

ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE GRANDES DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

CARLOS EDUARDO MICHAUD

Dissertação submetida ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

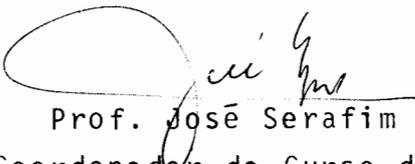
Orientador: Prof. Ademar Gilberto Groehs



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PORTO ALEGRE
JULHO/1981

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil e aprovada em sua forma final pelo orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.


Prof. Ademair Gilberto Groehs
Orientador


Prof. José Serafim Gomes Franco
Coordenador do Curso de Pós-Graduação

AGRADECIMENTOS

Ao professor Ademar Gilberto Groehs pela dedicação na orientação deste trabalho, além do apoio e cooperação no desenvolvimento do mesmo.

Ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, na pessoa de seu coordenador professor José Serafim Gomes Franco, pela atenção dispensada no transcorrer deste trabalho.

À srta. Liliani Gaeversen pelo cuidadoso trabalho dactilográfico.

À sra. Juliana Zart Bonilha pela preparação das referências bibliográficas.

Ao CNPq e CNEN pela concessão da bolsa de estudos.

Aos meus pais, aos colegas e amigos que com seu apoio e incentivo colaboraram com a realização deste trabalho.

Aos professores e funcionários do Curso de Pós-Graduação.

SINOPSE

Neste trabalho foi desenvolvido um programa computacional para resolver problemas elastoplásticos com deformações finitas utilizando o método dos elementos finitos. São consideradas pequenas deformações elásticas, grandes rotações e deformações plásticas.

Foram implementados os elementos triangular de três nós e quadrilátero de quatro nós isoparamétricos para problemas de estado plano de tensões e deformações, quadrilátero de quatro nós isoparamétricos para problemas axissimétricos e tridimensional de oito nós isoparamétricos. Foi utilizado na solução um método incremental com correção do equilíbrio.

O material foi considerado com endurecimento isotrópico e seguindo o critério de von Mises.

Foram feitas comparações com resultados experimentais e entre elementos.

SYNOPSIS

In this work a computational procedure for problems of large elastic-plastic deformations using the finite-element method was developed. Small elastic deformations, large rotations and plastic deformations were considered.

The three nodes triangular and the four nodes isoparametric quadrilateral finite elements for plane strain and plane stress problems, the four nodes isoparametric quadrilateral finite element for axisymmetric problems and the eight nodes isoparametric tridimensional finite element were implemented. An incremental method with equilibrium correction was used in the solution.

The material was considered to follow the von Mises yield condition and having isotropic hardening.

Comparisons between elements and with experimental results were done.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO.....	1
-----------------	---

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS TEÓRICOS, RELAÇÕES CONSTITUTIVAS, PRINCÍPIO VARIACIONAL.....	5
2.1 - Hipóteses Básicas.....	5
2.1.1 - Sistemas de descrição do movimento.....	5
2.1.2 - Definição dos tensores de taxa de deformação, taxa de rotação e de deformação específica.....	7
2.1.3 - Teorema da decomposição polar.....	9
2.1.4 - Gradiente de deformação relativo, rotação e dilatação relativas.....	11
2.1.5 - Definição dos tensores de tensão e taxa corrotacional.....	12
2.1.6 - Hipóteses básicas em plasticidade.....	15
2.1.7 - Critérios de escoamento e descarga.....	16
2.1.7.1 - Critério de escoamento e endurecimento...	16
2.1.8 - Separação do gradiente de deformações em suas partes elástica e plástica.....	17
2.1.9 - Aditividade dos tensores taxa de deformação....	21
2.2 - Relações Constitutivas Elásticas.....	22
2.3 - Relações Constitutivas Plásticas.....	24
2.4 - Princípio Variacional.....	30

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA, MÉTODO DE SOLUÇÃO.....	34
3.1 - Particularização do Princípio Variacional para a Aplicação em Elementos Finitos.....	34
3.2 - Método Utilizado na Solução do Problema Não Linear.....	38

CAPÍTULO 4

CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTAIS DO PROGRAMA.....	44
4.1 - Tipos de Elementos Empregados.....	44

4.2 - Obtenção da Matriz de Rigidez do Elemento.....	46
4.3 - Atualização da Espessura de Elementos de Estado Plano de Tensão.....	47
4.4 - Solução do Sistema.....	50
4.5 - Critério de Plastificação e Descarga dos Elementos...	50
4.5.1 - Critério de plastificação.....	50
4.5.2 - Critério de descarga.....	51
4.6 - Algoritmos de Solução.....	52
4.6.1 - Cálculo até a plastificação do primeiro pon- to.....	52
4.6.2 - Escolha dos incrementos na fase elastoplás- tica.....	53
4.6.3 - Controle de descarga dos pontos.....	58
4.6.4 - Interrupção da análise.....	58
4.7 - O Programa Computacional. Diagrama de Blocos.....	58

CAPÍTULO 5

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.....	62
5.1 - Exemplos com Um Elemento.....	62
5.1.1 - Triângulo linear.....	62
5.1.2 - Quadrilátero linear.....	63
5.2 - Placa Tracionada.....	66
5.3 - Barra Tracionada.....	70
5.4 - Viga Biengastada.....	72
5.5 - Chaveta.....	77
5.6 - Placa Circular.....	81

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	84
6.1 - Conclusões.....	84
6.1.1 - Método e análise.....	84
6.1.2 - Programa computacional.....	85
6.1.3 - Elementos implantados.....	85
6.2 - Sugestões.....	86

APÊNDICE A

OBTENÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE TENSÕES INICIAIS.....87

APÊNDICE B

ENTRADA DE DADOS.....93

B.1 - Descrição da Linguagem.....93

B.2 - Comandos.....97

B.3 - Exemplo de Utilização da Linguagem.....100

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....102

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A análise de problemas não lineares por meio de métodos numéricos, sofreu um grande avanço devido ao rápido desenvolvimento dos computadores digitais. Em particular, o método dos elementos finitos possibilita a solução de problemas não lineares com diversos tipos de geometria, e com vários tipos de comportamento, por meio de uma análise do tipo incremental, ou iterativa como Newton-Raphson.

Existe um interesse no desenvolvimento deste tipo de análise, que é a possibilidade de se aproveitar a reserva de resistência dos materiais após a plastificação, com uma economia no projeto. Devido a este interesse, aliado à relativa simplicidade com que o método dos elementos finitos pode tratar de problemas elastoplásticos em pequenas deformações, existem diversos trabalhos a este respeito. Por exemplo Zienkiewicz [35], faz uma análise deste tipo de problema não linear citando várias referências.

Apesar da generalidade com que a análise não linear em pequenas deformações é tratada, existem problemas nos quais a formulação convencional de pequenas deformações pode ser inadequada, ou insuficiente. Por exemplo no caso de instabilidade de elementos delgados onde se tem incrementos de rotação que superam em muito os de deformação, ou quando as tensões atingem níveis de magnitude comparáveis ao módulo de endurecimento plástico. Nestes tipos de problemas que são mais relacionados com a forma do elemento, ou com as propriedades intrín-

secas do material, que com a dimensão das deformações propriamente, pode-se fazer uma melhor abordagem utilizando uma formulação mais rigorosa supondo deformações finitas. Além disto, uma formulação que suponha deformações finitas é desejável no estudo de processos de conformação mecânica, processos de fratura, elementos tracionados ou ainda vasos de pressão.

Apesar do interesse que existe atualmente na solução de problemas de plasticidade com inclusão de deformações finitas, existem ainda uma série de problemas não resolvidos neste campo. A própria escolha das variáveis mais adequadas é um tema aberto à discussão. Neste aspecto temos os trabalhos de Lee [22], [23], que desenvolveu equações adequadas para grandes deformações elásticas e plásticas chegando a fazer considerações termoelásticas que levam a relações entre tensões e gradiente de deformações, lançando fundamentos para o desenvolvimento de relações constitutivas. Outra abordagem bastante geral é devida a Onat [6], que considera também grandes deformações elásticas e plásticas e possibilita a consideração de outros tipos de endurecimento além do isotropo.

O uso de elementos finitos na solução do problema de grandes deformações foi proposto por Hibbitt, Marcal e Rice [17], que derivam suas equações incrementais de equilíbrio para elementos finitos, a partir do princípio dos trabalhos virtuais para deformações finitas, usando uma descrição Lagrangeana. Neste trabalho foram identificados quatro termos na matriz de rigidez, o de pequenas deformações, o de carregamento inicial, o de deformações iniciais e o termo de tensões iniciais. Em uma análise elastoplástica todos estes termos devem ser calculados em cada incremento e os três últimos termos têm uma forma complicada. Também a partir de uma formulação Lagrangeana, Needleman [30] desenvolveu suas equações de equilíbrio, porém a partir de um princípio variacional devido a Hill [20]. Uma outra abordagem Lagrangeana é devida a Felippa e Sharifi [7], que não colocam limitação do tamanho do incremento de deformação, introduzindo com isto termos de mais alta ordem em sua matriz de rigidez. Tais termos não são significativos em uma abordagem por módulo tangente, já que os incrementos devem ser pequenos.

Jã Yaghmai e Popov [34] utilizam uma formulação Eu-

leriana, Sharifi e Popov [33] estenderam a análise anterior para resolver um problema elastoplástico com pequenas deformações porém com rotações finitas. Outras formulações Eulerianas com deformações finitas foram feitas por Gunasekera e Alexander [15], Argyris e Chan [1] e Osias [31].

Uma outra formulação em variáveis Eulerianas é dada por McMeeking e Rice [24], [25], que derivam suas equações incrementais de equilíbrio de uma forma do princípio dos trabalhos virtuais citada por Hill [19]. Devido à simplicidade desta formulação ela será utilizada neste trabalho.

Este trabalho está limitado ao caso de pequenas deformações elásticas, porém acompanhadas de possíveis grandes rotações e grandes deformações plásticas. A limitação ao caso de pequenas deformações elásticas é razoável se consideramos o estudo de materiais metálicos que possuem uma relação entre a tensão de escoamento e o módulo de elasticidade da ordem de 1:1000.

Quanto à análise plástica o material será considerado como sendo elastoplástico perfeito ou com endurecimento isotrópico. Além disto será utilizado o critério de escoamento de von Mises.

No segundo capítulo serão lançadas inicialmente as hipóteses básicas do desenvolvimento, procurando definir as variáveis utilizadas, os tensores de deformações e de tensões, para a seguir obter as relações constitutivas, elástica e plástica. No final deste capítulo será obtido um princípio variacional que permite aplicar o método dos elementos finitos na resolução do problema.

No terceiro capítulo será feita a aplicação mencionada ao método dos elementos finitos obtendo-se como resultado uma matriz de rigidez incremental composta de duas parcelas, a matriz de rigidez de pequenas deformações que leva em conta a não linearidade física e a matriz de rigidez geométrica que leva em conta a não linearidade geométrica. Durante a aplicação do método procura-se fazer uma correção de equilíbrio em cada etapa. A maneira pela qual é feita esta correção é apresentada no final do capítulo.

No quarto capítulo será feita uma descrição mais detalhada do programa computacional. Será comentado a respeito

dos elementos desenvolvidos, o triangular de três nós para estados planos de tensões e deformações, o quadrilátero de quatro nós para estados planos de tensões e deformações além de problemas axissimétricos e o elemento tridimensional de oito nós. Serão feitos ainda, comentários sobre vários tópicos do programa computacional passando pelo método utilizado para solução do sistema de equações, ajuste da espessura do elemento, critério de escoamento, critério de descarga e outros detalhes. Serão vistos ainda os algoritmos empregados e um diagrama de blocos do programa computacional implantado.

No quinto capítulo serão expostos os resultados dos exemplos analisados, comparando-os com resultados experimentais ou com resultados teóricos de outras fontes. Finalmente, no sexto capítulo serão apresentadas algumas conclusões e sugestões para possíveis melhoramentos no programa e futuras ampliações na análise.

Este trabalho faz parte de uma linha de pesquisa em plasticidade do curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, e está implantado em um sistema de linguagem orientada. Neste sistema já foi implantada a análise plástica para pequenas deformações com endurecimento isotrópico, cinemático e misto, isotrópico-cinemático, em vários tipos de problemas.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS TEÓRICOS, RELAÇÕES CONSTITUTIVAS,
PRINCÍPIO VARIACIONAL

2.1 - Hipóteses Básicas

2.1.1 - Sistemas de Descrição do Movimento

Será usado sempre neste estudo um sistema cartesiano de coordenadas, como o da figura 1, onde estão representadas as configurações deformada e indeformada de um corpo.

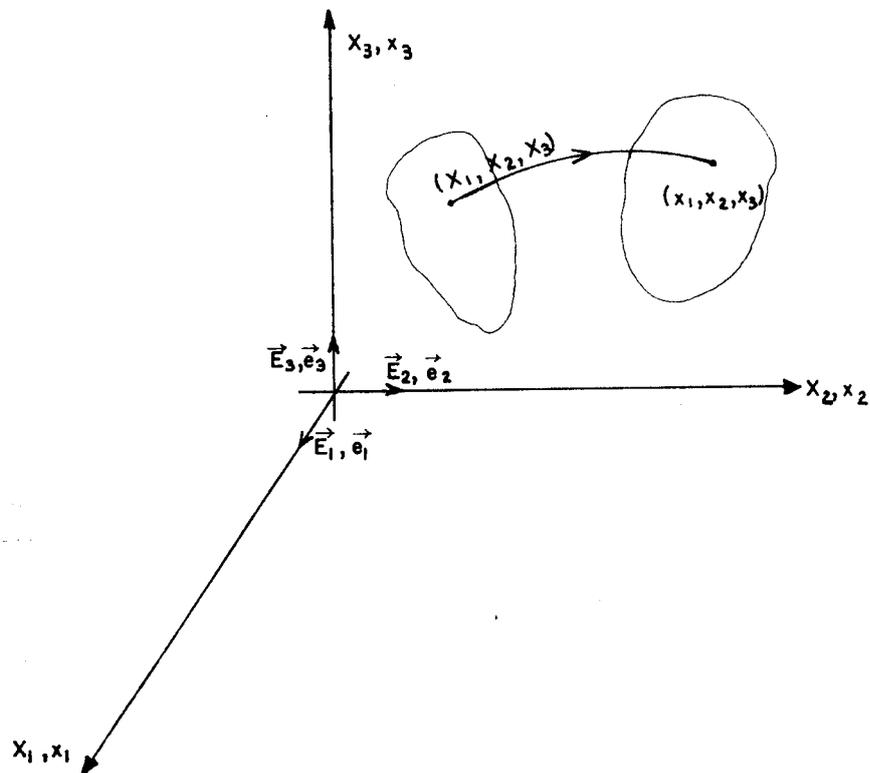


Figura 1

A posição dos pontos do corpo é dada na posição indeformada, antes da aplicação das cargas, por:

$$[\underline{X}]^T = [X_1, X_2, X_3] \quad 2.1.1(1)$$

e, na posição deformada, por:

$$[\underline{x}]^T = [x_1, x_2, x_3] \quad 2.1.1(2)$$

Ao se descrever o movimento de um corpo pode-se usar diversos tipos de descrição, conforme as variáveis independentes adotadas. Em mecânica do contínuo tem-se quatro descrições do movimento de uma partícula mais utilizadas. São elas [26] :

a) Descrição material:

Na descrição material as variáveis independentes são, a partícula X e o tempo t .

b) Descrição Referencial:

As variáveis independentes são, a posição \underline{X} da partícula em uma configuração arbitrária de referência, e o tempo t .

Em Elasticidade se usa normalmente o estado natural ou indeformado como configuração de referência.

Quando esta configuração de referência escolhida é a que corresponde ao tempo, $t=0$, a descrição referencial é também chamada frequentemente de descrição Lagrangeana, ou segundo outros, descrição material, embora no segundo caso use a posição de referência \underline{X} no lugar da partícula material X , o que será o caso da descrição anterior.

c) Descrição espacial:

As variáveis independentes são, a posição \underline{x} ocupada por uma partícula no tempo t , e o tempo t .

Esta descrição representa uma dada região do espaço em lugar de uma dada partícula material.

É também chamada de descrição Euleriana, e é mais usada em mecânica dos fluidos.

d) Descrição relativa:

As variáveis independentes são, a posição \underline{x} da par

tícula, e um tempo τ variável. O tempo τ , variável, é o tempo correspondente à posição ξ ocupada pela partícula, e o movimento fica descrito como $\xi = X_t(\underline{x}, \tau)$, com ξ como uma variável dependente, e, com o subíndice t indicando que a configuração de referência é relativa ao tempo t .

Neste trabalho será usado como referência a configuração deformada, e, a partir daí será contado o tempo. É um caso particular da descrição referencial, também conhecida como Lagrangeana atualizada.

2.1.2 - Definição dos Tensores de Taxa de Deformação, Taxa de Rotação e de Deformação Específica

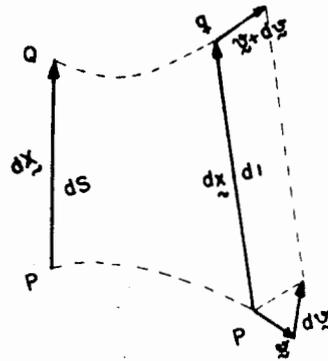


Figura 2

Tomam-se as componentes da velocidade da partícula q relativas à partícula p [26]:

$$dv_k = \frac{\partial v_k}{\partial x_m} dx_m = v_{k,m} dx_m \quad \text{ou,} \quad d\underline{v} = \underline{L} d\underline{x} \quad 2.1.2(1)$$

onde \underline{L} é o gradiente espacial de velocidades.

Pode-se dividir \underline{L} na soma de dois tensores, um simétrico e outro antissimétrico, da seguinte forma:

$$\underline{L} = \underline{D} + \underline{\Omega} \quad \text{ou} \quad L_{ij} = D_{ij} + \Omega_{ij} \quad 2.1.2(2)$$

onde \underline{D} é chamado de tensor taxa de deformação, simétrico, e $\underline{\Omega}$ é o tensor de rotação espacial, antissimétrico.

De acordo com a definição de \underline{L} , \underline{D} e $\underline{\Omega}$ ficam sendo:

$$D_{km} = \frac{1}{2} (v_{k,m} + v_{m,k}) \quad \text{ou} \quad \underline{D} = \frac{1}{2} (\underline{L} + \underline{L}^T) \quad 2.1.2(3)$$

$$\Omega_{km} = \frac{1}{2} (v_{k,m} - v_{m,k}) \quad \text{ou} \quad \underline{\Omega} = \frac{1}{2} (\underline{L} - \underline{L}^T) \quad 2.1.2(4)$$

O tensor taxa de deformação representa a taxa de variação do quadrado do comprimento do vetor material $d\underline{X}$, em P, ocupando depois da deformação a posição $d\underline{x}$ em p [26].

Serão definidos agora os tensores de deformação segundo as configurações indeformadas e deformada [26].

Com as definições de dS , ds , $d\underline{X}$, $d\underline{x}$ da figura 2.

a) Segundo a configuração indeformada, o tensor de deformação específica:

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2 d\underline{x}^T \cdot \underline{E} \cdot d\underline{x} \quad 2.1.2(5)$$

com o gradiente de deformações $F_{km} = \frac{\partial x_k}{\partial X_m}$ 2.1.2(6)

tem-se $d\underline{x} = \underline{F} d\underline{X}$ ou $dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_m} dX_m$ 2.1.2(7)

onde \underline{F} é o gradiente de deformações com relação a configuração indeformada. Pode-se calcular a taxa de variação de \underline{F} , como:

$$\dot{F}_{ij} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial X_j} v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} \quad 2.1.2(8)$$

Lembrando 2.1.2(1) e 2.1.2(7):

$$\dot{\underline{F}} = \underline{L} \underline{F} \quad \text{ou} \quad \dot{F}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} \quad 2.1.2(9)$$

Como $(ds)^2 = d\underline{x} \cdot d\underline{x}$ 2.1.2(10)

Introduzindo na 2.1.2(10) o tensor de deformações de Green, \underline{C} , relativo à configuração indeformada:

$$\underline{C} = \underline{F}^T \cdot \underline{F} \quad \text{ou} \quad C_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j}, \quad 2.1.2(11)$$

Mas

$$(ds)^2 = d\underline{x}^T \cdot \underline{C} \cdot d\underline{x} \quad \text{ou} \quad (ds)^2 = dX_i C_{ij} dX_j \quad 2.1.2(12)$$

Sabendo que $(dS)^2 = d\underline{X} \cdot d\underline{X}$ 2.1.2(13)

e usando a 2.1.2(12) na 2.1.2(1), tem-se:

$$2 \underline{E} = \underline{C} - \underline{I} \quad \text{ou} \quad 2 E_{ij} = C_{ij} - \delta_{ij} \quad 2.1.2(14)$$

onde \underline{E} é o tensor de deformações específicas de Lagrange.

b) Segundo a configuração deformada:

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2 d\underline{x} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot d\underline{x} \quad 2.1.2(15)$$

Define-se:

$$\underline{B}^{-1} = (\underline{F}^{-1})^T \cdot \underline{F}^{-1} \quad \text{ou} \quad B_{ij}^{-1} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j}, \quad 2.1.2(16)$$

como sendo o tensor de deformações de Cauchy.

Substituindo a 2.1.2(15) e 2.1.2(8) na 2.1.3(13), de forma semelhante à 2.1.2(14):

$$2 \underline{\varepsilon} = \underline{I} - \underline{B}^{-1} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{ij} = \delta_{ij} - (B^{-1})_{ij} \quad 2.1.2(17)$$

onde $\underline{\varepsilon}$ é o tensor de deformações específicas de Euler.

2.1.3 - Teorema da Decomposição Polar

Considera-se um sistema de eixos cartesianos qualquer em relação ao qual estão definidos três segmentos $d\underline{x}_1$, $d\underline{x}_2$, $d\underline{x}_3$ orientados segundo as direções principais de \underline{C} , definido pela 2.1.2(11). Pode-se mostrar que [26], se os valores principais de \underline{C} são mutuamente diferentes, após a deformação os três segmentos terão sido girados, e transladados, de forma que permanecerão mutuamente perpendiculares, e, além disso, as novas direções dos segmentos deformados $d\underline{x}_1$, $d\underline{x}_2$, $d\underline{x}_3$, coincidem com as direções principais do tensor \underline{B}^{-1} , equação 2.1.2(16). Ou seja, pode-se dizer que, quando os valores principais de \underline{C} são mutuamente diferentes, os eixos principais de \underline{C} em X são girados e transladados pela deformação

de modo a coincidirem com as direções principais de B^{-1} em x , sistema deformado.

Dito isto, o teorema da decomposição polar é enunciado da seguinte forma:

"Se \underline{R} é o tensor ortogonal de rotação que gira os eixos principais de \underline{C} em X nas direções principais de \underline{B}^{-1} em x existem dois tensores \underline{U} e \underline{V} , tais que:

$$\underline{F} = \underline{R} \underline{U} = \underline{V} \underline{R} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial x_m}{\partial X_k} = R_{mp} U_{pk} = V_{mp} R_{pk}." \quad 2.1.3(1)$$

Onde \underline{U} é chamado tensor direito de dilatação e \underline{V} tensor esquerdo de dilatação; \underline{U} e \underline{V} são tensores simétricos e positivos definidos.

Da 2.1.2(7):

$$d\underline{x} = \underline{R} \underline{U} d\underline{X} \quad 2.1.3(2)$$

$$d\underline{x} = \underline{V} \underline{R} d\underline{X} \quad 2.1.3(3)$$

Os tensores \underline{U} e \underline{V} estão relacionados com \underline{C} e \underline{B} através de [26]:

$$\underline{C} = \underline{U}^2 \quad 2.1.3(4)$$

$$\underline{B} = \underline{V}^2 \quad 2.1.3(5)$$

Onde:

$$\underline{B} = \underline{F} \underline{F}^T \quad \text{ou} \quad B_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_p} \frac{\partial x_j}{\partial X_p} \quad 2.1.3(6)$$

Com as direções principais de \underline{C} e de \underline{U} coincidindo da mesma forma que as direções principais de \underline{B} e \underline{V} .

A equação 2.1.3(2), mostra que o deslocamento e a deformação de um elemento de volume infinitesimal na configuração indeformada, com arestas coincidindo com as direções principais de \underline{C} , pode ser interpretada como a sucessiva aplicação de:

1. Uma dilatação produzida por \underline{U} .
2. Uma rotação de corpo rígido produzida por \underline{R} .
3. Uma translação para x .

Jã na equação 2.1.3(3) o mesmo deslocamento e deformação do mesmo elemento podem ser interpretados como:

1. Uma translação para x .
2. Uma rotação de corpo rígrado produzida por \underline{R} .
3. Uma dilatação produzida por \underline{V} .

Deve-se observar que a separação feita anteriormente da deformação do volume infinitesimal sã é vãlida se suas arestas coincidirem com as direções principais de \underline{C} , em caso contrário \underline{V} e \underline{U} também produzem rotações alã da provocada por \underline{R} .

2.1.4 - Gradiente de Deformação Relativo, Rotação e Dilatação Relativas

Lembrando a descrição relativa (item 2.1.1), pode-se dizer que:

$$\underline{\xi} = \underline{\xi}_t(\underline{x}, \tau) \quad 2.1.4(1)$$

Pode-se definir \underline{F}_t , gradiente de deformação relativo, como:

$$d\underline{\xi} = \underline{F}_t d\underline{x} \quad \text{ou} \quad d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} dx_j, \quad 2.1.4(2)$$

onde

$$(\underline{F}_t)_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \quad 2.1.4(3)$$

Se consideram agora trães posições ocupadas por uma partícula, \underline{X} na configuração indeformada, \underline{x} na configuração deformada do tempo t e $\underline{\xi}$ na configuração deformada do tempo $t + \tau$, ou simplesmente τ , pode-se obter:

$$\underline{F}(\tau) = \underline{F}_t(\tau) \underline{F}(t) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} \quad 2.1.4(4)$$

O gradiente de deformação relativo da mesma forma que \underline{F} pode ser decomposto em:

$$\underline{F}_t = \underline{R}_t \underline{U}_t \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = (\underline{R}_t)_{ip} (\underline{U}_t)_{pj} \quad 2.1.4(5)$$

ou

$$\underline{F}_t = \underline{V}_t \underline{R}_t \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = (V_t)_{ip} (R_t)_{pj}, \quad 2.1.4(6)$$

e os \underline{C} tensores de deformação relativos são:

$$\underline{C}_t = \underline{U}_t^2 \quad 2.1.4(7)$$

e

$$\underline{B}_t = \underline{V}_t^2 \quad 2.1.4(8)$$

Pode-se mostrar [26] que no tempo $\tau = t$:

$$\underline{D} = \dot{\underline{U}}_t(\tau = t) = \dot{\underline{V}}_t(\tau = t), \quad 2.1.4(9)$$

com $\dot{\underline{U}}_t$ e $\dot{\underline{V}}_t$ sendo as taxas de variação das deformações relativas, e que:

$$\underline{\Omega} = \dot{\underline{R}}_t(\tau = t), \quad 2.1.4(10)$$

onde $\dot{\underline{R}}_t$ é a taxa de variação da rotação relativa.

2.1.5 - Definição dos Tensores de Tensão e Taxa Corrotacional

Existem três tensores mais conhecidos em mecânica do contínuo:

a) Tensor de tensões de Cauchy ($\underline{\sigma}$ ou σ_{ij}):

São as tensões que ocorrem no ponto na configuração deformada.

O tensor de tensões de Cauchy $\underline{\sigma}$ é definido como uma função da posição \underline{x} do ponto.

b) Primeiro tensor de tensões de Piola - Kirchhoff (\underline{T} ou T_{ij}):

Dã a força real $d\underline{P}$ no elemento deformado dS , mas relacionado ao elemento indeformado dS_0 , expressando a força em termos da normal \underline{N} a dS_0 em \underline{X} , ver figura 3.

$$(\underline{N} \cdot \underline{T}) dS_0 = d\underline{P} = (\underline{n} \cdot \underline{\sigma}) dS \quad 2.1.5(1)$$

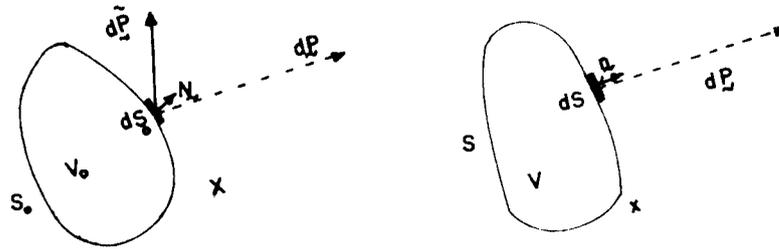


Figura 3

c) Segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff ($\underline{\tilde{T}}$ ou \tilde{T}_{ij})
 Dã a força $d\underline{\tilde{P}}$, que se relaciona com a força $d\underline{P}$ da mesma força que o vetor material $d\underline{X}$ em X , se relaciona com o vetor espacial $d\underline{x}$ em x .

Usando a 2.1.2(7)

$$d\underline{\tilde{P}} = \underline{F}^{-1} d\underline{P} \quad 2.1.5(2)$$

Daí, o tensor $\underline{\tilde{T}}$, é definido como:

$$(\underline{N} \cdot \underline{\tilde{T}}) dS_0 = d\underline{\tilde{P}} = \underline{F}^{-1} d\underline{P} = \underline{F}^{-1} \cdot (\underline{n} \cdot \underline{\sigma}) dS \quad 2.1.5(3)$$

Existem as seguintes relações entre os tensores de tensões de Piola-Kirchhoff e o tensor de tensões de Cauchy [26]:

$$\underline{\sigma} = \frac{\rho}{\rho_0} \underline{F} \cdot \underline{\tilde{T}} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial X_n} T_{kj} \quad 2.1.5(4)$$

$$\underline{\tilde{T}} = \frac{\rho}{\rho_0} \underline{F} \cdot \underline{\tilde{T}} \cdot \underline{F}^T \quad \text{ou} \quad \tilde{T}_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \tilde{T}_{km} \frac{\partial x_j}{\partial X_m} \quad 2.1.5(5)$$

Para o uso em equações constitutivas deve-se satisfazer o princípio da indiferença referencial, segundo o qual as tensões devem se transformar para uma rotação \underline{R} segundo $\underline{\sigma}_R = \underline{R} \underline{\sigma} \underline{R}^T$. Para tal, deve-se introduzir a taxa corrotacional de Cauchy ou taxa de Jaumann ($\underline{\sigma}^*$), que se relaciona com $\dot{\underline{\sigma}}$ através de:

$$\underline{\sigma}^* = \dot{\underline{\sigma}} - \underline{\Omega} \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \underline{\Omega} \quad 2.1.5(6)$$

Adicionando-se na 2.1.5(6) o termo $(\text{tr } \underline{D}) \underline{\sigma}$, obtêm-se:

$$\underline{\tau}^* = \dot{\underline{\sigma}} - \underline{\Omega} \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \underline{\Omega} + (\text{tr } \underline{D}) \underline{\sigma} \quad 2.1.5(7)$$

igualmente apropriado para o uso em relações constitutivas.

Será necessária mais tarde, uma relação entre $\underline{\tau}^*$ e a taxa do primeiro tensor de Kirchhoff. Esta relação será obtida a seguir.

Da 2.1.5(4):

$$\underline{\tau} = \frac{\rho_0}{\rho} \underline{F}^{-1} \underline{\sigma}, \quad 2.1.5(8)$$

onde ρ_0 é o valor de ρ no tempo de referência t_0 . Derivando a 2.1.5(8) em relação ao tempo:

$$\dot{\underline{\tau}} = -\frac{\rho_0}{\rho^2} \dot{\rho} [\underline{F}^{-1} \underline{\sigma}] + \frac{\rho_0}{\rho} (\underline{F}^{-1}) \cdot \underline{\sigma} + \frac{\rho_0}{\rho} \underline{F}^{-1} \dot{\underline{\sigma}} \quad 2.1.5(9)$$

Mas,
$$\underline{F}^{-1} \underline{F} = \underline{I} \quad 2.1.5(10)$$

Derivando
$$(\underline{F}^{-1}) \cdot \underline{F} + \underline{F}^{-1} \underline{F} \cdot = 0 \quad 2.1.5(11)$$

ou
$$(\underline{F}^{-1}) \cdot = -\underline{F}^{-1} \underline{F} \cdot \underline{F}^{-1} \quad 2.1.5(12)$$

Por outro lado
$$\underline{L} = \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} \quad |26| \quad 2.1.5(13)$$

Daí a 2.1.5(12) fica:

$$(\underline{F}^{-1}) \cdot = -\underline{F}^{-1} \underline{L} \quad 2.1.5(14)$$

Substituindo na 2.1.5(9) e usando a 2.1.5(8):

$$\dot{\underline{\tau}} = -\frac{\rho \cdot}{\rho} \underline{\tau} - \underline{F}^{-1} \underline{L} \underline{F} \underline{\tau} + \underline{\tau} \underline{\sigma}^{-1} \dot{\underline{\sigma}} \quad 2.1.5(15)$$

Mas, segundo |26| :

$$\text{tr } \underline{D} = -\frac{\rho \cdot}{\rho} \quad 2.1.5(16)$$

E a 2.1.5(15) fica:

$$\dot{\underline{\tau}} = (\text{tr } \underline{D}) \underline{\tau} - \underline{F}^{-1} \underline{L} \underline{F} \underline{\tau} + \underline{\tau} \underline{\sigma}^{-1} \dot{\underline{\sigma}} \quad 2.1.5(17)$$

Adotando como referência a configuração no tempo t resulta $\underline{F} = \underline{I}$, $\underline{\sigma} = \underline{T}$ e $\rho = \rho_0$ e a expressão acima, no tempo t , fica:

$$\dot{\underline{T}} = (\text{tr } \underline{D}) \underline{\sigma} - \underline{L} \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \cdot \quad 2.1.5(18)$$

Combinando 2.1.5(18) e 2.1.5(7):

$$\underline{\tau}^* = \dot{\underline{T}} + \underline{D} \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \underline{\Omega} \quad 2.1.6(19)$$

2.1.6 - Hipóteses Básicas em Plasticidade

Para o estudo da plasticidade devem ser assumidas algumas hipóteses básicas:

a) O material é inicialmente isotrópico e mantém a isotropia ao longo do processo de deformações em relação às constantes elásticas E , ν . Esta hipótese é confirmada quando se observa que mesmo em um elemento com grandes deformações plásticas, a estrutura cristalina básica é mantida havendo perturbações, apenas, em uma proporção muito pequena de cristais. Portanto, as constantes elásticas não são apreciavelmente influenciadas pelas deformações plásticas. Este fato é também observado em experiências com metais trabalhados a frio.

b) Como entre o elemento carregado e o descarregado elasticamente, não há rotação, $\underline{R}^e = \underline{I}$, pode-se admitir a existência de uma função $Y(\underline{\sigma}, \underline{s})$, onde \underline{s} representa o estado e orientação do material, variável com a deformação. A função $Y(\underline{\sigma}, \underline{s})$ é característica do elemento, tal que, se $Y(\underline{\sigma}, \underline{s}) < 0$, o elemento será no estado elástico e, se $Y(\underline{\sigma}, \underline{s}) = 0$, o elemento está sobre a chamada superfície de escoamento. A superfície de escoamento fica então caracterizada por:

$$Y(\underline{\sigma}, \underline{s}) = 0 \quad 2.1.6(1)$$

Os tensores \underline{s} permitem que se considere o endurecimento. Foi demonstrado por Onat [6], que os tensores \underline{s} são de ordem par e irredutíveis, caso \underline{F}^e seja simétrico e quando o material é inicialmente isotrópico.

c) A função de escoamento em 2.1.6(1), \bar{e} é independente da componente esférica de tensões. Isto implica que a função de escoamento \bar{e} , na verdade, função das tensões desviadoras.

d) Assume-se a lei da normalidade:

$$\underline{D}^P = \Lambda \frac{\partial Y}{\partial \underline{\sigma}} \quad 2.1.6(2)$$

onde Λ é um escalar positivo.

2.1.7 - Critérios de Escoamento e Descarga

2.1.7.1 - Critério de escoamento e endurecimento

Neste trabalho será utilizado o critério de Von Mises, devido à maior facilidade de utilização e sua comprovação por resultados experimentais no caso de materiais metálicos.

O tipo de endurecimento considerado neste trabalho será o endurecimento isotrópico, onde a superfície de escoamento mantém a posição de seu centro e a sua forma constantes, aumentando o seu tamanho.

Para este tipo de endurecimento e considerando o critério de Von Mises, a expressão que fornece a superfície de escoamento, \bar{e} :

$$Y = \frac{3}{2} \sqrt{\sigma'_{ij} \cdot \sigma'_{ij}} - \sigma_f = 0 \quad 2.1.7.1(1)$$

onde:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{rr} \quad 2.1.7.1(2)$$

2.1.7.2 - Critério de descarga

Para um elemento sobre a superfície, $Y = 0$, pode-se determinar agora se o ponto sofrerá, no instante seguinte, uma deformação plástica ou não. Utilizando a lei de crescimento elástica de $\underline{\sigma}$ na expressão de \dot{Y} , tem-se três comportamentos possíveis |8|:

$$\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} > 0 ; \quad Y = 0 \quad \text{durante a carga} \quad 2.1.7.2(1)$$

$$\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = 0 ; \quad Y = 0 \quad \text{durante carga neutra} \quad 2.1.7.2(2)$$

$$\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 ; \quad Y = 0 \quad \text{durante a descarga} \quad 2.1.7.2(3)$$

Pode-se dar uma interpretação geométrica às equações 2.1.7.2(1) até 2.1.7.2(3) | 8 |. Como a superfície de carga é assumida como uma superfície fechada, pode-se falar em seu interior e exterior, daí, o vetor $(\partial Y / \partial \sigma_{ij}) \dot{\sigma}_{ij}$ representa um vetor normal à superfície de escoamento, dirigido para fora no caso da carga, tangente à superfície no caso de carga neutra e dirigido para dentro no caso de descarga.

2.1.8 - Separação do Gradiente de Deformações em suas Partes Elástica e Plástica

Para a teoria de pequenas deformações as taxas de deformações elástica e plástica podem ser somadas para dar a taxa total de deformação. Isto só é válido devido à linearidade das componentes de deformação infinitesimal. As componentes de uma deformação finita são em geral ^{NAC} lineares e a hipótese de aditividade não é, em geral, válida.

Observando a figura 4 tem-se |23|:

$$dx_i^p = \left(\frac{\partial x_i^p}{\partial X_j} \right) dX_j \quad 2.1.8(1)$$

que representa a passagem de \underline{X} para \underline{x}^p .

Representando-se a deformação de \underline{x}^p para \underline{x} :

$$dx_i = \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j^p} \right) dx_j^p \quad 2.1.8(2)$$

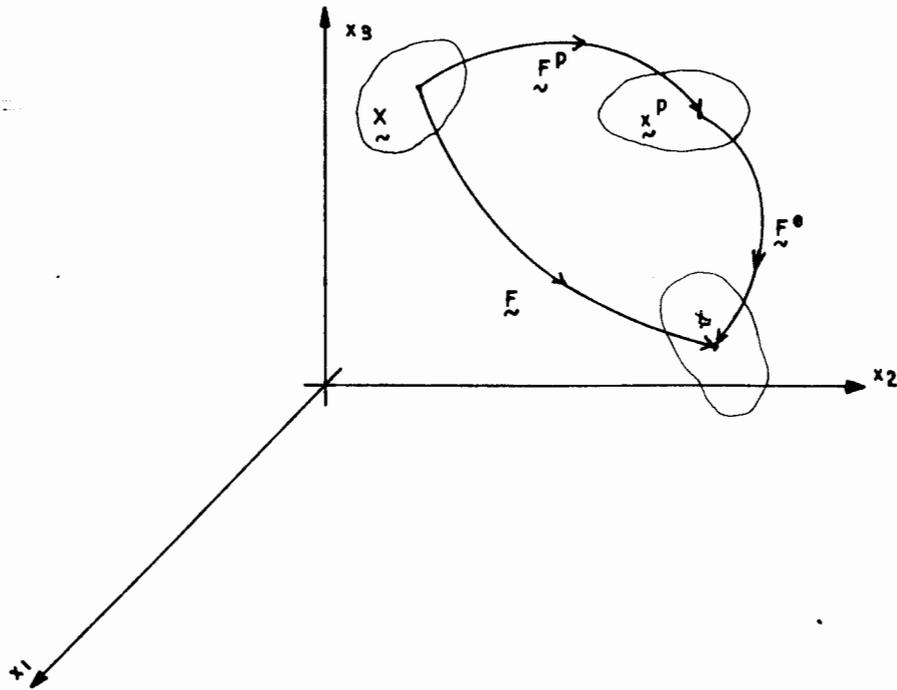


Figura 4

Usando a 2.1.8(1):

$$dx_i = \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k^p} \right) \left(\frac{\partial x_k^p}{\partial X_j} \right) dX_j \quad 2.1.8(3)$$

Lembrando a 2.1.2(6) e, observando que a 2.1.8(3) fornece uma separação da deformação total em duas parcelas, que podem representar as deformações elástica e plástica respectivamente, a 2.1.8(3) fica:

$$d\underline{x} = \underline{F}^e \underline{F}^p d\underline{X} \quad 2.1.8(4)$$

Como \underline{X} representa o estado inicial:

$$d\underline{x} = \underline{F} d\underline{X} \quad 2.1.8(5)$$

Comparando com a 2.1.8(4):

$$\underline{F} = \underline{F}^e \underline{F}^p \quad 2.1.8(6)$$

Para um corpo sujeito a um estado não homogêneo de tensões a remoção da carga produz, em geral, a uma distribuição de tensões residuais. Então, para obter-se o estado de tensões nulo, deve-se considerar o corpo seccionado em pequenos elementos. Com isso pode-se atingir o estado de tensão nulo a medida que o tamanho daqueles elementos tende a zero. Entretanto, quando se adota esta divisão, ocorre que os elementos descarregados não podem ser ajustados para formar um corpo contínuo em \underline{x}^p . Segundo Lee [23] isto impede o uso do conceito de gradiente de deformações tal como foi definido em 2.1.8(2), ou seja, \underline{F}^e e \underline{F}^p , não são em geral matrizes de derivadas parciais embora o seu produto, na 2.1.8(5), o seja, pois tanto o estado \underline{X} como o estado \underline{x} são configurações de um corpo contínuo. As transformações lineares \underline{F}^e e \underline{F}^p podem, segundo Lee [22], expressar as deformações elástica e plástica em um ponto de corpo contínuo.

A partir da 2.1.8(1), pode-se escrever:

$$(ds^p)^2 = (d\underline{x}^p)^T (d\underline{x}^p) = d\underline{x}^T (\underline{F}^p)^T (\underline{F}^p) d\underline{x} \quad 2.1.8(7)$$

Fazendo:

$$\underline{C}^p = (\underline{F}^p)^T \underline{F}^p, \quad 2.1.8(8)$$

como $(ds)^2$ é sempre positivo, conclui-se que \underline{C}^p é positivo definido.

De forma análoga, da 2.1.8(2):

$$(ds^p)^2 = (d\underline{x}^p)^T (d\underline{x}^p) = d\underline{x}^T ((\underline{F}^e)^{-1})^T (\underline{F}^e)^{-1} d\underline{x} \quad 2.1.8(9)$$

Fazendo:

$$(\underline{B}^e)^{-1} = ((\underline{F}^e)^{-1})^T (\underline{F}^e)^{-1} \quad 2.1.8(10)$$

que também é positivo definida e pode ser invertida da seguinte forma:

$$\underline{B}^e = \underline{F}^e (\underline{F}^e)^T \quad 2.1.8(11)$$

Tanto \underline{B}^e como \underline{C}^p são matrizes simétricas.

Utilizando o teorema da decomposição polar, pode-se escrever:

$$\underline{F}^e = \underline{V}^e \underline{R}^e = \underline{R}^e \underline{U}^e \quad 2.1.8(12)$$

e, de forma análoga:

$$\underline{F}^p = \underline{V}^p \underline{R}^p = \underline{R}^p \underline{U}^p \quad 2.1.8(13)$$

Como a forma do elemento em \underline{x}^p é única, resulta que o tensor de deformação plástico \underline{C}^p também o será. A partir da 2.1.8(5), e da 2.1.8(11), pode-se escrever:

$$\underline{B}^e = \underline{F}(\underline{F}^p)^{-1} ((\underline{F}^p)^T)^{-1} \underline{F}^T = \underline{F}(\underline{C}^p)^{-1} \underline{F}^T \quad 2.1.8(14)$$

Como \underline{F} e \underline{C}^p são únicos, resulta que \underline{B}^e também é única. Como $\underline{B}^e = (\underline{V}^e)^2$, pode-se escrever:

$$\underline{F}^e = (\underline{B}^e)^{1/2} \underline{R}^e \quad 2.1.8(15)$$

Pode-se ver na 2.1.8(15), que a decomposição proposta por Lee [23] não é única, pois \underline{R}^e pode ser qualquer movimento de rotação de corpo rígido. Neste trabalho será assumido, da mesma forma que Lee [22], uma descarga elástica sem rotação, ou seja $\underline{R}^e = \underline{I}$. Isto torna a decomposição única, e:

$$\underline{\underline{F}}^e = (\underline{\underline{B}}^e)^{1/2} = \underline{\underline{V}}^e (\underline{\underline{F}}^e)^T \quad 2.1.8(16)$$

Porém, quando as deformações elásticas tendem a zero o tensor de deformações elásticas, $\underline{\underline{B}}^e$, tende ao tensor unidade $\underline{\underline{I}}$ [26], portanto, para pequenas deformações elásticas, pode-se dizer:

$$\underline{\underline{F}}^e = (\underline{\underline{B}}^e)^{1/2} \approx (\underline{\underline{I}})^{1/2} = \underline{\underline{I}} \quad 2.1.8(17)$$

ou, o que será utilizado mais freqüentemente:

$$\underline{\underline{F}}^e \approx \underline{\underline{I}} \quad 2.1.8(18)$$

2.1.9 - Aditividade dos Tensores Taxa de Deformação

A partir da hipótese formulada no item 2.1.8, pode-se reconstruir a hipótese de aditividade dos tensores taxa de deformação, que será visto a seguir:

Da 2.1.2(9):

$$\underline{\underline{L}} = \dot{\underline{\underline{F}}} \underline{\underline{F}}^{-1} \quad 2.1.9(1)$$

Mas :

$$\dot{\underline{\underline{F}}} = (\underline{\underline{F}}^e \underline{\underline{F}}^p) \cdot = \dot{\underline{\underline{F}}}^e \underline{\underline{F}}^p + \underline{\underline{F}}^e \dot{\underline{\underline{F}}}^p \quad 2.1.9(2)$$

e

$$\underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{F}}^{p-1} \underline{\underline{F}}^{e-1} \quad 2.1.9(3)$$

Substituindo na 2.1.9(1) e lembrando 2.1.8(18)

$$\underline{\underline{L}} = (\dot{\underline{\underline{F}}}^e \underline{\underline{F}}^p + \underline{\underline{F}}^e \dot{\underline{\underline{F}}}^p) \underline{\underline{F}}^{p-1} \underline{\underline{F}}^{e-1} \quad 2.1.9(4)$$

$$= \dot{\underline{\underline{F}}}^e \underline{\underline{F}}^p \underline{\underline{F}}^{p-1} \underline{\underline{F}}^{e-1} + \underline{\underline{F}}^e \dot{\underline{\underline{F}}}^p \underline{\underline{F}}^{p-1} \underline{\underline{F}}^{e-1} \quad 2.1.9(5)$$

$$= \dot{\underline{\underline{F}}}^e \underline{\underline{F}}^{e-1} + \dot{\underline{\underline{F}}}^p \underline{\underline{F}}^{p-1} \quad 2.1.9(6)$$

ou seja,

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{L}}^e + \underline{\underline{L}}^p \quad 2.1.9(7)$$

Daí, pode-se escrever:

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{D}}^e + \underline{\underline{\Omega}}^e + \underline{\underline{D}}^p + \underline{\underline{\Omega}}^p \quad 2.1.9(8)$$

Como tem-se, da 2.1.2(3):

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T) \quad 2.1.9(9)$$

Usando a 2.1.8(8):

$$\underline{D} = \frac{1}{2} (\underline{D}^e + \underline{\Omega}^e + \underline{D}^p + \underline{\Omega}^p + \underline{D}^{eT} + \underline{\Omega}^{eT} + \underline{D}^{pT} + \underline{\Omega}^{pT}) \quad 2.1.9(10)$$

$$= \frac{1}{2} (\underline{D}^e + \underline{\Omega}^e + \underline{D}^p + \underline{\Omega}^p + \underline{D}^e - \underline{\Omega}^e + \underline{D}^p - \underline{\Omega}^p) \quad 2.1.9(11)$$

e finalmente

$$\underline{D} = \underline{D}^e + \underline{D}^p \quad 2.1.9(12)$$

Na 2.1.8(12), se tem novamente a aditividade das taxas de deformação plástica e elástica.

2.2 - Relações Constitutivas Elásticas

Ao representar a relação entre tensão-deformação pode-se usar:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \quad 2.2(1)$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé, dadas por:

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad 2.2(2)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad 2.2(3)$$

e ε_{ij} é o tensor de deformações euleriano definido na 2.1.2(17).

Porém, como são admitidas deformações plásticas finitas, é conveniente lembrar aqui, o que foi dito no item 2.1.6 acerca da não influência das deformações plásticas, mesmo finitas, sobre as constantes elásticas.

Pelo que foi dito acima, pode-se aceitar a equação 2.2(1), mesmo para a descarga elástica de deformações finitas plásticas.

Mas, [26]:

$$\underline{\dot{\varepsilon}} = \underline{D} - (\underline{\varepsilon} \underline{L} + \underline{L}^T \underline{\varepsilon}) \quad 2.2(4)$$

Como pela equação 2.1.2(2), $\underline{L} = \underline{D} + \underline{\Omega}$, e substituindo na 2.2.(4), como $\underline{\Omega}^T = -\underline{\Omega}$:

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \underline{D} - (\underline{\epsilon}(\underline{D} + \underline{\Omega}) + (\underline{D} - \underline{\Omega})\underline{\epsilon}) \quad 2.2(5)$$

$$= \underline{D} - (\underline{D} \underline{\epsilon} + \underline{\epsilon} \underline{D}) + (\underline{\Omega} \underline{\epsilon} - \underline{\epsilon} \underline{\Omega}) \quad 2.2(6)$$

Derivando a 2.2(1) em relação ao tempo:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{rs}} \dot{\epsilon}_{rs} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{rs}} \left[D_{rs} - (D_{rp} \epsilon_{ps} + \epsilon_{rp} D_{ps}) + (\Omega_{rp} \epsilon_{ps} - \epsilon_{rp} \Omega_{ps}) \right] \quad 2.2(7)$$

$$\text{onde} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{rs}} = 2\mu \delta_{ir} \delta_{js} + \lambda \delta_{ij} \delta_{rs}, \quad 2.2(8)$$

que, substituindo na 2.2(7), fornece:

$$\dot{\sigma}_{ij} = (2\mu \delta_{ir} \delta_{js} + \lambda \delta_{ij} \delta_{rs}) \left[D_{rs} - (D_{rp} \epsilon_{ps} + \epsilon_{rp} D_{ps}) + (\Omega_{rp} \epsilon_{ps} - \epsilon_{rp} \Omega_{ps}) \right] \quad 2.2(9)$$

Desprezando os produtos $D_{rp} \epsilon_{ps}$, $\epsilon_{rp} D_{ps}$:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} = & 2\mu \delta_{ir} \delta_{js} D_{rs} + 2\mu \delta_{ir} \delta_{js} \Omega_{rp} \epsilon_{ps} - 2\mu \delta_{ir} \delta_{js} \epsilon_{rp} \Omega_{ps} + \\ & + \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} D_{rs} + \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} \Omega_{rp} \epsilon_{ps} - \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} \epsilon_{rp} \Omega_{ps} \end{aligned} \quad 2.2(10)$$

Pode-se mostrar que:

$$\delta_{rs} \Omega_{rp} \epsilon_{ps} = \Omega_{kp} \epsilon_{pk} = \delta_{rs} \epsilon_{rp} \Omega_{ps} = \epsilon_{kp} \Omega_{pk} = 0 \quad 2.2(11)$$

Com isso a 2.2(10) fica:

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2\mu D_{ij} + \lambda \delta_{ij} D_{rr} + 2\mu \Omega_{ip} \epsilon_{pj} - 2\mu \epsilon_{ip} \Omega_{pj} \quad 2.2(12)$$

Somando-se na 2.2(12), a expressão,

$$\lambda (\delta_{pj} \Omega_{ip} \epsilon_{kk} - \delta_{ip} \epsilon_{kk} \Omega_{pj}) = 0 : \quad 2.2(13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} = & 2\mu D_{ij} + \lambda \delta_{ij} D_{kk} + 2\mu \Omega_{ip} \epsilon_{pj} + \lambda \Omega_{ij} \delta_{pj} \epsilon_{kk} \\ & - (2\mu \epsilon_{ij} \Omega_{pj} + \lambda \delta_{ip} \epsilon_{kk} \Omega_{pj}) \end{aligned} \quad 2.2(14)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2\mu D_{ij} + \lambda \delta_{ij} D_{kk} + \Omega_{ip} (2\mu \epsilon_{pj} + \lambda \delta_{pj} \epsilon_{kk}) - (2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \delta_{ip} \epsilon_{kk}) \Omega_{pj} \quad 2.2(15)$$

Lembrando a 2.2(1):

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2\mu D_{ij} + \lambda \delta_{ij} D_{kk} + \Omega_{ip} \sigma_{pj} - \sigma_{ip} \Omega_{pj} \quad 2.2(16)$$

A expressão acima representa a lei de crescimento ou taxa de variação de $\underline{\sigma}$ no regime elástico. Pelo que foi conceituado no início deste item e considerando a decomposição explicada no item 2.1.6, pode-se concluir que a equação 2.2(16) será aplicável a pontos em regime elastoplástico.

2.3 - Relações Constitutivas Plásticas

Quando se utiliza a lei de crescimento elástica 2.2(16), são possíveis os casos dados pelas equações 2.1.7.2(1) até 2.1.7.2(3). No caso de $\dot{Y} > 0$, a 2.1.7.2(1), deve-se usar uma lei de crescimento plástica que imponha $\dot{Y} = 0$. Portanto, a condição de permanência sobre a superfície de escoamento, fica:

$$\dot{Y}(\underline{\sigma}, \sigma_f) = \frac{\partial Y}{\partial \underline{\sigma}} \underline{\sigma} \cdot + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_f} \sigma_f \dot{\sigma}_f = 0 \quad 2.3(1)$$

A expressão de $\underline{\sigma} \cdot$ pode ser determinada como se segue. Pelo que foi visto no item 2.1.8 a taxa de deformação \underline{D} é dada pelo somatório da taxa de deformação elástica \underline{D}^e e da plástica \underline{D}^p . Aplicando \underline{D}^e na 2.2(16), obtêm-se:

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2\mu D_{ij}^e + \lambda \delta_{ij} D_{kk}^e + \Omega_{ip} \sigma_{pj} - \sigma_{ip} \Omega_{pj} \quad 2.3(2)$$

Usando a deformação total, a lei de crescimento de

tensões pode ser escrita como:

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2\mu D_{ij} + \lambda \delta_{ij} D_{kk} + \Omega_{ip} \sigma_{pj} - \sigma_{ip} \Omega_{pj} - F_{ij}^* \quad 2.3(3)$$

Usando a 2.1.8(12):

$$\dot{\sigma}_{ij} = (2\mu \delta_{ip} \delta_{qj} + \lambda \delta_{pk} \delta_{kq})(D_{pq}^e + D_{pq}^p) + \Omega_{ip} \sigma_{pj} - \sigma_{ip} \Omega_{pj} - F_{ij}^* \quad 2.3(4)$$

ou

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2\mu D_{ij}^e + \lambda \delta_{ij} D_{kk}^e + \Omega_{ip} \sigma_{pj} - \sigma_{ip} \Omega_{pj} + 2\mu D_{ij}^p + \lambda \delta_{ij} D_{kk}^p - F_{ij}^* \quad 2.3(5)$$

Subtraindo a 2.3(3) da 2.3(5):

$$2\mu D_{ij}^p + \lambda \delta_{ij} D_{kk}^p - F_{ij}^* = 0 \quad 2.3(6)$$

Usando a lei da normalidade, equação 2.1.6(19), a 2.3(6) fica:

$$F_{ij}^* = \Lambda \left[2\mu \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{kk}} \right] \quad 2.3(7)$$

Substituindo o valor de F na 2.3(3):

$$\dot{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{D} + \lambda \underline{I} (\text{tr } \underline{D}) + \underline{\Omega} \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \underline{\Omega} - \Lambda \left[2\mu \frac{\partial Y}{\partial \underline{\sigma}} + \lambda \underline{I} (\text{tr } \frac{\partial Y}{\partial \underline{\sigma}}) \right] \quad 2.3(8)$$

A seguir será obtida a lei de crescimento de σ_f com base em um ensaio de tração simples. O incremento de deformação logarítmica ($d\underline{\varepsilon}^*$) pode ser relacionado com o tensor taxa de deformação através da relação:

$$d\underline{\varepsilon}^* = \underline{D} dt \quad 2.3(9)$$

Considerando a decomposição proposta no item 2.1.6 e a aditividade das taxas de deformação elástica e plástica pode-se definir o incremento de deformação logarítmica plástica

$(d\varepsilon^{*P})$ como:

$$d\varepsilon^{*P} = \underline{D}^P dt \quad 2.3(10)$$

Para o caso do ensaio de tração simples se H representar a derivada da curva que relaciona as tensões de Cauchy com a componente ε_{11}^{*P} (figura 5), pode-se escrever:

$$d\sigma_{11} = H d\varepsilon_{11}^{*P} = H D_{11}^P dt \quad 2.3(11)$$

ou

$$\dot{\sigma}_{11} = H D_{11}^P \quad 2.3(12)$$

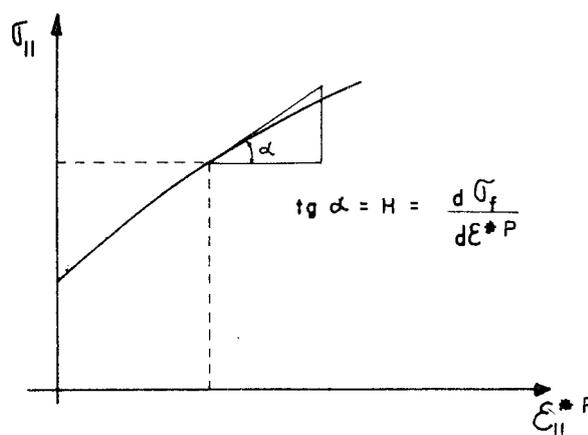


Figura 5

Usando a lei da normalidade no ensaio de tração simples:

$$\dot{\sigma}_{11} = H \wedge \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{11}} \quad 2.3(13)$$

A expressão 2.1.7.1(1) no caso do ensaio de tração simples reduz-se a $\sigma_{11} - \sigma_f = 0$ ou $\sigma_f = \sigma_{11}$. Daí para este ensaio:

$$\dot{\sigma}_f = \dot{\sigma}_{11} = H \wedge \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{11}} = H \wedge \quad 2.3(14)$$

Generalizando as da lei do crescimento para de tensão multiaxiais e observando que da 2.1.7.1(1):

$$\frac{\partial Y}{\partial \sigma_f} = -1 \quad 2.3(15)$$

podemos reescrever a 2.3(1) substituindo $\underline{\sigma}$ pela 2.3(8) e σ_f pela 2.3(14):

$$\frac{\partial Y}{\partial \sigma_{ij}} \left[2\mu D_{ij} + \delta_{ij} \lambda D_{kk} + \Omega_{ip} \sigma_{pj} - \sigma_{ip} \Omega_{pj} - \Lambda \left(2\mu \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda \delta_{ij} \left(\text{tr} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{ij}} \right) \right) \right] - \Lambda H = 0 \quad 2.3(16)$$

Será analisado agora o termo $\partial Y / \partial \sigma_{ij} (\Omega_{ip} \sigma_{pj} - \sigma_{ip} \Omega_{pj})$. Como a superfície representada pela 2.1.6(18), goza da propriedade de ser uma invariante em relação a rotação Q , pode-se escrever:

$$Y(Q \underline{\sigma} Q^T, \sigma_f) = Y(\underline{\sigma}, \sigma_f) \quad 2.3(17)$$

Se, a um elemento com estado de tensões $\underline{\sigma}(t)$, foi aplicada uma rotação $Q(\tau)$, a partir do tempo t , pode-se escrever que:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{Y(Q(\tau) \underline{\sigma}(t) Q^T(\tau), \sigma_f) - Y(\underline{\sigma}(t), \sigma_f)}{\tau} = \left(\frac{dY}{d\tau} \right)_{\tau=0} = 0 \quad 2.3(18)$$

Lembrando a 2.1.4(4), pode-se escrever:

$$\underline{F}(\tau) = \underline{F}(t) \underline{V}_t(\tau) \underline{R}_t(\tau) \quad 2.3(19)$$

onde, $\underline{F}(t)$ é o gradiente de deformação no tempo t , $\underline{F}(\tau)$ é o gradiente de deformação em $t+\tau$, \underline{V}_t e \underline{R}_t são, respectivamente, o tensor de dilatação e o tensor de rotação relativa. A variação de $\underline{\sigma}$ ao passar do tempo t para o tempo $t+\tau$ será dividida, lembrando a teoria da decomposição polar, como giro do elemento ($\underline{R}_t(\tau)$), seguido de uma dilatação (\underline{V}_t). Considerando apenas a variação devida a rotação obtêm-se:

$$\underline{\sigma}(\tau) = \underline{R}_t(\tau) \underline{\sigma}(t) \underline{R}_t^T(\tau) \quad 2.3(20)$$

Para este instante vale a 2.3(18) com $\underline{Q}(\tau) = \underline{R}_t(\tau)$ de modo que pode-se escrever:

$$\left(\frac{dY}{d\tau}\right)_{\tau=0} = \left(\frac{\partial Y}{\partial \underline{\sigma}} \frac{d\underline{\sigma}}{d\tau} + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_f} \frac{\partial \sigma_f}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} = 0 \quad 2.3(21)$$

como ainda não foi aplicada a dilatação e σ_f é um escalar, portanto invariante em relação à rotação, $\partial \sigma_f / \partial \tau = 0$. Derivando a 2.3(20) obtêm-se:

$$\frac{d\underline{\sigma}}{d\tau} = \underline{R}_t^{\cdot}(\tau) \underline{\sigma}(t) \underline{R}_t^T(\tau) + \underline{R}_t(\tau) \underline{\sigma}(t) (\underline{R}_t^{\cdot}(\tau))^T \quad 2.3(22)$$

Daí a 2.3(21) fica:

$$\frac{\partial Y}{\partial \underline{\sigma}} \left[\underline{R}_t^{\cdot}(\tau) \underline{\sigma}(t) \underline{R}_t^T(\tau) + \underline{R}_t(\tau) \underline{\sigma}(t) (\underline{R}_t^{\cdot}(\tau))^T \right]_{\tau=0} = 0 \quad 2.3(23)$$

Para $\tau=0$, tem-se $\underline{R}_t(\tau=0) = \underline{I}$ e pela 2.1.4(10), $\underline{R}_t^{\cdot}(\tau=0) = \underline{\Omega}$, o que permite escrever (representando $\underline{\sigma}(t)$ por $\underline{\sigma}$):

$$\frac{\partial Y}{\partial \underline{\sigma}} \left[\underline{\Omega} \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \underline{\Omega} \right] = 0 \quad 2.3(24)$$

Bem, usando a 2.3(24), a 2.3(16) torna-se:

$$\frac{\partial Y}{\partial \sigma_{ij}} (2\mu D_{ij} + \lambda \delta_{ij} D_{kk}) = \Lambda \left\{ (2\mu \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{kk}}) \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{ij}} - H \right\} \quad 2.3(25)$$

$$\text{Daí se tira o valor de } \Lambda = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \sigma_{ij}} (2\mu D_{ij} + \lambda \delta_{ij} D_{kk})}{\frac{\partial Y}{\partial \sigma_{ij}} (2\mu \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{kk}}) + H} \quad 2.3(26)$$

Este valor, da 2.3(26), fica sendo igual ao de pequenas deformações.

Agora substituindo a 2.3(26) na 2.3(8) e mudando para notação matricial:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = 2\mu \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{I}} \lambda (\text{tr } \underline{\underline{D}}) + \underline{\underline{\Omega}} \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{\Omega}} - \frac{\frac{\partial Y}{\partial \sigma} \left[2\mu \underline{\underline{D}} + \lambda \underline{\underline{I}} (\text{tr } \underline{\underline{D}}) \right] \left[2\mu \frac{\partial Y}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} + \lambda \underline{\underline{I}} (\text{tr } \frac{\partial Y}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}) \right]}{\frac{\partial Y}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \left[2\mu \frac{\partial Y}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} + \lambda \underline{\underline{I}} (\text{tr } \frac{\partial Y}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}) + H \right]} \quad 2.3(27)$$

Lembrando agora a equação 2.1.5(7), que goza do princípio de indiferença referencial [25]:

$$\underline{\underline{\tau}}^* = \underline{\underline{\sigma}}^* + (\text{tr } \underline{\underline{D}}) \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\Omega}} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{\Omega}} \quad 2.3(28)$$

desprezando o fator $(\text{tr } \underline{\underline{D}})\underline{\underline{\sigma}}$ que conduziria a não simetria da matriz constitutiva elastoplástica, fica:

$$\underline{\underline{\tau}}^* = \underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\Omega}} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{\Omega}} \quad 2.3(29)$$

Substituindo 2.3(29) em 2.3(27):

$$\underline{\underline{\tau}}^* = 2\mu \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{I}} \lambda (\text{tr } \underline{\underline{D}}) - \frac{\frac{\partial Y}{\partial \sigma} \left[2\mu \underline{\underline{D}} + \lambda \underline{\underline{I}} (\text{tr } \underline{\underline{D}}) \right] \left[2\mu \frac{\partial Y}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} + \lambda \underline{\underline{I}} (\text{tr } \frac{\partial Y}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}) \right]}{\frac{\partial Y}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \left[2\mu \frac{\partial Y}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} + \lambda \underline{\underline{I}} (\text{tr } \frac{\partial Y}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}) + H \right]} \quad 2.3(30)$$

Passando agora para a notação indicial:

$$\tau_{ij}^* = (2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl}) D_{kl} - \frac{\frac{\partial Y}{\partial \sigma_{rs}} \left[2\mu \delta_{rk} \delta_{sl} + \lambda \delta_{rs} \delta_{kl} \right] D_{kl} \left[2\mu \delta_{ip} \delta_{jq} + \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} \right] \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{pq}}}{\frac{\partial Y}{\partial \sigma_{rs}} \left[2\mu \delta_{rp} \delta_{sq} + \lambda \delta_{rs} \delta_{pq} \right] \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{pq}} + H} \quad 2.3(31)$$

Colocando agora D_{kl} em evidência:

$$\tau_{ij}^* = \left[(2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl}) - \frac{\frac{\partial Y}{\partial \sigma_{rs}} (2\mu \delta_{rk} \delta_{sl} + \lambda \delta_{rs} \delta_{kl}) (2\mu \delta_{ip} \delta_{jq} + \lambda \delta_{ij} \delta_{pq}) \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{pq}}}{\frac{\partial Y}{\partial \sigma_{rs}} (2\mu \delta_{rp} \delta_{sq} + \lambda \delta_{rs} \delta_{pq}) \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{pq}} + H} \right] D_{kl} \quad 2.3(32)$$

$$\text{Mas,} \quad M_{ijkl}^e = 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \quad 2.3(33)$$

e, representando como vetores:

$$[\vec{\tau}]^{*T} = [\tau_{11}^* \tau_{22}^* \tau_{33}^* \tau_{12}^* \tau_{13}^* \tau_{23}^*]^T \quad 2.3(34)$$

$$[\vec{D}]^T = [D_{11} D_{22} D_{33} D_{12} D_{13} D_{23}]^T \quad 2.3(35)$$

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial \sigma} \right]^T = \left[\frac{\partial Y}{\partial \sigma_{11}} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{22}} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{33}} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{12}} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{13}} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{23}} \right]^T \quad 2.3(36)$$

Substituindo 2.3(33) até 2.3(36) na 2.3(32):

$$[\vec{\tau}^*] = \left\{ \underline{M}^e - \frac{\underline{M}^e \left[\frac{\partial Y}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial Y}{\partial \sigma} \right]^T \underline{M}^e}{\left[\frac{\partial Y}{\partial \sigma} \right]^T \left[\frac{\partial Y}{\partial \sigma} \right] + H} \right\} [\vec{D}] \quad 2.3(37)$$

Onde a parcela entre chaves indica a matriz constitutiva elastoplástica, nota-se que a matriz constitutiva da 2.3(37) é semelhante ao do caso de pequenas deformações e que na verdade a 2.3(37) no caso de pequenos deslocamentos se reduz à equação correspondente, substituindo $\vec{\tau}^*$ por $\vec{\sigma}$ e \vec{D} por $\vec{\epsilon}$.

2.4 - Princípio Variacional

Utilizando a configuração deformada pode-se mostrar que a equação de equilíbrio de um corpo em movimento é |26|, |8|:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{\underline{b}} = \rho \underline{\underline{\dot{v}}} \quad 2.4(1)$$

Equação que expressa a 1ª lei de Cauchy do movimento.

Para o caso deste trabalho o equilíbrio é estático, portanto, $\dot{v} = 0$ (aceleração igual a zero), o termo $\rho \underline{\underline{b}}$ representa uma força por unidade de volume, ou seja, $\underline{\underline{b}}$ representa as forças por unidade de massa.

Com estas considerações a equação 2.4(1), torna-se:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{B}} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0 \quad 2.4(2)$$

onde $\underline{\underline{B}}$ representa as forças por unidade de volume

Utilizando-se a configuração indeformada como referência, a equação de equilíbrio estático fica:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{T}} + \rho_0 \underline{\underline{b}}_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial T_{ji}}{\partial X_j} + \rho_0 b_{0i} = 0 \quad 2.4(3)$$

Onde $\underline{\underline{T}}$ ou T_{ij} representa o primeiro tensor de Piola Kirchhoff.

Derivando a 2.4(3) em relação ao tempo t:

$$\frac{\partial \dot{T}_{ji}}{\partial X_j} + \rho_0 \dot{b}_i = 0 \quad 2.4(4)$$

Utilizando-se para configuração de referência a configuração no tempo t, a 2.4(4), torna-se:

$$\frac{\partial \dot{T}_{ij}}{\partial x_j} + \dot{B}_i = 0 \quad 2.4(5)$$

Onde $\dot{B}_i = \rho \dot{b}_i \quad 2.4(6)$

Multiplicando por um campo de velocidades cinematicamente admissível $\delta \underline{\underline{v}}$ e integrando sobre o volume V, fica:

$$\int_V \left\{ \left(\frac{\partial \dot{T}_{ij}}{\partial x_j} + \dot{B}_i \right) \delta v_i \right\} dv = 0 \quad 2.4(7)$$

Como $\frac{\partial \dot{T}_{ji}}{\partial x_j} \delta v_i = (\dot{T}_{ji} \delta v_i)_{,j} - \dot{T}_{ji} \delta v_{i,j} \quad 2.4(8)$

e, usando o teorema da divergência:

$$\int_V (\dot{T}_{ji} \delta v_i)_{,j} dv = \int_S \eta_j \dot{T}_{ji} \delta v_i ds = \int_S \hat{f}_i \delta v_i ds \quad 2.4(9)$$

Onde $\hat{f}_i = \eta_j T_{ij}$ representa a carga por unidade de superfície no tempo t.

Usando a 2.4(8) e 2.4(7) torna-se:

$$\int_V \dot{T}_{ji} \delta v_{i,j} dv = \int_V \left[(\dot{T}_{ji} \delta v_i)_{,j} + \dot{B}_i \delta v_i \right] dv \quad 2.4(10)$$

Substituindo a 2.4(9) na 2.4(10):

$$\int_V \dot{T}_{ji} \delta v_{i,j} dv = \int_S \dot{f}_i \delta v_i ds + \int_V \dot{B}_i \delta v_i dv \quad 2.4(11)$$

ou, lembrando 2.1.2(1):

$$\int_V \dot{T}_{ji} \delta(L_{ij}) dv = \int_S \dot{f}_i \delta v_i ds + \int_V \dot{B}_i \delta v_i dv \quad 2.4(12)$$

Substituindo a 2.1.5(19) na 2.4(12), para obtermos a propriedade de indiferença referencial:

$$\int_V (\tau_{ji}^* - D_{jk} \sigma_{ki} - \sigma_{jk} \Omega_{ki}) \delta L_{ij} dv = \int_S \dot{f}_i \delta v_i ds + \int_V \dot{B}_i \delta v_i ds \quad 2.4(13)$$

Usando a 2.1.2(2), o primeiro termo da 2.4(13), fica, passando para a notação matricial:

$$\int_V \left[\text{tr}(\underline{\tau}^* \delta \underline{D}) + \text{tr}(\underline{\tau}^* \delta \underline{\Omega}) - \text{tr}(\underline{D} \underline{\sigma} \delta \underline{D} + \underline{D} \underline{\sigma} \delta \underline{\Omega} + \underline{\sigma} \underline{\Omega} \delta \underline{D} + \underline{\sigma} \underline{\Omega} \delta \underline{\Omega}) \right] dv \quad 2.4(14)$$

Mas, pode-se mostrar que:

$$\text{tr}(\underline{\tau}^* \delta \underline{\Omega}) = 0 \quad 2.4(15)$$

$$- \frac{1}{2} \text{tr} \left[\underline{\sigma} \delta (2 \underline{D} \underline{D}) \right] = -2 \text{tr}(\underline{D} \underline{\sigma} \delta \underline{D}) \quad 2.4(16)$$

$$\frac{1}{2} \text{tr} \left[\underline{\sigma} \delta (\underline{L}^T \underline{L}) \right] = \text{tr}(\underline{D} \underline{\sigma} \delta \underline{D}) - \text{tr}(\underline{D} \underline{\sigma} \delta \underline{\Omega} + \underline{\sigma} \underline{\Omega} \delta \underline{D} + \underline{\sigma} \underline{\Omega} \delta \underline{\Omega}) \quad 2.4(17)$$

Usando as expressões 2.4(14) até 2.4(17), pode-se reescrever a 2.4(13), como:

$$\int_V \left[\tau_{ij}^* \delta D_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \delta (2 D_{ik} D_{kj} - v_{k,i} v_{k,j}) \right] dv =$$

$$= \int_S \dot{f}_i \delta v_i ds + \int_V \dot{\bar{B}}_i \delta v_i dv \quad 2.4(18)$$

A existência de um potencial de taxas elastoplásticas para um par de variáveis conjugadas de trabalho [24], [20], é assegurada pela existência de um potencial de taxas de trabalho elástico e por uma lei de normalidade, como a equação 2.1.6(19), para a deformação plástica [19], [24].

Foi demonstrado por Mac Meeking [24] que, a equação constitutiva elástica 2.2(1) é aproximadamente derivada de um potencial de trabalho elástico e que a aproximação é válida enquanto as deformações elásticas forem infinitesimais. Este é o caso focado neste trabalho.

Conseqüentemente, a minimização da 2.4(18), fornece uma equação cuja solução é também uma solução aproximada do problema elastoplástico.

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA, MÉTODO DE SOLUÇÃO

3.1 - Particularização do Princípio Variacional para Aplicação em Elementos Finitos

Reescrevendo a 2.4(18) em forma matricial:

$$\int_V \{ \text{tr} (\underline{\tau}^* \delta \underline{D}) - \frac{1}{2} \text{tr} [\underline{\sigma} \delta (2 \underline{D} \underline{D} - \underline{L}^T \underline{L})] \} dv = \int_S \underline{\dot{f}} \delta \underline{v} ds + \int_V \underline{\dot{B}} \delta \underline{v} dv \quad 3.1(1)$$

pode-se mostrar que:

$$\frac{1}{2} \text{tr} [\underline{\sigma} \delta (2 \underline{D} \underline{D})] = 2 \text{tr} (\underline{D} \underline{\sigma} \delta \underline{D}) \quad 3.1(2)$$

$$\frac{1}{2} \text{tr} [\underline{\sigma} \delta (\underline{L}^T \underline{L})] = \text{tr} (\underline{L}^T \underline{\sigma} \delta \underline{L}) \quad 3.1(3)$$

A 3.1(1) fica, então:

$$\int_V \{ \text{tr} (\underline{\tau}^* \delta \underline{D}) + \text{tr} [\underline{L}^T \underline{\sigma} \delta \underline{L} - 2 \underline{D} \underline{\sigma} \delta \underline{D}] \} dv = \int_S \underline{\dot{f}} \delta \underline{v} ds + \int_V \underline{\dot{B}} \delta \underline{v} dv \quad 3.1(4)$$

com
$$L_{ij} = \dot{u}_{i,j} \quad 3.1(5)$$

Considerando que a integral sobre todo o volume do corpo pode ser aproximada por uma soma de integrais sobre o volume de elementos, pode-se obter uma matriz de rigidez elemen-

tar, como se segue:

$$\vec{u} = \underline{N} \vec{U}^{el} \quad \text{ou} \quad \dot{u}_i = N_{ij} \dot{U}_j^{el} \quad 3.1(6)$$

Aqui a velocidade \dot{u} está representada em cada etapa pelas funções de forma, agrupadas na matriz \underline{N} , e o índice superior "el" significa elementar.

E, de forma análoga:

$$\vec{D} = \underline{B} \vec{U}^{el} \quad \text{ou} \quad D_i = B_{ij} \dot{U}_j^{el} \quad 3.1(7)$$

$$\vec{\tau}^* = \underline{M} \vec{D} \quad \text{ou} \quad \tau_i^* = M_{ij} D_j \quad 3.1(8)$$

onde \underline{M} é a matriz constitutiva e \underline{B} é a matriz que relaciona deformações com deslocamentos.

As expressões 3.1(6) até 3.1(8), estão sob a forma de vetores, assim a 3.1(4), deve ser colocada sob a mesma forma.

$$\begin{aligned} & \int_{V_{el}} \{ (\delta D_i \tau_i^*) + [\delta L_{1i} \sigma_{ij} L_{1j} - 2 \delta D_{1i} \sigma_{ij} D_{1j}] + \\ & \quad + [\delta L_{2i} \sigma_{ij} L_{2j} - 2 \delta D_{2i} \sigma_{ij} D_{2j}] + \\ & \quad + [\delta L_{3i} \sigma_{ij} L_{3j} - 2 \delta D_{3i} \sigma_{ij} D_{3j}] \} dv = \int_{S_{el}} \hat{f}_i \delta \dot{u}_i ds + \int_{V_{el}} \hat{B}_i \delta \dot{u}_i dv \end{aligned} \quad 3.1(9)$$

onde L_{1i} , L_{2i} e L_{3i} representam a primeira, a segunda e a terceira linhas de L_{ij} respectivamente. Da mesma forma D_{1i} , D_{2i} e D_{3j} representam a primeira, a segunda e a terceira linhas de D_{ij} .

Usando a 3.1(5), 3.1(6) e 3.1(8) na 3.1(4):

$$\begin{aligned} & \int_{V_{el}} \{ (\delta \dot{U}_r^{el} B_{ri} M_{ij} B_{jp} \dot{U}_p^{el}) + [\delta \dot{u}_{1,i} \sigma_{ij} \dot{u}_{1,j} - 2 \delta D_{1i} \sigma_{ij} D_{1j} + \\ & \quad + \delta \dot{u}_{2,i} \sigma_{ij} \dot{u}_{2,j} - 2 \delta D_{2i} \sigma_{ij} D_{2j} + \delta \dot{u}_{3,i} \sigma_{ij} \dot{u}_{3,j} - \\ & \quad - 2 \delta D_{3i} \sigma_{ij} D_{3j}] \} dv = \int_{S_{el}} \delta \dot{U}_i^{el} N_{ij} \hat{f}_i ds + \int_{V_{el}} \delta \dot{U}_i^{el} N_{ij} \hat{B}_i dv \end{aligned} \quad 3.1(10)$$

Segundo a 3.1(6), pode-se escrever:

$$\dot{u}_{1,k} = N_{1j,k} \dot{u}_j^{el} \quad 3.1(11)$$

$$\dot{u}_{2,k} = N_{2j,k} \dot{u}_j^{el} \quad 3.1(12)$$

$$\dot{u}_{3,k} = N_{3j,k} \dot{u}_j^{el} \quad 3.1(13)$$

Substituindo as 3.1(11) até 3.1(13) na 3.1(10):

$$\begin{aligned} \int_{v_{el}} \{ \delta \dot{u}_r^{el} B_{ri} M_{ij} B_{jp} \dot{u}_p^{el} + [\delta \dot{u}_r^{el} N_{1r,i} \sigma_{ij} N_{1p,j} \dot{u}_p^{el} - 2 \delta D_{1i} \sigma_{ij} D_{1j} + \\ + \delta \dot{u}_r^{el} N_{2r,i} \sigma_{ij} N_{2p,j} \dot{u}_p^{el} - 2 \delta D_{2i} \sigma_{ij} D_{2j} + \delta \dot{u}_r^{el} N_{3r,i} \sigma_{ij} N_{3p,j} \dot{u}_p^{el} - \\ - 2 \delta D_{3i} \sigma_{ij} D_{3j}] \} dv = \delta \dot{u}_i^e \left(\int_{s_{el}} N_{ij} \dot{f}_i ds + \int_{v_{el}} N_{ij} \dot{B}_i dv \right) \end{aligned} \quad 3.1(14)$$

Chamando:

$$\dot{p}_i^{el} = \int_{s_{el}} N_{ij} \dot{f}_i ds + \int_{v_{el}} N_{ij} \dot{B}_i dv \quad 3.1(15)$$

alterando a 3.1(7) da seguinte forma:

$$D_i^{*1} = D_{1i} = [D_{11} \ D_{12} \ D_{13}]^T = B_{ij}^{*1} \dot{u}_j^{el} \quad 3.1(16)$$

$$D_i^{*2} = D_{2i} = [D_{21} \ D_{22} \ D_{23}]^T = B_{ij}^{*2} \dot{u}_j^{el} \quad 3.1(17)$$

$$D_i^{*3} = D_{3i} = [D_{31} \ D_{32} \ D_{33}]^T = B_{ij}^{*3} \dot{u}_j^{el} \quad 3.1(18)$$

e, representando:

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} N_{1p} \\ N_{2p} \\ N_{3p} \end{bmatrix} \quad 3.1(19)$$

onde p representa as colunas de \underline{N} , tem-se:

$$\underline{\bar{N}}_{jp}^1 = [N_{1p,j}] \quad 3.1(20)$$

$$\underline{\bar{N}}_{jp}^2 = [N_{2p,j}] \quad 3.2(21)$$

$$\underline{\bar{N}}_{jp}^3 = [N_{3p,j}] \quad 3.2(22)$$

com $j=1,2,3$, indicando o número da linha de $\underline{\bar{N}}^1$, $\underline{\bar{N}}^2$ e $\underline{\bar{N}}^3$ respectivamente.

Com as expressões 3.1(15) até 3.1(18) e 3.1(20) até 3.1(22), a 3.1(14) voltando à notação matricial pode ser reescrita:

$$\delta \dot{U}^{e\ell} \left[\int_{v_{e\ell}} \{ \underline{B}^T \underline{M} \underline{B} + [(\underline{\bar{N}}^1)^T \underline{\sigma} \underline{\bar{N}}^1 - 2(\underline{B}^{*1})^T \underline{\sigma} \underline{B}^{*1} + (\underline{\bar{N}}^2)^T \underline{\sigma} \underline{\bar{N}}^2 - 2(\underline{B}^{*2})^T \underline{\sigma} \underline{B}^{*2} + (\underline{\bar{N}}^3)^T \underline{\sigma} \underline{\bar{N}}^3 - 2(\underline{B}^{*3})^T \underline{\sigma} \underline{B}^{*3}] \} dv \dot{U}^{e\ell} - \dot{p}^{e\ell} \right] = 0 \quad 3.1(23)$$

Como as variações podem ser arbitrárias a expressão entre colchetes deve anular-se, assim a 3.1(23) fica:

$$\int_{v_{e\ell}} \{ \underline{B}^T \underline{M} \underline{B} + [(\underline{\bar{N}}^1)^T \underline{\sigma} \underline{\bar{N}}^1 - 2(\underline{B}^{*1})^T \underline{\sigma} \underline{B}^{*1} + (\underline{\bar{N}}^2)^T \underline{\sigma} \underline{\bar{N}}^2 - 2(\underline{B}^{*2})^T \underline{\sigma} \underline{B}^{*2} + (\underline{\bar{N}}^3)^T \underline{\sigma} \underline{\bar{N}}^3 - 2(\underline{B}^{*3})^T \underline{\sigma} \underline{B}^{*3}] \} dv \dot{U}^{e\ell} = \dot{p}^{e\ell} \quad 3.1(24)$$

onde a integral de volume representa a matriz de rigidez elementar.

Na expressão 3.1(24) pode-se distinguir duas parcelas:

$$a) \quad \underline{K}^{e\ell} = \int_{v_{e\ell}} \underline{B}^T \underline{M} \underline{B} dv \quad 3.1(25)$$

correspondente à matriz de rigidez para pequenas deformações e

$$b) \quad \underline{K}_S^{e\ell} = \int_{v_{e\ell}} [(\underline{\bar{N}}^i)^T \underline{\sigma} \underline{\bar{N}}^i - 2(\underline{B}^{*i})^T \underline{\sigma} \underline{B}^{*i}] dv \quad 3.1(26)$$

correspondente à matriz geométrica, que leva em conta o estado

de tensões a que o elemento está submetido no início do passo.

Pode-se dar uma formulação simples ao problema fazendo:

$$\underline{\underline{K}}_T^{el} = \underline{\underline{K}}^{el} + \underline{\underline{K}}_S^{el} \quad 3.1(27)$$

com isto a 3.1(24) pode ser escrita como:

$$\underline{\underline{K}}_T^{el} \underline{\underline{\dot{U}}}^{el} = \underline{\underline{\dot{P}}}^{el} \quad 3.1(28)$$

Fazendo o somatório sobre todos os elementos:

$$\sum_{N^{el}} \underline{\underline{K}}_T^{el} \underline{\underline{\dot{U}}}^{el} = \sum_{N^{el}} \underline{\underline{\dot{P}}}^{el} \quad 3.1(29)$$

onde N^{el} representa o número de elementos. Tem-se, ao nível de corpo:

$$\underline{\underline{K}}_T \underline{\underline{\dot{U}}} = \underline{\underline{\dot{P}}} \quad 3.1(30)$$

Integrando ao longo do tempo:

$$\int_0^t \underline{\underline{K}}_T \underline{\underline{\dot{U}}} dt = \int_0^t \underline{\underline{\dot{P}}} dt \quad 3.1(31)$$

3.2 - Método Utilizado na Solução do Problema Não Linear

Uma forma simples de integrar a 3.1(31), é manter a matriz de rigidez, $\underline{\underline{K}}_T$, constante durante um intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$, obtendo:

$$\underline{\underline{K}}_T \int_{t_1}^{t_2} \underline{\underline{\dot{U}}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \underline{\underline{\dot{P}}} dt \quad 3.2(1)$$

donde:

$$\underline{\underline{K}}_T [\underline{\underline{U}}]_{t_1}^{t_2} = [\underline{\underline{P}}]_{t_1}^{t_2} \quad 3.2(2)$$

Fazendo:

$$\Delta \underline{\underline{U}}_n = [\underline{\underline{U}}]_{t_1}^{t_2} \quad 3.2(3)$$

e:

$$\Delta \underline{\underline{P}}_n = [\underline{\underline{P}}]_{t_1}^{t_2} \quad 3.2(4)$$

obtêm-se:

$$\underline{K}_T^{t_1} \Delta \underline{U}_n = \Delta \underline{P}_n \quad 3.2(5)$$

o processo descrito corresponde a integrar a 3.1(30) pelo método de Euler, assim $\Delta \underline{P}_n$ representa o acréscimo de carga e $\Delta \underline{U}_n$ o correspondente acréscimo de deslocamentos para o passo n da solução.

Solucionando-se o sistema em 3.2(5) para um dado $\Delta \underline{P}_n$, conhecidas as condições de tensões e deslocamentos no início do passo, obtêm-se um $\Delta \underline{U}_n$. Com $\Delta \underline{U}_n$, lembrando 3.1(7) e 3.1(8), tem-se:

$$\underline{\tau}^* = \underline{M} \underline{B} \dot{\underline{u}}^{e\ell} \quad \text{ou} \quad \tau_i^* = M_{ij} B_{jp} \dot{u}_p^{e\ell} \quad 3.2(6)$$

Lembrando a definição de $\underline{\Omega}$, item 2.1, pode-se obter uma \underline{B}^Ω de forma semelhante ao que foi feito na 3.1(7), assim:

$$\underline{\tau}^* = \underline{B}^\Omega \underline{U}^{e\ell} \quad \text{ou} \quad \tau_i^* = B_{ij}^\Omega U_j^{e\ell} \quad 3.2(7)$$

onde

$$\underline{\tau}^{*T} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{22} & \Omega_{33} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{23} \end{bmatrix} \quad 3.2(8)$$

Mas, pela 2.1.5(7):

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{\tau}^* + \underline{\Omega} \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \underline{\Omega} - \underline{\sigma} (\text{tr } \underline{D}) \quad 3.2(9)$$

Integrando a 3.2(9) entre os tempos t_1 e t_2 , correspondentes ao início e ao fim do passo n , obtêm-se:

$$\Delta \underline{\sigma}^n = \int_{t_1}^{t_2} \left[\underline{\tau}^* + \underline{\Omega} \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \underline{\Omega} - \underline{\sigma} (\text{tr } \underline{D}) \right] dt \quad 3.2(10)$$

Para integrar-se aproximadamente a 3.2(10), mantém-se \underline{B} , \underline{M} e \underline{B}^Ω constantes durante o passo n . O acréscimo de tensões, com esta simplificação, fica dado por:

$$\Delta \underline{\sigma}^n = \Delta \underline{\tau}^* + \Delta \underline{\Omega} \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \Delta \underline{\Omega} - \underline{\sigma} (\text{tr } \Delta \underline{D}) \quad 3.2(11)$$

onde

$$\Delta \underline{\tau}^* = \underline{M} \underline{B} \Delta \underline{U}^{e\ell} \quad 3.2(12)$$

$$\underline{\Delta\Omega} = \underline{B} \underline{\Delta U}^{e\ell} \quad 3.2(13)$$

$$\underline{\Delta D} = \underline{B} \underline{\Delta U}^{e\ell} \quad 3.2(14)$$

onde $\underline{\Delta U}^{e\ell}$ pode ser obtido a partir de $\underline{\Delta U}_n$. Com a 3.2(11), pode-se obter o valor das tensões no final do passo n:

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_n + \underline{\Delta\sigma}_n \quad 3.2(15)$$

e o valor dos deslocamentos e cargas no final do mesmo passo:

$$\underline{U}_{n+1} = \underline{U}_n + \underline{\Delta U}_n \quad 3.2(16)$$

$$\underline{P}_{n+1} = \underline{P}_n + \underline{\Delta P}_n \quad 3.2(17)$$

Em cada início de passo deve-se atualizar as matrizes \underline{B} , \underline{K}_T e no caso de pontos plastificados a matriz constitutiva elastoplástica M_{ep} . A geometria alterada é levada em conta na matriz \underline{B} que, por sua vez altera \underline{K}_T . O estado de tensões do início do passo é levado em conta na parte geométrica da matriz \underline{K}_T e na matriz constitutiva elastoplástica se for o caso de ponto sofrendo deformação permanente.

Devido ao fato de serem impostos deslocamentos finitos, a solução incremental representada pela 3.2(16) e 3.2(17), vai se afastando progressivamente dos resultados corretos. Uma maneira de melhorar os resultados é fazer uma verificação e correção do equilíbrio em cada etapa, mantendo as características geométricas e de tensão do início do passo, ou seja, mantendo as matrizes \underline{B} e \underline{K}_T constantes.

Para se obter uma expressão do equilíbrio que possa ser usada em um programa computacional, será utilizada a equação do equilíbrio de Cauchy:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \frac{dv_i}{dt} \quad 3.2(18)$$

Multiplicando-se a 3.2(18), por um campo de velocidades cinematicamente admissível e integrando sobre o volume, considerando o equilíbrio estático, fica:

$$\int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + B_i \right) \delta v_i \right] dv = 0 \quad 3.2(19)$$

como foi feito no item 2.8.

Mas:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \delta v_i = (\sigma_{ji} \delta v_i)_{,j} - \sigma_{ji} \delta v_{i,j} \quad 3.2(20)$$

Com a 3.2(20), vai ser integrada sobre o volume, pode-se aplicar o teorema da divergência:

$$\int_V (\sigma_{ji} \delta v_i)_{,j} dv = \int_S \eta_j \sigma_{ji} \delta v_i ds = \int_S f_i \delta v_i ds \quad 3.2(21)$$

onde $f_i = \eta_j \sigma_{ji}$ são forças por unidade de superfície.

Usando a 3.2(20) e 3.2(21), a 3.2(19) pode ser escrita como:

$$\int_V \sigma_{ji} \delta v_{i,j} dv = \int_S f_i \delta v_i ds + \int_V \bar{B}_i \delta v_i dv \quad 3.2(22)$$

Lembrando a 2.1.2(1):

$$\int_V \sigma_{ji} \delta L_{ij} dv = \int_S f_i \delta v_i ds + \int_V \bar{B}_i \delta v_i dv \quad 3.2(23)$$

Mas, lembrando a 2.1.2(2), $\underline{L} = \underline{D} + \underline{\Omega}$

$$\int_V \sigma_{ji} \delta (D_{ij} + \Omega_{ij}) dv = \int_S f_i \delta v_i ds + \int_V \bar{B}_i \delta v_i dv \quad 3.2(24)$$

como $\sigma_{ji} \delta \Omega_{ij} = 0$ e colocando sob a forma de vetores como foi feito anteriormente:

$$\int_V \sigma_i \delta D_i dv = \int_S f_i \delta v_i ds + \int_V \bar{B}_i \delta v_i dv \quad 3.2(25)$$

Fazendo a divisão do corpo de elementos, como foi feito anteriormente, aplicando a equação 3.2(25) para um elemento e lembrando a 3.1(6) e 3.1(7):

$$\delta \dot{u}_j^{e\ell} \int_{v^{e\ell}} B_{ij} \sigma_i dv = \delta \dot{u}_j^{e\ell} \left[\int_{s^{e\ell}} N_{ij} f_i ds + \int_{v^{e\ell}} N_{ij} \bar{B}_i dv \right] \quad 3.2(26)$$

Chamando de $\underline{p}^{e\ell}$ a expressão entre colchetes no segundo membro da 3.2(26):

$$(\delta \dot{u}^{e\ell})^T \left[\int_{v^{e\ell}} \underline{B}^T \underline{\sigma} dv - \underline{p}^{e\ell} \right] = 0 \quad 3.2(27)$$

como a variação $\delta \dot{u}^{e\ell}$ é arbitrária:

$$\int_{v^{e\ell}} \underline{B}^T \underline{\sigma} dv = \underline{p}^{e\ell} \quad 3.2(28)$$

A 3.2(28) estabelece em um tempo t o compromisso de equilíbrio entre as tensões e as forças aplicadas no elemento. Para todo o corpo tem-se:

$$\sum_{N^{e\ell}} \int_{v^{e\ell}} \underline{B}^T \underline{\sigma} dv = \underline{p}_\sigma \quad 3.2(29)$$

onde \underline{p}_σ representa o vetor de cargas compatível com o estado de tensões e com a geometria atual do corpo.

Ao mesmo tempo, pela 3.2(17), \underline{p}_{n+1} corresponde à somatória dos $\Delta \underline{p}_i$ aplicados passo a passo.

Devido à aproximação mencionada \underline{p}_σ e \underline{p}_{n+1} não serão iguais. Para executar uma correção calcula-se a diferença:

$$\underline{p}_{res} = \underline{p}_{n+1} - \underline{p}_\sigma \quad 3.2(30)$$

e, a seguir calcula-se a norma dos vetores \underline{p}_{res} e \underline{p}_σ como a soma dos quadrados de suas componentes e faz-se a comparação entre ambas.

Caso :

$$(\text{tolerância}) \times \|\underline{p}_\sigma\| < \|\underline{p}_{res}\|, \quad 3.2(31)$$

faz-se uma iteração, conservando as características do início do passo, da seguinte forma:

$$\underline{K}_T \Delta \underline{u}_{res} = \underline{p}_{res} \quad 3.2(32)$$

Com a 3.2(32) calcula-se Δu_{res} e são ajustados os valores de deslocamentos, tensões e coordenadas. Com estes novos valores de coordenadas e de tensões pode-se aplicar novamente a 3.2(29), calcular-se novos P_{res} e aplicar a 3.2(31) mais uma vez, iterando até que:

$$(\text{tolerância}) \times \| P_{\sigma} \| > \| P_{res} \| \quad 3.2(33)$$

Pode-se visualizar de modo mais claro o procedimento descrito observando a figura 6, que representa o ajuste descrito para um caso de tração simples.

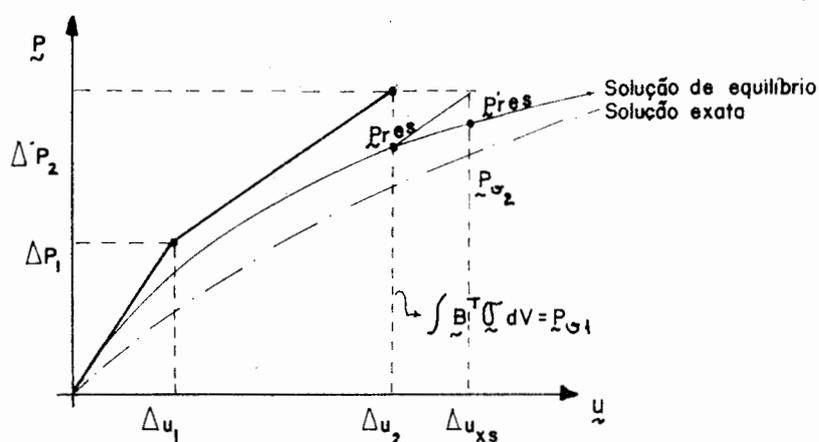


Figura 6

Chamou-se de solução exata aquela obtida quando tem-se uma malha de elementos finitos com elementos infinitamente pequenos e com acréscimos de carga infinitamente pequenos.

CAPÍTULO 4

CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTAIS DO PROGRAMA

Neste capítulo serão vistos diversos aspectos do programa computacional, começando com os tipos de elementos implantados e a obtenção de suas matrizes de rigidez, depois comentando sobre o ajuste na espessura de elementos de estado plano, sobre a solução do sistema, e outros aspectos particulares do programa, encerrando com um macro diagrama de blocos do procedimento executado pelo computador.

4.1 - Tipos de Elementos Empregados

Como já foi visto no item 3.1, as relações de equilíbrio foram particularizadas para uma aplicação de elementos finitos, obtendo uma equação do tipo:

$$\underline{K}_T \underline{\dot{U}} = \underline{P} \quad 4.1(1)$$

Para solução deste problema usando o método dos elementos finitos, foram implantados alguns tipos de elementos:

a) Triângulo linear:

Na solução de:

Estado plano de tensões - EPTL

Estado plano de deformação - EDTL

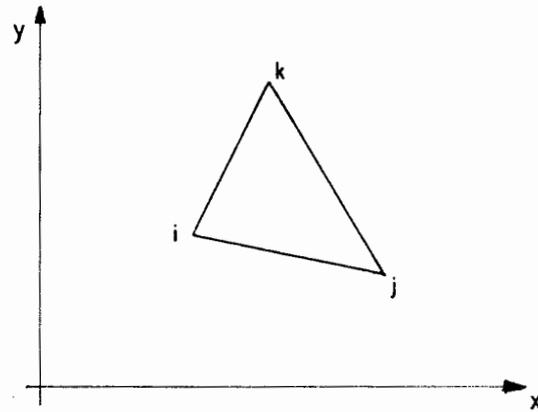


Figura 7

b) Quadrilátero isoparamétrico linear:

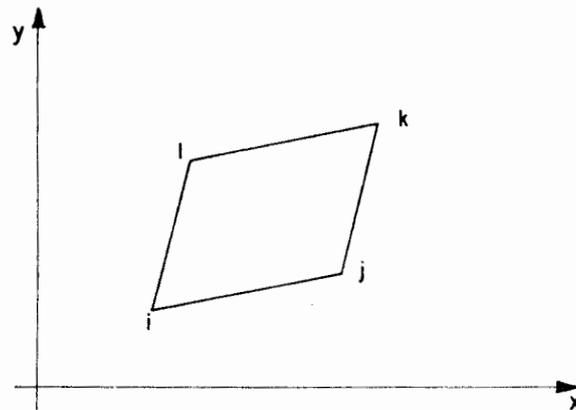


Figura 8

Na solução de:

Estado plano de tensões - EPQL

Estado plano de deformações - EDQL

Sólidos axissimétricos - AXQL

c) Tridimensional isoparamétrico linear:

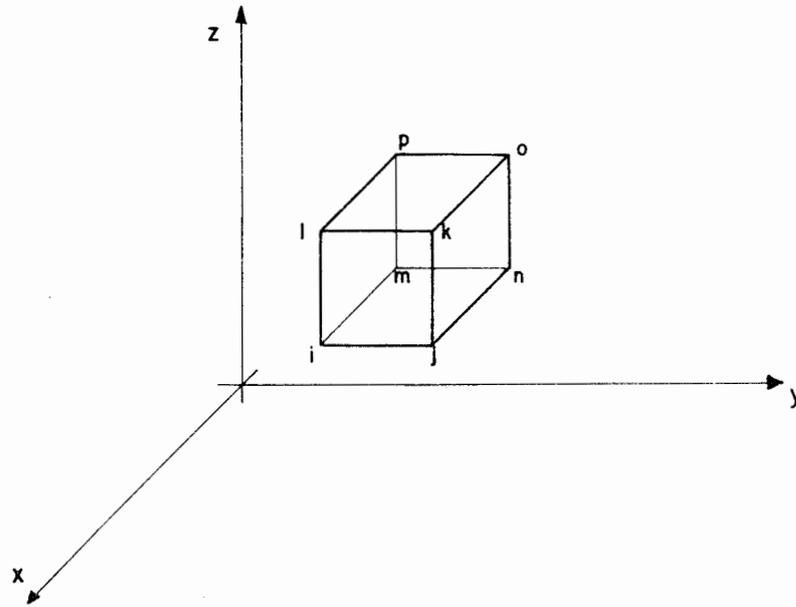


Figura 9

Os elementos triangulares e os quadriláteros possuem todos os dois graus de liberdade por nó u_x e u_y , enquanto que o elemento tridimensional possui três graus de liberdade por nó u_x , u_y e u_z .

As funções de forma para estes elementos citados e outros característicos podem ser encontrados na bibliografia [3], [35].

4.2 - Obtenção da Matriz de Rigidez do Elemento

A matriz de rigidez elementar \bar{k} é calculada segundo o exposto no item 3.1, onde foi obtida uma expressão do tipo:

$$\underline{\underline{k}}_T = \underline{\underline{k}} + \underline{\underline{k}}_S = \int_V (\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{N}}^{iT} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{N}}^i - 2 \underline{\underline{B}}^{*iT} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{B}}^{*i}) dv \quad 4.2(1)$$

No elemento triângulo linear, tem-se um estado de tensões que é constante em todos os pontos do elemento, por isto as matrizes $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{M}}$, $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{B}}^{*i}$ e $\underline{\underline{N}}^i$, que compõem a expressão da matriz de rigidez 4.2(1), são constantes no interior do elemento. Assim, quando se faz a integração sobre o volume pode-se definir a matriz de rigidez como:

$$\underline{\underline{k}}_T = (\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{N}}^{iT} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{N}}^i - 2 \underline{\underline{B}}^{*iT} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{B}}^{*i}) v \quad 4.2(2)$$

onde v é o volume do elemento.

Para o quadrilátero isoparamétrico linear, em problemas de sólidos axissimétricos, é necessária uma alteração na expressão 4.2(1), para aplicação da integração numérica, fazendo:

$$dv = 2\pi R \, dA \quad 4.2(3)$$

Com o uso desta substituição a 4.2(1) fica:

$$K_T = 2\pi \int_A (\underline{B}^T \underline{M} \underline{B} + \underline{N}^{iT} \underline{\sigma} \underline{N}^i - 2 \underline{B}^{*iT} \underline{\sigma} \underline{B}^{*i}) R \, dA \quad 4.2(4)$$

Para todos os elementos foi usada a integração numérica de Gauss. Nos quadriláteros foram usados dois pontos de integração em cada direção, com isto tem-se a vantagem de ter funções de peso de valor 1, simplificando a integração numérica.

4.3 - Atualização da Espessura de Elementos de Estado Plano de Tensão

Quando temos grandes deformações plásticas em estado plano de tensões, além da atualização da geometria, levada em conta na matriz \underline{B} e \underline{K}_S , é interessante considerar a variação que sofre a espessura do elemento ao longo de um processo de deformação [13]. A maneira mais correta de se levar em conta esta variação é usando elementos tridimensionais o que, pelo tempo de computação que estes elementos consomem na análise, torna-se bastante dispendioso.

Optou-se então por atualizar a espessura, nos elementos de estado plano de tensões. Para elementos quadriláteros atualiza-se a espessura em cada ponto de integração, resultando que pontos de um mesmo elemento possuem espessuras diferentes no processo de carga. Nos elementos triangulares de deformação constante a espessura é atualizada no centro do elemento considerando-se a mesma uniforme no interior do elemento.

O cálculo das espessuras nos pontos de integração cria certas descontinuidades, porém tais descontinuidades parecem coerentes com a filosofia do método dos elementos fini-

tos |21|.

Para um elemento, pode-se escrever que:

$$x_1 = A_{10} + A_{11} X_1 + A_{12} X_2 \quad 4.3(1)$$

$$x_2 = A_{20} + A_{21} X_1 + A_{22} X_2 \quad 4.3(2)$$

$$x_3 = A_{30} + A_{33} X_3 \quad 4.3(3)$$

Com X_i e x_i representando as coordenadas materiais e espaciais respectivamente, e A_{ij} representando funções do tempo.

Assume-se que:

$$A_{33} = \frac{T}{T_0} \quad 4.3(4)$$

Onde T_0 é a espessura na configuração de referência e T a espessura na configuração atual. A_{33} é constante para cada elemento.

Lembrando a 2.1.2(3) pode-se calcular o gradiente de deformações $\underline{\underline{F}}$ e sua derivada $\dot{\underline{\underline{F}}}$:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \quad 4.3(5)$$

$$\dot{\underline{\underline{F}}} = \begin{bmatrix} \dot{A}_{11} & \dot{A}_{12} & 0 \\ \dot{A}_{21} & \dot{A}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{A}_{33} \end{bmatrix} \quad 4.3(6)$$

Pela 2.1.2(9), $\underline{\underline{L}} = \dot{\underline{\underline{F}}} \underline{\underline{F}}^{-1}$, então:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix} \quad 4.3(7)$$

e, sua parte simétrica 2.1.2(3):

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \quad 4.3(8)$$

Desde que se usa como configuração de referência, a configuração no fim do incremento anterior, tem-se: [21]

$$L_{33} = D_{33} = \frac{\dot{T}}{T} \quad 4.3(9)$$

Pode-se integrar a 4.3(9), para um intervalo $\Delta t = t^{i+1} - t^i$, que corresponde ao incremento de carga considerado, e, mantendo ainda D_{33} constante no intervalo tem-se:

$$T^{(i+1)} = T^{(i)} e^{(D_{33} \Delta t)} \quad 4.3(10)$$

Onde $T^{(i+1)}$ é a espessura atualizada a partir da espessura $T^{(i)}$ e do valor de D_{33} .

Como foi visto no item 2.1.8, $\underline{D} = \underline{D}^p + \underline{D}^e$, portanto D_{33} tem uma componente elástica e uma componente plástica, que podem ser calculadas como se segue:

$$D_{33}^e = -\frac{\nu}{E} (\tau_{11}^* + \tau_{22}^*) \quad 4.3(11)$$

A partir da lei constitutiva elástica, item 2.2, com τ^* definido como no item 2.1.5, e onde ν é o coeficiente de Poisson, E é o módulo de Young.

E a componente plástica é calculada como:

$$D_{33}^D = - (D_{11}^D + D_{22}^D) \quad 4.3(12)$$

Jã que $(\text{tr } \underline{D}^D) = 0$, item 2.1.6.

4.4 - Solução do Sistema

Para a solução do sistema exposto em 4.1, utilizou-se o método de Banachievicz-Crout para matrizes simétricas, ou método de fatoraçaõ tripla, exposta em suas linhas gerais na referênciã |14|.

Este método é de fácil implantaçaõ em um programa computacional inclusive com a possibilidade de utilizaçaõ da propriedade de banda da matriz de rigidez total do sistema.

Convém lembrar que a decomposiçaõ sã altera a matriz de rigidez, o que possibilita uma fácil resoluçaõ para um novo vetor de cargas, uma vez que a matriz de rigidez decomposta es_{teja} armazenada. Esta característicã citada é importante quando sã observa que o ajuste do equilíbriõ consiste precisamente em uma nova soluçaõ, mantendo a matriz de rigidez e substituindo-se o vetor de cargas pelo vetor de cargas residuais.

4.5 - Critério de Plastificaçaõ e Descarga dos Elementos

4.5.1 - Critério de plastificaçaõ

Para a consideraçaõ da plastificaçaõ dos elementos serã utilizado o critério exposto por Cherobim |4|, que é baseado no critério introduzido por Nayak e Zienkiewicz |29|, onde o elemento fica caracterizado pelos seus pontos de integraçaõ. Com esta consideraçaõ um elemento pode ter três estados possíveis quanto à plastificaçaõ de seus pontos: o elemento pode estar, totalmente elástico com todos os seus pontos de integraçaõ elásticos, parcialmente plastificados quando alguns, mas não todos, de seus pontos estão plastificados, e totalmente plástico quando todos os seus pontos estão plastificados.

Considera-se plastificado o ponto que satisfaz a 2.1.6(1), porém, como se está utilizando um programa de computador que utiliza incrementos, podemos melhorar a eficiência do programa definindo uma faixa de plastificaçaõ que considera os pontos cujos estados de tensões estiverem em uma certa

região próxima à superfície de escoamento.

Lembrando o critério de von Mises, o ponto de integração é considerado plástico quando:

$$\sqrt{3/2 \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} - \sigma_{f0} < f_p \cdot \sigma_{f0} \quad (f_p < 1) \quad 4.5.1(1)$$

Onde f_p é um escalar menor que 1 que caracteriza a faixa de plastificação (f_p é assumido igual a 0,1 caso não seja especificado como dado de entrada), e σ_{f0} é a tensão de escoamento do material obtida em um ensaio uniáxial de tração.

4.5.2 - Critério de descarga

Para a aplicação do critério de descarga visto em 2.1.7.3, pode-se alterar a equação 2.1.7.3(3), de modo a torná-la mais adequada ao programa computacional.

Lembrando a 2.1.7.3(3):

$$\frac{\partial Y}{\partial \sigma'_{ij}} \dot{\sigma}'_{ij} < 0 \quad \text{na descarga} \quad 4.5.2(1)$$

No critério de von Mises, com endurecimento isotrópico, tem-se:

$$\frac{\partial Y}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{\partial Y}{\partial \sigma'_{ij}} \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{3/2 \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}} \sigma'_{ij} = k \sigma'_{ij} \quad 4.5.2(2)$$

onde σ'_{ij} é o tensor desviador de tensões definido em 2.1.7.1(2) e k é um número positivo.

Lembrando 2.2(14)

$$\dot{\sigma}'_{ij} = 2\mu D_{ij} + \lambda \delta_{ij} D_{kk} + \Omega_{ip} \sigma_{pj} - \sigma_{ip} \Omega_{pj} \quad 4.5.2(3)$$

Substituindo 4.5.2(2) e 4.5.2(3) na 4.5.2(1)

$$k \sigma'_{ij} (2\mu D_{ij} + \lambda \delta_{ij} D_{kk} + \Omega_{ip} \sigma_{pj} - \sigma_{ip} \Omega_{pj}) < 0 \quad 4.5.2(4)$$

Na expressão acima tem-se:

$$\sigma'_{ij} (\Omega_{ip} \sigma_{pj} - \sigma_{ip} \Omega_{pj}) = 0 \quad 4.5.2(5)$$

e ainda:

$$\sigma'_{ij} \delta_{ij} D_{kk} = 0 \quad 4.5.2(6)$$

Assim, a condição de descarga fica reduzida a:

$$\sigma'_{ij} D_{ij} < 0 \quad 4.5.2(7)$$

4.6 - Algoritmo de Solução

4.6.1 - Cálculo até a plastificação do primeiro ponto

O programa realiza várias etapas elásticas a comando do usuário antes de plastificar o primeiro elemento ou ponto de integração. Para que sejam obtidas estas etapas antes da plastificação, procede-se da seguinte forma:

a) Arbitra-se um vetor de cargas iniciais \underline{P} , com componentes aplicados nos nós nas direções desejadas, ou arbitra-se um vetor de deslocamentos prescritos que serve como carregamento inicial.

O carregamento inicial arbitrado será resolvido de forma elástica linear. Com isto são obtidas as tensões e deslocamentos elásticos, bem como as tensões equivalentes correspondentes.

b) Calcula-se em cada ponto a relação:

$$re = \frac{\sigma_{f_0}}{\sigma_{eq}} \quad 4.6.1(1)$$

onde σ_{f_0} é a tensão de escoamento no ensaio de tração simples e σ_{eq} é a tensão equivalente do ponto (para o critério de von Mises $\sigma_{eq} = \sqrt{3/2} \sqrt{\sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}$).

Seleciona-se o menor dos re (re_{min}), e para se obter uma análise elástica em várias etapas calcula-se:

$$re_{min} = re_{min} \cdot \frac{1}{n} \quad 4.6.1(2)$$

onde n é o número de etapas desejadas. Convém lembrar que este número de etapas pode não ser alcançado ou pode ser ultra-

passado, se o problema for fortemente não linear ainda na fase elástica, pois a primeira análise foi feita de modo elástico linear.

Multiplica-se este novo re_{min} pelas tensões, deslocamentos e cargas de (a). Feita a multiplicação, o novo vetor de incremento de cargas ou de deslocamentos prescritos será o vetor inicial de (a) multiplicado pela relação re_{min} . A partir daí realiza-se um processo incremental até a plastificação do 1º ponto, usando o mesmo vetor de incrementos de cargas ou de deslocamentos prescritos.

c) Toma-se o mesmo vetor de incrementos calculado em (b) e se resolve:

$$\tilde{K}_T \Delta \underline{u} = \Delta \underline{P} \quad 4.6.1(2)$$

d) Com a solução da 4.6.1(2), pode-se calcular os acréscimos de deformações e tensões. Com os acréscimos atualizam-se os arranjos de tensões, deformações e deslocamentos totais. Com as tensões totais pode-se calcular os novos valores de tensões equivalentes e novos re . Se o valor de re_{min} é maior que 1 retorna-se à análise como em (c). Se re_{min} for menor que 1 deve-se calcular um R que leve à plastificação o primeiro ponto, porém isto é feito usando o critério de escoamento. O cálculo deste R seguirá a mesma formulação que será dada para o primeiro controle do item 4.6.2.

4.6.2 - Escolha dos incrementos na fase elastoplástica

Depois de plastificado o primeiro ponto, o novo incremento de carga será dado por uma fração de carga de plastificação, ou por uma fração do deslocamento prescrito que plastificou o primeiro ponto.

A escolha desta fração será a critério do usuário e feita através de um comando na entrada de dados (se não for dado, será assumido igual ao incremento elástico).

Mas é necessário um fator que controle o tamanho deste incremento, que é o fator R . No caso de pontos elásticos, R representa o fator que deve multiplicar os incrementos de carga, deslocamentos e tensões deste ponto para que seja alcançada a plastificação. Isto é feito na última etapa elástica, pois naquela etapa existem pontos que devem alcançar a plasti-

ficação. Para pontos elástoplásticos com várias retas no seu diagrama tensão-deformação logarítmica, o fator R multiplicado pelos vetores de incremento leva até o ponto onde muda a inclinação do diagrama, ou seja, no ponto onde se deve usar outro valor para o endurecimento.

Além deste primeiro controle, que faz com que um ponto caminhe sobre o diagrama tensão-deformação fornecido, devem existir outros, destinados a evitar que se tenha um incremento muito grande, o que será visto no final deste item.

Para o cálculo de R segundo este primeiro critério, deve-se considerar o acréscimo $\Delta\sigma$, ocorrido nas tensões σ devido à aplicação de um ΔP . O valor de R deve multiplicar os vetores $\Delta\sigma$ e ΔP para alcançar a plastificação em pontos elásticos (σ_{f_0}), ou a tensão equivalente que corresponda à mudança de inclinação na curva tensão-deformação fornecida.

Com estas considerações no critério de von Mises, a 2.3.1(1) torna-se:

$$\begin{aligned} & (\sigma_x + R \Delta\sigma_x)^2 + (\sigma_y + R \Delta\sigma_y)^2 + (\sigma_z + R \Delta\sigma_z)^2 - (\sigma_x + R \Delta\sigma_x) (\sigma_y + R \Delta\sigma_y) + \\ & - (\sigma_y + R \Delta\sigma_y) (\sigma_z + R \Delta\sigma_z) - (\sigma_x + R \Delta\sigma_x) (\sigma_z + R \Delta\sigma_z) + 3 \left[(\sigma_{xy} + R \Delta\sigma_{xy})^2 + \right. \\ & \left. + (\sigma_{yz} + R \Delta\sigma_{yz})^2 + (\sigma_{xz} + R \Delta\sigma_{xz})^2 \right] - \sigma_f^2 = 0 \quad 4.6.2(1) \end{aligned}$$

onde σ_f representa aqui o próximo valor de tensão para o qual a curva tensão-deformação do ponto, muda sua inclinação, e representa o valor da tensão equivalente de escoamento (σ_{f_0}), para pontos elásticos.

Desenvolvendo a 4.6.2(1), pode-se tirar o valor de R:

$$R = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad 4.6.2(2)$$

onde

$$\begin{aligned} A = & \Delta\sigma_x^2 + \Delta\sigma_y^2 + \Delta\sigma_z^2 - \Delta\sigma_x \Delta\sigma_y - \Delta\sigma_x \Delta\sigma_z - \Delta\sigma_y \Delta\sigma_z + \\ & + 3 \Delta\sigma_{xy}^2 + 3 \Delta\sigma_{xz}^2 + 3 \Delta\sigma_{yz}^2 \quad 4.6.2(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B = & 2 \sigma_x \Delta\sigma_x + 2 \sigma_y \Delta\sigma_y + 2 \sigma_z \Delta\sigma_z - \sigma_x \Delta\sigma_y - \sigma_y \Delta\sigma_x - \\
& - \sigma_x \Delta\sigma_z - \sigma_z \Delta\sigma_x - \sigma_y \Delta\sigma_z - \sigma_z \Delta\sigma_y + 6 \sigma_{xy} \Delta\sigma_{xy} + 6 \sigma_{xz} \Delta\sigma_{xz} + 6 \sigma_{yz} \Delta\sigma_{yz}
\end{aligned}
\tag{4.6.2(4)}$$

$$\begin{aligned}
C = & \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z + 3 \sigma_{xy}^2 + \\
& + 3 \sigma_{xz}^2 + 3 \sigma_{yz}^2 - \sigma_f^2
\end{aligned}
\tag{4.6.2(5)}$$

Ainda pode-se dizer que, da 2.3.1(1):

$$A = \Delta\sigma_{eq}^2 \tag{4.6.2(6)}$$

e,

$$C = \sigma_{eq}^2 - \sigma_f^2 \tag{4.6.2(7)}$$

Da 4.6.2(6) conclui-se que:

$$A > 0, \tag{4.6.2(8)}$$

e da 4.6.2(7), como o ponto está sendo carregado:

$$C < 0. \tag{4.6.2(9)}$$

Mas, a 4.6.2(4) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
B = & 3 \left[\frac{2}{3} \sigma_x \Delta\sigma_x + \frac{2}{3} \sigma_y \Delta\sigma_y + \frac{2}{3} \sigma_z \Delta\sigma_z + 2 \sigma_{xy} \Delta\sigma_{xy} + 2 \sigma_{xz} \Delta\sigma_{xz} + \right. \\
& + 2 \sigma_{yz} \Delta\sigma_{yz} - \frac{1}{3} \sigma_y \Delta\sigma_x - \frac{1}{3} \sigma_z \Delta\sigma_x \\
& \left. - \frac{1}{3} \sigma_x \Delta\sigma_y - \frac{1}{3} \sigma_z \Delta\sigma_y - \frac{1}{3} \sigma_x \Delta\sigma_z - \frac{1}{3} \sigma_y \Delta\sigma_z \right]
\end{aligned}
\tag{4.6.2(10)}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}
B = & 3 \left[\sigma_x \Delta\sigma_x \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \sigma_y \Delta\sigma_y \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \sigma_z \Delta\sigma_z \left(1 - \frac{1}{3}\right) + 2 \sigma_{xy} \Delta\sigma_{xy} + \right. \\
& + 2 \sigma_{xz} \Delta\sigma_{xz} + 2 \sigma_{yz} \Delta\sigma_{yz} - \frac{1}{3} \sigma_y \Delta\sigma_x - \frac{1}{3} \sigma_z \Delta\sigma_x - \\
& \left. - \frac{1}{3} \sigma_x \Delta\sigma_y - \frac{1}{3} \sigma_z \Delta\sigma_y - \frac{1}{3} \sigma_x \Delta\sigma_z - \frac{1}{3} \sigma_y \Delta\sigma_z \right]
\end{aligned}
\tag{4.6.2(11)}$$

que pode ser mais uma vez rearranjada como:

$$B = 3 \left[\sigma_x \Delta\sigma_x + \sigma_y \Delta\sigma_y + \sigma_z \Delta\sigma_z + 2 \sigma_{xy} \Delta\sigma_{xy} + 2 \sigma_{xz} \Delta\sigma_{xz} + 2 \sigma_{yz} \Delta\sigma_{yz} - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \sigma_x \Delta\sigma_x - \frac{1}{3} \sigma_y \Delta\sigma_x - \frac{1}{3} \sigma_z \Delta\sigma_x - \frac{1}{3} \sigma_x \Delta\sigma_y - \frac{1}{3} \sigma_y \Delta\sigma_y - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \sigma_z \Delta\sigma_y - \frac{1}{3} \sigma_x \Delta\sigma_z - \frac{1}{3} \sigma_y \Delta\sigma_z - \frac{1}{3} \sigma_z \Delta\sigma_z \right] \quad 4.6.2(12)$$

Observando a 4.6.2(12), pode-se separá-la em duas parcelas, compostas de produtos matriciais, da seguinte forma:

$$B = 3 \left[\sigma_{ij} \Delta\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \Delta\sigma_{ij} \right] \quad 4.6.2(13)$$

colocando $\Delta\sigma_{ij}$ em evidência:

$$B = 3 \left[\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right] \Delta\sigma_{ij} \quad 4.6.2(14)$$

Lembrando a 2.1.7.1(2):

$$B = 3 \sigma'_{ij} \Delta\sigma_{ij} \quad 4.6.2(15)$$

Mas, lembrando a 4.5.2(2), $\partial Y / \partial \sigma_{ij} = (3/2 \sigma_{eq}) \sigma'_{ij}$, pode-se alterar a 4.6.2(15), da seguinte forma:

$$B = 3 \left[\frac{\partial Y}{\partial \sigma_{ij}} \frac{2 \sigma_{eq}}{3} \right] \Delta\sigma_{ij} \quad 4.6.2(16)$$

ou seja:

$$B = 2 \sigma_{eq} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{ij}} \Delta\sigma_{ij} \quad 4.6.2(17)$$

No procedimento incremental adotado, resolve-se em cada passo um problema do tipo linear. Portanto, pode-se escrever $\Delta\sigma = \dot{\sigma} \Delta t$. Como Δt e σ_{eq} são positivos, o sinal de B é dado pelo termo $\partial Y / \partial \sigma_{ij} \dot{\sigma}_{ij}$, que é o critério de descarga (item 4.5.2). Logo, enquanto o ponto se manter na região elástica (carga) tem-se $B > 0$.

Tomando-se a 4.6.2(2) e, observando as 4.6.2(8) e 4.6.2(9), tem-se:

$$R = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4A|C|}}{2A} \quad 4.6.2(18)$$

onde as barras verticais indicam valor absoluto.

Mas, observando a 4.6.2(18), conclui-se que:

$$\sqrt{B^2 + 4A|C|} > |B| \quad 4.6.2(19)$$

Pelo que foi dito anteriormente $B > 0$, e como $R < 0$ não faz sentido, a 4.6.2(18) fica:

$$R = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad 4.6.2(20)$$

A 4.6.2(20) fornece o valor de R para um ponto elástico ou para um ponto elastoplástico com várias retas no seu diagrama tensão-deformação. Para evitar que se tome para R um valor muito grande, se $R_{\min} > 1$, adota-se $R_{\min} = 1$.

Além deste primeiro controle deve existir um outro que reduza o tamanho do incremento conforme o problema. Com esta finalidade, controla-se o aumento das tensões nos elementos ou pontos já plastificados, não permitindo que as tensões equivalentes aos acréscimos de tensão no passo sejam maiores que 8% da tensão de escoamento inicial. Para garantir que isto ocorra, calcula-se um r que satisfaça esta condição, da seguinte forma:

$$r = 0.08 \frac{\sigma_{f_0}}{\Delta\sigma_{eq}} \quad 4.6.2(21)$$

onde $\Delta\sigma_{eq}$ é a tensão equivalente calculada com $\Delta\sigma$ do passo e σ_{f_0} é a tensão de escoamento inicial. Se $r < R_{\min}$ adota-se $R_{\min} = r$.

Convém comentar aqui, que no caso de material elastoplástico perfeito, quando todos os pontos de integração já estão plastificados, todos os R calculados serão nulos. Então adota-se $R_{\min} = 1$, utilizando este valor juntamente com o controle do valor das tensões equivalentes dos $\Delta\sigma$, o fator r ,

adotando o menor deles para R_{min} .

4.6.3 - Controle de descarga dos pontos

Quando um ponto sofre um processo de descarga, pode acontecer que um estado de tensões represente um ponto próximo à superfície de escoamento no espaço das tensões. Devido a este fato, no próximo incremento este ponto pode ser considerado novamente plástico, pois está descrevendo uma "trajetória" quase paralela, ou secante à superfície de escoamento, o que causa um acréscimo na sua tensão equivalente, como pode ser observado na figura 10.



Figura 10

Quando isto ocorre, o programa começa a ter valores de R_{min} muito pequenos (ver item 4.6.2). Para diminuir este efeito faz-se a "multa" do ponto. Quando um ponto descarrega, para na etapa seguinte, torna-se plástico novamente, volta-se atrás na análise e obriga-se este ponto a continuar plástico nas duas etapas seguintes, mesmo que seja satisfeita a 4.5.2(7), depois das quais pode tornar-se elástico novamente.

4.6.4 - Interrupção da análise

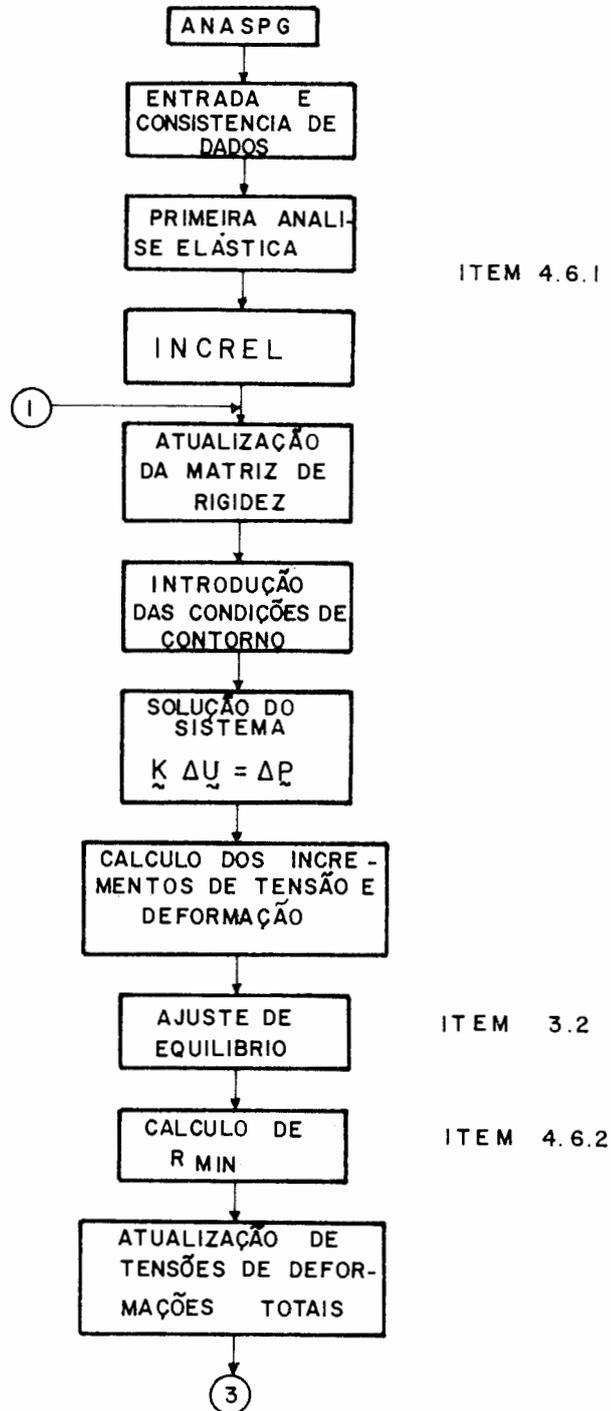
A análise deve ser interrompida quando se atinge uma tensão de ruptura. Isto é feito estabelecendo como dado de entrada a tensão de ruptura, aonde é interrompida a análise.

4.7 - O Programa Computacional. Diagrama de Blocos

O programa computacional pode ser dividido em duas fases, a fase elástica e a fase elastoplástica, ou seja, a análise

lise até a plastificação do primeiro ponto e a análise após esta primeira plastificação.

Na rotina principal ANASPG, figura 11, é feita a primeira análise elástica e o cálculo elastoplástico. A análise incremental elástica, já descrita no item 4.6.1, é feita em etapas elásticas pela rotina INCREL, cujo macrodiagrama de blocos está na figura 12.



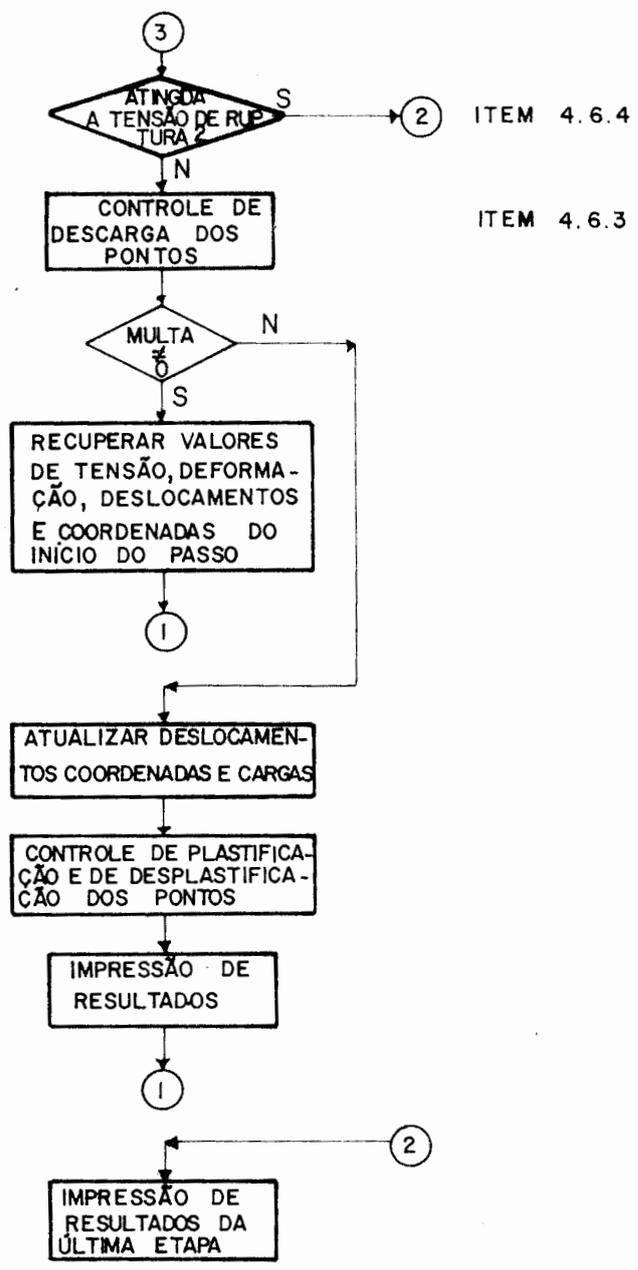


Figura 11

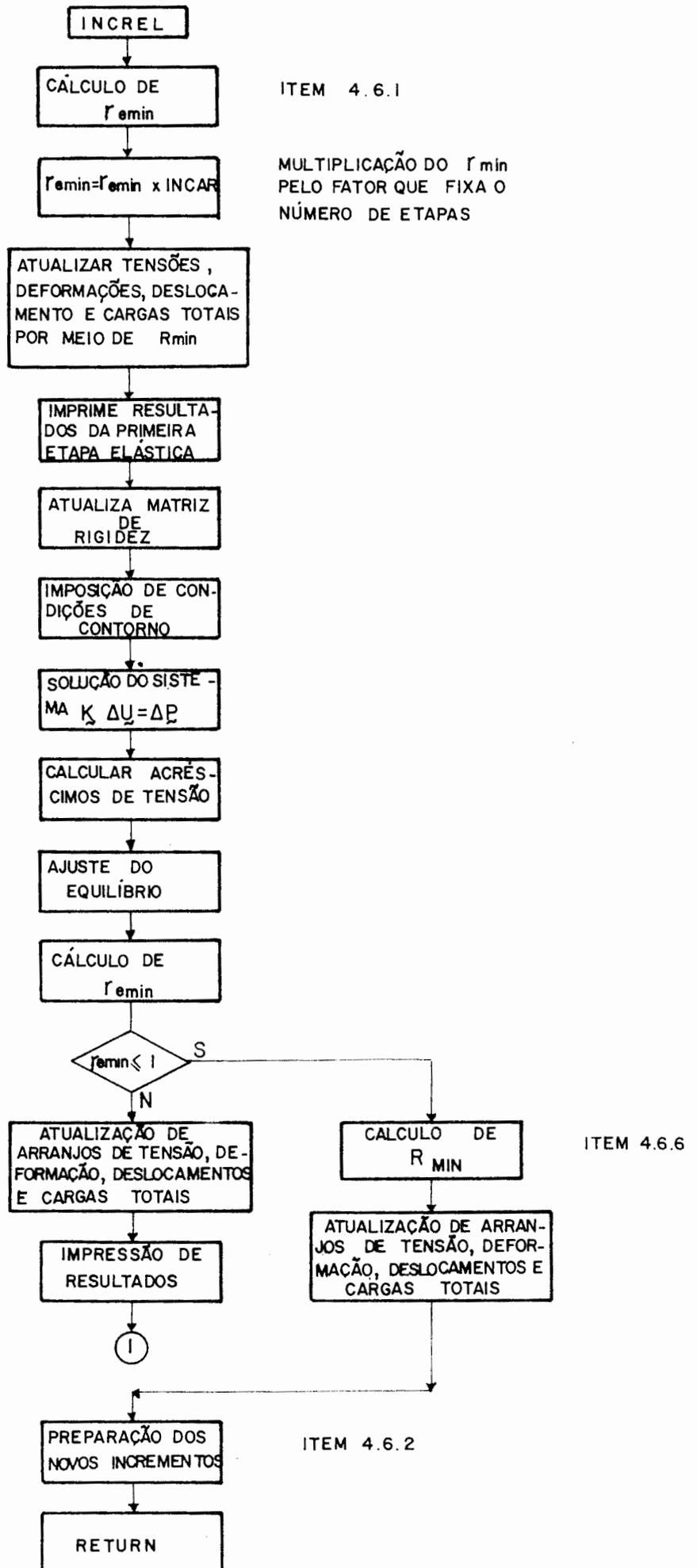


Figura 12

CAPÍTULO 5

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Neste capítulo serão apresentados os resultados de alguns exemplos de aplicação, comparando-se com outras soluções numéricas ou com resultados experimentais.

5.1 - Exemplos com um Elemento

Nestes exemplos procura-se mostrar o comportamento de um elemento isolado quando submetido a uma condição de compressão ou de tração simples.

5.1.1 - Triângulo linear

Pode-se observar a curva tensão-taxa de deformação acumulada para um elemento EPTL, cujas condições de contorno estão na figura 13, composto de material com as seguintes características:

$$E = 1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2 ; \quad \nu = 0,3$$

$$\sigma_{f_0} = 8000 \text{ kgf/cm}^2$$

No gráfico da figura 13 procurou-se ilustrar o comportamento de carga para um material com quatro retas compondo seu diagrama tensão-deformação :

$$\sigma_f = 12000 \text{ kgf/cm}^2 ; \quad H1 = 3,06 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_f = 18000 \text{ kgf/cm}^2 ; \quad H2 = 9,751 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$$

$$H3 = 1,909 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$$

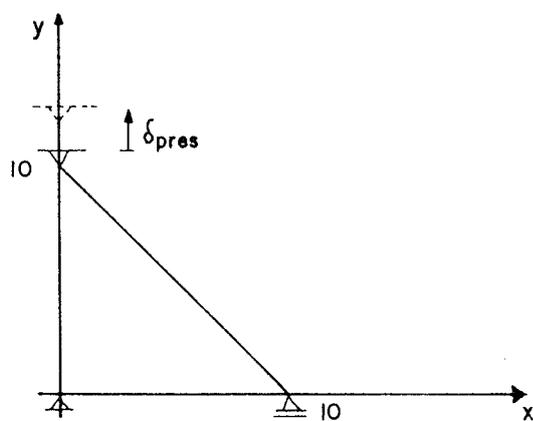


Figura 13

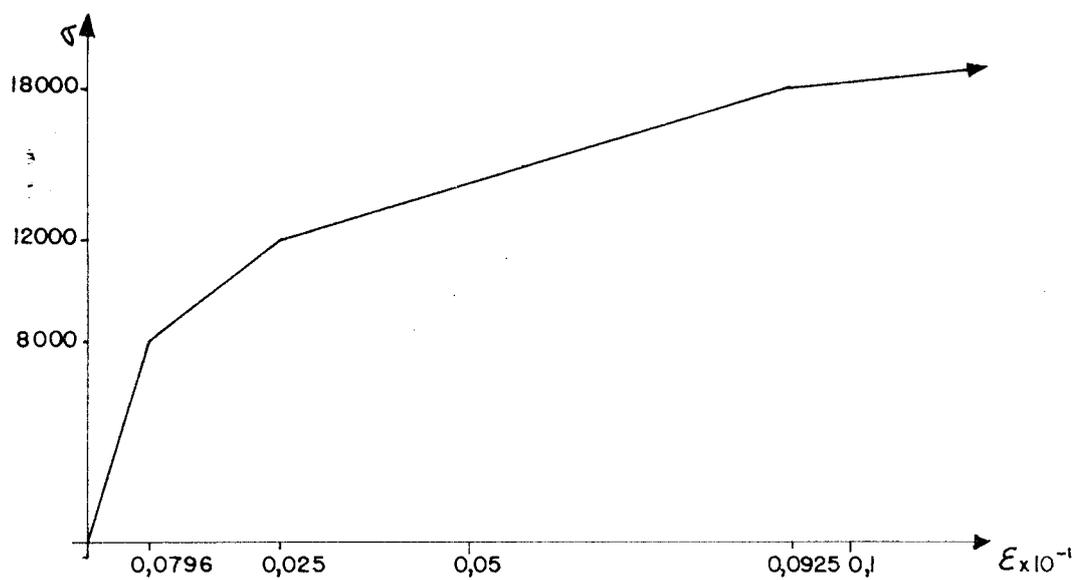


Figura 14

5.1.2 - Quadrilátero linear

Com um elemento EPQL, com as condições de contorno dados na figura 15, composto de um material com as mesmas propriedades dadas para o exemplo anterior. O carregamento será feito também por meio de deslocamentos prescritos.

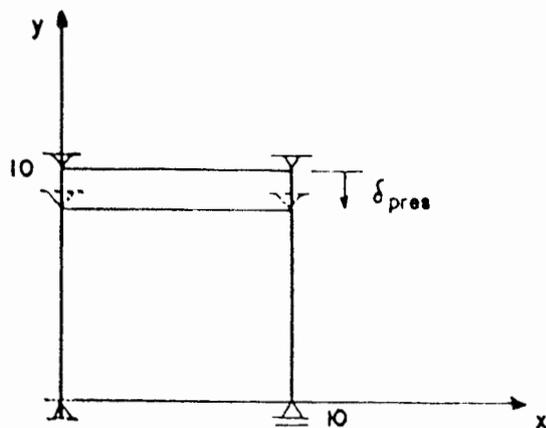


Figura 15

O gráfico obtido para a curva de tensão-taxa de deformação acumulada.

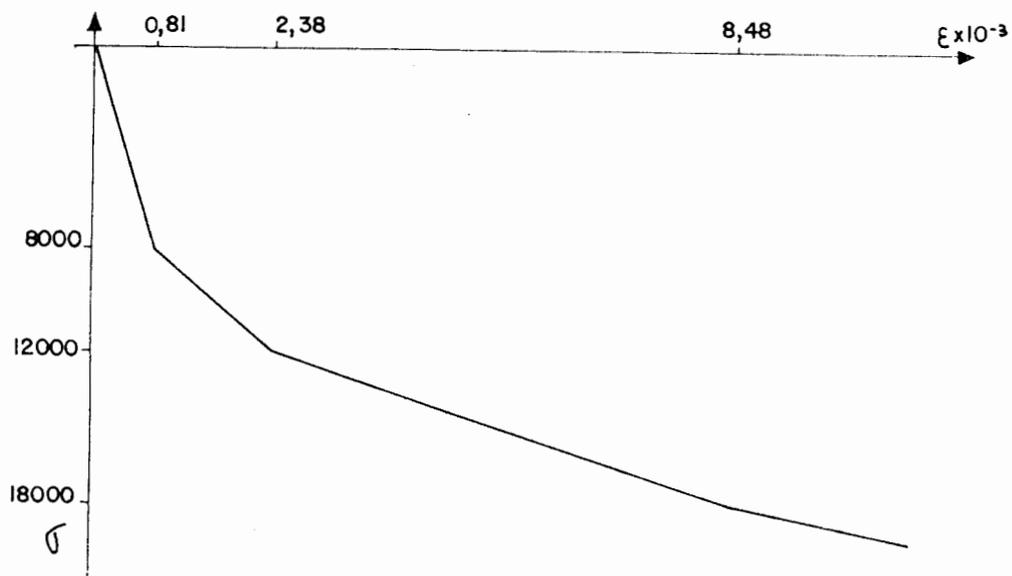


Figura 16

A variação da espessura em relação ao deslocamento está na figura 17.

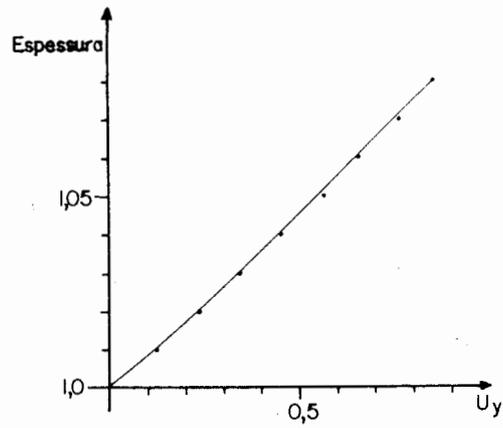


Figura 17

A variação de volume observada na deformação máxima foi de 0,169%.

5.2 - Placa Tracionada

Neste exemplo foi analisada uma placa submetida à tração uniforme em um dos seus bordos. Considerando-se a simetria do problema, pode-se analisar somente um quarto da placa, que está representado na figura 18 com suas condições de apoio. As características do material que compõe a placa são:

$$E = 100000 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$\sigma_{f_0} = 3000 \text{ kgf/cm}^2$$

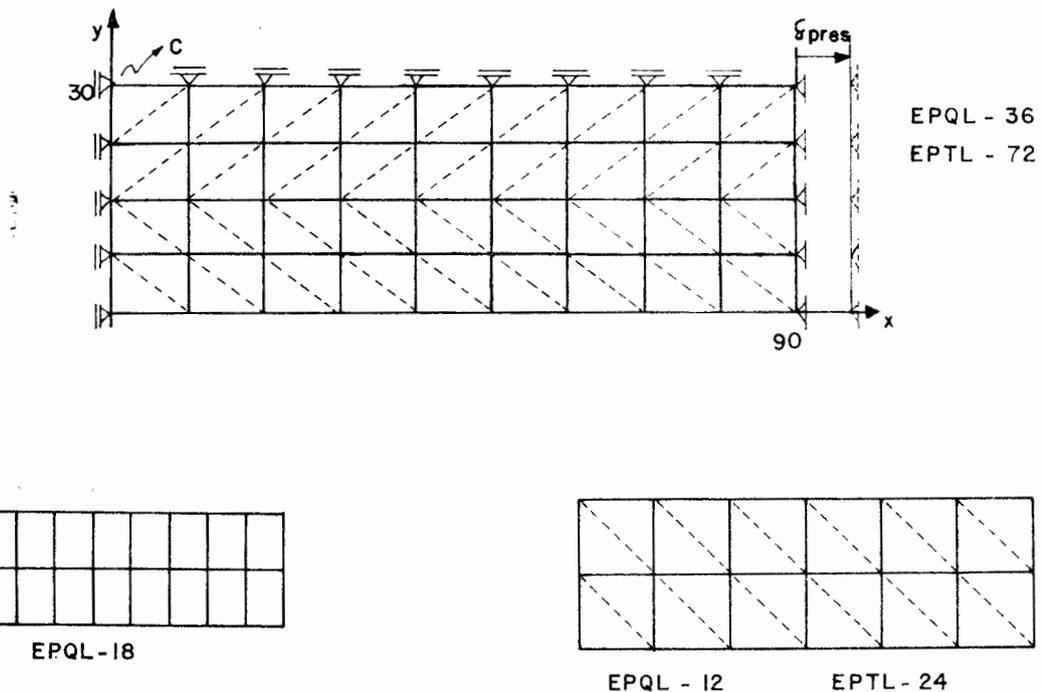


Figura 18

As malhas utilizadas estão também representadas esquematicamente na figura 18. Foram usados dois valores para a faixa de plastificação e os resultados estão representados a seguir. O material da placa é considerado elastoplástico perfeito.

Como é um problema de estado plano foram utilizados os elementos EPTL e EPQL.

Para a faixa de plastificação 0,1 os gráficos carga-deslocamento no bordo carregado estão na figura 19.

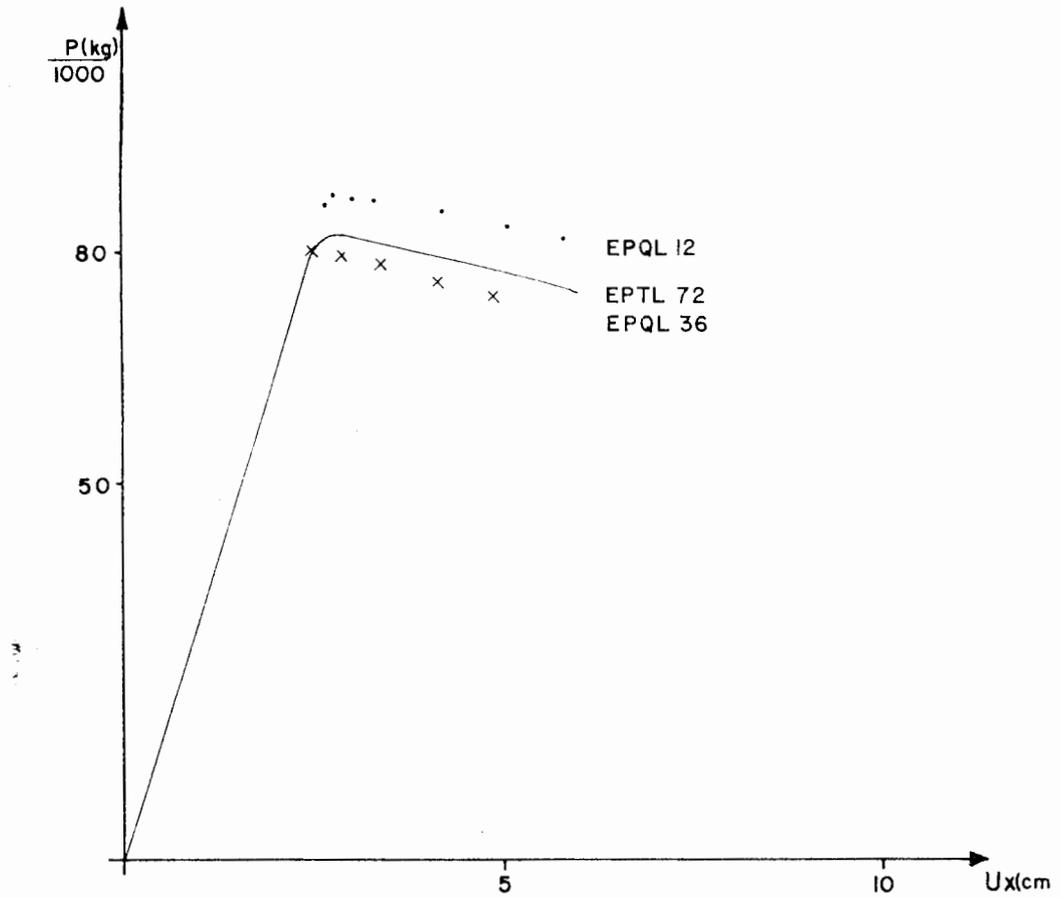


Figura 19

A malha EPQL 36, após a deformação está representada na figura 20; os elementos marcados com p são os que estão plastificados.

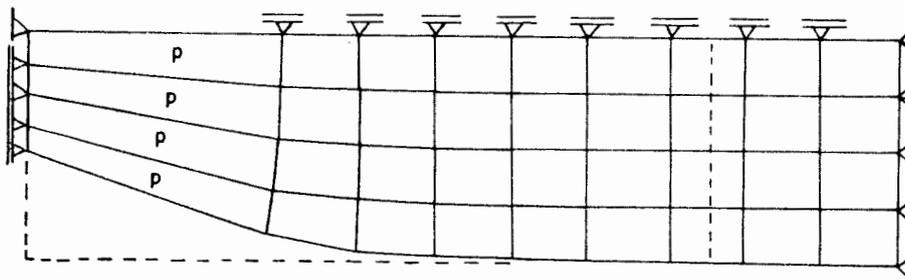


Figura 20

Para a faixa de plastificação 0,01 o gráfico carga-deslocamento está na figura 21.

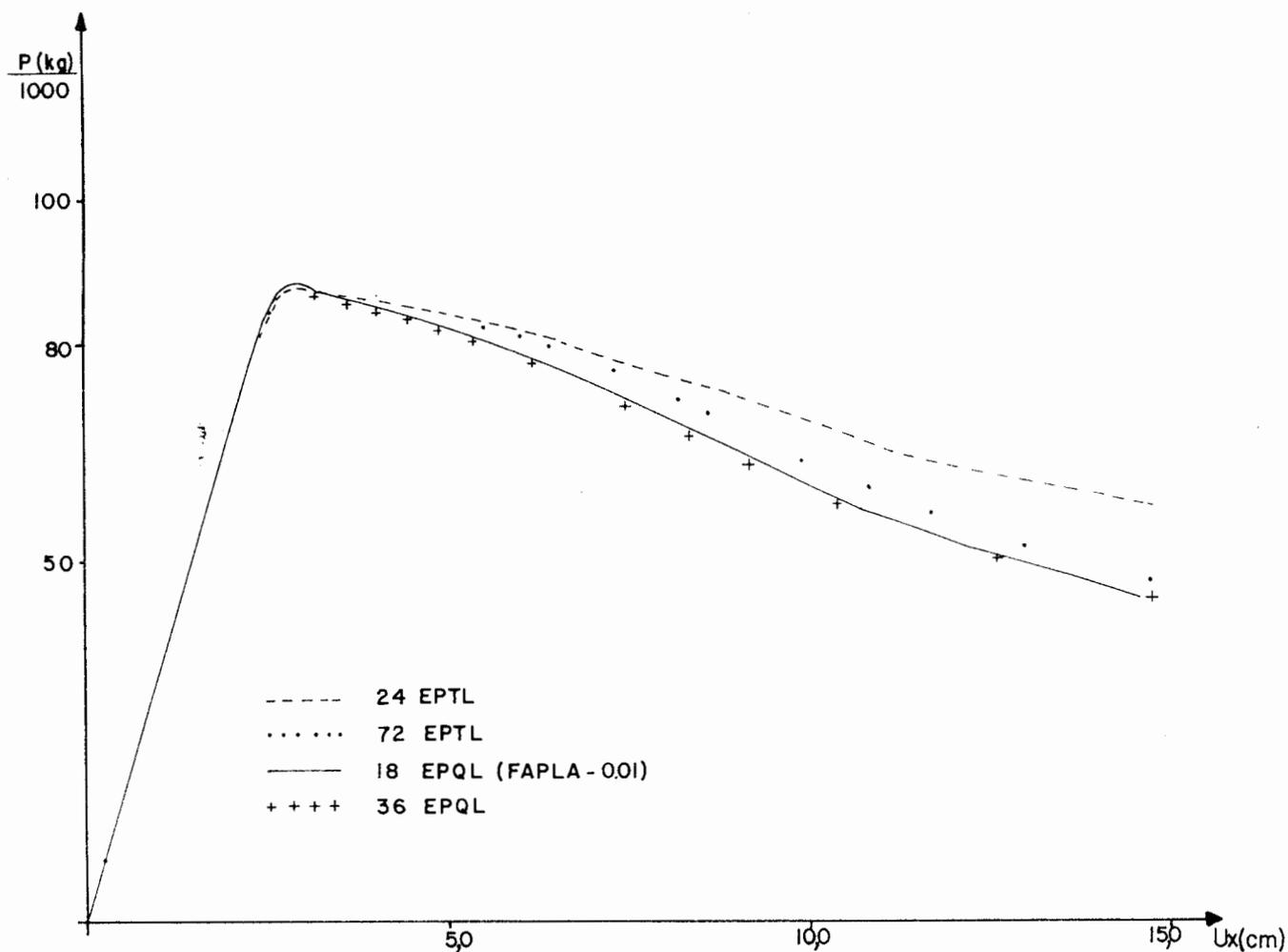


Figura 21

A variação máxima do volume foi de aproximadamente 25% para a região do estreitamento da secção.

Na figura 22 está representada a espessura no ponto c da malha EPQL 36.

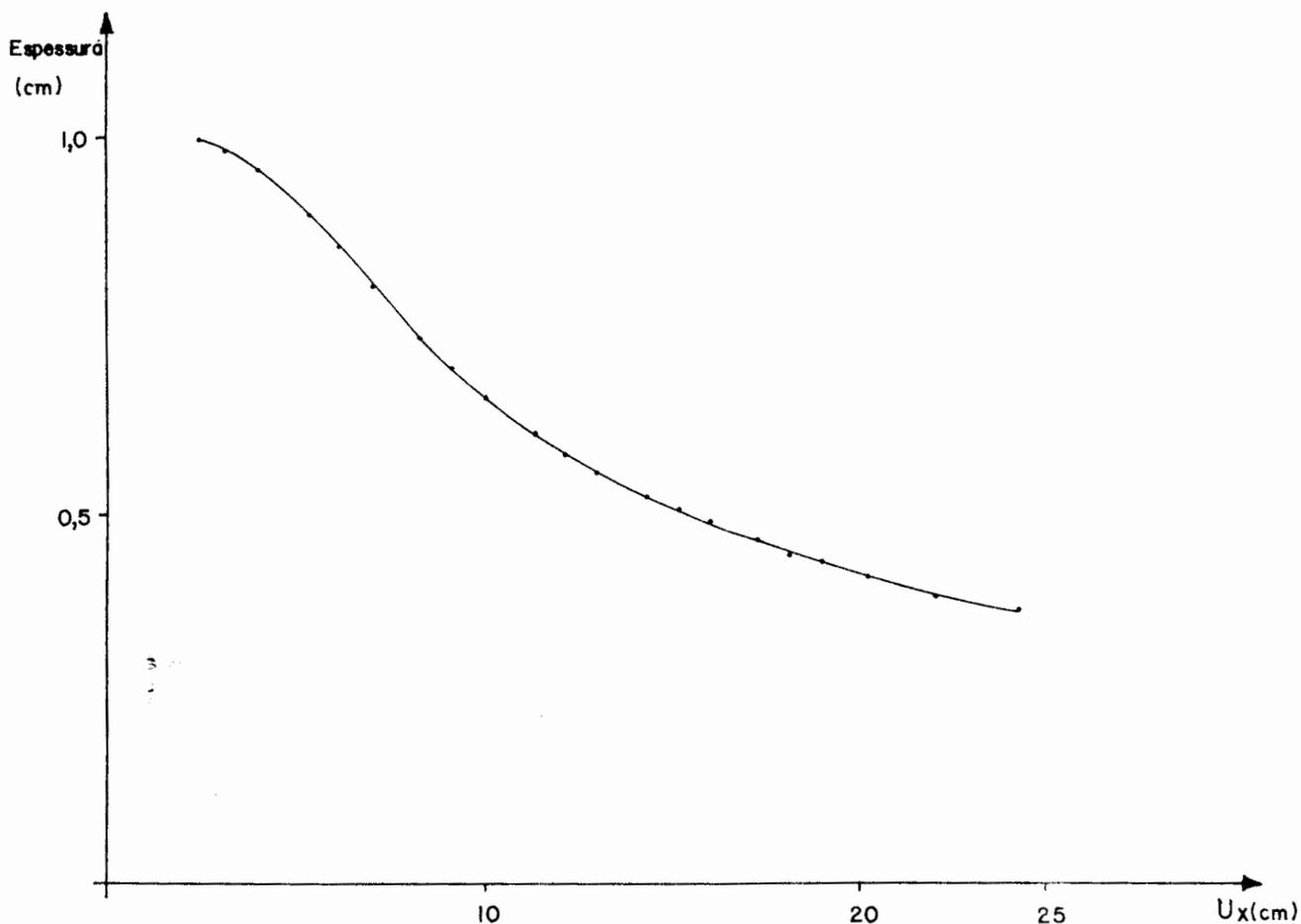


Figura 22

Pode-se notar a pouca influência da malha na curva carga-deslocamentos e que com poucos elementos já se obteve a convergência. Fica claro também o melhor desempenho do elemento EPQL que converge mais rapidamente que o EPTL. É conveniente notar a influência que teve a faixa de plastificação. Com a faixa de 0,1, têm-se mais pontos plastificados nas primeiras etapas e baixa o valor da carga máxima alcançada, se comparada com a faixa de plastificação 0,01.

5.3 - Barra Tracionada

Neste exemplo foram testadas duas malhas de elementos do tipo TRIL, visando-se obter um comportamento semelhante ao do exemplo anterior. Foram testadas duas malhas, uma com 9 elementos, na figura 23, outra com 12 elementos. As características do material são as mesmas do item 5.1. Para facilitar a representação as direções restringidas estão representadas por setas.

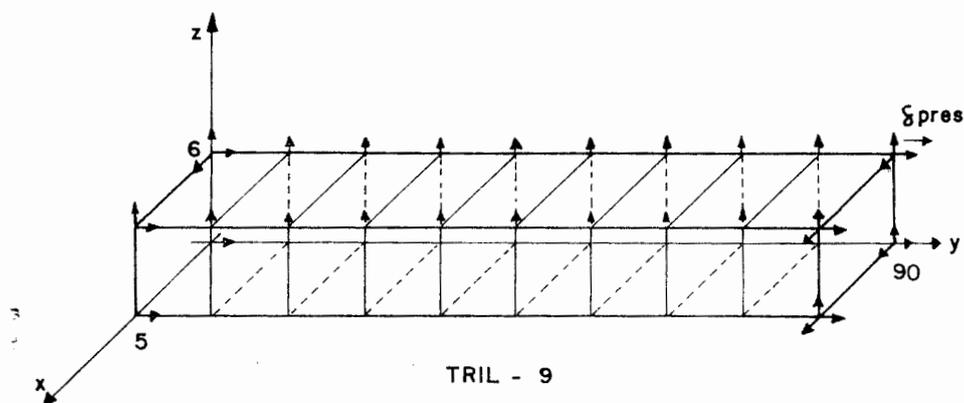


Figura 23

Para comparação com a malha da figura 23, tomou-se uma malha de elementos EPQL, representada na figura 24, devido ao pequeno número de elementos, os resultados com o EPQL não foram bons.

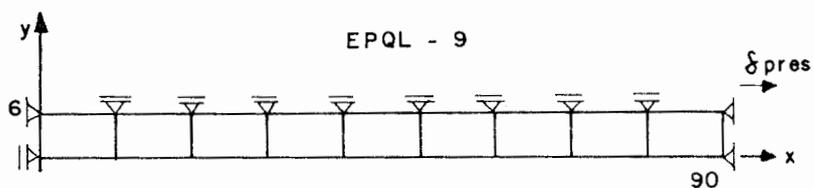


Figura 24

O gráfico carga-deslocamentos obtido no ponto de aplicação dos deslocamentos prescritos para as malhas testadas, 9 TRIL e 12 TRIL.

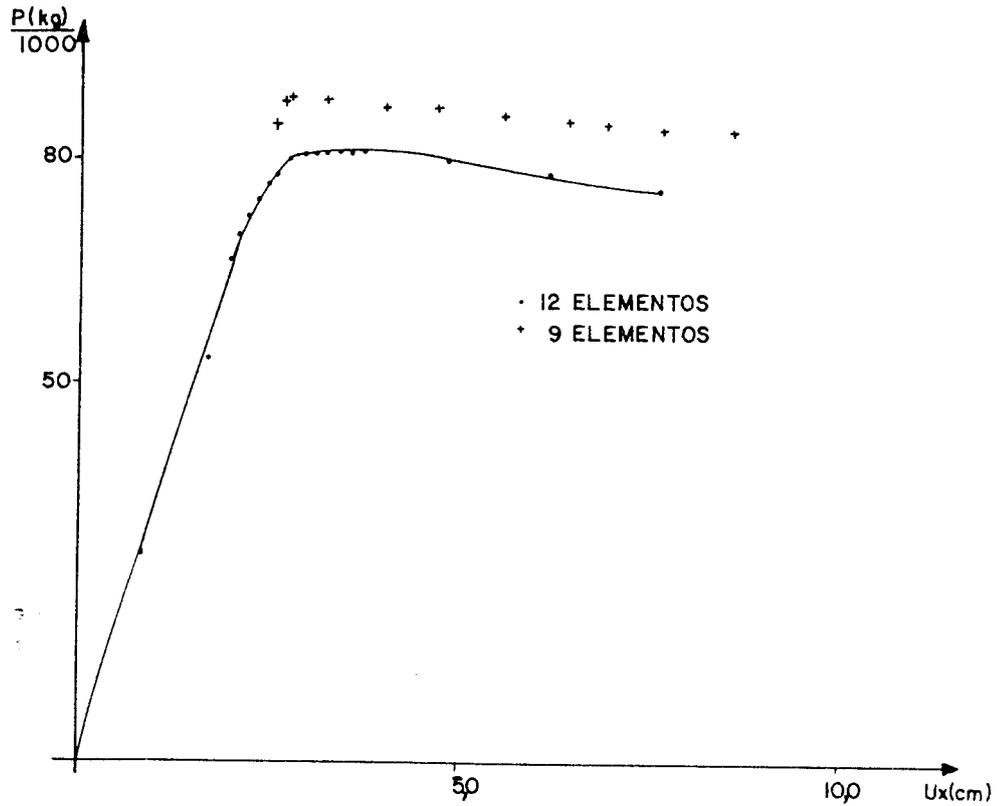


Figura 25

Para as análises foi utilizado o tempo de 1800 seg. de computação que comparado com o tempo de área de 600 seg. utilizado na solução do exemplo anterior mostra a dificuldade de aplicação do elemento tridimensional.

5.4 - Viga Biengastada

Neste exemplo será analisada uma viga biengastada mostrada na figura 26. As características do material da viga são:

$$E = 29.8685 \times 10^6 \text{ lb/pol}^2 \approx 2100000,00 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$\sigma_{f_0} = 3.4 \times 10^4 \text{ lb/pol}^2 \approx 2390,48 \text{ kgf/cm}^2$$

Como o exemplo foi obtido de uma publicação norte americana, foi necessário utilizar as unidades do sistema inglês para comparação de resultados [16].

O endurecimento para o material foi fixado previamente em 2.5×10^5 , por meio de comparações com gráficos fornecidos no artigo.

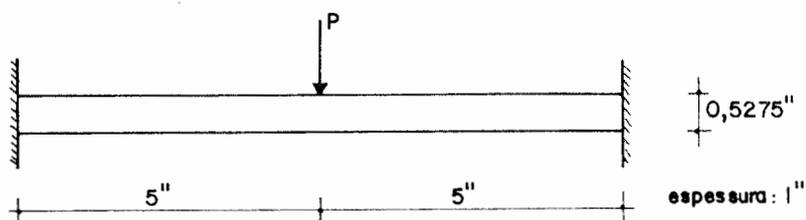


Figura 26

As malhas utilizadas na solução foram com o elemento EPQL, EDQL e EPTL, EDTL. Os elementos de estado plano de tensões e de deformações forneceram resultados semelhantes, portanto, não serão fornecidos.

Para que o gráfico resultante possa ser adimensional a flecha no centro da viga será relacionada com a altura h e a carga correspondente será relacionada com a carga teórica da plastificação da seção, P_y , calculada como se segue:

$$M_0 = \sigma_{f_0} \frac{Bxh^2}{4} = 3,4 \times 10^4 \times \frac{1 \times (0,5275)^2}{4} = 0,2365 \times 10^4 \text{ lb pol} \quad 5.4(1)$$

$$P_y = \frac{2 M_0 \ell}{a b} = \frac{2 \times 0,2365 \times 10}{2,5} = 1892,1425 \text{ lb} \quad 5.4(2)$$

Onde B é a base da secção transversal (espessura), h é a altura da mesma secção, ℓ é o vão a e b são as distâncias da carga até os apoios.

As curvas adimensionais carga-deslocamento, comparadas com a curva experimental, para a faixa de plastificação 0,01, estão na figura 27.

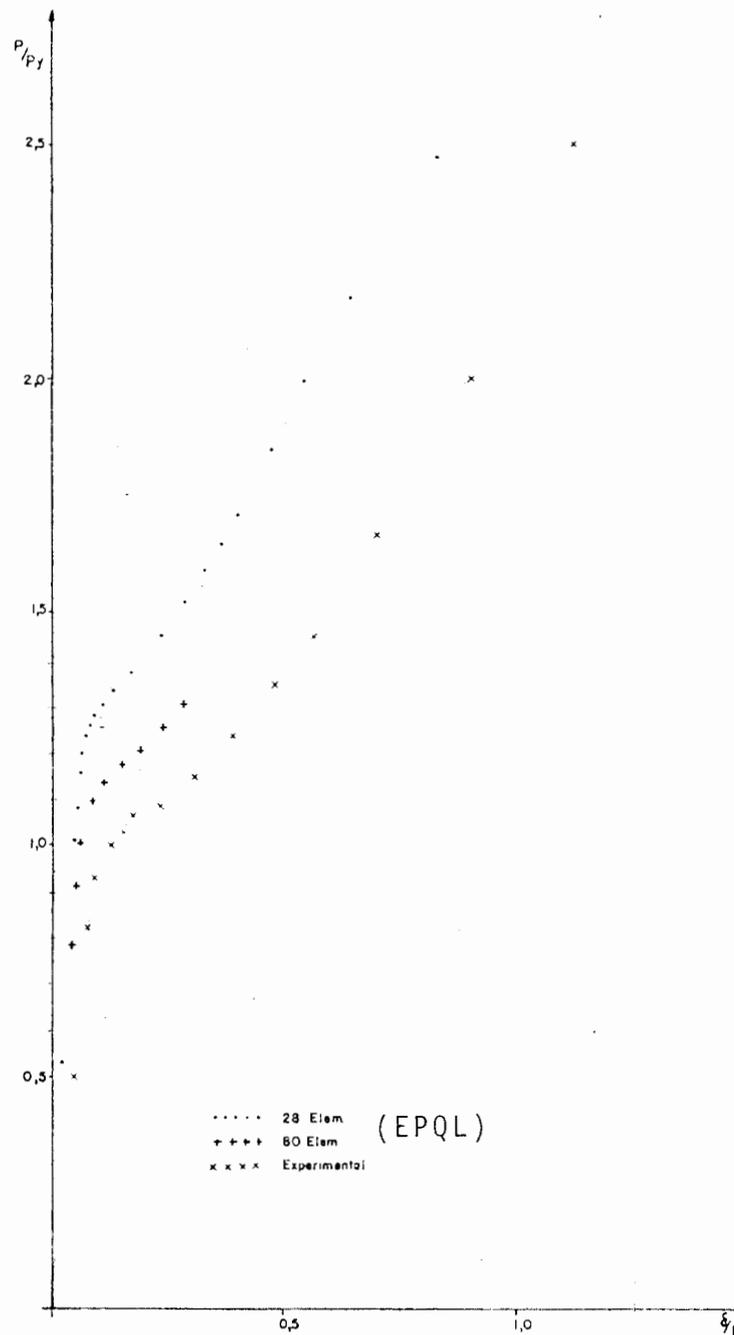


Figura 27

O tempo computacional utilizado na solução foi de 1800 segundos para ambas as malhas. As malhas utilizadas neste exemplo estão representadas na figura 28.

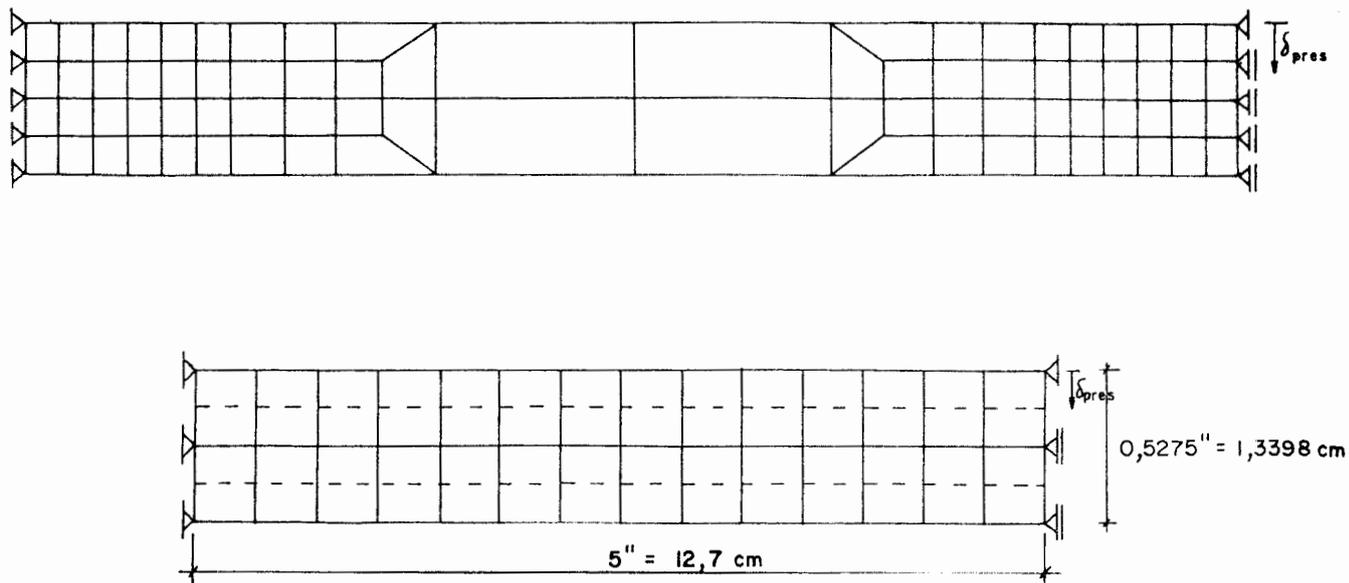


Figura 28

Pode-se notar que o aumento do número de elementos está levando à convergência, porém existe um certo atraso da curva na fase elástica, que é provavelmente devido ao fato de se calcularem as tensões nos pontos de integração que são interiores ao elemento.

Foi testado um teste com a faixa de plastificação igual a 0,1 (figura 29) que mostra uma diminuição da sensibilidade da curva na região da dupla inflexão.

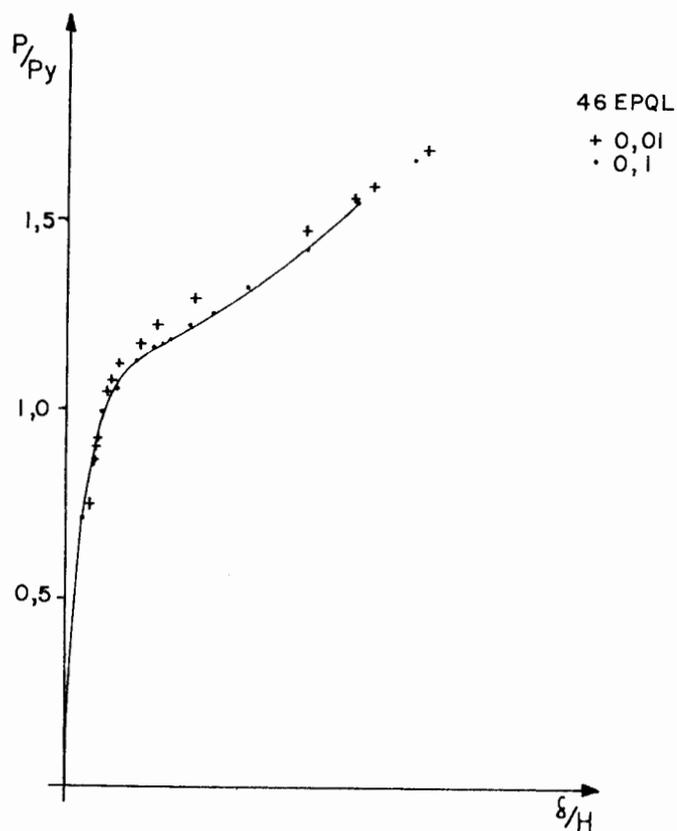


Figura 29

Foi ainda tentada a eliminação do ajuste do equilíbrio, figura 30, observando-se um desvio da curva se comparada com a mesma malha, porém com o ajuste e comparada com a curva experimental.

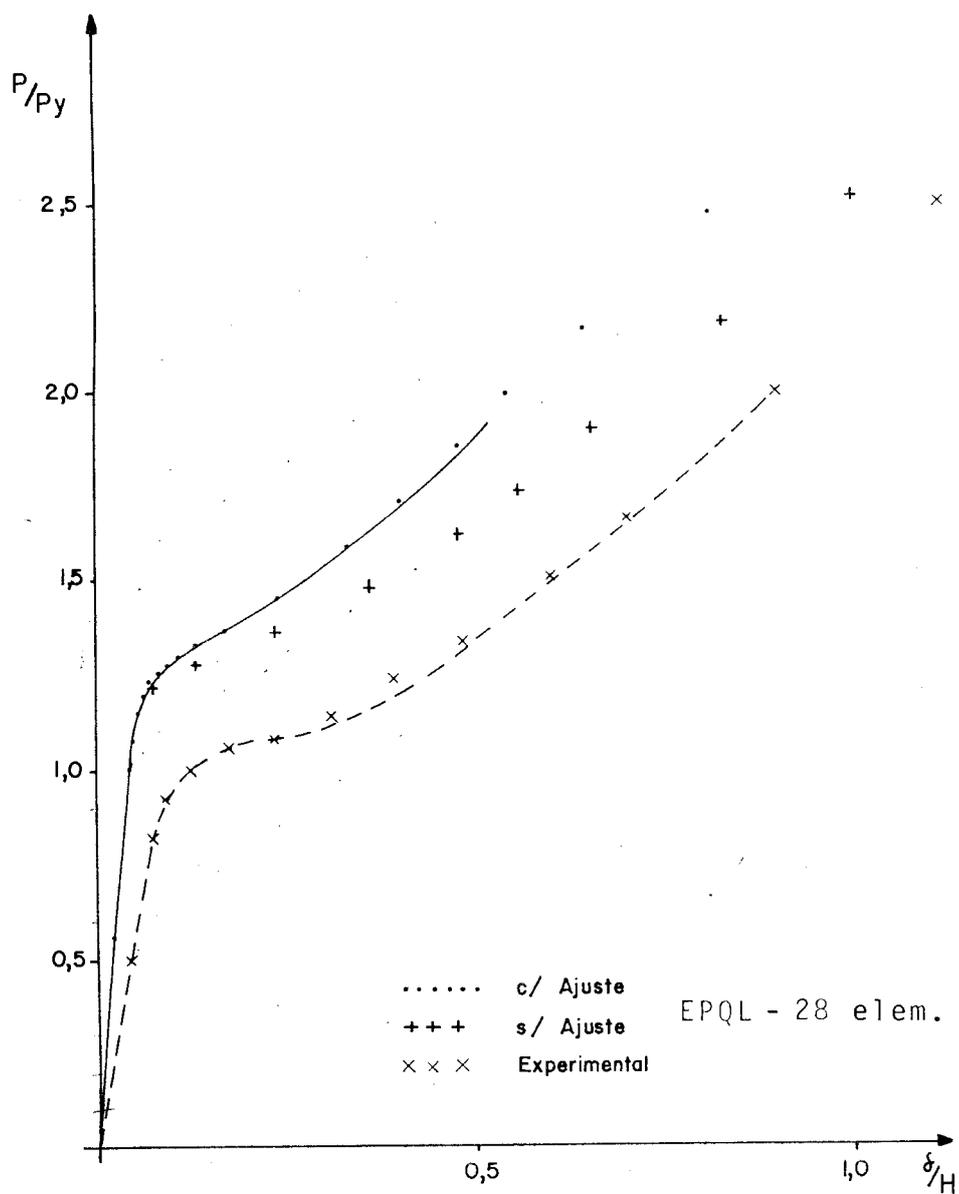


Figura 30

5.5 - Chaveta

Neste exemplo foram experimentadas duas malhas de elemento finito, com os elementos EPTL, 80 elementos, e EPQL, 51 elementos. O principal problema neste exemplo está na consideração do atrito na região dos apoios, o que faz com que as condições de contorno sejam difíceis de ser consideradas como se pode ver na figura 31.

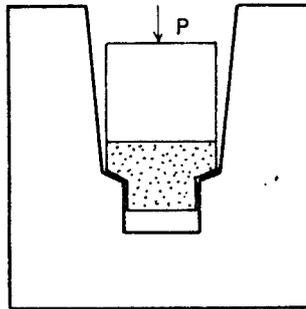


Figura 31

As características do material foram obtidas experimentalmente, e a curva tensão-deformação está na figura 32.

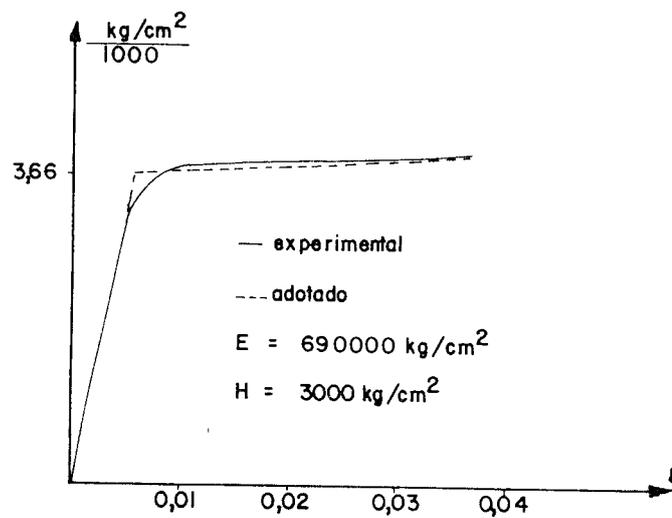


Figura 32

As malhas de elementos finitos utilizadas, estão na figura 33.

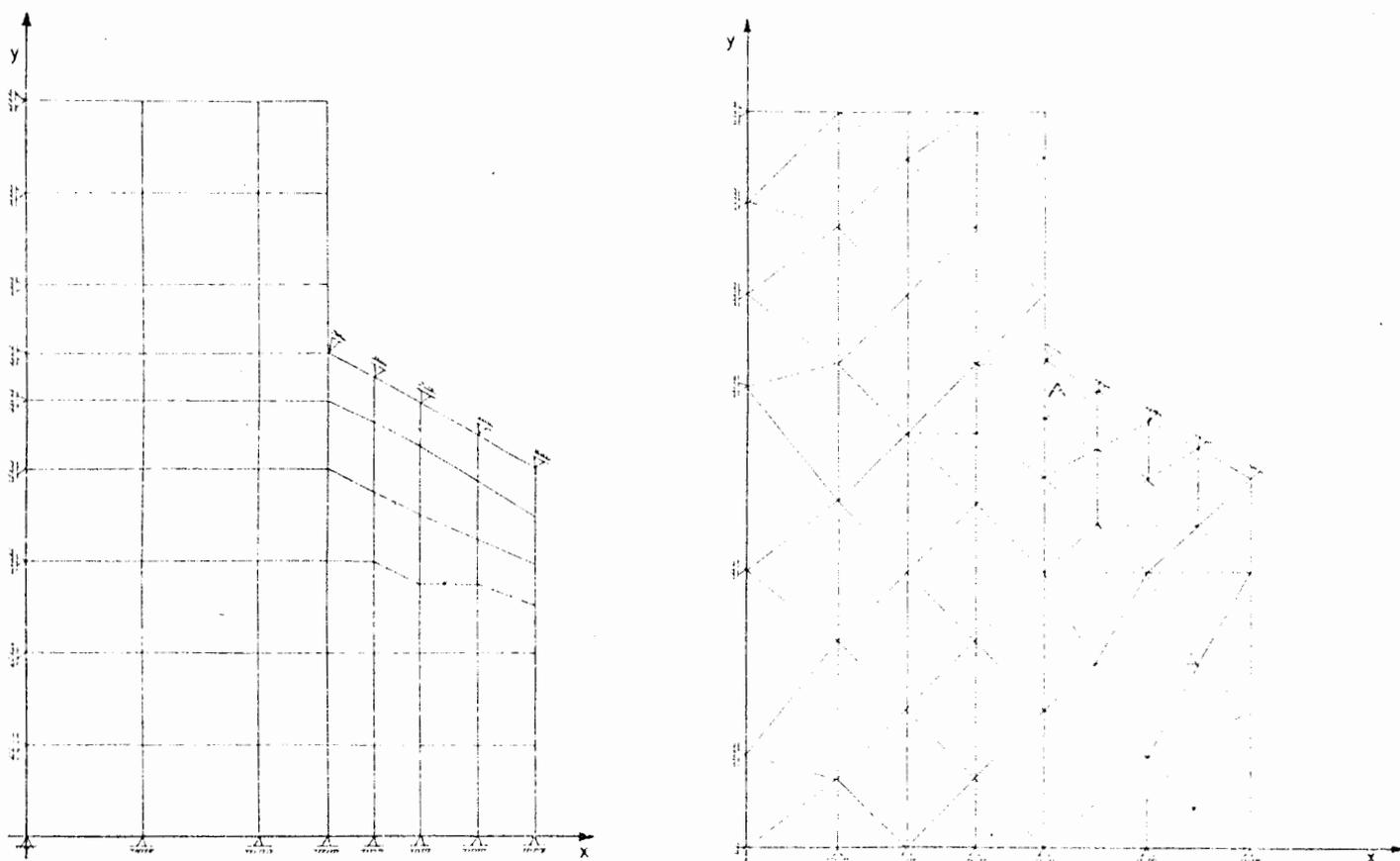


Figura 33

Para a solução, que está representada a seguir, foi utilizado o tempo computacional de 1800 segundos.

As curvas obtidas estão na figura 34, comparadas com a curva experimental, observa-se a grande variação de comportamento quando variam as condições de apoio.

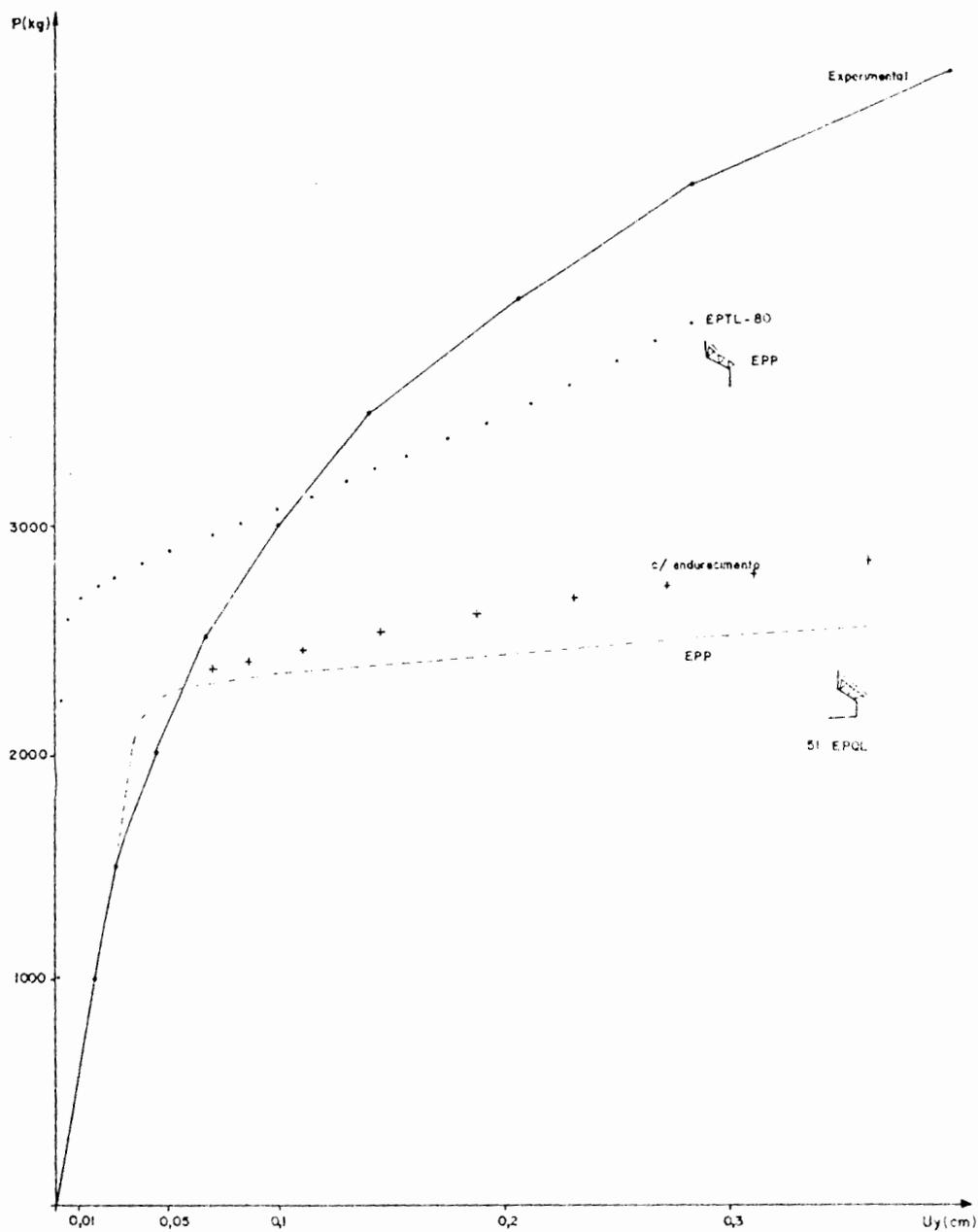


Figura 34

A variação da espessura no elemento marcado na figura 33 está representada na figura 35.

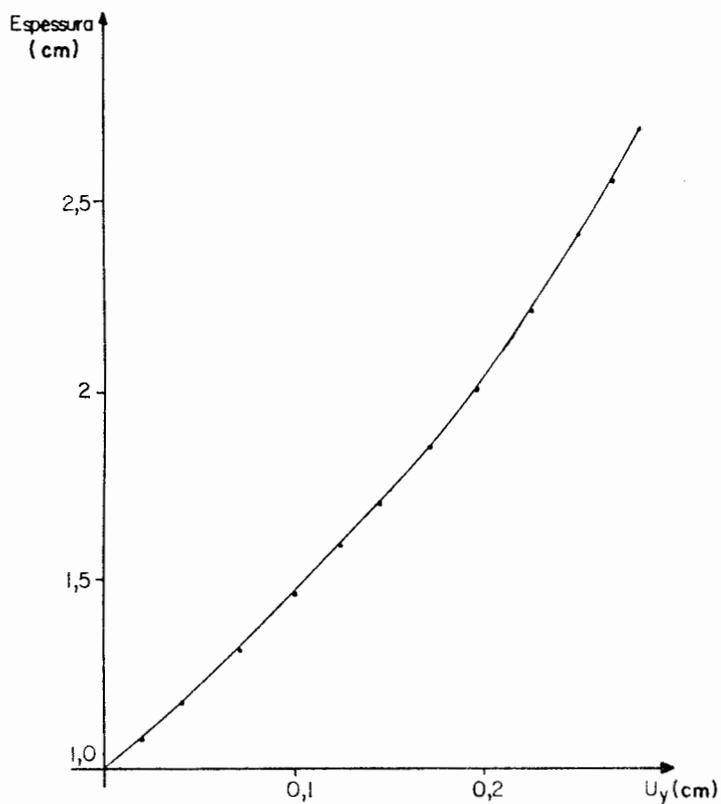


Figura 35

Pode-se ver nas curvas da figura 31 que não foi conseguida uma boa representação para o exemplo. Existem duas razões principais para tal, primeiro a dificuldade de representação das condições de apoio, depois a própria curva das características do material que não foi representada corretamente.

5.6 - Placa Circular

Neste exemplo foi analisada uma placa circular submetida a uma carga no centro como na figura 36.

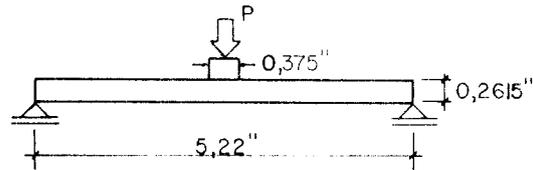


Figura 36

As características do material da placa são:

$$E = 10.05 \times 10^6 \text{ lb/pol}^2 = 70,566 \times 10^4 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\nu = 0,325$$

$$\sigma_{f_0} = 8000 \text{ lb/pol}^2 = 561,72 \text{ kgf/cm}^2$$

O comportamento plástico do material foi representado por quatro retas, com os valores de endurecimento $3,063 \times 10^6$, $9,751 \times 10^5$ e $1,909 \times 10^5$ e as tensões que limitam as retas, sendo 12000, 18000. Estes dados são fornecidos por Haisler, Hunsaker e Stricklin [21], os resultados experimentais por eles expostos, serão comparados com os resultados obtidos no XLEBRE. Neste exemplo foi utilizada uma malha de 88 elementos do tipo AXQL representada na figura 38.

Para um teste de carga e descarga os resultados estão na figura 37.

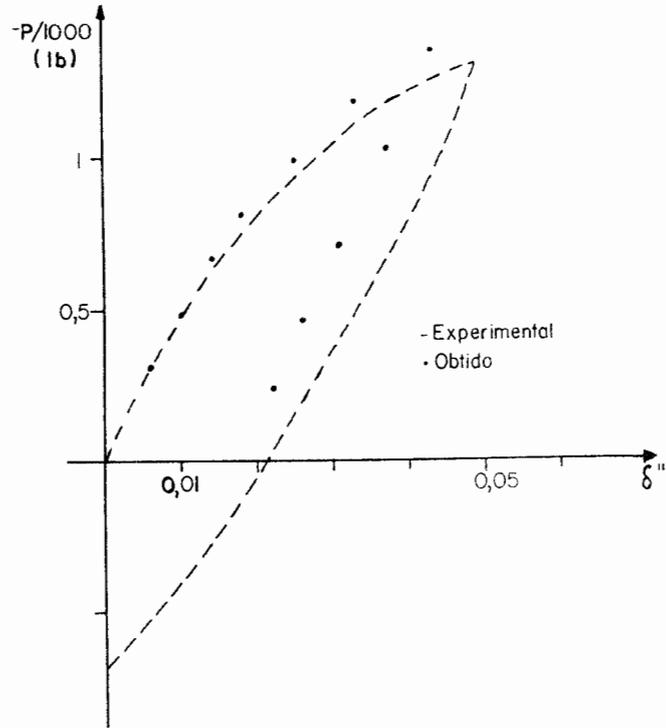


Figura 37

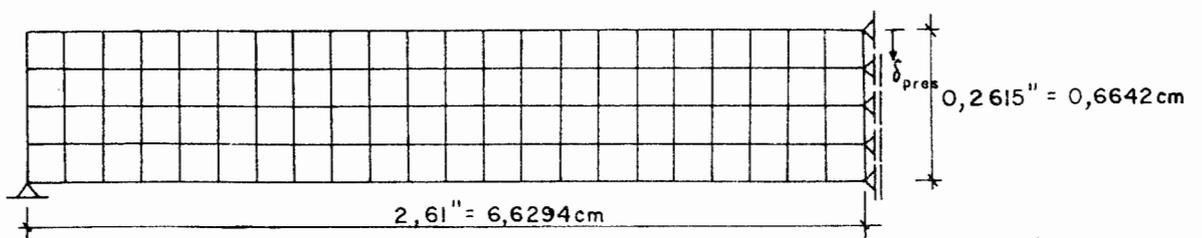


Figura 38

Na figura 39 estão os gráficos de um teste de carga, comparado com os resultados experimentais.

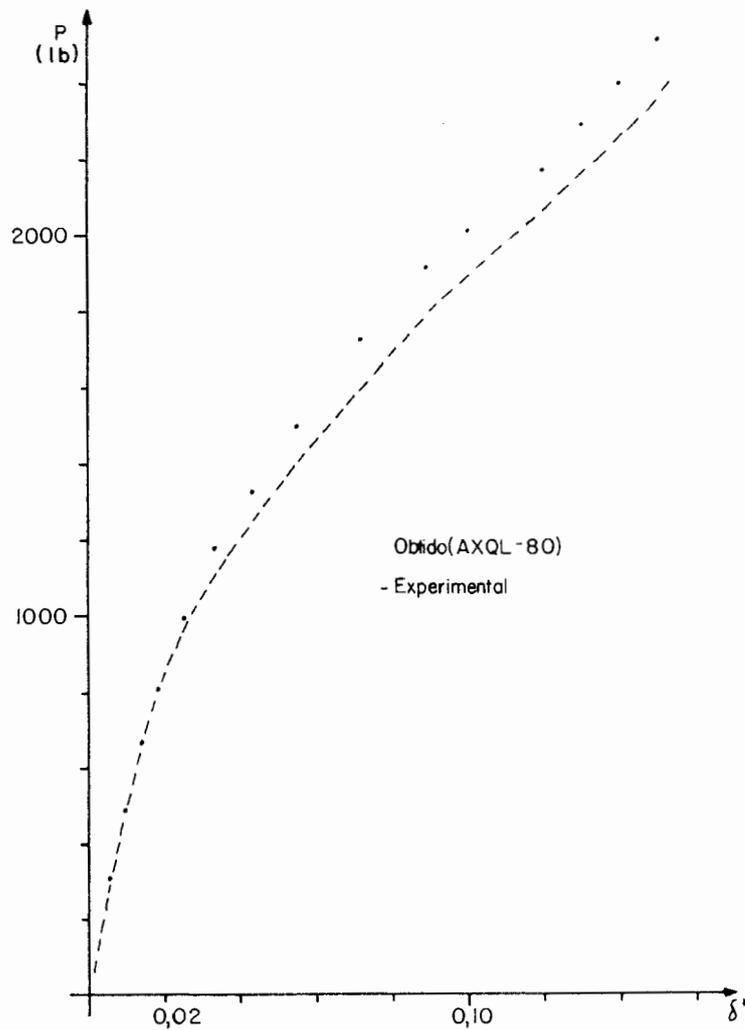


Figura 39

Pode-se notar os bons resultados obtidos, embora com muitos elementos, como aconteceu para o exemplo da viga bien-gastada. A partir dos exemplos 5.4 e 5.6, pode ser dito que o elemento EPQL é bastante rígido em problemas de flexão, por isto é necessário um grande número de elementos para uma boa representação.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste capítulo serão expostos comentários e conclusões a respeito do trabalho desenvolvido, e com relação ao que foi observado nos resultados obtidos. Também serão apresentadas algumas sugestões acerca de possíveis melhoramentos, e continuações deste trabalho.

6.1 - Conclusões

6.1.1 - Método e análise

A respeito do método utilizado, pode-se dizer que a forma obtida para a matriz de rigidez é bastante simples, principalmente se levarmos em conta a variedade de fatores que influem quando são consideradas não linearidades física e geométrica. Apesar desta relativa simplicidade, tem-se uma forma capaz de tratar problemas com uma forte não linearidade, mesmo com as simplificações introduzidas. E também uma forma bastante geral, principalmente no caso de metais, onde em geral as deformações até a plastificação são pequenas. Além disto é simples introduzir a matriz de rigidez de tensões iniciais em um programa que esteja fazendo análise de pequenas deformações, pois basta somar esta matriz à rigidez de pequenas deformações.

Pelo exemplo da viga biengastada pode-se ver a importância do ajuste do equilíbrio já que quando ele foi retirado da análise a curva perdeu a sua forma correta. No ajus-

te do equilíbrio, também, vê-se a importância de se ter um método de solução que possibilite a troca do vetor de acréscimo de cargas, sem que seja necessária uma nova decomposição da matriz de rigidez, como o método de Banachiewicz-Crout.

Outro fator que simplifica a análise é que esta abordagem leva a uma matriz constitutiva elastoplástica igual à de pequenas deformações, o que facilita também a implantação da análise de grandes deformações em um programa que faça a análise de grandes deformações.

6.1.2 - Programa computacional

A disponibilidade de uma linguagem orientada torna mais fácil o uso do programa, pois a utilização do comando de semelhança nodal ou coordenadas múltiplas facilita a entrada de dados em um exemplo complexo.

Como se trabalha com um sistema, é simples fazer comparações entre métodos de solução ou tipos de endurecimento disponíveis, bem como entre os elementos implantados. Foi feita uma opção pela generalidade, embora isto cause um esforço computacional adicional na solução, justamente devido à variedade de casos possíveis.

Um valor que merece comentários é a faixa de plastificação. Para o exemplo da placa tracionada houve uma mudança de comportamento quando se variou a faixa de plastificação de 0,01 para 0,1, alterando o valor máximo atingido, e depois o comportamento na curva carga-deslocamento. Na viga biengastada a mesma alteração na faixa de plastificação, influiu na forma da curva carga-deslocamento.

6.1.3 - Elementos implantados

O elemento quadrilátero de quatro nós, obteve melhores resultados que o elemento triangular de três nós, pelos exemplos analisados. Em ambos os elementos, porém, o afastamento maior da curva experimental se deu na fase elástica, melhorando sensivelmente na fase plástica.

O elemento tridimensional linear mostrou ser de difícil aplicação, pois consome bastante tempo de computador, principalmente se forem necessários muitos elementos para se obter bons resultados.

Outro comentário a ser feito é sobre o elemento triangular de 6 nós quadrático. Em uma primeira tentativa de implantação, não foram obtidos bons resultados, pois o elemento perdia a forma triangular logo no início da fase plástica devido aos nós intermediários. Uma vez que a formulação do elemento exige a manutenção da sua forma, a análise teve problemas.

6.2 - Sugestões

Quanto aos comandos disponíveis, seria aconselhável um comando que fixasse os incrementos de carga ou deslocamentos prescritos após a plastificação. Isto poderia ser feito usando uma fração da carga ou do deslocamento verificado no momento de plastificação. A maneira como estes novos incrementos são atualmente calculados pode levar a vetores de incremento muito grandes em certos exemplos, o que causa problemas.

Pelos exemplos analisados pode-se sugerir a utilização de valores entre 0,01 e 0,1 para a faixa de plastificação, conforme sejam as características do problema.

A respeito dos elementos quadriláteros de quatro nós nos problemas de flexão, onde foram necessários muitos elementos para se obter bons resultados, o que não ocorreu em outros exemplos. Pode-se dizer que este efeito é provavelmente devido ao fato de se calcular as tensões nos pontos de integração, que são no interior do elemento para a integração de Gauss. Uma sugestão então, seria mudar os pontos de integração para os vértices adotando uma integração de Newton-Cotes.

APÊNDICE A

OBTENÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE TENSÕES
INICIAIS DOS ELEMENTOS

Neste apêndice será exposta a parte de tensões iniciais da matriz de rigidez (K_s) em sua forma geral, para os elementos implantados.

O deslocamento no interior de um elemento é dado por:

$$u = \phi_1 u_1^{el} + \phi_2 u_2^{el} + \dots + \phi_i u_i^{el} \quad A(1)$$

onde i é o número de nós do elemento.

A forma geral das matrizes de rigidez conforme o número de nós do elemento é dada por:

a) Triângulo linear

$$K_s = \begin{array}{|c|c|c|} \hline R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ \hline R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ \hline R_{31} & R_{32} & R_{33} \\ \hline \end{array}$$

Figura A.1

b) Quadrilátero linear

$$K_s = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ \hline R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ \hline R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ \hline R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \\ \hline \end{array}$$

Figura A.2

c) Tridimensional linear

$$K_s = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & R_{15} & R_{16} & R_{17} & R_{18} \\ \hline R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & R_{25} & R_{26} & R_{27} & R_{28} \\ \hline R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & R_{35} & R_{36} & R_{37} & R_{38} \\ \hline R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & R_{45} & R_{46} & R_{47} & R_{48} \\ \hline R_{51} & R_{52} & R_{53} & R_{54} & R_{55} & R_{56} & R_{57} & R_{58} \\ \hline R_{61} & R_{62} & R_{63} & R_{64} & R_{65} & R_{66} & R_{67} & R_{68} \\ \hline R_{71} & R_{72} & R_{73} & R_{74} & R_{75} & R_{76} & R_{77} & R_{78} \\ \hline R_{81} & R_{82} & R_{83} & R_{84} & R_{85} & R_{86} & R_{87} & R_{88} \\ \hline \end{array}$$

Figura A.3

A forma geral da matriz de rigidez de tensões iniciais depende do tipo de problema e não do número de nós do elemento utilizado, assim serão expostas a seguir estas formas gerais para os tipos de problemas tratados neste trabalho.

Para elementos de estado plano de tensões ou de deformações, tem-se:

$$R_{ec} = \begin{bmatrix} -\sigma_x \phi_{\ell,x} \phi_{c,x} & \vdots & -\sigma_{xy}(\phi_{\ell,x} \phi_{c,x} + \phi_{\ell,y} \phi_{c,y}) \\ +\frac{1}{2} \phi_{\ell,y} \phi_{c,y} (\sigma_y - \sigma_x) & \vdots & -\frac{1}{2} \phi_{\ell,y} \phi_{c,x} (\sigma_x + \sigma_y) \\ \dots & \dots & \dots \\ -\sigma_{xy}(\phi_{\ell,x} \phi_{c,x} + \phi_{\ell,y} \phi_{c,y}) & \vdots & -\sigma_y \phi_{\ell,y} \phi_{c,y} \\ -\frac{1}{2} \phi_{\ell,x} \phi_{c,y} (\sigma_x + \sigma_y) & \vdots & +\frac{1}{2} \phi_{\ell,x} \phi_{c,x} (\sigma_x - \sigma_y) \end{bmatrix}$$

Figura A4

onde e e c representam as superlinhas e supercolunas respectivamente, e ϕ são as funções de forma da família Serendipity [2], [35].

As tensões estão distribuídas da seguinte forma:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Figura A5

Esta forma geral da matriz de rigidez ainda necessita ser integrada sobre o volume. No caso do triângulo linear em problemas de estado plano, a integração sobre o volume é direta, assim, a matriz geométrica já integrada, fica:

$$R_{\ell c} = \begin{bmatrix} -\sigma_x b_\ell b_c & \vdots & -\sigma_{xy} (b_\ell b_c + a_\ell a_c) \\ +\frac{1}{2} a_\ell a_c (\sigma_y - \sigma_x) & \vdots & -\frac{1}{2} a_\ell b_c (\sigma_x + \sigma_y) \\ \dots & \dots & \dots \\ -\sigma_{xy} (b_\ell b_c + a_\ell a_c) & \vdots & -\sigma_y a_\ell a_c \\ -\frac{1}{2} b_\ell a_c (\sigma_x + \sigma_y) & \vdots & +\frac{1}{2} b_\ell b_c (\sigma_x - \sigma_y) \end{bmatrix} \times \frac{t}{4A}$$

Figura A6

onde t representa a espessura, A a área do elemento, a_i e b_i são calculados como se segue:

$$a_i = x_k - x_j \quad A(2)$$

$$b_i = y_j - y_k \quad A(3)$$

com i, j e k sendo a ordem de conectividade do elemento, como na figura 7 do capítulo 4.

A forma geral da matriz \underline{K}_S para problemas de sólido axissimétrico é semelhante à de estado plano, somente aparecendo uma parcela adicional devida à tensão σ_z .

Dada matriz de tensões:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Figura A7

A matriz \underline{K}_S fica definida:

$$R_{le} = \begin{bmatrix} -\sigma_x \phi_{l,x} \phi_{c,x} & \vdots & -\sigma_{xy}(\phi_{l,x} \phi_{c,x} + \phi_{l,y} \phi_{c,y}) \\ +\frac{1}{2} \phi_{l,y} \phi_{c,y} (\sigma_y - \sigma_x) & \vdots & -\frac{1}{2} \phi_{l,y} \phi_{c,x} (\sigma_x + \sigma_y) \\ -2 \sigma_z \sigma_l \phi_c / R^2 & \vdots & +\frac{1}{2} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\sigma_{xy}(\phi_{l,x} \phi_{c,x} + \phi_{l,y} \phi_{c,y}) & \vdots & -\sigma_y \phi_{l,y} \phi_{c,y} \\ -\frac{1}{2} \phi_{l,x} \phi_{c,y} (\sigma_x + \sigma_y) & \vdots & +\frac{1}{2} \phi_{l,x} \phi_{c,x} (\sigma_x - \sigma_y) \end{bmatrix}$$

Figura A8

onde R representa o raio (do ponto de integração em uma integração numérica), tomou-se y como eixo de simetria, portanto, os raios são medidos no eixo x .

Para o elemento tridimensional a forma geral fica:

$$R_{\ell c} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Figura A9

onde

$$A_{11} = \frac{1}{2} \{ \phi_{\ell,x} [\sigma_{yz} \phi_{c,z} + \phi_{c,y} (\sigma_y - \sigma_x)] + \phi_{\ell,z} [\sigma_{yz} \phi_{c,y} + \phi_{c,z} (\sigma_z - \sigma_x)] \} \\ - \phi_{\ell,x} \phi_{c,x} \sigma_x \quad A(4)$$

$$A_{12} = -\frac{1}{2} \{ \phi_{\ell,y} [\sigma_{xz} \phi_{c,z} + \phi_{c,x} (\sigma_x + \sigma_y)] + \phi_{\ell,z} (\sigma_{yz} \phi_{c,x} + \sigma_{xy} \phi_{c,z}) \} \\ - \sigma_{xy} (\phi_{\ell,x} \phi_{c,x} + \phi_{\ell,y} \phi_{c,y}) \quad A(5)$$

$$A_{13} = -\frac{1}{2} \{ \phi_{\ell,y} (\sigma_{yz} \phi_{c,x} + \sigma_{xz} \phi_{c,y}) + \phi_{\ell,z} [\sigma_{xy} \phi_{c,y} + \phi_{c,x} (\sigma_z + \sigma_x)] \} \\ - \sigma_{xz} (\phi_{\ell,x} \phi_{c,x} + \phi_{\ell,z} \phi_{c,z}) \quad A(6)$$

$$A_{21} = -\frac{1}{2} \{ \phi_{c,y} [\sigma_{xz} \phi_{\ell,z} + \phi_{\ell,x} (\sigma_x + \sigma_y)] + \phi_{c,z} (\sigma_{yz} \phi_{\ell,x} + \sigma_{xy} \phi_{\ell,z}) \} \\ - \sigma_{xy} (\phi_{c,x} \phi_{\ell,x} + \phi_{c,y} \phi_{\ell,y}) \quad A(7)$$

$$A_{22} = \frac{1}{2} \{ \phi_{\ell,x} [\sigma_{xz} \phi_{c,z} + \phi_{c,x} (\sigma_x - \sigma_y)] + \phi_{\ell,z} [\sigma_{xz} \phi_{c,x} + \phi_{c,z} (\sigma_z - \sigma_y)] \} \\ - \sigma_y \phi_{\ell,y} \phi_{c,y} \quad A(8)$$

$$A_{23} = -\frac{1}{2} \{ \phi_{\ell,x} (\sigma_{yz} \phi_{c,x} + \sigma_{xz} \phi_{c,y}) + \phi_{\ell,z} [\sigma_{xy} \phi_{c,x} + \phi_{c,y} (\sigma_y + \sigma_z)] \} \\ - \sigma_{yz} (\phi_{\ell,y} \phi_{c,y} + \phi_{\ell,z} \phi_{c,z}) \quad A(9)$$

$$A_{31} = -\frac{1}{2} \{ \phi_{c,y} (\sigma_{yz} \phi_{\ell,y} + \sigma_{xz} \phi_{\ell,y}) + \phi_{c,z} [\sigma_{xy} \phi_{\ell,y} + \phi_{\ell,x} (\sigma_x + \sigma_z)] \} \\ - \sigma_{xz} (\phi_{c,x} \phi_{\ell,x} + \phi_{c,z} \phi_{\ell,z}) \quad A(10)$$

$$A_{32} = -\frac{1}{2} \{ \phi_{c,x} (\sigma_{yz} \phi_{\ell,x} + \sigma_{xz} \phi_{\ell,y}) + \phi_{c,z} [\sigma_{xy} \phi_{\ell,x} + \phi_{\ell,y} (\sigma_y + \sigma_z)] \} \\ - \sigma_{yz} (\phi_{\ell,y} \phi_{c,y} + \phi_{\ell,z} \phi_{c,z}) \quad A(11)$$

$$A_{33} = \frac{1}{2} \{ \phi_{\ell,x} [\sigma_{xy} \phi_{c,y} + \phi_{c,x} (\sigma_x - \sigma_z)] + \phi_{\ell,y} [\sigma_{xy} \phi_{c,x} + \phi_{c,y} (\sigma_y - \sigma_z)] \} \\ - \sigma_z \phi_{\ell,z} \phi_{c,z} \quad A(12)$$

APÊNDICE B

ENTRADA DE DADOS

B.1 - Descrição da Linguagem

A entrada de dados do programa computacional é feita através de uma linguagem orientada. Nesta linguagem a descrição de um problema é feita através das seguintes etapas:

- a) Dados de malha
- b) Dados estruturais
- c) Dados de carga
- d) Dados de análise

Os comandos podem ser do tipo geral, ou específicos de cada etapa. Os comandos gerais são:

TITULO

FIM

os quais devem iniciar e terminar, respectivamente, o processamento.

A malha, ou geometria dos elementos é definida na etapa DADOS DE MALHA. Os comandos específicos desta etapa são:

COORDENADAS

COORDENADAS MULTIPLAS

SIMETRIA NODAL

SEMELHANÇA NODAL

CONETIVIDADE

SEMELHANÇA DE CONETIVIDADE

TIPO DE ELEMENTOS

ORDEM DE NOS

Os quatro primeiros comandos são utilizados para especificar as coordenadas nodais, em forma individual ou aproveitando simetrias e semelhanças. Os três comandos seguintes são utilizados na especificação da conetividade dos elementos, que pode ser fornecida de forma individual ou aproveitando simetrias e semelhanças, como na especificação das coordenadas nodais. O comando TIPO DE ELEMENTOS especifica o tipo de elemento utilizado. O comando ORDEM DE NOS serve para reordenar internamente os nós de modo a obter-se uma menor largura de banda, pois o uso dos comandos de simetria e semelhança nodal ou de coordenadas múltiplas podem levar a uma má numeração dos nós.

No comando CONSTANTES são especificadas as constantes físicas como o módulo de Elasticidade, coeficiente de Poisson, módulo de elasticidade transversal, etc. No comando CONSTANTES PLÁSTICAS, são fornecidos os dados da análise elastoplástica da estrutura. Para a introdução destes dados existem os comandos:

CURVA

ENDURECIMENTO

LIMITES DE ESCOAMENTO

INCREMENTO DE CARGA

FAIXA DE PLASTIFICAÇÃO

NUMERO DE INTERVALOS

ELEMENTOS COMPRESSIVEIS

FATOR DE ENDURECIMENTO CINEMATICO

O comando CURVA caracteriza a relação tensão-deformação como sendo elastoplástico perfeito, composta de várias retas ou dada por uma equação. No comando ENDURECIMENTO se

especifica os valores do endurecimento do material para o caso em que a curva é constituída de duas ou mais retas. No comando `LIMITES DE ESCOAMENTO` são fornecidos os valores de tensão que correspondem aos pontos onde a curva tensão-deformação do material muda sua inclinação. A porcentagem da carga inicial que é utilizada nos incrementos elásticos, para grandes deformações plásticas, ou nos incrementos plásticos, no caso de pequenas deformações plásticas, é dada no primeiro valor do comando `INCREMENTO DE CARGA`, no segundo valor deste comando é dada a porcentagem do deslocamento ou carga de plastificação que é utilizada para calcular os incrementos na fase plástica no caso de grandes deformações plásticas.

No comando faixa de plastificação será dada a porcentagem da tensão de escoamento que determina a largura de uma faixa, paralela à superfície de escoamento, dentro da qual o ponto é considerado plástico, desde que sua tensão equivalente esteja dentro desta faixa.

Alguns elementos têm problemas quando considerados incompressíveis, para estes elementos deverá ser fornecido o comando `ELEMENTOS COMPRESSIVEIS`. Para análise com o endurecimento misto, isotropo-cinemático, deve-se usar o comando `FATOR DE ENDURECIMENTO CINEMATICO`. Se for usado o método de Newton-Raphson na solução, deverá ser utilizado o comando `NUMERO DE INTERVALOS`. Nas `PROPRIEDADES` são especificadas a espessura do elemento, a área da secção transversal, os momentos de inércia, etc. As condições de contorno do problema são fornecidas através do comando `RESTRICOES NODAIS`. Neste comando além das restrições nodais, pode-se especificar apoios com rotação ou apoios elásticos.

O carregamento é especificado na etapa `DADOS DE CARGA`. Nesta etapa estão disponíveis os seguintes comandos:

`CARREGAMENTO`
`CARGAS NODAIS`
`INCOGNITAS PRESCRITAS`
`DESCARGA`

Outros comandos previstos, embora ainda não implan-

B.2 - Comandos

TITULO _____ "titulo" _____ |

FIM _____ |

COORDENADAS _____ |

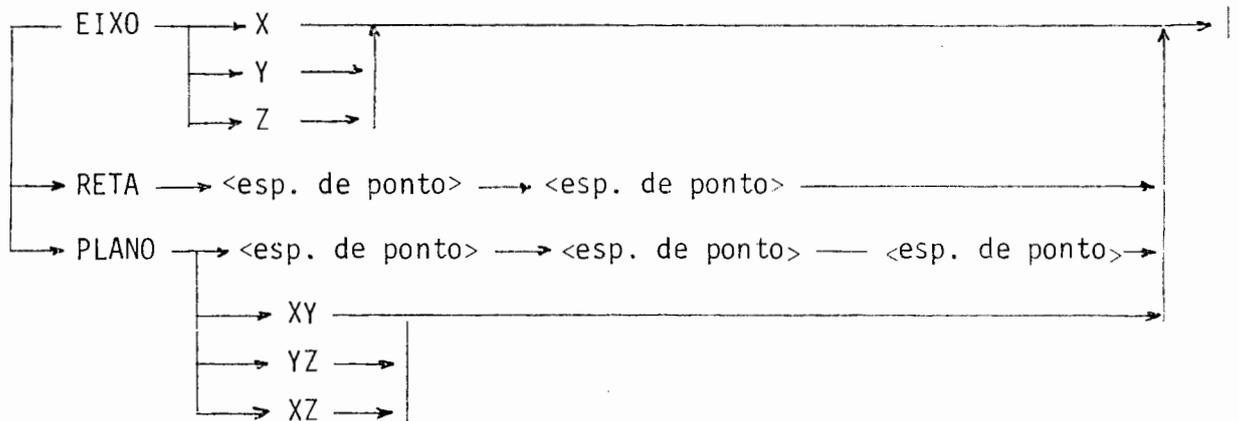
<nome dos n̄os> _____ |(X) r₁ (Y) r₂ (Z) r₃| _____ |

COORDENADAS MULTIPLAS _____ |

<lista de nomes de n̄os> _____ INICIO _____ |(X) r₁ (Y) r₂ (Z) r₃| _____
 _____ FIM _____ |(X) r₄ (Y) r₅ (Z) r₆| _____ |

SIMETRIA NODAL _____ |

<lista de n̄os> _____ COM _____ <lista de n̄os> _____ <esp. simetria> _____ |
 <esp. de simetria> ::= =



<esp. de ponto> ::= = NO _____ <nome do n̄o> _____ |
 PONTO _____ |(X) r₁ (Y) r₂ (Z) r₃| _____ |

SEMELHANÇA NODAL _____ |

<lista de n̄os> _____ COM _____ |(X) r₁ (Y) r₂ (Z) r₃| _____ |
 _____ IGUAL _____ <lista de nos> _____ |

CONETIVIDADE → |

CONETIVIDADE MULTIPLA → |

<lista de elementos> → NOS → <lista de nos> → PASSO → i_1 → |

SEMELHANÇA DE CONETIVIDADE → |

<lista de elementos> → MAIS → i_r — IGUAL — <lista de elementos> → |

TIPO DE ELEMENTO → |

<lista de elementos> → <tipo> → |

ORDEM → DE NOS → <lista de nōs> → |

CONSTANTES → |

<lista de elementos> → | E_{r_1} G_{r_2} POISSON r_3 | → |

→ | PESO r_4 ALFA r_5 BETA r_6 | → |

CONSTANTES PLASTICAS → |

A) CURVA → EP* PERFEITO → |

→ DUAS → RETAS → |

→ TRES →

→ QUATRO →

→ CINCO →

→ SEIS →

→ SETE →

→ OITO →

→ NOVE →

→ DEZ →

→ EQUAÇÃO →

B) <lista de elementos> → ENDURECIMENTO → $r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7 r_8 r_9 r_{10}$ → |

C) LIMITES DE ESCOAMENTO → |

<lista de elementos> → VALORES → $r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7 r_8 r_9 r_{10}$ → |

D) INCREMENTO DE CARGA → r_1 → r_2 → |

E) FAIXA DE PLASTIFICACAO → r_1 → |

F) NUMERO DE INTERVALOS → r_1 → |

G) ELEMENTOS COMPRESSIVEIS → |

H) FATOR DE ENDURECIMENTO CINEMATICO → r_1 → |

PROPRIEDADES → |

<lista de elementos> → ESPESSURA r_1 → |

→ $AXr_1 AYr_2 AZr_3 | Xr_4 | Yr_5 | Zr_6 EYr_7 EZr_8$ → |

→ SEÇÃO — <nome de seção> → <lista de dados> → |

RESTRICOES NODAIS → |

<lista de nōs> → TOTAL → |

→ INCOGNITAS → <nome de incōgnitas> → |

→ $| T1r_1 T2r_2 T3r_3 KXr_4 KYr_5 KZr_6 KMXr_7 KMYr_8 KMZr_9 |$ → |

CARREGAMENTO → <nome> → |

A) CARGAS NODAIS → |

<lista de nōs> → 1 → FORÇA $| Xr_1 Yr_2 Zr_3 |$ → |

→ 1 → MOMENTO $| Xr_1 Yr_2 Zr_3 |$ → |

B) INCOGNITAS PRESCRITAS → |

TITULO "QUADRADO"

DADOS DE MALHA

COORDENADAS

1.0. 0.; 2 1a 0.; 3 10. 10.; 4 0. 10.

CONETIVIDADE

1 1 2 3 4

TIPO DE ELEMENTO

TODOS EPQL

DADOS ESTRUTURAIIS

PROPRIEDADES

TODOS ESPESSURA 1.

CONSTANTES

TODOS E 10.05 E06 POISSON 0.325

CONSTANTES PLASTICAS

CURVA QUATRO RETAS

TODOS ENDURECIMENTO 3.06281 E06 9.7513658 E05 1.908858567 E05

LIMITES DE ESCOAMENTO

TODOS VALORES 8000. 12000. 18000. 35000.

FAIXA DE PLASTIFICACAO .01

RESTRICOES NODAIS

1 INCOGNITAS U V; 2 INCOGNITAS V

3 4 INCOGNITAS U V

DADOS DE CARGA

CARREGAMENTO 1

INCOGNITAS PRESCRITAS

3 4 INCOGNITA V - .1

DADOS DE ANALISE

ANALISE FISICA GDP ISOTROPO VON MISES INCREMENTAL

FIM

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ARGYRIS, J.H. & CHAN, A.S.L. Static and dynamic elasto-plastic analysis by the method of finite elements in space and time. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON FOUNDATIONS OF PLASTICITY, Warsaw, 1972. Papers. Leyden, Nordhoff, 1973. p.147-75 apud McMECKING, R.M. & RICE, J.R. Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic deformation. International Journal of Solids & Structures, Oxford, 11(5):601-16, 1976.
2. BREBBIA, C.A. & CONNOR, J.J. Fundamentals of finite element techniques for structural engineers. London, Butterworths, 1973.
3. BREBBIA, C.A. & FERRANTE, A.J. The finite element technique. Porto Alegre, Ed. da UFRGS, 1975.
4. CHEROBIM, J.C.R. Análise elastoplástica de estudos planos de tensões e deformações. Porto Alegre, UFRGS, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 1980. 94f. Diss. maestr. engenharia civil.
5. CREUS, G.J. Plasticidade e viscoelasticidade. Porto Alegre, UFRGS, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, s.d. 164p.
6. FARDSHISHEH, F. & ONAT, E.T. Representation of elastoplastic behavior by means of state variables. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON FOUNDATIONS OF PLASTICITY, Warsaw, 1972. Problems of plasticity. Leyden, Nordhoff International, 1974. p.89-115.
7. FELIPPA, C.A. & SHARIFI, P. Computer implementation of nonlinear finite element analysis. In: MEETING OF THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS, Detroit, Mich., Nov. 11-15, 1973. Numerical solution of nonlinear structural problems. New York, ASME, 1973. p.31 apud McMECKING, R.M. & RICE, J.R. Finite element formulations

for problems of large elastic-plastic deformation. International Journal of Solids & Structures, Oxford, 11(5):601-16, 1976.

8. FUNG, Y.C. Foundations of solid mechanics. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1965. 481p.
9. GROEHS, A.G. Uma linguagem orientada para análise de estruturas elastoplásticas. Porto Alegre, UFRGS, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 1981. Tese dout. em andamento.
10. GROEHS, A.G. & CREUS, G.J. Análise de estruturas elastoplásticas: detalhes computacionais. In: CONGRESSO LATINO AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 2, Curitiba, dez. 1980. Anais. Curitiba, Associação Latino Americana para Métodos Computacionais em Engenharia, 1980. v.1, p.131-48-
11. _____. Análise de grandes deformações plásticas. In: SIMPÓSIO SOBRE SISTEMAS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA CIVIL, 2. São Paulo, dez. 1978. Anais. São Paulo, CESP, 1978. v.1, p.85-103.
12. _____. Análise elastoplástica da carga limite de uma chaveta de gerador. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 5, Campinas, dez 1979. Anais. Universidade Federal de Campinas, 1979. p.D200-7.
13. _____. Análise elastoplástica de estado plano de tensões utilizando elementos finitos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 4, Florianópolis, dez. 1977. Anais. Florianópolis, ABCM, 1977. v.B, p.1479-90.
14. _____. Resolução de sistemas de equações em problemas de plasticidade. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 5, Campinas, dez. 1979. Anais. Universidade Estadual de Campinas, 1979. p.D042-051.

15. GUNASEKERA, J.S. & ALEXANDER, J.M. Matrix analysis of large deformation of an elastic-plastic axially symmetric continuum. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON FOUNDATIONS OF PLASTICITY, Warsaw, 1972. Papers. Leyden, Nordhoff, 1973. p.125-46 apud McMEEKING, R.M. & RICE, J.R. Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic deformation. International Journal of Solids & Structures, Oxford, 11(5):601-16, 1976.
16. HAYTHORNTHWAITE, R.M. Beams with full end fixity. Engineering, 110-2, 1957.
17. HIBBITT, H.D.; MARCAL, P.V. & RICE, J.R. A finite element formulation for problems of large strain and large displacement. International Journal of Solids & Structures, Oxford, 6:1069-86, 1970 apud McMEEKING, R.M. & RICE, J.R. Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation. International Journal of Solids & Structures, Oxford, 11(5):601-16, 1976.
18. HILL, R. The mathematical theory of plasticity. Oxford, Clarendon, 1950.
19. _____. Some basic principles in mechanics of solids without a natural time. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Oxford, 7(3):209-25, June 1959.
20. HILL, R. & RICE, J.R. Elastic potentials and the structure of inelastic constitutive laws. SIAM Journal of Applied Mathematics, 25, 448, 1973 apud McMEEKING, E.M. & RICE, J.R. Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic deformation. International Journal of Solids & Structures, Oxford, 11(5):601-16, 1976.
21. HUNSAKER Jr., B.; HAISLER, W.E.; STRICKLIN, J.A. On the use of two hardening rules of plasticity in incremental and pseudo force analysis. In: MEETING OF THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS, New York, Dec. 5-10,

1976. Constitutive equations in viscoplasticity: computational and engineering aspects. New York, ASME, 1976. p.139-70.
22. LEE, E.H. Elastic-plastic deformation at finite strains. Journal of Applied Mechanics, New York, 36(1):1-6, Mar. 1969.
23. LEE, E.H. & LIU, D.T. Finite-strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis. Journal of Applied Physics, New York, 38(1):19-27, Jan. 1967.
24. McMEEKING, R.M. An Eulerian finite element formulation for problems of large displacement gradients. Brown University, Division of Engineering, 1974. 52f. Tese M.Sc.
25. McMEEKING, R.M. & RICE, J.R. Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic deformation. International Journal of Solids & Structures, Oxford, 11(5):601-16, 1976.
26. MALVERN, L.E. Introduction to the mechanics of a continuous medium. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1969. 713p.
27. NAGTEGAAL, J.C. & DE JONG, J.E. Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Sussex, 17:15-41, 1981.
28. NAGTEGAAL, J.C.; PARKS, D.M.; RICE, J.R. On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Amsterdam, 4(2):153-77, Sept.1974.
29. NAYAK, G.C. & ZIENKIEWICZ, O.C. Elasto-plastic stress analysis; a generation for various constitutive relations including strain softening. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Chichester, 5(1):113-

-35, Sept.-Oct. 1972.

30. NEEDLEMAN, A. A numerical study of necking in circular bars. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Oxford, 20(2):111-27, May 1972 apud McMEEKING, R.M. & RICE, J.R. Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic deformation. International Journal of Solids & Structures, Oxford, 11(5):601-16, 1976.
31. OSIAS, J.R. Finite deformation of elasto-plastic solids; the example of necking in flat tensile bars. Pittsburgh, Carnegie-Mellon University, 1972. Tese Ph.D. apud McMEEKING, R.M. & RICE, J.R. Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic deformation. International Journal of Solids & Structures, Oxford, 11(5):601-16, 1976.
32. PRAGER, W. Introduction to mechanics of continua. Boston, Ginn & Co., 1961. 230p.
33. SHARIFI, P. & POPOV, E.P. Nonlinear finite element analysis of sandwich shells of revolution. AIAA Journal, New York, 11(5):715-22, May 1973 apud McMEEKING, R.M. & RICE, J.R. Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic deformation. International Journal of Solids & Structures, Oxford, 11(5):601-16, 1976.
34. YAGHMAI, S. & POPOV, E.P. Incremental analysis of large deflections of shells of revolution. International Journal of Solids & Structures, Oxford, 7:1375-93, 1971 apud McMEEKING, R.M. & RICE, J.R. Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic deformation. International Journal of Solids & Structures, Oxford, 11(5):601-16, 1976.
35. ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method. 3.ed. London, McGraw-Hill, 1977.