

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Influência da densidade de estados no efeito par-ímpar da distribuição de cargas na multifragmentação nuclear. *

Natália de Lima Calleya

Dissertação de Mestrado realizada sob orientação do Prof. Dr. Sergio Ricardo de Azevedo Souza e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento do requisito final para a obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre
2015

* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

"To Summarize briefly: A white rabbit is pulled out of a top hat. Because it is an extremely large rabbit, the trick takes many billions of years. All mortals are born at the very tip of the rabbit's fine hairs. where they are in a position to wonder at the impossibility of the trick. But as they grow older they work themselves even deeper into the fur. And there they stay. They become so comfortable they never risk crawling back up the fragile hairs again. Only philosophers embark on this perilous expedition to the outermost reaches of language and existence. Some of them fall off, but other cling on desperately and yell at the people nestling deep in the snug softness, stuffing themselves with delicious food and drink.

'Ladies and gentlemen,' they yell, 'we are floating in space!' but none of the people down there care.

'What a bunch of troublemakers!' they say"

— Jostein Gaarder, *Sophie's World*

Agradecimentos

Meus maiores e mais sinceros agradecimentos ao meu orientador, que aceitou realizar um projeto de mestrado quando eu ainda não tinha certeza se continuaria na UFRGS; que continuou a me orientar mesmo quando eu já não sabia se era isso mesmo que queria fazer e durante esses dois (*cof, três, cof*), anos sempre esteve disponível para marcar reuniões, tirar dúvidas, ajudar com programas, dar conselhos, e mandar um email perguntando ‘como estão as coisas?’ quando eu ficava um tempo sem dar notícias. Agradeço a confiança e a paciência, que certamente foram necessárias durante a minha orientação. Esse trabalho nem entraria em um papel se não fosse por ti. Tenho uma grande admiração por ti, como excelente pesquisador e também como pessoa (*e chef!*). Se um dia eu for gente grande, quero ser igual a você.

Desde a graduação, uma frase que ouvi diversas vezes foi: “Ninguém se forma em física sozinho”. Conforme se avança no curso percebe-se que essa frase não poderia ser mais verdadeira. Por mais que boa parte do tempo gasto durante a graduação seja estudando com apenas os livros de companhia, não é só isso que te faz continuar fazendo um curso por vezes difícil, por vezes chato, e que em todas as vezes propicia uma crise existencial. São os colegas, os amigos que estão sempre lá para dar uma força, mas mais importante de tudo, estão lá... na mesma situação que você. Nada mais reconfortante do que conversar com uma pessoa que sabe, que sente o que você está passando.

E é claro que durante o mestrado essa situação não mudou, então gostaria de agradecer muito todos meus colegas e amigos da física, sejam eles da UFRGS ou não. Certamente tem como se formar ou virar mestre em física sozinho, mas seria infinitamente mais difícil e menos divertido também. Algumas menções honrosas são necessárias: aos Felipes da minha vida, ao que me acompanha há anos, um excelente amigo e agora empreendedor que já não sei mais chamar pelo nome próprio, e ao Felipe mais recente, que tenho certeza que não sabia no que estava se metendo ao entrar para o mestrado na física nem ao resolver

se meter comigo, mas um longo mestrado depois ainda é uma das pessoas que mais me apóia nessa vida. À minha one and only sis, Juliana, que tive o prazer de conhecer e o privilégio da sua amizade. Afinal, se não nos unirmos quem irá nos defender? Por todas as conversas, especialmente as não relacionadas à física, obrigada! Ainda, aos meus amigos que o mestrado trouxe para mais perto, Bruna e Fred, vocês me trouxeram risadas quando a sanidade já tinha pulado a janela (*tu também Douglas!*). Por último, quero mencionar meu amigo baiano, Lisan. Em um dos dias mais difíceis desse mestrado, recebo uma foto de uma dissertação com o meu nome escrito. E foi o teu agradecimento, por algo que eu nem imaginava ter feito, que me fez seguir em frente com o mestrado. Então, eu que te agradeço!

Mas nem só de fórmulas e teorias pode-se viver. Dedico essa dissertação às minhas duas melhores amigas, que não são da física, são do coração. À Nicole, meu maior exemplo de perseverança e bondade desse mundo, que me ensinou a levar a vida com um sorriso rosto independente da situação, pois a vida é muito curta para ser desperdiçada, não é mesmo? E à Isabele, minha amiga que está sempre pronta para tudo, e que me ensinou a tentar antes de desistir, pois se der errado a gente começa de novo! Vocês duas são as melhores amigas que alguém pode querer. Também agradeço à tua amizade Lucas, e todas as conversas da internet. Quem diria que a guria do cabelo rosa se tornaria mestre em física?

Por fim gostaria de agradecer à categoria “ Quando que tu tem que entregar?, Mas e a bolsa?, O prazo não era mês passado?”, minha família. Gracinhas à parte, agradeço pelo apoio e pela compreensão mesmo quando vocês não entendiam nada do que estava acontecendo. Em muitas vezes eu também não sabia! Todas as vezes que eu não pude visitar um de vocês saibam que aqui está a culpada por isso, a dissertação. Muito obrigada mãe, pai, vô, vó, madraستا, tio, tia, cachorros e gata: acabou!

Resumo

Experimentos recentes reportaram um comportamento tipo ‘dente de serra’ para as distribuições de carga de fragmentos produzidos em processos de multifragmentação nuclear. Esse comportamento, conhecido como *odd-even staggering*, é normalmente associado ao termo de emparelhamento da energia de ligação nuclear. Sua compreensão é de grande interesse para a física nuclear já que pode oferecer informações sobre a interação nuclear e o termo de emparelhamento. Os tratamentos atuais não são capazes de fornecer uma descrição quantitativa dos dados experimentais, ainda que consigam reproduzir algumas características qualitativamente.

Neste trabalho, as distribuições de carga são estudadas por meio de uma versão do modelo estatístico de multifragmentação nuclear na qual é implementada uma densidade de estados que inclui os efeitos de emparelhamento. Uma vez que a versão usada neste estudo fornece a distribuição da energia de excitação dos fragmentos primários, é possível correlacionar a diminuição dos efeitos par-ímpar com a ocupação de estados de altas energias. A desexcitação dos fragmentos, que a princípio também deveria atenuar esses efeitos, acaba por amplificá-los quando o emparelhamento é tratado consistentemente ao longo do modelo. A dependência dos efeitos par-ímpar com a energia de excitação dos fragmentos é explorada e explica o enfraquecimento do *staggering* em relação ao aumento do tamanho do sistema e fragmentos e da energia de excitação total da fonte.

Os resultados obtidos sugerem que o estudo do efeito par-ímpar pode ser útil para aperfeiçoar o conhecimento sobre a densidade de estados nuclear e também ajustar parâmetros para aprimorar modelos para a multifragmentação.

Abstract

Odd-even effects on the fragment charge distributions produced in different reactions have been recently reported in the literature. The odd-even staggering is generally associated with the pairing term in the nuclear binding energy. Its understanding is valuable to nuclear physics as it can provide information on the nuclear interaction and on the pairing term. Current treatments are not able to supply a quantitative description of data, although some can partially reproduce qualitative properties.

In this work, the charge distributions are studied using a version of the Statistical Multifragmentation Model which employs state densities that take the pairing effects into account. Since the microcanonical version of the model used in this study provides the primary fragment excitation energy distribution, one may correlate the reduction of the odd-even staggering in the charge distribution with the increasing occupation of high energy states. The deexcitation of fragments, that should in principle dim these effects, ends up enhancing them as the consistent treatment of pairing is used throughout the model. The dependence of the odd-even staggering on the excitation energy of fragments is investigated and it is shown that it can explain the staggering weakening as the system and fragments' sizes as well the total excitation energy of the source increase.

The results suggest that the study of odd-even effects can be useful to improve the knowledge on the nuclear state density and also to improve some model parameters.

Conteúdo

Introdução	1
1. Multifragmentação Nuclear	4
1.1 Introdução a multifragmentação nuclear	4
1.2 Formação do modelo estatístico	6
1.3 Modelo Estatístico da Multifragmentação	7
1.4 Modelo Estatístico com energia discretizada	10
1.5 Modelo de Fermi de <i>breakup</i>	15
1.6 Cálculo da desexcitação dos fragmentos primários	16
1.7 A densidade de estados nuclear	18
2. Efeitos de emparelhamento na multifragmentação nuclear	22
2.1 A energia de emparelhamento	22
2.1.1 Conceitos da segunda quantização	22
2.1.2 Sistema de férmions interagentes	24
2.2 Densidade de estados nuclear com <i>gap</i> de emparelhamento incluso	27
2.3 Proposta de uma nova densidade de estados	30
3. Influência da densidade de estados	34
3.1 Distribuições de carga dos fragmentos	34
3.2 Relação com a energia de excitação total	36
3.3 Sensibilidade a diferentes parametrizações da energia de emparelhamento	38
4. Conclusões e Perspectivas	41

Introdução

A multifragmentação nuclear foi conjecturada na década de 1930 por Niels Bohr [1]. Embora na época não existissem experimentos capazes de reproduzir um processo de quebra simultânea do núcleo em múltiplos fragmentos, já imaginava-se que isso ocorreria como uma consequência do aumento da energia nas reações nucleares. Apenas no início dos anos 80 iniciaram-se estudos detalhados sobre esse fenômeno e o entendimento sobre colisões de energias intermediárias foi aprofundado.

Colisões centrais e semicentrais entre íons pesados a energias de alguns MeV por nucleon¹ proporcionam condições ótimas para a análise de como a matéria nuclear² comporta-se quando aquecida e comprimida. Nessa faixa de energias, o processo de multifragmentação é o principal resultado das colisões centrais e semicentrais [4], e diversos modelos teóricos foram elaborados ao longo dos anos para elucidá-lo [5]. Particularmente, os modelos estatísticos tem sido extremamente eficazes em descrever dados experimentais da multifragmentação, incluindo diferentes correlações de carga observadas [6].

Um ponto essencial sobre a multifragmentação é a sua relevância para a caracterização de uma transição de fase líquido-gás na matéria nuclear. Devido às propriedades das interações entre nucleons, é possível descrever a matéria nuclear através de uma equação de estado análoga a Van der Waals, e por conseguinte, espera-se uma transição de fase para a mesma [2, 7]. Embora sistemas infinitos estejam distantes da realidade experimental, e isso evidentemente não possa ser ignorado, o estudo da multifragmentação oferece meios para identificar possíveis indícios de uma transição de fase para a matéria nuclear e núcleos finitos [8].

Além disso, o que ocorre no instante em que um núcleo fragmenta-se permanece desconhecido. Ainda que detectores 4π - equipamentos que tentam abranger o máximo de ângulo sólido possível - tenham permitido inegável avanço para a área nas últimas décadas [3], tornando viável que eventos de multifragmentação fossem observados e analisados em maior precisão, a completa descrição de um evento como esse esbarra em limitações experimentais

¹ As referências [2] e [3] apresentam excelentes descrições para a parte experimental do processo de multifragmentação.

² A matéria nuclear é um conceito idealizado de um sistema infinito com número de nêutrons N igual ao número de prótons Z , onde que a interação Coulombiana entre nucleons é desconsiderada para evitar divergências devido ao seu longo alcance [4].

como o tempo de medida. No momento que os fragmentos são detectados, o sistema do qual esses se originaram deixou de existir há cerca de 10^{-9} segundos, o que no contexto da física nuclear é um longo intervalo de tempo. Sendo assim, os detectores medem os produtos finais das colisões quando esses já decaíram e resfriaram-se, e, portanto, até mesmo os modelos estatísticos restringem-se a extrapolar, a partir das medições, o que acontece no momento da fragmentação [2].

Desta forma, a multifragmentação nuclear ainda demanda maiores investigações, tanto teóricas quanto experimentais para ser totalmente esclarecida. Recentemente, com base em experimentos de última geração, foi possível estudar em detalhe as distribuições de isótopos, correlações de carga, e assimetria³ dessas reações [9]. Como resultado, observou-se um comportamento tipo ‘dente de serra’ - *staggering* em inglês - nessas distribuições, que geralmente é atribuído ao efeito par-ímpar na energia de ligação dos fragmentos. De um ponto de vista teórico, esses efeitos são relacionados ao termo de emparelhamento da energia de interação nuclear. O entendimento desses efeitos é de grande interesse para a física nuclear, e também para a modelos em astrofísica, por proporcionar maior compreensão sobre a equação de estado da matéria nuclear [10].

Atualmente, os modelos que tentam incluir efeitos de emparelhamento relativos ao *staggering* nuclear conseguem, até certo ponto, descrever qualitativamente os dados experimentais. Contudo, ainda não são capazes de fornecer uma descrição quantitativa satisfatória para os mesmos. Este trabalho [11] propõe-se a levar em conta efeitos de emparelhamento na densidade de estados nuclear e desse modo investigar qual sua importância no efeito de *staggering* para as distribuições de carga na quebra de sistemas nucleares excitados. O motivo dessa inclusão na densidade vem do fato que os efeitos de emparelhamento associados à energia de ligação dos fragmentos desaparecem muito rapidamente com a temperatura do núcleo [12]. Através de um tratamento simples, considera-se a alteração na densidade de estados a uma dada energia de excitação do núcleo, para tentar explicar os efeitos par-ímpar observados nas distribuições de carga [10, 13–15].

Esta dissertação começa sintetizando os conceitos teóricos que serviram de base para este trabalho no Capítulo 1, no qual também é abordada a relevância da densidade de estados interna do núcleo que passa pelo processo de multifragmentação. Os efeitos do emparelhamento são discutidos e a proposta para a nova densidade que os leva em consideração é feita no Capítulo 2, enquanto a implementação do modelo é elaborada no Capítulo 3, juntamente com os resultados obtidos. Por fim, conclui-se o trabalho no Capítulo 4 com algumas observações e perspectivas para futuros desenvolvimentos.

³ A assimetria é definida como o excesso de nêutrons de um determinado fragmento, ou seja, $N - Z$.

Capítulo 1

Multifragmentação Nuclear

Neste capítulo, apresenta-se a multifragmentação, o modelo estatístico de multifragmentação a partir do seu advento, sua relação com a generalização do modelo de Fermi de *breakup* e também o modelo estatístico com energia discretizada, implementados neste trabalho. A densidade de estados nuclear mostra-se essencial para determinar as propriedades estatísticas de um sistema, e com isso surge a necessidade de um tratamento mais detalhado para essa quantidade.

1.1 Introdução a multifragmentação nuclear

A multifragmentação ocorre em colisões nucleares com energias entre dezenas e poucas centenas de MeV. Ao contrário de uma colisão em energias mais baixas, onde existe a formação de um estado intermediário - o núcleo composto - e depois o decaimento sequencial aos produtos finais, na multifragmentação a energia da colisão é grande o suficiente para que o núcleo se quebre simultaneamente, gerando muitos fragmentos complexos, também chamados de fragmentos de massa intermediária (IMF, em inglês) [16]. Mais especificamente, são definidos dentro do intervalo $3 \leq Z \leq 20$ e despertaram um crescente interesse desde seus primeiros registros, já que podem ser associados com uma transição de fase líquido-gás dos núcleos [7] (ver Figs. 1.1 e 1.2).



Fig. 1.1: *Representação esquemática de um decaimento de um núcleo composto.*

O estudo de colisões nessa faixa de energias é relevante não só para uma melhor compreensão do próprio fenômeno de multifragmentação mas também para a investigação do

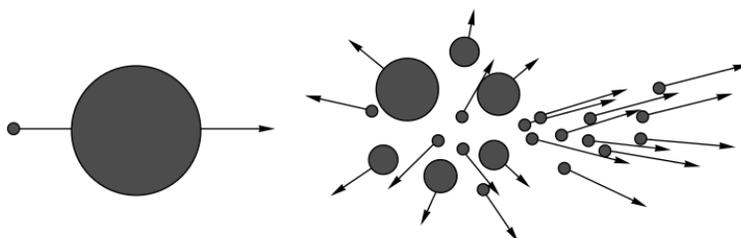


Fig. 1.2: Representação esquemática da multifragmentação, onde há a produção de inúmeros fragmentos complexos. Figura retirada da Ref [17].

diagrama de fases da matéria nuclear. Eventos desse tipo ocorrem em densidades entre 0.1 e 0.3 da densidade normal da matéria nuclear que é aproximadamente $\rho_0 \approx 0.15 \text{ fm}^{-3}$, e em energias de excitação entre 3 a 9 MeV por nucleon, criando assim a possibilidade de uma análise da matéria nuclear quando aquecida e comprimida, que é fundamental para a determinação da sua equação de estado e a existência de uma transição de fase líquido-gás [2, 17, 18].

Além de permitir investigar o diagrama de fases da matéria nuclear, a multifragmentação oferece resultados experimentais de núcleos quentes em ambientes densos, o que é relevante para a astrofísica nos modelos de composição nuclear em supernovas e também para entender como elementos mais pesados foram criados no universo [8].

A multifragmentação pode ser descrita de maneira geral em três etapas (ver Fig.1.3):

- formação de um sistema nuclear excitado intermediário;
- formação dos fragmentos primários e dissolução do sistema original;
- desexcitação ou decaimento dos fragmentos primários.

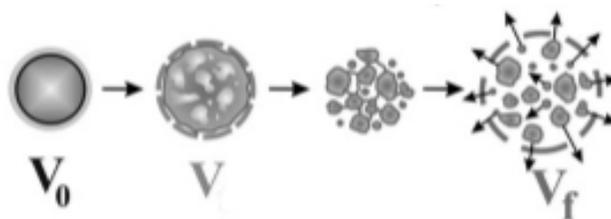


Fig. 1.3: Representação esquemática da multifragmentação. O sistema inicia o processo com volume V_0 ; através de colisões tem-se um sistema excitado, que se expande para um volume V ; ocorre a quebra do sistema, com a formação dos fragmentos primários e, por final, a propagação e desexcitação dos mesmos. Figura retirada da Ref. [19].

O tratamento dos fragmentos produzidos em um evento de multifragmentação, e também a desexcitação desses será feito através do modelo estatístico de multifragmentação, apresentado nas seções seguintes. Primeiramente, na próxima seção, será feito um breve resumo sobre os modelos teóricos para a física nuclear em diferentes faixas de energias, com ênfase nos modelos estatísticos.

1.2 Formação do modelo estatístico

Ao longo dos anos, a abordagem estatística mostrou-se uma boa ferramenta para descrever decaimentos nucleares [5]. A ideia do núcleo composto proposta por Bohr fundamentou o uso dessa abordagem nesse contexto, já que pode ser usada quando é possível identificar uma fonte em equilíbrio em uma reação [8]. Nas experiências iniciais, de baixa energia de excitação por nucleon, o decaimento do núcleo composto foi estudado em detalhe, e modelos como da evaporação, proposto por Weisskopf-Ewing [20], e também da fissão, de Bohr-Wheeler [21] contribuíram enormemente para a compreensão desses processos.

Para energias de excitação levemente maiores, pode acontecer a emissão de duas ou mais partículas sequencialmente e torna-se impraticável determinar a ordem dessas emissões [22]. Assim, experimentos limitam-se a medir a quantidade e tipo das emissões, através de medidas inclusivas ou exclusivas, juntamente com o espectro de energia e ângulos de emissão.

Na faixa entre 2-3 MeV por nucleon, o processo dominante é o decaimento binário sequencial e é a partir desse intervalo de energias que a emissão de fragmentos maiores começa a concorrer com fragmentos mais leves ($Z \leq 2$) [16]. Além da competição entre canais de decaimento, esses produtos podem estar excitados, aumentando a complexidade da descrição dos eventos. Mesmo assim, modelos estatísticos podem ser adaptados para reproduzir estes processos [22].

Já para energias de excitação comparáveis à energia de ligação nuclear (8 MeV), a existência de um núcleo composto é improvável e a emissão sequencial dá lugar para um processo similar a uma explosão: uma desintegração simultânea do sistema em inúmeros fragmentos e partículas leves¹. Esse processo, chamado de multifragmentação, inicia-se em energias de excitação em torno de 3 MeV por nucleon e apresenta número máximo de fragmentos produzidos por volta de 9 MeV por nucleon [4]. É relevante notar que a multifragmentação é estreitamente relacionada aos fragmentos de massa intermediária. A produção desses é uma característica própria do fenômeno, tendo como resultado fragmentos mais pesados que partículas α , porém mais leves que os decorrentes da fissão.

Diversos modelos foram elaborados para explicar a multifragmentação; uma lista ex-

¹ Além disso, em reações com energia de excitação maiores que 10 MeV a multifragmentação deixa de ser o mecanismo principal com a abertura do canal da vaporização, resultando em várias partículas e fragmentos leves. As referências [16, 22] contêm explicações mais detalhadas sobre os processos de decaimento nucleares e tratamentos estatísticos destes.

tensa sobre estes pode ser encontrada em [5] e suas referências. Destacam-se os modelos estatísticos, que assumem que um sistema nuclear excitado atinge o equilíbrio termodinâmico anteriormente a sua desintegração.

Apesar da sua aparente simplicidade, os modelos estatísticos descrevem corretamente reações nucleares em todas as faixas de energia, além de serem adequados para lidar com os produtos excitados resultantes de alguns dos processos. Em particular, o modelo estatístico da multifragmentação usado como base para esse trabalho apresenta um tratamento para a multifragmentação nuclear e a desexcitação dos fragmentos resultantes.

Neste trabalho será apresentado uma de suas versões na seção a seguir, que foi desenvolvida em [23–25] e modificações criadas posteriormente, para descrever os efeitos do emparelhamento na multifragmentação nuclear.

1.3 Modelo Estatístico da Multifragmentação

O modelo estatístico de multifragmentação (SMM) supõe que, como consequência de um processo dinâmico, uma porção de matéria nuclear excitada é formada², e pode ser caracterizada pelo seu número de nucleons A_0 , volume V_0 , carga Z_0 , densidade ρ e energia de excitação total E^* .

A partir de um determinado limiar, devido a essa energia de excitação, o sistema começa a expandir-se e sua densidade diminui. Presume-se que nessa expansão há grande troca de energia, massa e carga entre o que serão fragmentos após a quebra do sistema. Assim, imediadamente antes da desintegração tem-se ao menos parcialmente um equilíbrio termodinâmico³ [27]. A quebra simultânea do sistema ocorre quando essa densidade torna-se pequena em relação a densidade normal da matéria nuclear, e nesse ponto é atingido o volume de quebra (*breakup*), escrito como $V = (1 + \chi)V_0$ onde aqui se usa $\chi = 2$.

Daí em diante, é assumido que as interações entre os fragmentos primários formados no sistema cessam e esses evoluem aos seus estados finais independentemente, sob a influência apenas da força Coulombiana de longo alcance.

A descrição do processo é feita da seguida forma: as probabilidades dos diferentes estados finais possíveis, os canais de decaimento, são associadas a um peso estatístico. Cada modo de fragmentação é representado por $f = \{n_{A,Z}\}$, onde $n_{A,Z}$ é a multiplicidade de uma espécie - isto é, o número de fragmentos com A nucleons e Z prótons - e cada partição deve satisfazer às condições de conservação de massa e carga dadas por

$$A_0 = \sum_{\{A,Z\}} n_{A,Z}A \quad \text{e} \quad Z_0 = \sum_{\{A,Z\}} n_{A,Z}Z. \quad (1.1)$$

² Não é interesse do trabalho considerar detalhes do processo dinâmico que resulta na matéria nuclear, podendo esse ser colisões entre núcleos ou próton-núcleo, entre outros [26].

³ Uma discussão sobre a validade desse equilíbrio pode ser encontrada em [22].

O peso estatístico Ω_f para cada modo é dado pelo número de microestados associados a este⁴ :

$$\Omega_f = \exp[S_f(n_{A,Z}, T, V)], \quad (1.2)$$

em que S_f é a entropia total do modo de fragmentação f ,

$$S_f = \sum_{A,Z} n_{A,Z} S_{A,Z}. \quad (1.3)$$

A entropia $S_{A,Z}$ de cada fragmento é calculada com a introdução de uma temperatura de quebra T_f para cada modo de decaimento [28]. Essa temperatura é encontrada através do vínculo de conservação de energia média desses modos:

$$E^* - B_{A_0, Z_0} = C_c \frac{Z_0^2}{A_0^{1/3}} \frac{1}{(1 + \chi)^{1/3}} + \sum_{A,Z} n_{A,Z} E_{A,Z}. \quad (1.4)$$

Aqui, B_{A_0, Z_0} é a energia de ligação inicial do sistema, e o primeiro termo após a igualdade corresponde à energia de Coulomb associada a uma esfera uniforme de volume $V = (1 + \chi)V_0$. A energia dos fragmentos $E_{A,Z}(T)$ é dada por:

$$E_{A,Z}(T) = -B_{A,Z} + \epsilon_{A,Z}^* - C_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \frac{1}{(1 + \chi)^{1/3}} + E_{A,Z}^{trans}, \quad (1.5)$$

onde novamente $B_{A,Z}$ é a energia de ligação, $\epsilon_{A,Z}^*$ é a energia interna de excitação e $E_{A,Z}^{trans}$ a energia translacional, associadas a um fragmento (A, Z) . O termo coulombiano somado às contribuições de mesma origem na energia de ligação e à energia da esfera uniforme representam a energia coulombiana total na aproximação de Wigner-Seitz [23, 29].

O SMM faz uso do modelo de gota líquida para os cálculos pertinentes aos fragmentos, com exceção dos que têm número de massa $A \leq 4$, excluindo-se a partícula α , que são considerados partículas sem estados excitados internos. Aqui será utilizada a seguinte fórmula de massa [30]:

$$B_{A,Z} = C_v A - C_s A^{2/3} - C_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + C_d \frac{Z^2}{A} + \delta_{A,Z} A^{-1/2}, \quad (1.6)$$

com

$$C_i = a_i \left[1 - k \left(\frac{A - 2Z}{A} \right)^2 \right], \quad (1.7)$$

onde $i = v, s$ caracteriza os termos de volume e superfície, respectivamente; e ainda

$$\delta_{A,Z} = \frac{1}{2} [(-1)^{A-Z} + (-1)^Z] C_p \quad (1.8)$$

⁴ Como usual na física nuclear, a constante de Boltzmann k_B é suprimida através da equação $T \equiv 1/\beta$, equiparando energia com temperatura ($1 \text{ MeV} = 1.16 \times 10^{10} \text{ K}$) [22].

representa a contribuição do termo de emparelhamento à energia de ligação. Aqui, o termo extra C_d leva em consideração correções na energia Coulombiana devido a difusividade de núcleo. Tanto essa fórmula aperfeiçoada quanto todos os parâmetros descritos acima estão listados e especificados em [30].

Por fim, a contribuição total da energia translacional dos fragmentos é escrita como:

$$E^{trans} = \sum_{A,Z} n_{A,Z} E_{A,Z}^{trans} = \frac{3}{2}(M - 1), \quad (1.9)$$

onde é definido $M = \sum_{A,Z} n_{A,Z}$ como a multiplicidade do modo de fragmentação f , o número total de fragmentos que um determinado modo possui [27]. O fator $(M - 1)$ em vez de M contempla o fato que o centro de massa do sistema está em repouso [31].

Para encontrar os pesos estatísticos, calcula-se a entropia a partir da relação termodinâmica

$$S_{A,Z} = -\frac{dF_{A,Z}}{dT_f}, \quad (1.10)$$

sendo T_f a temperatura de quebra do sistema e $F_{A,Z}$ a energia livre interna de Helmholtz. Com a suposição que não há interações entre os fragmentos no instante em que são formados⁵, é possível escrever a energia livre como uma soma das componentes de energia interna de excitação e translacional [24]:

$$F_{A,Z}^* = -\frac{T^2}{\epsilon_0} A + \beta_0 A^{2/3} \left[\left(\frac{T_c^2 - T^2}{T_c^2 + T^2} \right)^{5/4} - 1 \right], \quad (1.11)$$

$$F_{A,Z}^{trans} = -T(M - 1) \log(V_f^3/\lambda_T^3) + T \log(A_0^{3/2}) - T \sum_{A,Z} n_{A,Z} \left[\log(g_{A,Z} A^{3/2}) - \frac{1}{n_{A,Z}} \log(n_{A,Z}!) \right], \quad (1.12)$$

com a tensão superficial β_0 e a temperatura crítica T_c igual a $18.0 MeV$ e $\epsilon_0 = 16.0 MeV$ para a primeira expressão; e o volume livre $V_f \equiv V - V_0 = \chi V_0$, o comprimento de onda térmico $\lambda_T = \sqrt{2\pi\hbar^2/m_n T}$ onde m_n é a massa do nucleon, para a segunda. Os valores para a degenerescência $g_{A,Z}$ de fragmentos com $A \leq 4$ são empíricos e para os demais são definidos como $g_{A,Z} \equiv 1$.

Com base nas equações acima é possível gerar os modos de fragmentação, obter os pesos estatísticos e finalmente calcular o valor esperado para os observáveis de interesse, na seguinte ordem:

- as multiplicidades $n_{A,Z}$ são produzidas de acordo com [25], obedecendo os vínculos das equações 1.1;

⁵ Após sua formação, os fragmentos decaem aos seus estados finais sob a influência da interação de Coulomb de longa distância.

- a temperatura de quebra T_f do sistema é determinada resolvendo a equação 1.4;
- a entropia total S_f é calculada através das equações 1.3 e 1.10 após encontrado o valor para a energia livre de Helmholtz em 1.11.
- o valor esperado para um observável é obtido pela expressão:

$$\bar{O} = \frac{\sum_f \Omega_f(E) O_f}{\sum_f \Omega_f} \quad (1.13)$$

Embora esse modelo consiga descrever muito bem diversas características do processo de multifragmentação, a sua implementação pode ser bastante custosa devido à quantidade de partições que precisam ser geradas para que as quantidades relevantes sejam computadas. Na próxima seção será apresentada uma maneira de contornar essa questão.

1.4 Modelo Estatístico com energia discretizada

Uma maneira de solucionar essa desvantagem do SMM é usar o método exato desenvolvido por Chase e Mekjian em [32] que emprega fórmulas recursivas para calcular funções de partição canônicas. A relação geral entre o número de estados Ω_A para um sistema de massa A em um processo de multifragmentação é dada por:

$$\Omega_A = \sum_{\{\sum_k n_k a_k = A\}} \prod_k \frac{\omega_k^{n_k}}{n_k!}, \quad (1.14)$$

onde ω_k é o número de estados para um núcleo (fragmento) com massa a , e o somatório é realizado sobre todos os estados possíveis.

Considerando que $\sum_k n_k a_k / A = 1$ pode-se reescrever a equação 1.14 como [33]:

$$\begin{aligned} \Omega_A &= \sum_k \sum_{\{\sum_i n_i a_i = A\}} \frac{n_k a_k \omega_k^{n_k}}{A n_k!} \prod_{i \neq k} \frac{\omega_i^{n_i}}{n_i!} \\ &= \sum_k \omega_k \frac{a_k}{A} \underbrace{\sum_{\{\sum_i n_i a_i = A - a_k\}} \prod_i \frac{\omega_i^{n_i}}{n_i!}}_{\Omega_{A-a_k}} \\ &= \sum_k \omega_k \frac{a_k}{A} \Omega_{A-a_k}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Dessa forma, a equação para Ω_A é recursiva, e com base nela escreve-se a multiplicidade média das espécies:

$$\begin{aligned}
 \bar{n}_k &= \frac{1}{\Omega_A} \sum_{n_k} n_k \sum_{\{\sum_j n_j a_j = A\}} \prod_j \frac{\omega_j^{n_j}}{n_j!} \\
 &= \frac{1}{\Omega_A} \sum_{n_k} \sum_{\{\sum_{j \neq k} n_j a_j = A - n_k a_k\}} n_k \frac{\omega_k^{n_k}}{n_k!} \prod_{j \neq k} \frac{\omega_j^{n_j}}{n_j!} \\
 &= \frac{1}{\Omega_A} \sum_{n_k > 0} \sum_{\{\sum_{j \neq k} n_j a_j = A - n_k a_k\}} \omega_k \frac{\omega_k^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \prod_{j \neq k} \frac{\omega_j^{n_j}}{n_j!} \\
 &= \frac{\omega_k}{\Omega_A} \sum_{\{\sum_j n_j a_j = A - a_k\}} \prod_j \frac{\omega_j^{n_j}}{n_j!} \\
 &= \omega_k \frac{\Omega_{A-a_k}}{\Omega_A}.
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Complementando esse modelo, em [34] foi apresentada uma fórmula para sistemas com dois tipos de componentes, permitindo a distinção entre prótons e nêutrons nos cálculos. Então, para cada fragmento α , define-se⁶

$$\begin{aligned}
 \Omega_{A,Z} &= \sum_{\sum_\alpha n_{a_\alpha, z_\alpha} \zeta_\alpha = \Lambda} \prod_\alpha \frac{(\omega_{a_\alpha, z_\alpha})^{n_{a_\alpha, z_\alpha}}}{n_{a_\alpha, z_\alpha}!} \\
 &= \sum_\alpha \frac{\zeta_\alpha}{\Lambda} \omega_{a_\alpha, z_\alpha} \Omega_{A-a_\alpha, Z-z_\alpha}.
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Aqui Λ equivale a A ou Z , assim como ζ_α também pode representar tanto a_α quanto z_α [31]. Analogamente ao caso de uma componente, a multiplicidade média das espécies é escrita como:

$$\bar{n}_{a,z} = \frac{\omega_{a,z}}{\Omega_{a,z}} \Omega_{A-a, Z-z}. \tag{1.18}$$

Em [33], as fórmulas de recursão foram aplicadas ao ensemble microcanônico que corresponde mais adequadamente às condições experimentais de um evento de multifragmentação, já que esse quando ocorre não está em contato com um reservatório térmico. Para encontrar as quantidades necessárias para o cálculo da função de partição microcanônica escolhe-se discretizar a energia e tratá-la como outra grandeza a ser conservada, assim como massa e carga.

⁶ As funções de partição são calculadas recursivamente a partir de $\Omega_{00} \equiv 1$.

Representando a granularidade da discretização por Δ_Q , tal que a energia discretizada é dada por $Q\Delta_Q$, onde Q é um inteiro, o vínculo para a energia é reescrito como:

$$Q\Delta_Q \equiv E^* - B_{A_0, Z_0}^c = \sum_{\alpha, q_\alpha} n_{\alpha, q_\alpha} q_\alpha \Delta_Q, \quad (1.19)$$

no qual $q_\alpha \Delta_Q$ denota a energia do fragmento α juntamente com a contribuição de Wigner-Seitz para a energia de Coulomb:

$$q_{A,Z} \Delta_Q = -B_{A,Z}^c + \epsilon_{A,Z}^* + E_{A,Z}^{trans}, \quad (1.20)$$

com

$$B_{A,Z}^c \equiv B_{A,Z} + C_C \frac{Z^2}{A^{2/3}} \frac{1}{(1 + \chi)^{1/3}}. \quad (1.21)$$

Esse tratamento de energia discretizada é adotado neste trabalho para fazer uso das fórmulas recursivas acima, que são computacionalmente mais eficientes para encontrar as quantidades relevantes em eventos de multifragmentação. A expressão de $\Omega_{A,Z,Q}$ é deduzida analogamente à equação 1.15, ficando então:

$$\begin{aligned} \Omega_{A,Z,Q} &= \sum_{\{\sum n_\alpha a_\alpha = A, \sum n_\alpha q_\alpha = Q\}} \prod_{\alpha} \frac{(\omega_{\alpha, q_\alpha})^{n_{\alpha, q_\alpha}}}{n_{\alpha, q_\alpha}!}, \\ &= \sum_{\alpha, q_\alpha} \frac{a_\alpha}{A} \omega_{a_\alpha, z_\alpha, q_\alpha} \Omega_{A-a_\alpha, Z-z_\alpha, Q-q_\alpha}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

onde na primeira equação foi usado apenas o índice α para identificar um fragmento de massa a e carga z para simplificar a notação. Mais uma vez, a multiplicidade média é dada por:

$$\bar{n}_{a,z,q} = \frac{\omega_{a,z,q}}{\Omega_{A_0, Z_0, Q}} \Omega_{A_0-a_\alpha, Z_0-z_\alpha, Q-q_\alpha}. \quad (1.23)$$

Com essa fórmula para $\Omega_{A,Z,Q}$, sabem-se todos os modos de arranjar um sistema de massa A e carga Z respeitando a condição da energia discretizada Q , permitindo encontrar a temperatura de quebra do sistema através da relação [31]:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial(\Omega_{A_0, Z_0, Q})}{\partial(Q\Delta_Q)} \approx \frac{\log(\Omega_{A_0, Z_0, Q}) - \log(\Omega_{A_0, Z_0, Q-1})}{\Delta_Q}, \quad (1.24)$$

e também a entropia associada a essa temperatura:

$$S = \log(\Omega_{A_0, Z_0, Q}). \quad (1.25)$$

Assim, os pesos estatísticos $\Omega_{A,Z,q}$ podem ser calculados após a determinação de $\omega_{A,Z,q}$ - o número de estados possíveis para os fragmentos, que é obtido por meio da convolução do número de estados associados a energia cinética com aqueles associados à energia interna [33]:

$$\omega_{A,Z,q} = \gamma_A \int_0^{\epsilon_{A,Z,q}} \sqrt{K} \rho_{A,Z}^*(\epsilon_{A,Z,q} - K) dK, \quad (1.26)$$

na qual tem-se

$$\gamma_A = \Delta_Q \frac{V_f (2m_n A)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3}, \quad (1.27)$$

onde V_f é o volume livre definido anteriormente; $\epsilon_{A,Z,q} = q\Delta_Q + B_{A,Z}^c$ como consequência da equação 1.20 e $\rho_{A,Z}^*$ é a densidade de estados internos de um núcleo (A, Z) com energia de excitação ϵ^* . Com base na equação 1.26, nota-se que a densidade de estados $\rho_{A,Z}^*$ desempenha um papel importante para o modelo, já que se faz necessária para encontrar $\omega_{A,Z,q}$ e, por conseguinte, todas as outras quantidades físicas.

O cálculo de $\Omega_{A_0, Z_0, Q}$ pode ser bastante oneroso já que $\Omega_{A,Z,q}$ depende de três variáveis diferentes e que geralmente é preciso estimar $\omega_{A,Z,q}$ por métodos numéricos, dificultando sua determinação para núcleos ou energias de excitação grandes, ou então para valores pequenos da granularização Δ_Q . No entanto, como nenhuma dessas duas variáveis depende explicitamente das propriedades do sistema em questão, estas podem ser calculadas apenas uma vez e usadas posteriormente para outros processos, o que diminui o tempo computacional substancialmente.

A densidade de estados adotada nesse modelo foi introduzida em [26], que é criada considerando que a densidade deve ser consistente com a energia livre de Helmholtz definida na equação 1.11. Realizando uma expansão em série de Taylor para T até segunda ordem a partir da relação matemática entre $\rho(E)$ e $F^*(T)$:

$$e^{-F^*/T} = \int_0^\infty e^{-E/T} \rho(E) dE \quad (1.28)$$

encontra-se, por aproximação de ponto de sela, a expressão de um gás de Fermi [26]

$$\rho_{FG}(\epsilon^*) = \frac{a_{SMM}}{\sqrt{4\pi} (a_{SMM} \epsilon^*)^{3/4}} \exp(2\sqrt{a_{SMM} \epsilon^*}), \quad (1.29)$$

onde a_{SMM} é o valor absoluto do coeficiente do termo de segunda ordem da expansão de energia livre em T ,

$$a_{SMM} = \frac{A}{\epsilon} + \frac{5}{2} \beta_0 \frac{A^{2/3}}{T_c^2}. \quad (1.30)$$

Ainda que essa expressão para a densidade de estados funcione para baixas temperaturas, não é adequada para temperaturas mais altas, onde o núcleo deixa de existir ao atingir a

temperatura crítica, como é visto em [26]. Assim, para considerar esse aspecto, é adicionado um fator *ad hoc* dependente da energia que multiplica a expressão de ρ_{FG} , formando a seguinte expressão para a densidade de estados:

$$\rho_{A,Z}(\epsilon^*) \equiv \rho_{SMM}(\epsilon^*) = \rho_{FG}(\epsilon^*) e^{-b_{SMM}(a_{SMM}\epsilon^*)^{3/2}}, \quad (1.31)$$

que é usada neste modelo já que é compatível com a energia livre do SMM para diferentes valores de temperatura. Os parâmetros para a_{SMM} são idênticos aos citados para as equações 1.11 e 1.12, e b_{SMM} é definido como

$$b_{SMM} = 0.07A^{-\tau} \quad \text{com} \quad \tau = 1.82\left(1 + \frac{A}{4500}\right). \quad (1.32)$$

Além disso, para núcleos com $A \leq 4$ que aqui são tomados como partículas sem graus de liberdade internos é usado $\rho_{A,Z}^*(\epsilon^*) \equiv g_{A,Z}\delta(\epsilon^*)$, com exceção de partículas α para as quais se fixa $\beta_0 = 0$ e $b_{SMM} = 0.000848416$, de modo a levar em conta seus estados excitados acima de 20 MeV. Neste trabalho, para evitar instabilidades numéricas na região de energias de excitação muito baixas foi usado $\rho_{A,Z}(\epsilon^*) = \rho_0 \exp(\epsilon^* - U_x)/\bar{\tau}$, com valores a serem definidos na seção 2.2 [11].

Comparações entre esse modelo de energia discretizada - denominado SMM-DE - e o SMM apresentado na Seção 1.3 foram feitas em [31], e mostram que as duas abordagens produzem resultados muito similares tanto para a curva calórica⁷ quanto para as distribuições de carga dos fragmentos primários para o processo de multifragmentação de um núcleo de ^{40}Ca . Também foi constatado que o valor escolhido para Δ_Q possui pouca influência nestes resultados, o que favorece os cálculos numéricos uma vez que o tempo necessário para tais cálculos cresce rapidamente com a diminuição do valor de Δ_Q .

Mesmo que existam algumas diferenças técnicas entre as implementações dos dois modelos, tais como a consideração que centro de massa do sistema está repouso (feita no SMM) ou então que todas as maneiras possíveis de distribuição de energia entre os fragmentos são levadas em conta (SMM-DE), chega-se nos mesmos resultados sem maiores consequências. Portanto, acredita-se que ambos podem ser utilizados com confiança. Sendo assim, os pesos estatísticos serão calculados através do SMM-DE, que permite realizar esses cálculos com maior eficiência.

Na próxima seção será apresentado o modelo utilizado neste trabalho para tratar com a desexcitação dos fragmentos primários, necessário para encontrar a distribuição final de cargas do evento de multifragmentação.

⁷ A curva calórica é o diagrama da energia de excitação por nucleon E^*/A pela temperatura T e a determinação da sua forma é altamente importante para a física nuclear devido a sua relação com transições de fase [2, 18].

1.5 Modelo de Fermi de *breakup*

A generalização do modelo de Fermi de *breakup* (GFBM), que será mostrada nessa seção, é equivalente a implementação microcanônica do SMM. Nesse trabalho, o GFBM será empregado na desexcitação dos fragmentos primários, cálculo que será desenvolvido mais adiante. Neste momento, apresenta-se o ponto de partida para o GFBM.

A princípio concebido como um meio de calcular as multiplicidades e distribuições angulares de colisões em altas energias [35, 36], o modelo de Fermi de *breakup* (FMB) foi posteriormente usado no decaimento estatístico de partículas leves. No domínio destas reações nucleares, o FBM assume que os fragmentos são emitidos nos seus estados fundamentais ou então em estados excitados quasi-estáveis, e é formulado em linhas gerais a partir da definição de uma taxa de transição de um estado 0 para a configuração n de estados $\gamma_{0 \rightarrow n}$ tal que

$$\gamma_{0 \rightarrow n} = \frac{2\pi}{\hbar} |\tau_{0 \rightarrow n}|^2 \omega_n, \quad (1.33)$$

na qual ω_n é a densidade de estados finais da configuração n

$$\begin{aligned} \omega_n = & \prod_{l=1}^k \frac{1}{n_l!} \left(\frac{V_n}{(2\pi\hbar)^3} \right)^{n-1} \prod_{j=1}^n g_j \int \prod_{j=1}^n d^3 p_j \delta \left(\sum_{j=1}^n \vec{p}_j \right) \\ & \times \delta \left(E_0 - B_0 - E_{c0} - \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_j^2}{2m_j} - B_j - E_{cj} \right) \right), \end{aligned} \quad (1.34)$$

onde a soma em j é feita sobre todos os fragmentos da configuração e a soma em l sobre os fragmentos distintos, considerando suas multiplicidades n_l . Os termos de energia interna, ligação e de Coulomb sucedem as mesmas expressões já mencionadas na Seção 1.3. Aqui $V_n \equiv (1 + \chi)V_0$, com $\chi = 1$; e $\tau_{0 \rightarrow n}$ é o elemento da matriz de transição estabelecido como independente das configurações e seus momenta individuais, permitindo então escrever a probabilidade de uma configuração como [37]:

$$P_n = \frac{\omega_n}{\sum_m \omega_m}. \quad (1.35)$$

em que a soma é feita sobre todas as configurações possíveis. Uma generalização para esse modelo, que leva em conta os estados excitados na densidade w_n , foi proposta em [37], modificando sua expressão para:

$$\begin{aligned} \omega_n = & \prod_{l=1}^k \frac{1}{n_l!} \left(\frac{V_n}{(2\pi\hbar)^3} \right)^{n-1} \int \prod_{j=1}^n d^3 p_j \delta \left(\sum_{j=1}^n \vec{p}_j \right) \int \prod_{j=1}^n \omega_j(\epsilon_j) d\epsilon_j \\ & \times \delta \left(E_0 - B_0 - E_{c0} - \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_j^2}{2m_j} + \epsilon_j - B_j - E_{cj} \right) \right), \end{aligned} \quad (1.36)$$

com $w_j(\epsilon_j)$ como a densidade de estados e ϵ_j é a energia de excitação do fragmento j . Nesta fórmula a degenerescência dos fragmentos g_j é incorporada à densidade de estados e para uma partícula sem estados excitados $w_j(\epsilon_j) \equiv g_j \delta(\epsilon_j)$.

Essa extensão para o FBM, denominada GFBM, verificou que ao reescrever $\omega_j(\epsilon_j)$ em função da energia livre de Helmholtz conforme a expressão 1.28 é possível resolver analiticamente as integrais da equação 1.36, condensando a expressão em

$$\omega_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\beta [-\beta(F_n(\beta) - E_0)], \quad (1.37)$$

em que a energia livre de Helmholtz é dada pela soma das energias de todos os fragmentos. Efetuando uma aproximação de ponto de sela⁸ na equação 1.37 conclui-se que

$$\omega_n = \frac{\exp(S_n(T_0))}{\sqrt{2\pi C_{V,n} T_0}} \quad (1.38)$$

onde $S_n(T_0)$ é a entropia total da configuração e T_0 a temperatura de quebra do sistema, dependente da configuração. O calor específico $C_{V,n}$ é determinado pelas fórmulas termodinâmicas usuais, $C_{V,n} = T(dS_n/dT)$.

O GFBM gera resultados compatíveis com o FBM, além de ser mais apropriado para tratar processos de fragmentação por ser consistente com a hipótese de equilíbrio termodinâmico do modelo original. Além do mais, foi demonstrado que o GFBM e o SMM na sua versão microcanônica são essencialmente iguais. Essa constatação é clara quando se nota que o SMM determina seus pesos estatísticos de uma maneira diferente, como descrito na Seção 1.3, porém obtém uma relação similar ao GFBM, com $\Omega_n = \exp(S_n)$.

A maior diferença entre os dois modelos está no tratamento de processos nucleares, com o SMM sendo um modelo estatístico de equilíbrio no qual configurações são associadas com os modos de fragmentação, enquanto o GFBM é um modelo para decaimento nuclear baseado no núcleo composto. Mesmo assim, os dois modelos tornam-se semelhantes quando os pesos estatísticos do GFBM são identificados como a densidade de estados w_n , precisamente como é feito no SMM.

A seguir, será apresentado o método para calcular as distribuições finais dos fragmentos, após a desexcitação dos mesmos, usando o modelo de Fermi de *breakup* generalizado.

1.6 Cálculo da desexcitação dos fragmentos primários

As distribuições finais dos fragmentos são obtidas conforme o método descrito em [31]. Como é sabido, os fragmentos primários gerados em um evento como esse estarão nos seus estados excitados, e assim serão considerados como uma fonte, isto é, serão desexcitados

⁸ A resolução dessas integrais foi feita em detalhe em [37] e seu apêndice.

partindo da equação 1.19. Outro fato é que, em experimentos de colisões nucleares, quase todos os fragmentos produzidos já terão decaído ao serem detectados pelos equipamentos. Portanto, o processo de desexcitação é aplicado sucessivamente, até que os fragmentos tenham atingido seus estados fundamentais. Caso o estado encontrado não seja estável devido a emissão espontânea de fragmentos mais leves, o procedimento é o mesmo, porém usa-se $E^* = 0$ na equação 1.19.

A partir da equação 1.18, que estabelece a multiplicidade média $\bar{n}_{a,z,q}$ de um fragmento (a, z) com energia total $q\Delta_Q$, produzido a partir da quebra de um núcleo (fonte) descrito por (A_0, Z_0) com energia total $Q\Delta_Q$; e a definição da energia de excitação média $\bar{\epsilon}^*$ para esse fragmento, definida como [31]

$$\bar{\epsilon}^* = \frac{\gamma_a}{\omega_{a,z,q}} \int_0^{\epsilon_{a,z,q}} (\epsilon_{a,z,q} - K) \sqrt{K} \rho_{a,z}^*(\epsilon_{a,z,q} - K) dK, \quad (1.39)$$

o processo de desexcitação dos fragmentos, uma vez encontrada a distribuição primária $\{n_{a,z,q}\}$, é realizado da seguinte forma [11]:

- A energia de excitação média $\bar{\epsilon}^*$ de um fragmento (A, Z) com energia $q_0\Delta_Q$ é calculada através da equação 3.1 e o decaimento descrito na Seção 1.4 é aplicado. A contribuição $\Delta\bar{n}_{a,z,q}^{(1)}$ para os resultados $\{a, z\}$

$$\Delta\bar{n}_{a,z,q}^{(1)} = \bar{n}'_{a,z,q} \times \bar{n}_{A,Z,q_0}, \quad (1.40)$$

onde

$$\bar{n}'_{a,z,q} = \frac{\omega_{a,z,q}}{\Omega_{A,Z,q_0}} \Omega_{A-a,Z-z,q_0-q}, \quad (1.41)$$

é adicionada a $\bar{n}_{a,z,q}$, onde $a < A$.

- Como um fragmento (A, Z) com energia $q_0\Delta_Q$ também será produzido nesse estágio, com multiplicidade $\bar{n}'_{A,Z,q_0} \times \bar{n}_{A,Z,q_0}$, esse fragmento irá decair novamente, dessa maneira contribuindo para a produção resultante de fragmentos mais leves (a, z) em um segundo passo

$$\Delta\bar{n}_{a,z,q}^{(2)} = \bar{n}'_{a,z,q} \times (\bar{n}'_{A,Z,q_0} \times \bar{n}_{A,Z,q_0}), \quad (1.42)$$

enquanto também contribui para os resultados de (A, Z) com $(\bar{n}'_{A,Z,q_0})^2 \times \bar{n}_{A,Z,q_0}$. Logo, por indução, tem-se que o n -ésimo passo do decaimento irá contribuir para a distribuição final através da fórmula

$$\Delta\bar{n}_{a,z,q} = \bar{n}'_{a,z,q} \times [(\bar{n}'_{A,Z,q_0})^{n-1} \times \bar{n}_{A,Z,q_0}] \quad (1.43)$$

Mais especificamente, após repetir esse procedimento até que a contribuição de (A, Z) tenda a zero, isto é, que o número de passos $n \rightarrow \infty$, obtém-se que cada espécie (A, Z) contribui para a distribuição final (a, z) através de

$$\bar{n}_{a,z,q} \rightarrow \bar{n}_{a,z,q} + \frac{\bar{n}'_{a,z,q}}{1 - \bar{n}'_{A,Z,q_0}} \times \bar{n}_{A,Z,q_0}, \quad (1.44)$$

uma vez que as contribuições são somadas a cada passo⁹.

- Os passos especificados acima são realizados para todos os isóbaros A , após para $A - 1$ e assim sucessivamente até que todos os fragmentos tenham sido desexcitados. Dessa forma, começando com a espécie mais pesada até o fragmento mais leve, a distribuição final de fragmentos é gerada.

1.7 A densidade de estados nuclear

Conforme a Seção 1.4, todas as quantidades físicas referentes ao modelo estatístico e suas predições dependem da resolução da equação 1.26 para $\omega_{A,Z}$, que por sua vez depende fundamentalmente da densidade de estados $\rho_{A,Z}$. Assim, a construção de $\rho_{A,Z}$ é muito importante para o desenvolvimento de todo o modelo teórico e, conseqüentemente, dos cálculos das propriedades nucleares de interesse.

Em experimentos recentes [10, 13–15], foram relatados distribuições de carga na forma de dente de serra, ou *staggering*, em inglês, como pode-se ver na Figura 1.4. Esses efeitos são normalmente associados ao termo de emparelhamento da energia de ligação nuclear [38], dada pela equação 1.6.

O emparelhamento de prótons e nêutrons dentro dos núcleos é resultado do princípio de exclusão de Pauli, que torna energeticamente mais favorável uma configuração onde exista o acoplamento dos spins dos nucleons. Assim, um núcleo com um número par de prótons ou nêutrons possui uma energia total menor, ou seja, energia de ligação maior que um núcleo com número ímpar. Os pares formados numa estrutura nuclear podem ser explicados de maneira análoga aos pares de Cooper da teoria BCS, que será aprofundada na Seção 2.1.2.

Nessa descrição, as energias de excitação são dadas por

$$E_m = \sqrt{(\epsilon_m - \lambda)^2 - \Delta^2}, \quad (1.45)$$

onde λ representa o potencial químico e Δ é o parâmetro de gap, que mede a correlação do emparelhamento. Esse parâmetro está relacionado com a força de emparelhamento G , aqui considerada constante, através da equação de gap dada por

$$\frac{2}{G} \sum_m \frac{1}{E_m} \tanh \frac{1}{2} \beta E_m. \quad (1.46)$$

Ainda, é importante notar que pode-se mostrar que o parâmetro Δ de emparelhamento depende da temperatura, através da aproximação [12]

$$\Delta(T) = \Delta_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_{cr}} \right)^k \right]^{1/2}, \quad (1.47)$$

⁹ Aqui foi utilizada a expansão em série de $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 \dots$ para encontrar a contribuição final expressa na equação 1.44.

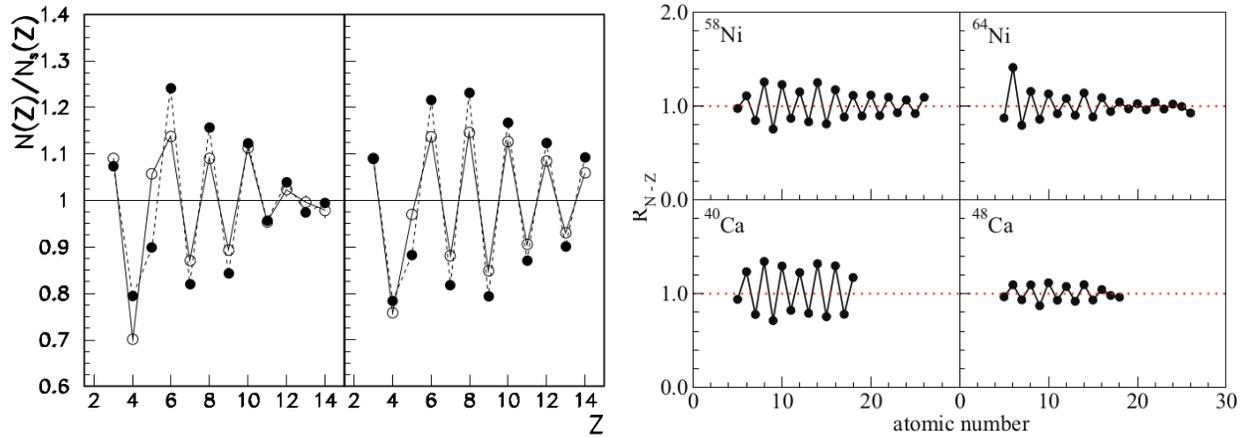


Fig. 1.4: Distribuições de carga que apresentam efeitos de emparelhamento, figuras retiradas de [10] e [15], respectivamente.

na qual Δ_0 é a energia de emparelhamento em $T = 0$, T_{cr} é a temperatura crítica em que o *gap* de emparelhamento deixa de existir e k é um parâmetro a ser ajustado; conforme visto na Figura 1.5.

Um estudo recente [9] elaborou um modelo para tentar reproduzir os dados que apresentem efeitos par-ímpar e conseguiu demonstrar que a desexcitação dos fragmentos interfere nos resultados, levando ao surgimento de *staggering* nas distribuições, em regiões de energia onde os efeitos de emparelhamento devem ser atenuados.

A densidade de estados descrita na Seção 1.4 não considera efeitos de emparelhamento, e assim, as distribuições de carga calculadas pelo modelo descrito nas seções anteriores acabam por exibir esses efeitos mesmo para energias de excitação mais altas.

Como pode ser observado na Figura 1.6, tanto a distribuição de carga primária dos fragmentos quanto a distribuição final da quebra de um núcleo de ^{40}Ca para diferentes energias de excitação apresentam efeitos par-ímpar (*staggering*). A única explicação para possível para esse efeito, no contexto do modelo, é o termo de emparelhamento na energia de ligação dos fragmentos (e Eqs. 1.6 e 1.8). Contudo, as temperaturas de *breakup* variam entre $T = 3.8$ MeV para $E^*/A = 1.5$ MeV, até $T = 5.0$ MeV para $E^*/A = 3.5$ MeV; e sabe-se que os efeitos de emparelhamento não devem ser significativos para essa região de energias [12, 39].

Ainda que esse modelo tenha demonstrado que a desexcitação dos fragmentos interfere nos resultados [31], carece uma explicação satisfatória para os efeitos par-ímpar. Portanto, este e outros modelos apenas conseguem descrever esse fenômeno até certo ponto, fazendo com que a influência do emparelhamento ainda precise de mais estudos para seu completo entendimento.

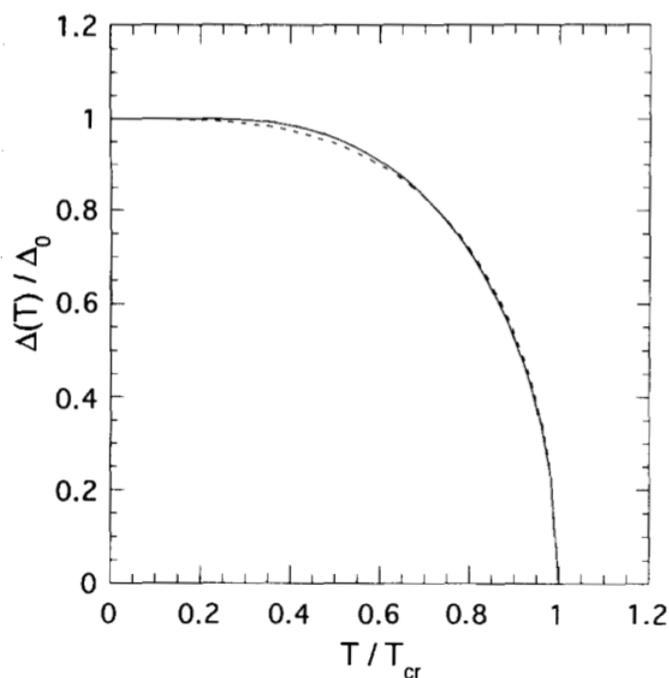


Fig. 1.5: Dependência do termo de emparelhamento com a temperatura, nota-se que os efeitos de emparelhamento diminuem conforme a temperatura do sistema aumenta, assim sabe-se que em energias mais altas esses efeitos são menos significativos. Gráfico retirado da referência [12]

Em vista disso, esse trabalho propõe-se a construir uma densidade de estados que inclua efeitos de emparelhamento nos níveis nucleares para analisar o comportamento de *staggering*. Para tal, a construção da nova densidade de estados, baseada na proposta feita em [40], leva em consideração os efeitos do emparelhamento nos estados excitados mantendo a concordância com a densidade normalmente usada no modelo estatístico de multifragmentação (SMM), preservando, portanto, as propriedades do modelo para altas energias.

A partir da densidade modificada, é feita a implementação do modelo estatístico de energia discretizada (Sec. 1.4) na geração dos fragmentos primários, que por conseguinte são desexcitados usando a generalização do modelo de Fermi (Sec. 1.5), conforme explicitado na Seção 1.6 deste capítulo.

Essa proposta para a densidade de estados será apresentada no próximo capítulo, após uma breve revisão sobre a energia de emparelhamento nuclear. A partir disso, serão encontradas as distribuições de carga inicial e final para os núcleos de ^{40}Ca e ^{80}Zr .

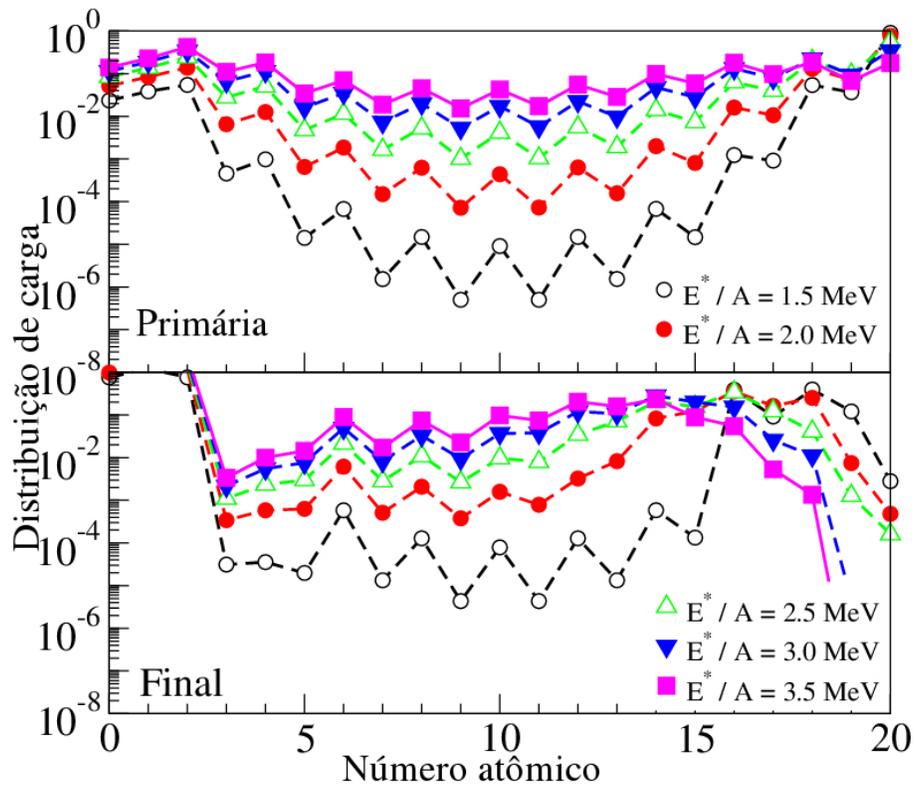


Fig. 1.6: *Distribuições de carga dos fragmentos resultantes da quebra de um núcleo de ^{40}Ca para energias de excitação distintas. Os cálculos para encontrar as distribuições foram realizados usando a densidade de estados padrão (Eq. 1.31).*

Capítulo 2

Efeitos de emparelhamento na multifragmentação nuclear

Neste capítulo, a energia de emparelhamento nuclear é apresentada ao descrever as interações entre os nucleons confinados em um núcleo através do formalismo de operadores. A partir do trabalho desenvolvido em [40], uma densidade de estados nuclear que inclui efeitos de emparelhamento é proposta. Comparações realizadas entre a densidade tradicionalmente usada no modelo SMM e a versão aprimorada indicam uma excelente similaridade nos cálculos dos observáveis, validando a modificação sugerida.

2.1 A energia de emparelhamento

Para compreender como o emparelhamento é relevante para uma descrição mais precisa de sistemas nucleares, será introduzido o formalismo da segunda quantização que possibilita uma formulação concisa para as propriedades dos vários nucleons em termos dos operadores de criação e destruição. A seguir será feita uma breve revisão dos conceitos usados na obtenção das expressões para a interação de emparelhamento e os cálculos posteriores. Uma explicação detalhada desse formalismo, contudo, pode ser encontrada em [41].

2.1.1 Conceitos da segunda quantização

Para definir o estado de um sistema quântico de n partículas idênticas assume-se que é possível usar um conjunto de variáveis dinâmicas K que descreve uma única partícula para n partículas do mesmo tipo. Dado isso, tem-se que os autovalores k_i de K estão associados com o operador de número de ocupação N_i , tal que seus autoestados representam o número de partículas n_i que possui o valor k_i . Assim, o estado do sistema é representado como um estado de Fock

$$|n_1, n_2, n_3, \dots\rangle, \tag{2.1}$$

onde n_i é o número de ocupação com valor k_i , ou seja, quantas partículas existem em um estado particular do sistema.

É útil definir operadores de criação a_i^\dagger e destruição a_i tais que ao serem aplicados a um estado tenham como resultado, respectivamente

$$a_i^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle \propto |n_1, n_2, \dots, n_i + 1, \dots\rangle \quad (2.2)$$

$$a_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle \propto |n_1, n_2, \dots, n_i - 1, \dots\rangle, \quad (2.3)$$

adicionando ou aniquilando uma partícula no estado com valor k_i . Também é definido que o operador de destruição ao ser aplicado em um estado de vácuo não o altera, isto é, $a_i|0\rangle \equiv 0$. Usando os operadores a_i^\dagger e a_i , pode-se escrever o operador de número de ocupação como

$$N_i = a_i^\dagger a_i, \quad (2.4)$$

e a soma de todos os N_i possíveis é chamada de operador de número total de partículas

$$N = \sum_i N_i = \sum_i a_i^\dagger a_i. \quad (2.5)$$

Considerando que essa formulação será usada para descrever nucleons, isto é, um sistema de férmions, sabe-se que os operadores de criação e destruição respeitam as seguintes relações de anticomutação

$$\{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0 \quad (2.6)$$

$$\{a_i, a_j\} = 0$$

$$\{a_i^\dagger, a_j\} = \delta_{ij}, \quad (2.7)$$

A partir das definições abordadas acima, pode-se escrever outros operadores aditivos, como a energia cinética:

$$\kappa = \sum_i N_i k_i = \sum_i a_i^\dagger a_i k_i. \quad (2.8)$$

Ao reescrever κ utilizando uma base arbitrária no qual sua representação não é diagonal, encontra-se uma expressão válida para qualquer operador que age sobre uma partícula, ou seja, que não expressa nenhuma interação entre as mesmas. Sendo $\{|k_i\rangle\}$ a base na qual κ seja definido pela equação 2.8 e $\{|l_j\rangle\}$ a nova base, relacionadas através de $|k_i\rangle = \sum_j |l_j\rangle \langle l_j | k_i \rangle$, é definido um novo par de operadores de criação e aniquilação arbitrários b_j^\dagger e b_j . Esses são expressos em termos de a_i^\dagger e a_i como

$$a_i^\dagger = \sum_j b_j^\dagger \langle l_j | k_i \rangle \quad (2.9)$$

e

$$a_i = \sum_j \langle k_i | l_j \rangle b_j. \quad (2.10)$$

Substituindo as equações 2.9 e 2.10 na expressão 2.8, obtém-se

$$\kappa = \sum_{mn} b_m^\dagger b_n \sum_i \langle l_m | K | l_n \rangle, \quad (2.11)$$

com

$$\langle l_m | K | l_n \rangle = \sum_i \langle l_m | k_i \rangle k_i \langle k_i | l_n \rangle. \quad (2.12)$$

Da mesma forma, pode-se encontrar uma expressão para operadores de duas partículas, que representam interações, como por exemplo a energia potencial:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (N_i N_j - N_i \delta_{ij}) v_{ij}. \quad (2.13)$$

Assumindo que os valores v_{ij} formam uma matriz simétrica real, e definindo o operador de distribuição de pares $P_{ij} \equiv N_i N_j - d_{ij} N_i$, que pode ser reescrito como $P_{ij} = a_i^\dagger a_j^\dagger a_j a_i$, o potencial é expresso em função dos operadores de criação e destruição da seguinte forma:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_i^\dagger a_j^\dagger a_j a_i v_{ij}. \quad (2.14)$$

Analogamente ao cálculo feito para operadores que atuam em uma partícula, encontra-se uma forma generalizada para operadores de interação entre duas partículas:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \sum_{mnpq} \langle mn | V | pq \rangle b_m^\dagger b_n^\dagger b_p b_q, \quad (2.15)$$

com

$$\langle mn | V | pq \rangle = \sum_{i,j} v_{ij} \langle l_m | k_i \rangle \langle k_i | l_p \rangle \langle l_n | k_j \rangle \langle k_j | l_q \rangle. \quad (2.16)$$

Fazendo uso da formulação exposta acima, apresenta-se agora a descrição para um sistema de nucleons sujeitos a uma interação de emparelhamento.

2.1.2 Sistema de férmions interagentes

O modelo BCS¹ [42] reconheceu o papel da interação de emparelhamento nos estados de um supercondutor. Devido à semelhança entre o *gap* na energia nas excitações eletrônicas e o

¹ Sigla que representa os nomes dos criadores da teoria, Bardeen, Cooper e Schrieffer.

gap existente no espectro de energia de excitação dos estados nucleares, seus métodos foram utilizados para descrever quantitativamente os efeitos de emparelhamento na estrutura nuclear. De fato, um tratamento mais realista das propriedades nucleares estatísticas precisa incluir interações residuais entre nucleons [39], e isso é feito através de uma interação de emparelhamento do tipo

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \sum_{j,m} a_j^\dagger a_{-j}^\dagger a_{-m} a_m \langle j, -j | V | m, -m \rangle. \quad (2.17)$$

O Hamiltoniano para descrever um sistema de n férmions, incluindo a contribuição do emparelhamento, pode ser escrito na sua forma da segunda quantização

$$\mathcal{H} = \sum_{m>0} \epsilon'_m (a_m^\dagger a_m + a_{-m}^\dagger a_{-m}) - G \sum_{j,m \in S} a_q^\dagger a_{-q}^\dagger a_{-m} a_m, \quad (2.18)$$

onde aqui ϵ'_m é a energia dos estados de partícula única e foi assumido que a interação de emparelhamento da equação 2.17 é igual a uma constante ($-G$) ou então zero, dependendo se os estados q e m pertencem a um determinado subconjunto S dos números quânticos². Define-se as seguintes transformações de Bogoliubov para que o Hamiltoniano da equação 2.18 corresponda o mais próximo possível a um sistema de partículas não interagentes, ou quasipartículas: os novos operadores de destruição são escritos como

$$\alpha_m = u_m a_m - v_m a_{-m}^\dagger, \quad (2.19)$$

$$\beta_m = u_m a_{-m} + v_m a_m^\dagger, \quad (2.20)$$

sendo u_m e v_m números reais tais que $u_m^2 + v_m^2 = 1$. Assim, os férmions criados pelos novos operadores de criação, que são os conjugados hermitianos das expressões acima, α_m^\dagger e β_m^\dagger , são chamados de quasipartículas associadas a interação de emparelhamento. As relações inversas,

$$a_m = u_m \alpha_m + v_m \beta_m^\dagger \quad (2.21)$$

$$a_{-m} = u_m \beta_m - v_m \alpha_m^\dagger, \quad (2.22)$$

encontradas a partir das definições escritas na equação 2.19 permitem reescrever \mathcal{H} em uma representação de quasipartícula, restando apenas determinar a solução para os autovalores do operador $\mathcal{H} - \lambda N$ para determinar os autoestados do Hamiltoniano³. Desconsiderando

² Na supercondutividade a força de emparelhamento entre elétrons só é efetiva para elétrons que estão próximos da energia de Fermi, por exemplo.

³ Como o Hamiltoniano nessa aproximação de quasipartícula não comuta com o operador do número de partículas N é preciso impor a condição de que ao menos $\langle N \rangle = n$ é igual ao número de férmions do sistema [41].

interações entre as quasipartículas, tem-se

$$\mathcal{H} - \lambda N = 2 \sum_m (\epsilon_m - \lambda) v_m^2 - G \left(\sum_{m \in S} u_m v_m \right)^2 + G \sum_{m \in S} v_m^4 \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_m (\epsilon_m - \lambda) (u_m^2 - v_m^2) (\alpha_m^\dagger \alpha_m + \beta_m^\dagger \beta_m) \\ &+ 2G \sum_{j \in S} u_j v_j \sum_{m \in S} u_m v_m (\alpha_m^\dagger \alpha_m + \beta_m^\dagger \beta_m) \\ &+ 2 \sum_m (\epsilon_m - \lambda) u_m v_m (\alpha_m^\dagger \beta_m^\dagger + \beta_m \alpha_m) \\ &- G \sum_{j \in S} u_j v_j \sum_{m \in S} (u_m^2 - v_m^2) (\alpha_m^\dagger \beta_m^\dagger + \beta_m \alpha_m), \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde

$$\epsilon_m = \epsilon'_m \quad \text{se } m \notin S \quad (2.25)$$

e

$$\epsilon_m = \epsilon'_m - G v_m^2 \quad \text{se } m \in S. \quad (2.26)$$

O problema dos autovalores é solucionado escolhendo valores para u_m e v_m tais que

$$u_m v_m = 0 \quad \text{se } m \notin S \quad (2.27)$$

$$u_m^2 - v_m^2 = \frac{2u_m v_m (\epsilon_m - \lambda)}{G \sum_{j \in S} u_j v_j} \quad \text{se } m \in S. \quad (2.28)$$

Fazendo uso da relação $u_m^2 + v_m^2 = 1$ definida anteriormente, encontra-se as equações para u_m e v_m

$$2u_m v_m = \frac{\Delta}{\sqrt{(\epsilon_m - \lambda) + \Delta^2}} \quad (2.29)$$

$$u_m^2 - v_m^2 = \frac{\epsilon_m - \lambda}{\sqrt{(\epsilon_m - \lambda) + \Delta^2}}, \quad m \in S \quad (2.30)$$

onde se usa a abreviação

$$\Delta \equiv G \sum_m u_m v_m. \quad (2.31)$$

Com isso, as soluções para os valores de u_m e v_m são dadas por

$$u_m^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_m - \lambda}{E_m} \right) \quad (2.32)$$

$$v_m^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_m - \lambda}{E_m} \right), \quad (2.33)$$

com

$$E_m = |\epsilon_m - \lambda| \quad \text{se } m \notin S \quad (2.34)$$

$$E_m = \sqrt{(\epsilon_m - \lambda)^2 + \Delta^2} \quad \text{se } m \in S. \quad (2.35)$$

Finalmente, o Hamiltoniano efetivo pode ser escrito como

$$\mathcal{H} - \lambda N = 2 \sum_m (\epsilon_m - \lambda) v_m^2 - \frac{\Delta^2}{G} + G \sum_{m \in S} v_m^4 + \sum_m E_m (\alpha_m^\dagger \alpha_m + \beta_m^\dagger \beta_m), \quad (2.36)$$

descrevendo, desse modo, um sistema de férmions independentes no qual as energias de excitação são dadas pela equação 2.35.

A equação 2.31 define o que é chamado de parâmetro de *gap* e é uma medida da correlação do emparelhamento [39]. A quantidade Δ é determinada pelas equações 2.29 e 2.31, resultando em uma equação para Δ da forma⁴

$$\frac{G}{2} \sum_{m \in S} \frac{1}{\sqrt{(\epsilon_m - \lambda)^2 + \Delta^2}} = 1, \quad (2.37)$$

e a condição para o número de partículas leva a uma expressão para λ ,

$$\sum_m \left(1 - \frac{\epsilon_m - \lambda}{E_m} \right) = n. \quad (2.38)$$

As equações para Δ e λ devem ser resolvidas simultaneamente para uma dada energia ϵ_m , número de partículas n e intensidade G do emparelhamento. Encontradas as soluções das equações 2.37 e 2.38, todas as outras quantidades podem ser determinadas. Para aplicações do formalismo relatado acima em diversos sistemas nucleares, recomenda-se a leitura de [43].

Agora que a descrição para o núcleo, considerado aqui um gás de Fermi, foi feita e a interação de emparelhamento entre os nucleons melhor compreendida através das equações obtidas, será discutida uma densidade de estados nuclear que inclua esses efeitos, para que o emparelhamento seja tratado de maneira consistente no modelo desenvolvido neste trabalho.

2.2 Densidade de estados nuclear com *gap* de emparelhamento incluso

Conforme discutido na seção 1.7, a densidade de estados que é empregada usualmente nos cálculos do SMM, por não incluir as contribuições devidas ao emparelhamento, faz com que as distribuições dos fragmentos resultantes não correspondam às previsões teóricas que,

⁴ A equação 2.37 possui solução apenas para quando a condição $G \sum_{m \in S} |\epsilon_m - \lambda|^{-1} > 2$ [41].

conforme a temperatura aumenta, os efeitos par-ímpar deveriam ser atenuados [12]. Como base para a construção da densidade de estados que será implementada neste trabalho, foi usada a formulação proposta em [40], que tem seus pontos principais revisados a seguir.

A densidade de estados nuclear pode ser dividida em duas regiões de energia de excitação dos nucleons [39]. Os estados de baixa energia de excitação podem ser descritos por uma densidade dada por

$$\rho = \exp[(E - E_0)/T] \quad (2.39)$$

que se ajusta bem aos dados experimentais em energias de excitação da ordem de 10 MeV [40]. Já para energias mais altas, a descrição dos nucleons é feita através do modelo de gás de Fermi, ou seja, por uma densidade de estados da forma

$$\rho \approx \exp(2\sqrt{aE}). \quad (2.40)$$

Para criar uma densidade que sirva para descrever todo o espectro de energias de excitação, inicia-se exigindo que os comportamentos citados acima sejam respeitados, e então elaboram-se métodos para fazer a transição de uma expressão para a outra. É preciso determinar os parâmetros T e E_0 , que aparecem na densidade de baixas energias, além de E_x , energia no ponto que as duas expressões tangenciam-se. Para determinar o parâmetro a da densidade em energias mais altas são usados dados experimentais sobre ressonâncias de nêutrons e prótons⁵.

A fórmula final da densidade nessa faixa de energias é derivada no apêndice de [40], a partir do método da função de partição [39]. Assim, para uma energia de excitação U acima de U_0 (estado completamente degenerado), toma a forma⁶

$$\rho_2 = \frac{\sqrt{\pi} \exp(2\sqrt{aU})}{12} \frac{1}{a^{1/4} U^{5/4} \sqrt{2\pi\sigma_0}}, \quad (2.41)$$

onde o termo associado à dependência de spin é dado por $\sigma_0 = 0.0888(aU)^{1/2} A^{2/3}$. A temperatura nuclear é definida [40] como

$$\frac{1}{\tau} \equiv \frac{d(\log \rho_2)}{dU} = \sqrt{\frac{a}{U}} - \frac{3}{2U} \quad (2.42)$$

Ao tentar ajustar os parâmetros livres a e U_0 aos dados experimentais, pode-se colocar U_0 como a energia do estado fundamental, tornando U simplesmente a energia de excitação e deixando apenas a como incógnita a ser determinada numericamente pelos dados sobre ressonâncias de nêutrons.

⁵ Em [40] são apresentadas tabelas detalhadas contendo dados sobre a ressonância de nucleons, energias de ligação e estados de spin.

⁶ O índice na densidade é adotado para distinguir as duas densidades (altas e baixas energias) que estão sendo usadas.

Porém, com essa escolha para U_0 , os valores para a são consistentemente afetados nas vizinhanças de núcleos com número de massa A e carga Z par-par, ímpar-ímpar ou então para número de massa ímpar. Essas diferenças podem ser removidas ao subtrair-se uma energia de emparelhamento da energia de excitação U , feito primeiramente em [44]. Já que esses efeitos par-ímpar também são encontrados nas energias de ligação e massas nucleares, a energia de emparelhamento⁷ usada é decorrente de uma fórmula de massa semi-empírica, desenvolvida em [45]. Como consequência, redefine-se a energia U como

$$U = E - \Delta, \quad (2.43)$$

onde E é a energia de excitação total e Δ a energia total de emparelhamento do núcleo. Com a nova expressão para U , agora se tem uma densidade de estados que inclui efeitos de emparelhamento explicitamente em sua fórmula. Essa dependência leva em conta que os pares de nucleons devem ser quebrados para então serem excitados, e assim considera efeitos de emparelhamento em estados excitados.

Neste trabalho, o parâmetro a da densidade de estados é fixado em $a = A/8.0 \text{ MeV}^{-1}$ para todos os núcleos. Para uma discussão sobre a e também correções devido a camadas nucleares refere-se a [40], onde também é desenvolvido o método para realizar a transição de uma densidade de estados para a outra.

Para fins de clareza, apresenta-se diretamente os resultados de realizar a transição entre uma densidade de estados para baixas energias,

$$\rho_1 = \frac{1}{T} \exp[(E - E_0)/T] \quad (2.44)$$

e a densidade de estados para altas energias, da equação 2.41. A densidade ρ_2 é válida para todas energias maiores que E_x , a energia de excitação no ponto de tangenciamento ('encontro') das duas densidades. O parâmetro E_x é determinado como

$$E_x = U_x + \Delta, \quad (2.45)$$

com

$$U_x = 2.5 + 150/A \quad \text{MeV}, \quad (2.46)$$

onde U_x é um valor médio obtido em [40]. Os dois últimos parâmetros a serem calculados são T e E_0 , que são determinados ao igualar as expressões para ρ_1 e ρ_2 no ponto E_x :

$$\rho_1(E_x) = \rho_2(U_x) = \frac{1}{T} \exp[(E_x - E_0)/T], \quad (2.47)$$

$$E_0 = E_x - T \log[T \rho_2(U_x)], \quad (2.48)$$

$$T = \tau(U_x). \quad (2.49)$$

⁷ Ainda que o método para derivar as energias de emparelhamento estejam contidos em [45], a referência central [40] apresenta as tabelas com os valores encontrados para as energias.

Finalmente, tem-se a densidade de estados proposta em [40] que, além de ser adequada para um grande intervalo de energias de excitação, inclui efeitos de emparelhamento para estados excitados.

2.3 Proposta de uma nova densidade de estados

A densidade de estados apresentada na seção anterior, desenvolvida por Gilbert e Cameron em [40], pode ser escrita como

$$\rho_{GC}(\epsilon^*) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_0}{\tau} \exp[(\epsilon^* - E_0)/\tau], & \epsilon^* \leq E_x \\ \frac{\sqrt{\pi}}{12} \frac{\exp[2\sqrt{a(\epsilon^* - \Delta)}]}{(\epsilon^* - \Delta)[a(\epsilon^* - \Delta)]^{1/4}}, & \epsilon^* > E_x. \end{cases}$$

onde ϵ^* é a energia de excitação; $\sigma_0 = 0.0888\sqrt{a(E_x - E_0)}A^{2/3}$; e E_x , U_x e E_0 são definidos conforme as equações 2.45, 2.46 e 2.48, respectivamente. Ainda, para determinar E_0 são necessárias as equações para ρ_2 e τ , dadas por

$$\rho_2(E_x) = \frac{1}{12\sqrt{2}} \frac{1}{\sigma_0} \frac{\exp^{2\sqrt{a(E_x - \Delta)}}}{(E_x - \Delta)[a(E_x - \Delta)]^{1/4}} \quad (2.50)$$

e

$$\frac{1}{\tau} = \sqrt{\frac{a}{E_x - \Delta}} \frac{3}{2} \frac{1}{E_x - \Delta}. \quad (2.51)$$

A parte para energias mais baixas dessa expressão leva em consideração que, nesse intervalo de energia, os modos coletivos do núcleo também estão excitados, e assim essa densidade de estados tem uma contribuição extra do que é esperado para um gás de Fermi - sendo aqui proporcional a $\exp(\epsilon^*)$ ao contrário da expressão para energias mais altas, onde é proporcional a $\exp(\sqrt{2a\epsilon^*})$. Além disso, sua dependência em explícita em $\epsilon^* - \Delta$ para $E - E_x$, ao invés de apenas ϵ^* , considera os efeitos de emparelhamento para estados excitados.

Ainda que a inclusão dos efeitos de emparelhamento seja o objetivo deste trabalho, empregar diretamente a densidade da equação 2.3 no modelo para multifragmentação levaria a discordâncias com os resultados já encontrados pelo SMM, que descreve bem as observações experimentais a altas energias, dado que essa densidade é diferente da normalmente utilizada na multifragmentação. Em vista disso, para considerar os efeitos de emparelhamento na densidade de estados e, ao mesmo tempo, manter as propriedades do modelo para altas energias, segue-se o procedimento realizado em [26], definindo uma densidade que se altera gradativamente de ρ_{GC} para ρ_{SMM} :

$$\rho(\epsilon^*) = \rho_{GC}[1 - f(x)] + \rho_{SMM}(\epsilon^* - \Delta)f(x). \quad (2.52)$$

A escolha de $f(x)$ pode ser feita com bastante liberdade, desde que a mudança de uma densidade de estados para a outra seja suave. Aqui foi escolhida a função

$$f(x) = \frac{1 + \tanh(x)}{2}, \quad (2.53)$$

com

$$x = \frac{\epsilon^* - E_x - 1/2\Delta E}{\delta E} \quad (2.54)$$

onde

$$\Delta E/A = \exp[-A/35 + 1.2]\text{MeV} \quad \text{e} \quad \delta E = 10.0\text{MeV}. \quad (2.55)$$

que não é demasiadamente complicada e satisfaz a condição de uma transição suave das densidades.

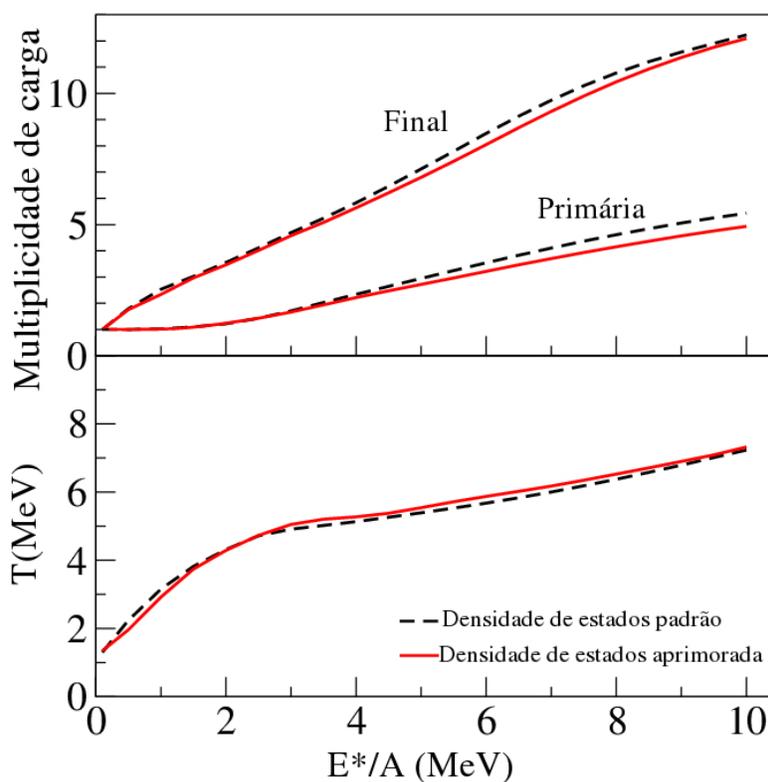


Fig. 2.1: Comparação entre resultados obtidos usando as diferentes densidade de estados descritas acima.

Para verificar se a densidade de estados aprimorada, definida pela Equação 2.52, pode ser empregada com confiança, as distribuições das multiplicidades de carga primária e final, em função da energia de excitação e a curva calórica para a quebra de um núcleo de ^{40}Ca foram calculadas. Ao comparar os resultados do cálculo dessas propriedades usando a densidade usual (Eq. 1.31) e a aprimorada, nota-se nitidamente a sua semelhança, mostrando que as características principais do modelo, especialmente em altas energias, são preservadas. Portanto, a nova densidade de estados é confiável e será adotada a partir desse ponto.

Este capítulo revisou brevemente a energia de emparelhamento nuclear através do formalismo de operadores, para descrever como nucleons interagem e o surgimento do *gap* de emparelhamento. Em seguida, foi introduzida a proposta para uma nova densidade de estados, baseada em uma densidade apresentada em [40], que inclui o emparelhamento diretamente. Por fim, a comparação entre a densidade aprimorada e a normalmente usada dentro do SMM mostrou que não há diferenças significativas entre as duas, tornando a nova densidade confiável e sendo assim, adotada para os cálculos desenvolvidos neste trabalho.

O capítulo seguinte apresenta os resultados obtidos para as distribuições de carga de ^{40}Ca e ^{80}Zr , ao empregar a densidade de estados aprimorada. A influência do efeito par-ímpar é investigada, em relação ao tamanho da fonte e da sua energia de excitação, e também sua relação com a parametrização da energia de emparelhamento.

Capítulo 3

Influência da densidade de estados

Neste capítulo, apresentam-se os resultados da implementação do modelo descrito ao longo do Capítulo 1 usando a densidade de estados proposta no Capítulo 2. É verificada, portanto, a influência desta no efeito par-ímpar das distribuições de carga dos fragmentos emitidos em um processo de multifragmentação. A dependência desses efeitos relativa ao tamanho do sistema e seus fragmentos e também à energia de excitação é analisada em sequência. Por fim, investiga-se até que ponto aprende-se sobre uma melhor parametrização para a energia de emparelhamento a partir de efeitos par-ímpar nas distribuições de carga.

3.1 Distribuições de carga dos fragmentos

Primeiramente as distribuições de carga inicial e final dos fragmentos de um núcleo de ^{40}Ca são calculadas para energias de excitação variando entre 1.5 – 3.5 MeV por nucleon. Os resultados são expostos na Figura 3.1: na parte superior estão as distribuições primárias para diferentes energias de excitação e na parte inferior as distribuições finais para as mesmas energias.

Em comparação com as distribuições encontradas anteriormente, na implementação desse modelo usando a densidade de estados padrão do SMM (Fig 1.6), percebe-se que os efeitos par-ímpar são reduzidos progressivamente na distribuição primária conforme a energia de excitação aumenta, sendo quase imperceptíveis para $E^*/A \approx 2.5$ MeV. Ainda, o tratamento consistente do emparelhamento em todo o modelo resulta em distribuições finais de carga com efeitos de *staggering* acentuados, de acordo com estudos anteriores [9, 10, 13]. Além disso, há uma tendência dos efeitos serem suavizados à medida que o número atômico Z aumenta, que também foi reportada em [15].

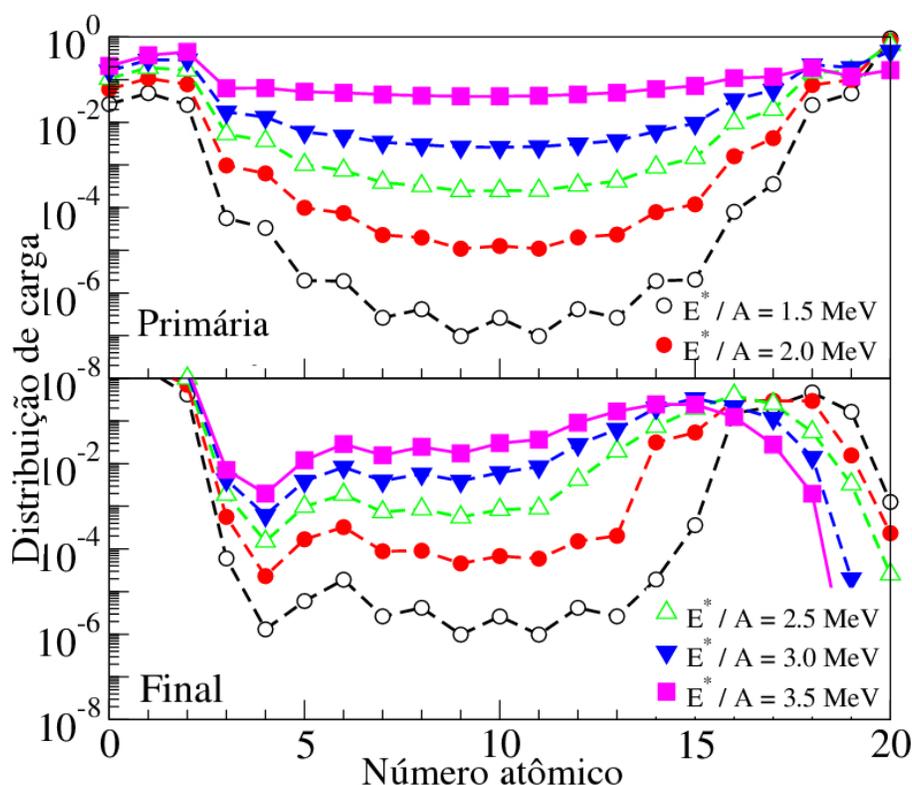


Fig. 3.1: Distribuições de carga dos fragmentos resultantes da quebra de um núcleo de ^{40}Ca para energias de excitação distintas. Os cálculos para encontrar as distribuições foram realizados usando a densidade de estados aprimorada (Eq. 2.52).

Para investigar a dependência do efeito par-ímpar com o tamanho do sistema, os mesmos cálculos foram feitos para a fragmentação um núcleo de ^{80}Zr . As distribuições de carga são apresentadas na Figura 3.2, onde fica claro que os efeitos par-ímpar são menos importantes em relação ao caso do núcleo de ^{40}Ca . A amplitude do *staggering* é pequena já para energias de excitação por volta de 1.5 MeV, e basicamente desaparece para energias maiores. É possível observar que os efeitos são um pouco mais pronunciados para energias menores; porém, como é visto no gráfico, as distribuições possuem valores extremamente baixos.

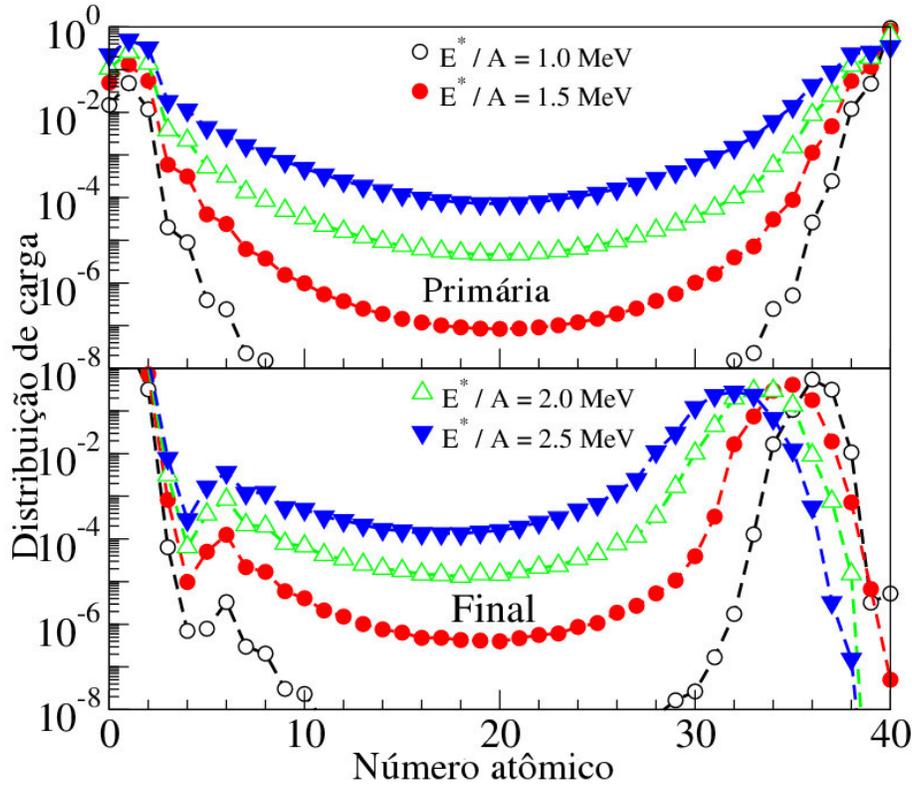


Fig. 3.2: Distribuições de carga primária e final da quebra de um núcleo de ^{80}Zr para energias de excitação distintas. Os cálculos feitos são análogos aos realizados para o núcleo ^{40}Ca .

3.2 Relação com a energia de excitação total

A dependência do *staggering* na energia de excitação e no tamanho do sistema e seus fragmentos pode ser compreendida através da distribuição da energia de excitação dos fragmentos, definida na Seção 1.6

$$\bar{\epsilon}^* = \frac{\gamma_a}{\omega_{a,z,q}} \int_0^{\epsilon_{a,z,q}} (\epsilon_{a,z,q} - K) \sqrt{K} \rho_{a,z}^*(\epsilon_{a,z,q} - K) dK. \quad (3.1)$$

Denotando $n(\bar{\epsilon}^*)$ como a multiplicidade média dos fragmentos emitidos, constrói-se um gráfico dessa quantidade, normalizada pelo seu valor máximo correspondente, em função de $\bar{\epsilon}^*$ para os fragmentos de ^{24}Mg , ^{28}Si e ^{32}S produzidos na quebra dos núcleos de ^{40}Ca e ^{80}Zr :

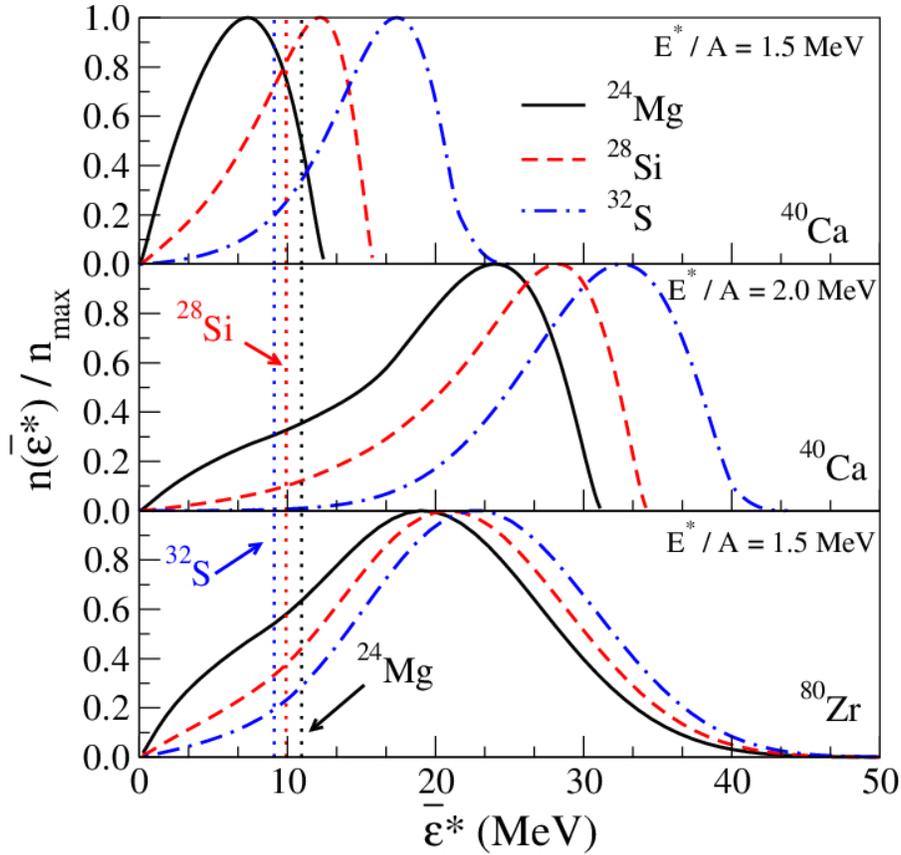


Fig. 3.3: Energia de excitação média dos fragmentos primários produzidos na quebra de ^{40}Ca e ^{80}Zr . As linhas pontilhadas representam os valores de E_x , indicados pelas setas para cada tipo de fragmento no gráfico.

No painel superior da Figura 3.3, os resultados foram obtidos a partir da quebra de ^{40}Ca com energias de excitação $E^*/A = 1.5$ MeV. Percebe-se que a fração dos fragmentos produzidos com energia de excitação maiores que E_x aumenta conforme o tamanho do fragmento cresce. Como definido anteriormente na Seção 2.2, E_x representa a energia que faz a mediação entre expressões da densidade de estados para baixas e altas energias, e aqui representa o limite superior para o qual os modos nucleares coletivos são relevantes [39]. Logo, os efeitos de emparelhamento são cada vez menos importantes à medida que o tamanho do fragmento aumenta, uma vez que os estados de mais alta energia (estados de partícula única) tornam-se mais populados e dominantes sobre os modos coletivos (estados de baixas energias).

No painel do meio da Figura 3.3, tem-se os cálculos feitos para ^{40}Ca novamente, mas agora para energia de excitação de $E^*/A = 2.0$ MeV. Fica evidente que a energia da fonte

desempenha um papel importante no efeito par-ímpar: mesmo com uma diferença de apenas 0.5 por nucleon MeV do resultado anterior, o número de fragmentos com energia de excitação menor que E_x diminui drasticamente. Mais uma vez, os fragmentos ocupam estados de maior energia e, como consequência, os efeitos de *staggering* são atenuados - resultado visto no gráfico da Figura 3.1.

Por fim, no painel inferior da Figura 3.3, tem-se a energia de excitação média para os mesmos fragmentos ^{24}Mg , ^{28}Sn e ^{32}S porém usando o núcleo ^{80}Zr como fonte, com uma energia de excitação de $E^*/A = 1.5$ MeV. Em comparação com o painel superior, percebe-se que, devido a quantidade maior de energia de excitação disponível procedente da fonte, a distribuição da energia dos fragmentos amplia-se e também é deslocada na direção das energias mais altas. De novo, a população de fragmentos com energias menores que E_x é reduzida, o que leva a distribuições de carga sem efeitos de *staggering*, como foi mostrado na Figura 3.2. É interessante notar que as temperaturas de *breakup* obtidas para ^{40}Ca e ^{80}Zr à mesma energia de excitação são semelhantes: $T = 3.89$ MeV para ^{80}Zr e $T = 3.74$ MeV para ^{40}Ca , o que indica que a energia de excitação total é a quantidade relevante, e não a energia de excitação por nucleon E^*/A .

No contexto deste modelo, a dependência na energia de excitação e no tamanho da fonte e seus fragmentos é explicado pela migração da população dos estados de baixas energias para estados de energias maiores. Assim, o estudo dos efeitos par-ímpar nas distribuições de carga pode ser útil para coletar informações sobre a densidade de estados nuclear.

3.3 Sensibilidade a diferentes parametrizações da energia de emparelhamento

Finalmente, avalia-se a parametrização da energia de emparelhamento e seu impacto para as distribuições de carga. São comparados os termos de emparelhamento usados no SMM e em [46], dados por $\bar{\Delta} \equiv 11.86/A^{1/2}$ MeV e $\bar{\Delta} \equiv 34.0/A^{3/4}$ MeV, respectivamente. No primeiro gráfico da Figura 3.4 são representadas as parametrizações em função do número atômico, e percebe-se que essas definições levam a diferenças significativas nas energias de emparelhamento. Contudo, a influência na distribuição de cargas primária devido a essa mudança de parâmetros é muito pequena, e não é exibida na Figura 3.4.

Já para a distribuição de carga final, as diferenças são acentuadas durante o processo de desexcitação, como mostram o segundo e o terceiro gráfico referentes a fragmentação de um núcleo de ^{40}Ca com energias $E^*/A = 2.0$ MeV e $E^*/A = 4.0$ MeV. A parametrização de [46] leva a efeitos par-ímpar mais relevantes - as análises feitas nas referências [9, 10, 13–15] podem ser úteis para determinar a melhor parametrização do termo de emparelhamento por meio de comparações com os dados experimentais. Os resultados sugerem que é muito difícil

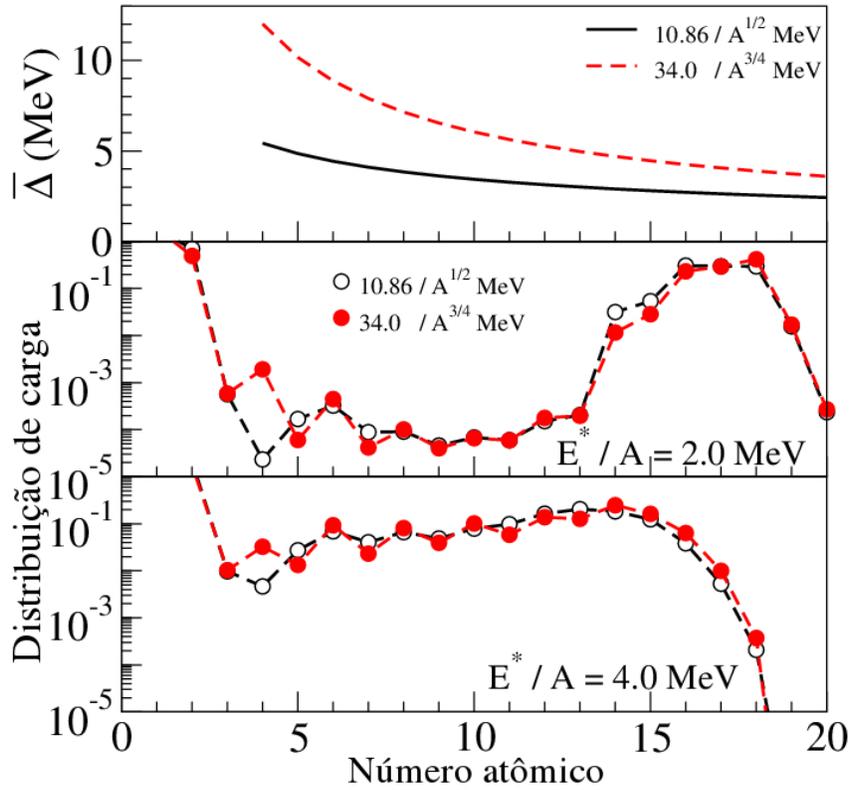


Fig. 3.4: Comparação entre as parametrizações da energia de emparelhamento. Ainda que existam diferenças significativas para a energia de emparelhamento, a distribuição de carga é pouco afetada.

se obter informações a respeito da melhor parametrização da energia de emparelhamento estudando efeitos par-ímpar nas distribuições de carga.

Neste capítulo foram apresentados os resultados obtidos com a nova densidade de estados para as distribuições de carga primária e final dos núcleos de ^{40}Ca e ^{80}Zr . Notou-se que os efeitos de emparelhamento foram desaparecendo conforme a energia do sistema aumentou, e que o *staggering* é acentuado na distribuição final de cargas, mostrando que esse efeito é influenciado pela desexcitação dos fragmentos. Ainda, constatou-se que o tamanho do sistema tem relação inversa com o efeito par-ímpar, e ao analisar a sua dependência com a energia de excitação da fonte concluiu-se que, nesse modelo, a explicação para o comportamento do *staggering* nas distribuições de carga é o aumento da população de estados de altas energias. Por fim, os resultados obtidos com diferentes parametrizações para a energia de emparelhamento não revelaram grandes diferenças, e assim, é preciso outros estudos e comparações com experimentos para determinar qual a melhor parametrização para a energia de emparelhamento.

Capítulo 4

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação foi proposta uma densidade de estados nuclear que inclui os efeitos de emparelhamento para melhor descrever as distribuições de carga de fragmentos produzidos em processos de quebra de sistemas nucleares excitados [11]. Para tal, foi desenvolvida uma versão do modelo estatístico de multifragmentação apresentado no Capítulo 1. O SMM [5,8] descreve muito bem colisões nucleares para energias de algumas dezenas de MeV, a partir da hipótese que cada modo de fragmentação f está associado a um peso estatístico Ω_f [23–25], e a partir da sua determinação é possível encontrar os valores esperados para todas as quantidades físicas (Sec. 1.3).

Devido ao enorme número de partições que precisam ser geradas para a determinação desses valores, foi introduzido o modelo estatístico de energia discretizada (Sec 1.4), que por meio de fórmulas recursivas para as funções de partição permitiu realizar os cálculos de maneira consideravelmente mais eficiente, já que essas foram computadas apenas uma vez e seus resultados foram usados para diferentes processos [31]. No desenrolar do SMM-DE observou-se que a densidade de estados é uma parte fundamental para o modelo, dado que as todas as propriedades de interesse do sistema, direta ou indiretamente, dependem desta.

Uma vez determinada a distribuição primária dos fragmentos, esses foram desexcitados através do modelo de Fermi de *breakup* generalizado (Sec 1.5). A implementação do GFBM leva em consideração as contribuições dos estados excitados para a densidade de estados final de uma dada configuração [37], sendo equivalente à versão microcanônica do SMM. O método para a desexcitação foi retratado detalhadamente na Seção 1.6, e assim as distribuições de carga primárias e finais dos fragmentos produzidos na quebra de um núcleo de ^{40}Ca foram calculadas (Sec. 1.7).

Dado que a densidade de estados usualmente empregada nos modelos estatísticos de multifragmentação não leva em conta o emparelhamento, os resultados obtidos para as distribuições de carga não são satisfatórios, pois apresentam *staggering* mesmo para energias de excitação mais altas, região na qual os efeitos de emparelhamento deixam de ser significativos [12, 39].

Com isso, baseada na construção feita na Seção 2.2, a densidade de estados aprimorada foi proposta. A nova densidade fez uma ‘conexão’ entre a densidade fornecida em [40] e a

densidade padrão do SMM [26], agregando os efeitos de emparelhamento da primeira com o comportamento em altas energias da segunda. Para testar a validade da implementação da densidade aprimorada na versão do SMM apresentada neste trabalho, comparações com a densidade usual do SMM foram realizadas (Sec. 2.3), e mostraram uma ótima concordância das propriedades calculadas com ρ_{SMM} e ρ_{e^*} . Dessa maneira, constatou-se que essa forma original para a densidade de estados é confiável, e então essa foi utilizada para obter as distribuições de carga dos fragmentos emitidos na multifragmentação (Sec. 3.1).

Os resultados encontrados foram reproduzidos ao longo do Capítulo 3. Em acordo com estudos anteriores [9, 10, 13], as distribuições de carga obtidas mostram que o efeito par-ímpar é influenciado pela desexcitação dos fragmentos primários, e pode ser usado como uma ferramenta para aperfeiçoar modelos dessa parte do processo. A atenuação desses efeitos nas distribuições primárias é explicada nesse modelo pelo aumento na ocupação de estados de altas energias, onde as excitações de partícula única são dominantes em relação aos modos coletivos (Sec. 3.2). Como a densidade de estados faz parte dos cálculos para distribuições de carga, os efeitos de *staggering* também podem ser usados para delimitar essa quantidade. Por último, mostrou-se que é difícil distinguir entre diferentes parametrizações da energia de emparelhamento a partir da comparação com os dados experimentais (Sec 3.3).

Em suma, o estudo dos efeitos par-ímpar pode ser muito útil para aprimorar os métodos adotados para o decaimento dos fragmentos primários, e conseqüentemente, aperfeiçoar os modelos empregados para a descrição da multifragmentação. Além disso, investigações teóricas mais aprofundadas podem levar a melhor compreensão do processo de desexcitação - uma extensão natural deste trabalho seria a inclusão da dependência da temperatura de maneira explícita no termo de emparelhamento da energia de ligação, o que afetaria diretamente como os fragmentos excitados decairiam e, conseqüentemente, os resultados obtidos para as distribuições de carga dos mesmos.

Bibliografia

- [1] N. Bohr. Neutron capture and nuclear constitution. *Nature*, 137(3461):344–348, 1936.
- [2] S. Das Gupta, A.Z. Mekjian, and M.B. Tsang. Liquid-gas phase transition in nuclear multifragmentation. In *Advances in Nuclear Physics*, volume 26, pages 89–166. Springer, 2001.
- [3] R.T. de Souza, N. Le Neindre, A. Pagano, and K.H. Schmidt. Detection. In *Dynamics and Thermodynamics with nuclear degrees of freedom*, volume 30, pages 275–291. 2006.
- [4] B. Borderie and M.F. Rivet. Nuclear multifragmentation and phase transition for hot nuclei. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 61(2):551–601, 2008.
- [5] J.P. Bondorf, A.S. Botvina, A.S. Iljinov, I.N. Mishustin, and K. Sneppen. Statistical multifragmentation of nuclei. *Physics Reports*, 257(3):133–221, 1995.
- [6] D.H.E. Gross. Nuclear multifragmentation, its relation to general physics. In *Dynamics and Thermodynamics with nuclear degrees of freedom*, volume 30, pages 293–302. Springer, 2006.
- [7] J. Pochodzalla. The search for the liquid-gas phase transition in nuclei. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 39:443–501, 1997.
- [8] A.S. Botvina and I.N. Mishustin. Statistical description of nuclear break-up. In *Dynamics and Thermodynamics with Nuclear Degrees of Freedom*, volume 30, pages 121–128. Springer, 2006.
- [9] J.R. Winkelbauer, S.R. Souza, and M.B. Tsang. Influence of secondary decay on odd-even staggering of fragment cross sections. *Physical Review C*, 88(4):044613, 2013.
- [10] M. D’Agostino, M. Bruno, F. Gulminelli, L. Morelli, G. Baiocco, L. Bardelli, S. Barlini, F. Cannata, G. Casini, E. Geraci, et al. Reaction mechanisms and staggering in S + Ni collisions. *Nuclear Physics A*, 861(1):47–66, 2011.

- [11] N.L. Calleya, S.R. Souza, B.V. Carlson, R. Donangelo, W.G. Lynch, M.B. Tsang, and J.R. Winkelbauer. Influence of the density of states on the odd-even staggering in the charge distribution of the emitted fragments in nuclear heavy-ion collisions. *Physical Review C*, 90(5):054616, 2014.
- [12] S. Goriely. A new nuclear level density formula including shell and pairing correction in the light of a microscopic model calculation. *Nuclear Physics A*, 605(1):28–60, 1996.
- [13] M.V. Ricciardi, A.V. Ignatyuk, A. Kelić, P. Napolitani, F. Rejmund, K.-H. Schmidt, and O. Yordanov. Complex nuclear-structure phenomena in the cooling down of highly excited nuclear systems. *Nuclear Physics A*, 749:122–125, 2005.
- [14] G. Casini, S. Piantelli, P.R. Maurenzig, A. Olmi, L. Bardelli, S. Barlini, M. Benelli, M. Bini, M. Calviani, P. Marini, et al. Persistence of odd-even staggering in charged-fragment yields from $112 \text{ Sn} + 58 \text{ Ni}$ collisions at 35 mev/nucleon. *Physical Review C*, 86(1):011602, 2012.
- [15] S. Piantelli, G. Casini, P.R. Maurenzig, A. Olmi, S. Barlini, M. Bini, S. Carboni, G. Pasquali, G. Poggi, A.A. Stefanini, et al. N and z odd-even staggering in Kr + Sn collisions at fermi energies. *Physical Review C*, 88(6):064607, 2013.
- [16] L.G. Moretto and G.J. Wozniak. Multifragmentation in heavy-ion processes. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 43(1):379–455, 1993.
- [17] V.A. Karnaukhov. Nuclear multifragmentation and phase transitions in hot nuclei. *Physics of Particles and Nuclei*, 37(2):165–193, 2006.
- [18] W. Trautmann. Multifragmentation and the liquid-gas phase transition: an experimental overview. *Nuclear Physics A*, 752:407–416, 2005.
- [19] V.A. Karnaukhov, S.P. Avdeyev, A.S. Botvina, A. Budzanowski, L.V. Chulkov, B. Czech, W. Karcz, V.V. Kirakosyan, E.A. Kuzmin, E. Norbeck, et al. Nuclear multifragmentation and fission: similarity and differences. *Nuclear Physics A*, 780(3):91–99, 2006.
- [20] V.F. Weisskopf and D.H. Ewing. On the yield of nuclear reactions with heavy elements. *Phys. Rev.*, 57:472–485, 1940.
- [21] N. Bohr and J. A. Wheeler. The mechanism of nuclear fission. *Phys. Rev.*, 56:426–450, 1939.
- [22] A. J Cole. *Statistical models for nuclear decay: from evaporation to vaporization*. CRC Press, 2000.

-
- [23] J.P. Bondorf, R. Donangelo, I.N. Mishustin, C.J. Pethick, H. Schulz, and K. Sneppen. Statistical multifragmentation of nuclei:(i). formulation of the model. *Nuclear Physics A*, 443(2):321–347, 1985.
- [24] J.P. Bondorf, R. Donangelo, I.N. Mishustin, and H. Schulz. Statistical multifragmentation of nuclei:(ii). application of the model to finite nuclei disassembly. *Nuclear Physics A*, 444(3):460–476, 1985.
- [25] K. Sneppen. Partitioning of a two component particle system and the isotope distribution in nuclear fragmentation. *Nuclear Physics A*, 470(1):213–229, 1987.
- [26] W.P. Tan, S.R. Souza, R.J. Charity, R. Donangelo, W.G. Lynch, and M.B. Tsang. Isospin effects in nuclear multifragmentation. *Physical Review C*, 68(3):034609, 2003.
- [27] A.S. Botvina, A.S. Iljinov, I.N. Mishustin, J.P. Bondorf, R. Donangelo, and K. Sneppen. Statistical simulation of the break-up of highly excited nuclei. *Nuclear Physics A*, 475(4):663–686, 1987.
- [28] S.R. Souza, W.P. Tan, R. Donangelo, C.K. Gelbke, W.G. Lynch, and M.B. Tsang. Nuclear isotope thermometry. *Physical Review C*, 62(6):064607, 2000.
- [29] E. Wigner. On the interaction of electrons in metals. *Physical Review*, 46(11):1002, 1934.
- [30] S.R. Souza, P. Danielewicz, S. Das Gupta, R. Donangelo, W.A. Friedman, W.G. Lynch, W.P. Tan, and M.B. Tsang. Mass parametrizations and predictions of isotopic observables. *Physical Review C*, 67(5):051602, 2003.
- [31] S.R. Souza, B. V. Carlson, R. Donangelo, William G. Lynch, and M.B. Tsang. Statistical multifragmentation model with discretized energy and the generalized fermi breakup: Formulation of the model. *Physical Review C*, 88(1):014607, 2013.
- [32] K.C. Chase and A.Z. Mekjian. Exact methods for expectation values in canonical fragmentation models. *Physical Review C*, 52(5):R2339, 1995.
- [33] S. Pratt and S. Das Gupta. Statistical calculations of nuclear fragment distributions. *Physical Review C*, 62(4):044603, 2000.
- [34] P. Bhattacharyya, S. Das Gupta, and A.Z. Mekjian. Nuclear properties at finite temperature in a two-component statistical model. *Physical Review C*, 60(5):054616, 1999.
- [35] E. Fermi. High energy nuclear events. *Progress of theoretical physics*, 5(4):570–583, 1950.

-
- [36] E. Fermi. Angular distribution of the pions produced in high energy nuclear collisions. *Physical Review*, 81(5):683, 1951.
- [37] B.V. Carlson, R. Donangelo, S.R. Souza, W.G. Lynch, A.W. Steiner, and Tsang M.B. Fermi breakup and the statistical multifragmentation model. *Nuclear Physics A*, 876:77–92, 2012.
- [38] W.A. Friedman and G.F. Bertsch. Neutron-proton pairing reexamined. *Physical Review C*, 76(5):057301, 2007.
- [39] J.R. Huizenga and L.G. Moretto. Nuclear level densities. *Annual review of nuclear science*, 22(1):427–464, 1972.
- [40] A. Gilbert and A.G.W. Cameron. A composite nuclear-level density formula with shell corrections. *Canadian Journal of Physics*, 43(8):1446–1496, 1965.
- [41] E. Merzbacher. *Quantum Mechanics*. John Wiley and Sons, Inc., 1970.
- [42] J. Bardeen, L.N. Cooper, and J.R. Schrieffer. Microscopic theory of superconductivity. *Physical Review*, 106(1):162, 1957.
- [43] K.L.G. Heyde. *The nuclear shell model*. Springer, 1994.
- [44] T.D. Newton. Shell effects on the spacing of nuclear levels. *Canadian Journal of Physics*, 34:804, 1956.
- [45] A.G.W. Cameron and R.M. Elkin. Role of the symmetry energy in atomic mass formulas. *Canadian Journal of Physics*, 43:1288, 1965.
- [46] P. Ring and P. Schuck. *The nuclear many-body problem*. Springer Science & Business Media, 2004.