UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL – UFRGS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Daniel da Rosa Mesquita

Resolução de Problemas Relacionados à Teoria de Grafos no Ensino Fundamental

Porto Alegre

2015

Daniel da Rosa Mesquita

Resolução de Problemas Relacionados à Teoria de Grafos no Ensino Fundamental

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de matemática da Universidade federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do titulo de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Marilaine de Fraga Sant'Ana

Porto Alegre

2015

Daniel da Rosa Mesquita

Resolução de Problemas Relacionados à Teoria de Grafos no Ensino Fundamental

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de matemática da Universidade federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do titulo de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª. Drª Marilaine de Fraga Sant'Ana

Banca examinadora

____

Profª. Drª Elisabete Zardo Búrigo (IM-UFRGS)

____

Profª. Drª Helena Noronha Cury (UNIFRA)

____

Prof. Dr Vilmar Trevisan (IM-UFRGS)

AGRADECIMENTOS

Ao concluir este trabalho, quero agradecer inicialmente à minha orientadora, Professora Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana, por confiar em mim e no meu potencial. Além disso, quero agradecer à professora pelas contribuições fundamentais para que essa dissertação tomasse forma e se aproximasse daquilo que consideramos um bom trabalho.

Aos membros da banca, Professora Dra. Helena Noronha Cury, Professora Dra. Elisabete Zardo Búrigo e Professor Dr. Vilmar Trevisan, por aceitarem o convite e disporem parte do seu tempo para ler o resultado final de nossa pesquisa, que é esse trabalho.

Aos colegas de Mestrado, Diego, João, Mateus e ao meu primo Leandro, pela compreensão e pelo apoio no decorrer do Mestrado, principalmente nesta última etapa.

Quero agradecer também aos meus colegas e minhas supervisoras, na escola onde trabalho, pois com certeza eles têm um peso fundamental para essa conquista que se aproxima.

Aos meus pais, irmãos, avó, padrinhos e demais familiares e amigos, que me fizeram acreditar que esse sonho era possível, o sonho em que, um menino que cresceu em meio a muitas dificuldades podia se formar na universidade federal e, posteriormente, concluir o Mestrado em Ensino de Matemática também pela mesma universidade, afastando de mim os tempos difíceis da infância.

Por fim, gostaria de agradecer a família da minha esposa e, em especial, a minha esposa Luana que, durante esses quase seis anos que estamos juntos, me ajudou, me compreendeu, me esperou e sempre acreditou que eu chegaria lá, lá onde eu sempre achei que merecia estar, entre os Mestres em Ensino em Matemática da UFRGS.

Dedico esse trabalho à Luana que, hoje e sempre, será o meu porto seguro e meu grande amor.

RESUMO

O objetivo desta dissertação é apresentar uma pesquisa e investigação que validam uma proposta de sequência didática que utiliza a perspectiva metodológica da Resolução de Problemas para ensinar conceitos relacionados à Teoria de Grafos na escola básica, mais especificamente, no Ensino Fundamental. Para tanto, a metodologia de pesquisa escolhida foi o Estudo de Caso, de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006), Ventura (2007) e Gil (1995). O referencial teórico é baseado nos trabalhos do GTERP[1], de Onuchic e Allevato (1999) e (2004), Polya (2006), Pozo (1998), Santos (2002) e De Maio (2009), bem como os PCNs[2] e outros artigos/livros relacionados à Teoria de Grafos e à Resolução de Problemas. Apresentaremos uma prática realizada com cinco grupos de uma turma do sétimo ano do Ensino Fundamental, em uma escola particular de Porto Alegre, no ano de 2014. Concluímos que a escolha desse tópico da Matemática aliado à perspectiva metodológica da Resolução de Problemas contribui para o desenvolvimento intelectual e matemático, bem como para a formação de um indivíduo mais autônomo e crítico.

Palavras-chave:
Teoria de Grafos - Resolução de Problemas – Educação Matemática – Aspectos Históricos – Contextualização – Perspectiva Metodológica- Estudo de Caso.

[1] Criado em 1992, Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, GTERP, desenvolve suas atividades no Departamento de Matemática da UNESP-Rio Claro.
http://www2.rc.unesp.br/gterp/?q=quem-somos
[2] Parâmetros Curriculares Nacionais.

ABSTRACT

The aim of this dissertation is to show a research and investigation that validate a didactic propose of sequence that use the methodological perspective of Problem Solving to teach concepts related to Graph Theory in primary school, more specifically, in Elementary School. For this, the research methodology chosen was Case Study according to Fiorentini and Lorenzato (2006), Ventura (2007) and Gil (1995). The theoretical approach is based on the work of GETERP, Onuchic and Allevato (1999) and (2004), Polya (2006), Pozo (1998), Santos (2002) and De Maio (2009), as well as the National Curriculum Parameters (PCNs), books and articles dealing with Graph Theory and the Problem Solving. We will introduce a practice carried out with five groups of a class of seventh year of primary school, in a private school of Porto Alegre, in 2014. We conclude that the choice of this topic of mathematics combined with methodological perspective of Problem Solving contribute to the intellectual and mathematician development, as well as the formation of a more autonomous and critical individual.

Keywords: Graph Theory – Problem Solving - Mathematics Education - Historical Aspects - Background - Methodological Perspective – Case Study.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Tive a oportunidade de voltar ao meio acadêmico no ano de 2013, após dois anos do término da minha graduação, desta vez como mestrando no programa de pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Para mim, e com certeza para muitos colegas, tivemos a possibilidade de fortalecermos nossa prática, uma vez que discutimos e refletimos sobre o Ensino de Matemática e aprendemos uns com os outros por meio da troca de experiências. Foram muitas disciplinas voltadas para o ensino, foram muitas análises de livros didáticos, foram muitos relatos de experiência, foram muitos os debates que englobam desde o ensino fundamental, médio, passando também pelo vestibular e encerrando no ENEM. As vivências e experiências trocadas pelo nosso grupo de professores mestrandos, bem como com os professores orientandos foram riquíssimas e, posso dizer hoje com toda a certeza, que contribuíram profundamente para o nosso desenvolvimento como docente e indivíduo.

Quando comecei essa pesquisa, com a ajuda da minha orientadora, professora Marilaine de Fraga Sant’ana, uma das minhas principais preocupações era saber se ensinar conceitos que não são vistos na escola básica, como os explorados pela Teoria de Grafos, utilizando alguma perspectiva metodológica, possibilitaria aos alunos uma compreensão sobre os aspectos históricos que deram origem ao seu estudo, sobre a necessidade desse conhecimento no seu cotidiano, bem como aumentar a suas capacidades de interpretar e resolver problemas.

Assim que definimos nossa metodologia de pesquisa que é o Estudo de Caso e o tópico da Matemática que iríamos abordar, ainda nos faltava uma perspectiva metodológica de ensino que possibilitaria explorar atividades que fizessem parte do cotidiano do aluno. Foi então que, após algumas conversas entre orientadora e orientando, decidimos utilizar a Resolução de Problemas como perspectiva metodológica para que tal conteúdo, o da Teoria de Grafos, fosse trabalhado com um determinado grupo de alunos, a partir de um Estudo de Caso, para que talvez seja inserido no currículo do Ensino Fundamental.

A partir de então, tomamos como referenciais teóricos Onuchic e Allevato (1999, 2004), Polya (2006), Pozo (1998) e Santos (2002), bem como os PCNs e outros artigos e livros relacionados à Teoria de Grafos e à Resolução de Problemas.

Nesse trabalho analisamos uma sequência didática, fruto dessa pesquisa, que busca viabilizar o contato do aluno da escola básica, mais especificamente, o aluno do Ensino Fundamental, com conceitos ligados à Teoria de Grafos a fim de contribuir para sua formação matemática e intelectual. Pensamos nesse tópico da Matemática para nossa pesquisa e posteriormente desenvolvemos a sequência didática, que está presente nessa dissertação, por acreditar que o ensino de matemática vem "levando um duro golpe" do sistema de ensino atual, uma vez que hoje, muitas vezes, professores valorizam apenas o resultado em uma prova, fruto esse, de um trabalho mecânico e a memorização de técnicas a serem utilizadas em sala de aula em vez de possibilitar ao aluno o exercício de pensar e construir um significado para o que se estuda.

Penso que um professor, ao ensinar Matemática, poderia fomentar alguns aspectos históricos, apresentando biografias de alguns Matemáticos e esclarecendo de que forma os Matemáticos do passado e os do nosso tempo pensaram e pensam aquilo que está se ensinando/aprendendo em sala de aula. Além de aspectos históricos para contextualizar o estudo da Matemática é necessário também trabalhar com problemas que explorem os conceitos aprendidos em sala de aula aplicados ao mundo real e, não só ensinar por ensinar, privilegiar memorizações e não possibilitar ao aluno uma melhor aprendizagem.

Sendo assim, nossa intenção é que, por meio da Resolução de Problemas, possamos explorar melhor as situações curiosas e interessantes, como os problemas apresentados na Teoria de Grafos.

Acreditamos que com a aliança entre a Resolução de Problemas e a Teoria de Grafos é possível trabalhar conceitos matemáticos de forma contextualizada com a realidade e experiências dos alunos, deixando a Matemática mais interessante, além é claro, de possibilitar novas descobertas.

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. ([POLYA, 2006, prefácio]).

Este trabalho está dividido em cinco capítulos. O primeiro apresenta o Referencial Teórico Matemático que fundamenta nossa sequência de atividades. Para fazer tal fundamentação resgatamos os problemas históricos que originaram a Teoria de Grafos. O segundo capítulo apresenta o Referencial Teórico que fundamenta a Resolução de Problemas como perspectiva metodológica, com enfoque maior nos trabalhos Polya (2006), Pozo(1998) e no GTERP (2004). O terceiro capítulo apresenta os objetivos e a metodologia de pesquisa, com o Método do Estudo de Caso, de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006), Ventura (2007) e Gil (1995). O quarto capítulo apresenta a prática/sequência didática aplicada por mim, detalhando cada uma das etapas/aulas, apresentando os objetivos e as expectativas. Além disso, ao final de cada uma dessas etapas há uma análise relacionando-as com os referenciais estudados e, principalmente, relacionando-as com o roteiro metodológico de Resolução de Problemas escolhido para a prática. Por fim, o quinto capítulo apresenta as considerações finais, mostrando os resultados da pesquisa e sugestões.

Temos a confiança de que a pesquisa realizada, o planejamento e o produto final de nosso trabalho, que é a sequência didática, podem propiciar aos professores de hoje ou aos futuros professores uma possibilidade nova, que é trabalhar a Teoria de Grafos no Ensino Fundamental aliada à perspectiva metodológica da Resolução de Problemas.

Particularmente, acredito que ser professor é muito mais que conhecer uma ciência e saber ensiná-la aos seus alunos. Ser professor é sim saber ensinar, mas também é aquele “ser” dentro da escola que é capaz de tocar o coração dos jovens seja com palavras, olhares ou ensinamentos. Assim, penso que o docente deve estar sempre discutindo e refletindo tanto com seus colegas quanto alunos, para que o ensino e a aprendizagem estejam sempre melhorando.

1 TEORIA DE GRAFOS

Este capítulo apresenta a fundamentação teórica matemática de nosso trabalho. Apesar de procurarmos conceitos acerca da Teoria de Grafos em muitos trabalhos e artigos científicos que estão disponibilizados pela internet ou em diversos livros que tratam desse tópico, nosso embasamento teórico focaliza-se, principalmente, nos livros: *Introdução à Análise Combinatória,* de Santos (2002) e *Fundamentos de Matemática, de* Maio (2009). Além desses livros, também buscamos analisar e trabalhar com a dissertação de mestrado intitulada *Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível, de* Malta *(2008).*

Nosso objetivo com esse capítulo é sistematizar de maneira simples alguns dos conceitos da Teoria de Grafos, especialmente, aqueles que foram abordados em nossa sequência didática. Gostaríamos de lembrar que esse não é um material definitivo, que contém todo o desenvolvimento dessa Teoria, mas sim um material que servirá de base e será capaz de municiar o professor com o conhecimento necessário para abordar tais conceitos na escola básica.

É importante ressaltar que existem muitos trabalhos nesse ramo da Matemática e que o professor ou o leitor em geral, poderá pesquisar mais sobre esse tópico da Matemática a fim de enriquecer suas ideias e noções sobre esses conceitos.

1.1 Noções sobre Grafos (conceitos preliminares)

A Teoria de Grafos tem uma origem relativamente recente (século XVIII) na história da Matemática. Dentre os primeiros cientistas a trabalhar nesta área se destacam L.Euler, G.Kirchhoff e A. Cayley. A Teoria de Grafos tem extensiva utilização em Matemática aplicada, pois demonstra ser uma poderosa ferramenta para a modelagem de diversas situações reais em, entre outros, física, química, biologia, engenharia elétrica e pesquisa operacional. (SANTOS, 2002, p. 225).

Definição 1.1.1. Grafo é um conjunto de pontos do plano ligados por segmentos cujas extremidades devem conter tais pontos. Os pontos são chamados de vértices ou nós e os segmentos são chamados de arestas ou arcos.

Notação: um grafo G=(V, A), no qual G é o grafo composto por V vértices e A arestas.

Na Figura 1.1 abaixo**, N, A, S** e **B** são vértices e os segmentos que ligam os vértices são chamados de Arestas.

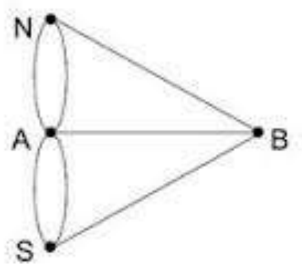


Figura 1.1

Definição 1.1.2. Vértices adjacentes são aqueles conectados por uma aresta.

Por exemplo, os vértices **N** e **B** são adjacentes, pois são conectados pela mesma aresta.

Definição 1.1.3. Laços são arestas incidentes no mesmo vértice.

Por exemplo, no grafo da Figura 1.2 abaixo a aresta $\mathbf{a_3}$ é um laço, pois é uma resta que incide sobre o mesmo vértice.

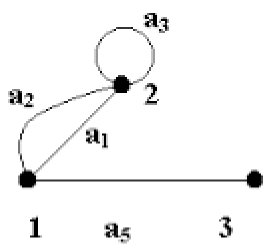


Figura 1.2

Definição 1.1.4. Arestas incidentes são aquelas que se conectam a um vértice.

Por exemplo, na Figura 1.3 abaixo, podemos dizer que $\mathbf{a_3}$ **,** $\mathbf{a_2}$ **e** $\mathbf{a_1}$ são arestas incidentes ao vértice **2**, bem como $\mathbf{a_2}$ **e** $\mathbf{a_1}$ são arestas incidentes ao vértice **1** e $\mathbf{a_5}$ é aresta incidente ao vértice **3.**

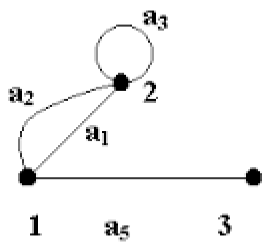


Figura 1.3

Definição 1.1.5. Arestas paralelas são arestas distintas que se conectam aos mesmos vértices.

Por exemplo, na Figura 1.3 acima, $\mathbf{a_2}$ **e** $\mathbf{a_1}$ são arestas paralelas.

Definição 1.1.6. O grau de um vértice é dado pelo número de arestas incidentes nesse vértice, ou seja, que possui uma de suas extremidades nesse vértice.

Por exemplo, no grafo da Figura 1.4 abaixo, os vértices representados pelas letras **B, S e N** possuem **grau 3** e o vértice representado pela letra **A** possui grau **5.**

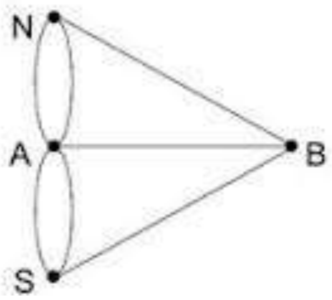


Figura 1.4

Definição 1.1.7. O grau de um grafo é dado pela soma dos graus dos vértices do mesmo.

Por exemplo, o grau do grafo da figura 1.4 é 14, pois como vimos antes, os vértices representados pelas letras **B, S e N** possuem **grau 3** e o vértice representado pela letra **A** possui grau **5.**

Teorema decorrente das definições 1.1.6 e 1.1.7: o grau de um grafo é sempre um número par.

Prova do Teorema: ao somarmos os graus dos vértices, como cada aresta liga dois vértices, então cada aresta é contada duas vezes, assim a soma será sempre um número par.

Definição 1.1.8. Matriz de Incidência é aquela, na qual as linhas estão associadas aos vértices e as colunas às arestas. Neste caso, um elemento na linha i e coluna j é 1 se o vértice i é incidente a aresta j e 0 caso contrário.

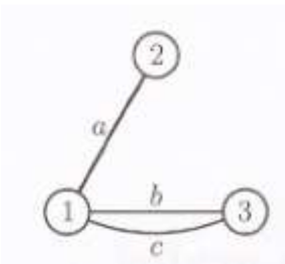


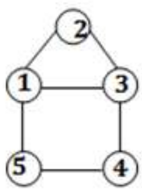
Figura 1.5 : Grafo

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 1.6: Matriz de Incidência

Definição 1.1.9. Matriz de Adjacência é aquela em que tanto as linhas quanto colunas estão associadas aos vértices. Neste caso, se $A=[a_{ij}]$ tem-se que a_{ij} é o número de arestas entre v_i e v_j .

Por exemplo:



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 1.7: grafo e sua matriz de adjacência

1.2 Tipos de Grafos

1.2.1. Grafo Simples

É todo grafo que não apresenta laços e nem arestas paralelas.

Por exemplo:

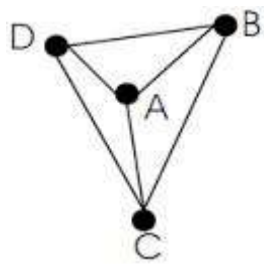


Figura 1.8

1.2.2. Grafo Completo

O Grafo Completo de **n** vértices denotado por $\mathbf{K_n}$ é um grafo simples em que cada um de seus vértices é adjacente a qualquer outro.
Por exemplo, a figura abaixo representa um $\mathbf{K_5}$.

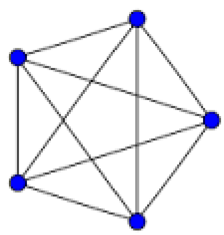


Figura 1.9

1.2.3. Grafo Conexo e não Conexo

Dois vértices são ditos conectados se existe um caminho no grafo que percorre as arestas partindo de um vértice a outro. Assim, um grafo conexo é aquele em que quaisquer dois vértices dele são conectados por um caminho. Caso contrário o grafo é dito não conexo.

Por exemplo, o grafo da esquerda é dito conexo e o da direita é dito não conexo.

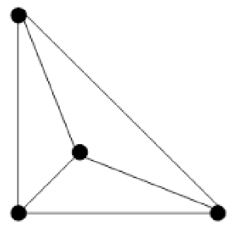


Figura 1.10

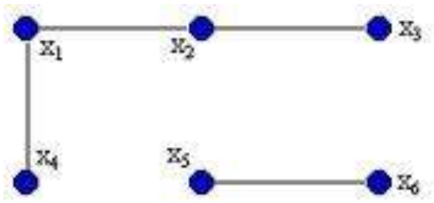


Figura 1.11

1.2.4. Grafo Bipartido

Dados V, um conjunto de vértices, e G, um grafo de V, dizemos que G é bipartido se existirem V_1 e V_2 subconjuntos de V, disjuntos, tal que uma aresta qualquer sempre liga um vértice de V_1 a um vértice de V_2.

Exemplo: sejam V={1,2,3,4,5,6} e o grafo G dado pela figura 1.12 abaixo:

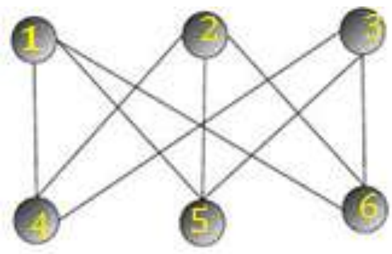


Figura 1.12

Temos os subconjuntos: V_1 = {1,2,3} e V_2 = {4,5,6} disjuntos; logo, G é bipartido.

1.2.5 Dígrafo

É todo o grafo em que as arestas possuem orientação.

Exemplos:

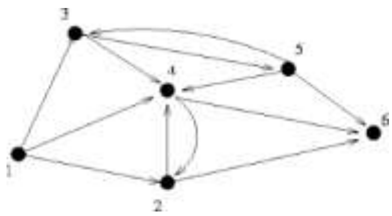


Figura 1.13

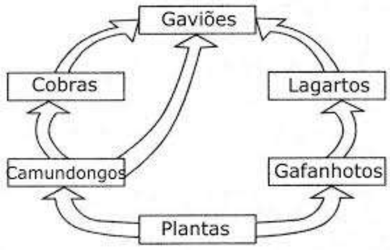


Figura 1.14

1.3 Caminhos Eulerianos

Em Konigsberg, atual Kaliningrado, que fica entre a Polônia e a Lituânia, discutia-se nas ruas da cidade a possibilidade de fazer um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo lugar, atravessando todas as pontes uma única vez. Essa possibilidade havia se tornado uma lenda popular até que Euler, em 1736, solucionou esse problema dando origem a Teoria de Grafos.

Problema das Pontes de Konigsberg

Na cidade de Konigsberg 7 pontes cruzam o rio Pregel estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as ilhas e as margens opostas do rio, conforme ilustrado na figura abaixo:

Figura 1.18

Será possível fazer um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma vez?

Os grafos que possibilitam esse tipo de passeio são chamados de Eulerianos. No entanto, esse caminho, a ser percorrido, pode ser aberto ou fechado. Será aberto se os vértices de entrada e saída forem distintos e, será fechado, se esses vértices coincidirem.

Euler, em 1736, transformou esse problema em um problema de Grafos ao associar vértices às ilhas e margens do rio e arestas entre esses vértices para representar as pontes, obtendo assim o multigrafo da Figura 1.19 adiante.

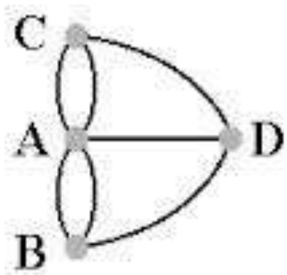


Figura 1.20

No grafo anterior, temos que os vértices **C e B** são as margens do rio e os vértices **A e D** são as ilhas.

Ao tentar resolver esse problema, Euler acabou desenvolvendo o seguinte **teorema:**

Um Grafo G=(V,A) admite caminho Euleriano se, e somente se, todos os vértices tiverem grau par, ou apenas admitirem dois vértices com grau ímpar.

Prova

$(\Rightarrow)$

Se os vértices inicial e final do caminho são distintos, eles são os únicos que podem ter grau ímpar, se orientadas as arestas pelo sentido do caminho, cada vértice intermediário x_i terá d(xi)/2 entradas e d(xi)/2 saídas, no qual d(xi) representa o grau do vértice x_i, ou então o caminho não poderá prosseguir, em um dado momento sem repetir a aresta: logo, d(xi) deverá ser par, para todo vértice intermediário. Se o caminho é fechado todo vértice será intermediário e não poderão existir vértices de grau ímpar.

$(\Leftarrow)$

Sejam x_a e x_b os dois únicos vértices de grau ímpar. Ao construirmos um caminho partindo de x_a poderemos observar que, ao chegar a qualquer x_i intermediário, teremos utilizado um número ímpar de suas arestas incidentes; como todo x_i diferente de x_a e x_b tem grau par, restará ao menos uma aresta pela qual o caminho poderá prosseguir. Se isso não ocorrer em algum vértice este deverá ser x_b, dado seu grau ímpar.

Construímos então, um caminho x_a até x_b sem a preocupação de utilizar todas as arestas. Restará, então um grafo parcial G' contendo as arestas não utilizadas, o qual poderá ser ou não conexo. Então, partindo novamente de x_a podemos desviar o caminho toda vez que atingirmos uma componente conexa de G', percorrendo um caminho Euleriano sobre essa componente antes de prosseguir - o que será sempre possível visto que todos os vértices terão grau par. Ao atingir x_b teremos percorrido um caminho Euleriano de G.

Assim, Euler percebeu que isso não ocorre com o Problema das Pontes de Konigsberg e, portanto encontrar um caminho do tipo questionado no problema, para esse grafo, é impossível.

Se todos os vértices de G tiverem grau par, retiraremos uma aresta e chamaremos de x_a e x_b seus vértices terminais, executando então a sequência descrita acima e recolocando a aresta ao atingir x_b permitirá o fechamento do caminho Euleriano.

Segundo Malta (2008), existem outras aplicações para o conceito de Caminhos Eulerianos, como por exemplo: atendimento sequencial a um grande número de pessoas tais como entregas domiciliares como água, correios, gás, luz e telefone.

Além das aplicações mencionadas anteriormente para os Caminhos Eulerianos, existe também uma aplicação que serve como um passatempo que desafia os alunos e que utilizamos em nossa sequência didática (Apêndice C), que é a tentativa de desenhar figuras sem retirar o lápis/caneta do papel.

1.4 Caminhos Hamiltonianos

Outro problema consiste em verificar se, dado um Multigrafo (grafo com laços ou arestas paralelas), é possível construir um caminho que inclua todos os vértices. Para tanto, um caminho que respeita essa regra é chamado de Caminho Hamiltoniano, pois foi um problema proposto por Sir W.R. Hamilton[3] quando criou o jogo “Icosian Game” em 1856. Ele era um matemático, físico e astrônomo irlandês que contribuiu com trabalhos fundamentais ao desenvolvimento da Óptica, Dinâmica e Álgebra. A sua descoberta mais importante em Matemática é a dos *Quaterniões (extensão do Conjunto dos Números Complexos).*

A proposta do jogo era sair da cidade de Londres, uma das vinte cidades do jogo, percorrer todas as cidades e voltar para Londres sem repetir cidades. O jogo era jogado em um tabuleiro que é a representação achatada de um Dodecaedro. Esse achatamento gera um grafo, no qual, cada cidade é um vértice e cada aresta do Dodecaedro forma um arco do grafo ligando esses vértices (cidades).

Representação do Tabuleiro do jogo:

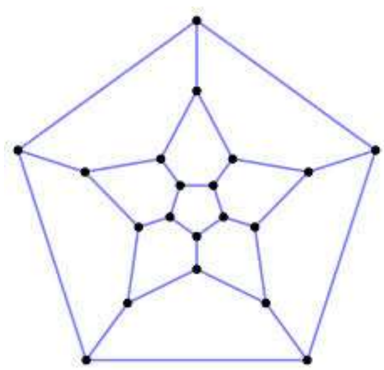


Figura 1.21

[3] http://global.britannica.com/biography/William-Rowan-Hamilton

Possível resolução do jogo:

Note que a resolução apresentada na Figura 1.22 para o Grafo do jogo, é apenas uma possibilidade. Neste caso particular, escolhemos o vértice mais ao norte para representar a cidade de Londres. Além disso, percebe-se que não é necessário passar por todas as arestas para encontrar um caminho que satisfaça o objetivo do jogo.

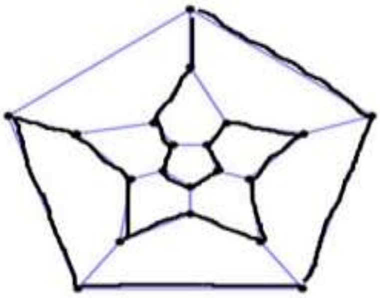


Figura 1.22

Um problema decorrente do modelo Hamiltoniano é conhecido como o ***Problema do Caixeiro Viajante*** que pode ser enunciado da seguinte forma:

“ O Caixeiro deve partir de uma cidade inicial, passar por todas as demais uma única vez e retornar a cidade inicial. Sabendo que o Caixeiro é informado de um conjunto de cidades e um custo associado a cada uma, o objetivo é fazer esse trajeto no menor caminho possível e, por consequência gastar o mínimo necessário.”.

1.5 Planaridade

Um Grafo é dito planar se é possível desenhá-lo no plano de maneira que as arestas não se cruzem. Planaridade é um conceito importante, pois existem muitas aplicações no mundo real, como por exemplo: desenvolvimento de circuitos impressos, problemas em otimização combinatorial, distribuição de energia, ou ainda, no Problema das Quatro Cores, que é o problema mais famoso da Teoria de Grafos.

Existe um Teorema proposto por Euler no século XVIII, que dá a condição necessária a ser satisfeita por um Grafo Planar:

Teorema de Euler: *seja G=(V,A) um grafo planar, no qual V é o número de vértices e A é o número de arestas. No qual **n e m** são as cardinalidades (número de elementos de um conjunto) de V e A, respectivamente, **p** o número de componentes conexas de G e **f** o número de faces de uma realização planar de G,* ***então n - m + f = p + 1****.*

Observação: *uma aplicação desse teorema na escola básica é no estudo de Poliedros com a famosa Relação de Euler:* ***V – A + F = 2***, na qual V = número de vértices, A = número de arestas e F = número de faces.

Prova:

Provaremos inicialmente o teorema para o **caso p = 1** e depois usaremos o resultado para obter a fórmula para qualquer p.

A demonstração é feita utilizando indução no número de arestas e admitindo que o grafo G seja conexo.

Suponhamos que m = 0:

Neste caso G é constituído por apenas um vértice e qualquer representação gráfica de G será um ponto, portanto f = 1. Substituindo estes valores na fórmula anterior, comprovamos a validade da equação n - m + f = p + 1 enunciada no teorema.

Agora, suponhamos que a fórmula seja válida para grafos com *m* arestas, com $m \geq 1$: Consideremos uma realização planar de G e suponhamos que passemos a acrescentar a partir de um vértice fixo qualquer, arestas incidentes ao subgrafo já construído (isto é possível, pois estamos supondo que G seja conexo). Sejam $\mathbf{n_i}$ o número de **vértices**, $\mathbf{m_i}$ o números de **arestas** e $\mathbf{f_i}$ o números de **faces** da representação após acrescentarmos a i-ésima aresta.

Assim, $n_0 = 1$, $m_0 = 0$ e $f_0 = 1$ e em particular, $m_i = i$.

Pela hipótese de indução, temos que o subgrafo de G obtido após colocarmos m_i - 1 arestas satisfaz o teorema.

Portanto $n_{i-1} - m_{i-1} + f_{i-1} = 2$.

Acrescentamos agora a i-ésima aresta.

Por construção, uma das extremidades desta aresta pertence ao subgrafo com m_i-1 arestas já construídas. Quanto a outra extremidade, temos duas possibilidades:

Possibilidade 1: A outra extremidade não pertença ao subgrafo. Neste caso acrescentaremos um vértice e uma aresta ao subgrafo. Notemos que este novo vértice pertence a uma das faces do subgrafo com m_i -1 arestas, na fronteira da qual se situa a outra extremidade. Caso contrário a i-ésima aresta interceptaria alguma aresta na representação já construída, contradizendo sua planaridade. Sendo assim, a nova aresta não cria uma nova região e, portanto, o número de faces não se altera. Temos então:

$n_i - m_i + f_i = n_{i-1} + 1 - (m_{i-1} + 1) + f_{i-1} = 2$

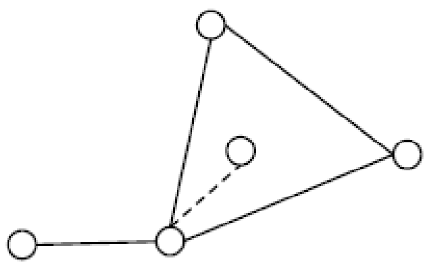


Figura 1.23: Exemplo em que uma das extremidades não pertence ao grafo.

Possibilidade 2: A i- ésima aresta liga dois vértices já pertencentes ao subgrafo construído, com m – 1 arestas. Como no exemplo da Figura 1.24.

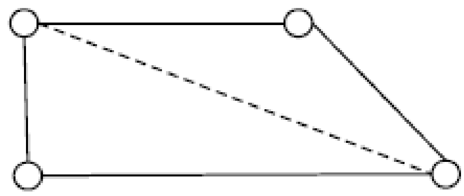


Figura 1.24: Neste caso, estas duas extremidades devem estar dispostas como mostra a Figura, caso contrário teremos uma intersecção.Uma face é subdividida em duas pela i-ésima aresta sem alterar o número de vértices.

Passemos para o caso $p > 1$. Denotemos por G_1, G_2, ..., G_p, os componentes de G, e por n_j, m_j, e f_j o número de vértices, arestas e faces, respectivamente, do j-ésimo componente. Logo, para cada j,

$$n_j - m_j + f_j = 2$$

Observemos que a representação gráfica planar de cada componente G é obtido da representação gráfica de G, considerando-se uma componente de cada vez. Para cada f_j, uma das faces que contribui para o total é a face exterior. No entanto, esta face exterior é contada novamente como face interior de outro componente ou como face exterior da realização gráfica planar de G.

Portanto, da soma dos f_j devemos descontar p (faces exteriores, uma para cada componente) e somar 1 (a face exterior de G que após o desconto acabou não sendo contada) para obtermos f, o número de faces de G, ou seja: $f = \sum_{j=1}^{p} f_j - p + 1$

Portanto, somando $n_j - m_j + f_j = 2$ para todos os componentes de G, obtemos:

$\sum_{j=1}^{p}(n_j - m_j + f_j) = n - m + f + p - 1 = 2p$, assim adicionando $-p + 1$ aos dois lados da igualdade, obtemos à equação inicial do enunciado:

$n - m + f = p + 1$

1.6 Coloração (Problema das Quatro Cores)

Problema das Quatro Cores:

O Teorema das Quatro Cores garante que é possível colorir regiões de qualquer mapa desenhado no plano (grafo planar), usando no máximo quatro cores, de maneira que nenhum par de regiões que tenham uma fronteira em comum (não apenas um ponto) seja da mesma cor. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em Apple e Haken (1977) conforme listado em minhas referências bibliográficas.

A coloração de mapas é equivalente a colorir grafos planares, ou seja, atribuir cores a vértices de um grafo planar de tal forma que vértices adjacentes tenham cores distintas. O número cromático de um grafo G é o menor inteiro K para qual o grafo G pode ser colorido em *K* cores.

Acreditamos que o professor ou o leitor em geral pode por meio desse capitulo compreender o necessário sobre os conceitos que foram trabalhados na sequência didática / prática apresentada nesta dissertação.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

2.1 A Resolução de Problemas

Este capítulo apresenta reflexões sobre a aprendizagem matemática no ponto de vista da metodologia escolhida para essa pesquisa, bem como as principais ideias de alguns educadores e pesquisadores a respeito da metodologia da Resolução de Problemas.

Segundo o livro *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática* do autor Diniz (2001), o NCTM[4] (National Council of Teachers of Mathematic's), na década de 1980 dedicou sua edição anual à Resolução de Problemas. Nessa publicação reforçou as propostas curriculares americanas que colocavam a Resolução de Problemas como o centro do ensino nos anos oitenta.

Já na década de 1990, são elaborados no Brasil os PCNs que apontam que a Resolução de Problemas é uma importante estratégia de ensino, pois os alunos são confrontados com situações-problema novas que lhes possibilitem desenvolver uma estratégia de resolução, planejando etapas e desenvolvendo em si capacidades a partir de seus erros cometidos, desenvolvendo assim o espírito de pesquisa e suas habilidades em fazer relações com outros conhecimentos.

Os PCNs de Matemática do Ensino Fundamental apontam diversos objetivos a serem alcançados pelos alunos, dentre os quais destaco alguns que considerei importante para essa pesquisa: visam contribuir para que toda criança e jovem brasileiros tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite de fato sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura; evidenciam a importância de o aluno valorizar a Matemática como instrumento para compreender o mundo a sua volta e de vê-la como a área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e *o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas.* (BRASIL, 1998, p 16).

[4] Organização não governamental fundada em 1920, nos Estados Unidos, que tem como objetivo discutir o ensino de matemática no Canadá e nos Estados Unidos.

Fiorentini e Lorenzatto (2006) apresentam uma pesquisa realizada pela Universidade Bielefeld da Alemanha e que foi publicada por Batanero (1992), feita a partir de uma compilação de trabalhos apresentados em congressos internacionais e de um levantamento desenvolvido pelas linhas de pesquisas de 87 programas de mestrado e doutorado em 61 universidades de 19 países. Nesse levantamento, foi encontrado entre as linhas de pesquisa a “Resolução de Problemas” adotada em 22 programas, ou seja, cerca de 25%, dos programas de pós-graduação pesquisados apresentam a Resolução de Problemas como uma linha de pesquisa no Ensino de Matemática.

Nos últimos vinte anos, muitos pesquisadores têm trabalhado com a Resolução de Problemas, inclusive como uma perspectiva metodológica de ensino. Entre alguns pesquisadores estão Falzetta (2003), que encoraja o uso da Resolução de Problemas para melhorar a aprendizagem, uma vez que o fracasso dos alunos passa pela má interpretação dos enunciados e problemas. Temos também, no livro *Matemática para aprender a pensar* publicado pelos autores Vila e Calejo (2006) a possibilidade da utilização da Resolução de Problemas como forma de romper com as crenças que os alunos possuem a respeito da Matemática. Já Malta (2008), na sua dissertação de mestrado, aplica a Resolução de Problemas como perspectiva metodológica de ensino para possibilitar a inserção do ensino de grafos no Ensino Médio.

Polya (2006) e Pozo (1998) também desenvolveram pesquisas utilizando a Resolução de Problemas como uma perspectiva metodológica. Eles criaram seus roteiros metodológicos, no qual, apresentam os passos a serem dados pelos alunos a serem seguidos no momento de resolver um problema.

Há também o grupo de trabalho GTERP, em cujas pesquisas, o problema é tido como o ponto de partida, no qual os alunos através de um roteiro similar aos de Polya e Pozo, devem fazer conexões entre os diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos. No entanto, o roteiro criado pelo GTERP é mais completo do que os criados por Polya (2006) e Pozo (1998) e, portanto será o roteiro metodológico que adotaremos em nossa sequência didática/prática.

Sendo assim, pensamos que a Resolução de Problemas é uma alternativa de ensino que tem como objetivo ajudar o aluno a compreender ou interpretar melhor o que o problema está exigindo e, a partir disso, permitir que ele faça relações com outras áreas do conhecimento; resume-se muito bem a partir do fragmento abaixo:

> Uma das formas mais acessíveis de proporcionar aos alunos que aprendam a aprender é a utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino. A resolução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis e diferentes. (POZO e ECHEVERRÍA,1998, p.09).

Nas próximas seções, destacaremos alguns educadores e pensadores que desenvolveram estudos acerca da Resolução de Problemas.

2.2 A Resolução de Problemas segundo Polya

George Pólya[5] nasceu em Budapeste, Hungria em 1887. Foi professor de matemática de 1914 a 1940 na Suíça e de 1940 a1953 na Stanford University. Faleceu em 1985 nos Estados Unidos. Ele trabalhou em muitas áreas da matemática, como Séries, Teoria dos Números, Análise Matemática, Geometria, Álgebra, Combinatória e Probabilidade. Contribuiu ainda para a Heurística em Educação Matemática.

No início de sua carreira, Polya escreveu livros que trabalhavam a resolução de problemas. Mais tarde, começou a pesquisar sobre métodos de resolução de problemas. Possivelmente, Polya seja o primeiro a pesquisar sobre métodos para resolver problemas. Em *A Arte de Resolver Problemas*,

---

[5] Informações retiradas dos sites http://www.somatematica.com.br/biograf/polya.php e *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk* .

Polya (2006), explica o que quer dizer com a Heurística em Educação, mais especificamente, a Educação relacionada à problemas matemáticos:

> O objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e regras da descoberta e da invenção. [...] Heurística Moderna procura compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as operações mentais, típicas desse processo, que tenham utilidade. (POLYA, 2006 p.99).

Nesse livro, Polya apresenta uma sistematização, ou seja, um método a ser seguido a fim de se resolver um problema. Apresentaremos seus passos:

1^0 Passo: Compreensão do Problema.

Nesse passo, Polya (2006) sugere uma série de perguntas e ordens para que se compreenda melhor o problema, como por exemplo:

Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar à incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?

Trace uma figura. Adote uma notação adequada.
Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?

2^0 Passo: Estabelecimento de um Plano.

Nesse passo Polya sugere que se encontre a conexão entre os dados e a incógnita. Além disso, chama a atenção de que é possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata. Por fim, é preciso chegar a um plano para a resolução.

3^0 Passo: Execução do Plano.

Nesse passo, Polya chama a atenção para alguns pontos como:

Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?

4^0 Passo: Retrospecto.

Nesse passo, Polya quer que seja examinada a solução obtida e, para isso, sugere algumas perguntas:

É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

2.3 A Resolução de Problemas segundo Pozo

Juan Ignacio Pozo[6] é PhD em Psicologia e atualmente trabalha na Universidade de Madrid na Espanha.

Para Pozo (1998), o professor deve deixar de ser um mero transmissor do conhecimento e tornar-se um guia para orientar os alunos a desenvolver especialmente o hábito da pesquisa, para que o aluno obtenha a capacidade de saber onde consultar para dar uma solução adequada para um problema que se apresenta.

Em seu livro, "*A solução de Problemas*", Pozo (1998) afirma que a aprendizagem da Solução de Problemas somente se transformará em autônoma e espontânea se transportada para o âmbito do cotidiano do aluno. Ele acredita que isso pode gerar a atitude de procurar respostas para as suas próprias perguntas/problemas. Assim, o objetivo final da aprendizagem da Resolução de Problemas é fazer com que o aluno adquira o hábito de propor a si problemas e resolvê-los como uma forma de aprender.

---

[6] Informações retiradas do site https://www.uam.es/ss/Satellite/Psicologia/es/1242653130931/1242652874192/persona/detallePDI/Pozo_Municio,_Juan_Ignacio.htm

No trabalho de Pozo (1998), fica evidente que apenas seguir os passos de Polya não é suficiente para resolver um problema. Outras considerações são importantes como: a diferença entre exercício e problema, os diversos significados de resolver um problema em Matemática, tipos de problemas no Ensino de Matemática, o ensino e a aprendizagem do processo de solução de um problema matemático e ensinar a resolver um problema.

> Na solução de problemas, as técnicas sobreaprendidas previamente exercitadas constituem um meio ou recurso instrumental necessário, mas não suficiente, para alcançar a solução; além delas são exigidas estratégias, conhecimentos conceituais, atitudes e etc. (POZO, p.17).

Assim, se faz necessário explorar essas considerações mencionadas por Pozo e que consequentemente complementam as ideias de Polya.

Diferença entre Exercício e Problema:

Para Pozo (1998), um *exercício* é aquela situação, na qual um aluno deve utilizar técnicas ou habilidades para realizar tarefas já aprendidas. Já uma situação somente pode ser concebida como um *problema* à medida que exista um reconhecimento dela como tal, e à medida que não disponhamos de procedimentos automáticos que nos permitam solucioná-los de forma mais ou menos imediata, sem exigir, de alguma forma, um processo de reflexão ou uma tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos. Em outras palavras, em um problema o aluno se depara com algo novo e diferente de tudo aquilo que já foi trabalhado e, portanto, é necessária uma estratégia para resolvê-lo.

Os Diversos Significados de "Resolver Problemas" em Matemática:

Para Pozo (1998), na concepção dos alunos, não há uma diferenciação entre resolver um exercício e um problema, pois para eles a Matemática é uma ciência fechada que utiliza de métodos e ferramentas ou técnicas para resolver as atividades propostas pelos professores. Assim, não há uma reflexão sobre os significados relacionados à Resolução de Problemas.

O Ensino e a Aprendizagem do Processo de Solução de um Problema Matemático:

Para Pozo (1998), algumas estratégias podem ser utilizadas na resolução de problemas, sejam eles matemáticos ou de qualquer área do conhecimento humano, como por exemplo: realizar tentativas por meio de ensaio e erro; dividir o problema em subproblemas; estabelecer submetas; decompor o problema; procurar problemas análogos.

É importante também para aquele que irá resolver um problema estar apto a resolvê-lo, ou seja, a preparação do problema, por parte do professor, deve estar em linguagem adequada e clara para esse aluno, caso contrário, pode não haver nem motivação para tentar a sua resolução.

Para Pozo e Echeverría (1998), outras técnicas que ajudam na compreensão de problemas matemáticos podem ser utilizadas por quem deseja resolver problemas ou até mesmo pelo professor, no momento de auxiliar um aluno, tais como: expressar os problemas com outras palavras; explicar aos colegas em que consiste o problema; indicar qual a meta do problema; procurar um problema semelhante que já tenha resolvido; procurar diferentes situações nas quais esse problema possa ser aplicado.

Ensinar a Resolver Problemas:

Segundo Pozo (1998), ao ensinar a resolver problemas, alguns aspectos precisam ser levados em conta. Na montagem de um problema, é essencial que o professor saiba avaliar quais são os conhecimentos conceituais e procedimentais que possuímos e que os alunos possuem e a maneira como ele irá combiná-los no problema. Além disso, é fundamental que o professor indique todos os passos no momento de auxiliar o aluno a resolver o problema. É importante também, que o professor faça o papel de mediador nas discussões acerca dos procedimentos utilizados por diferentes alunos. Por fim, os erros não podem ser considerados como fracassos e sim como informação para o professor, para que o mesmo possa corrigir atitudes e posturas dos alunos, bem como servir de experiência para os alunos e auxiliá-los na melhoria do processo de resolução de problemas.

2.4 A Resolução de Problemas segundo o GTERP

O grupo GTERP é coordenado desde sua criação em 1992, pela Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic e é constituído por alunos regulares e ex-alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP-Rio Claro, que buscam aprofundar seus conhecimentos, aberto à participação de alunos especiais em busca de aprimorar sua prática docente.

O GTERP se dedica a trabalhos voltados ao Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática. O GTERP passou a empregar essa palavra composta dentro de uma dinâmica de trabalho para a sala de aula por meio da Resolução de Problemas como metodologia de ensino.

Segundo Allevato e Onuchic (2004), o GTERP ao considerar o Ensino-Aprendizagem-Avaliação, isto é, ao ter em mente um trabalho em que estes três elementos ocorrem simultaneamente, sugere que, enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos. Assim, o aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção do conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. Por outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a orientar as práticas de sala de aula, quando necessário.

Para o GTERP, essa metodologia de ensino é uma forma pós-Polya de ver a Resolução de Problemas. Nela, o problema é o ponto de partida, no qual os alunos através da Resolução de Problemas devem fazer conexões entre os diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos.

> Essa metodologia exige do professor que ele prepare ou escolha problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que se pretende construir. Precisa deixar de ser o centro de gravidade das atividades, passando para os alunos essa responsabilidade pela aprendizagem que pretende atingir. ([ALLEVATO, ONUCHIC, 2004, p. 82]).

Segundo Onichic e Allevato (2004) e outros autores que abordam o tema, existem algumas razões para se fazer um esforço do ensino através da resolução de Problemas, como por exemplo:

- A Resolução de Problemas desenvolve o poder matemático nos alunos, ou seja, capacidade de pensar Matemática, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos;
- A Resolução de Problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer Matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam;

- Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita tradicional. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.

Apresentamos a seguir o roteiro metodológico criado pelo GTERP com o intuito de prover aos alunos conhecimentos prévios necessários ao desenvolvimento mais produtivo da metodologia da Resolução de Problemas, bem como possibilitar que ocorram as razões destacadas anteriormente.

O GTERP (2004) apresenta uma sistematização, ou seja, um método a ser seguido a fim de se resolver um problema. Apresentaremos seus passos:

1^0 Passo: Preparação do Problema

O professor deve selecionar um problema (chamado gerador) visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento.

2^0 Passo: Leitura Individual:

O professor deve entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura;

3^0 Passo: Leitura em conjunto:

O professor deve formar grupos e solicitar uma nova leitura do problema;

4^0 Passo: Resolução do Problema:

A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo devem buscar resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da Matemática nova que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo, da sua resolução conduzirá os alunos à construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula;

5^0 Passo: Observar e incentivar:

Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa e avalia o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Além disso, o professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e métodos para poderem resolver o problema;

6^0 Passo: Registro das resoluções no quadro:

Os representantes de cada grupo devem ir para o quadro registrar suas resoluções e discutir sobre as diferentes respostas, sejam elas certas ou erradas;

7^0 Passo: Plenária:

Nessa etapa todos os alunos são convidados a discutir suas respostas;

8^0 Passo: Busca do consenso: Depois de sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções, o professor deve tentar, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado obtido;

9⁰ Passo: Formalização do conteúdo:

Neste momento o professor deve formalizar a apresentação organizada e estruturada em linguagem matemática, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da Resolução de Problemas, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

2.5 Algumas Considerações acerca dos autores destacados:

No trabalho de Polya fica evidente que o aluno deve trabalhar de forma independente, mas com auxílio do professor em alguns momentos de dúvidas. No entanto, o professor não pode ajudar demais o aluno no momento de resolver um problema, pois assim o aluno não aprende. Polya deixa claro que é necessária uma parcela razoável de participação na resolução de um problema por parte do aluno.

Para Malta (2008), a obra de Polya é uma consequência de suas observações enquanto docente do Ensino Superior. Na qual, Polya percebeu a necessidade de instrumentalizar acadêmicos quanto a algumas particularidades sobre o fazer matemático.

Vimos que o trabalho de Pozo (1998) é um complemento para os passos de Polya para resolver um problema. Além disso, fatores como a diferença entre exercício e problema, os diversos significados de resolver um problema e os tipos de problemas no ensino de Matemática, bem como ensinar a resolver um problema são importantes e devem ser considerados para uma melhor aprendizagem.

Por fim, acreditamos que o roteiro metodológico criado pelo GTERP é o ideal para ser aplicado em nossa sequência didática, pois o roteiro do GTERP é considerado pelo próprio grupo como uma metodologia pós-Polya, a qual exige que o professor prepare um problema apropriado ao conceito que se quer ensinar. Além disso, o professor deve dar liberdade para o aluno se responsabilizar pela própria aprendizagem. Por fim, a Resolução de Problemas deve desenvolver a capacidade matemática dos alunos, utilizando diferentes estratégias para os problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conceitos matemáticos.

Sendo assim, conhecer os métodos de Polya, Pozo e GTERP nos ajudou pela escolha de um roteiro metodológico que consideramos mais completo e apropriado como é o do GTERP para podermos aplicar em nossa sequência didática a fim de obtermos resultados mais satisfatórios.

3 OBJETIVOS E METODOLOGIA DE PESQUISA

O objetivo desta pesquisa é encontrar uma forma de auxiliar os alunos a desenvolverem suas capacidades de interpretação e argumentação quando se deparam com um problema. Assim, por meio da aliança entre a perspectiva metodológica da Resolução de Problemas e a Teoria de Grafos para trabalhar conceitos matemáticos, principalmente no Ensino Fundamental, desenvolvemos uma sequência didática que visa explorar esses conceitos de forma contextualizada com as realidades e experiências de cada aluno.

A partir disso, surgem as questões norteadoras dessa pesquisa: “De que forma podemos ensinar os conceitos que são explorados pela Teoria de Grafos, utilizando a Resolução de Problemas, de forma a possibilitar aos alunos uma melhor compreensão do que se estuda?”

“De que forma os conceitos explorados em nossa sequência didática pode auxiliar no entendimento e percepção, por parte dos alunos, dos aspectos históricos e da necessidade desse conhecimento no seu cotidiano, assim como, aumentar a suas capacidades de interpretar e resolver problemas?”.

Para a realização desta pesquisa foi adotado o Método do Estudo de Caso. Para Ventura (2007), o Estudo de Caso pode ter muitas aplicações conforme os trechos a seguir:

> Com base nas aplicações apresentadas, evidenciam-se as vantagens dos estudos de caso: estimulam novas descobertas, em função da flexibilidade do seu planejamento; enfatizam a multiplicidade de dimensões de um problema, focalizando-o como um todo e apresentam simplicidade nos procedimentos, além de permitir uma análise em profundidade dos processos e das relações entre eles. (VENTURA, 2007, p.386).

> Quanto às aplicações do estudo de caso, são muitas e variadas. São de grande utilidade em pesquisas exploratórias e comparadas. Como toda pesquisa apresenta vantagens e limitações na sua aplicação, merecendo o cuidado necessário quando buscar generalizações. Em nenhum momento, o pesquisador deverá desprezar, em busca da simplificação, o rigor científico necessário para sua validação. (VENTURA, 2007, p.386).

Segundo Gil (1995), citado por Fiorentini e Lorenzato (2006), o Estudo de Caso é um estudo profundo de um ou poucos objetos bem definidos, permitindo detalhado conhecimento sobre os mesmos. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), o Estudo de Caso não precisa se basear apenas em um aluno, em um grupo de alunos ou escola, mas sim em qualquer sistema delimitado que apresenta características únicas, que valham a pena ser explorado e investigado.

Ao longo da prática, foram apresentados em sala de aula, aos grupos de alunos, problemas históricos e problemas que são abordados até hoje, seja na escola ou na vida cotidiana, que retratam aspectos da nossa realidade. Dessa forma, segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), o Estudo de Caso é adequado para essa pesquisa, uma vez que está de acordo com o trecho abaixo:

> O estudo de caso busca retratar a realidade de forma profunda e mais completa possível, enfatizando a interpretação ou a análise do objeto, no contexto em que ele se encontra, mas não permite a manipulação das variáveis e não favorece a generalização. Por isso, o estudo de caso tende a seguir uma abordagem qualitativa. Mas isso não significa abandonar algumas quantificações necessárias. Essas quantificações podem ajudar a qualificar melhor uma análise. (FIORENTINI E LORENZATO, 2006, p. 110).

Segundo Gil (1995), citado por Ventura (2007), o Estudo de Caso não possui um roteiro fechado ou engessado para que o caso seja delimitado, mas sim pode ser dividido em quatro fases para que se possa iniciar um trabalho, pesquisa ou investigação.

Na primeira fase, é preciso que o pesquisador estabeleça o que constitui o seu Estudo de Caso, chamado por Gil (1995), de unidade-caso, para que, a partir dessa delimitação, seja possível observar os diversos dados que serão importantes para o entendimento do caso.

Neste trabalho de pesquisa, a unidade-caso foi uma proposta de desenvolver em um ambiente escolar com grupos de três a seis alunos de sétimo ano do Ensino Fundamental, mediante a perspectiva metodológica da Resolução de Problemas, uma sequência didática que explore conceitos da Teoria de Grafos relacionados a situações-problema.

Na segunda fase, é necessário definir os procedimentos de coleta de dados, sejam eles quantitativos ou qualitativos. Para Gil (1995), esses procedimentos são: observações, análise de diversos documentos, entrevistas, questionários entre outros.

Nesse trabalho foi utilizado, em algumas aulas, um diário de bordo do professor, no qual foram registradas as minhas observações sobre o transcorrer das aulas no que tange a participação dos alunos, o papel de cada aluno e o meu papel como professor mediador nesse processo. Além disso, foram registradas as atitudes, dúvidas e questionamentos dos grupos. Durante as aulas registrei alguns momentos por fotos, bem como gravações de vídeo para me ajudar a captar mais detalhes que poderiam passar despercebidos durante as minhas observações escritas no diário de bordo. Por fim, também utilizei como procedimentos de coleta de dados, as respostas e os argumentos produzidos pelos grupos a partir do material fornecido a eles em cada aula.

Na terceira fase deve ser feita a seleção, a análise dos dados coletados e as suas interpretações. Após isso, o pesquisador deverá selecionar aqueles que serão importantes para seu trabalho, delimitando assim a coleta de dados realizada.

No meu trabalho as análises e demais interpretações dos dados, coletados através dos diversos procedimentos, mencionados anteriormente, estão referidas após cada relato e análise de aula/etapa no quarto capítulo.

Na quarta fase, deve ser feito um relatório que deve demonstrar a forma como cada dado foi coletado, a teoria que serviu de base e classificação dos dados, bem como sua validação.

O relatório do meu trabalho de pesquisa está presente nesta dissertação, no quarto capítulo, na forma de relatos e análises em cada uma das aulas da sequência didática.

4 PRÁTICA

Este capítulo apresenta a prática desta dissertação de mestrado que foi realizada em uma escola particular de Porto Alegre, na qual atuo desde 2007, o Colégio Província de São Pedro. Esse colégio é uma instituição que possui apenas uma unidade de ensino e é reconhecida internacionalmente pela formação de seus egressos. Participaram da prática/sequência didática “Teoria de Grafos no Ensino Fundamental”, os alunos de uma de minhas turmas de sétimo ano, ao todo 25 alunos, em novembro de 2014.

A escola possui um Projeto Político Pedagógico (PPP) e uma proposta de trabalho apoiados no Método Montessori. Esse é um método educativo criado pela italiana Maria Montessori no século XIX. O método baseia-se em três princípios ou fundamentos básicos: O ambiente preparado, professor orientador e o aluno independente. Esses fundamentos podem ser melhor explicados dessa forma:

- Ambiente preparado: local limpo e organizado para atender individualidades e o ritmo de cada aluno.
- Professor Orientador: O professor apenas acompanha o desenvolvimento individual do aluno e se necessário o ajuda.
- Aluno independente: aquele que tem sua liberdade respeitada quando escolhe essa ou aquela atividade.

Assim, o aluno acaba aprendendo e desenvolvendo a partir dessa liberdade não só os saberes como a lógica, o português, mas também a amarrar os sapatos, passar a água de uma jarra para outra, confraternizar com os colegas, pentear os cabelos, brincar no pátio, cuidar do jardim, jogar um jogo, resolver atividades de aula, resolver fichas de aula ou de raciocínio lógico, ou seja, aprende a se socializar e a buscar o conhecimento a partir de seus interesses e suas próprias descobertas.

Analisando o item “Os Princípios e Fins” da Proposta Pedagógica da escola vemos os principais pontos que a escola destaca na sua forma de promover a educação e a aprendizagem, são: Respeito a todos os seres humanos; Valorizar o Pluralismos das idéias; Respeitar as individualidades de cada aluno; Estímulo para que o educando desenvolva habilidades no sentido de sua independência, para que conquiste seu espaço na sociedade e desenvolva também habilidades nas diversas áreas do conhecimento.

Existem ainda projetos pedagógicos que estão previstos no projeto político pedagógico desta escola e que realmente são colocados em prática como os projetos relacionados com as artes sejam elas no atelier das artes, com as aulas de música que começa no berçario com instrumentos musicais adaptados para a criança dessa idade, ou outros projetos, como robótica e gincanas culturais e esportivas e datas festivas.

Todo nosso trabalho e pesquisa sobre a concepção da prática deu origem à sequência didática que a meu ver melhor se adapta a essa escola devido ao perfil dos alunos. A prática será apresentada neste capítulo e foi pensada numa abordagem de Resolução de Problemas em um Estudo de Caso. Assim, tínhamos como principais expectativas e objetivos buscar abordar conceitos e ideias da Teoria de Grafos, relacionando-os com situações-problema. Acreditamos que a Teoria de Grafos, aliada com esse tipo de metodologia, apresenta aspectos importantes e pertinentes que podem contribuir para a formação de um indivíduo mais crítico e autônomo.

A turma como já havia mencionado, era composta por vinte e cinco alunos, cada um com doze anos de idade. A sequência didática foi aplicada dentro da grade curricular da turma e não como uma oficina fora do horário de aula, pois nossa proposta de dissertação busca inserir e trabalhar esse tipo de conteúdo aliado a um roteiro metodológico de Resolução de Problemas em sala de aula.

A sequência didática tem como ponto de partida os problemas históricos e clássicos que contribuíram para o surgimento da Teoria de Grafos. À medida que fomos dando andamento a essa sequência, apresentamos problemas atuais que necessitavam da Teoria de Grafos para que pudessem ser resolvidos. A prática levou em consideração referências internacionais e nacionais sobre a metodologia da Resolução de Problemas aplicada junto aos conceitos da Teoria de Grafos.

Nas próximas seções apresentaremos as aulas com seus respectivos objetivos, expectativas e exercícios propostos, assim como, relato e análise de como as aulas transcorreram baseadas nas observações, anotações e filmagens feitas por este mestrando.

4.1 Aula 1: Introdução

4.1.1 Objetivos e expectativas

Nosso objetivo, nesse primeiro encontro, era propiciar para o grupo de alunos um resgate histórico do surgimento da Teoria de Grafos e suas aplicações. Esse resgate histórico foi realizado a partir de uma apresentação no PowerPoint, na qual apresentamos algumas imagens e informações que foram sendo explicadas uma a uma até reconstruírem a história da Teoria de Grafos, além de mostrar a utilidade desse ramo da Matemática em sua época de descoberta e na atualidade.

Entre as imagens que foram comentadas na apresentação para os alunos estavam as de alguns matemáticos envolvidos no processo histórico como, por exemplo: Leonard Euler e Sir W.R Hamilton. Também estavam entre as imagens aquelas que demonstram a importância do estudo de Grafos, bem como sua utilidade para os correios, rotas, distribuição de energia, entre outras.

Minha expectativa era despertar o interesse dos alunos por esse tema a partir das curiosidades e dúvidas que os problemas poderiam trazer, assim como relatos históricos e possíveis aplicações da Teoria.

4.1.2 Relato e Análise da primeira aula

A apresentação no PowerPoint transcorreu bem e foi até uma surpresa, pois os alunos participaram mais do que eu havia imaginado, pois muitas dúvidas e questionamentos surgiram a cada imagem que aparecia nos slides. Os questionamentos eram do tipo: Quem são essas pessoas que aparecem nas imagens? Eles eram Matemáticos? Que contribuições eles fizeram? Eles eram gênios? Como podemos notar as perguntas eram curiosidades dos alunos. No entanto, quando apresentei o Problema das Pontes de Konigsberg e o Problema do Caixeiro Viajante, as perguntas foram bem interessantes, como por exemplo: Professor, tu conseguiria resolver esses problemas? Os Matemáticos conseguiram resolvê-los? É possível resolver?

A ideia era justamente a partir de belas imagens e problemas históricos despertar o interesse dos alunos, mas como eu disse antes, para minha surpresa, a participação dos alunos superou minha expectativa. É importante ressaltar que as perguntas dos alunos possibilitam ao professor esclarecer algumas dúvidas e até mesmo estimular os alunos com outras, como por exemplo: quando um aluno perguntou se era possível resolver o problema das “Pontes de konigsberg”, respondi com outra pergunta: quem sabe tu não resolves esse problema na próxima aula?

As perguntas dos alunos sempre são importantes, pois a partir das mesmas é possível compreender que tipos de dúvidas os alunos possuem e a partir disso, podemos planejar uma forma de sanar tais dúvidas.

Na primeira aula, utilizamos o primeiro passo do roteiro metodológico do GTERP (2004), o qual se reserva à preparação dos problemas, pois montei a apresentação visando à construção de novos conceitos, no nosso caso, relacionados à Teoria de Grafos. Os problemas apresentados na primeira aula são chamados de Problemas Geradores (GTERP, 2004).

4.2 Aula 2: Caminhos Eulerianos

4.2.1 Objetivos e expectativas

A partir da segunda aula, a turma foi dividida em grupos de três a seis alunos. Nossos objetivos e expectativas eram que, ao dividir a turma em grupos, pudéssemos favorecer a troca de saberes e ideias entre os diferentes componentes de cada grupo e também contribuir com sua socialização e o poder de argumentação dos mesmos. Cada componente de cada grupo recebeu uma lista contendo atividades, as quais exploravam ideias relacionadas com o Problema das “Pontes de Konigsberg”, bem como com situações em que figuras deviam ser desenhadas na folha de papel sem que dela fosse levantado o lápis/caneta.

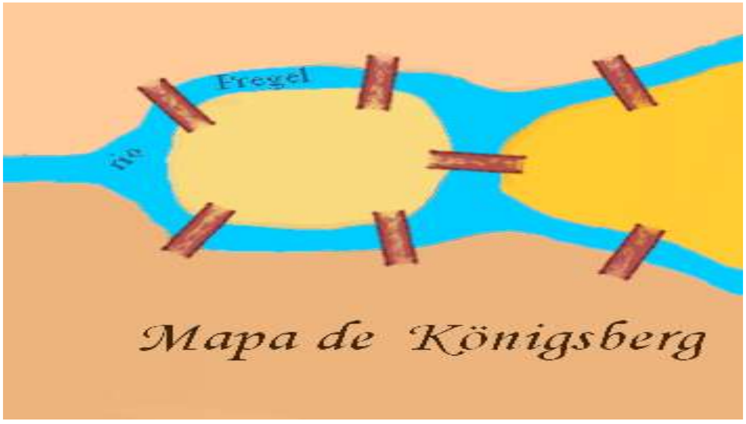
4.2.2 Atividades

Atividade 1: Pontes de Konigsberg

Em Konigsberg, atual Kaliningrado, que fica entre a Polônia e a Lituânia, discutia-se nas ruas da cidade a possibilidade de fazer um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo lugar, atravessando todas as pontes uma única vez. Essa possibilidade havia se tornado uma lenda popular até que Euler, em 1736, solucionou esse problema dando origem a Teoria de Grafos.

O grupo será convidado a ler o problema a seguir e tentar encontrar uma solução para o mesmo:

Na cidade de Konigsberg 7 pontes cruzam o rio Pregel estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as ilhas e as margens opostas do rio, conforme ilustrado na figura abaixo:



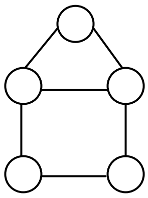
Será possível fazer um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma vez?

Observação: Para a solução encontrada, sendo o passeio possível ou não, o grupo deve apresentar ao menos um argumento que a sustente.

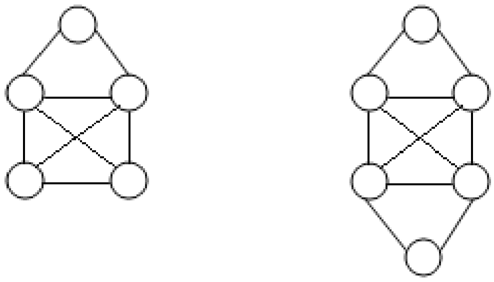
Quadro 4.1: atividade 1 fornecida para os grupos.
Fonte: Arquivos do autor

Atividade 2: *O grupo será convidado a encontrar, para cada figura abaixo, um caminho que passe todos os pontos(vértices) percorrendo todas as arestas (linhas que ligam os pontos) uma única vez, sem tirar o lápis ou a caneta do papel.*

a)



b)



Atividade 3: *A partir dos caminhos encontrados pelos grupos em cada item da atividade 2, responda:*

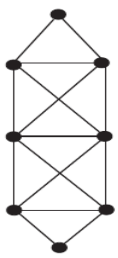
a) *Pode-se começar por qualquer vértice o caminho encontrado?*

b) *Por qual motivo será que ocorre o que o grupo respondeu no item a? Aqui o grupo deve apresentar um argumento que sustente sua resposta.*

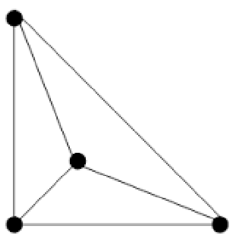
c) *É possível fazer uma representação, semelhante as da atividade 2, para a atividade 1, ou seja, representar cada ponte como uma aresta que liga os vértices e, cada margem do rio e suas ilhas, como vértices? Nesse momento, convido cada grupo a tentar fazer essa representação.*

Atividade 4: *Verifique em cada figura abaixo se é possível encontrar um caminho que passe por todos os vértices percorrendo todas as arestas uma única vez, sem tirar o lápis ou a caneta do papel.*

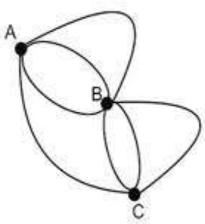
a)



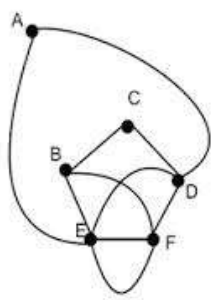
b)



c)



d)



Quadro 4.2: atividades 2, 3 e 4 fornecidas para os grupos.
Fonte: Arquivos do autor.

Atividade 5: *Para os itens que não foi possível encontrar um caminho que percorresse todas as arestas uma única vez e que passasse por todos os vértices, responda:*

a) *Por qual motivo o grupo acredita que não foi possível encontrar um caminho que respeitasse esses critérios?*

b) *É possível fazer alguma alteração, seja incluindo um ou mais vértices ou arestas na figura, para que isso possibilite encontrar um caminho que respeite esses critérios? Se sim, dê pelo menos um exemplo.*

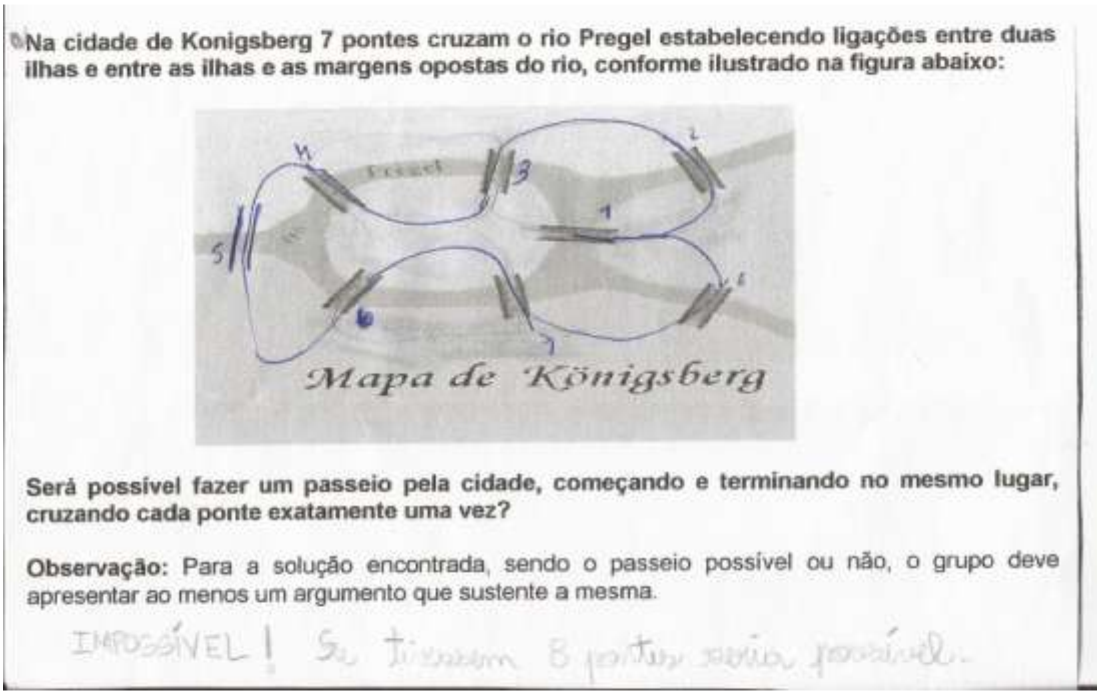
Atividade 6: Hora do desafio! *Cada grupo será convidado a inventar uma ou mais representações como as da atividade 4, para que os outros grupos tentem encontrar uma possível solução para os mesmos.*

Quadro 4.3: atividades 5 e 6 fornecidas para os grupos.
Fonte: Arquivos do autor

4.2.3 Relato e Análise da segunda aula

A partir dessa aula estabelecemos a unidade-caso que é a primeira etapa do Estudo de Caso segundo Gil (1995), pois dividimos a turma em grupos de três a seis alunos delimitando, por meio da sequência didática aliada à perspectiva metodológica da Resolução de Problema, nosso publico alvo. Cada atividade ou problema da sequência foi preparado de acordo com o primeiro passo do roteiro metodológico proposto pelo GTERP (2004), que é justamente a *preparação do problema,* na qual o professor deve selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Na primeira atividade, os grupos deviam encontrar uma possível solução para o problema das Pontes de Konigsberg. Assim, solicitei aos componentes de cada grupo que fizessem uma *leitura individual* (segundo passo), sobre cada atividade, mais especificamente, sobre o problema das "Pontes de Konigsberg" para que os alunos fossem desenvolvendo suas primeiras ideias. Num segundo momento, solicitei aos alunos uma *leitura em conjunto* (terceiro passo) e, pude perceber que os alunos trocavam ideias e argumentavam entre eles o porquê de tais ideias e soluções encontradas, muitos grupos rabiscavam o desenho recebido a fim de encontrar uma possível solução, note que essa etapa, na qual os alunos tentam resolver o problema ou a situação proposta é classificada pelo GTERP (2004) como *Resolução do Problema* (quarto passo). Alguns grupos, ou por não entender o problema ou por falta de interesse, tiveram mais dificuldades. Para esses grupos, minha estratégia foi incentivar e estimular com algumas ideias (quinto passo, *observar e incentivar*), de forma que eles pudessem voltar a se interessar em resolver o problema ou ajudar os grupos na compreensão do que o exercício realmente esta pedindo.

Quatro grupos (80%), concluíram para a primeira atividade que não era possível fazer um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma vez, pois havia um número ímpar de pontes entre as margens e ilhas. Um grupo em particular percebeu que se fossem incluídas uma ou mais pontes seria possível. Neste caso, o grupo inventou uma solução criativa para esse problema, ou seja, incluem-se pontes e o problema está resolvido. Seguem abaixo as figura 4.1, 4.2 e 4.3 que mostram algumas das respostas apresentadas pelos grupos sobre atividade 1:



Na cidade de Konigsberg 7 pontes cruzam o rio Pregel estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as ilhas e as margens opostas do rio, conforme ilustrado na figura abaixo:

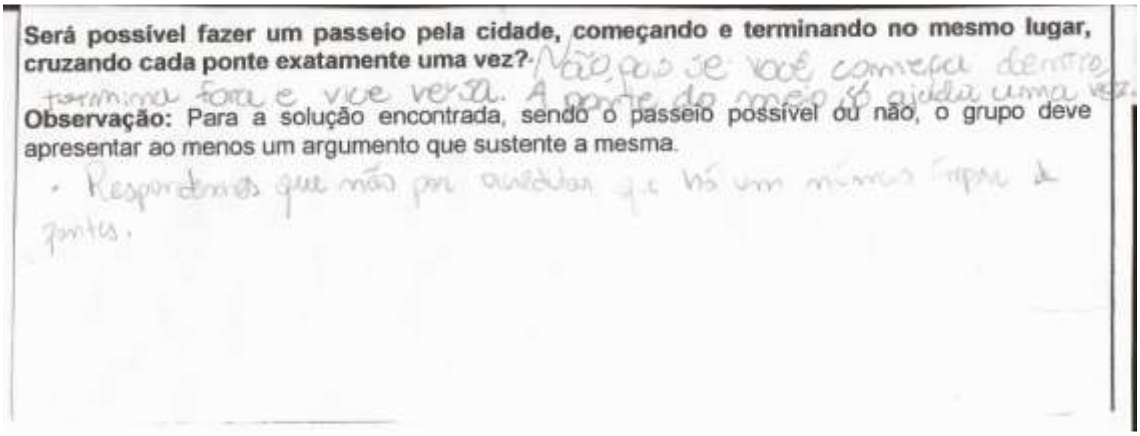
Será possível fazer um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma vez?

Observação: Para a solução encontrada, sendo o passeio possível ou não, o grupo deve apresentar ao menos um argumento que sustente a mesma.

IMPOSSÍVEL! Se tivessem 8 pontes seria possível.

Figura 4.1: Resolução da atividade 1.
Fonte: Arquivos do autor.

Note que grupo que sugeriu incluir uma ponte para encontrar uma solução alternativa. A imagem traz consigo até uma sequência de 1 a 8 mostrando o caminho percorrido, bem como a inclusão de uma ponte à caneta (ao lado do número 5).

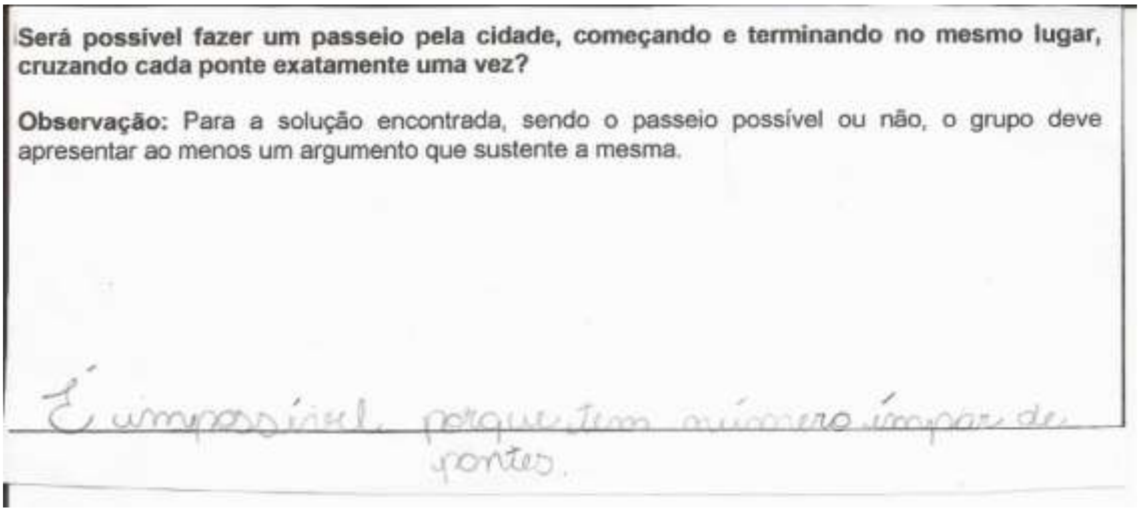

Será possível fazer um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma vez? Não pois se você começa dentro termina fora e vice versa. A ponte do meio só ajuda uma vez.

Observação: Para a solução encontrada, sendo o passeio possível ou não, o grupo deve apresentar ao menos um argumento que sustente a mesma.

• Respondemos que não por avaliar q. há um número ímpar de pontes.

Figura 4.2: Resolução da atividade 1.
Fonte: Arquivos do autor.

Note que esse grupo argumentou dizendo que não era possível fazer a travessia por haver um número ímpar de pontes. Essa argumentação se mostra válido quando definimos Caminho Euleriano na aula seguinte (passo 9 do roteiro metodológico, que é a formalização dos conceitos).


Será possível fazer um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma vez?

Observação: Para a solução encontrada, sendo o passeio possível ou não, o grupo deve apresentar ao menos um argumento que sustente a mesma.

É impossível porque tem número ímpar de pontes.

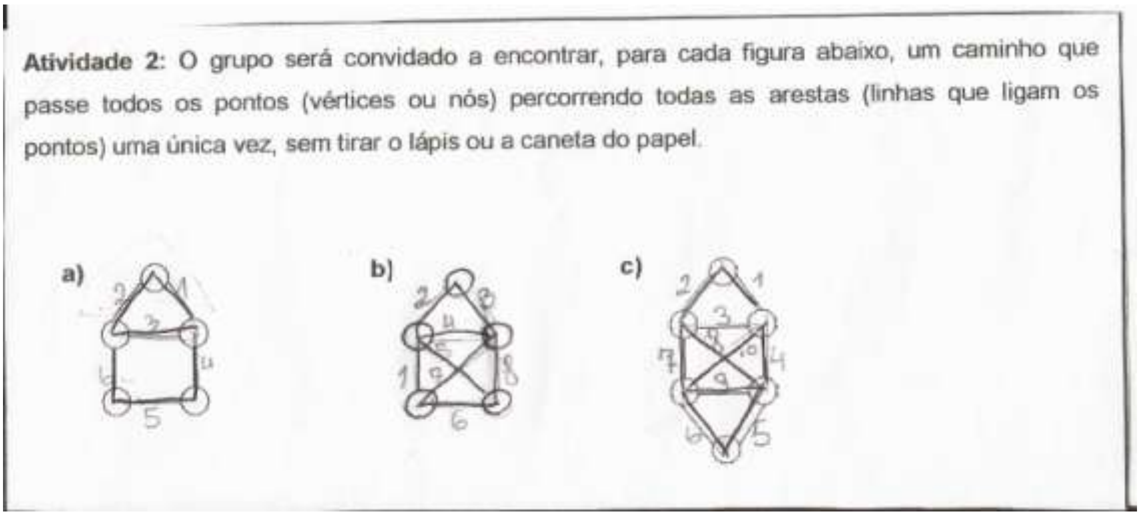
Figura 4.3: Resolução da atividade 1.

Fonte: Arquivos do autor.

Foi solicitado aos representantes de cada grupo que fossem até o quadro de aula e registrassem suas resoluções e demais considerações (sexto passo, *registro das resoluções no quadro*). Nessa etapa estabelecemos uma *Plenária* (sétimo passo), na qual os alunos discutiam suas respostas e demais ponderações. No final dessa atividade e logo após a Plenária, tentei sanar as diferentes dúvidas e chegar a um consenso geral sobre a atividade (oitavo passo, *busca do consenso*). A busca do consenso se deu a partir das resoluções dos alunos, pois verificamos todas no quadro de aula e procuramos buscar uma resposta ou uma resolução que pudesse explicar os motivos pelos quais não era possível fazer esse passeio pelas Pontes de Konigsberg.

Um grupo, em especial, chamou minha atenção, pois argumentou que após algumas tentativas concluiu que não era possível fazer esse passeio, pois o número de pontes que saiam de cada margem ou ilha não era par. Mas eles me perguntaram se só isso garantia um bom argumento para a não realização do passeio. Respondi que não podia dizer, mas incentivei-os a procurar outro argumento ou melhorar o anterior. Após um tempo, o grupo disse que conseguiu encontrar um caminho com duas margens ou ilhas que possuíssem um número impar de pontes saindo delas. Isso foi muito interessante, pois tinha relação direta com a definição de Caminhos Eulerianos, que seria explorada na aula seguinte.

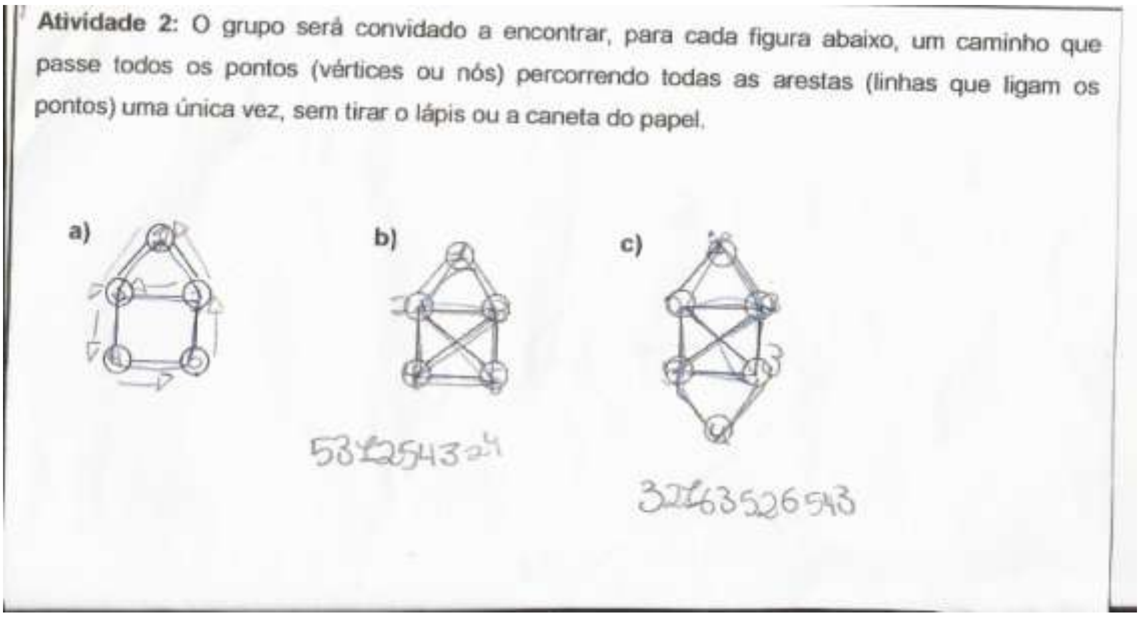
Na segunda atividade, na qual os grupos se deparavam com três figuras, os alunos deviam reproduzi-las sem tirar o lápis/caneta do papel e respeitando as regras da atividade. Na atividade 2, os grupos fizeram uma leitura individual da atividade e posteriormente uma leitura em conjunto (passos 2 e 3 do roteiro metodológico). A partir disso, os grupos executaram o quarto passo que é buscar a resolução do problema. Durante o período em que os alunos buscavam resolver essa atividade eu incentivava e estimulava o trabalho colaborativo (quinto passo) entre os integrantes dos diversos grupos, principalmente aqueles que apresentavam maiores dificuldades. Dos cinco grupos, um (20%), não conseguiu resolver essa atividade, pois, como as figuras estavam em sequência, ao resolver a primeira, ficaria mais fácil resolver as próximas e, esse grupo não conseguiu resolver a primeira. Todos os outros grupos conseguiram resolver a atividade, sendo dois por tentativa e erro. É interessante destacar nessa atividade que dois grupos (40%), que acertaram essa atividade, nomearam os vértices ou nós com números e as arestas ou arcos, como segmentos orientados, mesmo nunca tendo discutido esse tipo de resolução em aula. Outro grupo (20%) colocou a sequência de vértices a serem seguidos para formar o caminho solicitado pela atividade. A seguir as figuras 4.4, 4.5 e 4.6 apresentam algumas das soluções encontradas pelos grupos:


Atividade 2: O grupo será convidado a encontrar, para cada figura abaixo, um caminho que passe todos os pontos (vértices ou nós) percorrendo todas as arestas (linhas que ligam os pontos) uma única vez, sem tirar o lápis ou a caneta do papel.

a) b) c)

Figura 4.4: Resolução da atividade 2.
Fonte: Arquivos do autor.

Nota-se que a solução encontrada pelo grupo apresenta vértices numerados e segmentos não orientados.


Atividade 2: O grupo será convidado a encontrar, para cada figura abaixo, um caminho que passe todos os pontos (vértices ou nós) percorrendo todas as arestas (linhas que ligam os pontos) uma única vez, sem tirar o lápis ou a caneta do papel.

a) b) c)

Figura 4.5: Resolução da atividade 2.
Fonte: Arquivos do autor.

Solução com vértices numerados e segmentos orientados para o item a, além disso, o grupo apresentou uma sequência de números para as resoluções dos itens b e c.

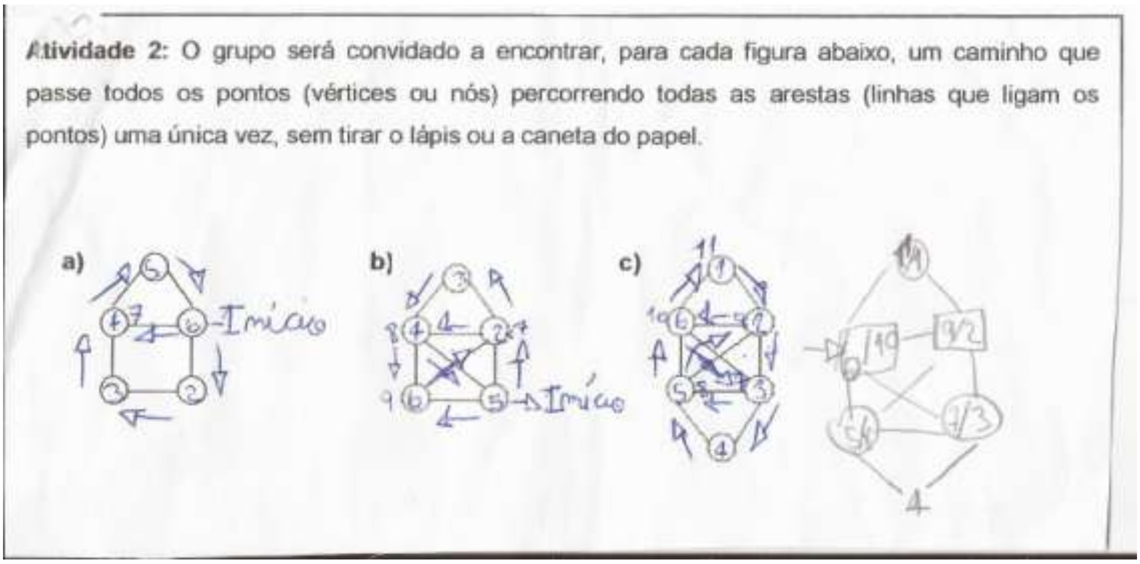

Atividade 2: O grupo será convidado a encontrar, para cada figura abaixo, um caminho que passe todos os pontos (vértices ou nós) percorrendo todas as arestas (linhas que ligam os pontos) uma única vez, sem tirar o lápis ou a caneta do papel.

Figura 4.6: Resolução da atividade 2.
Fonte: Arquivos do autor.

Note que o grupo apresenta uma solução com vértices numerados e segmentos orientados.

Importante ressaltar, que ao final, da aula solicitei aos representantes de cada grupo que mostrassem no quadro de aula suas resoluções (passo 6) e a partir delas discutir (passo 7) e encontrar uma resolução comum, ou seja, uma generalização ou um consenso sobre a respostas encontradas (passo 8). Nota-se aqui uma ideia intuitiva na resolução desse tipo de atividade.

Na terceira atividade, os grupos deviam responder algumas perguntas e criar argumentos em relação à segunda atividade seguindo os passos 2, 3 e 4: Leitura Individual; Leitura em Conjunto; Resolução de Problemas. A discussão foi muito rica e interessante, pois os alunos mostravam as maneiras diferentes com que cada grupo chegou à resolução para cada figura. Além disso, alguns grupos trocavam dicas, ensinavam suas estratégias de resolução que fariam toda a diferença para resolver esse tipo de problema, como por exemplo: numerar os vértices, mostrar as orientações e direções seguidas em cada vértice, impedindo assim que os alunos se confundissem no momento de tentar resolver as atividades, (passos 5, 6, 7 e 8 conforme o roteiro do GTERP), mas o que iremos destacar dessa atividade é o item "c", pois esse convidava os alunos a tentarem representar uma figura no estilo da *atividade dois* para a *atividade um* das "Pontes de Konigsberg". Para minha surpresa, dois grupos (40%), conseguiram criar perfeitamente um grafo que representa o problema das Pontes de konigsberg. Os outros grupos chegaram perto, mas não conseguiram relacionar as ilhas e a porção de terras com um vértice e as pontes com as arestas.

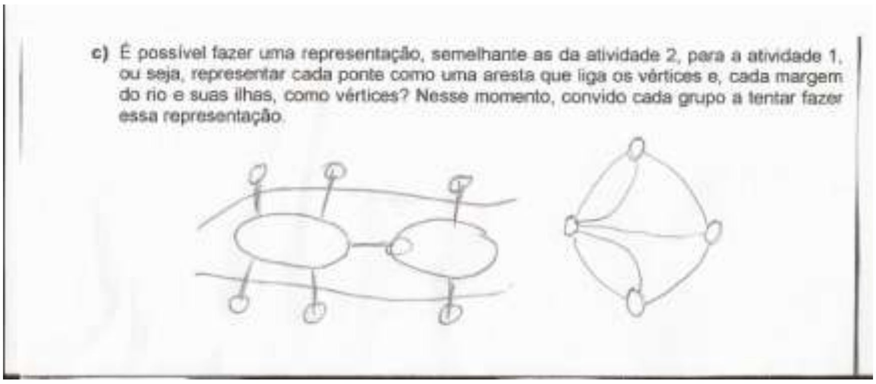


Figura 4.7: Resolução da atividade 3.c).
Fonte: Arquivos do autor.

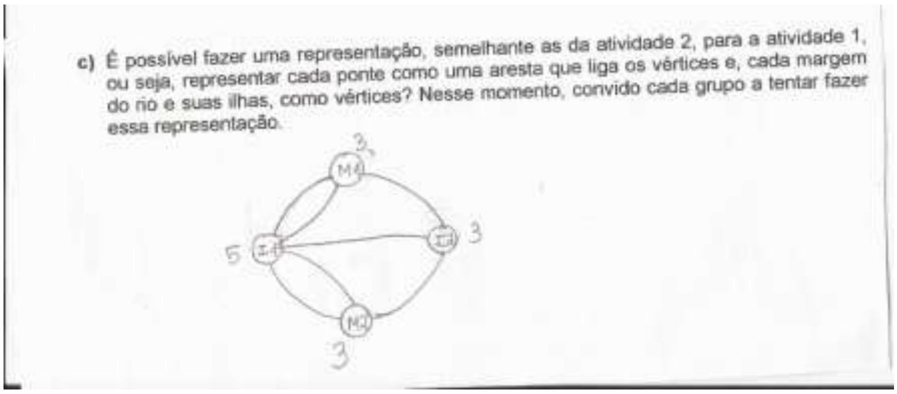


Figura 4.8: Resolução da atividade 3.c).
Fonte: Arquivos do autor.

Das soluções apresentadas pelos dois grupos que conseguiram representar um grafo para as “Pontes de Konigsberg”, note que, em uma delas, os vértices possuíam até símbolos representando as margens e as ilhas.

Na quarta atividade, os grupos tinham que verificar se era possível ou não reproduzir cada um dos quatro grafos que apareciam sem tirar o lápis/caneta do papel e respeitando as regras da atividade. Nessa atividade, os alunos tiveram mais dificuldades que na atividade dois, mas no geral os grupos após discutirem entre si, chegaram as suas devidas representações, quando possível.

Na quinta atividade, na qual os alunos no item “a” eram convidados a encontrar um argumento que explicasse o motivo pelo qual não era possível encontrar um caminho para um ou mais grafos da atividade quatro, apenas dois grupos responderam que era devido ao número de saídas ímpares de alguns vértices/nós. Nota-se aqui uma ideia que vai ao encontro do conceito de grafo Euleriano que só foi explorado na aula seguinte. Já para o item “b” os grupos deviam fazer alterações no grafo que era impossível de ser percorrido, incluindo arestas e vértices para possibilitar um caminho, respeitando as regras da atividade quatro. Para esse item, apenas um grupo (20%), foi capaz de criar essas alterações de forma a possibilitar o caminho. Seguem as figuras 4.8 e 4.9 que mostram a figura em que era impossível seguir as regras da atividade 5, item a, e a solução encontrada por esse grupo no item b.

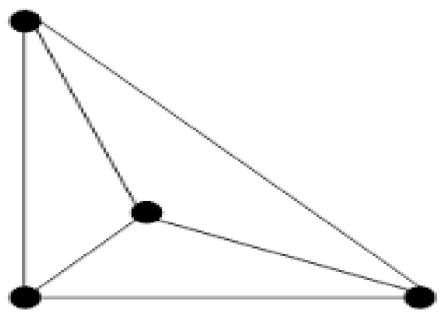


Figura 4.9: grafo que não satisfazia as regras da atividade 5.

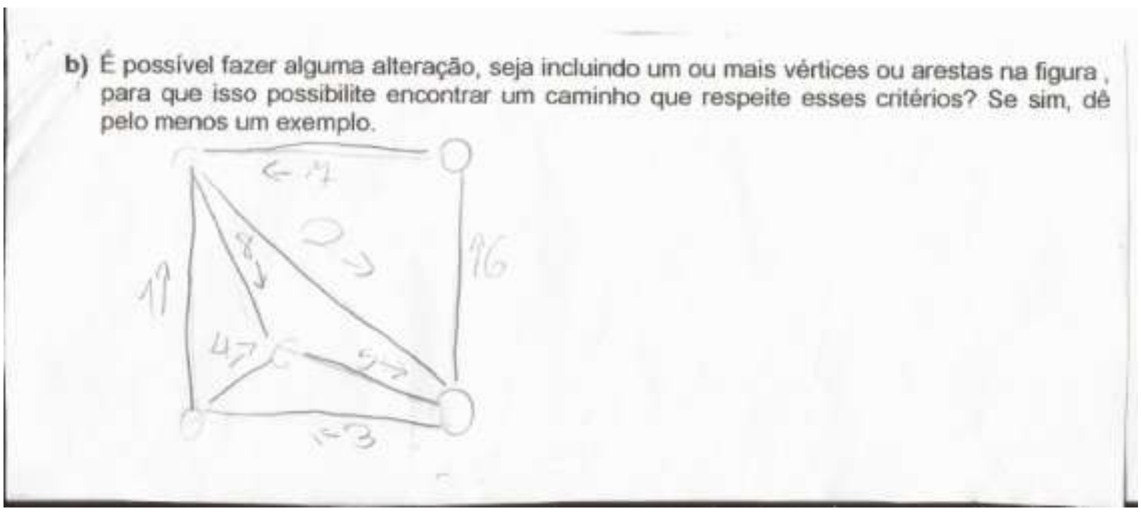


Figura 4.10: solução apresentada para a figura 4.9.
Fonte: Arquivos do autor.

Na sexta e última atividade, os grupos puderam criar seus próprios grafos e desafiarem uns aos outros. Foi uma atividade recreativa que visava a interação entre todos os grupos, a troca de ideias e possibilitar a criação e a participação desses alunos no processo de aprendizagem, uma vez que estavam criando problemas fundamentados na experiência e nas ideias aprendidas até aquele momento. É importante destacar que nessa atividade os alunos seguiram todos os passos do roteiro metodológico proposto pelo GTERP (2004). Os alunos criaram problemas (passo 1), possibilitaram uma leitura individual e em conjunto dos grupos (passos 2 e 3), permitiram aos grupos encontrarem uma resolução para problemas, sempre incentivando e observando os grupos (passos 4 e 5). Depois disso, os grupos foram ao quadro para mostrar suas resoluções e discutiram sobre uma resolução correta ou possíveis generalizações (passos 6, 7 e 8).

As atividades da segunda aula foram uma boa estratégia para estimular a criatividade e a interação dos grupos (vide as imagens a seguir), além é claro, de possibilitar uma breve revisão de tudo o que vimos nas duas primeiras aulas.

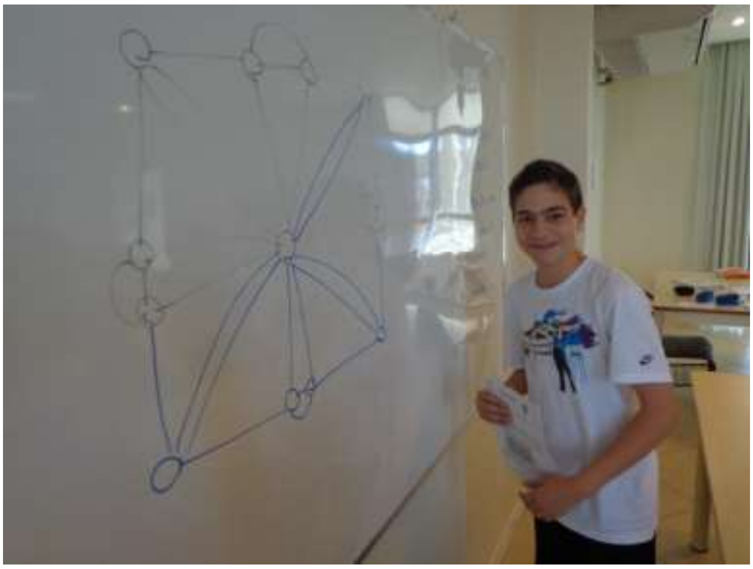


Figura 4.11: Resolução de problemas propostos pelos alunos (atividades 6).
Fonte: Arquivos do autor.

Figura 4.12: Resolução de problemas propostos pelos alunos (atividades 6).
Fonte: Arquivos do autor.

Figura 4.13: Resolução de problemas propostos pelos alunos (atividades 6).
Fonte: Arquivos do autor.

4.3 Aula 3: Formalização dos Conceitos Trabalhados nas Aulas 1 e 2

4.3.1 Objetivo e expectativas

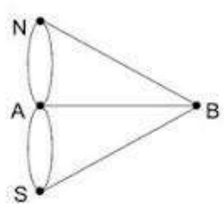
Nosso objetivo, para a terceira aula, era formalizar os conceitos e ideias trabalhadas na aula anterior como: Grafo; Grau de um vértice e Grau de um Grafo; Caminho Euleriano e o Teorema do Caminho Euleriano (passo 9 do roteiro metodológico do GTERP).

Após a formalização, retornamos a algumas das atividades da aula anterior para explorá-las com mais rigor. Esperávamos que os alunos fossem capazes de identificar e aplicar os conceitos formalizados nas atividades vistas na segunda aula.

4.3.2 Definições

Para compreender melhor as ideias relacionadas à Teoria de Grafos vistas até o momento, foi entregue aos alunos uma folha com algumas definições e imagens sobre as ideias trabalhadas nas últimas aulas. As definições também foram exploradas no quadro de aula para que os alunos pudessem compreender melhor ou complementassem alguma ideia que não foi colocada na folha entregue anteriormente. Abaixo seguem os quadros 4.4 e 4.5 que apresentam tais definições e imagens:

Vamos retornar ao nosso primeiro problema, o das Pontes de Konigsberg. O problema possui a seguinte representação de grafo vista em aula e que inclusive, alguns grupos conseguiram representar:



Quadro 4.4: Definições fornecidas para os grupos.

Grafo: Chamamos de Grafo um conjunto de pontos do plano ligados por segmentos cujas extremidades devem conter tais pontos. Os pontos são chamados de vértices ou nós e os segmentos são chamados de arestas ou arcos.

Grau de um Vértice: Chamamos de grau de um vértice o número de arestas incidentes nesse vértice, ou seja, que possui uma de suas extremidades nesse vértice.

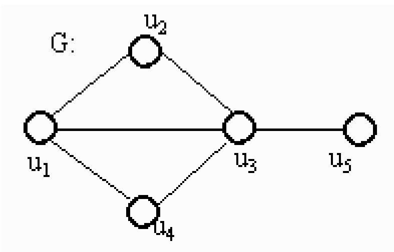
Exemplo: no grafo das Pontes de Konigsberg, os vértices representados pelas letras B, S e N possuem grau 3 e o vértice representado pela letra A possui grau 5.

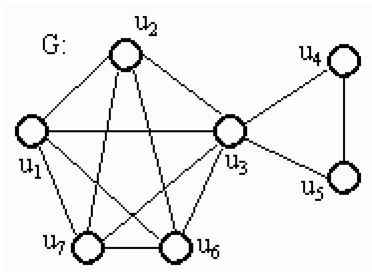
Grau de um Grafo. Chamamos de grau de grafo a soma dos graus dos seus vértices.

Exemplo: O grau do grafo das Pontes de Konigsberg é 14.

Caminho Euleriano: é o caminho que passa por todas as arestas uma única só vez. O caminho pode ser aberto ou fechado. Aberto se os vértices de entrada e saída não coincidem e fechado se esses mesmos vértices coincidem.

Exemplo: Vimos nas aulas anteriores que o grafo das Pontes de Konigsberg isso não é possível, mas vejamos dois exemplos de grafos em que o Caminho Euleriano é possível:





No grafo da Figura à esquerda temos um exemplo de Caminho Euleriano aberto, pois temos a seguinte sequência de vértices (u1, u2, u3, u4, u1, u3, u5). Já no grafo da à direita temos um Caminho Euleriano fechado, pois temos a seguinte sequência de vértices (u1, u2, u3, u4, u5, u3, u1, u6, u2, u7, u3, u6, u7, u1).

Quadro 4.5: Definições fornecidas para os grupos.
Fonte: Arquivos do autor.

4.3.3 Relato e Análise da terceira aula

A aula transcorreu de uma forma mais tranquila do que imaginávamos, pois como iríamos formalizar as novas definições tínhamos medo que alguns grupos tivessem muitas dúvidas. No entanto, como retomávamos as ideias e conceitos das aulas anteriores no momento das explicações, os alunos acabaram compreendendo e fazendo perguntas e conclusões coerentes com as definições aprendidas. Uma conclusão bem interessante a que dois grupos (40%) chegaram é a seguinte: que o grau de um grafo sempre será par, pois segundo eles mesmos, as arestas são contadas duas vezes, uma vez que elas estão conectadas a dois vértices. Outro fato que é importante destacar foi que, após a definição de Caminhos Eulerianos, foi solicitado que os grupos voltassem às atividades da aula anterior para verificar se os grafos possuíam Caminhos Eulerianos abertos, fechados ou se não eram Eulerianos. É importante voltar às atividades anteriores após formalizar conceitos e definições para oportunizarmos ao aluno a verificação de sua compreensão sobre as mesmas.

> A volta às definições constitui uma operação mental. Se desejamos compreender a importância das palavras, precisamos primeiro sentir que as palavras são importantes. Dificilmente podemos raciocinar sem o auxilio das palavras ou símbolos de qualquer espécie. Assim, palavras e signos tem poder. ([POLYA, p. 59]).

A terceira aula possibilitou o fechamento do roteiro metodológico sugerido pelo GTERP (2004) e utilizado por mim nessa prática, pois esse é o nono e último passo do roteiro, a *formalização do conteúdo,* no qual o professor formaliza e apresenta de forma organizada e em linguagem matemática os conceitos construídos através da Resolução de Problemas, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas acerca do tema.

4.4 Aula 4: Caminhos Hamiltonianos

4.4.1 Objetivos e expectativas

Nosso objetivo, para a quarta aula, era explorar o Jogo “Icosian Game” de Hamilton, pois a partir da proposta desse jogo, seria possível na aula seguinte, trabalhar com o problema do “Caixeiro Viajante” que é decorrente desse modelo. Além disso, solicitamos aos grupos que fosse feita uma comparação entre os modelos de Euler e Hamilton. Minha expectativa era que os alunos fossem capazes de distinguir bem os modelos identificando suas diferenças.

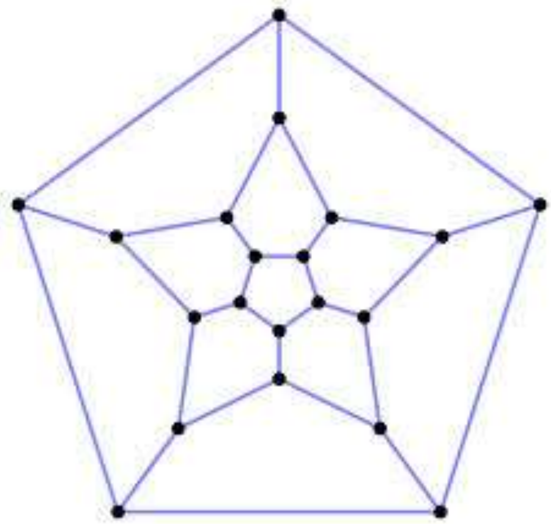
4.4.2 Atividades

Seu grupo recebeu junto com estas atividades um tabuleiro, em folha A4, na forma de um dodecaedro achatado que será a representação do Grafo, no qual cada vértice será uma cidade e, cada aresta, será uma estrada que liga uma cidade a outra.

Atividade 1: Icosian Game

Proposta do jogo:

Sair de Londres, que será representada no tabuleiro da figura 4.15 por um vértice, e passar por todas as demais cidades (vértices no tabuleiro) uma única vez e retornar para Londres.



Atividade 2: *O grupo deverá fazer uma comparação entre os modelos de Euler e Hamilton. Nessa comparação devem aparecer um ou mais argumentos que diferenciem um modelo do outro.*

Atividade 3: *É possível partir de qualquer vértice passar por todos os demais, uma única vez, e retornar ao vértice de origem? Se sim, apresentem um ou mais argumentos que sustentem a ideia do grupo.*

Quadro 4.6: *Atividades fornecidas aos grupos.*
Fonte: *Arquivos do autor.*

4.4.3 Relato e Análise da quarta aula

Nesta aula, os grupos estavam eufóricos para jogar um jogo novo e, para eles, era melhor ainda por ser de matemática (digo isso por essa turma adorar desafios e jogos de lógica). É importante lembrar que a história sobre quem foi Sir W.R. Hamilton foi contada na primeira aula, na qual foi feita uma apresentação no PowerPoint. Nessa primeira aula, já havíamos mencionado esse jogo em específico e, naquela ocasião, os alunos se mostraram ansiosos pelo momento em que poderiam de fato jogá-lo.

Na primeira atividade, na qual os grupos se submeteram ao jogo, em busca de fazer cumprir as suas regras, não houve surpresas, pois era esperado que todos conseguissem achar o caminho com algum tempo gasto em tentativa e erro.

Os grupos seguiram os passos 2 ao 9, conduzidos por mim, como professor mediador. Inicialmente, os alunos fizeram uma leitura individual sobre as regras do jogo. Posteriormente, os alunos fizeram a leitura em grupo e eu expliquei mais uma vez como seria e em que consistia o jogo. Após todos os grupos terem encontrado uma solução foi solicitado que fossem no quadro de aula representar suas soluções. Para finalizar discutimos e tiramos algumas conclusões da atividade e sanamos eventuais dúvidas dos grupos.

Terminada essa primeira atividade, houve por parte dos grupos certa frustração, uma vez que quatro (80%) dos grupos encontraram o caminho relativamente rápido. A partir disso, pensei em uma segunda fase para o jogo; casualmente, em nossa sala de aula, havia outros jogos, foi então que peguei alguns dados e uns pinos (que representariam cada componente do grupo) e fizemos o seguinte: todos deveriam colocar seus pinos em Londres e, a partir disso, jogando-se o dado, cada componente do grupo percorreria quantos passos o dado determinasse (importante destacar que cada passo era representado por uma aresta que levaria o jogador até o próximo vértice). Quem chegasse a Londres percorrendo todos os vértices uma única vez e respeitando as demais regras estabelecidas anteriormente venceria o jogo. Naquele momento, era essencial que fosse resgatada a vontade e a curiosidade dos alunos. Esse momento está representado pela figura 4.14 a seguir:

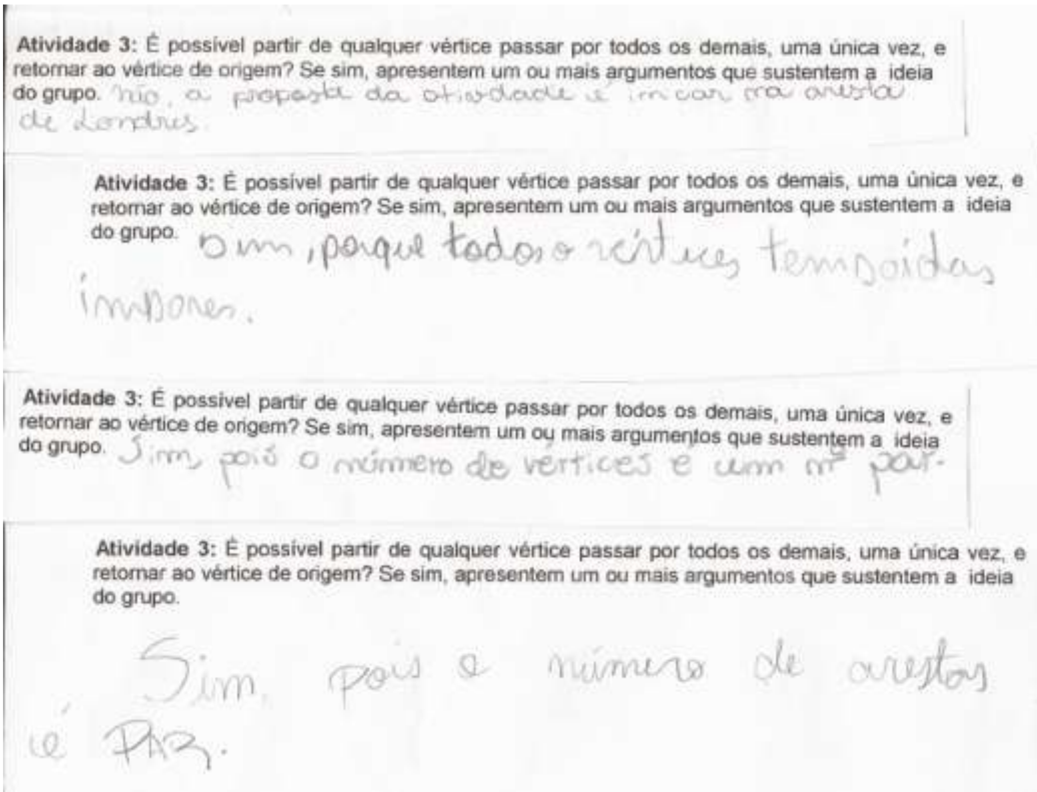
Figura 4.14: Alunos jogando.
Fonte: Arquivos do autor.

Na segunda atividade, os grupos foram convidados a estabelecer uma comparação entre os modelos de Hamilton que era representada pelo jogo e o modelo de Euler explorado em aulas anteriores.

Foi combinado para essa atividade que os alunos de cada grupo debateriam e estabeleceriam, através da argumentação escrita ou oral, as diferenças ou igualdades dos modelos. Após o término do tempo cedido para a criação dessa argumentação, todos os grupos, portanto 100%, conseguiram encontrar a principal diferença, mas um grupo (20%), em especial, argumentou da seguinte forma: *o modelo Hamiltoniano é preciso passar por todos os vértices uma única só vez, enquanto o modelo Euleriano é preciso passar por todas as arestas uma única só vez.*

Todos os grupos responderam de forma análoga, mas esse grupo em especial, usou termos matemáticos e se preocupou com o rigor matemático. É importante lembrar que era uma turma de sétimo ano (sexta-série) e ser capaz de emitir uma argumentação oral desse tipo, para mim em especial, foi impressionante, pois é comum nessa faixa etária os alunos terem dificuldade para se expressar.

Para a terceira e última atividade dessa aula, os grupos deviam responder se era possível sair de qualquer vértice e passar pelos demais uma única vez. Seguem abaixo algumas das respostas dadas pelos grupos na atividade 3:



Atividade 3: É possível partir de qualquer vértice passar por todos os demais, uma única vez, e retornar ao vértice de origem? Se sim, apresentem um ou mais argumentos que sustentem a ideia do grupo. não, a proposta da atividade é incomum na aresta de Londres.

Atividade 3: É possível partir de qualquer vértice passar por todos os demais, uma única vez, e retornar ao vértice de origem? Se sim, apresentem um ou mais argumentos que sustentem a ideia do grupo. Sim, porque todos os vértices tem pontas ímpares.

Atividade 3: É possível partir de qualquer vértice passar por todos os demais, uma única vez, e retornar ao vértice de origem? Se sim, apresentem um ou mais argumentos que sustentem a ideia do grupo. Sim, pois o número de vértices é um nº par.

Atividade 3: É possível partir de qualquer vértice passar por todos os demais, uma única vez, e retornar ao vértice de origem? Se sim, apresentem um ou mais argumentos que sustentem a ideia do grupo.

Sim, pois o número de arestas é PAR.

Figura 4.15: Respostas fornecidas pelos grupos para atividade 3.
Fonte: Arquivos do autor.

houve certa discrepância nas respostas como do tipo: “sim, pois o número de vértices era ímpar” ou “sim, pois o número de arestas era par”. Nessa atividade em especial, os alunos tiveram dificuldades para estabelecer uma argumentação que justificasse suas respostas. Na quinta aula fizemos um fechamento sobre algum conceito que tenha ficado pendente com alguns grupos em relação às atividades dessa aula (passo 9 do roteiro metodológico do GTERP).

4.5 Aula 5: Caminhos Hamiltonianos

4.5.1 Objetivo e expectativa

Nossos objetivos, para a quinta aula, são terminar as atividades da aula anterior e concluir com os grupos as diferenças apresentadas pelos modelos de Euler e Hamilton. Além disso, explorar o clássico problema do Caixeiro Viajante a partir das ideias que foram propostas na quarta aula. Esperamos que os alunos, após a formalização dos conceitos apresentados na quarta aula, sejam capazes de resolver os problemas apresentados nessa aula.

4.5.2 Atividades

Um problema decorrente do modelo proposto por Hamilton é conhecido como o problema do Caixeiro Viajante que pode ser enunciado assim: O caixeiro é informado sobre um conjunto de cidades e um custo associado a cada uma, assim o objetivo é fazer um trajeto (o menor e mais barato) que parta de uma cidade, passe por todas as demais uma única vez, e retorne à cidade inicial.

Atividade: Caixeiro Viajante (questão adaptada do enunciado acima)

Um Caixeiro Viajante trabalha com quatro cidades conhecidas (A, B, C e D) e quer descobrir o menor caminho que lhe permita partir de uma cidade, visitar cada cidade uma única vez e retornar à cidade de partida. Sabe-se que as distâncias entre as cidades são apresentadas na tabela abaixo, em km.

	A	B	C	D
A	0	100	120	150
B	100	0	200	180
C	120	200	0	110
D	150	180	110	0

a) *O grupo deverá fazer a representação de um Grafo para a situação colocada acima.*
b) *Encontre tal (is) caminho(s) sabendo que o Caixeiro parte da cidade A.*

Quadro 4.7: Atividades fornecidas para os alunos na aula 5.
Fonte: Arquivos do autor.

4.5.3 Relato e Análise da quinta aula

Como não tínhamos muito tempo para essa aula, uma vez que era apenas um período (50 minutos), nossa ideia, em um primeiro momento, era finalizar o assunto da quarta aula sobre eventuais dúvidas como, por exemplo: as diferenças entre os Caminhos Euleriano e Hamiltoniano.

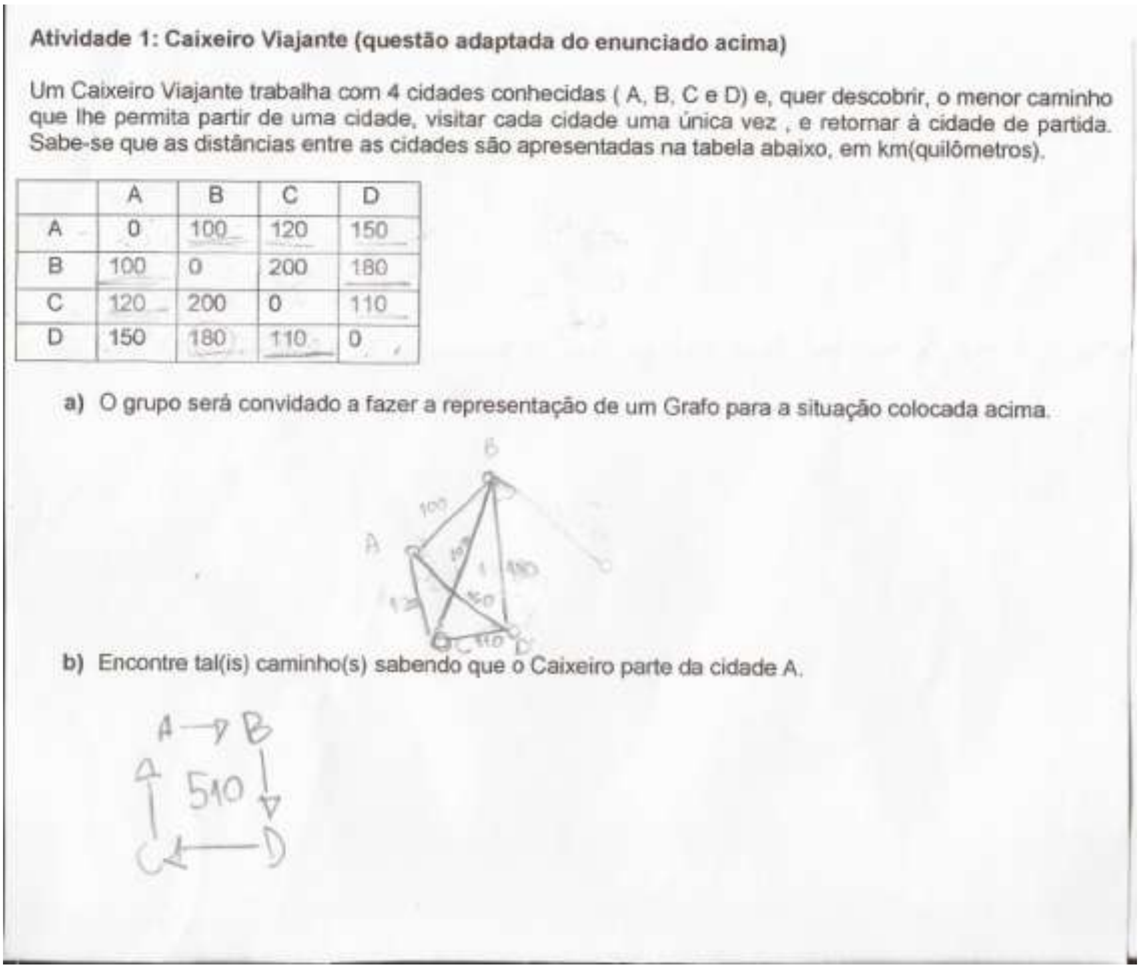
Após as dúvidas, nosso foco, foi trabalhar na atividade que tratava do problema do Caixeiro Viajante. Esse tipo de problema explora a interpretação, o cálculo, a noção de espaço e distância, além é claro de verificar possibilidades, uma vez que os grupos devem achar o melhor caminho para o caixeiro viajante e, esse melhor caminho é aquele em que devemos respeitar as regras do problema, ou seja, saber verdadeiramente o que está sendo pedido e o que se quer descobrir. Este é o tipo de problema que pode permitir generalizar soluções ou encontrar novas soluções através da sua decomposição.

Existem duas citações de George Polya em seu livro “A Arte De Resolver Problemas, 2006” que ilustra justamente o que mencionamos:

> “Portanto, procuremos antes de tudo, compreender o problema como um todo. Uma vez compreendido, estamos em melhor posição para avaliar que pontos particulares podem ser os mais essenciais. Tendo examinado um ou dois pontos essenciais, ficamos em melhor posição para julgar quais os outros detalhes que merecem exame mais atento. Passamos aos detalhes e decompomos gradualmente o problema, mas não além do que faz necessário.” ([POLYA, p. 47]).
>
> “Uma vez decomposto o problema, podemos tentar recombinar os seus elementos de maneira nova. Em particular, podemos tentar essa recombinação de modo a obtermos um problema novo e mais acessível que possamos utilizar como um problema auxiliar.” ([POLYA, p. 48]).

A aula transcorreu dentro do esperado, ou seja, esperava-se que alguns grupos teriam um pouco de dificuldade para interpretar a tabela de quilometragem, mas a partir de algumas dicas de como interpretá-la (para aqueles grupos com maior dificuldade), os grupos seriam capazes de resolvê-lo. Nessa atividade foram seguidos todos os passos propostos pelo roteiro metodológico. Desde a escolha do problema (passo1), passando pelas leituras individuais e conjuntas de cada grupo (passos 2 e 3), posterior resolução com o auxílio de minhas observações e estímulos por meio de dicas (passos 4 e 5) os alunos foram capazes de representar suas soluções no quadro de aula (passo 6) e, após discussões e busca de um consenso (passos 7 e 8) para sua solução do mesmo, formalizamos de maneira estruturada e organizada em linguagem matemática a solução do problema (passo 9).

A seguir algumas soluções para a atividade apresentadas em forma de grafos pelos grupos nas figuras 4.16 e 4.17:



Atividade 1: Caixeiro Viajante (questão adaptada do enunciado acima)

Um Caixeiro Viajante trabalha com 4 cidades conhecidas (A, B, C e D) e, quer descobrir, o menor caminho que lhe permita partir de uma cidade, visitar cada cidade uma única vez , e retornar à cidade de partida. Sabe-se que as distâncias entre as cidades são apresentadas na tabela abaixo, em km(quilômetros).

	A	B	C	D
A	0	100	120	150
B	100	0	200	180
C	120	200	0	110
D	150	180	110	0

a) O grupo será convidado a fazer a representação de um Grafo para a situação colocada acima.

b) Encontre tal(is) caminho(s) sabendo que o Caixeiro parte da cidade A.

Figura 4.16: Resolução do Problema do Caixeiro Viajante.
Fonte: Arquivos do autor.

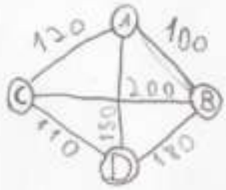
Note que a solução apresentada possui valores para as arestas no item a. Para o item b, a solução possui segmentos orientados.

Atividade 1: Caixeiro Viajante (questão adaptada do enunciado acima)

Um Caixeiro Viajante trabalha com 4 cidades conhecidas (A, B, C e D) e, quer descobrir, o menor caminho que lhe permita partir de uma cidade, visitar cada cidade uma única vez , e retornar à cidade de partida. Sabe-se que as distâncias entre as cidades são apresentadas na tabela abaixo, em km(quilômetros).

	A	B	C	D
A	0	100	120	150
B	100	0	200	180
C	120	200	0	110
D	150	180	110	0

a) O grupo será convidado a fazer a representação de um Grafo para a situação colocada acima.



b) Encontre tal(is) caminho(s) sabendo que o Caixeiro parte da cidade A.

Partindo do ponto A, o caminho mais barato é: A→B→D→C→A, custando 510

Figura 4.17: Resolução do Problema do Caixeiro Viajante.
Fonte: Arquivos do autor.

Nessa solução o grupo utilizou valores para as arestas, mas diferentemente da figura 4.16, a solução para o item b possui sequências de vértices para representar o menor caminho.

Perguntei aos grupos se à medida que eu fosse acrescentando mais vértices (cidades) e mais arestas (distância em quilômetros) o problema ficaria mais difícil, e isso gerou um silêncio de um ou dois minutos até que alguns grupos afirmaram que o problema seria mais complexo de se resolver. Nesse momento, aproveitei para falar que muitos matemáticos utilizam programas específicos de computador para tentar encontrar o melhor trajeto para casos onde há grafos com muitos e muitos vértices, nesse caso estávamos falando de cidades, mas podemos aplicar em outras áreas do conhecimento, como por exemplo: o problema da distribuição de cartas, parquímetros e etc.

4.6 Aula 6: Coloração de mapas e Formalização dos Conceitos Trabalhados nas aulas 4, 5 e 6

4.6.1 Objetivos e expectativas

Nossos objetivos, para essa última aula, eram trabalhar com coloração de mapas, com o problema das quatro cores e formalizar conceitos trabalhados nas aulas 4, 5 e 6 como: Caminhos Hamiltonianos e o Teorema/Problema das 4 cores. Minha principal expectativa era que os grupos percebessem que mapas podem ser coloridos com até 4 cores.

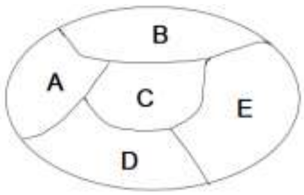
4.6.2 Atividades

Atividade 1: Coloração de Mapas

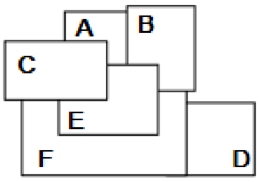
O grupo deverá colorir os mapas a seguir com o menor número de cores possíveis, respeitando as seguintes condições:

- *Regiões com fronteiras comuns não podem possuir a mesma coloração;*
- *Se as regiões possuírem apenas um ponto em comum, essas regiões podem possuir a mesma cor.*

a)



b)



c)

Atividade 2: *A partir dos mapas da atividade anterior é possível gerar um grafo que representa a coloração realizada pelo grupo. Assim, para podermos transformar esse problema da coloração de mapas em um problema de grafos, associamos a cada região um vértice e dizemos que dois vértices são adjacentes se as regiões correspondentes possuem fronteira em comum. Sendo assim, convidamos o grupo a representarem um grafo para o mapa do item "a" e "c" da atividade um.*

Quadro 4.8: Atividades fornecidas aos grupos.

4.6.3 Definições

Para compreender melhor as ideias relacionadas à Teoria de Grafos vistas nas aulas 4, 5 e que foram abordadas na última aula, foi entregue aos grupos uma folha com algumas definições e observações. Abaixo segue o quadro 4.9 que apresenta tais definições e observações:

Caminho Hamiltoniano: Dado um grafo, é possível construir um caminho que inclua todos os vértices uma única vez, com exceção do vértice de saída e de chegada, que será o mesmo. **Observação:** é importante ressaltar que embora esse problema seja semelhante ao do Caminho Euleriano, o problema de achar um Caminho Hamiltoniano é muito mais complexo. Não são conhecidas condições necessárias e suficientes para que um grafo qualquer tenha esse tipo de caminho, diferentemente, do caminho Euleriano. **Teorema/Problema das 4 cores:** dado um mapa plano, dividido em regiões, quatro cores são suficientes para colori-lo para que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor. É necessário saber que as regiões que só se tocam num ponto não são consideradas vizinhas. Esse Teorema possui uma demonstração complexa e não será realizada com os alunos do sétimo ano devido ao conhecimento matemático necessário para fazê-la.

Quadro 4.9: Definições fornecidas aos alunos na aula 6.
Fonte: arquivos do autor.

4.6.4 Relato e Análise da sexta aula

Na primeira atividade, na qual os grupos deviam colorir mapas usando o menor número de cores possíveis seguindo uma série de regras que estavam dispostas (passos 2, 3, 4 e 5 do roteiro proposto pelo GTERP), a maioria dos grupos se saiu muito bem, ou seja, conseguiram concluir o que o exercício exigia. Infelizmente, coloquei apenas mapas que podiam ser coloridas com apenas 3 cores, penso que o ideal era ter explorado mapas que só pudessem ser coloridos com 4 cores, uma vez que estamos falando sobre o “Problema das 4 Cores”. Para minha surpresa, um grupo (20%), não conseguiu utilizar apenas três cores para colorir um dos mapas. A seguir, apresento nas figuras 4.18 e 4.19, soluções para essa atividade proposta:

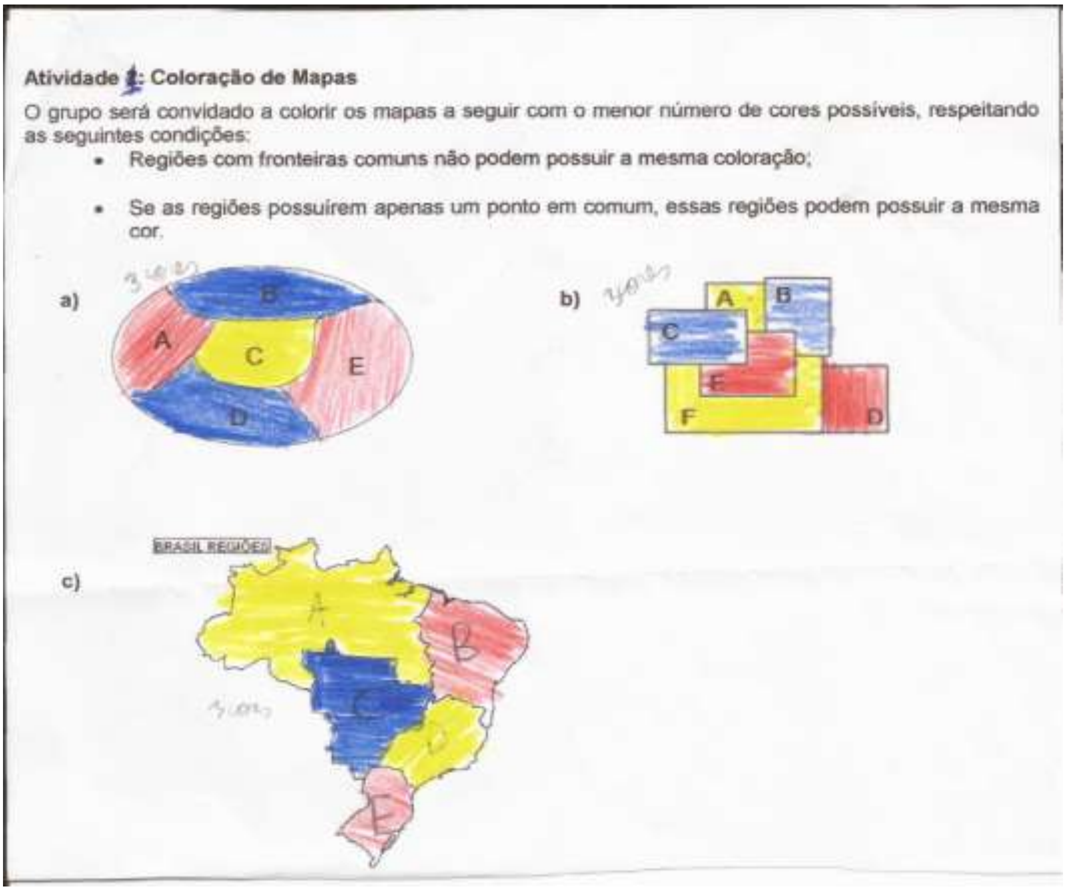


Figura 4.18: Resolução a partir da coloração de mapas.
Fonte: Arquivos do autor.

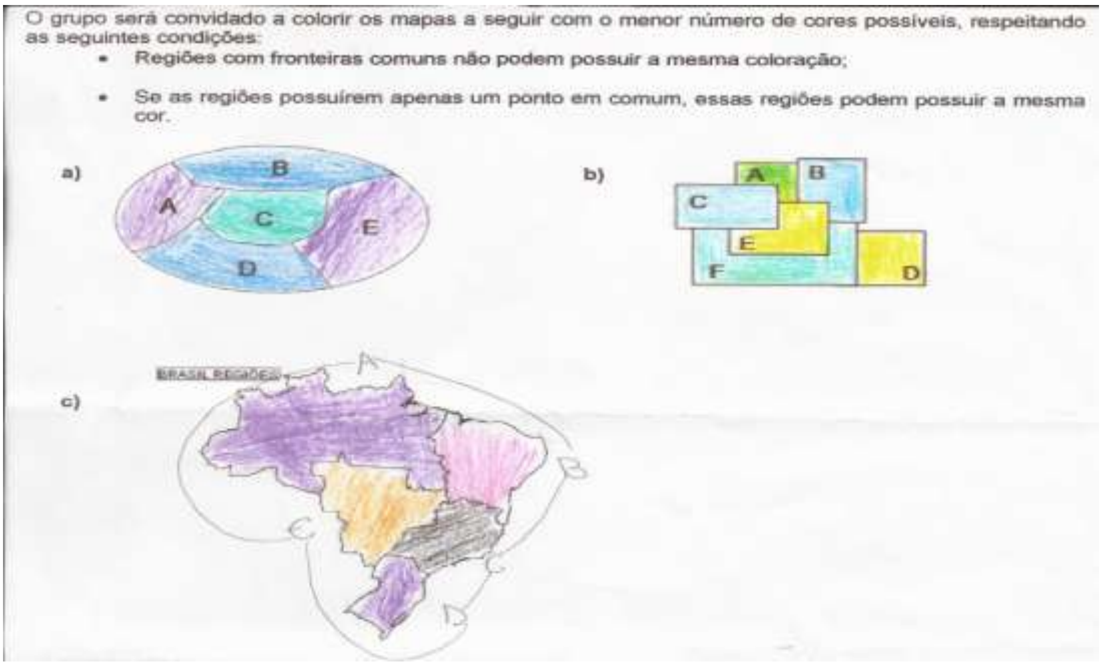


Figura 4.19: Resolução a partir da coloração de mapas.
Fonte: Arquivos do autor.

Note que no item c, o grupo utilizou 4 cores para pintar o mapa do Brasil, em vez de 3 como os outros grupos.

No momento de discutirmos as colorações feitas pelos alunos no quadro de aula e buscarmos um consenso sobre a forma de colorir os mapas e estabelecer uma estratégia para resolver esse tipo de problemas respeitando as regras propostas pela atividade (passo 6, 7, 8 e 9 do roteito metodológico da Resolução de Problemas), ressaltei a importância de trabalhar com mapas que permitiam colori-los utilizando 2 e 4 cores visto que os mapas trabalhados nessa atividade poderiam ser coloridos com apenas 3 cores.

Portanto, uma sugestão de correção para minha sequência é colocar mapas que possam ser pintados com 2 e 4 cores também, para ir dificultando o nível da atividade de colorir.

Essa atividade foi bem interessante, uma vez que um grupo em especial, percebeu que no seu livro de mapas da escola da disciplina de Geografia, todos os seus mapas eram pintados com quatro cores.

Já na formalização das ideias sobre esse problema mencionei que havia um teorema, que não seria demonstrado em aula, que era possível colorir qualquer mapa com no máximo quatro cores. É importante lembrar aqui que o professor deve deixar bem claro para o aluno que um teorema é uma proposição ou afirmação que deve ser provada por axiomas (afirmações tidas como verdadeiras) ou afirmações já demonstradas anteriormente. Já que para o entendimento dessa demonstração era preciso que os alunos tivessem um bom grau de conhecimento matemático, que nesse caso, não foram explorados em nossa sequência didática, acabamos não demonstrando esse teorema em aula.

Para a segunda e última atividade dessa longa sequência didática, os alunos deviam encontrar um grafo que representasse as colorações feitas nos mapas dos itens “a” e “c” dessa atividade. Para essa atividade, os alunos deveriam seguir os passos 2 e 3 (leituras individuais e conjuntas) do roteiro metodológico. Essa atividade foi considerada a mais difícil por todos os grupos no momento de estabelecer uma estratégia de resolução (passo 4), pois eles tinham que enxergar as regiões como vértices e cada aresta era a fronteira entre as regiões. Um grupo, em especial, fez uma pergunta interessante: Nós podemos transformar um mapa em um grafo? Eu disse que sim. Além disso, dei uma dica: lembra o mapa das Pontes de konigsberg? Podemos fazer o mesmo aqui nesse tipo de exercício. O grupo ainda sem entender como diz: mas agora estamos falando de cores e não pontes, margens e ilhas. Então eu pedi ao grupo que fizessem uma nova leitura do problema, pois muitas vezes a resposta da nossa pergunta está na forma como interpretamos o problema e, a partir disso, expliquei mais uma vez o que o problema estava solicitando.

Para minimizar essa dificuldade, que aparecia quase que em todos os grupos, eu incentivava os grupos a verificarem o que a atividade solicitava e fornecia algumas dicas (passo 5).

Apenas dois grupos (40%) dos cinco conseguiram representar por Grafos, sem as dicas fornecidas por mim, os dois mapas. Quatro grupos (80%) representaram corretamente apenas um mapa, o do item "a". No entanto foi apenas um grupo (20 %), que representou corretamente o mapa do item "c", o mapa das regiões do Brasil, por um Grafo. A seguir na figura 4.20 ficam evidenciados os grafos encontrados pelos grupos que conseguiram finalizar essa atividade:

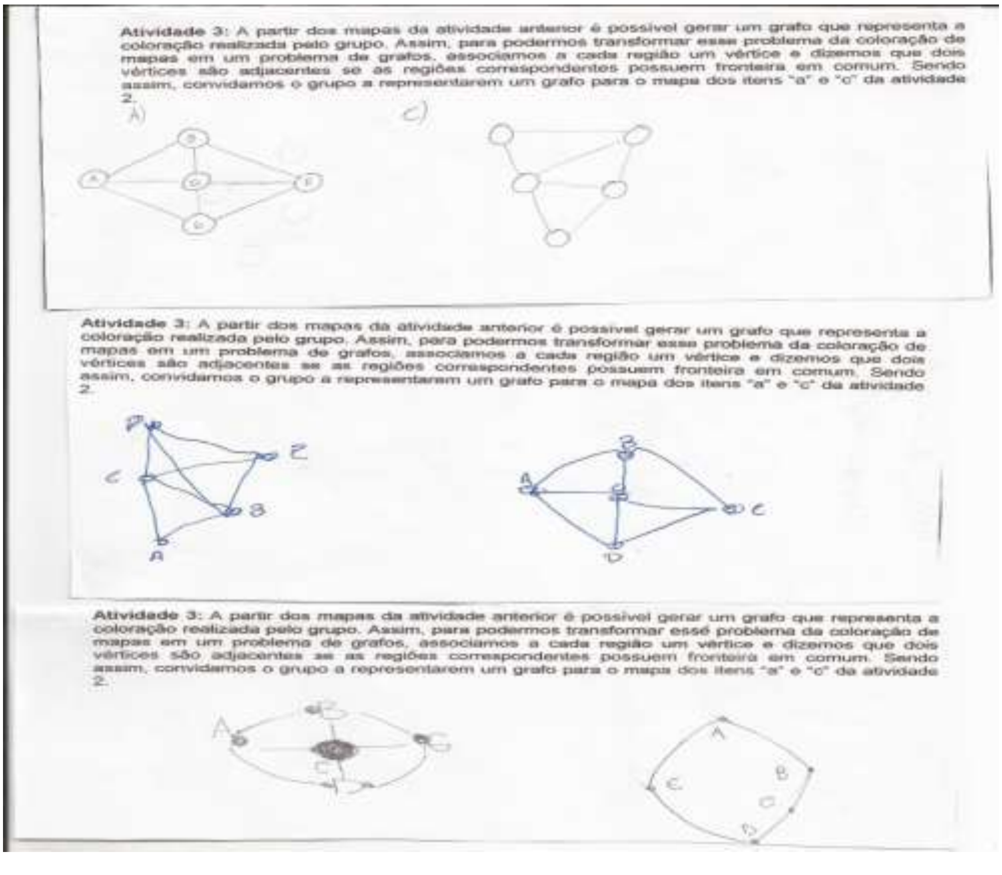


Figura 4.20: Resoluções para encontrar os Grafos dos itens a e c.
Fonte: Arquivos do autor.

Na imagem 4.20, os grafos encontrados pelo primeiro grupo estão corretos, mas nos grafos encontrados para o item “c” pelos outros dois grupos não estavam corretos. Nos passos 6, 7, 8 e 9, discutimos no quadro, a partir das soluções encontradas, formas de compreender o objetivo da atividade, bem como mostrar as estratégias que cada grupo utilizou para fazer as representações dos grafos e, por fim, mostrar por qual motivo os grupos não conseguiram representar corretamente o grafo do item “c”.

No geral, conversando com os alunos, percebi que as aulas foram interessantes, mas em especial a última que foi mais abrangente, pois falamos sobre teoremas, axiomas, afirmações e proposições. Relembramos também como se constroem grafos e colorimos mapas seguindo algumas regras e ideias. Além disso, tivemos a oportunidade de falar sobre outras matérias como geografia, no momento de falar em coloração de mapas.

No final, foi importante perceber que muitos grupos se mantinham entusiasmados e felizes por estarem aprendendo uma matemática diferente daquela que comumente estamos acostumados a fazer em sala de aula. Acredito que isso se deve ao fato dos alunos estarem sendo desafiados e exigidos o tempo todo, bem como os alunos se sentem co-construtores da Matemática, além é claro, de pensarem estratégias para resolver os problemas propostos. Espero que essa sequência tenha sido a primeira de muitas que farão mais sentido e darão maiores significados e contextualizações para a matemática que faço e ensino na minha sala de aula.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desta dissertação foi encontrar uma forma de auxiliar os alunos a desenvolverem suas capacidades de interpretação e argumentação quando se deparam com um problema, bem como desenvolver estratégias para isso. Assim, por meio da aliança entre a perspectiva metodológica da Resolução de Problemas e a Teoria de Grafos para trabalhar conceitos matemáticos, principalmente no Ensino Fundamental, desenvolvemos e aplicamos uma sequência didática que explorou esses conceitos de forma contextualizada com as realidades e experiências de cada aluno.

Com relação à questão norteadora, "De que forma podemos ensinar os conceitos que são explorados pela Teoria de Grafos, utilizando a Resolução de Problemas, de forma a possibilitar aos alunos uma melhor compreensão do que se estuda?", o roteiro metodológico, elaborado pelo GTERP (2004), apresentado nesse trabalho pode ser considerado uma resposta eficaz, uma vez que a maioria dos grupos realizou as atividades seguindo as etapas da Resolução de Problemas.

Utilizei a metodologia do Estudo de Caso segundo Gil (1995) para analisar os registros dos alunos nas resoluções dos problemas aplicados durante a prática e pude confrontá-las com a literatura utilizada na pesquisa.

A partir das análises realizadas sobre os resultados obtidos da sequência, seja por meio dos registros escritos pelos alunos ou pelos registros de fotos e vídeos (segunda e terceira etapas do Estudo de Caso), foi possível afirmar que o trabalho foi válido, pois eu tinha como objetivo observar se os alunos poderiam desenvolver a capacidade de apresentar argumentos matemáticos ou estabelecer estratégias de resolução de problemas propostos e obtive evidências desta capacidade em muitas atividades, como no exemplo da aula 2, quando um grupo argumenta que acrescentando uma oitava ponte ao problema das "Pontes de Konigsberg" o problema seria resolvido ou como no exemplo da aula 4, na qual um aluno argumentou em linguagem matemática as diferenças entre os caminhos Eulerianos e Hamiltonianos: *o modelo Hamiltoniano é preciso passar por todos os vértices uma única só vez,* *enquanto o modelo Euleriano é preciso passar por todas as arestas uma única só vez.*

Desde o início tive muito cuidado com o planejamento, com a forma com que a sequência didática seria posta em prática, com a escolha do público-alvo, ou seja, a minha unidade-caso (primeira etapa do Estudo de Caso). Sabemos que a validade de nossa sequência só foi possível devido a esse planejamento, bem como com as reflexões e análises dos resultados finais (quarta fase do estudo de Caso).

Nossa prática pode ser implementada em qualquer escola e não só em uma que seja montessoriana, mas sabemos que o trabalho em grupo nem sempre é fácil e comum em muitas instituições, mas adaptações podem ser feitas sempre que se mostrem necessárias.

A sequência didática apresentada nesse trabalho é apenas uma sugestão de introdução dos conceitos explorados pela Teoria dos Grafos. A ela podem ser acrescidos mais problemas que, por falta de tempo, não foram explorados, como por exemplo: o problema do Carteiro Chinês, o problema do Passeio do Cavalo (problema relacionado ao jogo de xadrez), o problema da Coleta de Correspondências, assim como outros. Outro acréscimo importante, que considerei uma falha não aparecer na minha prática, é o uso de mapas que possam ser coloridos com 1, 2 ou 4 cores, pois na última aula o objetivo era explorar o "Problema das Quatro Cores", mas acabei utilizando mapas que podiam ser coloridos com apenas 3 cores. Outra ideia que poderia ser explorada é fazer um trabalho interdisciplinar com a matéria de Geografia no que tange coloração de mapas, sejam eles mapas políticos, de relevos ou de qualquer outro tipo. Além dessas sugestões, é importante explorar mais problemas semelhantes ao do Caixeiro Viajante, pois em minha sequência acabei dando muita importância para Caminhos Hamiltonianos e acabei explorando muito pouco sobre o problema do Caixeiro Viajante.

A metodologia escolhida para o desenvolvimento e aplicação dessa sequência didática foi adequada, pois ao analisar os resultados percebemos que grande parte dos grupos apresentou aprendizagem dos conceitos abordados e, a metodologia, com certeza, é uma das causas disso. A sequência se mostrou válida devido a Resolução de Problemas ter suas potencialidades comprovadas durante nossa prática, pois ela auxiliou os grupos a organizarem suas ideias e estratégias para resolver as atividades propostas favorecendo as relações com outras áreas do conhecimento.

Sendo assim, defendo a Resolução de Problemas como perspectiva metodológica para que conceitos como os abordados pela Teoria de Grafos sejam trabalhados no Ensino Fundamental de forma a contribuir com formação matemática e intelectual do aluno. No entanto, essa abordagem deve ser feita por meio de um roteiro metodológico adequado como é o do GTERP (2004).

O processo de aprendizagem do aluno passa muito pelas mãos de um professor, ou seja, de que forma ele ensina, de que forma ele possibilita a socialização dos alunos em um ambiente escolar, de que forma ele planeja as aulas, até que ponto ele respeita as individualidades dos alunos e outras perguntas mais. Penso que se a aula for bem preparada e planejada, e se essa aula utilizar uma metodologia como a Resolução de Problemas os alunos terão vontade de aprender mais sobre determinados assuntos.

Para finalizar, afirmo que explorar em sala de aula assuntos e conceitos importantes como os da Teoria de Grafos, aliados a uma perspectiva metodológica como a Resolução de Problemas, pode contribuir para uma boa aprendizagem, além é claro de despertar o interesse de alunos, pois um conteúdo seja o de Grafos ou outro que seja introduzido de uma forma que valorize os aspéctos históricos e as respectivas contextualizações, pode transformar as mentes àvidas de hoje e, por consequência, mudar o mundo do amanhã.

REFERÊNCIAS BIBILOGRÁFICAS

ALVAREZ-URIA, Fernando. Microfísica da Escola. **Educação & Realidade**. Porto Alegre: FACED/UFRGS, Vol. 21, nº 2, p.31-42, 1996.

APPEL, K. L., And HAKEN, W., Every Planar Map is Four Colorable, part i: Discharging. **Ilinois Journal of Mathematics 21** (1977), 429-490.

APPEL, K. L., And HAKEN, W., Every Planar Map is Four Colorable, part ii: Reducibility. **Ilinois Journal of Mathematics 21 (1977**), 491-567.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12657:parametros-curriculares-nacionais-5o-a-8o-series&catid=195:seb-educacao-basica&Itemid=859> Acesso em: 10 de outubro de 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática / Secretaria de Educação. – Brasília: MEC, 2000. Disponível em <http:// portal.mec.gov.br/> Acesso em: 15 de outubro de 2014.

BRASIL. O**rientações curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias, vol. 2. Ministério da Educação (MEC), Secretária de Educação Básica (SEB), departamento de políticas de Ensino Médio, Brasília, 2006.

BOSSLE, Rafael Zanoni. **Modelagem Matemática no Projeto de um Ginásio Escolar.** Porto Alegre: UFRGS, 2012. Dissertação (mestrado)- Instituto de Matemática- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.

ECHEVERRÍA, M.D.P.P. **A Solução de Problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.** ArtMed, Porto Alegre, 1998, ch. A solução de problemas em Matemática.

FAUVEL, J; MAANEN, J. V. (editores). **History in mathematics education:** The ICMI Study, Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2000.

FAUVEL, J. Using history in mathematics education: **For the learning of matehematics**, 11 (2), 1991.

FALZETTA, Ricardo. Quebre Cinco Tabus da Resolução de Problemas. **Revista Nova Escola**. São Paulo, 160 ed. 2003.

FIORENTINI, DARIO & LORENZATO, SÉRGIO (2007). **Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos.** Campinas, São Paulo, Autores associados.

Gil AC. **Como elaborar projetos e pesquisa**. 3a ed. São Paulo: Atlas; 1995:58.

LARROSA, Jorge. **Pedagogia Profana**: danças, piruetas e mascaradas. 4.ed. Tradução de Alfredo Veiga-Neto. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

L.R. Onuchic (1999). **Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução deProblemas.** In: Bicudo, M.A.V. (org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP.

L.R. ONUCHIC & N.S.G. ALLEVATO (2004). **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**. In Bicudo, M.A.V. & BORBA, M.C. (orgs.). Educação Matemática: pesquisa em movimento. S. Paulo: Cortez.

MAIO, Waldemar de, **Fundamentos de Matemática: Álgebra, estruturas Algébricas e Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

MALTA, Gláucia Helena Sarmento, **Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível.** Porto Alegre: PPGEM da UFRGS, 2008.

MESQUITA, Daniel da Rosa, **A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DA MATEMÁTICA.** Trabalho de Conclusão de Curso, Porto Alegre, UFRGS 2011.

NUNES, J. M. Viana; ALMOULOUD S. AG; GUERRA, R. B; O Contexto da história da matemática como organizador prévio**. Bolema**, Rio Claro v. 23, nº 35B, p. 537 a 561, abril 2010.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**, Interciência, Rio de Janeiro, 2006.

POZO, J.I., **A Solução de Problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. ArtMed, Porto Alegre, 1998.

SANTOS, J. Plínio O., MELLO, M.P., MURARI, I.T.C, **Introdução à Análise Combinatória**, Editora UNICAMP. 2002.

SMOLE, Kátia Stocco, DINIZ, Maria Ignez. **Ler, Escrever, e Resolver Problemas: habilidades básicas para aprender matemática.** ArtMed, Porto Alegre, 2001.

VENTURA, Magda Maria. **O Estudo de Caso como Modalidade de Pesquisa.** Revista Socerj, Rio de Janeiro, V. 20, n.5, p.383-386, set/out, 2007.

VILA, Antoni; CALLEJO, Maria Luz. **Matemática para aprender a pensar: o papel das crenças na resolução de problemas.** Porto Alegre: Artmed, 2006.

APÊNDICE A

Este apêndice apresenta o termo de consentimento informado entregue aos pais dos alunos para que pudéssemos filmar e fotografar as aulas da sequência didática aplicada.

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) _______________________________________, da turma 72, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada **Resolução de Problemas relacionados à Teoria de Grafos no Ensino Fundamental**, desenvolvida pelo professor e pesquisador **Daniel da Rosa Mesquita, para a conclusão de seu Mestrado na UFRGS**. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por **Marilaine de Fraga Sant'Ana**, **Professora Doutora do Instituto de Matemática da UFRGS**, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do e-mail: marilaine@mat.ufrgs.br .

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

1. **Explorar os conceitos relacionados à Teoria de Grafos através da interpretação, compreensão e resolução de situações-problemas;**

2. **Executar a sequencia de atividades produzida e planejada para o ensino de Grafos através da resolução de problemas no Ensino Fundamental, mais especificamente, para a turma 72 do Colégio Província de São Pedro;**

3. **Utilizar a Resolução de Problemas como perspectiva metodológica para que tal conteúdo seja trabalhado no ensino fundamental de forma a contribuir com formação matemática e intelectual do aluno;**

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de sua participação em aula, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o professor e pesquisador **Daniel da Rosa Mesquita** no telefone: 99401998 ou pelo e-mail: mesquitamaster@hotmail.com .

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

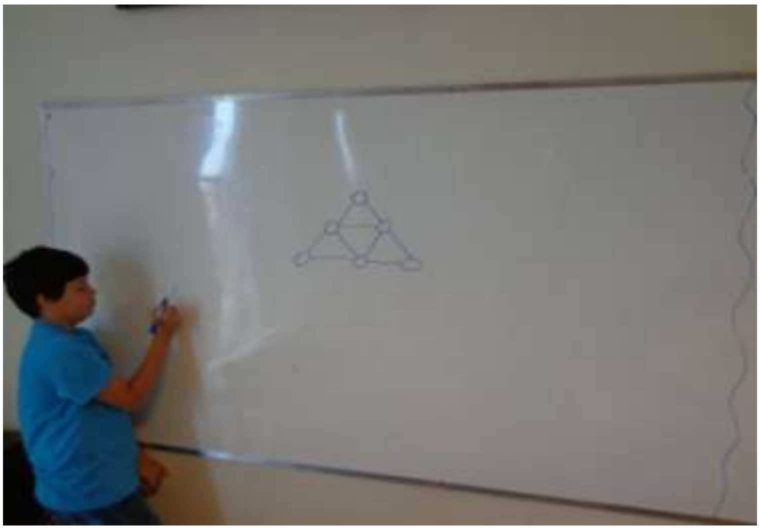
Porto Alegre, _____ de Novembro de 2014.

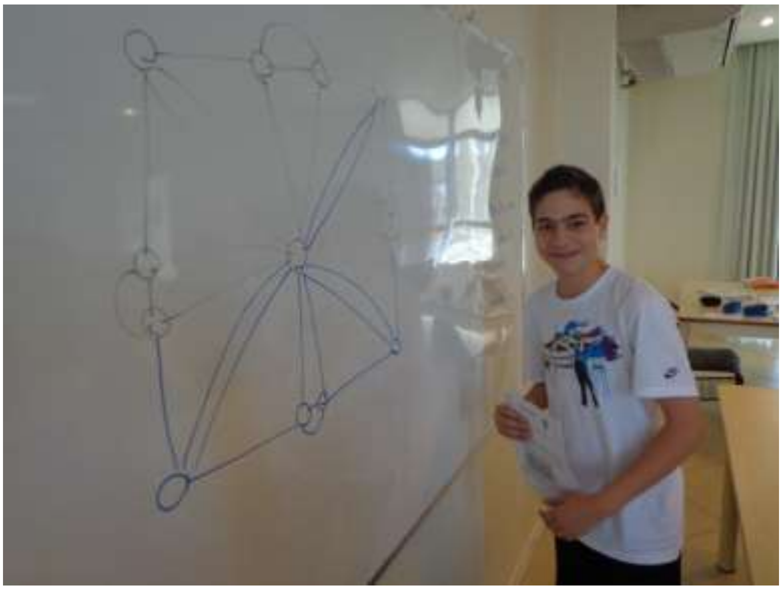
Assinatura do Responsável:

Assinatura do pesquisador:

APÊNDICE B

Este apêndice apresenta algumas fotografias retiradas durante a prática e sequência didática aplicadas na escola durante o mês de novembro de 2014.






ROTEIRO
2) DAR UMA OUTRA OLHADA PARA OS PROBLEMAS;
3) DESAFIOS

APÊNDICE C

Produto da Dissertação: Sequência de Atividades

Esse apêndice apresenta uma sequência didática e um roteiro metodológico em um ambiente de Resolução de Problemas, no qual proponho um trabalho que explore os conceitos ligados à Teoria de Grafos.

O GTERP (2004) apresenta uma sistematização, ou seja, um método a ser seguido a fim de se resolver um problema. Apresentaremos seus passos:

1^0 Passo: Preparação do Problema

O professor deve selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução não tenha ainda sido trabalhado em sala de aula;

2^0 Passo: Leitura Individual:
O professor deve entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura;

3^0 Passo: Leitura em conjunto:
O professor deve formar grupos e solicitar uma nova leitura do problema;

4^0 Passo: Resolução do Problema:

A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo devem buscar resolvê-lo. Considerando os alunos como co-

construtores da Matemática nova que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo, da sua resolução conduzirá os alunos a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula;

5^0 Passo: Observar e incentivar:

Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa e avalia o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Além disso, o professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e métodos para poderem resolver o problema;

6^0 Passo: Registro das resoluções no quadro:

Os representantes de cada grupo devem ir para o quadro registrarem suas resoluções e discutir sobre as diferentes respostas, sejam elas certas ou erradas;

7^0 Passo: Plenária:

Nessa etapa todos os alunos são convidados a discutir suas respostas;

8^0 Passo: Busca do consenso:

Depois de sanadas dúvidas e analisadas as resoluções, o professor deve tentar, com toda a classe chegar a um consenso sobre o resultado obtido;

9^0 Passo: Formalização do conteúdo:

Neste momento o professor deve formalizar a apresentação organizada e estruturada em linguagem matemática, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da Resolução de Problemas, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Apresentamos como sugestão, as seis aulas abaixo:

Aula 1-Introdução (1 período de 50 minutos)

1. **Objetivo**

Nosso objetivo, nesse primeiro encontro, é propiciar para o grupo de alunos um resgate histórico do surgimento da Teoria de Grafos e suas aplicações. Esse resgate histórico será realizado a partir de uma apresentação no PowerPoint, na qual aparecerão algumas imagens que serão explicadas uma a uma até reconstruir a história da teoria de Grafos, além de demonstrar a utilidade desse ramo da matemática em sua época de descoberta até os dias de hoje.

Entre as imagens que serão comentadas estão as de alguns matemáticos envolvidos no processo histórico como, por exemplo: Leonard Euler e Sir W.R Hamilton. Também estão entre as imagens àquelas que demonstram a importância do estudo de Grafos como sua utilidade para os correios, rotas, distribuição de energia, entre outras.

Aula 2-Caminhos Eulerianos (2 Períodos de 50 minutos)

1. **Objetivo**

Os objetivos dessa aula é propor para o grupo de alunos que tentem encontrar uma solução para o "clássico problema" das Pontes de Konigsberg resolvido por Euler e, além disso, explorar figuras que possam ser desenhadas no papel sem tirar o lápis da mesma.

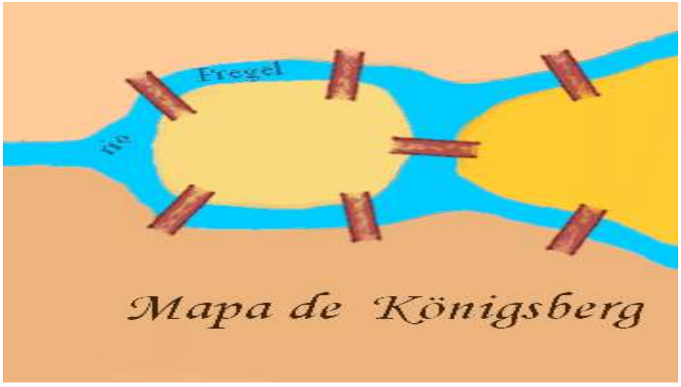
2. **Atividades**

Atividade 1: Pontes de Konigsberg

Na cidade de konigsberg, atual Kaliningrado que fica entre a Polônia e a Lituânia, discutia-se nas ruas da cidade a possibilidade de existir um caminho pela cidade que atravessasse todas as pontes sem repeti-las nenhuma vez. Essa possibilidade havia se tornado uma lenda popular até que Euler, em 1736, solucionou esse problema dando origem a Teoria de Grafos.

O grupo será convidado ler o problema a seguir e tentar encontrar uma solução para o mesmo:

Na cidade de Konigsberg 7 pontes cruzam o rio Pregel estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as ilhas e as margens opostas do rio, conforme ilustrado na figura abaixo:

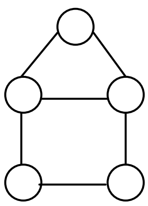


Será possível fazer um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma vez?

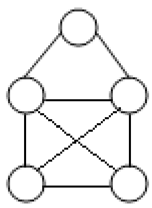
Observação: Para a solução encontrada, sendo o passeio possível ou não, o grupo deve apresentar ao menos um argumento que sustente a mesma.

Atividade 2: O grupo será convidado a encontrar, para cada figura abaixo, um caminho que passe todos os pontos(vértices) percorrendo todas as arestas (linhas que ligam os pontos) uma única vez, sem tirar o lápis ou a caneta do papel.

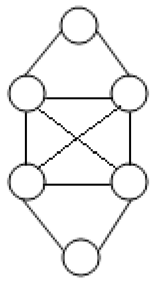
b)



b)



c)

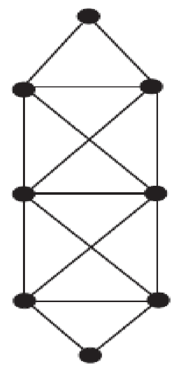


Atividade 3: A partir dos caminhos encontrados pelos grupos em cada item da atividade 2, responda:

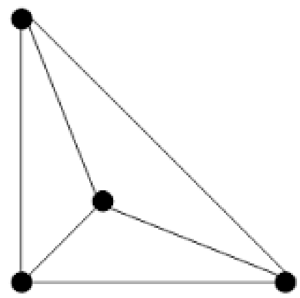
- **a)** Pode-se começar por qualquer vértice o caminho encontrado?
- **b)** Por qual motivo será que ocorre o que o grupo respondeu no item a? Aqui o grupo deve apresentar um argumento que sustente sua resposta.

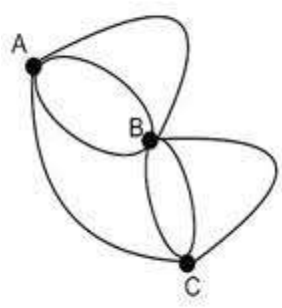
c) É possível fazer uma representação, semelhante as da atividade 2, para a atividade 1, ou seja, representar cada ponte como uma aresta que liga os vértices e, cada margem do rio e suas ilhas, como vértices? Nesse momento, convido cada grupo a tentar fazer essa representação.

Atividade 4: Verifique em cada figura abaixo se é possível encontrar um caminho que passe por todos os vértices percorrendo todas as arestas uma única vez, sem tirar o lápis ou a caneta do papel.

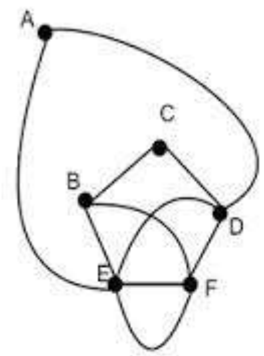


b)





d)



Atividade 5: Para os itens que não foi possível encontrar um caminho que percorresse todas as arestas uma única vez e que passasse por todos os vértices, responda:

a) Por qual motivo o grupo acredita que não foi possível encontrar um caminho que respeitasse esses critérios?

b) É possível fazer alguma alteração, seja incluindo um ou mais vértices ou arestas na figura , para que isso possibilite encontrar um caminho que respeite esses critérios? Se sim, dê pelo menos um exemplo.

Atividade 6: Hora do desafio! Cada grupo será convidado a inventar um ou mais representações como as da atividade 4, para que os outros grupos tentem encontrar uma possível solução para os mesmos.

Observação: é importante que os grupos criem a solução das suas representações para evitarem problemas quanto aos caminhos encontrados pelos outros grupos.

Aula 3-Caminhos Eulerianos (2 períodos de 50 minutos)

1. Objetivo

Nosso objetivo, para a aula 3, é formalizar os conceitos e ideias trabalhadas na aula anterior como:

- Grafo;
- Grau de um vértice e Grau de um Grafo;
- Caminho Euleriano;
- Teorema do caminho Euleriano.

Após a formalização, retornaremos a algumas das atividades da aula anterior para explorá-las com um olhar matemático e com maior rigor.

Aula 4-Caminhos Hamiltonianos (1 período de 50 minutos)

1. Objetivo

Nosso objetivo, para a aula 4, é explorar o Jogo “Icosain Game” de Hamilton, pois a partir da proposta desse jogo, poderemos na aula 5, trabalhar com o problema do “Caixeiro Viajante” que é decorrente desse modelo. Além disso, poderemos solicitar aos grupos que façam uma comparação entre os modelos de Euler e Hamilton.

2. Atividades

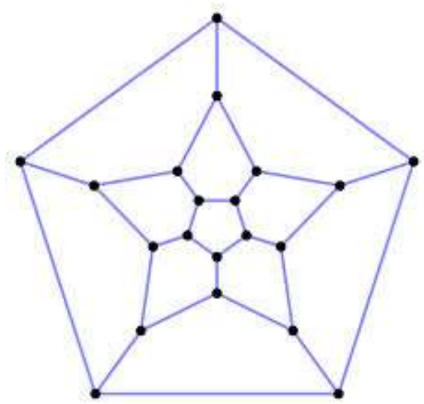
Atividade 1: Icosain Game

Cada grupo receberá um tabuleiro na forma de um dodecaedro achatado que será a representação do Grafo, no qual cada vértice será uma cidade e, cada aresta, será uma estrada que liga uma cidade a outra.

Proposta do jogo:

Sair de Londres, que será representada no tabuleiro por um vértice, e passar por todas as demais cidades (vértices no tabuleiro) uma única vez e retornar para Londres.

Imagem do tabuleiro:



Atividade 2: O grupo será convidado a fazer uma comparação entre os modelos de Euler e Hamilton. Nessa comparação, o grupo deve apresentar um ou mais argumentos que diferenciem um modelo do outro.

Atividade 3: É possível partir de qualquer vértice passar por todos os demais, uma única vez, e retornar ao vértice de origem? Se sim, apresentem um ou mais argumentos que sustentem a ideia do grupo.

Aula 5-Caminhos Hamiltonianos (2 Períodos de 50 minutos)

1. Objetivo

Nossos objetivos, para a aula 5, são terminar as atividades da aula 4 e concluir com os grupos as diferenças apresentadas pelos modelos de Euler e Hamilton. Além disso, explorar o clássico problema do Caixeiro Viajante a partir das ideias que foram propostas na aula 4

2. Atividades

Um problema decorrente do modelo proposto por Hamilton é conhecido como o problema do Caixeiro Viajante que pode ser enunciado assim:

O caixeiro é informado sobre um conjunto de cidades e um custo associado a cada uma, assim o objetivo é fazer um trajeto (o menor e mais barato) que parta de uma cidade, passe por todas as demais, uma única vez, e retorne a cidade inicial.

Atividade 1: Caixeiro Viajante (questão adaptada do enunciado acima)

Um Caixeiro Viajante trabalha com 4 cidades conhecidas (A, B, C e D) e, quer descobrir, o menor caminho que lhe permita partir de uma cidade, visitar cada cidade uma única vez , e retornar à cidade de partida. Sabe-se que as distâncias entre as cidades são apresentadas na tabela abaixo, em km(quilômetros).

	A	B	C	D
A	0	100	120	150
B	100	0	200	180
C	120	200	0	110
D	150	180	110	0

a) O grupo será convidado a fazer a representação de um Grafo para a situação colocada acima.

b) Encontre tal(is) caminho(s) sabendo que o Caixeiro parte da cidade A.

Aula 6- Caminhos Hamiltonianos (2 períodos de 50 minutos)

1. Objetivo

Nossos objetivos, para essa última aula, são trabalhar com coloração de mapas, o problema das quatro cores e formalizar conceitos trabalhados nas aulas 4, 5 e 6 como:

- Caminhos Hamiltonianos;
- Planaridade;
- Teorema das 4 cores.

2. Atividades

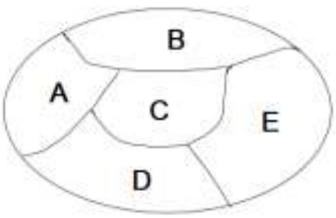
Atividade 1: Coloração de Mapas

O grupo será convidado a colorir os mapas a seguir com o menor número de cores possíveis, respeitando as seguintes condições:

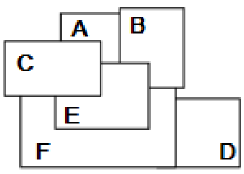
- Regiões com fronteiras comuns não podem possuir a mesma coloração;

- Se as regiões possuírem apenas um ponto em comum, essas regiões podem possuir a mesma cor.

a)



b)



c)

Atividade 2: A partir dos mapas da atividade anterior é possível gerar um grafo que representa a coloração realizada pelo grupo. Assim, para podermos transformar esse problema da coloração de mapas em um problema de grafos, associamos a cada região um vértice e dizemos que dois vértices são adjacentes se as regiões correspondentes possuem fronteira em comum. Sendo assim, convidamos o grupo a representarem um grafo para o mapa do item “a” da atividade 1.