para o tempo que dispúnhamos. Foram feitas as adaptações necessárias (primeiro processo de reconstrução da proposta), porém diferentes fatores nos levaram a refletir sobre a proposta após a realização da experiência, dentre os quais destacamos: a necessidade demonstrada pelos alunos de um tempo maior na realização das atividades e assimilação dos novos conceitos; alguns encontros terem ficado destinados apenas à sistematização de assuntos já trabalhados; a eficácia do uso do software Winplot para algumas atividades ter ficado sob interrogação, e finalmente, a necessidade de condensar a parte de vetores no espaço e a equação do plano para um único encontro. Como resposta direta a estas questões, elaboramos uma nova versão da proposta – a segunda reconstrução, concebida após a realização da experiência.

Nessa nova versão, que implicou a redistribuição dos conteúdos em cada um dos encontros, viu-se a possibilidade de modificar um pouco a dinâmica das aulas, ficando sempre bem marcados três momentos:

– o inicial: destinado às discussões em grande grupo;

– o segundo: destinado às discussões em pequenos grupos;

– o final: destinado a uma sistematização em grande grupo através da discussão coletiva de algumas das atividades.

Na intenção de facilitar o entendimento de como a nova proposta ficou organizada, apresentamos um quadro comparativo entre a versão que foi implementada na escola e essa nova versão.

Quadro comparativo das aulas:

Encontro	**Versão implementada na escola**	**Nova versão**
1º	**Momento de discussão em grande grupo:** o conceito de vetor geométrico e as operações com o vetor geométrico. **Momento de discussão em pequenos grupos:** os alunos resolviam a primeira lista de atividades composta de 11 problemas.	**Momento de discussão em grande grupo:** o conceito de vetor geométrico. **Momento de discussão em pequenos grupos:** os alunos resolvem 5 atividades referentes ao assunto trabalhado. **Sistematização:** é feita uma discussão através da correção das atividades.

2º	**Sistematização:** era feita uma discussão sobre todas as atividades propostas na aula 1.	**Momento de discussão em grande grupo:** as operações envolvendo o vetor geométrico. **Momento de discussão em pequenos grupos:** os alunos resolvem 6 atividades referentes ao assunto trabalhado. **Sistematização:** é feita uma discussão em cima da correção das atividades.
3º	**Momento de discussão em grande grupo:** as coordenadas dos vetores e as operações envolvendo o vetor algébrico. **Momento de discussão em pequenos grupos:** os alunos resolviam a segunda lista de atividades composta de 5 problemas.	**Momento de discussão em grande grupo:** As coordenadas dos vetores e as operações envolvendo o vetor algébrico. **Momento de discussão em pequenos grupos:** os alunos resolvem a nova segunda lista de atividades composta de 7 problemas. **Sistematização:** discussão com relação às atividades de vetor algébrico e operações algébricas
4º	**Momento de discussão em grande grupo:** a condição de ortogonalidade entre vetores e uma nova interpretação da equação da reta usando essa condição. **Momento de discussão em pequenos grupos:** os alunos	**Sistematização:** discussão com relação às atividades de vetor algébrico e operações algébricas. **Momento de discussão em grande grupo:** a condição de ortogonalidade de vetores. **Momento de discussão em**

	iriam até a sala de informática resolver um conjunto de 5 atividades com o software Winplot.	**pequenos grupos:** os alunos resolvem uma lista com 3 problemas de ortogonalidade. **Sistematização:** discussão referente às atividades de ortogonalidade.
5º	**Sistematização:** a aula iniciava com uma revisão sobre as coordenadas dos vetores e as operações envolvendo coordenadas. **Momento de discussão em pequenos grupos:** após, os alunos tinham que resolver uma nova lista de exercícios composta de 8 problemas.	**Momento de discussão em grande grupo:** a releitura da equação da reta sob a luz da ortogonalidade de vetores. **Momento de discussão em pequenos grupos:** os alunos resolvem um conjunto de 4 atividades envolvendo essa interpretação para a equação da reta e a resolução geométrica de sistemas lineares 2 x 2 (onde o objetivo é responder qualitativamente sobre a quantidade de soluções do sistema, através da posição entre as retas). **Sistematização:** é feita uma discussão em cima da correção das atividades.
6º	**Momento de discussão em pequenos grupos:** os alunos concluíram a lista de exercícios do encontro 5. **Sistematização:** através da correção de algumas atividades sistematizamos: a ortogonalidade de vetores, a releitura da equação	**Momento de discussão em grande grupo:** coordenadas no espaço **Momento de discussão em pequenos grupos:** os alunos resolvem um conjunto de problemas envolvendo pontos e vetores. Os objetivos são:

	da reta, e a análise qualitativa geométrica das soluções dos sistemas lineares 2 x 2.	retomar conceitos vistos no plano, porém agora no espaço; introduzir as equações paramétricas da reta no espaço. **Sistematização:** discussão sobre algumas das atividades e as equações paramétricas da reta no espaço.
7º	**Momento de discussão em grande grupo:** de maneira compacta foram apresentados os seguintes assuntos: coordenadas no espaço, a equação do plano e a resolução geométrica de sistemas 2 x 3. **Momento de discussão em pequenos grupos:** os alunos resolveram alguns problemas sobre os assuntos.	**Momento de discussão em grande grupo:** A equação do plano. **Momento de discussão em pequenos grupos:** Os alunos resolvem um conjunto de atividades envolvendo essa equação e a discussão geométrica de alguns sistemas lineares 3 x 2. Assim, o objetivo é responder qualitativamente sobre a quantidade de soluções do sistema, através da posição entre os planos. **Sistematização:** Uma breve discussão sobre algumas das atividades.

Observações referentes ao quadro:

- Na nova aula 1 é trabalhado o conceito de vetor. As operações com o vetor geométrico ficaram para a aula seguinte. Assim, em cada uma das aulas, os alunos dispõem de mais tempo para resolver as atividades. As listas dessas duas aulas resultaram no desdobramento da antiga lista 1.

- Na nova aula 3, a lista de atividades (referente ao vetor com coordenadas) foi modificada. A lista anterior não havia sido suficiente para que os alunos atingissem os objetivos esperados, sendo necessário elaborar de uma nova lista de problemas, que acabou sendo aplicada apenas na aula 5. Assim, esse novo conjunto de atividades foi elaborado em cima das listas das antigas aulas 3 e 5.

- Na nova aula 4 é trabalhada a ortogonalidade de vetores e problemas referentes a esse assunto. A releitura da equação da reta, à luz da ortogonalidade de vetores ficou para a nova aula 5, quando os alunos já estão mais habituados com coordenadas e ortogonalidade.

- Nas novas aulas 6 e 7, é descompactado o trabalho feito na aula 7 e são apresentadas as equações paramétricas da reta no espaço. Assim, quando aparecerem sistemas correspondentes a dois planos que se interceptam, é possível compreender a solução algebricamente e geometricamente.

- O material reorganizado de acordo com o exposto no quadro encontra-se no Anexo 3.

Frente às possibilidades que nos oferecem as tecnologias da informação e comunicação, nos sentimos provocados a pensar em um recurso digital que integrasse dinamismo e conceitos matemáticos. Nesse sentido foi desenvolvido, também como parte do material didático, o objeto de aprendizagem "Vetores e operações"[36] que trata de vetores e operações (disponível em CD no anexo 4). A principal diferença entre trabalhar com um objeto de aprendizagem ou com um software de geometria dinâmica é que no objeto tem-se recursos que permitem uma maior autonomia, por parte do

---

[36] O objeto "Vetores e operações" foi desenvolvido em colaboração com Carlos Eduardo Souza Ferreira, aluno do curso de bacharelado em Matemática na UFRGS, dentro do projeto financiado pela Pró-Reitoria de Extensão.

aluno, no aprendizado de um determinado conteúdo. Assim, através da manipulação direta na tela do computador, o aluno pode avançar em sua aprendizagem, dado que o objeto é projetado para ir conduzindo-o, passo a passo, na construção do conhecimento em questão, no caso os conceitos de vetor e operações.

Na figura 55, temos a interface desse objeto de aprendizagem na tela que trata do conceito de multiplicação algébrica de vetor por escalar.

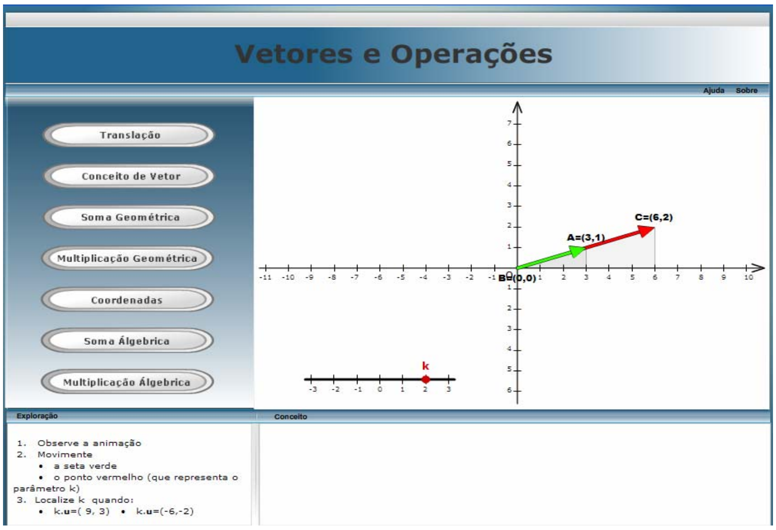


Fig. 55 – Interface do objeto “Vetores e Operações”

Em cada tela do objeto tem-se, na parte inferior, as janelas de “Exploração” e “Conceito”. Na tela da fig. 55 na janela “Exploração”, o aluno pode inicialmente assistir a uma animação onde aparece a seta verde e a seguir o sistema de coordenadas. Logo após, aparece a seta vermelha, representando o resultado da multiplicação do vetor pelo escalar k, quando k varia de 0 até 2.

Ao longo da animação, ou após assisti-la, é possível mover a seta verde (modificando o vetor que ela representa) ou mover o ponto vermelho (que representa o valor do parâmetro k).

O aluno é provocado a determinar as coordenadas do vetor conhecendo as coordenadas da multiplicação do vetor pelo escalar. Dessa forma, pode perceber naturalmente a relação entre tais coordenadas e o parâmetro k.

Na janela “Conceito" é feita a institucionalização da operação de multiplicação de vetor por escalar com coordenadas.

Um possível caminho de inserção da proposta no currículo do ensino médio é delineado no capitulo 3, na seção 3.4. O principal aspecto considerado é que o professor deve priorizar na escolha de conteúdos aqueles que agregam ao ensino de Matemática um maior valor formativo, ao invés de fórmulas sem explicações ou exigências de memorizações de regras.

Contudo, consideramos que nossa hipótese de investigação – é possível ensinar geometria vetorial e sistemas de equações na escola – se valida no âmbito de nossa experiência. Desta forma, as conclusões obtidas são verdadeiras neste contexto, pois fazem parte de uma investigação qualitativa. Para outros grupos, com diferentes expectativas e atitudes, seriam certamente necessários outros ajustes, a fim de obter resultados igualmente satisfatórios.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para enfrentar nossa problemática de pesquisa – através da geometria vetorial é possível desenvolver na escola, o tópico de sistema de equações, de forma a ter-se nele agregado um maior valor formativo? – concebemos, realizamos, observamos, analisamos e reconstruímos uma seqüência didática, segundo uma metodologia de investigação que se constitui como uma Engenharia Didática.

Com a intenção de justificar nossa proposta, a qual coloca álgebra e geometria em estreita relação, procuramos exemplos de aproximações entre ambas na história da Matemática, e também sugerimos aproximações que poderiam ser feitas no âmbito dos conteúdos que já fazem parte dos usuais programas das escolas.

Entendemos que ao associar à álgebra escolar a uma concretude geométrica, estamos contribuindo para a construção de conhecimento mais pleno de significado por parte do aluno. Neste sentido, chamamos a atenção para os raciocínios de natureza geométrica que podem estar presentes em situações que, na escola, são tratadas apenas com raciocínios de natureza algébrica, de uma forma geral. Essa predominância das representações algébricas na Matemática escolar pode ter razão na presença de regras de manipulação bem definidas e de procedimentos algorítmicos que resolvem, às vezes, de forma quase mecânica, as equações. Já os problemas de natureza geométrica, de um modo geral, exigem raciocínios e procedimentos de construção para os quais não existem regras pré-definidas. Cada novo problema proposto desafia na criação de uma nova estratégia de resolução.

Apoiados em trabalho de Douady (1998), vislumbramos na *interação entre dois domínios* – o algébrico e o geométrico – a possibilidade muito clara de dar significado às clássicas expressões que aparecem nos livros didáticos - “sistemas determinados”, “sistemas indeterminados”, “sistemas impossíveis” -

quando tratam do tópico sobre sistemas de equações. Sob a ótica da geometria vetorial, a existência de soluções, corresponde – para sistemas de equações lineares com duas ou três variáveis – à existência de intersecções de retas ou de planos. Dessa forma, os “sistemas determinados” são aqueles cuja solução corresponde a um único ponto do plano ou do espaço, os “sistemas indeterminados” são aqueles cujas infinitas soluções correspondem a pontos que determinam ou uma reta ou um plano, e os “sistemas impossíveis” são aqueles sem solução, o que se justifica geometricamente no paralelismo de retas ou de planos.

Nessa direção, procurando agregar ao estudo de sistemas de equações um maior valor formativo, concebemos nossa seqüência didática de forma a fazer uma introdução à geometria vetorial, bastante elementar, o suficiente para colocar os sistemas com três variáveis sob a ótica da geometria.

É importante destacar uma preocupação permanente que esteve por trás da elaboração do material didático: a questão da demonstração. Mesmo sem a utilização das palavras “teorema” e “demonstração” – até porque ambas não são usuais na escola – houve uma preocupação na fundamentação e explicação matemática dos conteúdos que estavam sendo trabalhados. A título de ilustração, conforme documentado na realização da experiência: a equação do plano foi deduzida, ao invés de simplesmente dizer que *“ax + by + cz = d é a equação do plano com vetor normal* $\vec{n}$ *= (a, b, c)”*. Também vale ressaltar que em certas demonstrações (outros teoremas), embora estivéssemos discutindo casos particulares – como no momento em que, para deduzir a expressão algébrica da soma de vetores, representamos os vetores no primeiro quadrante – a perda de generalidade não comprometeu o entendimento global. As particularidades escolhidas se justificam de imediato na intenção de demonstrarmos propriedades algébricas a partir de argumentações geométricas. Subjacente a estas escolhas está o nosso sentimento de que é de acordo com a maturidade matemática dos alunos que se deve estabelecer, gradualmente, o formalismo da demonstração.

Uma outra preocupação que nos acompanhou, e que também queremos destacar, refere-se à clareza e precisão da linguagem a ser utilizada pelo professor com seus alunos, dada a sua importante contribuição para a tomada de consciência, por parte dos alunos, dos conceitos que são propósito de aprendizagem. Ao introduzir-se, por exemplo, o conceito de vetor, o cuidado em usar-se a expressão “seta representante do vetor” ou “a coleção de setas que representam o vetor” sempre esteve presente “na fala” do professor. Se, ao referir-se a uma dada “seta” o professor fala “vetor”, no início do estudo de vetores, complicações conceituais podem acontecer. Isto porque o aluno encontra-se no momento de entender que “um vetor é uma coleção de setas com certas propriedades em comum”.

Na concepção da situação didática, em termos de organização didática, contemplamos os seguintes momentos:

— os momentos de discussão em grande grupo: onde os novos conceitos foram trabalhados;

— os momentos de discussões em pequenos grupos: onde os alunos resolveram atividades;

— os momentos de sistematização, em grande grupo: onde, após a resolução das atividades, discutimos sobre as questões mais relevantes para que o grupo pudesse avançar, na medida do possível de forma bastante homogênea, na construção dos conhecimentos.

Conforme registrado no capitulo 4, na escolha da turma para a realização da experiência, buscamos minimizar ao máximo as inúmeras variáveis que se fazem presentes em uma situação didática (pouca maturidade, falta de pré-requisitos básicos, pouco interesse no assunto, etc). Dessa forma, procuramos trabalhar sob condições, na medida do possível, mais próximas das ideais, de modo a colocar sob o foco de atenção e de análise, sobretudo, a validação do material didático, a ser nosso produto final. Nessa direção, percebemos como possível desdobramento deste trabalho, a produção de uma versão resumida da proposta que aqui apresentamos, de modo a facilitar o uso desse material em salas de aulas com outras condições para o trabalho.

Iniciamos a experiência com uma proposta de situação didática pré-definida, com justificativas baseadas em uma análise *a priori.* Esta proposta foi se readaptando, em função de uma análise *a posteriori* que sempre acompanhou o desenrolar da experiência, em cada um dos encontros. As dificuldades detectadas na análise *a posteriori* nos conduziram a uma primeira reconstrução da seqüência de atividades – que ocorreu no próprio momento de realização da experiência.

No confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori*, das diferentes atividades realizadas, constatamos que os alunos, de um modo geral, se apropriaram corretamente da idéia de vetor (geométrico e algébrico) e das operações de vetores (soma, diferença e multiplicação por escalar, nas representações geométricas e algébricas). Também compreenderam a equação da reta segundo a ortogonalidade de vetores – para isto fazendo-se necessário disponibilizar um tempo maior nessa etapa, bem como elaborar um novo conjunto de atividades para sistematização destes conceitos. As observações e análises do último encontro, onde foram abordados os vetores no espaço e a equação do plano, sinalizam que, se a construção dos principais conceitos no plano estiver bem consolidada, a generalização destas idéias para o espaço pode ocorrer de maneira natural.

Ao final da experiência, uma segunda reconstrução da proposta se apresentou como necessária para então afinar a relação entre os conteúdos objeto de ensino e o tempo necessário para o seu aprendizado. Também como parte desta segunda reconstrução, desenvolvemos o objeto de aprendizagem: Vetores e Operações. A inclusão do objeto de aprendizagem ao material didático, nos leva agora, ao final da dissertação, à uma nova *análise a priori*: O dinamismo das figuras no computador contra o estático das figuras do quadro negro, pode fazer com que os alunos, através da visualização de diferentes situações, se apropriem dos conteúdos com maior facilidade. Além de favorecer o aprendizado, a versatilidade do objeto elimina o tempo gasto pelo professor para fazer os desenhos estáticos de quadro negro, e assim coloca sob uma nova realidade os momentos de discussão em grande grupo. Isto pode contribuir de forma significativa no planejamento dos encontros, ao reduzir também o tempo de discussão em grande grupo, assim viabilizando um tempo maior para as discussões em pequenos grupos, onde através da resolução das atividades os alunos se colocam no papel de ativos aprendizes [37].

A proposta apresentada nesta dissertação finaliza com a análise geométrica qualitativa dos sistemas de três incógnitas. Este estudo deve então prosseguir, naturalmente, com a resolução algébrica de sistemas, via escalonamento, para a determinação das soluções numéricas. E aqui vale apontar para um possível desdobramento dessa dissertação: a elaboração de uma seqüência didática que trate de associar ao processo do escalonamento uma leitura geométrica – o que significa o entendimento das operações elementares do escalonamento via movimentos de planos que sempre preservam a inicial intersecção.

Consideramos, enfim, que nossa hipótese, formulada no contexto da Engenharia Didática – através da geometria vetorial é possível desenvolver na escola, o tópico de sistema de equações, de forma a ter-se nele agregado um maior valor formativo – se valida no cenário de realização de nossa experiência. E, com as devidas adaptações, de modo a atenderem as especificidades de cada turma de alunos, é com confiança que apostamos na sua viabilidade para outras situações de ensino e aprendizagem de sistemas de equações. Dentre estas adaptações, os diferentes ritmos de aprendizagem dos alunos devem ser considerados. Tem-se aí um dos maiores desafios para nós professores: como administrar uma turma onde, ao mesmo tempo, se apresentam alunos que realizam as atividades facilmente, outros alunos que necessitam de mais tempo, ou ainda alunos com muita dificuldade ou mesmo sem motivação?

Ao longo da realização desse trabalho percebermos quanto tempo é necessário para a elaboração de uma situação didática que coloque em foco, pelo menos, alguns dos diferentes aspectos que contribuem de forma

[37] Como ilustração vale comentar, que no encontro em que trabalhamos a soma de vetores com coordenadas, boa parte do momento de discussão em grande grupo ficou concentrada na explicação de uma congruência de triângulos, muito pelas restrições de desenho que se apresentam ao professor no uso do giz e quadro negro.

significativa para a construção de conhecimento por parte dos alunos. Diferentes foram os momentos em que: reconsideramos os caminhos a serem seguidos; afinamos as escolhas das seqüências de atividades; pensamos e repensamos sobre a forma mais simples e clara de trabalhar com determinado conteúdo; ponderamos sobre a importância das discussões entre os alunos, mas também sobre a importância da intervenção do professor. Estes momentos aconteceram durante a produção desta dissertação e isso nos faz enfatizar a relevância dos mestrados profissionalizantes. Mas eles também nos fazem levantar a seguinte questão: como esse produto educativo pode chegar às escolas, de modo a dar suporte a reais melhorias no ensino?

É colocando à disposição de nossos colegas professores de Matemática os diferentes produtos educacionais que estão sendo desenvolvidos neste nosso Mestrado Profissionalizante, para que façam uso no seu dia-a dia de sala de aula, que estaremos também atendendo a um dos objetivos deste nosso mestrado:

> *"O Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática tem caráter de preparação profissional na área docente, focalizando o conhecimento específico da Matemática, o ensino, a aprendizagem, o currículo e o sistema escolar. Está sempre voltado, explicitamente, <u>para a evolução e melhoria do ensino, seja pela ação direta em sala de aula, seja pela contribuição na solução de problemas educativos em Matemática.</u>"*[38]

Finalizamos, registrando que, além do produto didático desenvolvido nessa dissertação, nosso amadurecimento profissional ao longo desse curso de mestrado foi extremamente significativo. Tal amadurecimento tem refletido diretamente em nossa ação docente, na preocupação incessante de fazer da sala de aula um ambiente de pesquisa profissional que tenha reflexos positivos no desafiador processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

---

[38]Disponível em http://www.mat.ufrgs.br/%7Eppgem/, site do programa de mestrado profissionalizante em ensino de Matemática da UFRGS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática**. In: BRUN, Jean. Didáticas das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p.193-217.

ARTIGUE, M. DOUADY, R. MORENO, L. , **Ingeniería Didática em Educacion Matemática** , Grupo Editorial Iberoamérica, Bogotá, 1995.

BOYÉ, A. **¿François Viète, inventor del álgebra?** I.R.E.M., Nantes, Seminario «Orotava» de Historia de la Ciencia - Año Xi-Xii, p.251 – 276.

BOYER, C. **História da Matemática**, tradução de Gomide E., Editora Edgar Blücher Ltda, São Paulo, 1974 .

CARVALHO, P. & OUTROS **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias,** em Orientações Curriculares para o Ensino Médio, Secretaria de Educação Básica.– Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, p.69-96, 2006.

CASTRO, S. C. **Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação**, Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 2001.

CHARBONNEAU, L. **From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to geometry**, IN: (eds) Bednarz, N. , Kieran, C. & Lee, L ., Approaches to Algebra, Kluwer Academic Press, p. 15-38, 1996.

COMANDINO, F. **Euclides – Elementos de Geometria**, Edições Cultura, 1944 disponível em http: www.portal.mec.gov.br

CROWE, M. **A history of Vector Analysis**, University of Notre Dame Press, London, 1967.

DANTE, L. R. **Matemática – Contexto e Aplicações**, v.2, Ed. Ática, São Paulo, 2003.

DOUADY, R. , PARSYSZ, B. , **Geometry in the classroom**, IN (eds) Mammana, C. & Villani, V. , Perspectives on the teaching of Geometry for the 21 st Century, Kluwer Academic Publishers, p.159-192, 1998.

ESTEVE, M. **Las relaciones entre el álgebra y la geometría en el siglo XVII**, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de lãs Técnicas, Vol.24, N^{o} 51, p. 705 – 726, 2001.

EVES, H. **Introdução à história da matemática,** Editora da Unicamp, Campinas, SP, 1997.

FACCHINI, W. **Matemática Volume Único,** Ed. Saraiva, São Paulo, 1996.

GEOMETRY OF RENÉ DESCARTES, tradução por Smith, E. & Latham. M. , Dover Publications , 1954

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo,** Tese de doutorado no Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, UFRGS, 2001.

IEZZI, G. & OUTROS **Matemática – volume único**, Atual Editora, São Paulo, 1997.

LIMA, E. **Sobre o ensino de sistemas lineares**, IN (eds) SBM, Revista do professor de Matemática 23, São Paulo, 1993.

LIMA, E. Carvalho P., Wagner E., Morgado A., **A matemática no Ensino Médio** *Volume 3* , SBM, Rio de Janeiro, 2001

MARANHÃO, M.C. **Dialética – Ferramenta – Objeto**, Educação Matemática: uma introdução, EDS Machado, S.D.A., São Paulo: EDUC, 2002.

PACCOLA, H. e BIANCHINI, E. **Curso de Matemática**, Ed. Moderna, São Paulo, 2003.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS – Ensino Médio, Ministério da Educação,Secretária de educação Média e Tecnológica, Brasíia, 2002.

POYNTER, A. AND TALL, D. (2005), **'What do mathematics and physics teachers think that students will find difficult? A challenge to accepted practices of teaching'**, in D. Hewitt and A. Noyes (Eds), *Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education* held at the University of Warwick, pp. 128-135. Available from www.bsrlm.org.uk.

TERRACHER, P., FERACHOGLOU, R., **Math Seconde**, Hachette *Éducation*, Paris 1994

VELOSO, E. **O triunfo da álgebra**, Educação e Matemática, número 5, p.61-66, 2005.

ANEXOS

ANEXO I – A concepção inicial da proposta

A proposta foi elaborada com os seguintes objetivos gerais: priorizar o pensamento matemático e em lugar de cálculos árduos e exaustivos; relacionar geometria e álgebra partindo sempre da idéia geométrica para compreender a idéia algébrica; e, introduzir, sob o prisma da geometria vetorial, a equação da reta e a equação do plano, a fim de responder qualitativamente sobre a classificação de um sistema linear.

O material foi organizado para ser aplicado em seis aulas, de 100 minutos cada. Na maior parte dos encontros, os alunos receberiam a parte teórica da aula com lacunas, que deveriam ser preenchidas ao longo da exposição do professor, e após resolveriam um conjunto de problemas.

O primeiro encontro tinha como objetivo central a compreensão do conceito de vetor e as operações elementares com o vetor geométrico. A expectativa inicial era que os alunos, resolvendo as atividades, se apropriassem do conceito de vetor, conseguindo diferenciar o vetor (objeto) e a seta (representação do objeto) e verificar quando duas setas são, ou não são, representantes do mesmo vetor. Em um segundo momento, esperava-se que os alunos fossem capazes de efetuar a soma de vetores, a diferença de vetores e a multiplicação de vetor por escalar.

No segundo encontro, após comentários sobre as atividades realizadas na aula anterior, seria introduzido o vetor algébrico e proposta a segunda lista de exercícios. O objetivo central era que, de posse do conceito de vetor, os alunos conseguissem dar as coordenadas do vetor independente da posição em que estivesse sua seta representante. A grande expectativa era que os alunos não tivessem dificuldades em função do trabalho que já havia sido desenvolvido com os vetores no primeiro encontro e da familiaridade dos alunos com o sistema de coordenadas.

No terceiro encontro seriam deduzidas as coordenadas do vetor soma e também do produto de um vetor por um escalar. Após isso, os alunos resolveriam atividades. No final seriam esclarecidas as dúvidas referentes aos problemas envolvendo coordenadas. O objetivo central desse encontro era que os alunos compreendessem as operações algébricas (isto é, com coordenadas) como conseqüência direta das operações geométricas, já estudadas. A grande expectativa era de que os alunos efetuassem as operações algebricamente, mas sem desprover-se, sempre que necessário, da representação geométrica.

No quarto encontro, através da condição de ortogonalidade de vetores, os alunos fariam uma releitura da equação geral da reta $a.x + b.y = c$, observando que a e b indicam as coordenadas de um vetor cuja direção é ortogonal à mesma. O objetivo principal desse encontro era que, utilizando o software Winplot e a nova leitura da equação da reta, os alunos respondessem qualitativamente sobre as soluções de sistemas lineares 2 x 2. A grande expectativa era de que os alunos conseguissem obter informações sobre as direções das retas, na leitura das coordenadas dos vetores ortogonais às mesmas.

No quinto encontro, após a apresentação do sistema de coordenadas no espaço, os alunos, no software Winplot, resolveriam atividades envolvendo coordenadas e operações com vetores no espaço. O objetivo central desse encontro era representar e operar vetores no espaço de forma análoga a que foi feita no plano. A grande expectativa era que com o uso do software Winplot a visualização espacial não fosse empecilho na transição do plano para o espaço.

No sexto encontro, através da condição de ortogonalidade dos vetores no espaço, a equação do plano $a.(x–x_o) + b.(y–y_o) + c.(z–z_o) = 0$ seria deduzida observando que a, b e c indicam as coordenadas de um vetor cuja direção é ortogonal ao plano. O objetivo principal desse encontro era que, utilizando o software Winplot e a equação do plano, os alunos respondessem qualitativamente sobre as soluções de sistemas de equações lineares 3 x 2 e 3 x 3. A grande expectativa era de que os alunos conseguissem obter informações sobre as posições dos planos, na leitura das coordenadas dos vetores ortogonais aos mesmos.

Anexo II – A seqüência didática implementada na escola

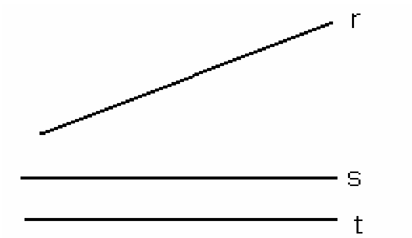
ENCONTROS 1 e 2 – O vetor geométrico e as operações geométricas

O triângulo abaixo se deslocou da posição 1 para posição 2.

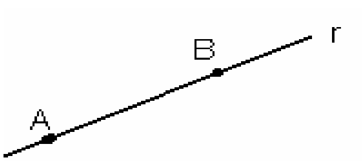
Quais são as informações necessárias para que possamos entender este deslocamento?

Neste contexto as idéias de direção e sentido são fundamentais, portanto vamos discuti-las mais detalhadamente.

Observe as retas da figura abaixo, onde s e t são paralelas.



Considere agora reta r da figura abaixo:



Definida uma direção, podemos imaginar uma pessoa se deslocando em dois sentidos:_______________________________.

Chamamos de vetor uma coleção de setas que tenham:

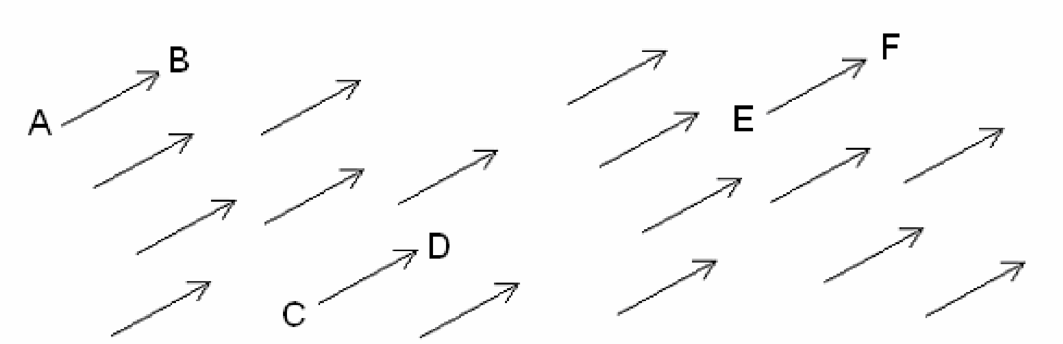
⇒

⇒

⇒

Portanto, setas que não diferem em nenhuma das três características acima **representam o mesmo vetor**.

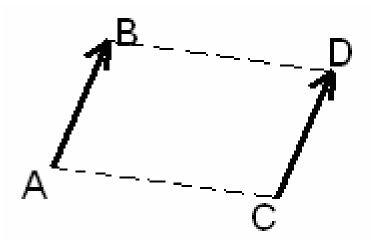
Assim, a idéia de vetor nos conduz a algo do tipo:



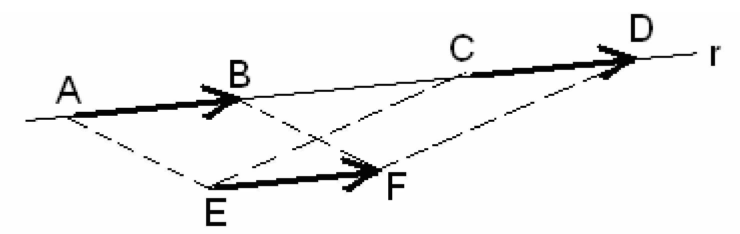
Quando escrevermos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ significa que $\vec{v}$ é representado pela seta $\overrightarrow{AB}$. Porém, qualquer outra seta com o mesmo módulo, direção e sentido, representa também o mesmo vetor $\vec{v}$.

Assim, na figura anterior, temos:

- Vetores e paralelogramo:

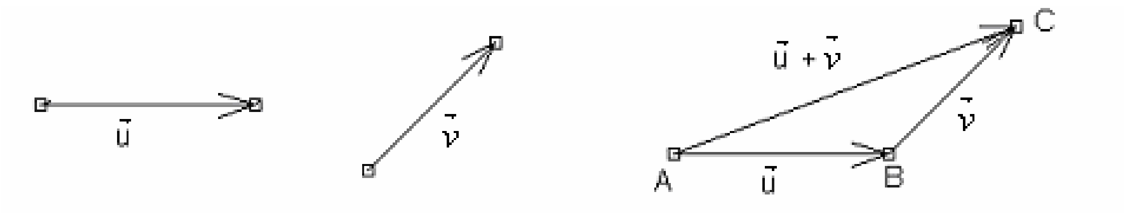


Duas setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ (não apoiadas na mesma reta) são representantes de um mesmo vetor quando o quadrilátero __________ for __________.



Quando as setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ estão sobre a mesma reta, tomamos uma outra seta $\overrightarrow{EF}$ tal que ABFE seja um paralelogramo. Assim as setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são representantes de um mesmo vetor quando EFDC também é paralelogramo.

Adição de vetores:

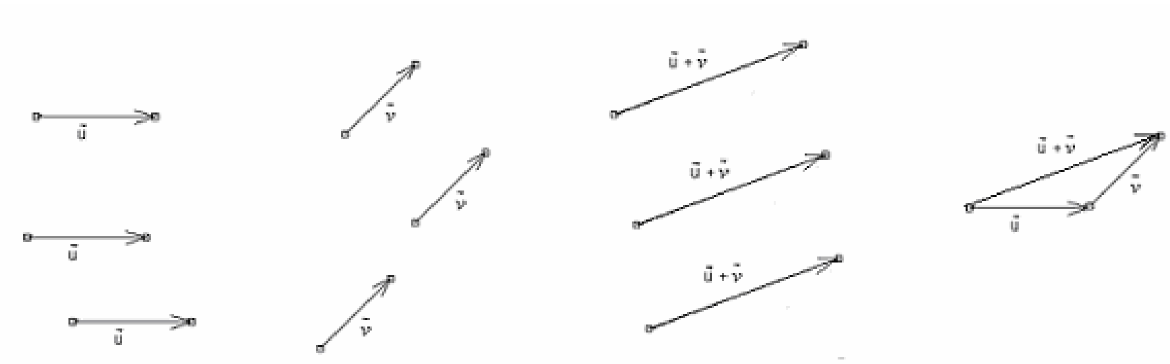


A soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pode ser determinada da seguinte maneira:

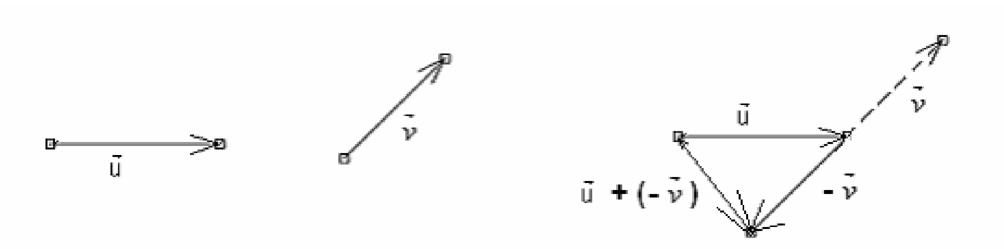
$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

É importante salientar que a soma $\vec{u}$ + $\vec{v}$ dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ independe da escolha de seus representantes:



Diferença de vetores:

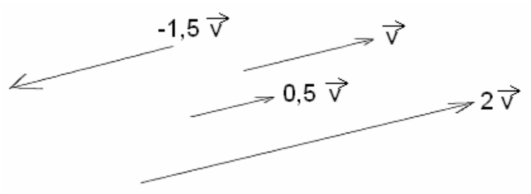


Assim $\vec{u}$ – $\vec{v}$ = $\vec{u}$ + (– $\vec{v}$).

Vetores e paralelogramo:

Observe que os vetores soma $\vec{u}$ + $\vec{v}$ e $\vec{u}$ – $\vec{v}$ são as diagonais do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Multiplicação de vetor por escalar:



Dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número k $\in$ IR, a multiplicação do número real k pelo vetor $\vec{v}$, é o vetor k. $\vec{v}$ tal que:

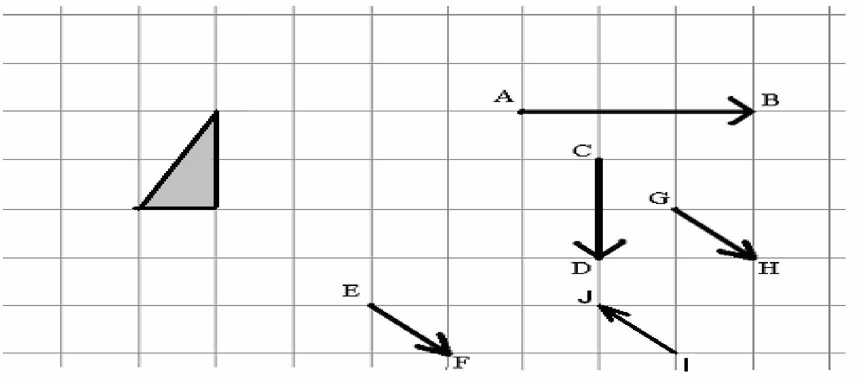
$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

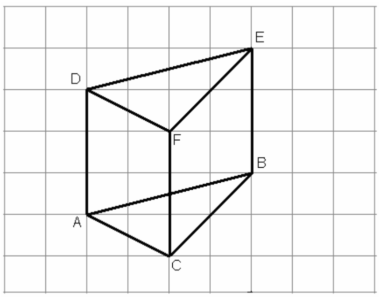
$\Rightarrow$

Atividades:

1) Fazer a translação do triângulo abaixo segundo cada uma das setas indicadas na figura:



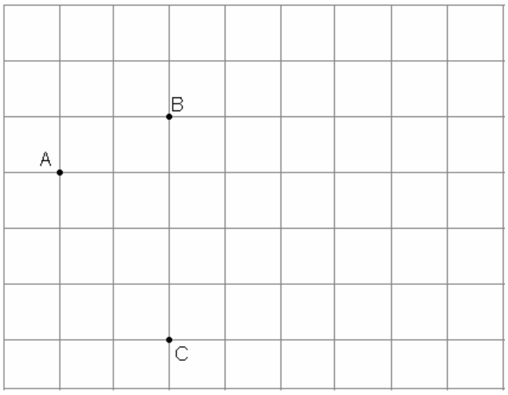
2) Identifique na figura abaixo, as setas que são representantes do mesmo vetor que $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AD}$[39].



[39] Atividade transcrita do livro Math Seconde, Hachette *Éducation*, TERRACHER, P., FERACHOGLOU, R., 1994, p.279

3) A figura abaixo é obtida através da junção de três hexágonos regulares. Quantos vetores distintos os lados destes polígonos determinam?

4) Marque na figura abaixo:



a) o ponto D tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

b) o ponto E tal que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$.

c) o ponto F tal que $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{BA}$.

d) o ponto G tal que $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{CG}$.

5) Verdadeiro ou Falso[40]?

a) (   ) Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Justificativa:

b) (   ) Se $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$, então A = B.

Justificativa:

c) (   ) Se I está a igual distância de A e B, então $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

Justificativa:

d) (   ) Se I é o ponto médio do segmento AB, então $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

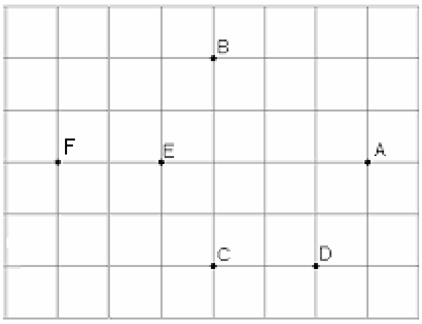
Justificativa:

e) (   ) Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$, então os quatro pontos estão alinhados.

Justificativa:

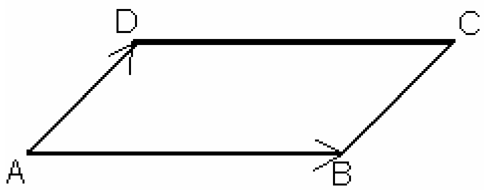
[40] Atividade transcrita do livro Math Seconde, Hachette *Éducation*, TERRACHER, P., FERACHOGLOU, R., 1994, p.279

6) Encontre na figura abaixo, sem acrescentar novos pontos, um representante do vetor que é igual a[41]:



a) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} =$ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} =$ c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} =$

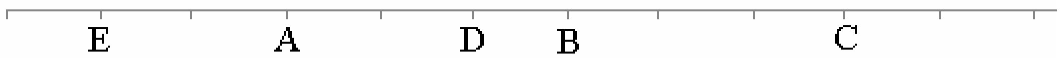
7) No paralelogramo da figura, sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, podemos escrever $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{u}$ e $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$.



Da mesma forma, escreva em função de $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

a) $\overrightarrow{CB} =$ b) $\overrightarrow{DB} =$ c) $\overrightarrow{BD} =$ d) $\overrightarrow{CA} =$

8) Os pontos A, B, C, D e E foram marcados na reta graduada abaixo[42].



a) Determine o valor da constante real k tal que:

i) $\overrightarrow{AC} = k.\ \overrightarrow{AB}$ ii) $\overrightarrow{DB} = k.\overrightarrow{AB}$ iii) $\overrightarrow{DA} = k.\overrightarrow{BC}$

iv) $\overrightarrow{AD} = k.\overrightarrow{CE}$ v) $\overrightarrow{BC} = k.\overrightarrow{AE}$

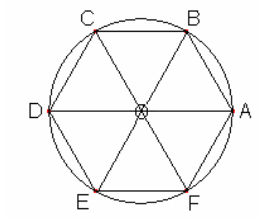
---

41 Atividade transcrita do livro Math Seconde, Hachette *Éducation*, TERRACHER, P., FERACHOGLOU, R., 1994, p.279

42 Atividade transcrita do livro Math Seconde, Hachette *Éducation*, TERRACHER, P., FERACHOGLOU, R., 1994, p.295

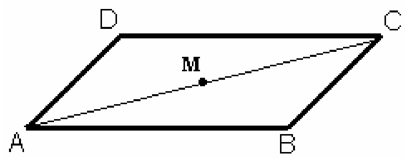
b) Marque na reta graduada os pontos M, N e P tais que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{PE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

9) Determine a soma $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ sendo ABCDEF um hexágono regular inscrito num círculo centro O, conforme indica a figura abaixo:



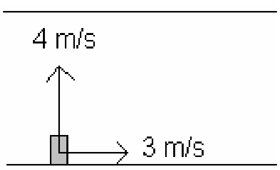
10) Seja ABCD um paralelogramo e M o ponto médio da diagonal AC, o que equivale a dizer que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$. Queremos mostrar que M é também ponto médio da diagonal DB, isto é $\overrightarrow{BM} =$ _____ .

Observe a figura e complete a demonstração desta propriedade:



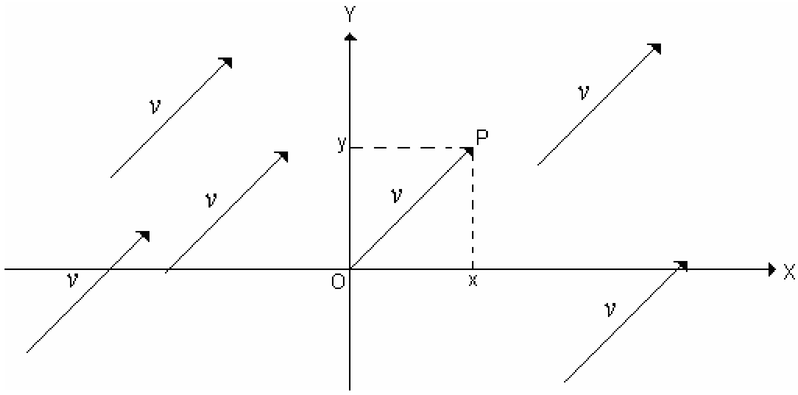
Pela definição de soma de vetores temos que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}$; mas temos que $\overrightarrow{CM} =$ _____ (pois M é ponto médio de AC) e $\overrightarrow{BC} =$ ____ (pois ABCD) é paralelogramo, então $\overrightarrow{BM} =$ ____+ ____ =____+ ____ = ____.

11) Um barco pode desenvolver velocidade de 4 m/s em águas paradas. Um pescador dispõe deste barco perpendicularmente às margens de um rio, cuja correnteza tem velocidade 3 m/s. Nesta travessia, qual será a velocidade do barco em relação às margens?



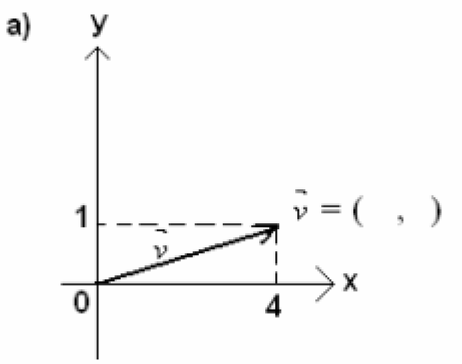
ENCONTRO 3 - As coordenadas de um vetor

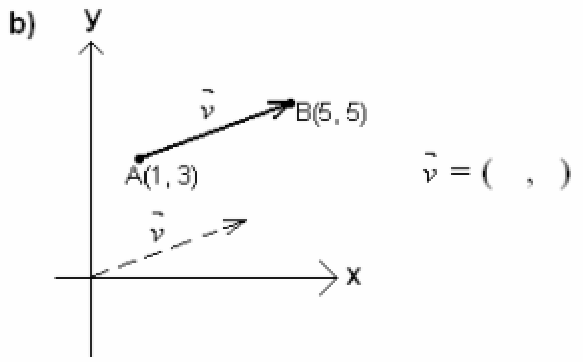
O vetor $\vec{v}$ é representado por diferentes setas no plano cartesiano.

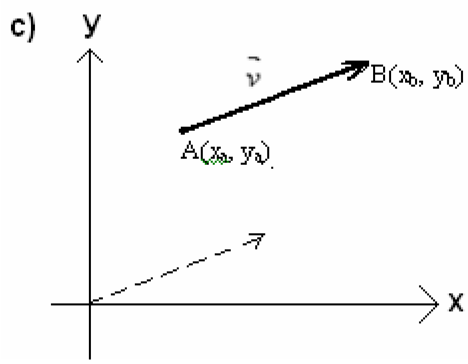


Dentre elas, destacamos a seta $\overrightarrow{OP}$, que fica completamente determinada pelas coordenadas de sua extremidade P. Assim, tais coordenadas são definidas como as coordenadas de $\vec{v}$ e escrevemos $\vec{v}$ = (x, y).

Vejamos as coordenadas de $\vec{v}$ nos seguintes casos:



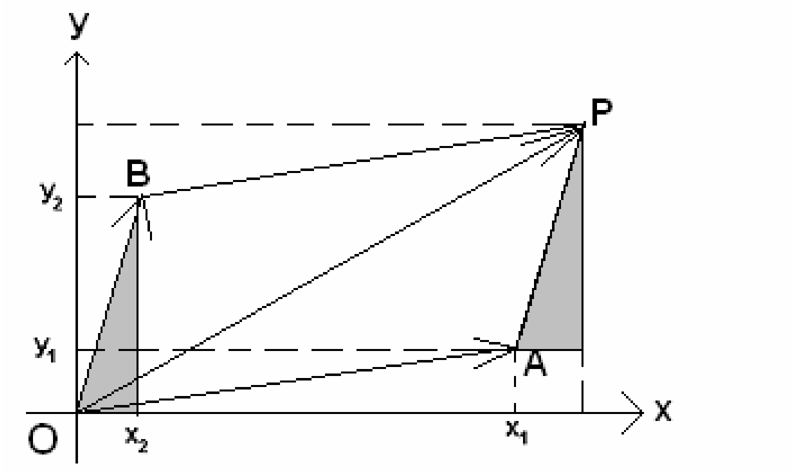




As operações com vetores na forma algébrica

Soma de vetores:

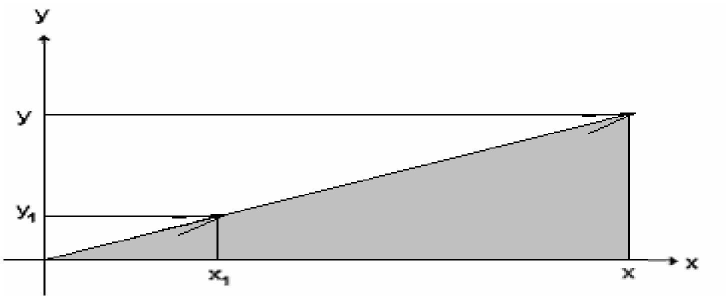
Sendo $\vec{u}$ = (x_1, y_1) e $\vec{v}$ = (x_2, y_2), quais as coordenadas de $\vec{u}+\vec{v}$?



Assim, se $\vec{u}$ = (x_1, y_1) e $\vec{v}$ = (x_2, y_2), então $\vec{u}$ + $\vec{v}$ = (,).

Multiplicação de vetor por escalar:

Sendo $\vec{u}$ = (x_1, y_1) e k $\in$ IR, quais as coordenadas de k. $\vec{u}$?

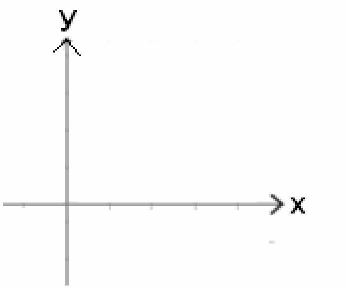


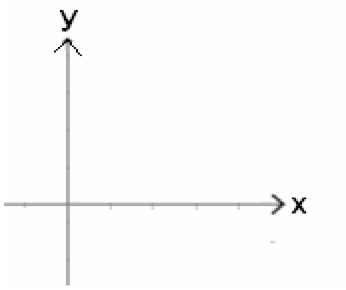
Assim, se $\vec{v}$ = (x_1, y_1), então k.$\vec{v}$ = (,).

Atividades:

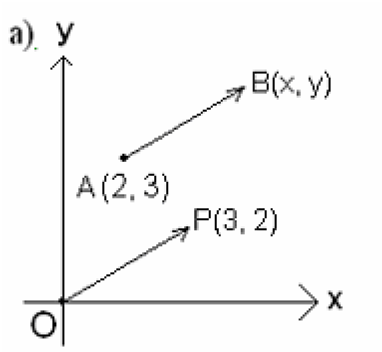
1) Determine as coordenadas do vetor $\vec{v}$ representado pela seta $\overrightarrow{AB}$ nos seguintes casos:

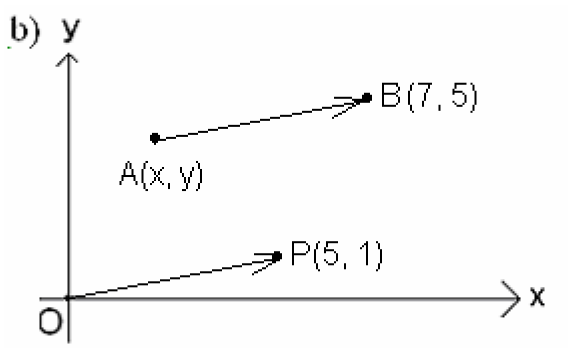
a) A(3, 3) e B(5, 4) b) A(1, 3) e B(4, -1)



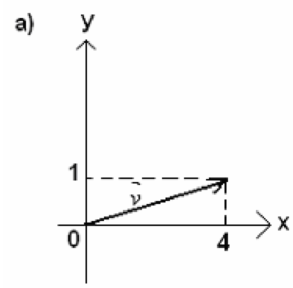


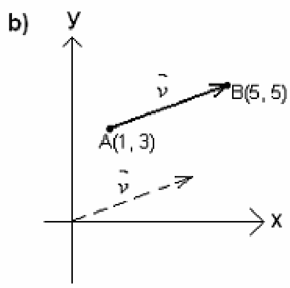
2) Determine as coordenadas de B sendo $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$ na figura abaixo:



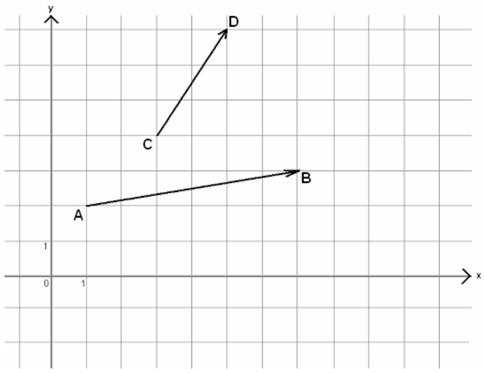


3) Qual o comprimento (ou módulo) de $\vec{v}$ nos seguintes casos:





4) Observe a figura:



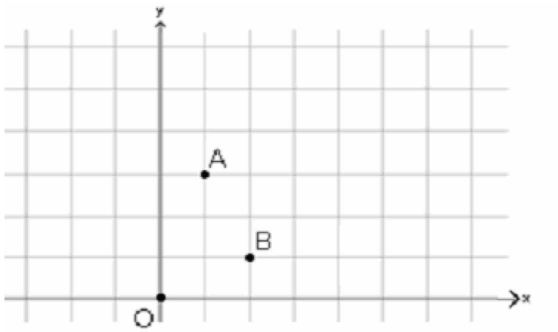
a) Desenhe um representante de $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

b) Determine as coordenadas de $\vec{u}$.

c) Desenhe um representante de $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$.

d) Determine as coordenadas de $\vec{v}$.

5) Observe a figura abaixo e responda o que é pedido:



a) **represente** no plano **e determine as coordenadas** de cada um dos pontos:

(i) P, sendo $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$;

(ii) Q, sendo $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + 2.\overrightarrow{OB}$;

(iii) S, sendo $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$;

(iv) T, sendo $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.

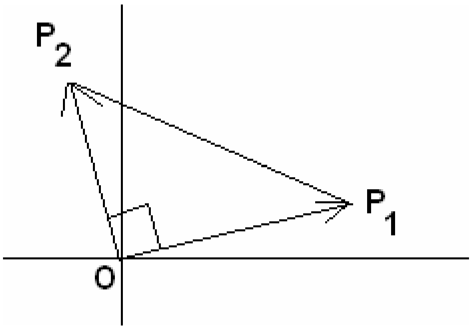
b) Sendo R(4, $\frac{9}{2}$) determine k $\in$ IR tal que $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + k.\overrightarrow{OB}$.

c) os pontos marcados no item a pertencem a uma mesma reta. O ponto (100, -95) pertence a essa reta?

d) qual a relação entre as coordenadas de um ponto P(x, y) para que ele pertença à reta?

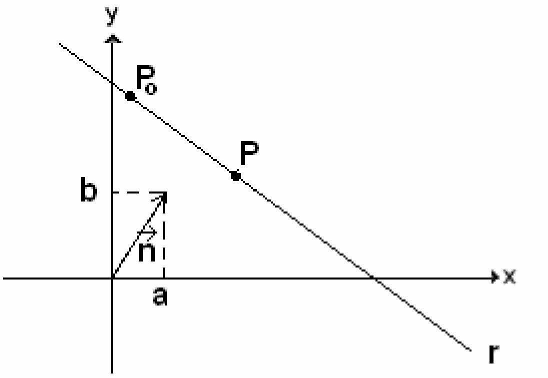
ENCONTRO 4 – A ortogonalidade de vetores e a equação da reta

O que deve acontecer para que os vetores $\vec{u}$ = (a, b) e $\vec{v}$ = (c, d) sejam ortogonais?



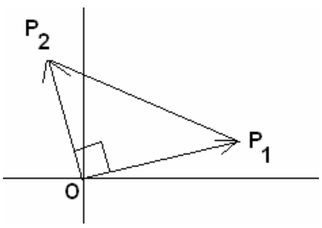
Através da ortogonalidade de vetores também é possível descrevermos as coordenadas de todos os pontos de uma reta. Observe:

Dado um vetor $\vec{n}$ = (a, b) e o ponto $P_o(x_o, y_o)$ existe uma única reta r que passa por P e é ortogonal à $\vec{n}$.



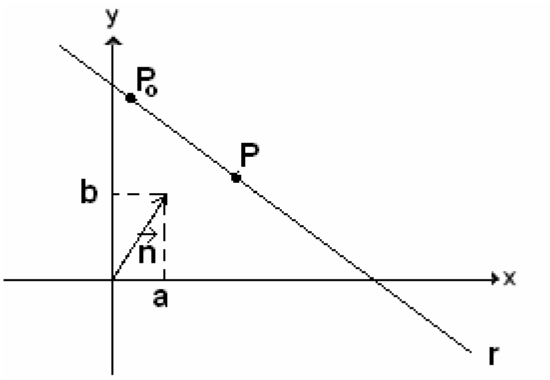
A ortogonalidade de vetores e a equação da reta

O que deve acontecer para que os vetores $\vec{u}$ = (a, b) e $\vec{v}$ = (c, d) sejam ortogonais?



Através da ortogonalidade de vetores também é possível descrevermos as coordenadas de todos os pontos de uma reta. Observe:

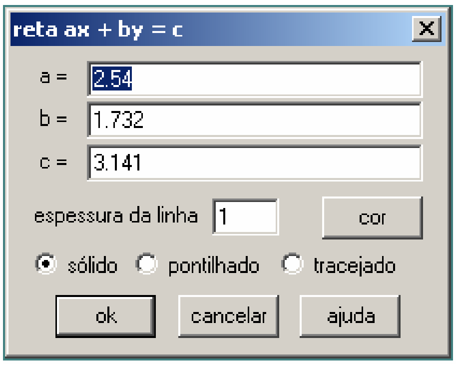
Dado um vetor $\vec{n}$ = (a, b) e o ponto $P_o(x_o, y_o)$ existe uma única reta r que passa por P e é ortogonal à $\vec{n}$.



Atividade no Winplot:

Vá ao menu janela e selecione a opção 2-dim.

Vá ao menu equação e selecione a opção reta. O seguinte quadro deve aparecer:



Atribua valores para os parâmetros a, b e c. Clique em ok e observe o gráfico.

1) Seguindo os passos acima, observe o gráfico de várias retas e responda:

a) O que acontece sempre que a = 0?

b) O que acontece sempre que b = 0?

c) Usando a interpretação dada na aula para a equação ax + by = c, justifique as respostas dos itens a e b.

d) Por que não podemos ter a e b simultaneamente nulos?

2) Vá ao menu equação e selecione a opção reta. Atribua valores para a e b, porém para c escreva c = C. Logo após clique ok. Após, vá ao menu Animação, e clique em individuais e após em C. A seguinte janela deve aparecer:

Clique em auto rev. Para parar digite s, para ir mais rápido digite r e mais lento digite l. Faça o mesmo com a tecla auto cícl. Para mudar o intervalo de valores de C use as teclas def L (define o menor valor) e def R (define o maior valor).

Agora responda:

a) O que acontece quando C = 0?

b) O que acontece com a reta C muda de valor?

c) Justifique a resposta do item b.

3) Um aluno, ao usar o Winplot, colocou uma equação de reta com a = 5, b = –1 e c = 3. Ao mesmo tempo, alguém usou para a, b e c os valores 10, -2, 6. O que acontece quando traçamos os dois gráficos? Justifique.

4) Usando os vetores normais das retas e sem fazer contas justifique se o sistema tem solução única solução, tem infinitas soluções ou não tem solução.

a) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -2x - 4y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 6x + 2y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 2x + 6y = 12 \end{cases}$

5) Considere r e s duas retas de equações $a_1x + b_1y = c_1$ e $a_2x + b_2y = c_2$. Determine o que deve acontecer com os vetores n_1 = (a_1, b_1) e n_2 = (a_2, b_2), e com as constantes c_1 e c_2, para que as retas sejam:

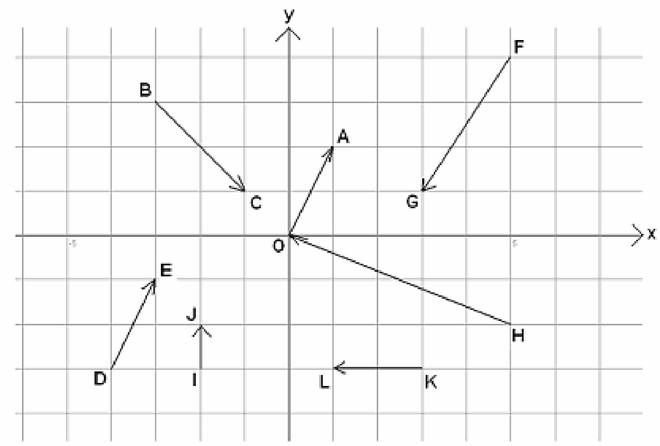
a) coincidentes

b) paralelas

c) concorrentes

ENCONTRO 5 – Atividades:

1) Encontre as coordenadas dos vetores representados pelas diferentes setas:



a) $\overrightarrow{OA}$ = (,   )

b) $\overrightarrow{BC}$ = (,   )

c) $\overrightarrow{DE}$ = (,   )

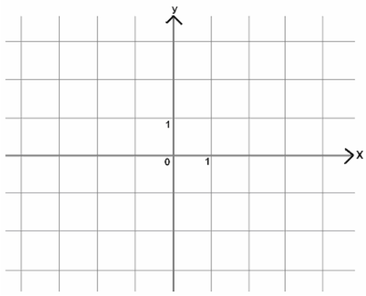
d) $\overrightarrow{FG}$ = (,   )

e) $\overrightarrow{HO}$ = (,   )

f) $\overrightarrow{IJ}$ = (,   )

g) $\overrightarrow{KL}$ = (,   )

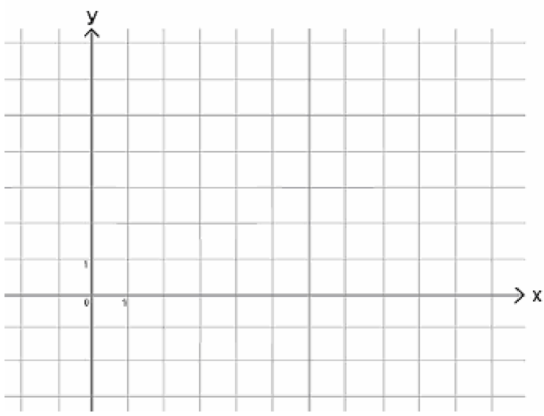
2) Se $\vec{v}$ = (2, 1) desenhe setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ representantes deste vetor $\vec{v}$ tais que $\overrightarrow{AB}$ esteja no segundo quadrante e $\overrightarrow{CD}$ esteja no quarto quadrante. Determine as coordenadas dos pontos A, B, C e D.

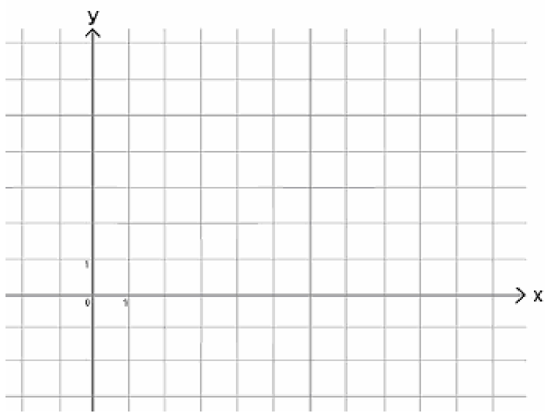


3) Sendo $\vec{u}$ = (3, 1) e $\vec{v}$ = (2, 4), determine o que é pedido (representando as operações no sistema de coordenadas sempre que possível).

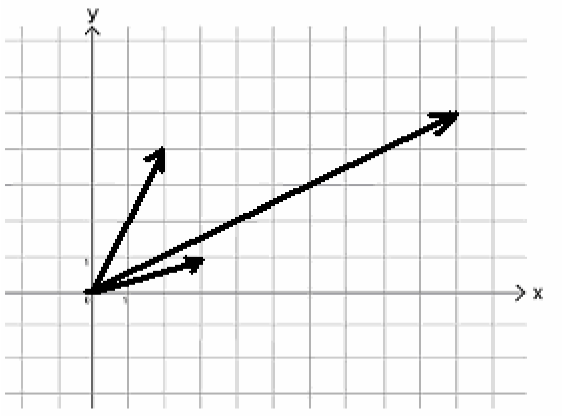
a) $\vec{u} + \vec{v}$ = (,   ).

b) $8.\vec{u} - .0,5\vec{v}$ = (,   ).

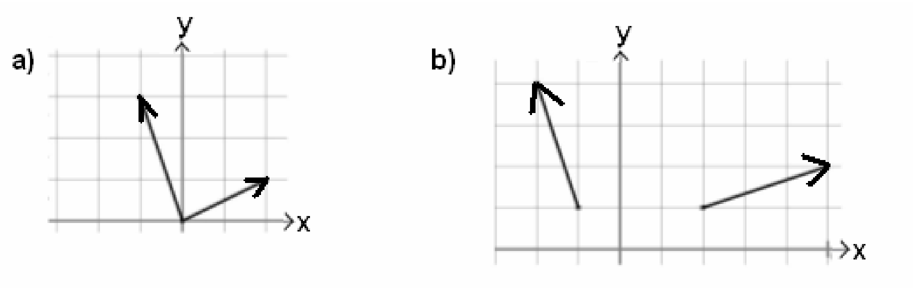




c) as constantes k_1 e k_2 tais que $k_1.\vec{u} + k_2.\vec{v} = \vec{w}$, onde $\vec{w}$ = (10, 5).

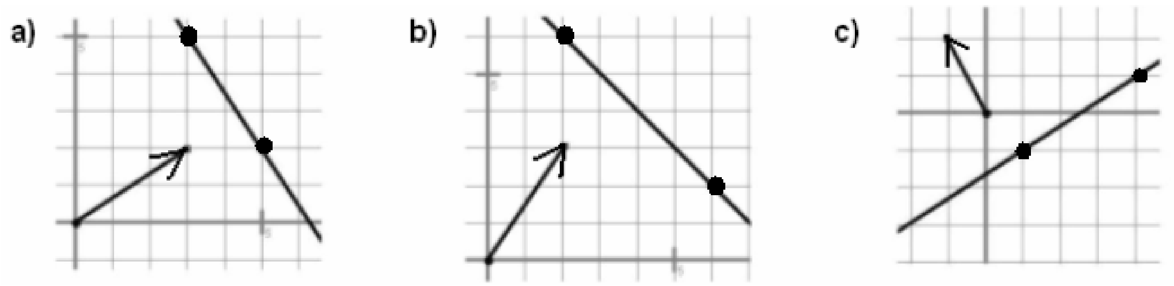


4) Verifique se são ortogonais os vetores dados pelas setas abaixo:

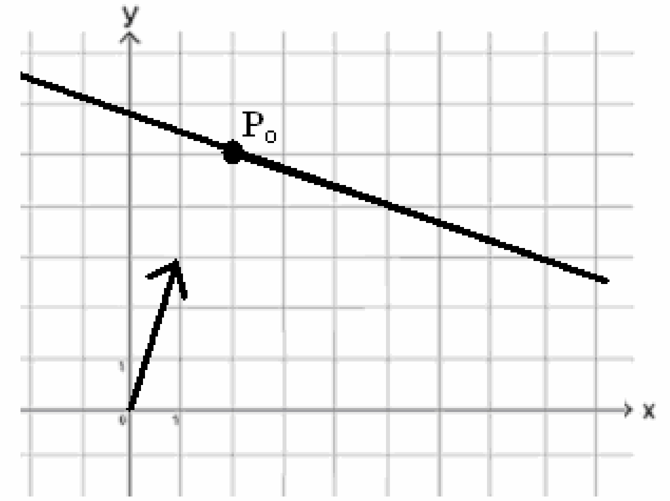


5) Encontre as coordenadas de dois vetores que sejam ortogonais a $\vec{v}$ = (2, 1).

6) Verifique se as retas são ortogonais aos vetores:



7) Considere $\vec{v}$ = (1, 3) e a reta r que passa por $P_o(2, 5)$ e é ortogonal a $\vec{v}$.



a) Um ponto P(x, y) pertence à reta quando os vetores $\vec{v}$ = (1, 3) e $\overrightarrow{P_0P}$ = (________, _______) forem ortogonais. Usando a condição de ortogonalidade, encontre a equação da reta r.

b) Escreva as equações de outras duas retas que sejam ortogonais ao vetor $\vec{v}$ = (1, 3). Represente essas retas graficamente mostrando, em cada caso, o ponto de intersecção com o eixo y.

8) Complete:

a) As retas de equações x + 2y = 1 e – 2x – 4y = 3 __________ (têm/ não têm) a mesma direção, pois os vetores ortogonais a elas, n_1 = (__,__) e n_2 = (__,__), ___________ (são/ não são) múltiplos. Como as retas são ________________ (distintas/ idênticas) o sistema de equações $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -2x - 4y = 3 \end{cases}$ _______________ (tem uma única solução/ tem infinitas soluções/ não tem solução).

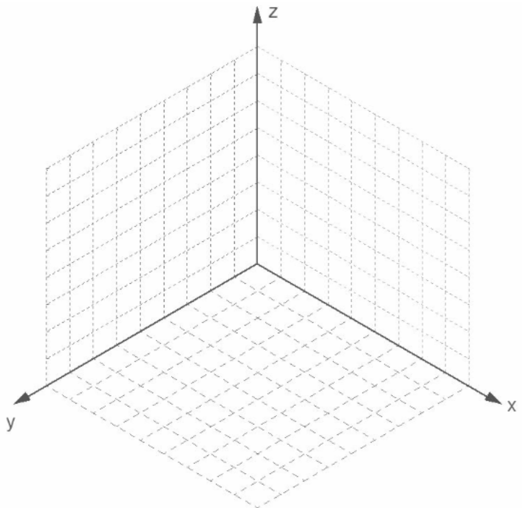
b) As retas de equações 3x + y = 1 e x + $\frac{1}{3}$y = $\frac{1}{3}$ __________ (têm/ não têm) a mesma direção, pois os vetores ortogonais a elas, n_1 = (__,__) e n_2 = (__,__), ___________ (são/ não são) múltiplos. Como as retas são ________________ (distintas/ idênticas) o sistema de equações $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3} \end{cases}$ ________________ (tem uma única solução/ tem infinitas soluções/ não tem solução).

c) As retas de equações 3x + 2y = 1 e 2x – 4y = 3 __________ (têm/ não têm) a mesma direção, pois os vetores ortogonais a elas, n_1 = (__,__) e n_2 = (__,__), ___________ (são/ não são) múltiplos. Como as retas são ________________ (distintas/ idênticas) o sistema de equações $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases}$ ________________ (tem uma única solução/ tem infinitas soluções/ não tem solução).

ENCONTRO 7 – <u>Coordenadas no Espaço</u>

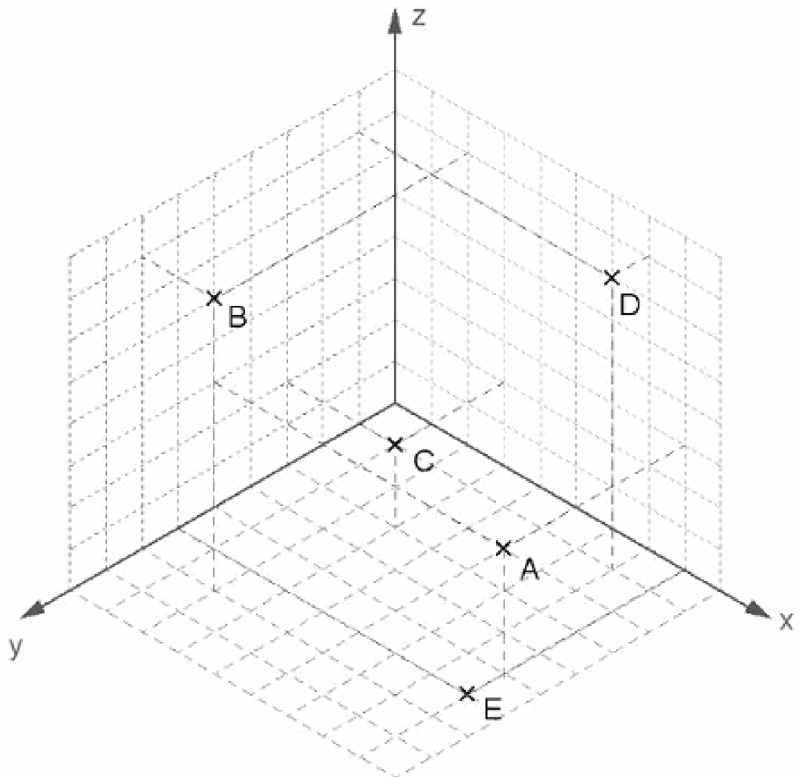
É um sistema de coordenadas formado por três eixos OX, OY e OZ, ortogonais e com a mesma origem O. Com este sistema, é possível associar cada ponto do espaço a um trio (x, y, z) de números reais.

Vejamos como localizar no sistema de coordenadas o ponto P(5, 3, 4):



<u>Atividades</u>

1) Determine as coordenadas de cada um dos seguintes pontos:



a) A (, ,)

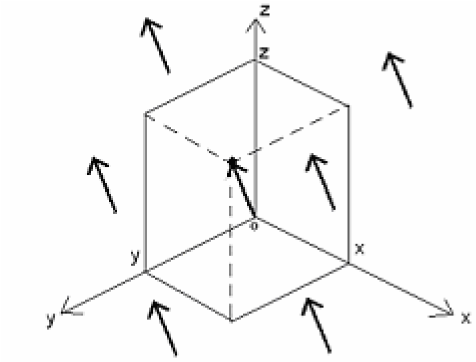
b) B (, ,)

c) C (, ,)

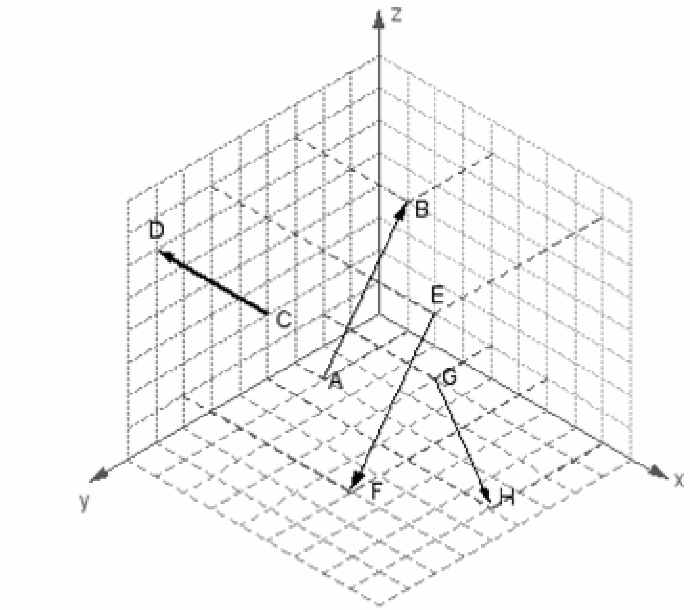
d) D (, ,)

e) E (, ,)

2) No espaço, o vetor $\vec{v}$ também pode ser representado por diferentes setas. Assim como no plano, as coordenadas de $\vec{v}$ são as coordenadas da extremidade da seta com origem em (0, 0, 0).



Na figura abaixo, encontre as coordenadas dos vetores representados pelas diferentes setas:



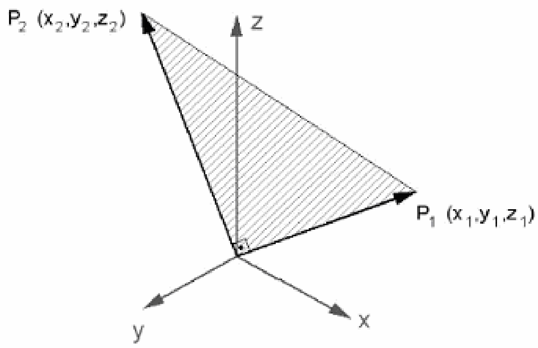
$\overrightarrow{AB} = (\quad , \quad)$

$\overrightarrow{CD} = (\quad , \quad)$

$\overrightarrow{EF} = (\quad , \quad)$

$\overrightarrow{GH} = (\quad , \quad)$

3) De modo similar ao que fizemos no plano, podemos no espaço concluir que $\vec{v}$ = (x_1, y_1, z_1) e $\vec{w}$ = (x_2, y_2, z_2) são ortogonais se e se $x_1x_2 + y.y_2 + z_1z_2 = 0$.

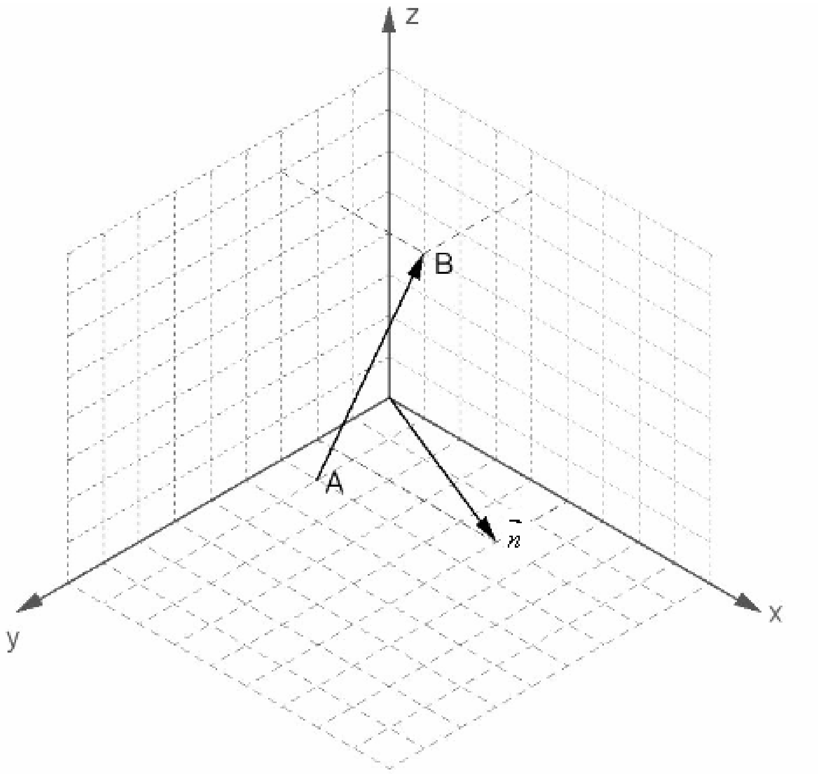


Nestas condições, determine:

a) se os vetores $\vec{v}$ = (1, 3, 5) e $\vec{w}$ = (2, 1, -1) são ortogonais.

b) as coordenadas de dois vetores que sejam ortogonais a $\vec{v}$ = (1, 3, 5).

4) Verifique se $\vec{n}$ e $\vec{v}$ = $\overrightarrow{AB}$ são ortogonais:



<u>A equação do plano</u>

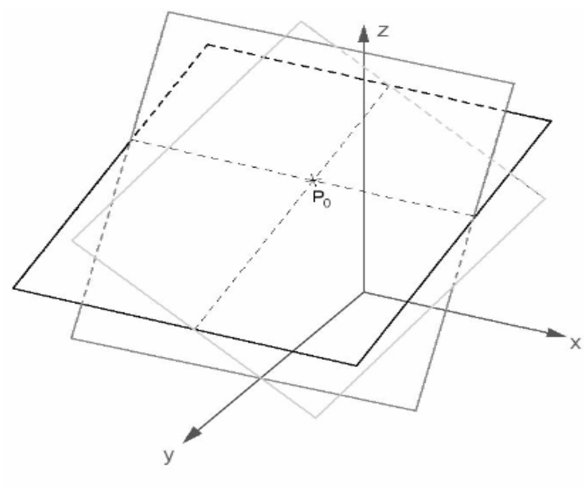


figura 1

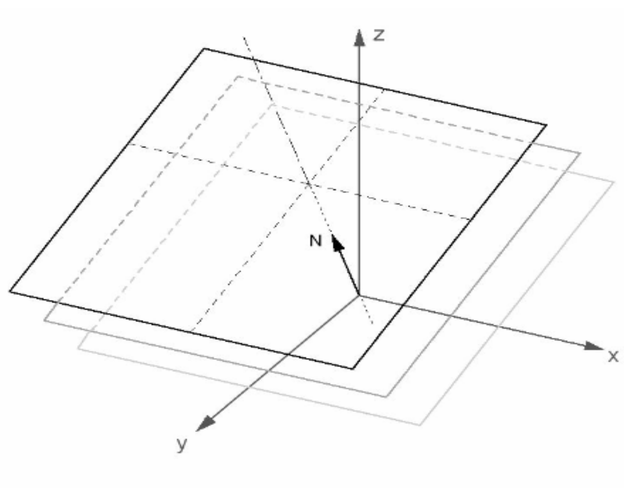
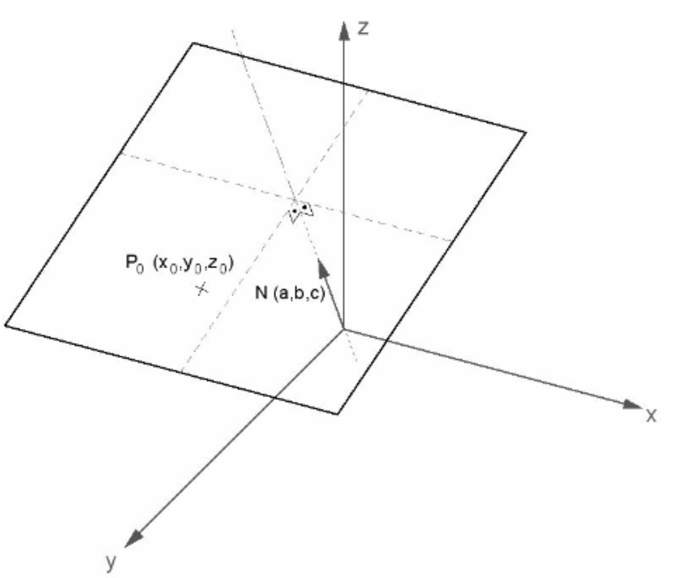
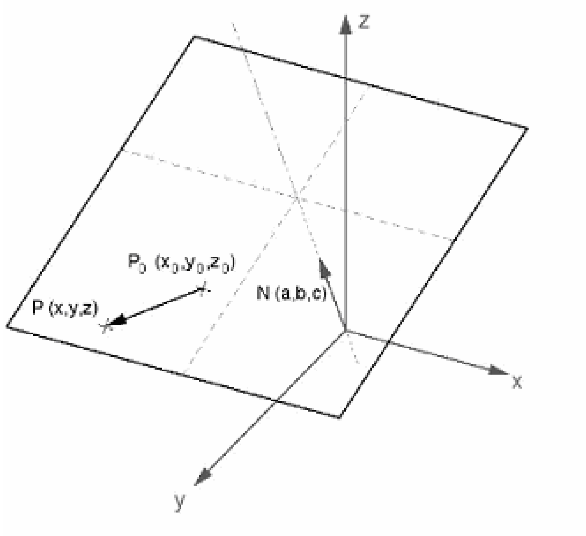


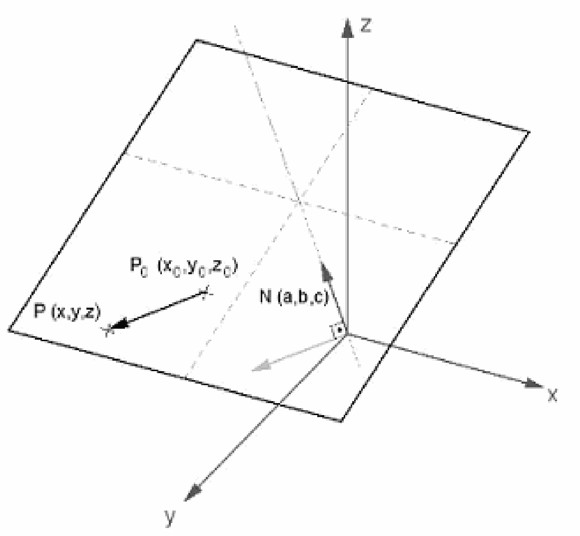
figura 2

Dado um ponto P_0, existem infinitos planos que o contém (figura 1). Dado um vetor $\vec{n}$, existem infinitos planos que são ortogonais a $\vec{n}$ (figura 2). Porém, dado um ponto P_0 e um vetor $\vec{n}$, existe um único plano que é ortogonal à $\vec{n}$ passando por P_o.



Qual a condição para que um ponto P(x, y, z) pertença a esse plano?

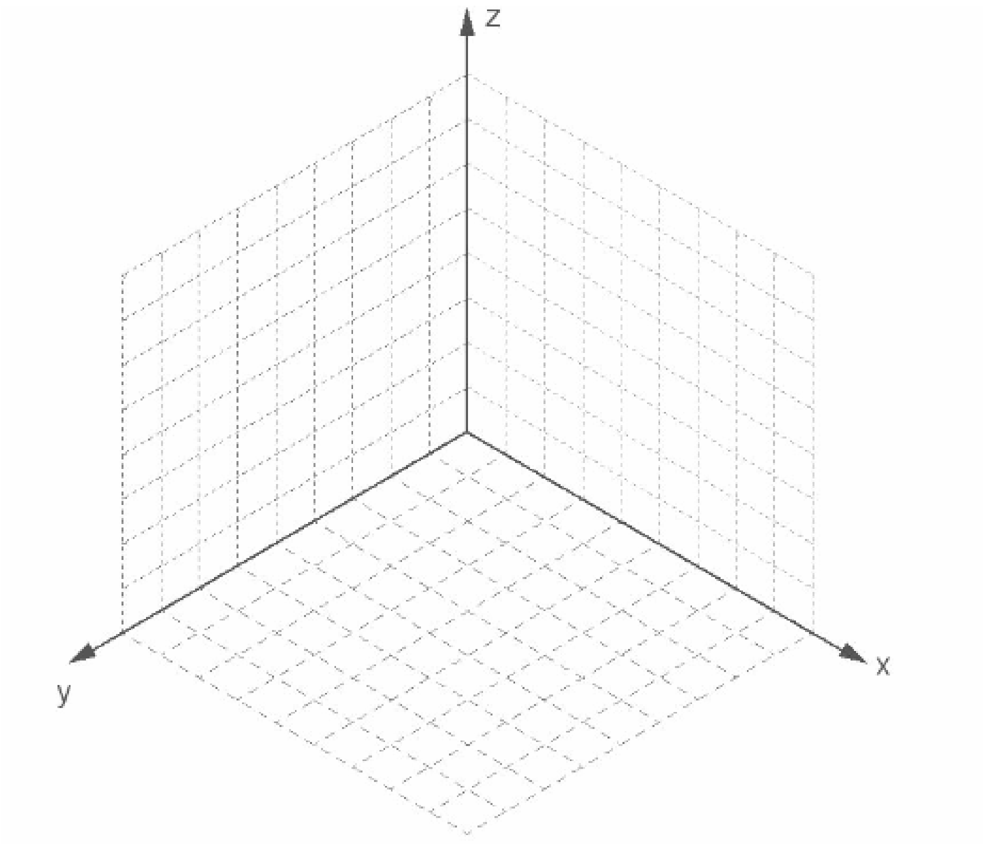




<u>**Atividades**</u>

5) Encontre a equação do plano que passa por (3, 2, 1) e tem vetor normal $\vec{n}$ = (3, 2, -4).

6) Considere o plano α de equação 3x + 2y + z = 6.



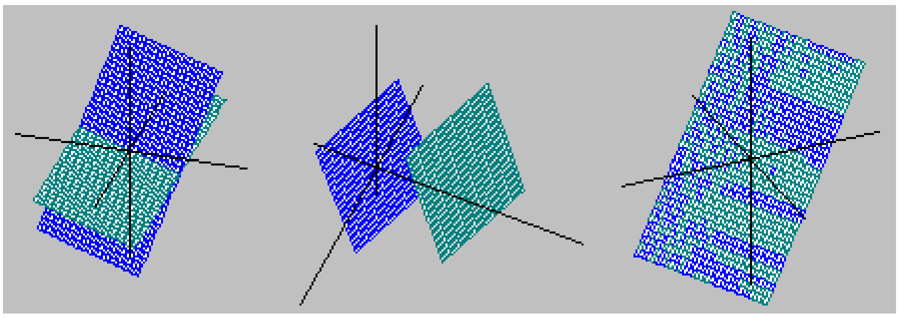
a) Usando os pontos de intersecção com os eixos, represente α graficamente.

b) Determine as coordenadas de um vetor normal ao plano α e represente-o no gráfico anterior.

c) Determine a equação de um plano paralelo à α que passa por P(1, -1, 2).

d) Determine a equação de um plano perpendicular à α.

7) Observe as posições relativas entre dois planos e determine:



a) um exemplo de equações de dois planos que se encontrem segundo uma reta.

b) um exemplo de equações de dois planos paralelos.

c) um exemplo de equações de dois planos coincidentes.

Anexo III – A seqüência didática concebida após a realização da experiência

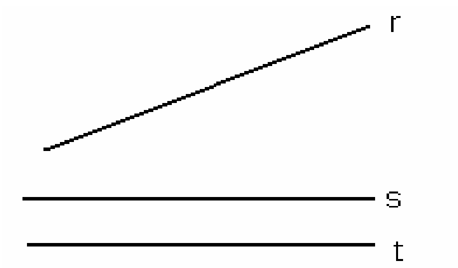
ENCONTRO 1 – O vetor geométrico

O triângulo abaixo se deslocou da posição 1 para posição 2.

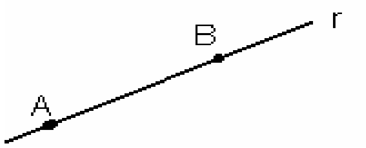
Quais são as informações necessárias para que possamos entender este deslocamento?

Neste contexto as idéias de direção e sentido são fundamentais, portanto vamos discuti-las mais detalhadamente.

Observe as retas da figura abaixo, onde s e t são paralelas.



Considere agora reta r da figura abaixo:



Definida uma direção, podemos imaginar uma pessoa se deslocando em dois sentidos:______________________________.

Chamamos de vetor uma coleção de setas que tenham:

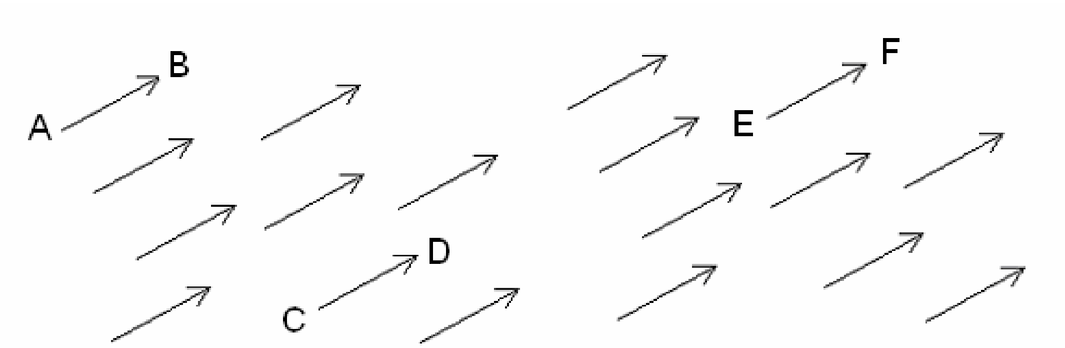
⇒

⇒

⇒

Portanto, setas que não diferem em nenhuma das três características acima **representam o mesmo vetor**.

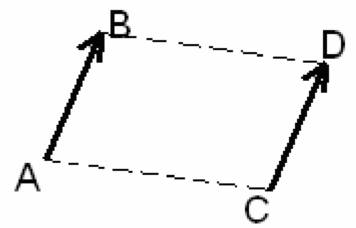
Assim, a idéia de vetor nos conduz a algo do tipo:



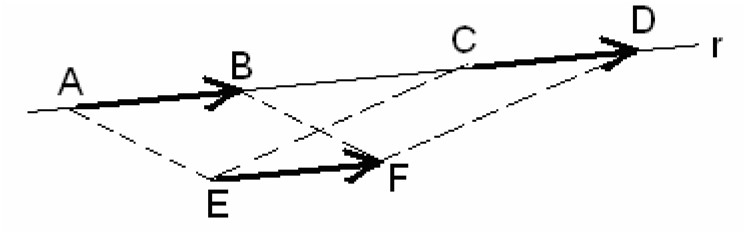
Quando escrevermos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ significa que $\vec{v}$ é representado pela seta $\overrightarrow{AB}$. Porém, qualquer outra seta com o mesmo módulo, direção e sentido, representa também o mesmo vetor $\vec{v}$.

Assim, na figura anterior, temos:

- Vetores e paralelogramo:



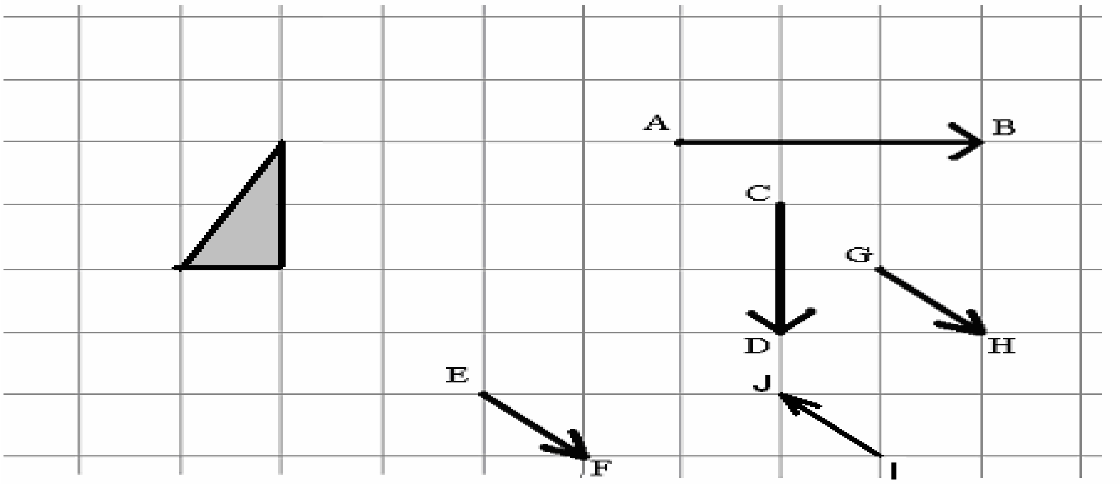
Duas setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ (não apoiadas na mesma reta) são representantes de um mesmo vetor quando o quadrilátero __________ for __________.



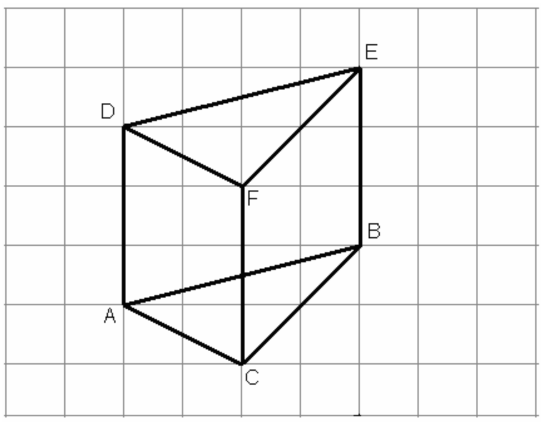
Quando as setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ estão sobre a mesma reta, tomamos uma outra seta $\overrightarrow{EF}$ tal que ABFE seja um paralelogramo. Assim as setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são representantes de um mesmo vetor quando EFDC também é paralelogramo.

Atividades:

1) Fazer a translação do triângulo abaixo segundo cada uma das setas indicadas na figura:

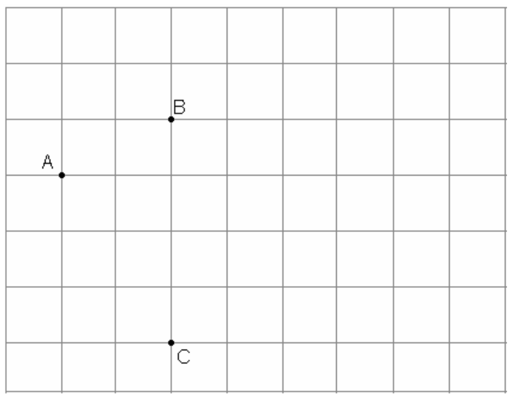


2) Identifique na figura abaixo, as setas que são representantes do mesmo vetor que $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AD}$.



3) A figura abaixo é obtida através da junção de três hexágonos regulares. Quantos vetores distintos os lados destes polígonos determinam?

4) Marque na figura abaixo:



a) o ponto D tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

b) o ponto E tal que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$.

c) o ponto F tal que $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{BA}$.

d) o ponto G tal que $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{CG}$.

5) Verdadeiro ou Falso?

a) (   ) Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Justificativa:

b) (   ) Se $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$, então A = B.

Justificativa:

c) (   ) Se I está a igual distância de A e B, então $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

Justificativa:

d) (   ) Se I é o ponto médio do segmento AB, então $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

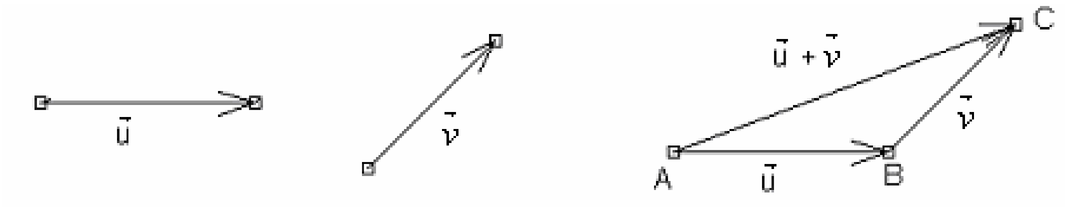
Justificativa:

e) (   ) Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$, então os quatro pontos estão alinhados.

Justificativa:

ENCONTRO 2 – Vetores - Operações geométricas

Adição de vetores:

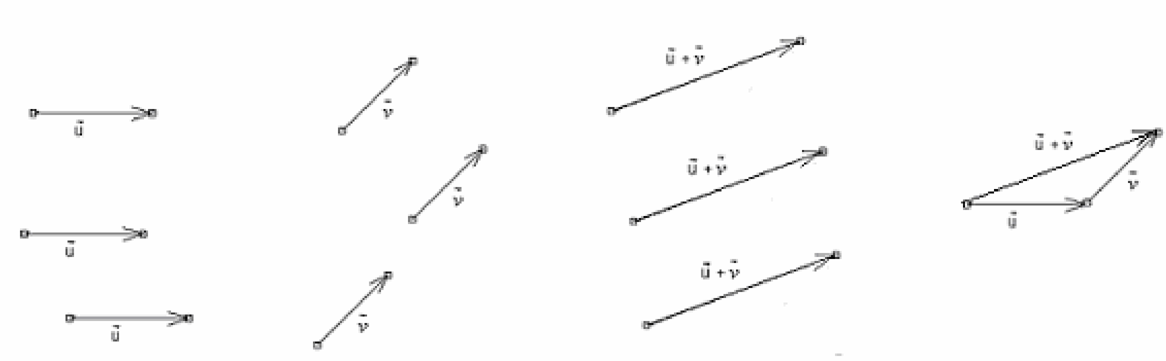


A soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pode ser determinada da seguinte maneira:

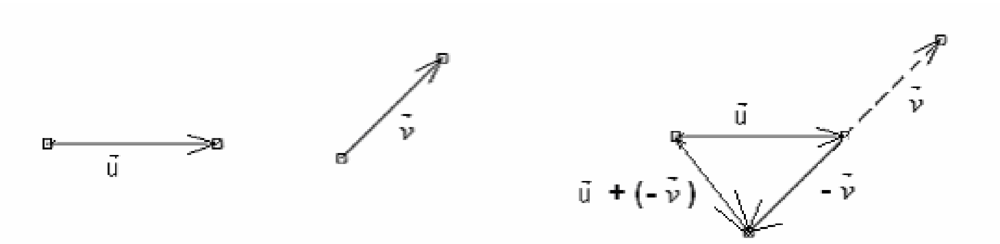
$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

É importante salientar que a soma $\vec{u} + \vec{v}$ dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ independe da escolha de seus representantes:



Diferença de vetores:

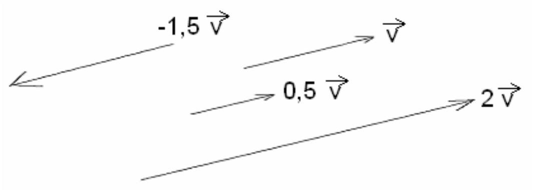


Assim $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Vetores e paralelogramo:

Observe que os vetores soma $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ são as diagonais do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

2.3) Multiplicação de vetor por escalar:



Dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número k $\in$ IR, a multiplicação do número real k pelo vetor $\vec{v}$, é o vetor k. $\vec{v}$ tal que:

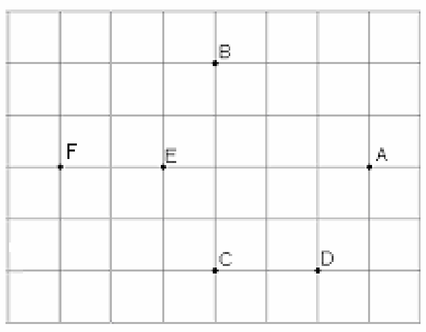
$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

Atividades

1) Encontre na figura abaixo, sem acrescentar novos pontos, um representante do vetor que é igual a:



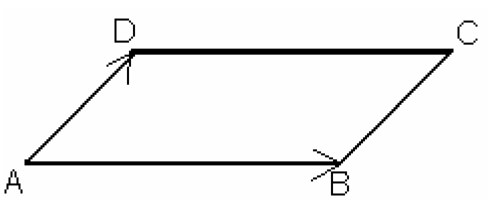
a) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} =$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} =$

c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} =$

d) $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DC} =$

2) No paralelogramo da figura, sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, podemos escrever $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{u}$ e $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$.



Da mesma forma, escreva em função de $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

a) $\overrightarrow{CB} =$

b) $\overrightarrow{DB} =$

c) $\overrightarrow{BD} =$

d) $\overrightarrow{CA} =$

3) Os pontos A, B, C, D e E foram marcados na reta graduada abaixo.

a) Determine o valor da constante real k tal que:

i) $\overrightarrow{AC}$ = k. $\overrightarrow{AB}$

ii) $\overrightarrow{DB}$ = k. $\overrightarrow{AB}$

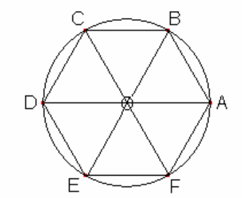
iii) $\overrightarrow{DA}$ = k. $\overrightarrow{BC}$

iv) $\overrightarrow{AD}$ = k. $\overrightarrow{CE}$

v) $\overrightarrow{BC}$ = k. $\overrightarrow{AE}$

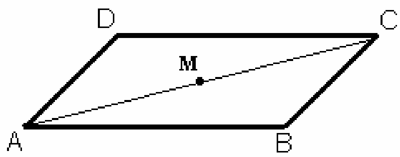
b) Marque na reta graduada os pontos M, N e P tais que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{PE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

4) Determine a soma $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ sendo ABCDEF um hexágono regular inscrito num círculo centro O, conforme indica a figura abaixo:



5) Seja ABCD um paralelogramo e M o ponto médio da diagonal AC, o que equivale a dizer que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$. Queremos mostrar que M é também ponto médio da diagonal DB, isto é $\overrightarrow{BM} =$ _____ .

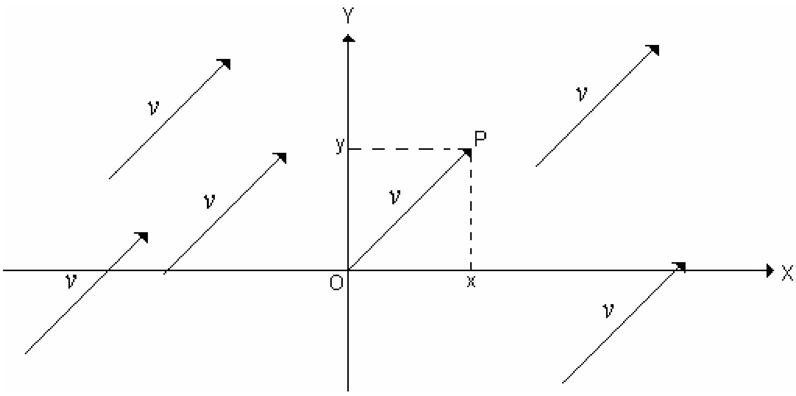
Observe a figura e complete a demonstração desta propriedade:



Pela definição de soma de vetores temos que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}$; mas temos que $\overrightarrow{CM} =$ _____ (pois M é ponto médio de AC) e $\overrightarrow{BC} =$ ____ (pois ABCD) é paralelogramo, então $\overrightarrow{BM} =$ ____+ ____ =____+ ____ = ____.

ENCONTRO 3 – As coordenadas do vetor e as operações algébricas

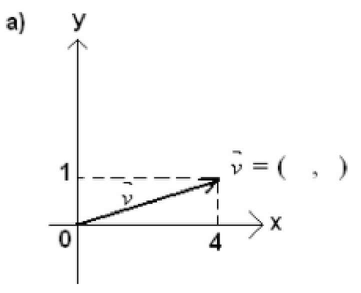
O vetor $\vec{v}$ é representado por diferentes setas no plano cartesiano.

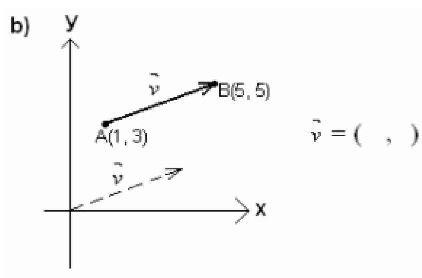


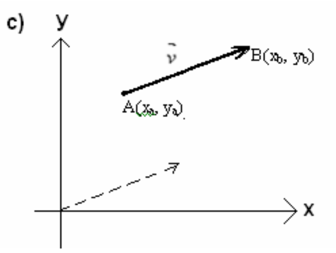
As coordenadas do vetor são definidas como as coordenadas da extremidade da seta representante que possui origem na origem do sistema de coordenadas, e escrevemos $\vec{v}$ = (x, y).

Essa escolha se torna muito natural, pois nela está toda informação do efeito de translação que é armazenado no par de coordenadas do vetor: a primeira coordenada indica translação paralela ao eixo “ox” (para direita, se a coordenada é positiva, e para esquerda, se a coordenada é negativa); a segunda coordenada indica a translação paralela ao eixo “oy” (para cima, se a coordenada é positiva, e para baixo, se a coordenada é negativa).

Vejamos as coordenadas de $\vec{v}$ nos seguintes casos:



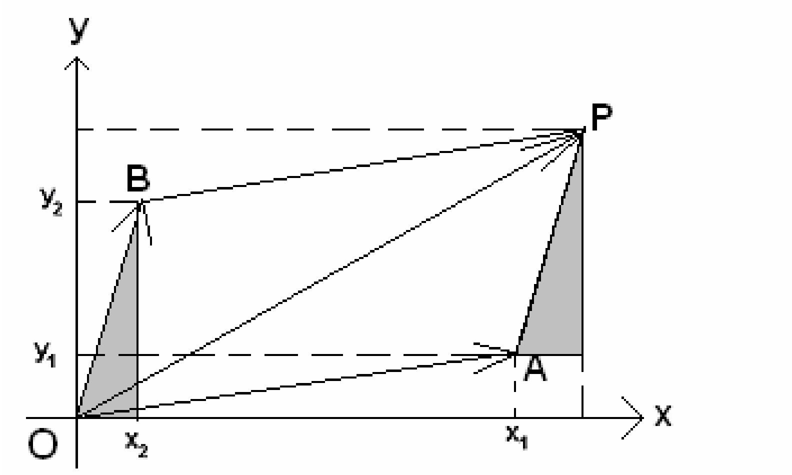




<u>As operações com vetores na forma algébrica</u>

Soma de vetores:

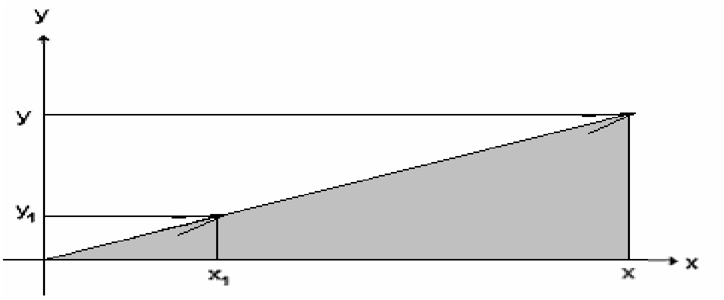
Sendo $\vec{u}$ = (x_1, y_1) e $\vec{v}$ = (x_2, y_2), quais as coordenadas de $\vec{u}+\vec{v}$?



Assim, se $\vec{u}$ = (x_1, y_1) e $\vec{v}$ = (x_2, y_2), então $\vec{u}$ + $\vec{v}$ = (,).

Multiplicação de vetor por escalar:

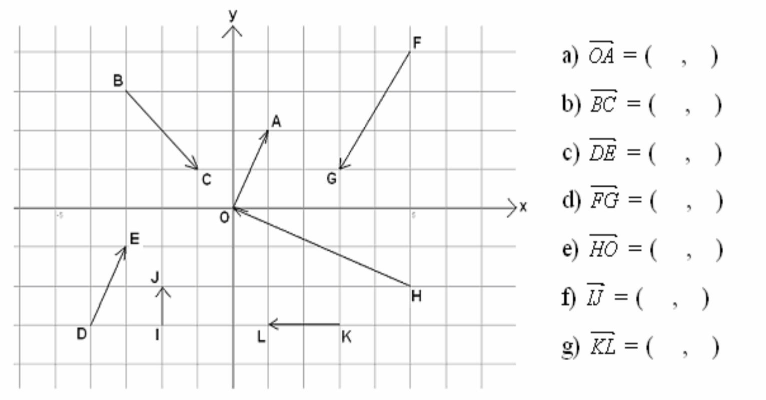
Sendo $\vec{u}$ = (x_1, y_1) e k $\in$ IR, quais as coordenadas de k. $\vec{u}$?



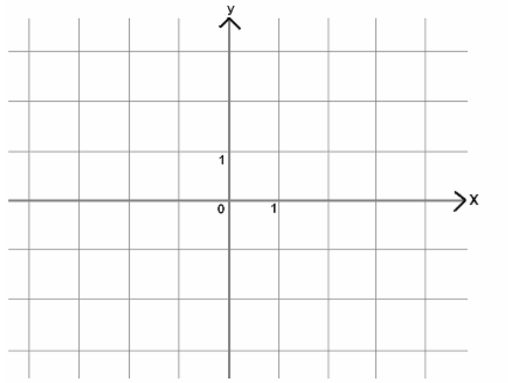
Assim, se $\vec{v}$ = (x_1, y_1), então k.$\vec{v}$ = (,).

Atividades:

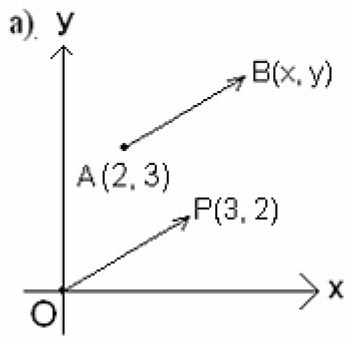
1) Encontre as coordenadas dos vetores representados pelas diferentes setas:

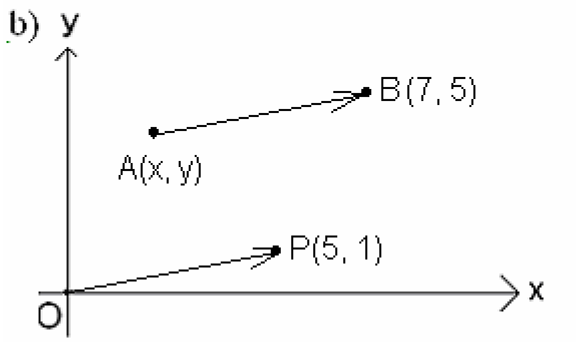


2) Se $\vec{v}$ = (2, 1) desenhe setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ representantes deste vetor $\vec{v}$ tais que $\overrightarrow{AB}$ esteja no segundo quadrante e $\overrightarrow{CD}$ esteja no quarto quadrante. Determine as coordenadas dos pontos A, B, C e D.

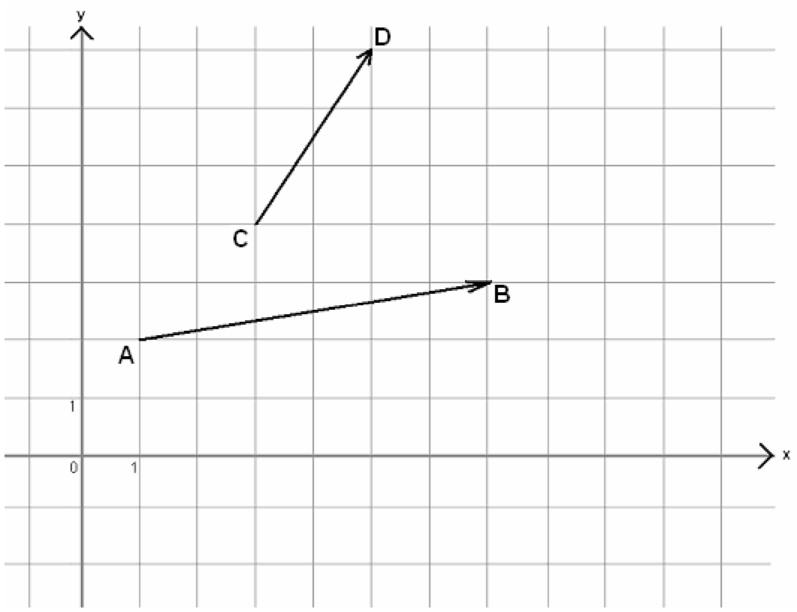


3) Determine x e y sendo $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$ em cada caso:





4) Observe a figura:



a) Desenhe um representante de $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

b) Determine as coordenadas de $\vec{u}$.

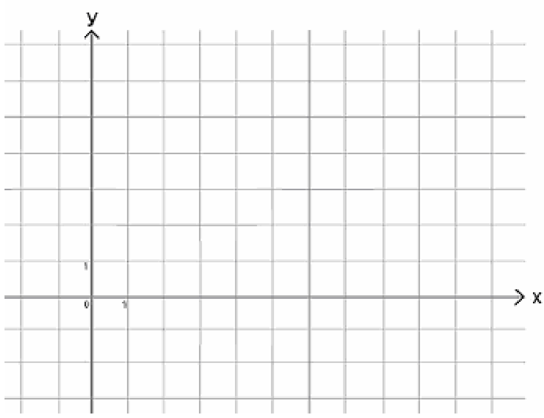
c) Desenhe um representante de $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$.

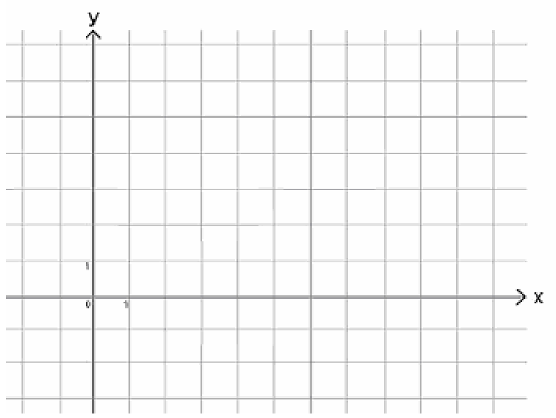
d) Determine as coordenadas de $\vec{v}$.

5) Sendo $\vec{u}$ = (3, 1) e $\vec{v}$ = (2, 4), determine o que é pedido (representando as operações no sistema de coordenadas sempre que possível).

a) $\vec{u} + \vec{v}$ = (,).

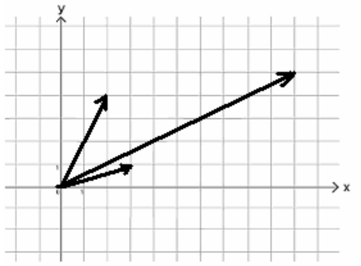
b) $8.\vec{u} - .0{,}5\vec{v}$ = (,).



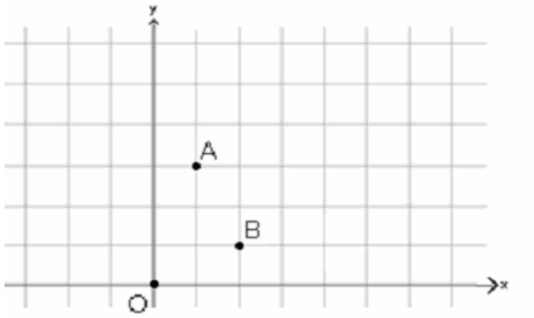


6) Sendo $\vec{u}$ = (3, 1) e $\vec{v}$ = (2, 4), determine as constantes k_1 e k_2 tais que

$k_1.\vec{u} + k_2.\vec{v}$ = $\vec{w}$, onde $\vec{w}$ = (10, 5).



7) Observe a figura abaixo e responda o que é pedido:



a) **represente** no plano **e determine as coordenadas** de cada um dos pontos:

(i) P, sendo $\overrightarrow{OP}$ = $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$;

(ii) Q, sendo $\overrightarrow{OQ}$ = $\overrightarrow{OA} + 2.\overrightarrow{OB}$;

(iii) S, sendo $\overrightarrow{OS}$ = $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$;

(iv) T, sendo $\overrightarrow{OT}$ = $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.

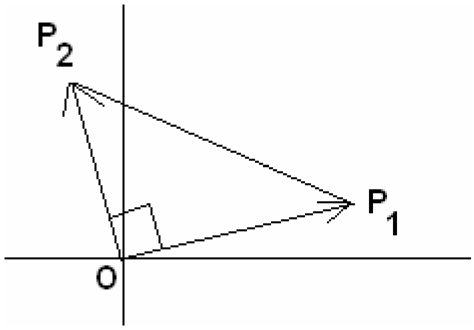
b) Sendo R(4, $\frac{9}{2}$) determine k $\in$ IR tal que $\overrightarrow{OR}$ = $\overrightarrow{OA} + k.\overrightarrow{OB}$.

b) os pontos marcados no item a pertencem a uma mesma reta. O ponto (100, -95) pertence a essa reta?

c) qual a relação entre as coordenadas de um ponto P(x, y) para que ele pertença à reta?

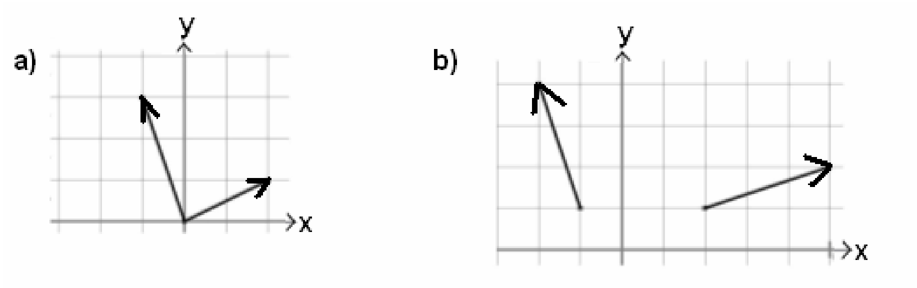
ENCONTRO 4 – A ortogonalidade de vetores e a equação da reta

O que deve acontecer para que os vetores $\vec{u}$ = (a, b) e $\vec{v}$ = (c, d) sejam ortogonais?



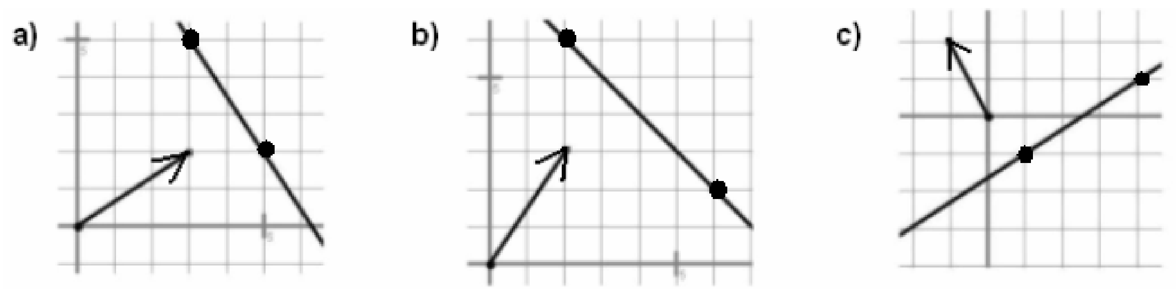
Atividades:

1) Verifique se são ortogonais os vetores dados pelas setas abaixo:



2) Encontre as coordenadas de dois vetores que sejam ortogonais a $\vec{v}$ = (2, 1).

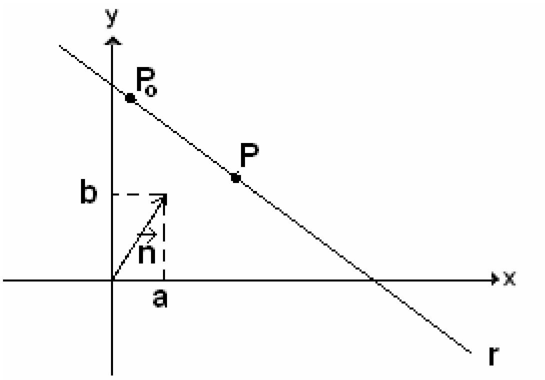
3) Verifique se as retas são ortogonais aos vetores:



ENCONTRO 5 – A releitura da equação da reta sob a luz da ortogonalidade de vetores

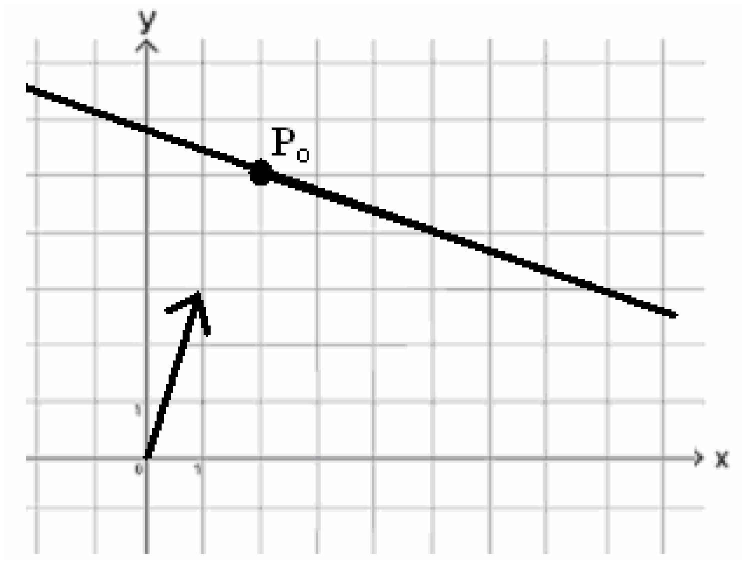
Através da ortogonalidade de vetores também é possível descrevermos as coordenadas de todos os pontos de uma reta. Observe:

Dado um vetor $\vec{n}$ = (a, b) e o ponto $P_o(x_o, y_o)$ existe uma única reta r que passa por P e é ortogonal à $\vec{n}$.



Atividades:

1) Considere $\vec{v}$ = (1, 3) e a reta r que passa por $P_o(2, 5)$ e é ortogonal a $\vec{v}$.



a) Se P(x, y) é um ponto qualquer da reta então os vetores $\vec{v}$ = (1, 3) e $\overrightarrow{P_0P}$ = (________, _______) são ____________. Usando a condição de ortogonalidade, encontre a equação da reta r.

b) Escreva as equações de outras duas retas que sejam ortogonais ao vetor $\vec{v}$ = (1, 3). Represente essas retas graficamente mostrando, em cada caso, o ponto de intersecção com o eixo y.

2) Represente graficamente as retas e seus vetores normais para determinar se os sistemas abaixo têm solução única, têm infinitas soluções ou não tem solução.

a) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -2x - 4y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 6x + 2y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 2x + 6y = 12 \end{cases}$

3) Complete:

a) As retas de equações x + 2y = 1 e – 2x – 4y = 3 __________ (têm/ não têm) a mesma direção, pois os vetores ortogonais a elas, n_1 = (__,__) e n_2 = (__,__), ___________ (têm/ não têm) a mesma direção. Como as retas são ________________(distintas/ idênticas) o sistema de equações $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -2x - 4y = 3 \end{cases}$ _______________ (tem uma única solução/ tem infinitas soluções/ não tem solução).

b) As retas de equações 3x + y = 1 e x + $\frac{1}{3}$y = $\frac{1}{3}$ __________ (têm/ não têm) a mesma direção, pois os vetores ortogonais a elas, n_1 = (__,__) e n_2 = (__,__), ___________ (têm/ não têm) a mesma direção. Como as retas são ________________(distintas/ idênticas) o sistema de equações $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3} \end{cases}$ _______________ (tem uma única solução/ tem infinitas soluções/ não tem solução).

c) As retas de equações 3x + 2y = 1 e 2x – 4y = 3 __________ (têm/ não têm) a mesma direção, pois os vetores ortogonais a elas, n_1 = (__,__) e n_2 = (__,__), ___________ (têm/ não têm) a mesma direção. Como as retas são ________________ (distintas/ idênticas) o sistema de equações $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases}$ _______________ (tem uma única solução/ tem infinitas soluções/ não tem solução).

4) Considere r e s duas retas de equações $a_1 x + b_1 y = c_1$ e $a_2 x + b_2 y = c_2$. Determine o que deve acontecer com os vetores n_1 = (a_1, b_1) e n_2 = (a_2, b_2), e com as constantes c_1 e c_2, para que as retas:

a) possuam um único ponto de intersecção.

b) possuam infinitos pontos de intersecção.

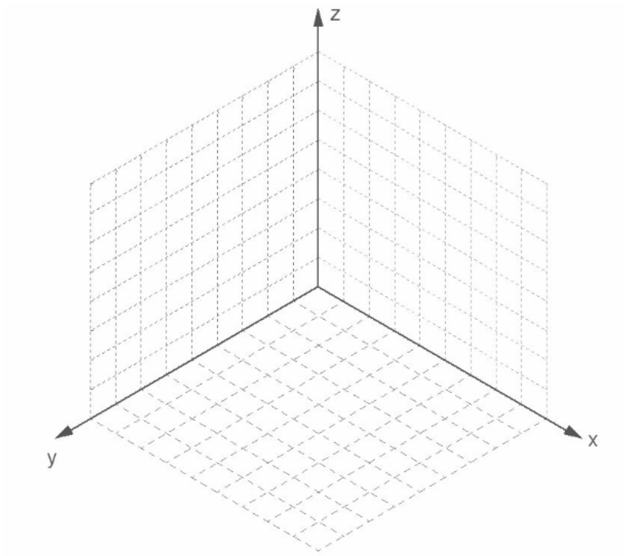
c) não possuam pontos de intersecção.

Encontro 6 – Os vetores no espaço e as equações paramétricas da reta

<u>O sistema de coordenadas no espaço</u>:

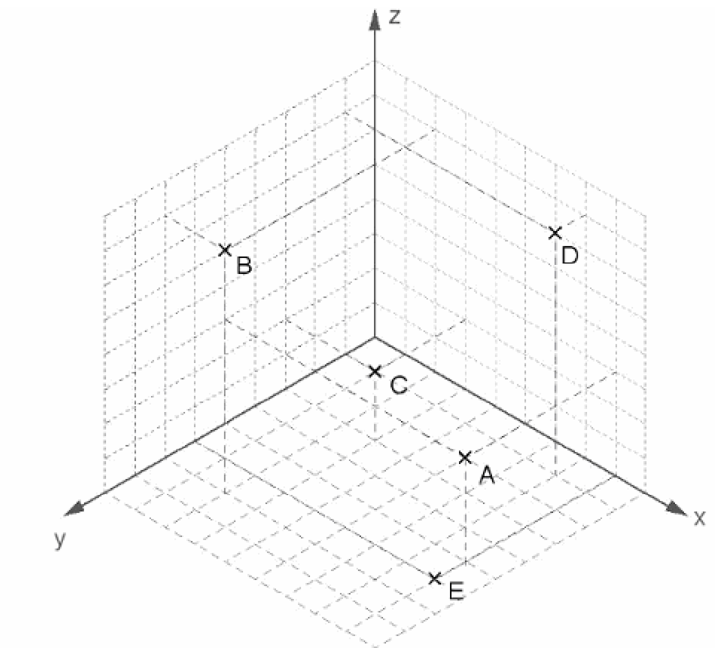
É um sistema de coordenadas formado por três eixos OX, OY e OZ, ortogonais e com a mesma origem O. Com este sistema, é possível associar cada ponto do espaço a um trio (x, y, z) de números reais.

Vejamos como localizar no sistema de coordenadas o ponto P(5, 3, 4):



Atividades

1) Determine as coordenadas de cada um dos seguintes pontos:



a) A (, ,)

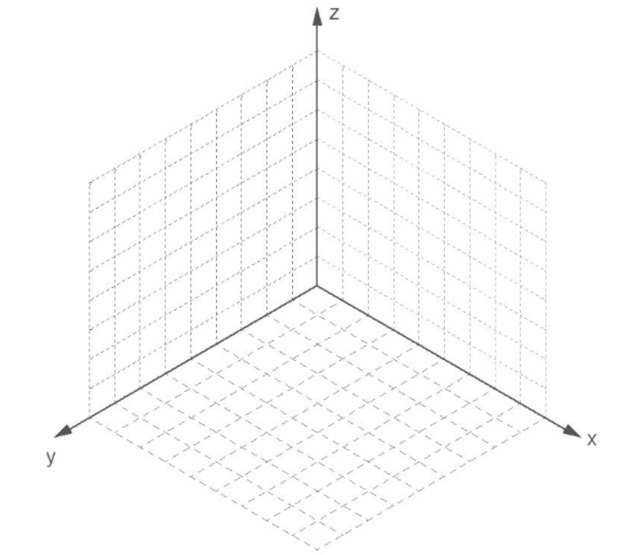
b) B (, ,)

c) C (, ,)

d) D (, ,)

e) E (, ,)

2) Represente P(5, 4, 6) no sistema de coordenadas da figura abaixo e responda:



a) Qual a distância de P ao plano xy?

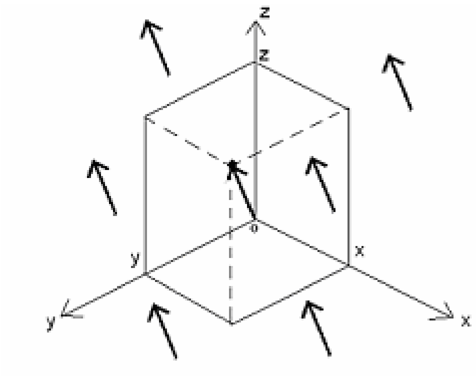
b) Qual a distancia de P ao plano xz?

c) Qual a distancia de P ao plano yz?

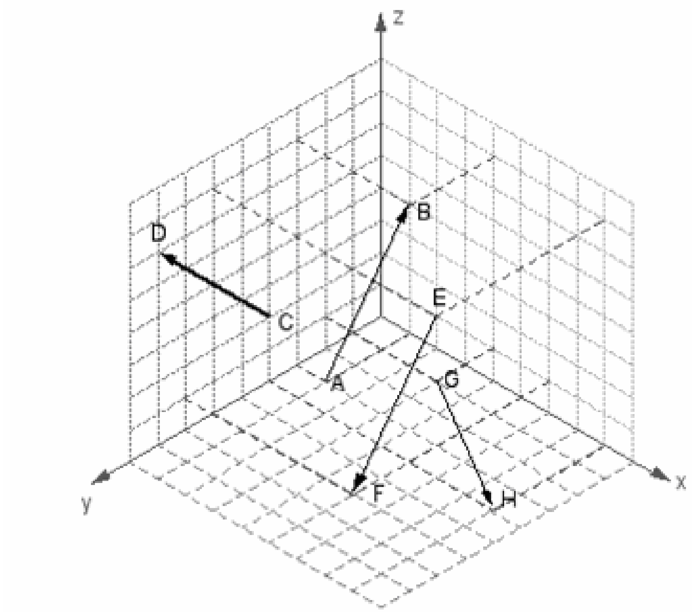
d) Qual a distância de P até o eixo x?

e) Qual a distância de P até a origem?

3) No espaço, o vetor $\vec{v}$ também pode ser representado por diferentes setas. Assim como no plano, as coordenadas de $\vec{v}$ são as coordenadas da extremidade da seta com origem em (0, 0, 0).



Na figura abaixo, encontre as coordenadas dos vetores representados pelas diferentes setas:



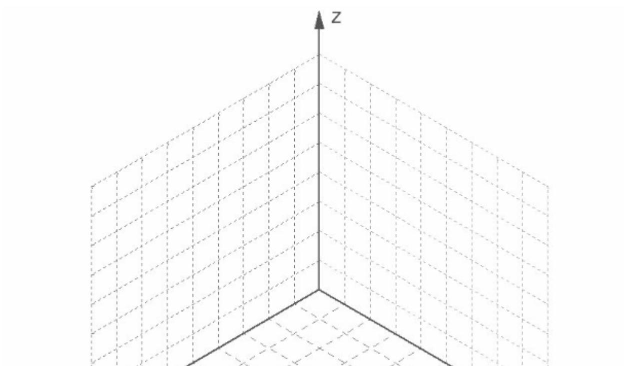
$\overrightarrow{AB} = (\quad , \quad)$

$\overrightarrow{CD} = (\quad , \quad)$

$\overrightarrow{EF} = (\quad , \quad)$

$\overrightarrow{GH} = (\quad , \quad)$

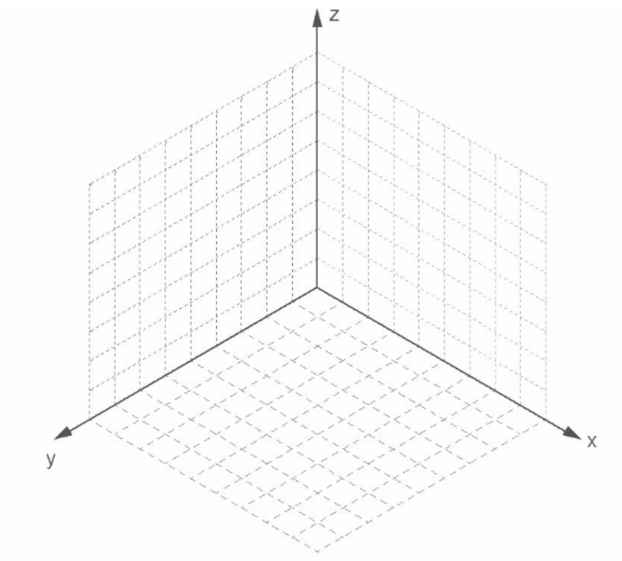
4) Represente os pontos A(5, 4, 0) e B(7, 5, 4) no sistema de coordenadas abaixo e determine:



a) as coordenadas de $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

b) as coordenadas de D, sendo C = (1, 4, 2) e $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

5) Represente os pontos A = (1, 1, 4) e ponto B = (4, 3, 2) e a seta $\overrightarrow{OB}$, onde O é a origem do sistema.



Represente e determine as coordenadas de cada um dos pontos:

(a) P, sendo $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

(b) Q, sendo $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + 2.\overrightarrow{OB}$;

(c) S, sendo $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$;

(d) T, sendo $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.

(e) U, sendo $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

Como poderíamos descrever as coordenadas (x, y, z) dos pontos da reta r que passa por A e tem direção dada pelo vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$?

- A equação da reta no espaço:

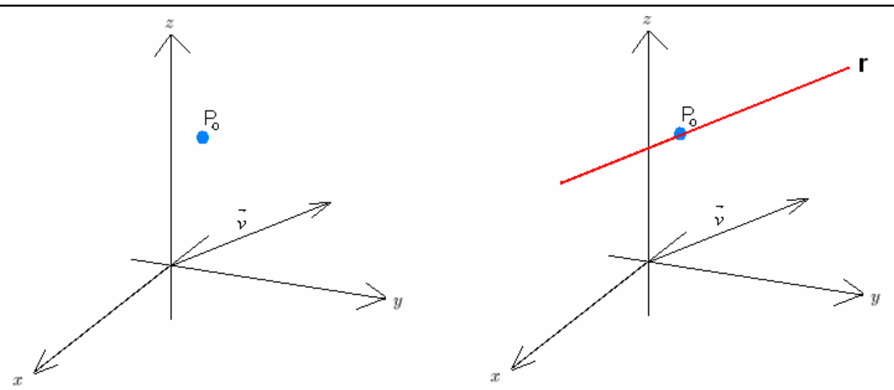


Figura 29

Dado o ponto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ e o vetor $\vec{v} = (a, b, c)$, existe uma única reta que passa por P_o e tem direção dada por $\vec{v}$ (figura 29).

Um ponto P(x, y, z) vai estar na reta se e somente se $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_o} + t \cdot \vec{v}$, com $t \in IR$, conforme na figura 30.

Assim, temos:

$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + t.(a, b, c)$

$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + (t.a, t.b, t.c)$

$(x, y, z) = (x_o + t.a, y_o + t.b, z_o + t.c)$

Da onde vem que $\begin{cases} x = x_o + t.a \\ y = y_o + t.b \\ z = z_o + t.c \end{cases}$,

para todo $t \in IR$.

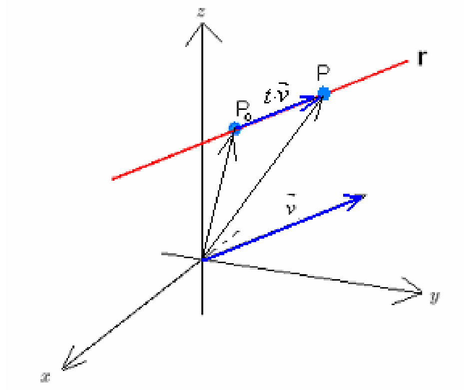


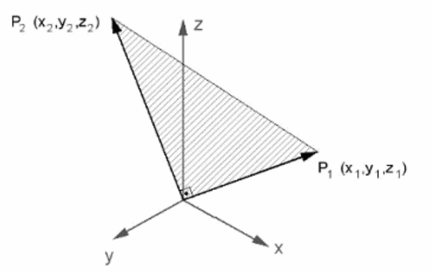
Figura 30

As equações acima são chamadas de equações paramétricas da reta r.

Encontro 7– A ortogonalidade de vetores no espaço e a equação do plano

A ortogonalidade de vetores no espaço

De modo similar ao que fizemos no plano, podemos no espaço concluir que $\vec{v}$ = (x_1, y_1, z_1) e $\vec{w}$ = (x_2, y_2, z_2) são ortogonais se e somente se $x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2 = 0$.

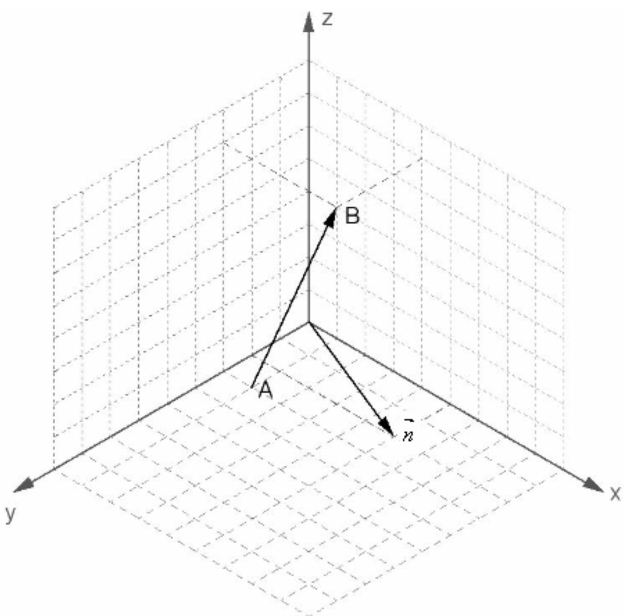


1) Determine:

a) se os vetores $\vec{v}$ = (1, 3, 5) e $\vec{w}$ = (2, 1, -1) são ortogonais.

b) as coordenadas de dois vetores que sejam ortogonais a $\vec{v}$ = (1, 3, 5).

2) Verifique se $\vec{n}$ e $\vec{v}$ = $\overrightarrow{AB}$ são ortogonais:



A equação do plano

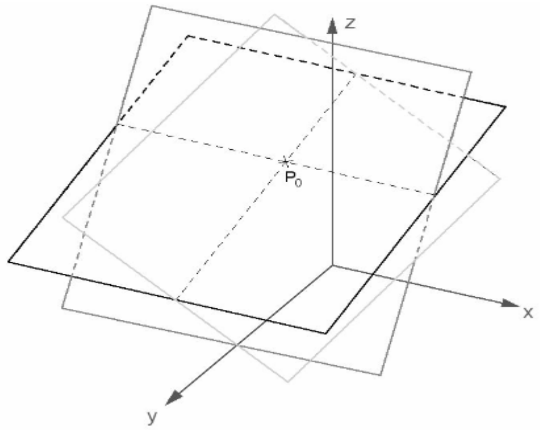


figura 1

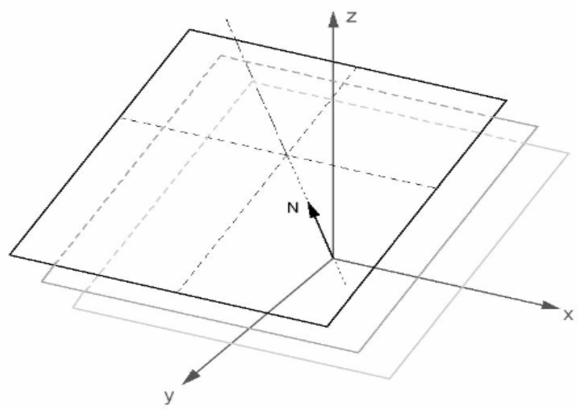
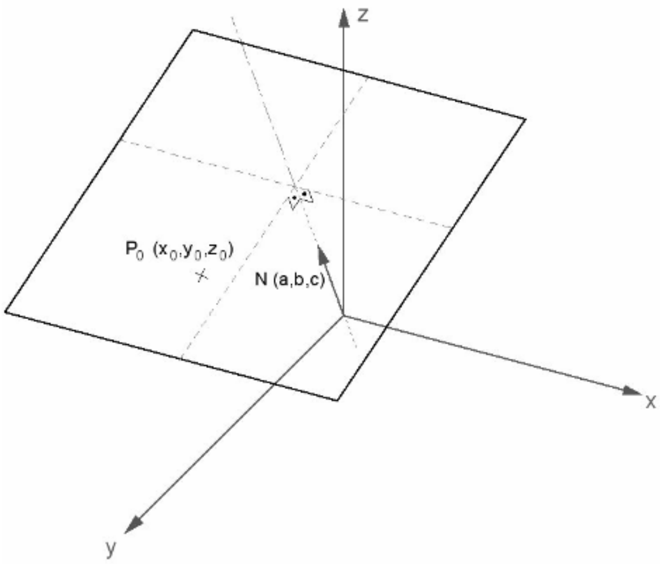
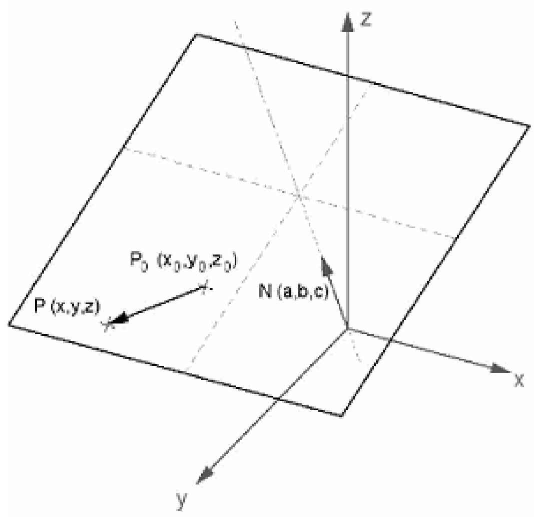


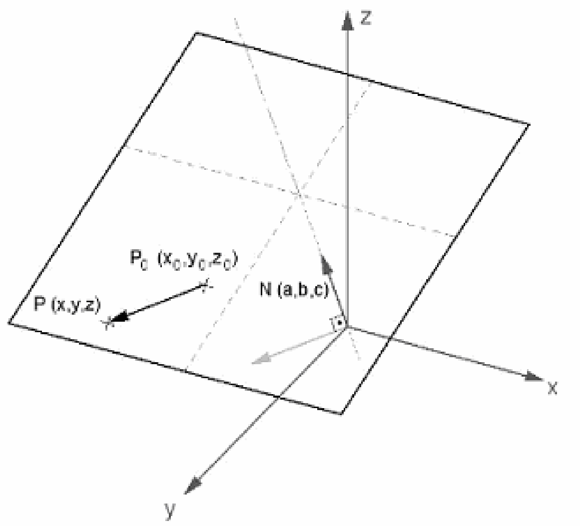
figura 2

Dado um ponto P_0, existem infinitos planos que o contém (figura 1). Dado um vetor $\vec{n}$, existem infinitos planos que são ortogonais a $\vec{n}$ (figura 2). Porém, dado um ponto P_0 e um vetor $\vec{n}$, existe um único plano que é ortogonal à $\vec{n}$ passando por P_o.



Qual a condição para que um ponto P(x, y, z) pertença a esse plano?

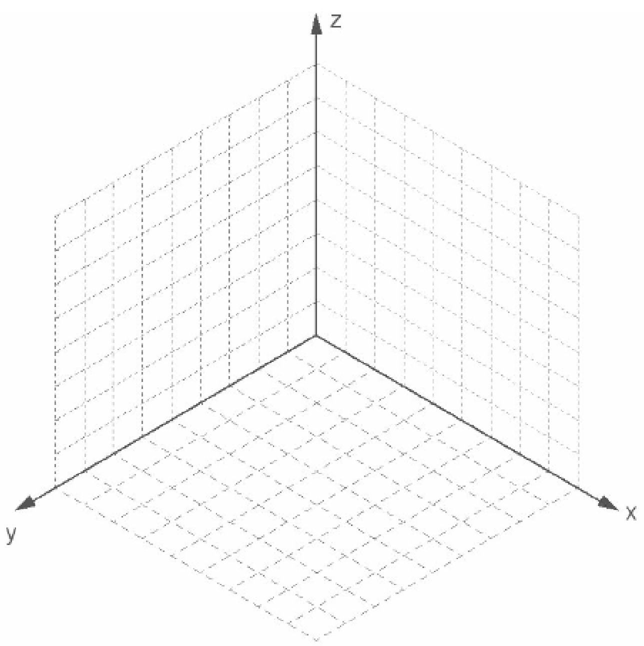




Atividades

1) Encontre a equação do plano que passa por (3, 2, 1) e tem vetor normal $\vec{n}$ = (3, 2, -4).

2) Considere o plano α de equação 3x + 2y + z = 6.



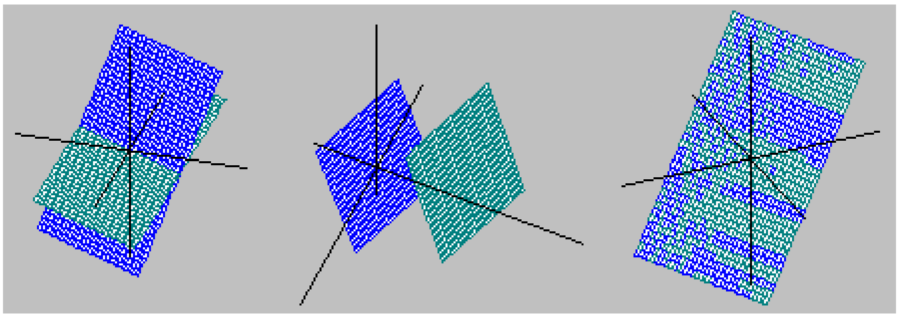
a) Usando os pontos de intersecção com os eixos, represente α graficamente.

b) Determine as coordenadas de um vetor normal ao plano α e represente-o graficamente.

c) Determine a equação de um plano paralelo à α que passa por P(1, -1, 2).

3) Determine a equação de um plano perpendicular ao plano de equação 2x + y + 5z = 4.

4) Observe as posições relativas entre dois planos e determine:



a) um exemplo de equações de dois planos que se encontrem segundo uma reta.

b) um exemplo de equações de dois planos paralelos.

c) um exemplo de equações de dois planos coincidentes.

5) Analise qualitativamente quanto às soluções os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -2x-4y-6z=-2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+y-z=1 \\ 6x+2y-2z=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+3y+2z=10 \\ 2x-y+z=-1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+3y-z=10 \\ 2x+6y-2z=12 \end{cases}$

ANEXO IV – O objeto de aprendizagem “Vetores e Operações” e o vídeo