

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

ESTUDO DA CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES INTRODUZIDA POR DOIS
FUROS NÃO CENTRAIS EM DISCOS CÔNICOS SOB ROTAÇÃO USANDO
O MÉTODO FOTOELÁSTICO TRI-DIMENSIONAL

por

Anibal Knijnik

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de

MESTRE EM CIÊNCIAS

EM

ENGENHARIA CIVIL



Assinatura do Orientador da Tese

Porto Alegre, RS, Fevereiro de 19

"ESTUDO DA CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES INTRODUZIDA POR DOIS FUROS
NÃO CENTRAIS EM DISCOS CÔNICOS SOB ROTAÇÃO USANDO O
MÉTODO FOTOELÁSTICO TRI-DIMENSIONAL"

Tese defendida em 13 de fevereiro de 1973

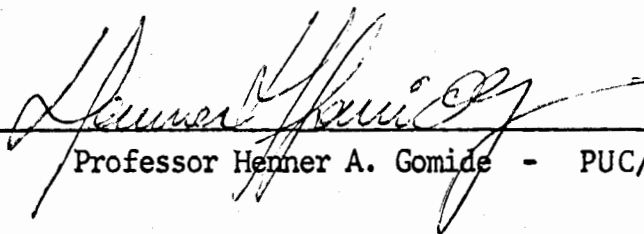
Banca Examinadora:



Professor Jan Cernosek - PUC/RJ



Professor Carlos Miguel M. Vilchez - ITA/SP



Professor Henner A. Gomide - PUC/RJ

Aos que me apoiaram afetivamente:

meus pais e
minha noiva

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul pela oportunidade de realização deste trabalho e pelo suporte financeiro.

Ao Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul pelo apoio econômico.

Ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul pelo incentivo constante à realização desta pesquisa.

À Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro pela possibilidade de utilização do Laboratório de Fotomecânica e da Oficina Mecânica.

Ao Professor Jan Cernosek pela orientação e assistência seguras e constantes ao longo deste trabalho.

Ao amigo Clovis de Albuquerque Rosa pela colaboração.

Aos funcionários da Oficina Mecânica do ITUC pela usinagem dos modelos estudados.

À Secretária do Departamento de Engenharia Mecânica/PUC-RJ, Nair Alves, pela execução dos trabalhos datilográficos.

NOTAÇÕES

A,B,C	- linhas de cálculo de tensões
D	- diametro interno do reforço central
E	- módulo de elasticidade
I	- índice de tensão
K	- valor da franja
N	- ordem de franja
P,Q	- pontos nominais
Q'	- figura de mérito
R	- tensor genérico
T	- temperatura
T _C	- temperatura critica
l	- coseno
p,q	- tensões principais secundárias
s	- distancia até a superficie externa da fatia
t	- espessura da fatia
r,θ,z	- sistema de coordenadas cilindricas
α,α _r ,α _θ ,α _z	- fator de concentração de tensões
β	- angulo de conicidade
δ,ε	- angulos nas fatias radiais
ν	- razão de Poisson
φ	- parametro da isoclinica
ρ	- peso específico
ω	- velocidade angular
1,2,3	- direções principais

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - tensões principais
 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ - tensões normais
 $\tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}$ - tensões cizalhantes

INDICE

<u>INTRODUÇÃO</u>	1
CAPITULO 1 - Obtenção do modelo a ser analisado	3
1.1 - Feitura dos perfis	4
1.2 - Dispositivo de rotação	7
1.3 - Geração dos sólidos	9
1.4 - Preparação do molde	11
1.5 - Material do modelo	13
1.6 - Preparação do material	14
1.7 - Fundição do modelo	15
1.8 - Tratamento térmico	16
1.8.1 - Primeira fase do tratamento térmico	16
1.8.2 - Segunda fase do tratamento térmico	18
1.9 - Preparação do material	19
1.10 - Usinagem do modelo	23
1.11 - Carregamento do modelo	26
CAPITULO 2 - Análise de preparação das tensões	31
2.1 - Corte em fatias	31
2.2 - Condições de contorno do problema	34
2.3 - Determinação das fatias a serem analisadas para a separação das tensões	37
2.3.1 - Pontos P e Q	39
2.3.2 - Linha A	41
2.3.3 - Linhas B e C	43
2.4 - Corte das fatias	47
2.5 - Preparação das fatias	48
2.6 - Medidas experimentais	48

CAPITULO 3 - Resultados experimentais	51
CAPITULO 4 - Discussão	60
CAPITULO 5 - Conclusão	63
<u>APÊNDICE A</u>	64
<u>APÊNDICE B</u>	65
<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	97

SUMÁRIO

O presente trabalho visa determinar os fatores de concentração de tensões ocasionados por dois furos não centrais em um disco de conicidade variável. Tanto o furo central como os furos não centrais possuem eixos paralelos ao eixo de revolução do disco.

O estudo de concentração de tensões é realizado para quatro angulos de conicidade diferentes, 0° , 10° , 20° e 45° , sendo mantida constante e igual a 0,10 a relação entre o diametro dos furos laterais e o diametro total do disco.

Foi utilizado o método de congelamento de tensões sendo posteriormente o modelo cortado em fatias para análise ao polariscópio.

Resina epoxi com uma mistura dos anidridos ftálico e maleico foi empregada como material fotoelástico para a construção dos modelos.

SUMARY

The scope of the presented work is to determine the concentration of stress caused by two non-central holes in the rotating conical discs. The conicity of the discs was varied. Four different angles of cone was considered - 0° , 10° , 20° , 45° , but the ratio of the diameters of disc and holes was kept constant.

The three dimensional photoelasticity was used for experimental determination of stress concentration factors. The models were manufactured from the epoxy resin cured by the mixture of phtalic and maleic anhydrides, the optical anisotropy was fixed in by the stress freezing procedure. The state of the stress was evaluated from the slices.

The results are presented in the form of graphs and tables, which permit to evaluate maximum stresses on the boundary of the holes.

INTRODUÇÃO

O problema do disco que rota é de ocorrência frequente em Engenharia, principalmente no campo da Engenharia Mecânica. Problemas especiais acontecem nas turbinas a gas e em alguns tipos de compressores, utilizados principalmente nos motores de aparelhos aéreos.

A superfície média de certos discos é feita cônica devido à necessidade de manter uma adequada distância axial entre as lâminas da turbina sem aumentar demasiadamente o comprimento dos reforços centrais e também para evitar grandes diferenças de pressão ao longo do disco.

A necessidade dos furos laterais (não centrais), faz-se sentir principalmente nas turbinas a gas, já que os rotores destas turbinas giram a altas velocidades necessitando serem os mais leves possíveis. Elevadas tensões ocorrem nos furos laterais, tornando bastante delicado o projeto de tais turbinas. Tais furos laterais são empregados para ligar entre si os discos componentes da turbina.

Grande parte dos trabalhos publicados sobre a concentração de tensões em furos de discos submetidos a rotação, diz respeito ao disco plano de espessura uniforme, ou ao disco simétrico de espessura variável com a superfície média plana. A maioria dos estudos realizados sobre o problema foram feitos usando o método fotoelástico de análise de tensões. Teverovsky (1) e Leist e Weber (2) observaram as franjas diretamente sobre o disco em rotação com o auxílio de fontes de luz estroboscópica. Todos os outros pesquisadores, empregaram o método de congelamento das tensões. O método numérico foi adotado por Green, Hooper e Hetherrington (3). Dentre os trabalhos publicados utilizando o método de congelamento de tensões podemos citar Heteny (4), Newton (5), Edmunds (6) e Barnhart, Hale

e Merriam (7) e, mais recentemente, os trabalhos de Fessler e Thorpe (8), (9). Nestes dois últimos trabalhos são estudadas as concentrações de tensões em discos planos com diversas configurações, de furos não centrais (8) e a influencia do reforço em furos não centrais sobre a concentração de tensões centrifugas em discos sob rotação(9).

O autor não tem conhecimento de trabalhos sobre a determinação da concentração de tensões em discos cônicos com furos não centrais, apesar destes discos serem encontrados com bastante frequencia em turbinas a gas , principalmente nas empregadas pela industria aeronáutica.

Dos trabalhos existentes sobre discos cônicos sem furos laterais podemos destacar o trabalho de Fessler e Thorpe (10), onde é estudada a distribuição das tensões superficiais em discos cônicos sob rotação. Para a investigação do problema da concentração de tensões em discos cônicos é indicado o uso do método fotoelástico tridimensional pela facilidade de obtenção das tensões, rapidez e economia, apesar de ser a razão de Poisson do material fotoelástico 0,5, valor maior do que o do aço.

1. OBTENÇÃO DO MODELO A SER ANALISADO

O modelo objeto de nossa investigação é um disco cônico de área da base constante e de diferentes alturas, função do ângulo de conicidade, o ângulo β na figura 1

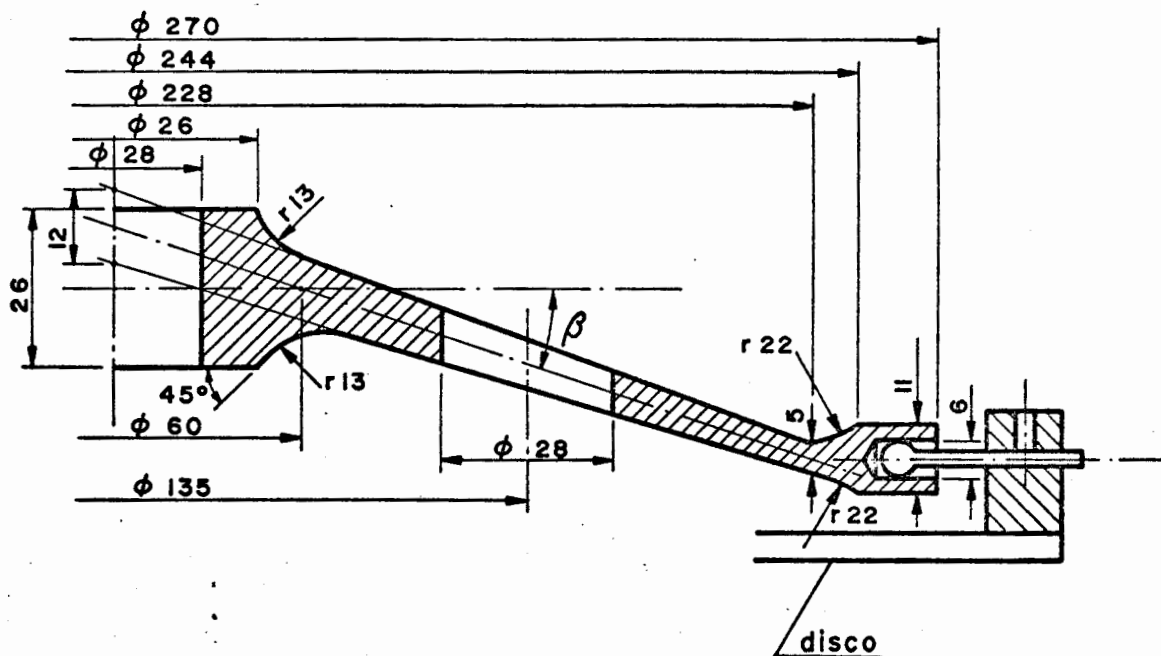


Fig.1 - Modelo estudado

Conforme encontram-se representados na figura 1, os diâmetros internos e externos do disco, assim como os diâmetros internos e externos do reforço central foram mantidos invariáveis, assumindo em todos os modelos o valor representado.

Foram executados 4 modelos, com o ângulo de inclinação entre a altura e a superfície média das paredes cônicas assumindo os valores 0° , 10° , 20° e 45° . Não foram estudados ângulos superiores a 45° , dada a pouca aplicação prática que tal inclinação experimental, não apresentando assim qualquer significação maior o seu estudo.

A confecção de cada modelo compreende diversas etapas, que serão em seguida comentadas em detalhes, descrevendo-se pormenorizadamente o método empregado para gerar o disco e as conclusões obtidas quanto ao emprego do método.

A essência do método, consiste na aplicação do conceito de que um sólido de revolução, como o próprio nome o diz, é gerado pela rotação de uma linha em torno de um eixo fixo. Ora, um disco pode ser encarado como sendo o volume contido entre dois sólidos de revolução com o eixo de rotação comum. Foi exatamente este o método usado para a execução dos modelos estudados. Construiu-se o sólido de revolução cuja geratriz é côngrua ao perfil externo do disco e a seguir subtraímos a ele um sólido de revolução côngruo ao gerado pelo perfil interno do disco em estudo. O sólido que resta destas operações é côngruo ao disco sob investigação. Analisaremos agora, passo a passo as operações necessárias à confecção dos modelos.

1.1 - FEITURA DOS PERFIS

A operação inicial deste processo, consiste em riscarmos, em uma folha de papel, em escala 1:1 e com a maior precisão possível, os perfis inferior e superior do disco a ser feito conforme aparece na figura 2. Feitos estes dois desenhos, tomamos uma chapa de ferro, de espessura aproximadamente 2 mm, e sobre ela colamos os desenhos dos perfis. Completada esta operação, transferimos o desenho para a chapa, marcando sobre a chapa pontos do perfil desenhado usando para isto, martelo e punção, mesmo sabendo que um segmento de reta fica perfeitamente determinado com a marcação de dois pontos, sua origem e extremidade, recomendamos que sejam transferidos para a placa no mínimo 3 pontos em cada linha reta do perfil,

para dar mais exatidão quando do traçado. Nas linhas curvas é indicado marcar o maior número possível de pontos, no mínimo um a cada 2 mm de comprimento do arco, tal medida facilita enormemente o traçado final, além de simplificar sensivelmente a operação de corte das chapas.

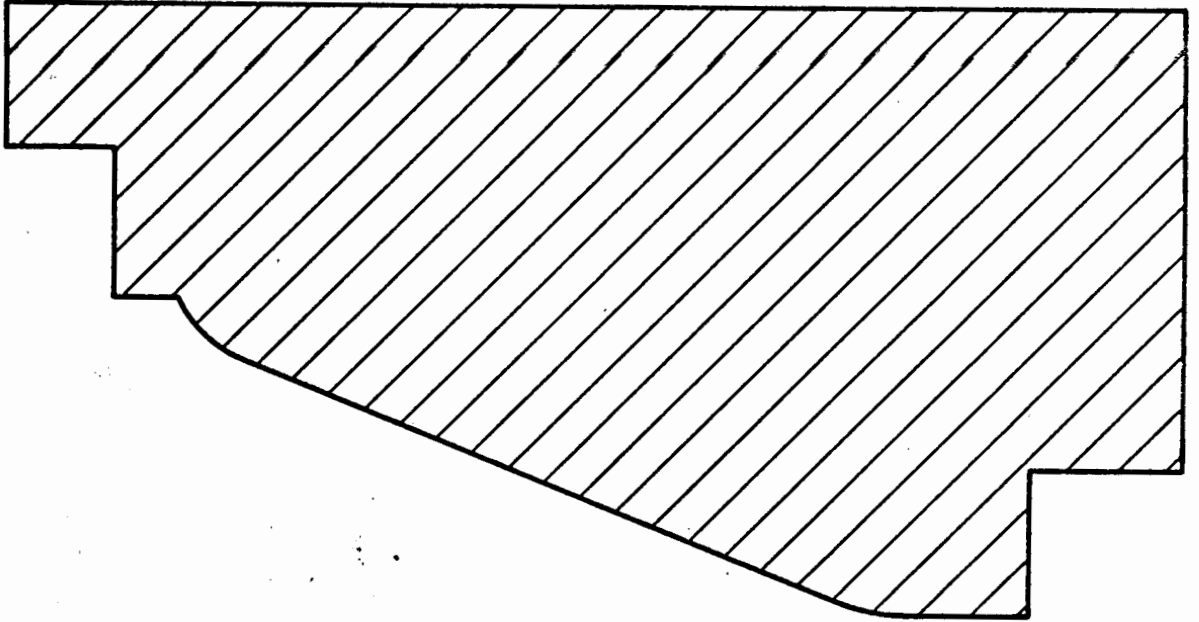


Fig.2 - Desenho do perfil superior em escala 1:1.

Concluindo a operação de marcação dos pontos do perfil sobre a chapa, reproduzimos exatamente o perfil na chapa pela simples união dos pontos adrede lançados. Para tornar mais expedita esta operação, no que tange às curvas é de muita valia marcar na chapa também as posições dos centros de curvatura.

Após riscadas as chapas, deveremos cortá-las para obtermos os perfis desejados. Um exemplo típico de um conjunto de perfis já cortados é mostrado na figura 3.

O recorte visto na extremidade interna do perfil superior serve como vertedor do material fotoelástico para o interior do molde, permitindo assim preencher-mos o molde a ser obtido. Deveriam também ter sido feitos canais de respiração, que livrassem o modelo sob processo de fundição de eventuais bolhas causadas pelo

ar aprisionado no interior do molde.

No nosso modelo tal providencia não foi executada devido ao grande diametro do vertedor, possibilitando o escape do ar aprisionado através do próprio orificio usado para preencher o molde com material fotoelástico.

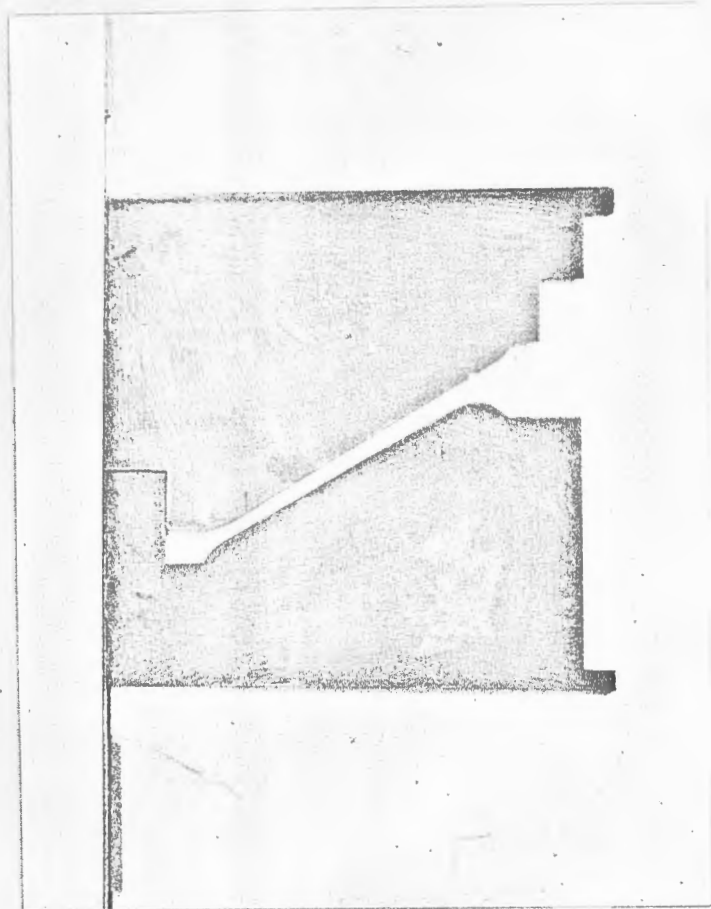


Fig.3 - Conjunto de perfis já recortados.

Vale a pena ressaltar a razão dos prolongamentos dos perfis além do necessário para gerar o disco propriamente dito. Tal prolongamento, tem por finalidade atuar como ajustador dos moldes na posição correta, ou seja ,

age como centralizador e mantenedor dos moldes na situação desejada. Recebe a denominação de "tope" e, conforme o nome já sugere, atua como elemento de contato e interferência entre as duas peças.

Após cortados os perfis, estes devem ser limados cuidadosamente, no sentido de se obter uma linha a mais perfeita possível. O mais perfeito que for executado este perfil, a mais perfeita superfície do modelo será obtida. Após obtida uma superfície de corte bastante livre de asperezas, chanframos o perfil com o auxílio de uma lima até atingir o estado representado na figura 4.

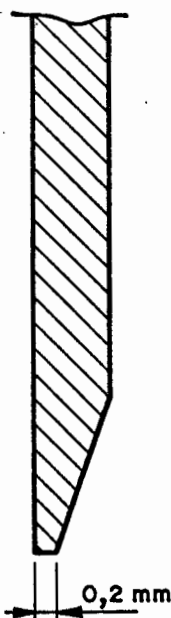


Fig.4 - Detalhe da superfície de corte dos perfis.

Esta é a última operação a executar para a confecção dos perfis. Nossa próxima missão é projetar um dispositivo mecânico que nos permita gerar o sólido de revolução possuindo-se a geratriz.

1.2 - DISPOSITIVO DE ROTAÇÃO

O dispositivo a ser projetado, deve satisfazer a uma série de requisitos a saber:

- elevada rigidez e indeslocabilidade - já que o eixo de rotação deve ser completamente indeslocável para não deformar o sólido obtido
- facilmente montável e desmontável - para tornar possíveis limpezas frequentes durante a operação de revolução do perfil
- altura regulável - para poder ser utilizado na formação dos mais variados sólidos de revolução.

A solução adotada que aparece na figura 5 atisfaz perfeitamente a todos estes requisitos e foi utilizada com bastante sucesso. O perfil é parafusado conforme se vê na figura 5 e, após o nivelamento da base superior é gerado o sólido.

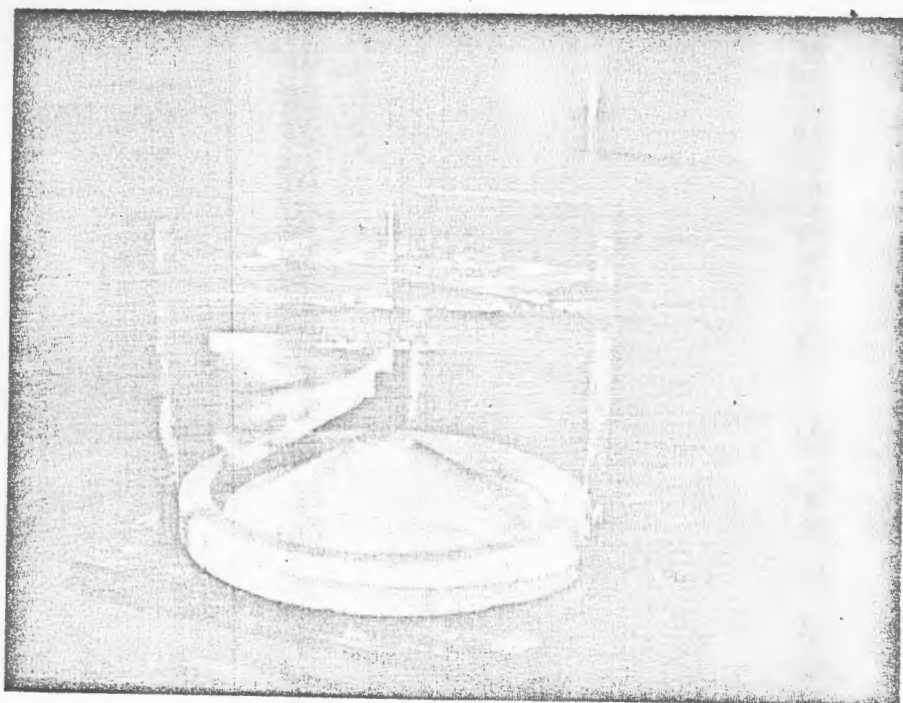


Fig.5 - Dispositivo de rotação gerando o sólido.

Alguns melhoramentos podem ser sugeridos, baseados na experiência adquirida, mormente no que diz respeito à facilidade de montagem e desmontagem. O sistema usado revelou-se bastante eficiente, mas pequenas dificuldades tendem a surgir quando o sistema após rápida limpeza é remontado. Torna-se bastante incômodo reencontrar a posição exata do conjunto, tarefa que seria bastante facilitada, se fosse executado um encaixe para receber a travessa móvel e se os pinos de "retenção" fossem executados com uma pequena conicidade ao invés de serem feitos cilíndricos.

1.3 - GERAÇÃO DOS SÓLIDOS

Após concluído o ajustamento do perfil e do dispositivo de rotação, tem início a execução do sólido propriamente dito. A operação é iniciada com a colocação de uma considerável massa de gesso sobre a base de madeira. O gesso deve estar o mais plástico possível - mantendo porém uma certa consistência. Logo em seguida à colocação do gesso roda-se o perfil, fazendo com que o mesmo, molde no gesso o sólido desejado. Os excessos de gesso aderem ao perfil e para sua remoção, temos que retirar o perfil do dispositivo elevando toda a travessa móvel. A seguir continua-se a colocar gesso até que o sólido fique completamente gerado. Devemos girar ainda algumas vezes o perfil, para retirar o excesso de gesso que surge, devido a troca de volume do material.

Concluídos os sólidos, eles foram secados em uma estufa a uma temperatura de aproximadamente 70°C, durante 24 horas. Nesta altura, possuímos um sólido de revolução com uma superfície côngrua à superfície externa do disco desejado e outro côngrua à superfície interna do disco. Podemos então, fazer os moldes que nos originarão o disco, que podem ser vistos na figura 6.

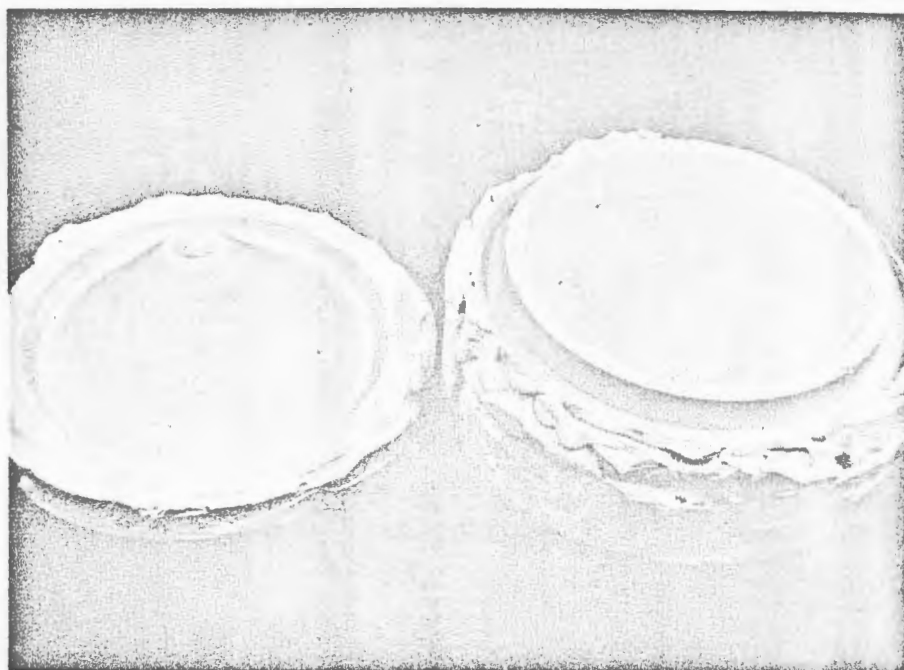


Fig.6 - Conjunto de sólidos moldados para gerar o disco de 45° .

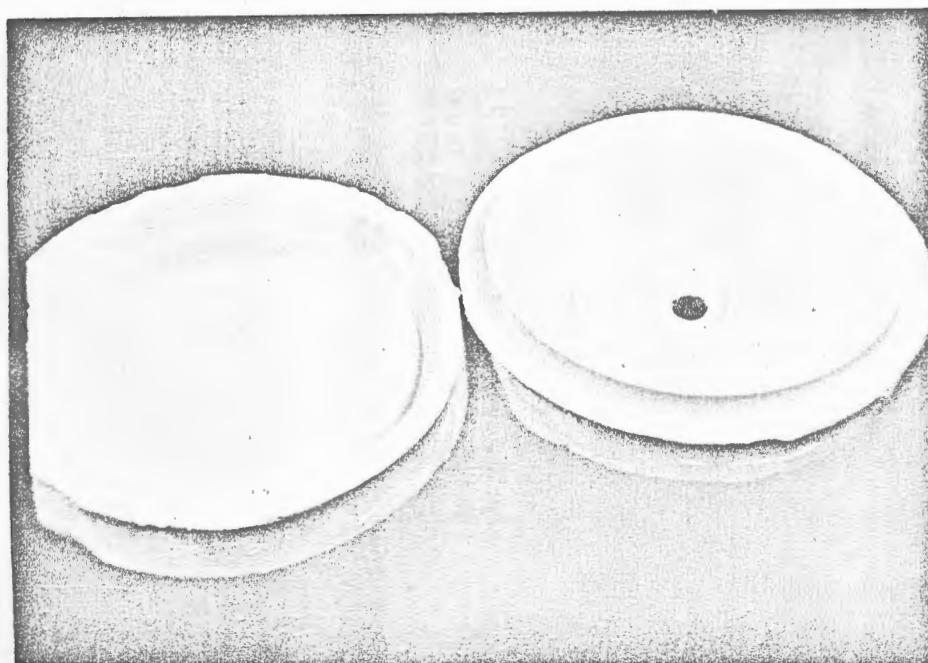


Fig.7 - Moldes para o modelo de 45° obtidos a partir dos sólidos mostrado na Fig.6.

1.4 - PREPARAÇÃO DO MOLDE

Para a obtenção do molde, recobrimos o sólido obtido com borracha para moldes SILLASTIC RTV B da Dow Corning Co., misturado com catalizador na proporção de 100 partes em peso de borracha para 10 partes em peso de catalizador, formando uma camada de 2 a 3 mm de espessura. Cuidado especial deve ser tomado com as quinas e partes mais elevadas, já que a borracha apresenta durante parte do processo de endurecimento, considerável fluidez, escoando para as partes mais baixas do molde. Um pouco antes do endurecimento total - que ocorre 2 1/2 horas após a mistura com o catalizador - deve-se cobrir o mais possível, a película de borracha com pedaços de tecido, sendo particularmente indicado o MORIM. É recomendável retirar a goma do tecido - mediante simples imersão em água e secagem - antes de aplicá-lo. Este tecido, destina-se a promover a aderência da borracha ao gesso, que será aplicado na película para aumentar a sua rigidez. Após aplicado o tecido, deixa-se a borracha vulcanizar por 24 horas à temperatura ambiente.

Nos modelos por nós realizados, o canal de fundição não ficou perfeitamente executado em gesso, devido a dificuldade em se moldar o dito canal por rotação e a baixa altura que o mesmo apresentava, não servindo como reservatório para suprir a natural contração do material fundido. Por isso, quando da feitura do molde raspavamos o canal de gesso e o substituíamos por um cilindro de aço, de maior altura que o canal original. Concluído o processo de vulcanização deve-se levantar a película de borracha, cuidadosamente para evitar rasgaduras e, antes de erguê-la completamente fazer uma marca que permita repô-la na posição original. Nesta fase, devemos soltar também o cilindro de metal que dará origem ao canal de fundição, removendo-o de sua posição, conforme aparece na figura 7.

Levadas a efeito estas operações, o próximo passo é a colocação do gesso que dará rigidez ao molde. Este gesso é colocado sobre a película cobrindo-a completamente com uma camada de 1,5 a 2 cm de espessura. O conjunto sólido-camada-gesso é então levado a estufa para secagem por 24 horas. Depois de seco o gesso com a borracha é retirado e estamos com as duas metades do molde prontas. Resta unirmos e estaremos prontos para a fundição. Antes de unirmos é necessário limpar bem a camada de borracha, removendo qualquer corpo estranho e eliminando possíveis imperfeições na camada. Devem ser eliminadas principalmente excrecências na borracha, pois elas significam vazios no modelo, de difícil conserto. Os vazios porventura existentes na borracha, podem ser ignorados, pois originarão excessos de material no modelo, que podem ser facilmente eliminados através de um simples lixamento.

Executada esta operação, estamos em condições de fechar o molde, colocando-se a parte superior - a que contém o canal de fundição - invertida e colocando borracha em todo o contorno do tope. Completada a colocação colocamos o molde inferior sobre o superior e pressionamos. A finalidade da colocação da borracha é vedar a união entre os moldes, evitando a fuga do material pela junção, e os moldes são colocados na posição invertida para evitar um possível deslizamento da borracha de vedação para dentro do molde. A partir do momento em que a borracha é colocada, deve-se tomar cuidado para que nenhum corpo estranho caia pelo canal de fundição para dentro do molde fechado. O conjunto assim obtido, é posto no forno para vulcanizar por mais 12 ou 24 horas.

Se fossemos fundir o modelo neste molde assim obtido, provavelmente obteríamos um modelo deformado, já que a pressão hidrostática do líquido utilizado deformaria - como deformou realmente - o molde, deformando por consequência o modelo. Para evitar este problema, o molde é

colocado numa caixa de madeira, imerso em areia seca sobre a qual são distribuídos pesos. Todo este conjunto é colocado no forno, por no mínimo 12 horas, para que a temperatura do conjunto fique uniforme e igual a do líquido fundido.

1.5 - MATERIAL DO MODELO

O material a ser utilizado para a execução do modelo, deve ser escolhido de modo a apresentar uma série de propriedades necessárias a sua posterior análise através do método fotoelástico, quais sejam:

- boa transparência
- ausência de manchas
- elevada figura de mérito
- fácil usinabilidade
- livre do efeito de tempo
- baixo efeito de borda, etc.

Em trabalhos recentes tem sido desenvolvidos materiais que atendem a estas especificações, todos eles basicamente resina epoxi, a qual são adicionados diferentes endurecedores. Dentre os materiais apresentados em (11), (12) e (13) foi utilizado o recomendado em (11), primeiro trabalho brasileiro sobre o tema. Neste trabalho, é colocada a proporção ótima dos endurecedores - anidrido ftálico e anidrido maleico - como variando em torno de 50 partes em peso para cada 100 partes em peso da resina epoxi-ARALDITE CY-205, da Ciba do Brasil S/A. Como primeiro material foi utilizada uma mistura com as seguintes proporções em peso:

100	partes de ARALDITE CY-205	(CY-205)
31	partes de anidrido maleico	(MA)
20	partes de anidrido ftálico	(PA)

O material em questão, apresentou alguns problemas conforme será visto mais adiante e o último modelo fundido foi executado com o material também recomendado por (14), na seguinte proporção em pêso:

- 100 partes de ARALDITE CY-205
- 25 partes de anidrido maleico
- 21 partes de anidrido ftálico

Este último material revelou-se bastante melhor do que o anterior, resultando um modelo sensivelmente superior aos previamente executados.

1.6 - PREPARAÇÃO DO MATERIAL

Ambos os materiais foram preparados conforme o exposto em (11) e (14). A mecânica da preparação é a mesma para ambas as misturas e pode ser descrita do seguinte modo:

- a) Após a pesagem dos componentes, o araldite é posto a aquecer a $180^{\circ} \pm 5^{\circ}\text{C}$ e o anidrido ftálico é posto numa estufa a 70°C (esta última operação é perfeitamente dispensável caso não se disponha de estufa).
- b) O araldite é conservado nesta temperatura por aproximadamente 30 minutos, para que sejam expulsas substâncias voláteis e umidade eventualmente presentes na resina. Estas substâncias estranhas, tendem a concentrar-se à medida que a quantidade de resina na lata vai diminuindo, tornando indispensável este tempo de depuração.
- c) O araldite é então resfriado - sob constante agitação - até a temperatura de 150°C , quando adicionamos o anidrido ftálico, em estado sólido.

- d) A mistura é intensamente agitada até que a temperatura atinja 80°C . Nesta altura, o anidrido ftálico já encontra-se completamente dissolvido. Quando a mistura atinge 90°C , o anidrido maleico é aquecido até que fique fundido e completamente transparente num fogareiro elétrico, esta operação não requer mais do que 5 minutos, aproximadamente o tempo que a mistura leva para resfriar de 90°C até 80°C .
- e) Quando a mistura atinge 80°C é adicionado o anidrido maleico - já em estado líquido - e a mistura é energeticamente agitada até que a temperatura atinge 70°C . É indicado que o repouso aconteça na mesma estufa que contém o molde pre-aquecido, para igualar as temperaturas do material e do molde. O repouso tem duas finalidades principais: homogeneizar a temperatura da mistura à mesma do molde e decantar as eventuais impurezas existentes na mistura. Caso as impurezas permaneçam em suspensão, faz-se necessária uma filtração da mistura para outro recipiente previamente aquecido à temperatura do forno.

1.7 - FUNDIÇÃO DO MODELO

Findo o repouso da mistura, pode-se levar a efeito a fundição propriamente dita do modelo. O material líquido é derramado vagarosamente através do canal de fundição, tomando-se o cuidado de não despejá-lo diretamente dentro do molde, mas sim fazendo o líquido escorrer através das paredes do canal de fundição para diminuir ao máximo a introdução de bolhas de ar no interior do molde. As eventuais bolhas que se formam no interior do molde devem ser retiradas mediante enérgicas sacudidelas e vibrações do molde. Devemos vibrar o molde por no mínimo 5 minutos após despejarmos o líquido, sendo recomendável também que este procedimento seja aplicado quando uma parte

da mistura já tiver sido despejada.

O canal de fundição e o reservatório - no caso em estudo o canal de fundição servia como reservatório - devem ser totalmente preenchidos, para suprir a retração da mistura, da ordem de 6% em volume. Concluída a fundição propriamente dita, o molde é recolocado no forno, recomendando-se que o mesmo seja feito com a mistura que restou no recipiente - para a eventual reposição de alguma porção da mistura que acidentalmente escorra fora do molde. Passados 15 minutos, podemos retirar o recipiente e limpá-lo rapidamente, colocando quando necessário o excedente numa fôrma cilíndrica pré-aquecida para nela ser executada a calibração do material.

1.8 - TRATAMENTO TÉRMICO

O tratamento térmico do modelo divide-se em duas etapas, a saber:

1.8.1 - PRIMEIRA FASE DO TRATAMENTO TÉRMICO

Esta fase inicia-se quando o molde é recolocado no forno a 70°C e desenvolve-se nas 24 horas posteriores, quando o modelo permanece a esta mesma temperatura. Passadas estas 24 horas, o modelo deve ser imediatamente retirado do molde para evitar possíveis fissuras. Um cuidado especial deve ser tomado na retirada do modelo para evitar rachaduras. Dada a forma como foram feitos os moldes, para a retirada dos discos foi necessário quebrar o gesso que enrijecia o molde e rasgar a borracha de silício, não possibilitando assim o reaproveitamento do molde de borracha para uma nova fundição do mesmo modelo.

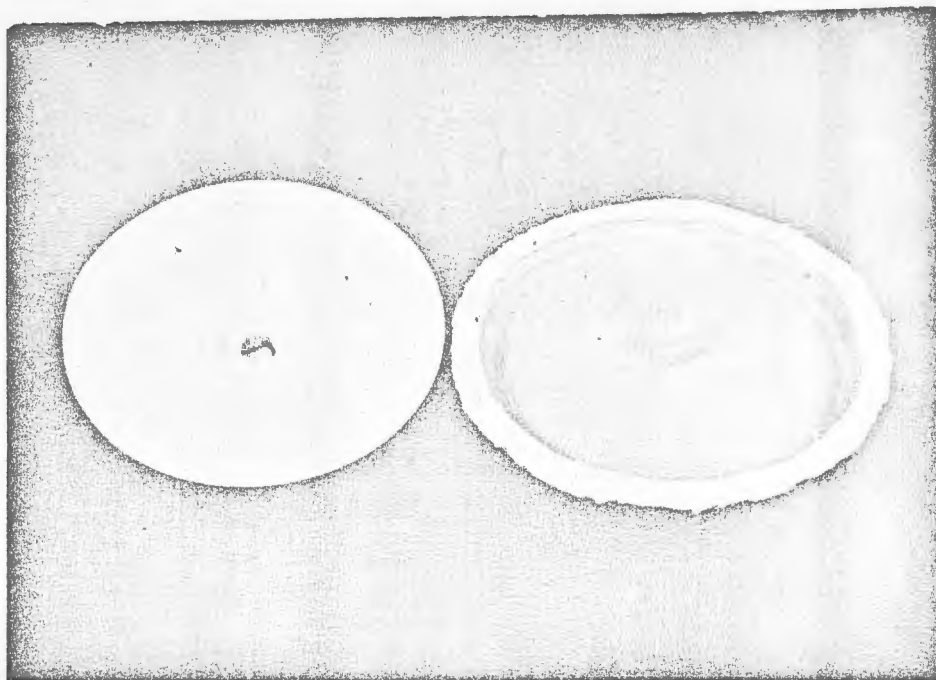


Fig.8 - Modelo de 10° quando do término da primeira fase do tratamento térmico.

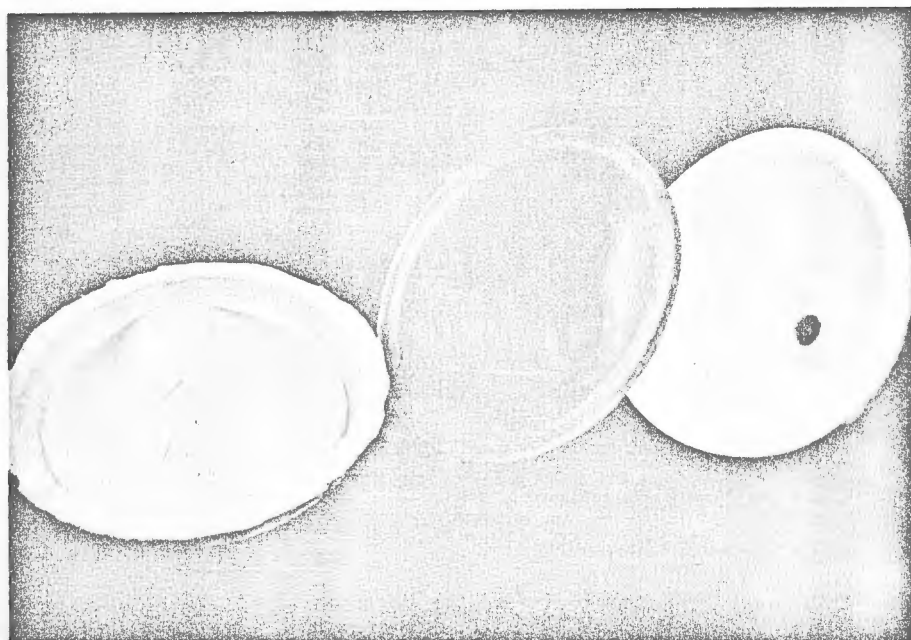


Fig.9 - Modelo de 45° com seu molde.

Quando da retirada do modelo este encontra-se num estado semi-polimerizado, de baixo módulo de elasticidade, não apresentando boas condições de usinabilidade. Apesar de não apresentar boas condições de usinabilidade, um dos modelos, o de 45° de inclinação, foi usinado nestas condições sem apresentar maiores problemas a não ser o facto de que a velocidade da ferramenta era mantida baixa a fim de evitar um aquecimento superior a 70°C , pois acima desta temperatura o material apresenta um comportamento que lembra bastante a borracha.

1.8.2 - SEGUNDA FASE DO TRATAMENTO TÉRMICO

É nesta fase que a polimerização total do material é levada a efeito, definindo completamente as suas propriedades físicas (módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, figura de mérito, etc.). Isto é conseguido através de:

- elevação de temperatura de 70°C até 160°C com um gradiente térmico de 5°C/h .
- manutenção de temperatura de 160°C por 48 horas.
- resfriamento até 100°C com um gradiente de $1,5^\circ\text{C/h}$.
- resfriamento até a temperatura ambiente com um gradiente de 5°C/h .

Terminado o tratamento térmico, o material está completamente polimerizado e portanto com suas propriedades físicas perfeitamente determinadas. Todos os modelos executados seguindo à risca as instruções acima e usando como material 100pp CY-205, 31pp MA e 20pp PA, apresentarão efeito de borda bastante pronunciado (0,5 mm de espessura e ordens de franja chegando até 3) e uma quantidade bastante grande de manchas. No último modelo feito, ($\beta = 45^\circ$) foi tentado um outro procedimento quando da se-

gunda parte do tratamento térmico, além de se estar usando o material 100pp CY-205, 25pp MA e 20pp PA. O novo procedimento apresentava algumas modificações. Logo em seguida ao término da primeira fase do tratamento térmico o modelo foi recoberto com uma camada de borracha de silicone. A segunda parte do tratamento térmico foi feita elevando-se a temperatura até 121°C com o gradiente térmico de 5°C/h e mantendo a temperatura por 24 horas. A seguir foi elevada, com o mesmo gradiente térmico, a temperatura até 135°C e mantida a nova temperatura por outras 24 horas, após o que a temperatura foi elevada até 149°C com o mesmo gradiente térmico e mantida por outras 24 horas. O resfriamento foi executado de maneira idêntica ao descrito anteriormente.

O resultado foi um modelo com bastante me nos manchas e praticamente nenhum efeito de borda. A influência positiva do capeamento com borracha pôde ser facilmente notada, pois onde a camada de borracha era bastante fina foi onde mais intensamente aconteceu o efeito de borda. Mas, mesmo neste caso de espessura e ordem de franja mais reduzida do que as encontradas nos outros modelos. As diversas fases do tratamento térmico encontram-se representadas sob forma de diagrama na figura 10.

1.9 - PROPRIEDADES DO MATERIAL

Para uma efetiva utilização do material na análise fotoelástica, torna-se indispensável o conhecimento das propriedades do material acima da temperatura crítica ou seja na temperatura em que o congelamento das tensões, é levado a efeito. Nesta temperatura - conforme veremos as propriedades físicas sofrem uma sensível variação, emprestando ao material em questão comportamento bastante diverso daquele apresentado à temperaturas abaixo da temperatura crítica.

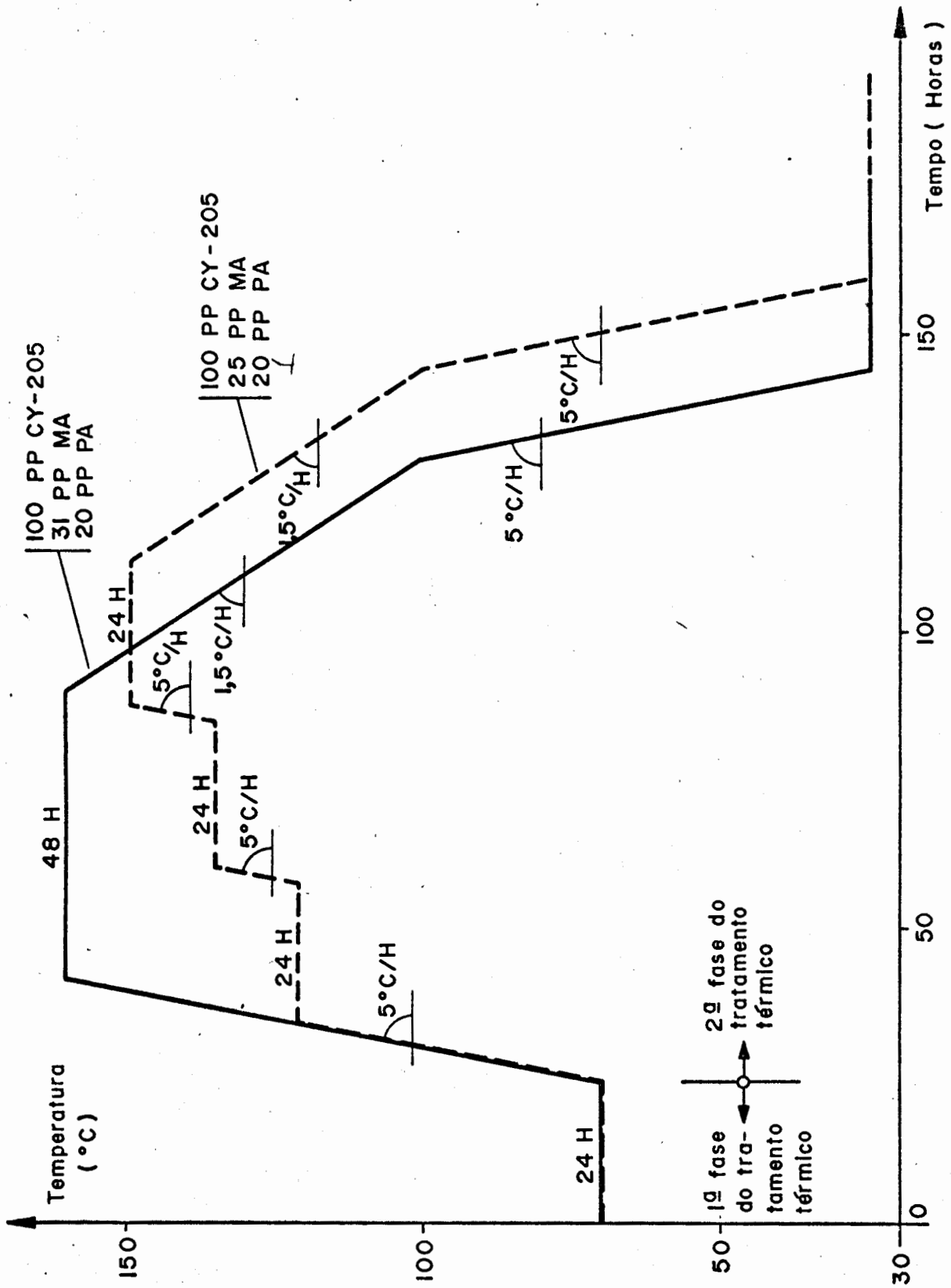


Fig.10 - Diagrama do tratamento térmico.

- VALOR DA FRANJA (K) - o valor da franja pode ser definido como a carga que provoca exatamente uma franja por unidade de comprimento segundo a direção de propagação da luz através do modelo. A variação do valor da franja em função da temperatura está representado na figura 11 (para ambos os materiais), segundo (11).

- TEMPERATURA CRITICA (T_c) - a temperatura critica é definida como sendo a intersecção das tangentes à curva do valor da franja como função da temperatura, e está também representada na figura 22 para ambos os materiais. Para o material CY-205, 25pp MA, 21pp PA foi também determinada analogamente a temperatura T_B . A faixa de temperatura que vai desde T_B até T_c é denominada zona de transição, pois nesta zona o valor da franja varia bruscamente.

- MÓDULO DE ELASTICIDADE (E) - é importante conhecermos o módulo de elasticidade do material para possibilitar uma avaliação das possíveis distorções durante o carregamento. O módulo de elasticidade à temperatura critica é de aproximadamente 1% do valor à temperatura ambiente.

- COEFICIENTE DE POISSON (ν) - o valor do coeficiente de Poisson à temperatura critica é $\nu = 0,50$.

- FIGURA DE MÉRITO - (Q') - é definida como sendo a razão entre o módulo de elasticidade do material e o seu valor da franja - ambos calculados à mesma temperatura.

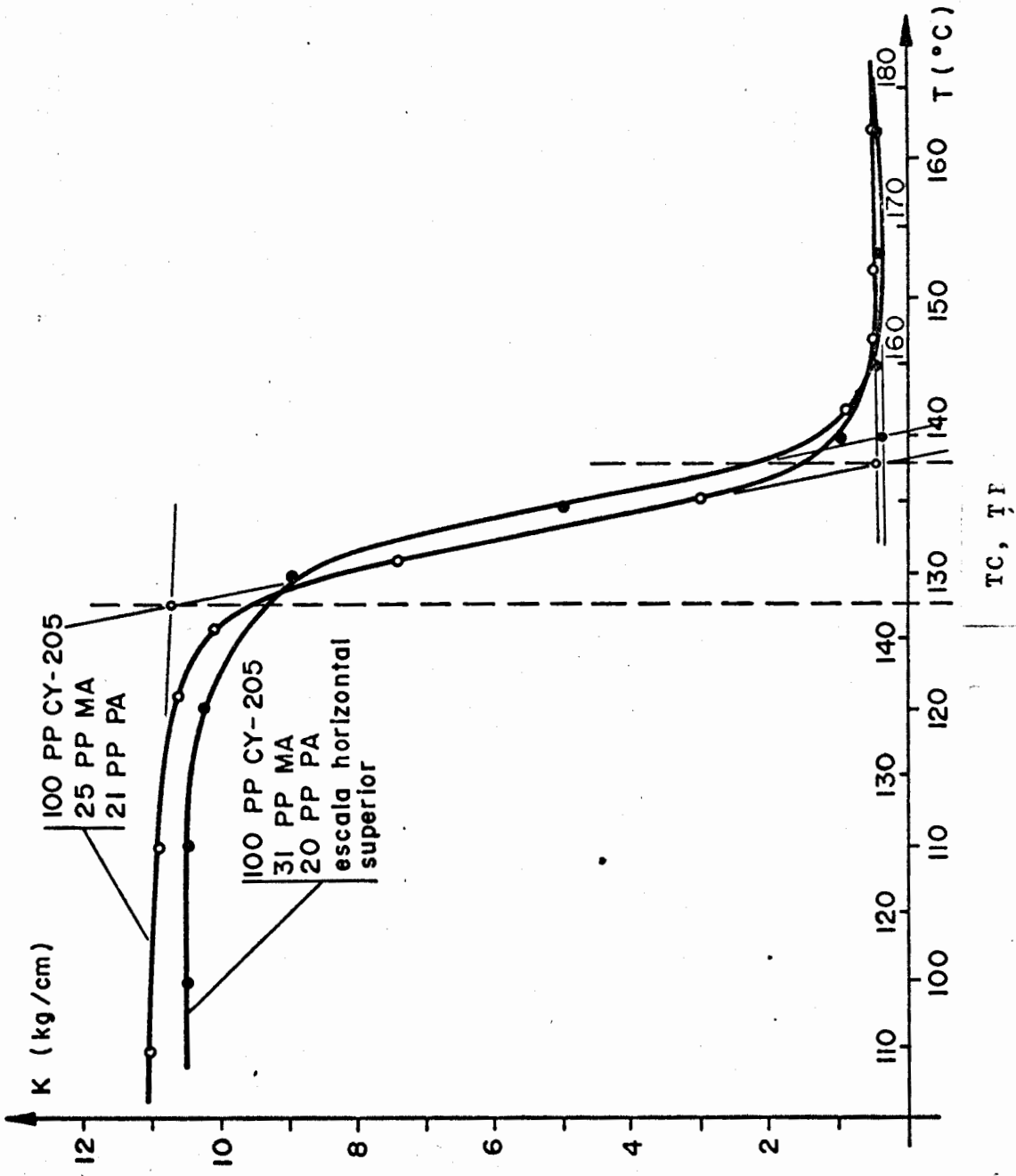


Fig.11 - Variação do valor de franja com a temperatura.

Na Tabela I encontram-se relacionadas algumas propriedades físicas fundamentais dos materiais utilizados segundo (11).

TABELA I

VALORES DAS CONSTANTES FISICAS PARA OS MATERIAIS UTILIZADOS À TEMPERATURA CRITICA

	100pp CY-205 31pp MA 20pp PA	100pp CY-205 25pp MA 21pp PA
Temperatura critica	155°C	138°C
K	0,485 kg/cm	0,450 kg/cm
E	590 kg/cm ²	450 kg/cm ²
$Q' = \frac{E}{K}$	1215	980
v	0,50	0,50

1.10 - USINAGEM DO MODELO

O modelo somente sofreu operações de usinagem para a execução dos furos laterais e do furo central. Para evitar quebras do material, no fim da operação de abertura do furo, devido à pouca resistencia oferecida pelo final do material à penetração da fresa ou broca, foi moldado - em ARALDITE CY-230 com o endurecedor HT-905, na proporção de 10 partes em peso de endurecedor para 100 partes em peso de ARALDITE - na parte inferior do modelo uma plaquinha que oferecesse resistencia às operações de usinagem, durante as operações na fresa. Visando evi-

tar que esta plaquinha ficasse aderida ao modelo, foi espalhada na superfície em contato com a plaquinha uma fina camada de borracha de silicone. O espalhamento foi feito com os dedos, e a camada não deve ser muito espessa para evitar uma separação maior entre a superfície da plaquinha e a do disco. Devido à reação exotérmica que caracteriza o endurecimento do ARALDITE, não se recomenda fundir espessuras maiores do que 1,5 cm, sob o risco de tornar a plaquinha irregular e com bolhas no seu interior. Quando se fizer necessário espessuras superiores, a fundição deve ser feita por etapas de até 1,5 cm cada uma. Colocada a plaquinha, preenchamos o espaço vazio até a borda do disco com gesso, para possibilitar o aperto das plaquinhas contra o disco para uma efetiva absorção dos esforços verticais oriundos do corte.

O furo central era feito antes dos furos laterais, já que assim ficava mais fácil para trabalhar com o disco no tórno. O modelo era primeiro furado com broca e depois torneado até as dimensões finais. Como a superfície inferior do disco era plana, não se fazia necessária a fundição de uma plaquinha, bastando a colocação e posterior aperto de um disco de ARALDITE, previamente existente no laboratório. A sequência de operações para a execução do furo central é a que se segue:

- 1) furo com broca de 1/8" com rotação de ~ 1200 rpm
- 2) furo com broca de 7 mm com rotação de ~ 1000 rpm
- 3) furo com broca de 15 mm com rotação de ~ 600 rpm
- 4) furo com broca de 22 mm com rotação de ~ 450 rpm
- 5) acabamento no tórno mecânico até o diâmetro final de 28 mm com uma rotação de ~ 540 rpm com um avanço de ~ 17 mm/min

Para fugir completamente aos problemas já citado de quebra do material durante a operação de fresamento dos furos laterais, adotou-se a ferramenta de corte

(aço BITZ) que se vê na figura 12 , que corta lateralmente, não gerando assim esforços verticais.

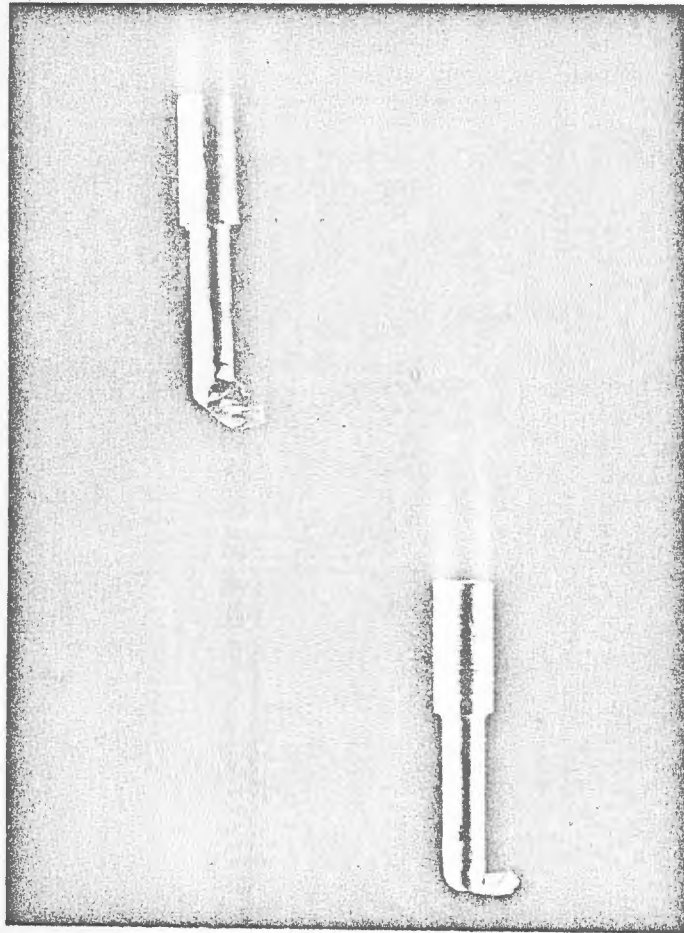


Fig.12 - Ferramenta usada para o acabamento final.

A sequencia de operações para a execução dos furos laterais é a que se segue, todas elas executados na fresa:

- 1) furo com broca de 1/8" com rotação de \sim 1200 rpm
- 2) furo com broca de 7 mm com rotação de \sim 1000 rpm
- 3) furo com broca de 15 mm com rotação de \sim 600 rpm
- 4) furo com broca de 22 mm com rotação de \sim 450 rpm

- 5) acabamento final até o diâmetro de 28 mm com uma rotação de 600 rpm e avanço manual

A última operação de usinagem consistia na execução dos quatro furinhos radiais onde seriam encaixados os pinos que fixam o modelo ao dispositivo de carregamento. Estes furos foram feitos com uma furadeira elétrica manual, usando-se uma broca de 6 mm, tendo-se o cuidado de executar os furos com o modelo já colocado no dispositivo de carregamento.

1.11 - CARREGAMENTO DO MODELO

O carregamento do modelo é iniciado a uma temperatura superior a de transição do material e prolonga-se durante o resfriamento pelo menos até que o limite inferior da zona de transição seja alcançado. No nosso caso o carregamento iniciava-se a 160°C e era encerrado a 120°C . Durante o carregamento, o modelo sofria um resfriamento de aproximadamente 11°C/hora .

Descrições mais detalhadas dos fundamentos do processo de carregamento - também denominado de congelamento das tensões - encontram-se presentes nas referências (15), (16) e (17). O dispositivo de carregamento encontra-se representado nas figuras 15 e 16. Originalmente o sistema rodava à própria velocidade angular do motor, 1640 rpm, ou seja: as polias do motor e do eixo eram idênticas. Nesta velocidade dois modelos sofreram ruptura. O primeiro deles, o de $\beta = 20^{\circ}$ rompeu porque volante de ferro do sistema de rotação encontrava-se fixado somente com 2 parafusos e, com o aumento da temperatura do interior do forno, estes parafusos soltaram-se e o volante tentou sair do eixo. O modelo resistiu ao movimento do volante e rompeu-se. Executado o no

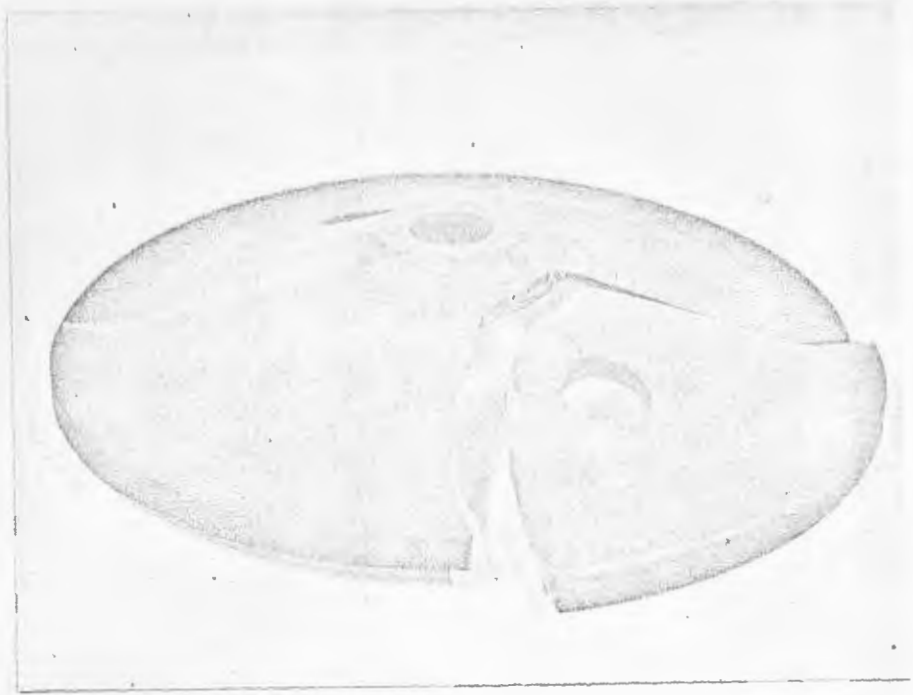


Fig.13 - Aspecto do modelo com $\beta = 20^\circ$ após sua ruptura quando do carregamento.

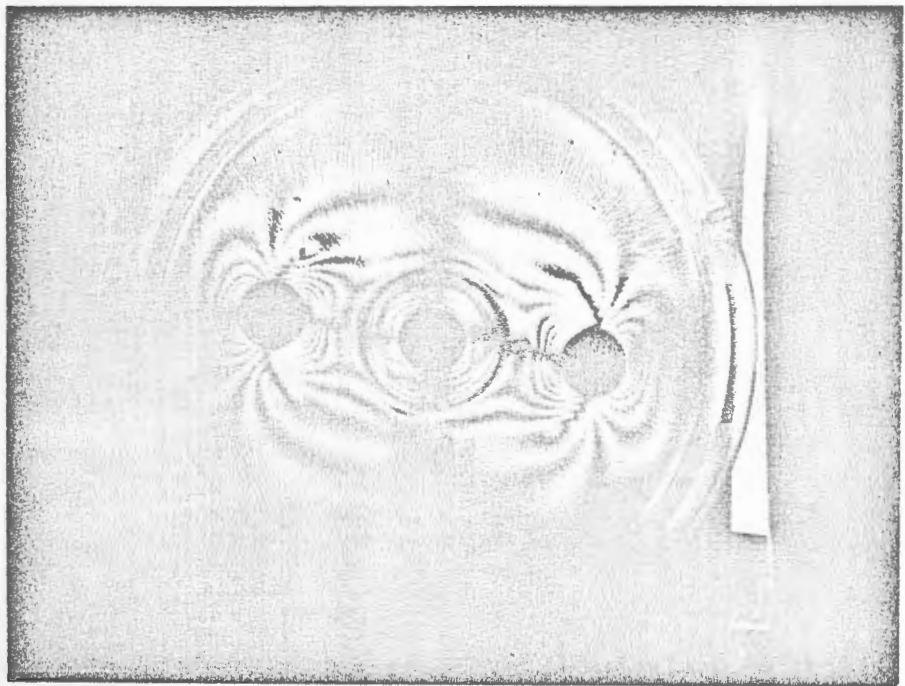


Fig.14 - Distribuição de franjas no modelo com $\beta = 10^\circ$.

vo sistema de fixação do volante ao eixo foi carregado o modelo de $\beta = 10^\circ$ sem maiores transtornos.

A seguir foi ensaiado o modelo de $\beta = 45^\circ$. Este modelo rompeu depois de rodar por mais de 5 minutos. A ruptura deu-se por excesso de carga sobre o material, tendo as trincas origem no diâmetro externo, ponto onde, segundo (10) são maiores as tensões superficiais no modelo. Neste ponto tornou-se necessário redimensionar o sistema de rotação, buscando reduzir a velocidade angular do conjunto. A polia do eixo foi executada de modo a reduzir a velocidade do volante para 1260 rpm, reduzindo as tensões no disco em cerca de 40%, já que as tensões são proporcionais ao quadrado da velocidade angular.

Feito este redimensionamento, não aconteceram outros casos de ruptura dos modelos durante o carregamento. O ciclo completo de carregamento era composto das seguintes etapas:

- 1) aquecimento do modelo até 160°C
- 2) resfriamento com um gradiente de 11°C/h simultâneo com o início da rotação do sistema
- 3) à temperatura de 120°C era interrompida a rotação do sistema
- 4) à 70°C o modelo era retirado do forno e guardado na estufa

Estas fases encontram-se representadas graficamente na figura 17. Dadas as pequenas espessuras do modelo, o aquecimento até 160°C pode ser executado sob qualquer gradiente térmico. O resfriamento pôde ser realizado com o gradiente citado pela mesma razão.

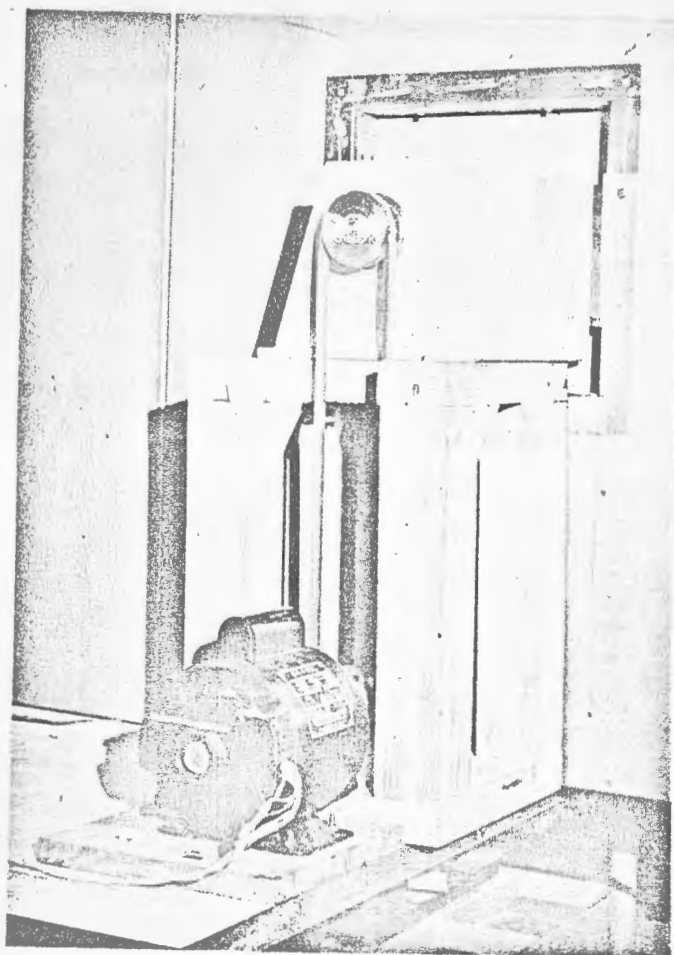


Fig.15 - Vista do dispositivo de carregamento
(parte externa ao forno).

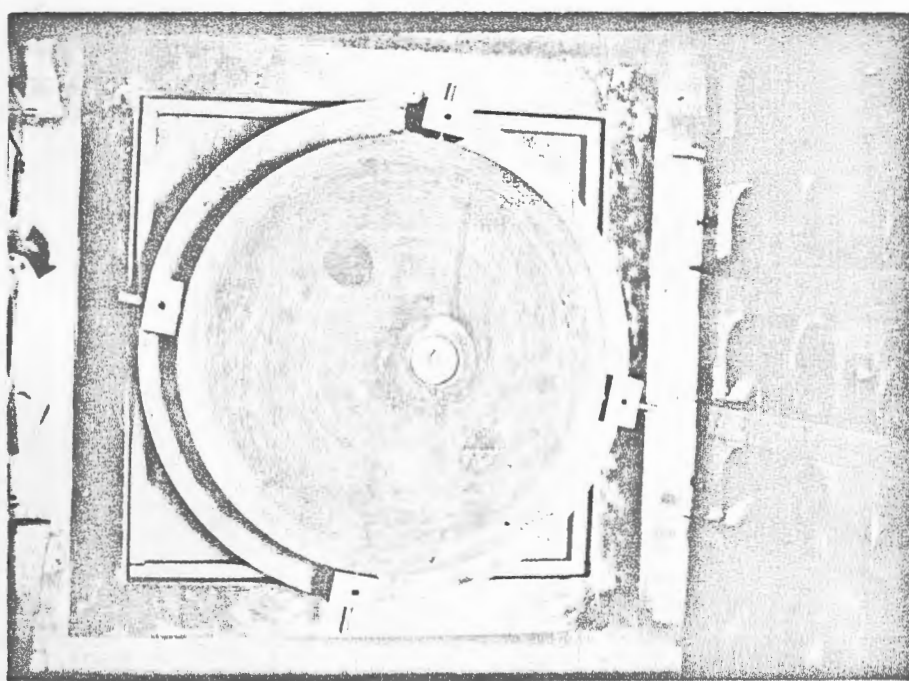


Fig.16 - Vista do dispositivo de carregamento
(parte interna ao forno).

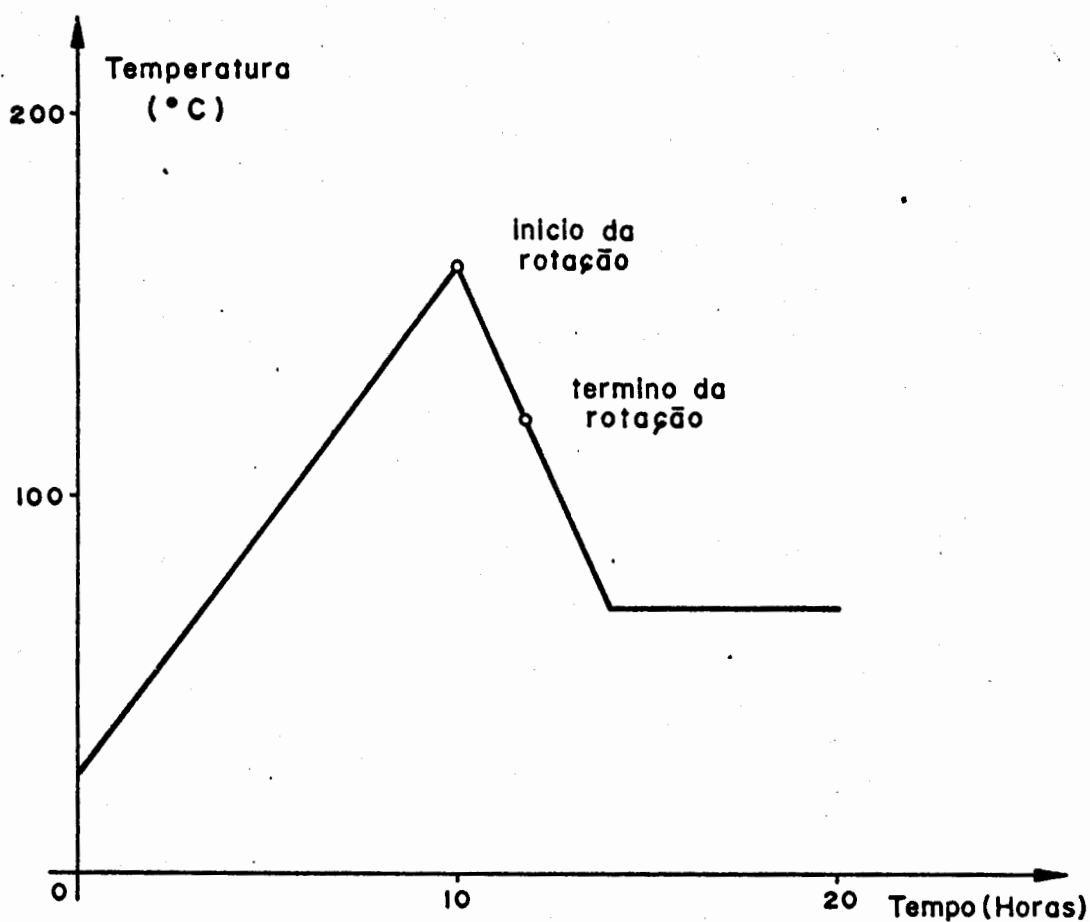


Fig.17 - Diagrama de variação de temperatura durante o carregamento.

Em modelo com grandes variações de espessura o gradiente - tanto de aquecimento como de resfriamento - devem ser menores, da ordem de $5^{\circ}\text{C}/\text{h}$ para o aquecimento e $1,5^{\circ}\text{C}/\text{h}$ até o limite inferior da zona de transição e $5^{\circ}\text{C}/\text{h}$ até a temperatura ambiente para o resfriamento.

Cabe ainda observar que as velocidades angulares citadas, foram obtidas com o auxílio de um estroboscópio e apresentavam ao longo do tempo oscilações muito pequenas em torno do valor citado.

2. ANÁLISE E SEPARAÇÃO DAS TENSÕES

2.1 - CORTE EM FATIAS

Para a aplicação do método fotoelástico tradicional faz-se necessário retirar fatias do modelo em estudo para a análise no polariscópio. Tais fatias são idealizadas como apresentando um estado homogêneo e uniforme de tensões em seu interior. Ou seja, consideramos a fatia como sendo um plano retirado do interior do modelo.

O polariscópio utilizado é o de projeção, mostrado na figura 18, modelo 051 da Photolastic Inc., USA. Este polariscópio nos permite a tomada para cada ponto desejado, dos dados fundamentais, o parâmetro da isoclinica (ϕ) e a ordem da franja (N). O parâmetro da isoclinica nos dá o ângulo de inclinação, em relação ao eixo de polarização do polarizador (ou analisador) das tensões principais (ou principais secundárias) no ponto considerado. Chame-se isoclinica o lugar geométrico dos pontos cujas tensões principais apresentam a mesma inclinação em relação a um determinado referencial.

Tensões principais secundárias são aquelas que atuam num plano onde não existe tensão mista, podendo assim existir tensões mistas nos planos normais ao seu plano de atuação - fato que as diferencia das tensões principais propriamente ditas. Chama-se ordem de franja à retardação relativa que a luz sofre ao atravessar o modelo (ou fatia). Esta grandeza é proporcional à diferença ($p - q$) entre as tensões principais (ou principais secundárias) no ponto de incidência. Num sistema de coordenadas ortogonais (r, θ, z), com a luz incidindo segundo z , temos no plano definido pelas direções r e θ .

$$(p - q) = \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2} \quad (1-A)$$

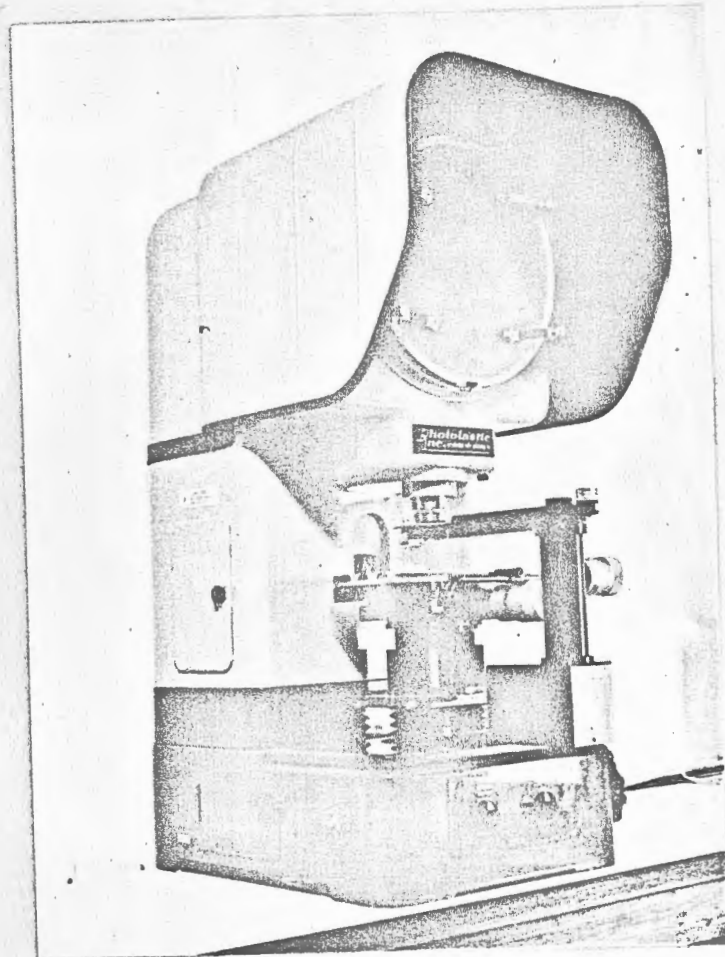


Fig.18 - Polariscópio utilizado

$$(p - q) = \frac{N \cdot K}{t} \quad (1-B)$$

onde

p e q tensões principais (ou principais secundárias) atuantes no ponto de incidência

N ordem de franja

K valor da franja do material

t caminho ótico no interior do modelo (no caso de uma fatia de faces paralelas com a luz incidindo normalmente às faces, t é a própria espessura da fatia)

De posse destas definições e das condições de contorno pode-se escolher quais as fatias a cortar para se obter as tensões desejadas. Nosso intuito é determinar a concentração de tensões ao longo das linhas axiais A, B e C (figura 19), tomando como tensão nominal aquela do ponto P da figura 20. Convencionaremos que a face côncava do disco será denominada de lado interno, sendo o lado externo aquele cuja superfície é convexa. A tensão nominal foi escolhida como sendo a do lado interno baseada no trabalho já referido de Fessler e Thorpe (10), no qual as maiores tensões ocorrem neste bordo, independentemente deste fato também foram calculadas as tensões em Q para um confronto dos resultados por nós obtidos com os previstos por (10). Antes de procedermos ao corte das fatias, é necessário fixarmos um sistema de coordenadas para o modelo em estudo. Este sistema também está referenciado na figura 19.

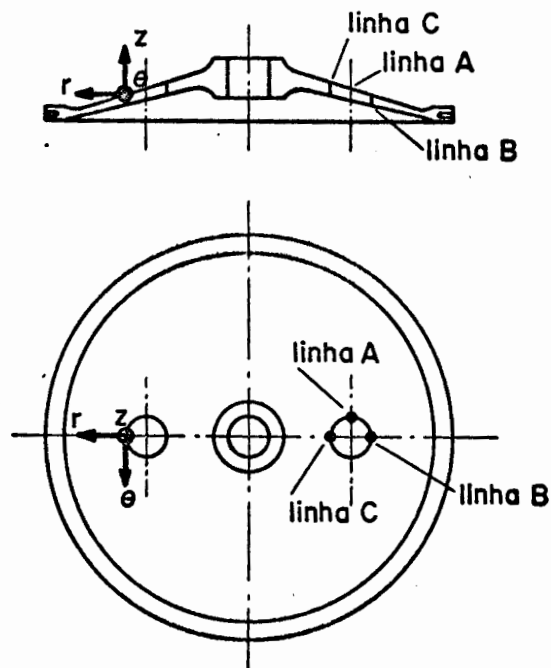


Fig.19 - Sistema de coordenadas adotado

Trata-se de um sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , onde r é a direção radial, perpendicular em qualquer ponto ao eixo do disco, θ tem em qualquer ponto do disco a direção tangencial ao meridiano que contém o ponto considerado e z é paralelo ao eixo do disco e aos eixos dos furos laterais.

2.2 - CONDIÇÕES DE CONTÔRNO DO PROBLEMA

As condições de contorno a serem utilizadas para a solução do problema, ou seja a serem usadas para a determinação das tensões ao longo das linhas A, B e C e no ponto P provêm das conhecidas condições de elasticidade que nos afirmam: ser nula e principal a tensão normal a uma superfície livre, e ser também nula a tensão cizalhante que é normal ao plano de simetria. Assim, ao longo da linha A temos que

$$\sigma_{\theta_A} = 0 \quad (2)$$

Ao longo das linhas B e C

$$\sigma_{r_B} = 0 \quad (3)$$

$$\sigma_{r_C} = 0 \quad (4)$$

e no ponto P (ver fig.20)

$$\sigma_{l_P} = 0 \quad (5)$$

onde σ_{1P} representa a tensão normal à superfície interna do disco em P. Para o ponto Q, analogamente, teremos

$$\sigma_{1Q} = 0 \quad (6)$$

onde σ_{1Q} representa a tensão normal à superfície externa do disco em Q, (ver fig.20)

A segunda condição de contorno será usada no cálculo das tensões ao longo das linhas B e C. As linhas B e C estão contidas num dos planos de simetria do disco. Já sabemos de (3) e (4) serem nulas as tensões radiais, com isto e sabendo que a tensão radial é também principal podemos concluir que

$$\tau_{r\theta_B} = \tau_{r\theta_C} = 0 \quad (7)$$

e

$$\tau_{rz_B} = \tau_{rz_C} = 0 \quad (8)$$

Como o plano que é definido pelas direções r e z é o plano de simetria, concluimos também que

$$\tau_{\theta z_B} = \tau_{\theta z_C} = 0 \quad (9)$$

E, como ao longo das linhas B e C as três tensões cizalhantes são nulas, σ_r, σ_θ e σ_z são tensões principais.

Para o cálculo das tensões nos pontos P e Q podemos usar o fato de que estes pontos estão situados num plano de simetria do disco. Tal fato, simplificará bastante o cálculo das tensões nos pontos considerados, pois reduz a 4 o número de incógnitas, pela 2a. condição de contorno adotado.

Para o estudo dos pontos P e Q, definiremos um sistema de coordenadas auxiliar, o sistema (1,2,3) da figura

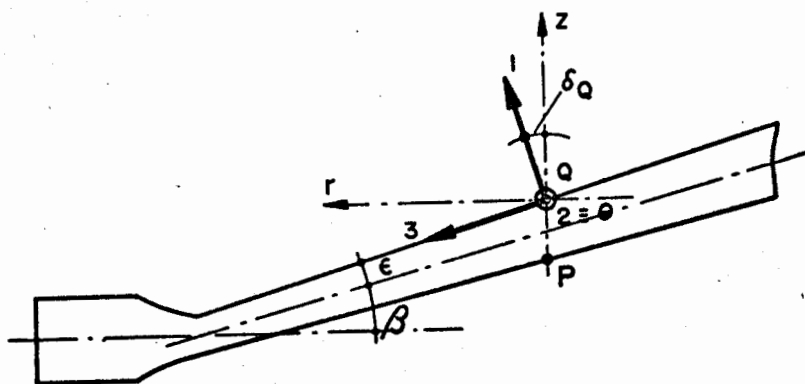


Fig.20 - Sistema auxiliar de coordenadas

A direção 1, conforme já definirmos, é a direção da normal à superfície, a direção 2 é paralela a direção θ e a direção 3 está contida na superfície. De (5), sabemos que $\sigma_1 = 0$, como a tensão normal ao plano de simetria do modelo - a tensão tangencial - é sempre principal, concluímos que σ_3 também será uma tensão principal. Para obtermos as tensões no sistema de coordenada original (r, θ, z) , basta fazermos uma transformação de coordenadas, de acordo com a equação

$$R'_{ij} = l_{im} l_{jn} R_{mn} \quad (10)$$

onde

R'_{ij} é o componente do tensor das tensões no novo sistema

R_{mn} é o componente do tensor das tensões no sistema original

l_{im} é o coseno do ângulo formado entre a direção i e a direção m

l_{jn} é o coseno do ângulo formado entre a direção j e a direção n

Todo o raciocínio feito para o ponto Q vale também por analogia, para o ponto P , bastando substituir o subscrito Q pelo subscrito P .

2.3 - DETERMINAÇÃO DAS FATIAS A SEREM ANALISADAS PARA A SEPARAÇÃO DAS TENSÕES

Após utilizadas as condições de contorno, restam ainda tensões incôgnitas que deverão ser obtidas através de fatias retiradas do modelo. Tais fatias deverão ser obtidas de molde a possibilitar uma separação das tensões envolvidas e para isto, devemos levar em conta que cada fatia fornece no máximo 2 informações, o parâmetro de isoclinica (ϕ) e a ordem de franja (N) e envolvendo 3 incôgnitas, as tensões principais (ou principais secundárias) atuantes no plano de fatia e a inclinação destas tensões em relação a um referencial (direção de polarização do polarizador). Portanto, para separarmos as tensões precisamos de uma informação adicional.

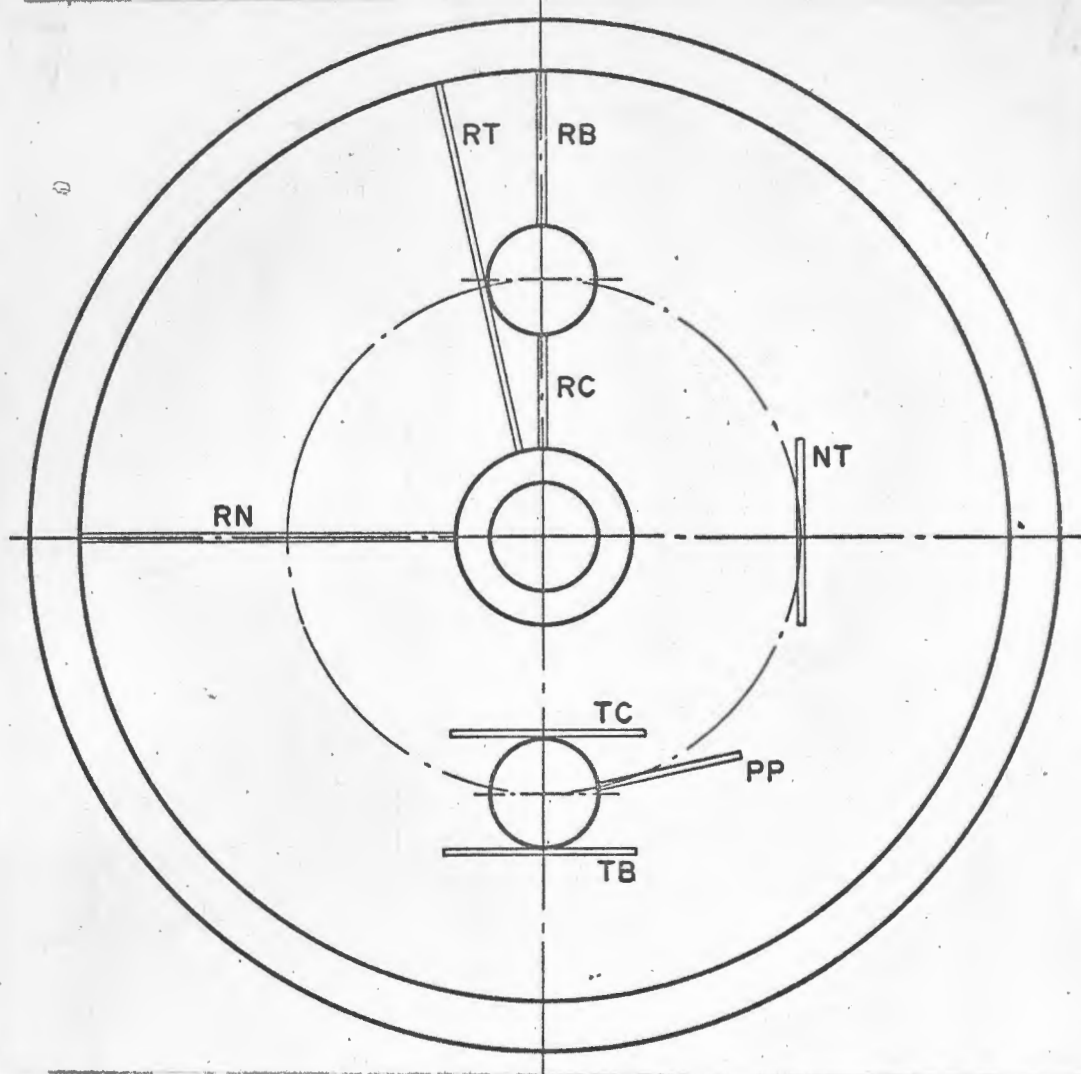


Fig. 21 - Esquema das fatias cortadas do modelo

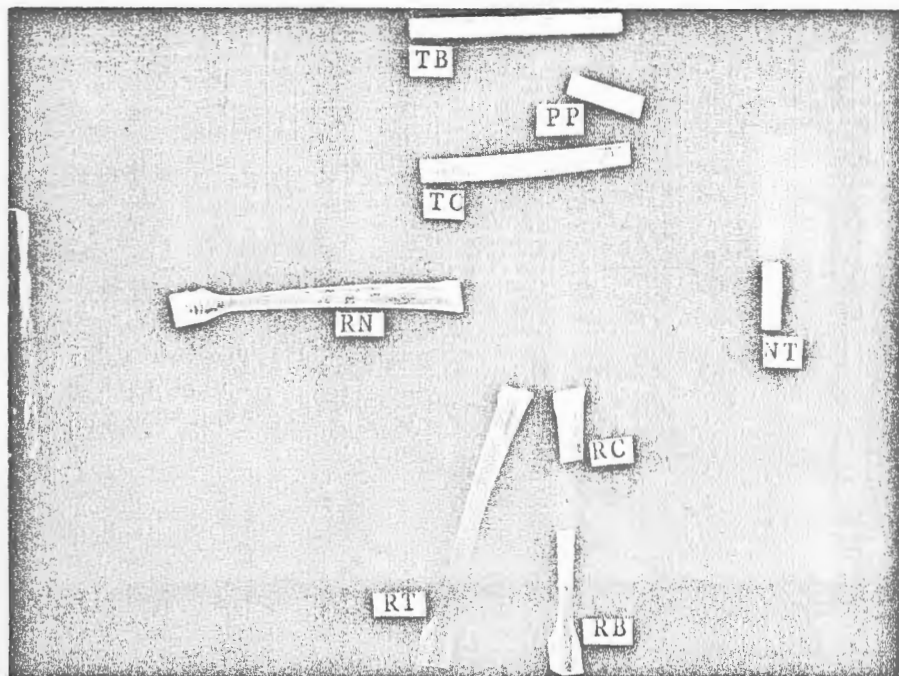


Fig. 22 - Fatias utilizadas para a análise de tensões

2.3.1 - PONTOS P E Q

Para a avaliação das tensões nos pontos P e Q foi inicialmente cortada a fatia RN (figura 21). Esta fatia pode ser vista na figura 20 quando vista desde a direção θ . Quando analisada no polariscópio, é possível obtermos o valor da ordem de franja no ponto Q. Usando (1) obtemos

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_Q = \frac{N_{\theta Q} \cdot K}{t_{\theta Q}} \quad (11)$$

onde

$N_{\theta Q}$ é a ordem de franja em Q medida com a luz incidindo na direção θ

$t_{\theta Q}$ é a espessura da fatia em Q medida segundo a direção θ

Como já sabemos, de (6) que $\sigma_{1Q} = 0$, obtemos diretamente σ_{3Q} . A informação adicional neste caso foi fornecida pela condição de contorno. Obtido σ_{3Q} , resta determinarmos σ_{2Q} para conhecermos completamente o estado de tensões em Q.

Para tanto, bastaria obtermos uma fatia paralela ao plano de que contém os eixos 1 e 2 da figura 20.

Mas, a fatia que satisfaz a esta condição para o ponto Q não satisfaz a condição para o ponto P, pois δ_Q não é igual a δ_P . Mas, fazendo a fatia normal à superfície média do disco podemos, incorrendo num pequeno erro, obter σ_2 tanto para o ponto P como para o ponto Q com uma só fatia. O erro cometido é inferior a 5%.

Logo, a fatia NT representada na figura 21 é cortada normal a superfície média do disco contendo a interseção entre a linha que une P a Q e a superfície média. Quando analisada no polariscópio com a luz incidindo segundo a direção 3, obtemos

$$(\sigma_1 - \sigma_2)Q = \frac{N_{3Q} \cdot K}{t_{3Q}} \quad (12)$$

onde

N_{3Q} é a ordem de franja medida no ponto Q com a luz incidindo segundo a direção 1

t_{3Q} é a espessura da fatia NT, no ponto Q, medida segundo a direção 1

Como já sabemos que $\sigma_{3Q} = 0$, obtemos de (11), diretamente o valor de σ_{2Q} . Conhecendo σ_{1Q} , σ_{2Q} e σ_{3Q} conhecemos completamente o estado de tensões no ponto Q, mas estamos interessados no valor de σ_{rQ} , $\sigma_{\theta Q}$ e σ_{zQ} .

Estes valores podem ser facilmente obtidos através da aplicação de (10).

$$\delta_Q = \beta + \epsilon \quad (13)$$

onde β e ϵ são os definidos na figura 20, podemos facilmente efetuar a transformação de coordenadas; obtendo-se

$$\sigma_{rQ} = \sigma_{1Q} \cos^2 \delta_Q \quad (14)$$

$$\sigma_{\theta Q} = \sigma_{2Q} \quad (15)$$

$$\sigma_{zQ} = \sigma_{1Q} \text{sen}^2 \delta_Q \quad (16)$$

Poderíamos ainda obter facilmente o valor de τ_{zr} , mas esta tensão não é objeto deste estudo.

Procedimento análogo foi feito para a avaliação das tensões no ponto P. Bastou trocar o subscrito Q pelo subscrito P, e adotar

$$\delta_P = \beta - \epsilon \quad (17)$$

2.3.2 - LINHA A

A primeira fatia cortada para a avaliação das tensões ao longo da linha A foi a fatia PP (figura 21), para aproveitar a condição de contorno ao longo desta linha, equação (2). Assim, conforme se vê na figura 23 onde aparece a fatia PP vista desde a direção r, a única tensão existente na linha A é σ_z .

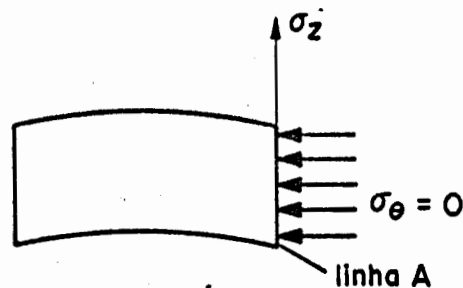


Fig.23 - Tensões medidas na fatia PP

Analisando a fatia no polariscópio, com a luz incidindo segundo a direção r , obtemos

$$(\sigma_z - \sigma_\theta)_A = \frac{N_{rA} \cdot K}{t_{rA}} \quad (18)$$

onde

N_{rA} é a ordem de franja no ponto considerado, de linha A, medida com a luz incidente segundo a direção r

t_{rA} é a espessura da fatia, no ponto considerado pertencente à linha A, medida segundo a direção r

Esta equação vale por qualquer ponto da linha A, pois $\sigma_\theta = 0$ em qualquer ponto da linha A. Como $\sigma_{\theta A} = 0$, σ_{zA} pode ser obtido diretamente da equação (18).

Obtido σ_{zA} podemos cortar a fatia RT (figura 21) que, observada desde a direção θ apresentará a diferença entre as tensões principais segundo a linha A (figura 24).

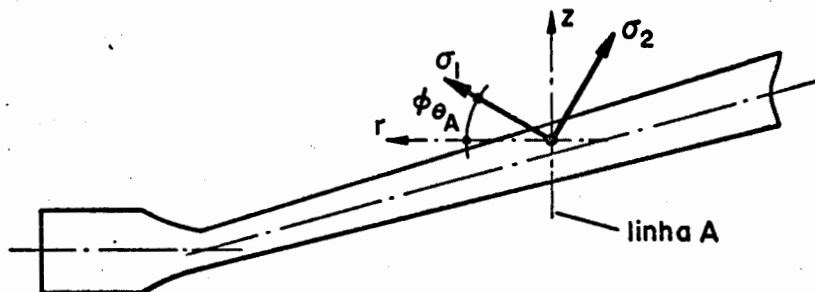


Fig.24 - Tensões medidas na fatia RT

Esta diferença pode ser transformada para as direções r e z através da formula

$$(\sigma_r - \sigma_z)_A = \frac{K.N_{\theta A} \cos 2\phi_{\theta A}}{t_{\theta A}} \quad (19)$$

onde

$N_{\theta A}$ é a ordem de franja ao longo da linha A medida com a luz incidindo segundo a direção θ

$\phi_{\theta A}$ é o parametro da isoclinica no ponto considerado com a luz incidindo segundo a direção θ

$t_{\theta A}$ é a espessura da fatia, medida segundo a direção θ

Usando o valor de σ_{zA} obtido em (18), poderemos obter facilmente σ_{rA} através da formula

$$\sigma_{rA} = \sigma_{zA} + \frac{K.N_{\theta A} \cos 2\phi_{\theta A}}{t_{\theta A}} \quad (20)$$

Esta equação, assim como todas as próximas que envolverem as linhas A, B e C são válidas, salvo ressalva em contrário, para qualquer ponto pertencente às citadas linhas valendo lembrar que para coerência das formulas, os valores de N deverão ser os obtidos para o mesmo ponto.

2.3.3 - LINHAS B E C

Fazendo um raciocinio análogo aos anterio-

res iniciaremos cortando a fatia que nos permita a utilização imediata das condições de contorno (3) e (4).

Assim, para a linha C a primeira fatia cortada foi a fatia RC (figura 21). Esta fatia apresenta o estado de tensões mostrado na figura 25.

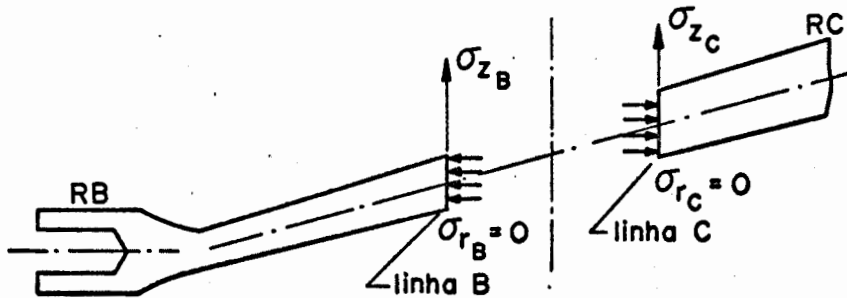


Fig.25 - Tensões medidas na fatia RB e RC

Analisando esta fatia no polariscópio com a luz incidindo segundo a direção θ , obteremos

$$(\sigma_z - \sigma_r)_C = \frac{N_{\theta C} \cdot K}{t_{\theta C}} \quad (21)$$

onde

$N_{\theta C}$ é a ordem de franja ao longo da linha C medida com a luz incidindo segundo a direção θ

$t_{\theta C}$ é a espessura da fatia ao longo da linha C medida segundo a direção θ

Como sabemos de (4) que $\sigma_{r_C} = 0$, pode-se obter diretamente de (21) o valor para σ_{z_C} .

A outra fatia cortada foi a fatia TC (figura 21) esta fatia contém as direções θ e z , portanto, já sabemos a priori que a ordem de franja nos dará diretamente o valor da diferença entre σ_θ e σ_z , já que ambas são tensões principais.

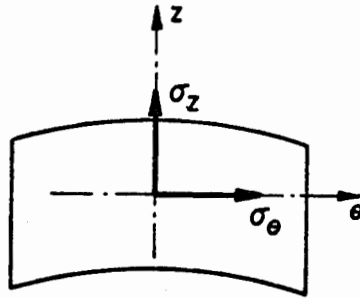


Fig.26 - Tensões medidas na fatia TC e TB

Analisando esta fatia no polariscópio com a luz incidindo segundo a direção r , obteremos

$$(\sigma_\theta - \sigma_z)_C = \frac{N_{r_C} \cdot K}{t_{r_C}} \quad (22)$$

onde

N_{r_C} é o valor de franja ao longo da linha C medido com a luz incidindo segundo a direção r

t_{r_C} é a espessura da fatia ao longo da linha C medida segundo a direção r

Substituindo em (22) o valor de σ_{z_C} obtido em (21), acharemos

$$\sigma_{\theta C} = \sigma_{z C} + \frac{N_{r C} \cdot K}{t_{r C}} \quad (23)$$

Para a linha B, utilizando um raciocínio e procedimento análogo, cortando as fatias RB e TB (figura 21) chegaremos às seguintes expressões para as tensões $\sigma_{\theta B}$ e $\sigma_{z B}$:

$$\sigma_{z B} = \frac{N_{\theta B} \cdot K}{t_{\theta B}} \quad (24)$$

onde

$N_{\theta B}$ é a ordem de franja ao longo da linha B medida com a luz incidindo segundo a direção θ

$t_{\theta B}$ é a espessura da fatia ao longo da linha B medida segundo a direção θ

e

$$\sigma_{\theta B} = \sigma_{z B} + \frac{N_{r B} \cdot K}{t_{r B}} \quad (25)$$

onde

$N_{r B}$ é a ordem de franja ao longo da linha B medida com a luz incidindo segundo a direção r

$t_{r B}$ é a espessura da fatia ao longo da linha B medida segundo a direção r

2.4 - CORTE DAS FATIAS

Conforme pode-se notar do item anterior, duas fatias são necessárias para separar as tensões ao longo de cada linha. É fisicamente impossível retirá-las da mesma linha. Para evitar um sub-fatiamento e aproveitando os planos de simetria do modelo, cada fatia foi retirada de um dos furos, conforme o esquema da figura . As operações de corte podem ser esquematizadas como segue:

- 1) marcação dos cortes sobre o modelo com um estilete de aço
- 2) corte com serra de fita separando o modelo em quatro pedaços de aproximadamente 5 cm de largura, cada um deles contendo ou um furo, ou um ponto nominal
- 3) fixação do modelo em gesso para que seja mantida a inclinação do disco e para facilitar a fixação do pedaço à serra para o corte
- 4) corte das fatias com uma serra de aço-carbono em máquina especialmente desenhada pelo Prof. Cernosek. A espessura média das fatias oscilou de 1,35 mm até 1,50 mm. O material desgasta tanto a serra que esta deve ser trocada ao fim de 8 operações de corte (4 fatias).
- 5) Após o corte propriamente dito, é aconselhável marcar com um estilete de aço, as fatias afim de evitar possíveis confusões.

Terminada a operação, a fatia deve voltar imediatamente à temperatura de 70°C, afim de se evitar o efeito do tempo (time effect).

2.5 - PREPARAÇÃO DAS FATIAS

Nem sempre a fatia cortada apresenta superfícies completamente lisas, sendo que a quantidade de imperfeições aumenta a medida que o número de cortes com a mesma serra cresce.

O acabamento final é então necessário, e é dado através de um lixamento com lixa fina até que se obtenha a superfície desejada. Deve-se tomar cuidado em manter o mais constante possível a espessura da fatia ao longo da linha de medição, lixando por igual em todas as direções. Algumas fatias típicas podem ser vistas na figura 22

2.6 - MEDIDAS EXPERIMENTAIS

As medições das grandezas fotoelásticas, ordem de franja N (isocromáticas) e inclinação das direções das tensões principais (ou principais secundárias) ϕ (isoclinicas) foram executadas no polariscópio citado no parágrafo anterior. Tal polariscópio apresenta uma magnificação de dez vezes, permitindo um acurado estudo das fatias. A precisão para a medida do parametro ϕ é de 1° e para a ordem de franja N é de 0,01.

Para a determinação das ordens de franja fracionárias, adotou-se o método de compensação de Tardy, que apresenta a vantagem de poder ser executado sem a necessidade da introdução de outra aparelhagem ao sistema do polariscópio. Este método encontra-se detalhadamente analisado nas referências (15) (16) e (17). Assim, das medidas de fatias no polariscópio podemos obter dois dos quatro componentes do nosso formulário, obtemos N e ϕ e ficam ainda para serem determinadas a espessura da fatia (t) e o valor da franja (K).

A espessura da fatia foi medida ao longo das linhas de leitura e como espessura média da fatia foi adotado o valor médio das leituras, já que a variação das espessuras era pequena em relação ao valor médio, aproximadamente da mesma ordem de grandeza que o erro cometido na determinação da ordem de franja.

De posse da espessura da fatia, a ordem de franja pode ser recalculada para uma espessura padrão, no nosso caso uma espessura de 1 mm, através da expressão

$$N = \frac{N_M}{t_M} \quad (26)$$

onde

N_M é a ordem de franja medida

t_M é a espessura no ponto medido

N é a ordem de franja recalculada

Assim, nas formulas anteriores podemos substituir a razão N_M/t_M por N , simplificando o cálculo das tensões. Resta apenas determinarmos o valor da franja (K). Usualmente a determinação deste parametro é feita através de um espécime de calibração, feito com o mesmo material e tratado termicamente junto com o modelo. No nosso caso, como estamos interessados em uma relação entre tensões em um mesmo modelo, o valor de franja não apresentará influencia alguma, já que é o mesmo para qualquer ponto do modelo. Assim, adotaremos em nosso estudo $K = 1$.

Devido ao efeito de borda era impraticável medirmos a ordem de franja na superficie do modelo, ou seja, nas bordas da fatia. Para suplantar este empecilho, foram feitas medições ao longo de uma linha, no interior da fatia e extrapolamos para os pontos extremos.

Os valores das ordens de franjas (corrigidas) medidas encontram-se plotados no apêndice B, assim como os parâmetros de isoclinica para as fatias RT dos modelos estudados. Destes gráficos constantes do apêndice B, foram retirados valores da ordem de franja corrigida e do parâmetro de isoclinica utilizados para o cálculo das concentrações de tensão.

Um exemplo típico do padrão de franjas para uma fatia RT, encontra-se apresentado na figura 27

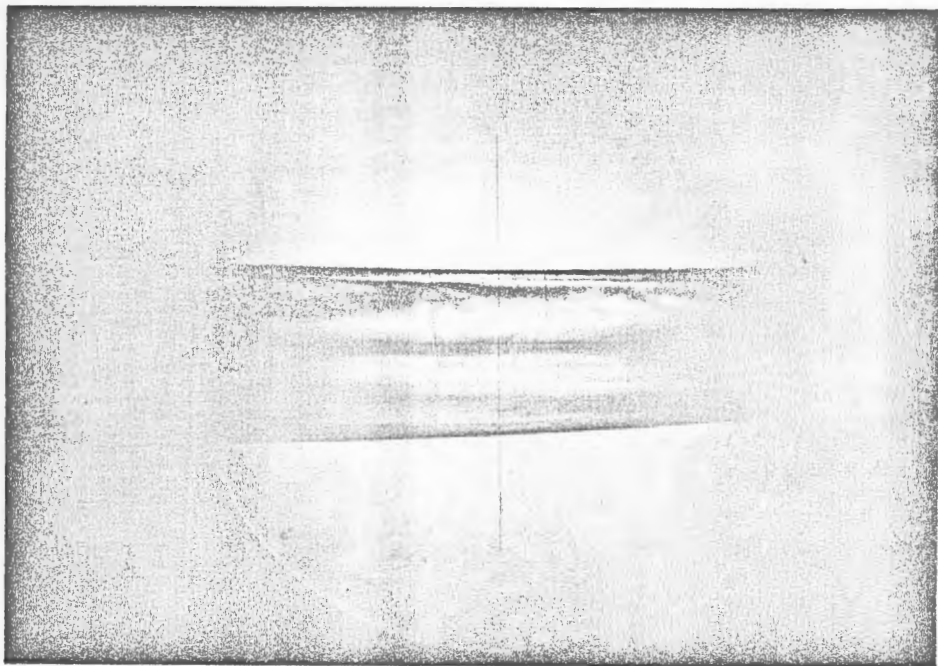


Fig.27 - Padrão de franjas típico da fatia RT

3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

O presente trabalho tem por objetivo determinar as concentrações de tensões introduzidas por furos em placas sob rotação. Conforme foi dito no último parágrafo, do capítulo 2, os resultados experimentais obtidos encontram-se indicados sob forma de gráficos, no apêndice B. Destes gráficos foram retirados os valores para o cálculo das concentrações de tensões.

Definiremos como FATOR DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES RADIAIS (α_r) ao longo de uma linha axial do modelo como sendo a relação entre a máxima tensão radial ao longo da linha estudada ($\sigma_{r \max}$) e a máxima tensão radial nominal ($\sigma_{r \text{nom}}$) - nos pontos P ou Q. Assim:

$$\alpha_r = \frac{\sigma_{r \max}}{\sigma_{r \text{nom}}} \quad (27)$$

Chamaremos FATOR DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES TANGENCIAIS (α_θ) ao longo de uma linha axial, como sendo a relação entre a máxima tensão tangencial ao longo da linha estudada ($\sigma_{\theta \max}$) e a máxima tensão tangencial nominal ($\sigma_{\theta \text{nom}}$) - nos pontos P ou Q. Ou seja

$$\alpha_\theta = \frac{\sigma_{\theta \max}}{\sigma_{\theta \text{nom}}} \quad (28)$$

FATOR DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES AXIAIS (α_z) ao longo de uma linha axial, será definido como sendo a relação entre a máxima tensão axial ao longo da linha estudada ($\sigma_{z \max}$) e a máxima tensão radial nominal ($\sigma_{r \text{nom}}$) - nos

pontos P ou Q. Logo

$$\alpha_z = \frac{\sigma_{z \max}}{\sigma_{r \text{ nom}}} \quad (29)$$

A razão para a definição destes fatores será explicada mais adiante, no capítulo 4. Os fatores de concentração de tensões, foram calculados ao longo das linhas axiais de interesse, as linhas A, B e C. As tensões encontradas nos pontos P e Q, encontram-se representadas na Tabela II.

TABELA II

TENSÕES NOS PONTOS P E Q

(Em franjas/mm)

PONTO		0°	10°	20°	45°
P	σ_r	0,59	0,60	0,70	0,14
	σ_θ	0,69	0,80	0,90	0,57
Q	σ_r	0,55	-0,24	-0,23	-0,06
	σ_θ	0,67	-0,08	-0,37	0,20

Ao longo das linhas B e C foram calculados os fatores de concentração tangenciais e axiais, e ao longo da linha A foram calculados os fatores de concentração de tensões radiais e axiais, já que ao longo das primeiras linhas a tensão radial é nula e ao longo da linha A, a tensão tangencial é também nula. Os valores encontrados estão apresentados numericamente na Tabela III.

Os resultados obtidos foram colocados sob forma de gráficos e encontram-se representados nas figuras 28 a 33, onde se podem ver os fatores de concentração de tensões plotados como função do ângulo de conicidade β .

TABELA III

FATORES DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES

LINHA		0°	10°	20°	45°
A	α_r	1,76	1,78	1,62	1,51
	α_z	0,73	0,29	0,43	1,00
B	α_θ	1,68	1,74	2,31	4,07
	α_z	0,68	0,34	0,48	1,50
C	α_0	1,60	1,69	1,62	2,06
	α_z	0,61	0,31	0,39	1,29

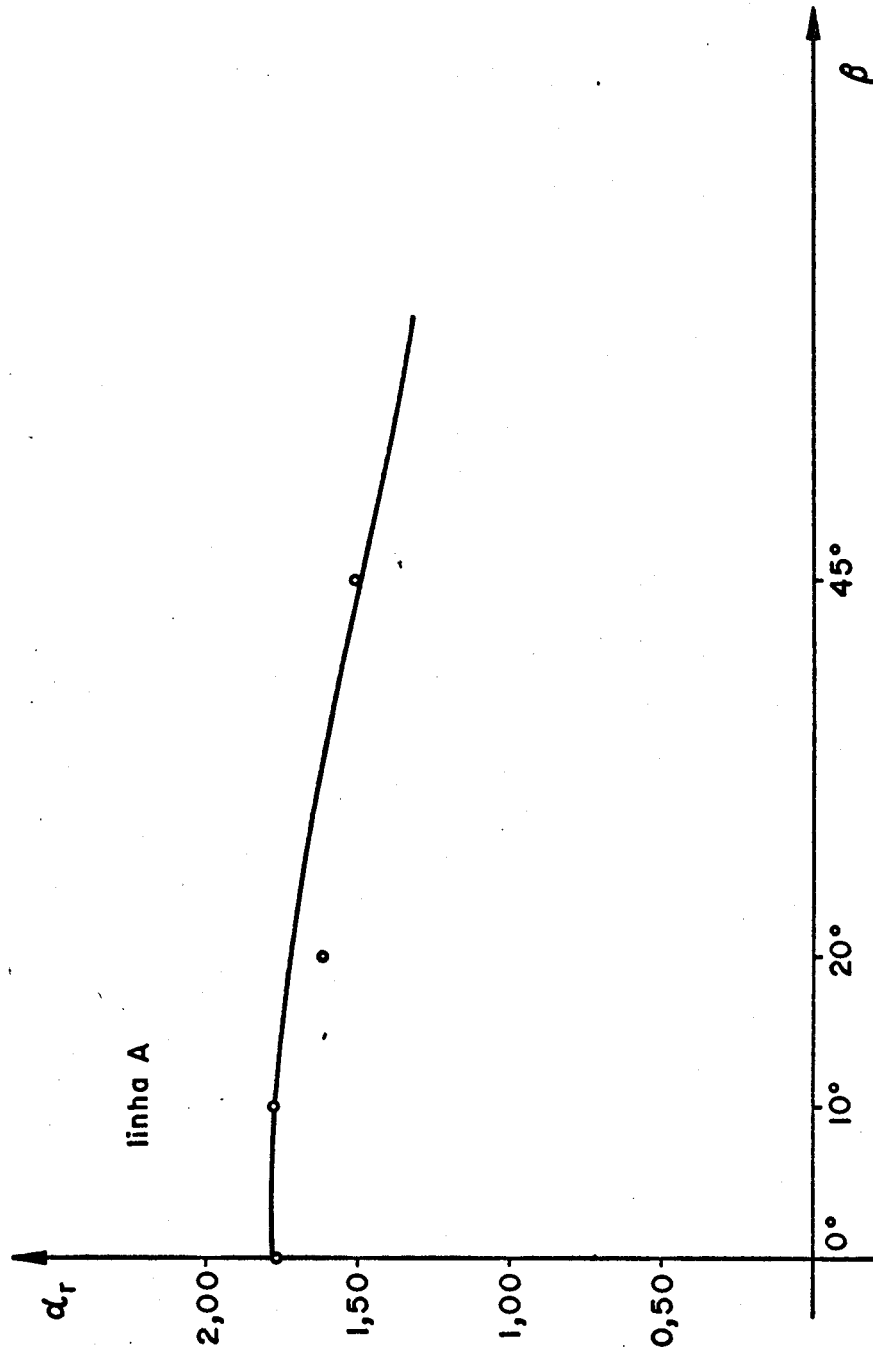


Fig.28 - Concentração de tensões radiais ao longo da linha A.

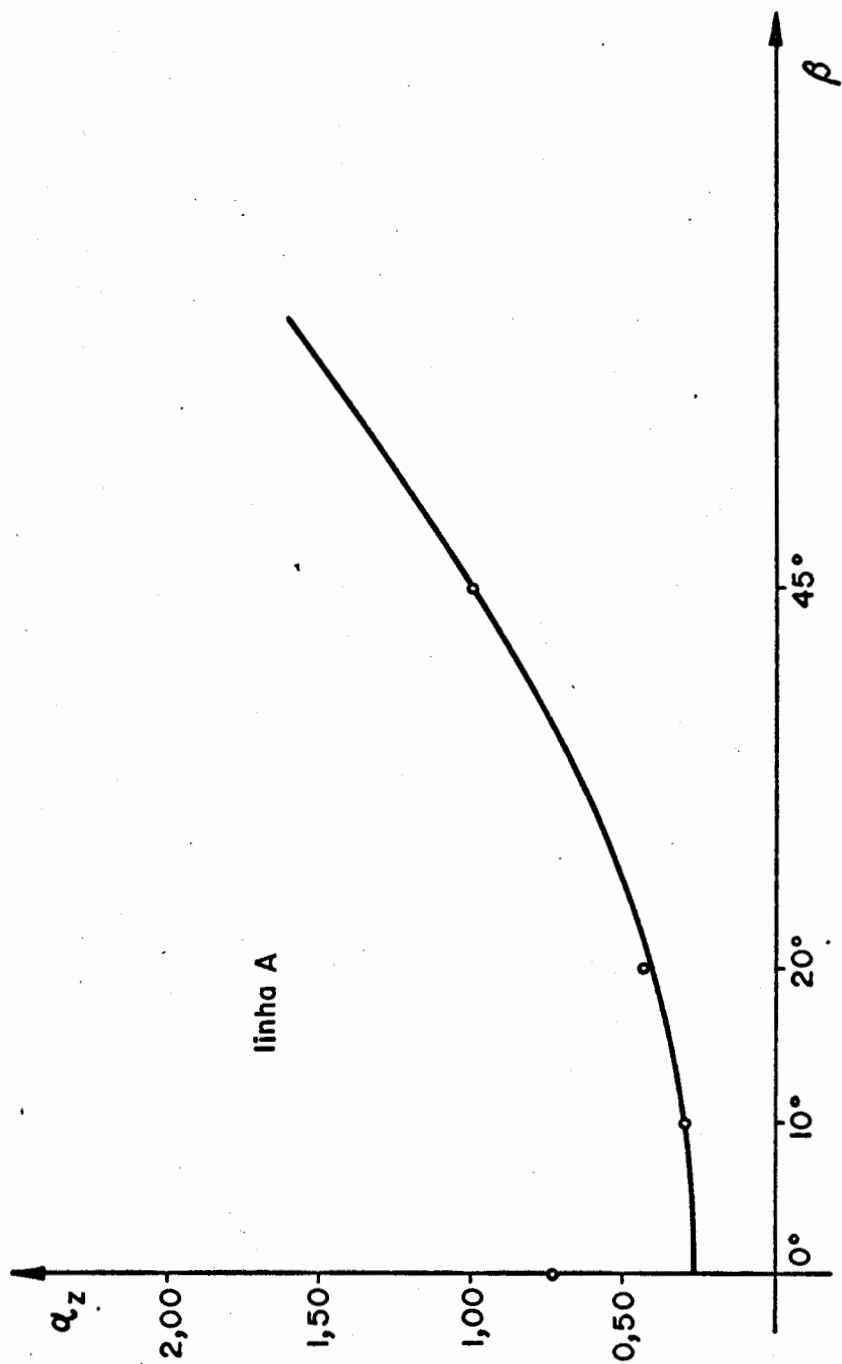


Fig.29 - Concentração de tensões axiais ao longo da linha A.

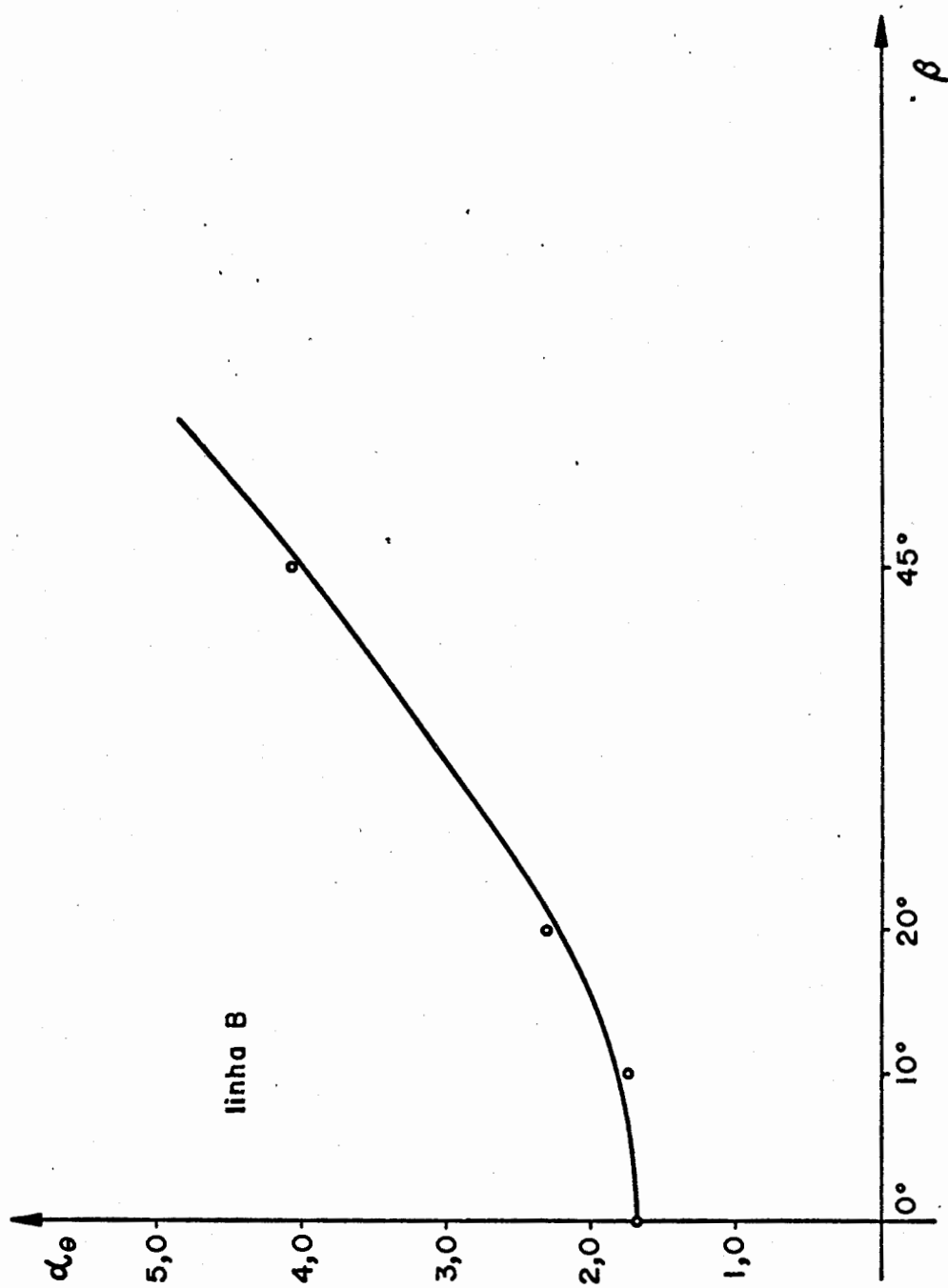


Fig.30 - Concentração de tensões tangenciais ao longo da linha B.

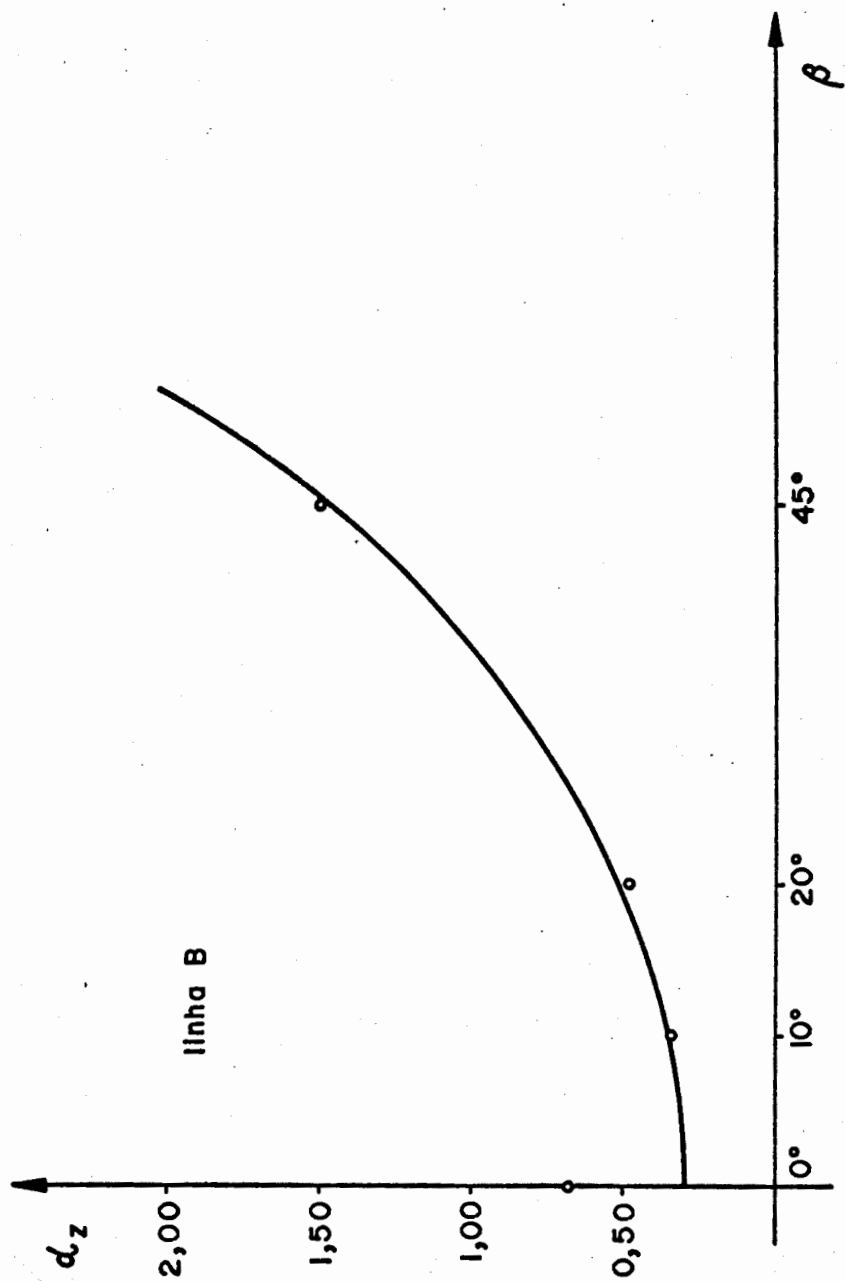


Fig.31 - Concentração de tensões axiais ao longo da linha B.

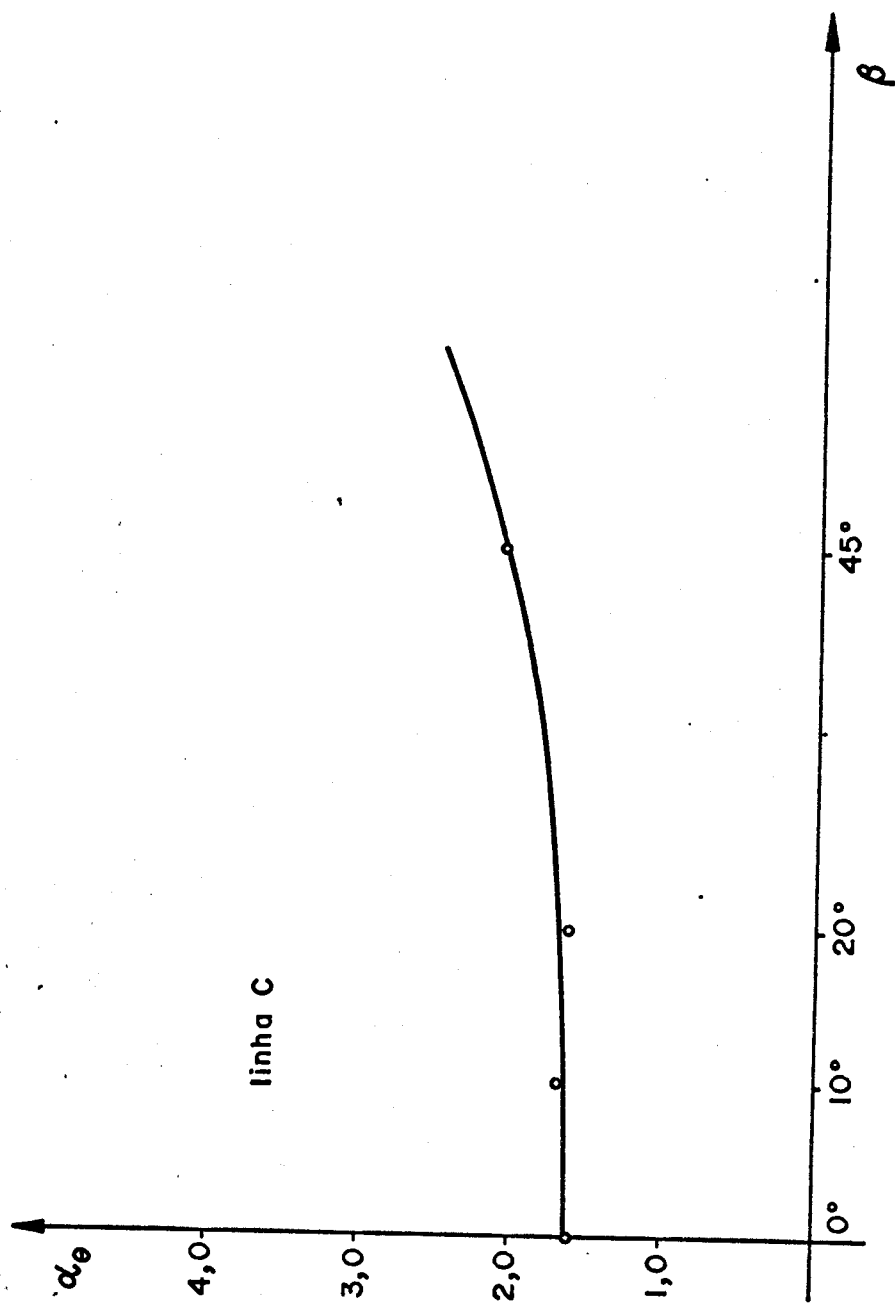


Fig.32 - Concentração de tensões tangenciais ao longo da linha C.

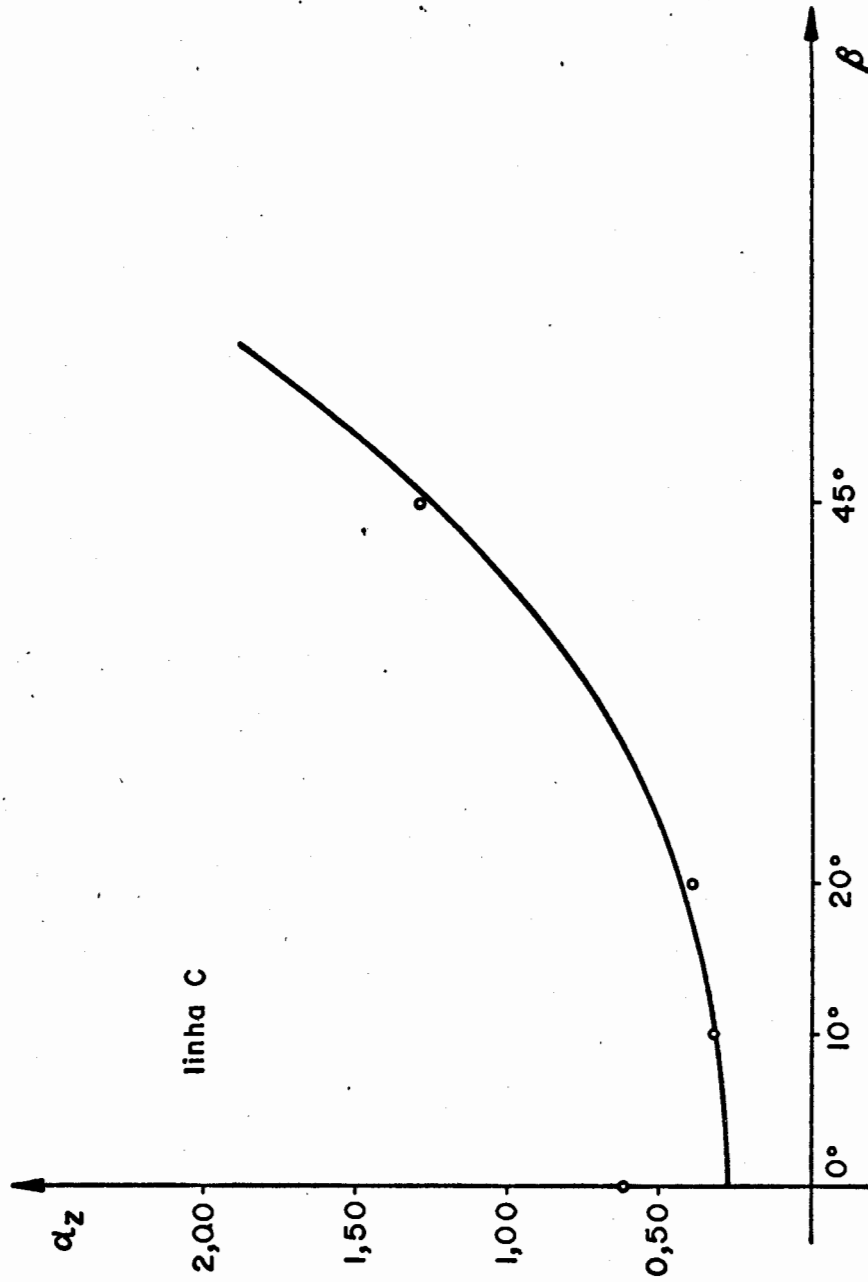


Fig.33 - Concentração de tensões axiais ao longo da linha C.

4. DISCUSSÃO

Conforme podemos verificar dos gráficos do fator de concentração de tensões como função do ângulo de conicidade, a concentração de tensões tangenciais tende a crescer com o aumento da conicidade, o mesmo acontecendo com a concentração de tensões axiais. A concentração de tensões radiais tende a diminuir à medida que cresce o ângulo de conicidade β .

Em todos os gráficos de concentração de tensões radiais e tangenciais note-se uma tendência à constância do fator entre 0° e 10° , até quase 15° . Assim sendo, não seria razoável considerarmos os valores obtidos para a concentração axial de tensões no modelo com $\beta = 0^\circ$, já que tal fato nos levaria a uma curva completamente diversa das demais encontradas. Assim, desprezamos os valores encontrados para α_z no modelo de 0° , conservando nesta região a mesma tendência verificada nas outras curvas, isto é de quase constância de valores entre 0° e 10° .

A curva representativa da concentração de tensões tangenciais ao longo da linha C, apresenta uma inclinação mais reduzida que a da concentração de tensões tangenciais ao longo da linha B. Tal fato pode ser explicado com o auxílio do trabalho de Fessler e Thorpe (10). Conforme pode ser visto neste trabalho, a tensão tangencial num ponto pertencente à superfície interna situado a mesma distância - em relação ao eixo central do disco - que a linha C é cerca de 70% do valor da tensão no ponto P (que é a tensão nominal para nós). Assim, quando relacionamos a tensão tangencial em C com a tensão tangencial nominal em P, estamos na verdade relacionando a tensão tangencial de C com uma tensão quase 50% superior àquela que atua num ponto situado nas mesmas condições em um disco sem os furos laterais.

Podemos agora calcular as tensões que ocorrerão quando nosso disco gira com uma velocidade angular (ω) qualquer. Tal cálculo pode ser levado a efeito com o auxílio das curvas de distribuição de tensões superficiais em discos não vazados obtidos por Fessler e Thorpe (10) e que se encontram no apêndice A.

Estas curvas apresentam, para diversos ângulos de conicidade, índices de tensão superficial (I), definidas como sendo a relação entre a tensão existente e a tensão tangencial em um anel de pequena espessura, de diâmetro igual ao do furo central do disco e girando à mesma velocidade angular ω . Ou seja:

$$I = \frac{\sigma_{MED}}{\rho \omega^2 D_f^2 / 4} \quad (30)$$

onde

σ_{MED} é a tensão medida

ρ é o peso específico do material do disco

D_f é o diâmetro do furo central do disco

Nosso fator de concentração pode ser, genericamente, denominado de α e vale

$$\alpha_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_{NOM}} \quad (31)$$

Onde σ_i e σ_{NOM} são tensões de nomes coerentes medidas respectivamente no furo e no ponto nominal. O índice i pode ser r, θ ou z.

O valor do índice de tensão superficial pode ser facilmente retirado das curvas para o ponto nominal. Chamemos a este valor de I_{NOM} - Logo, de (30) tiramos que

$$\sigma_{NOM} = I_{NOM} \cdot \frac{\rho \omega^2 D_f^2}{4} \quad (32)$$

Comparando (31) e (32), chegamos finalmente a

$$\sigma_i = \alpha_i \cdot I_{NOM} \cdot \frac{\rho \omega^2 D_f^2}{4} \quad (33)$$

que é a expressão da tensão no furo quando nosso disco gira a uma velocidade angular ω .

Na expressão (33) o nome de $\sigma_i, \alpha_i, I_{NOM}$ devem ser coerentes. Assim, particularizando para cada caso teremos

$$\sigma_r = \alpha_r I_{rNOM} \frac{\rho \omega^2 D_f^2}{4} \quad (34)$$

$$\sigma_\theta = \alpha_\theta I_{\theta NOM} \frac{\rho \omega^2 D_f^2}{4} \quad (35)$$

$$\sigma_z = \alpha_z I_{rNOM} \frac{\rho \omega^2 D_f^2}{4} \quad (36)$$

Os fatores α_i foram definidos levando-se em conta os fatores de concentração do apêndice A, justificando-se, portanto, a definição de α_z como função de σ_r e não σ_z , já que este não se encontra tabelado.

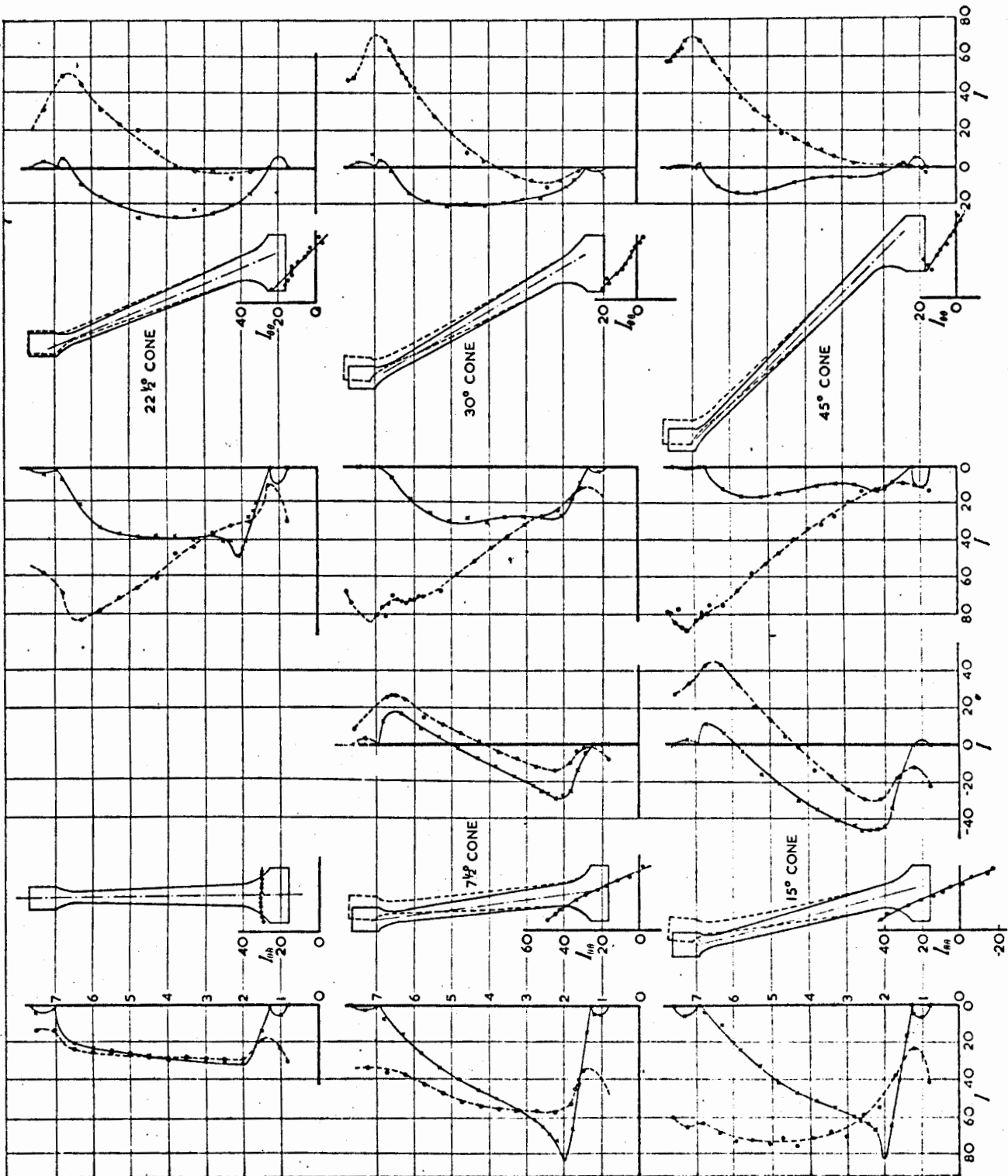
5. CONCLUSÃO

Através do método fotoelástico tridimensional foram calculados os fatores da concentração de tensões introduzidas por dois orifícios axiais em discos de conicidade variável, mas mantidos constantes os diâmetros internos e externos.

As concentrações de tensões axiais e tangenciais tendem a aumentar com o incremento de conicidade mantendo-se, entretanto, aproximadamente constante até uma conicidade de 10^0 . A concentração de tensões radiais tende a decrescer com o aumento de conicidade, tendendo também a permanecer aproximadamente constante até os 10^0 .

O máximo valor do fator de concentração de tensões tangenciais encontrado foi de 4,07, acontecendo ao longo da geratriz do furo lateral mais distante do eixo central do disco (linha B). O máximo valor do fator de concentração de tensões radiais encontrado foi de 1,76, acontecendo ao longo da linha A. O máximo valor do fator de concentração de tensões axiais encontrado foi de 1,50 e ocorre ao longo da linha B.

Com o auxílio do trabalho de Fessler e Thorpe (10) são desenvolvidas expressões que permitem calcular as tensões que ocorrem ao longo do furo, quando a velocidade angular é conhecida. O método fotoelástico, conforme foi descrito neste trabalho, pode ser empregado para a análise de tensões no estado elástico em qualquer problema da Engenharia Civil ou Mecânica. É particularmente aconselhado quando estiver envolvido um problema tridimensional, pela sua capacidade de solução do problema sem necessidade de simplificações ao estado plano de tensões, seu custo reduzido e sua precisão dos resultados.



O Índice da tensão tangencial X Índice da tensão radial
 As linhas pontilhadas indicam a forma da seção deformada
 Fig.A1 - Tensões superficiais em discos cônicos.

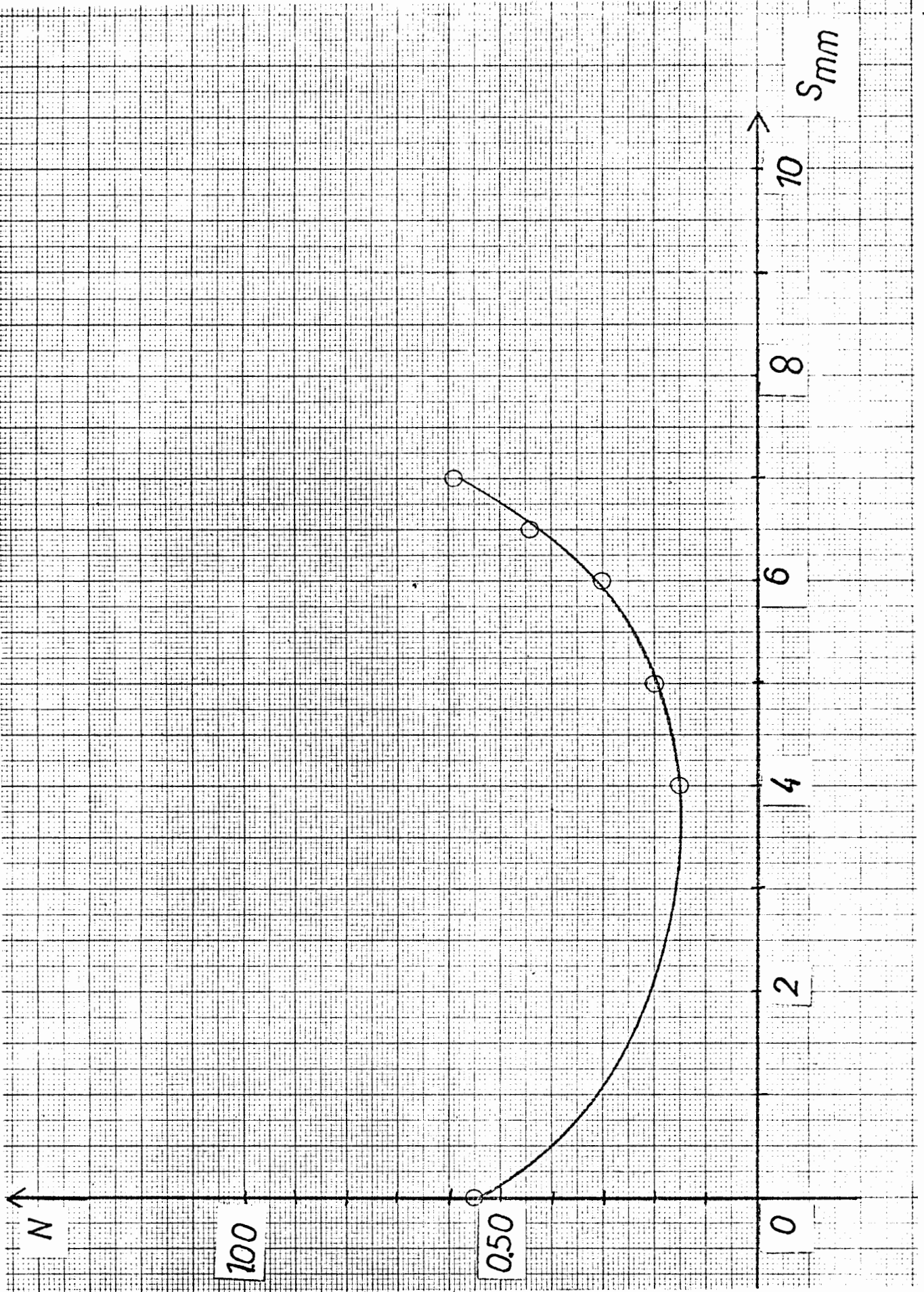


Figura B1 - Ordem de franja da fatia RN do modelo de 0°

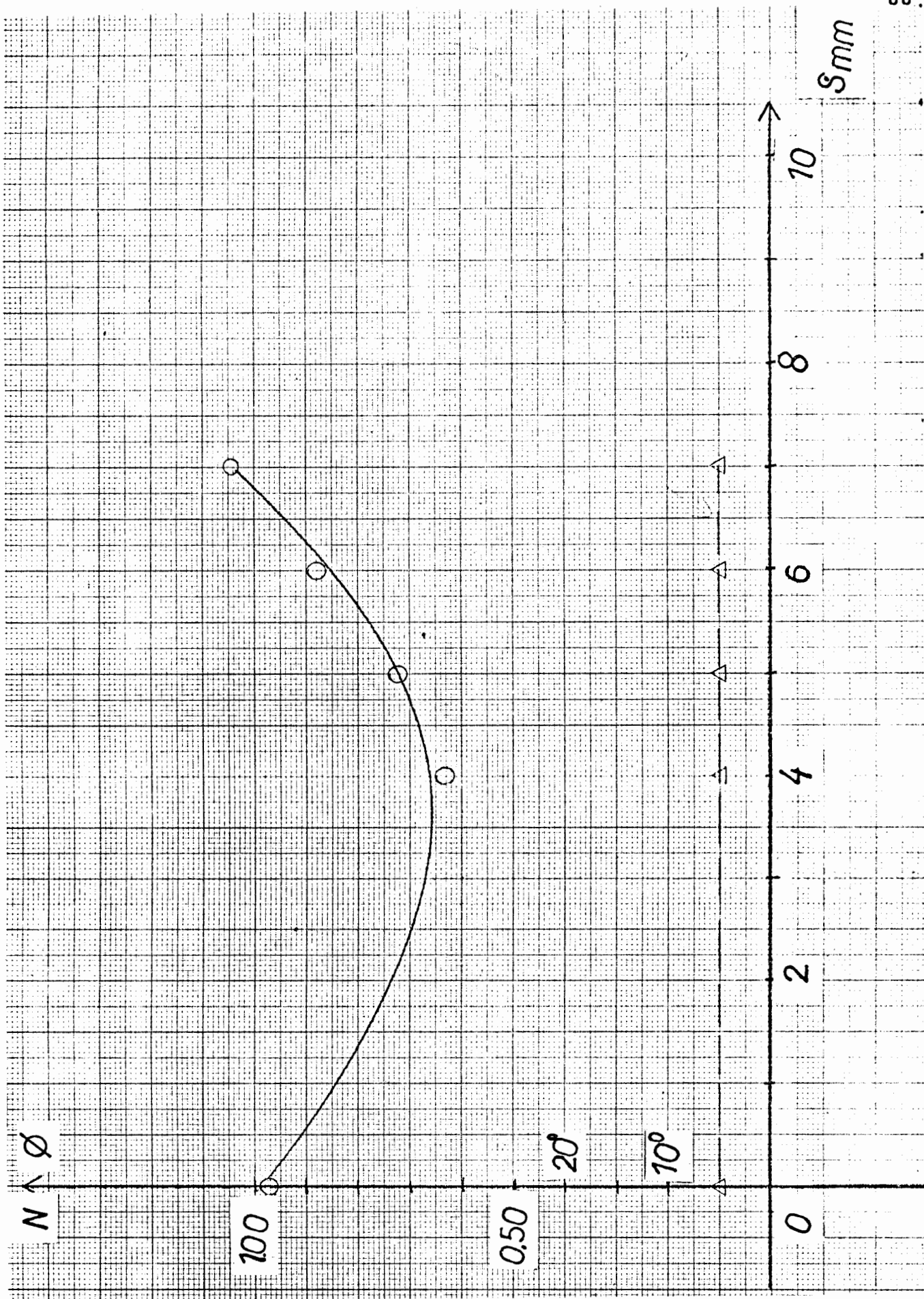


Figura B2 - Ordem de franja e parametro da isoclinica da fatia RT do modelo de 0°

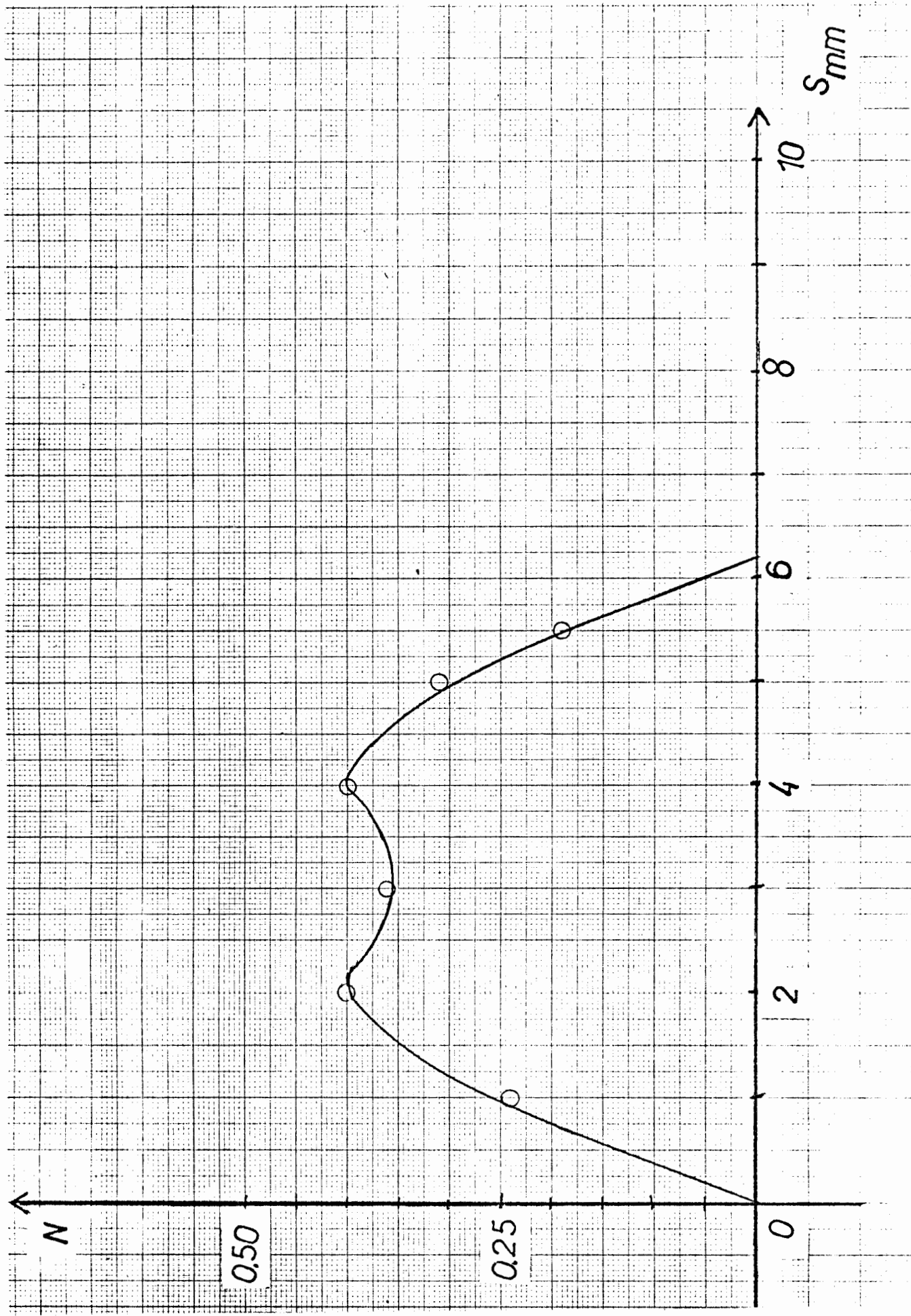


Figura B3 - Ordem de franja da Fatia RB do modelo de 0°

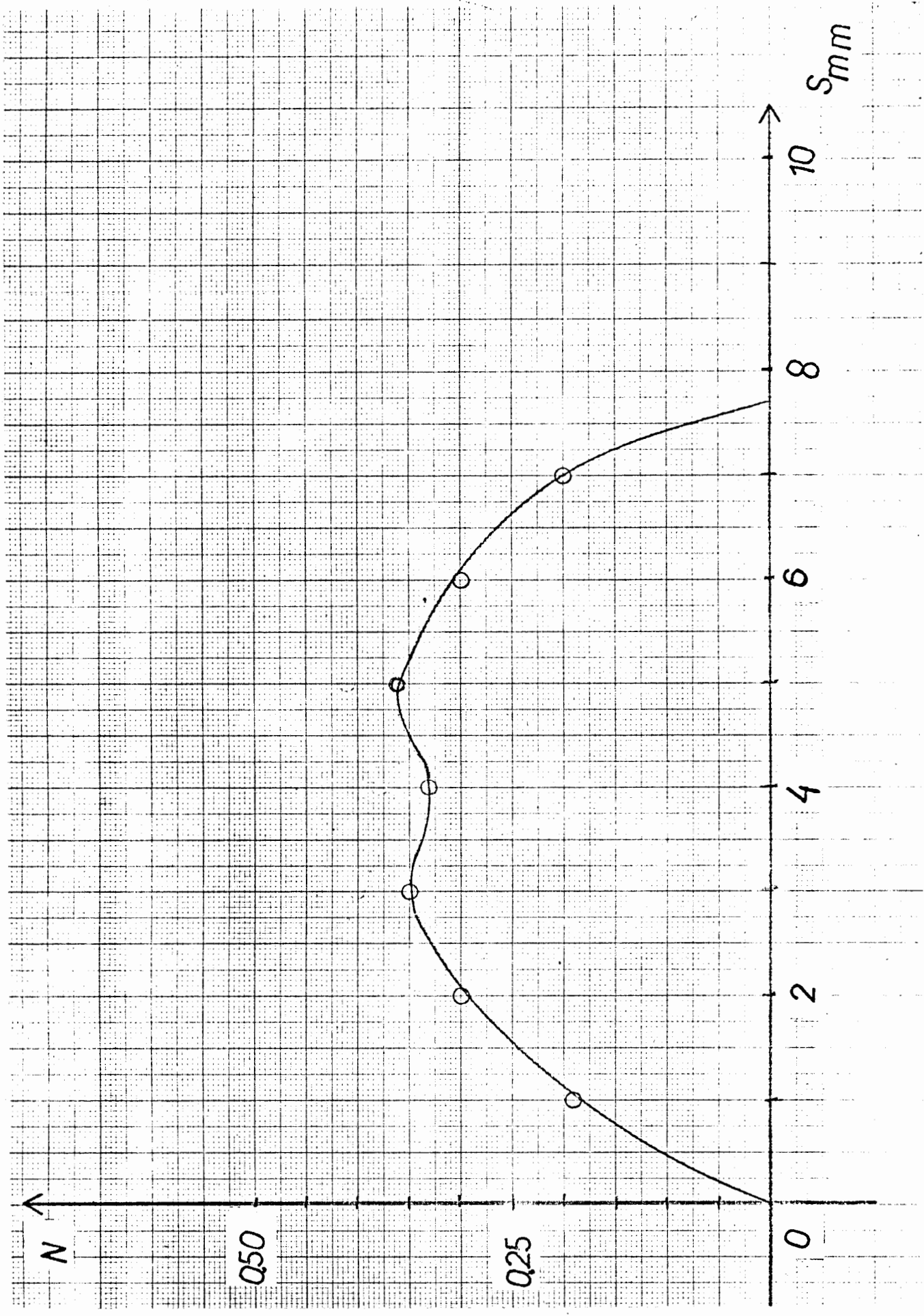


Figura B4 - Ordem de franja da fátia RC do modelo de 0°

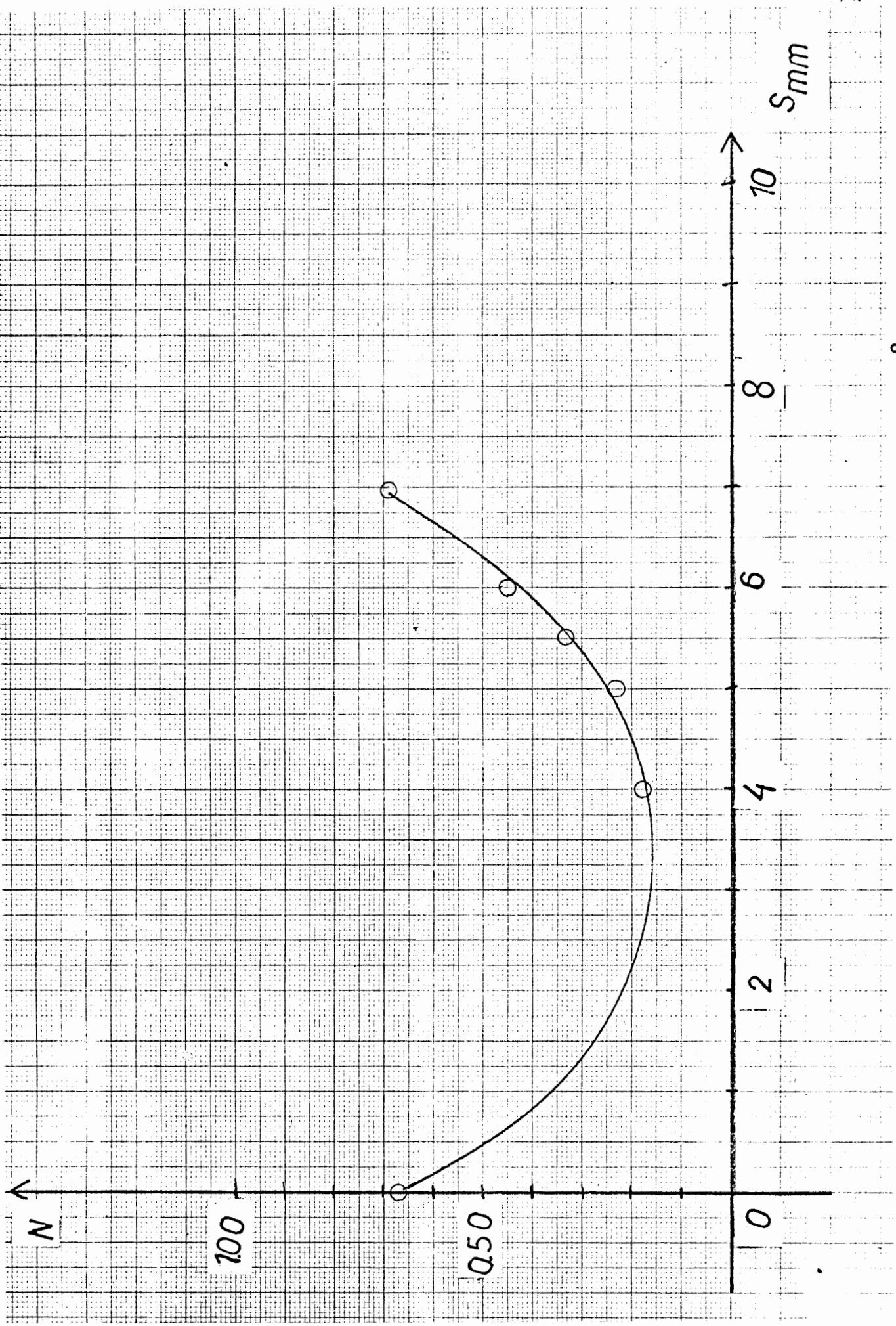


Figura B5 - Ordem de franja da fatia NT do modelo de 0°

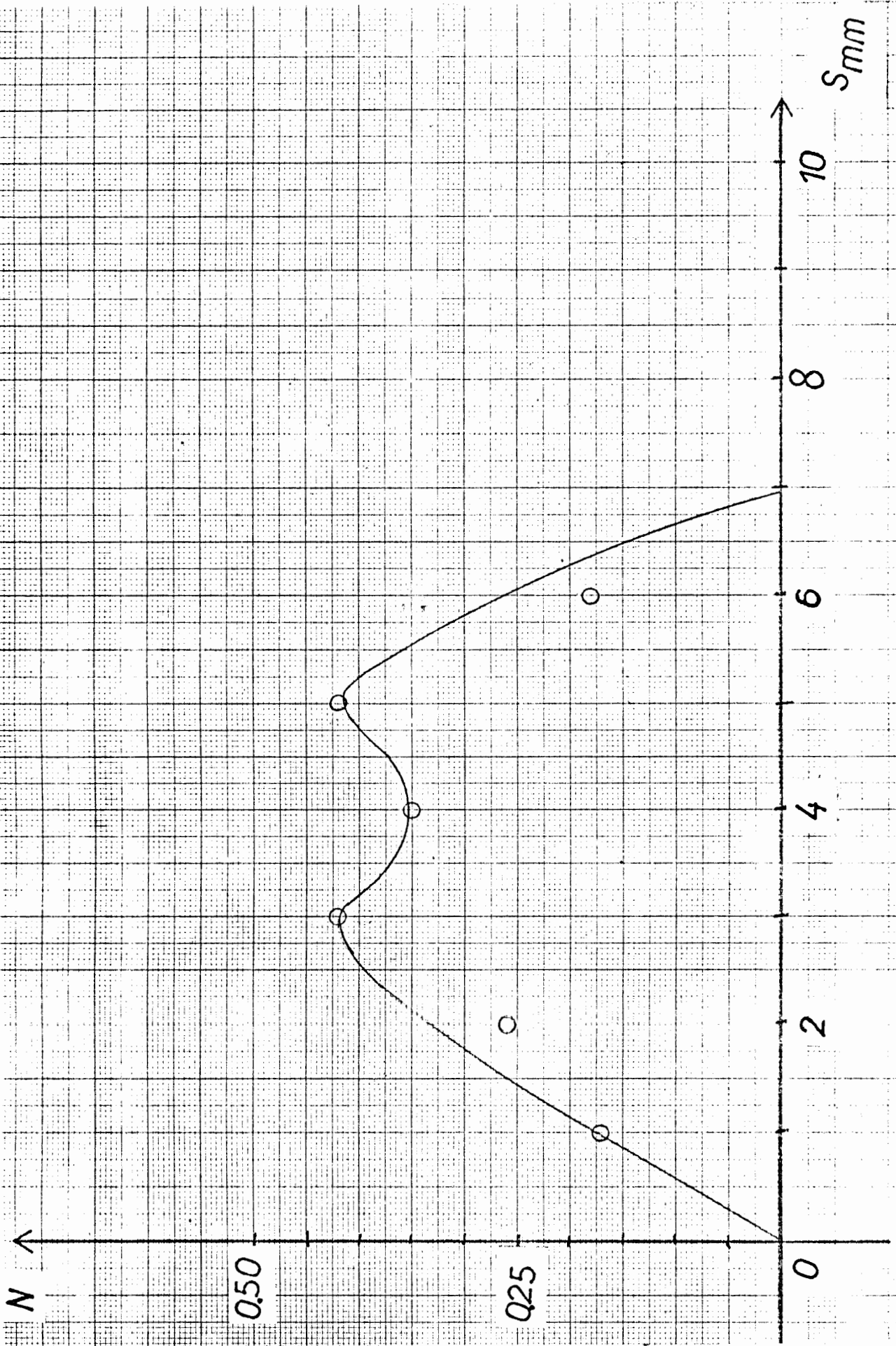


Figura B6 - Ordem de franja da fatia PP do modelo de 0°

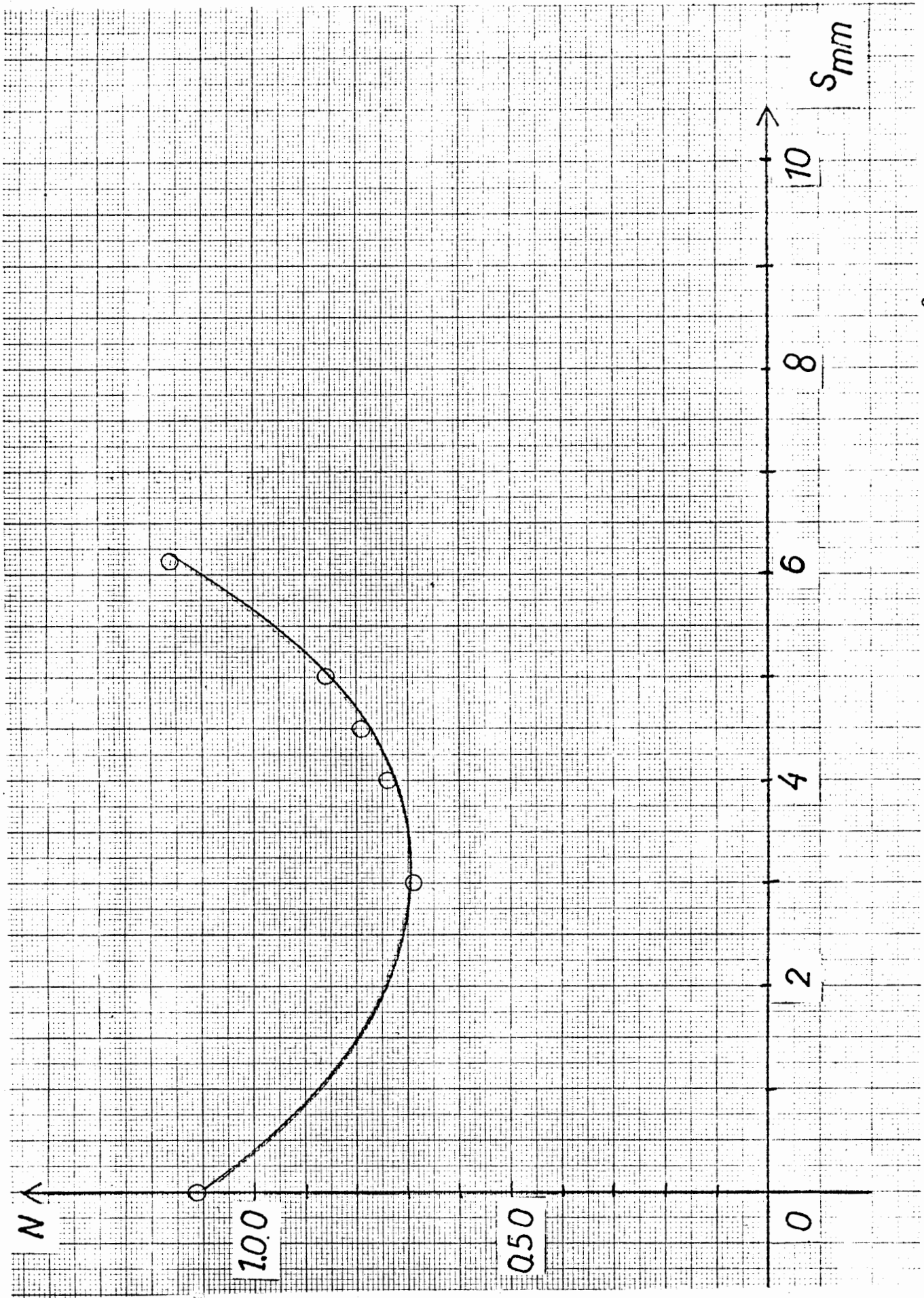


Figura B7 - Ordem de franja da fatia TB do modelo de 0°

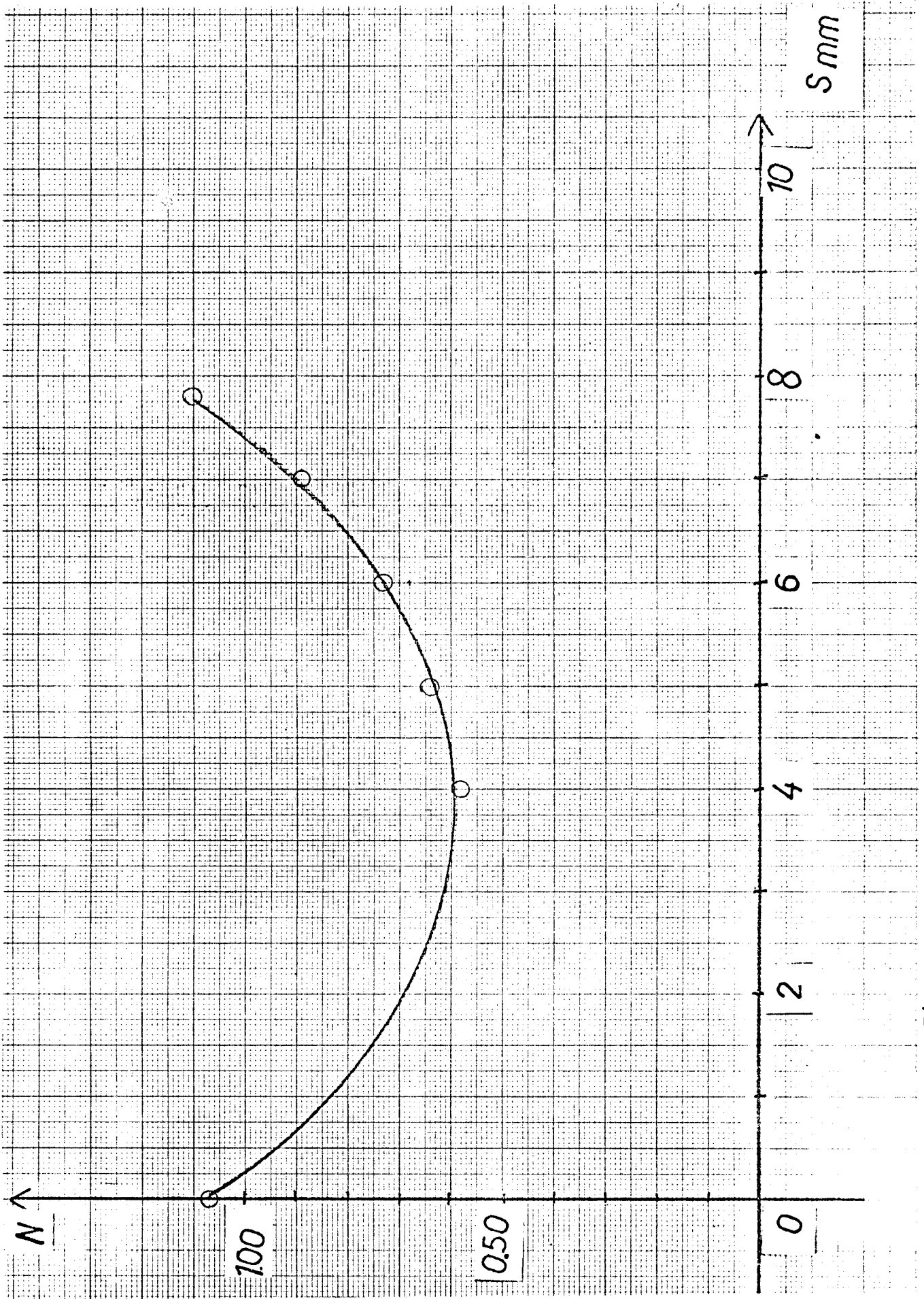


Figura B8 - Ordem de franja da fatia TC do modelo de 0°

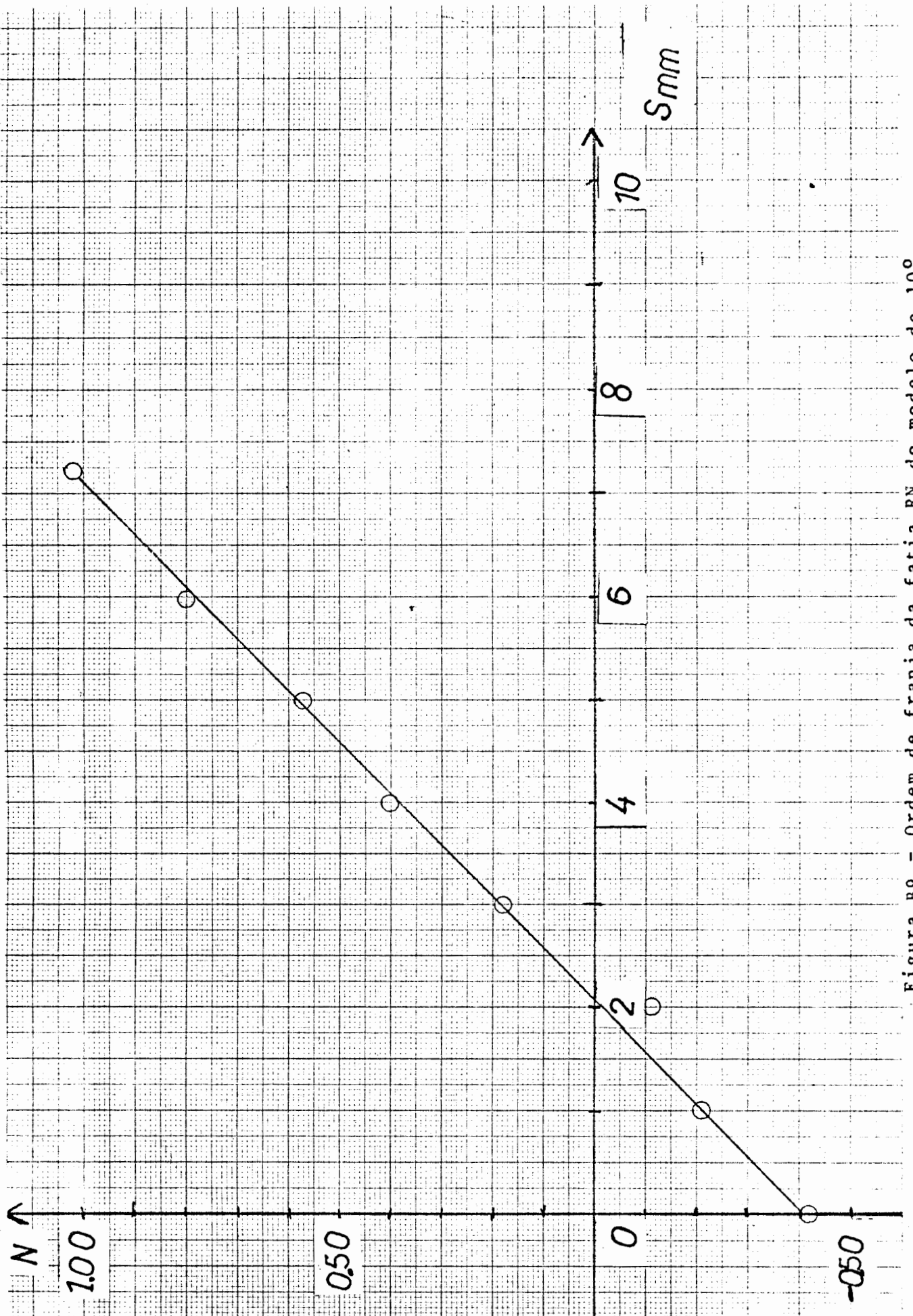


Figura B9 - Ordem de franja da fatia RN do modelo de 10°

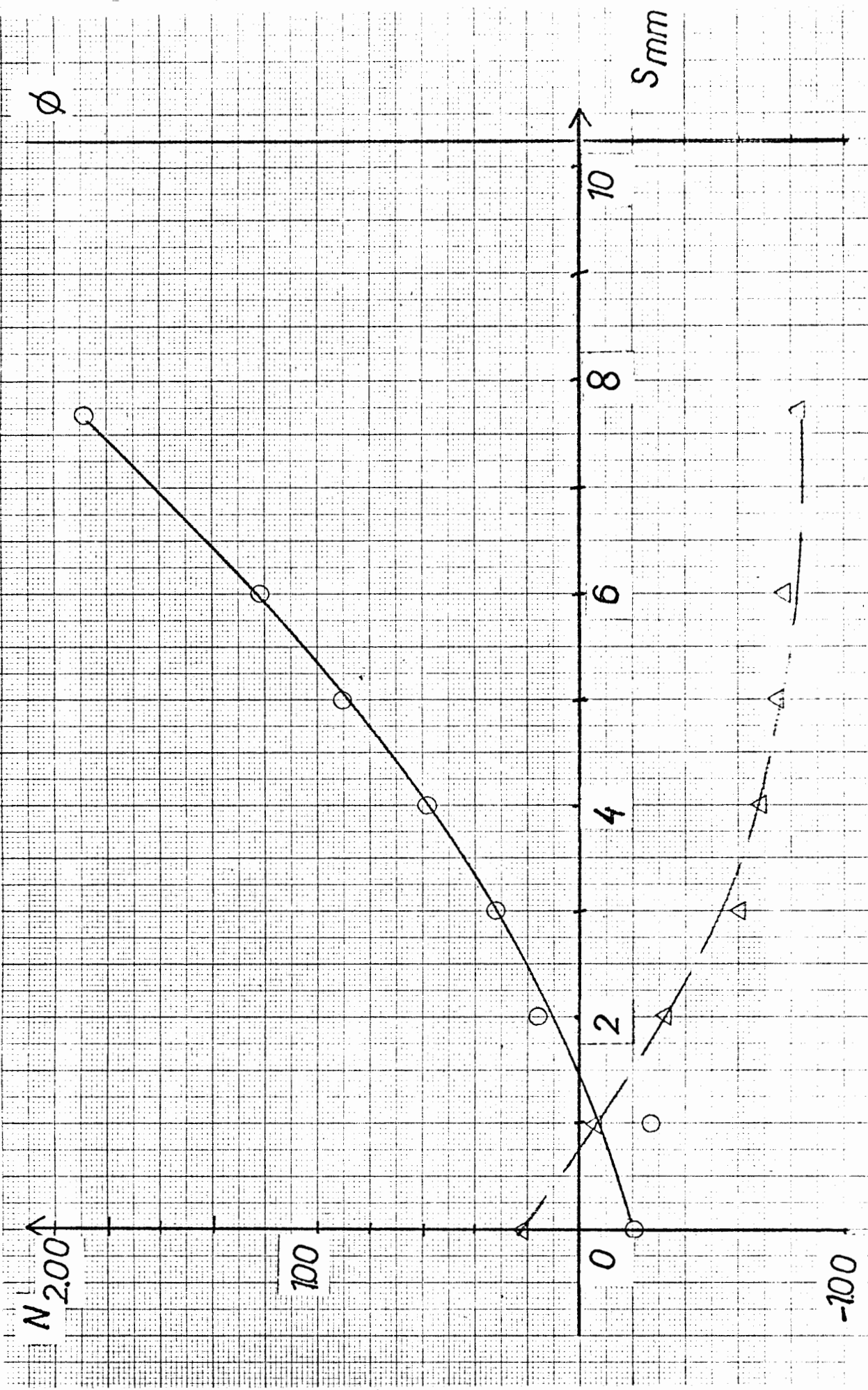


Figura B10 - Ordem de franja e parametro da isoclinica da fatia RT do modelo de 10⁰

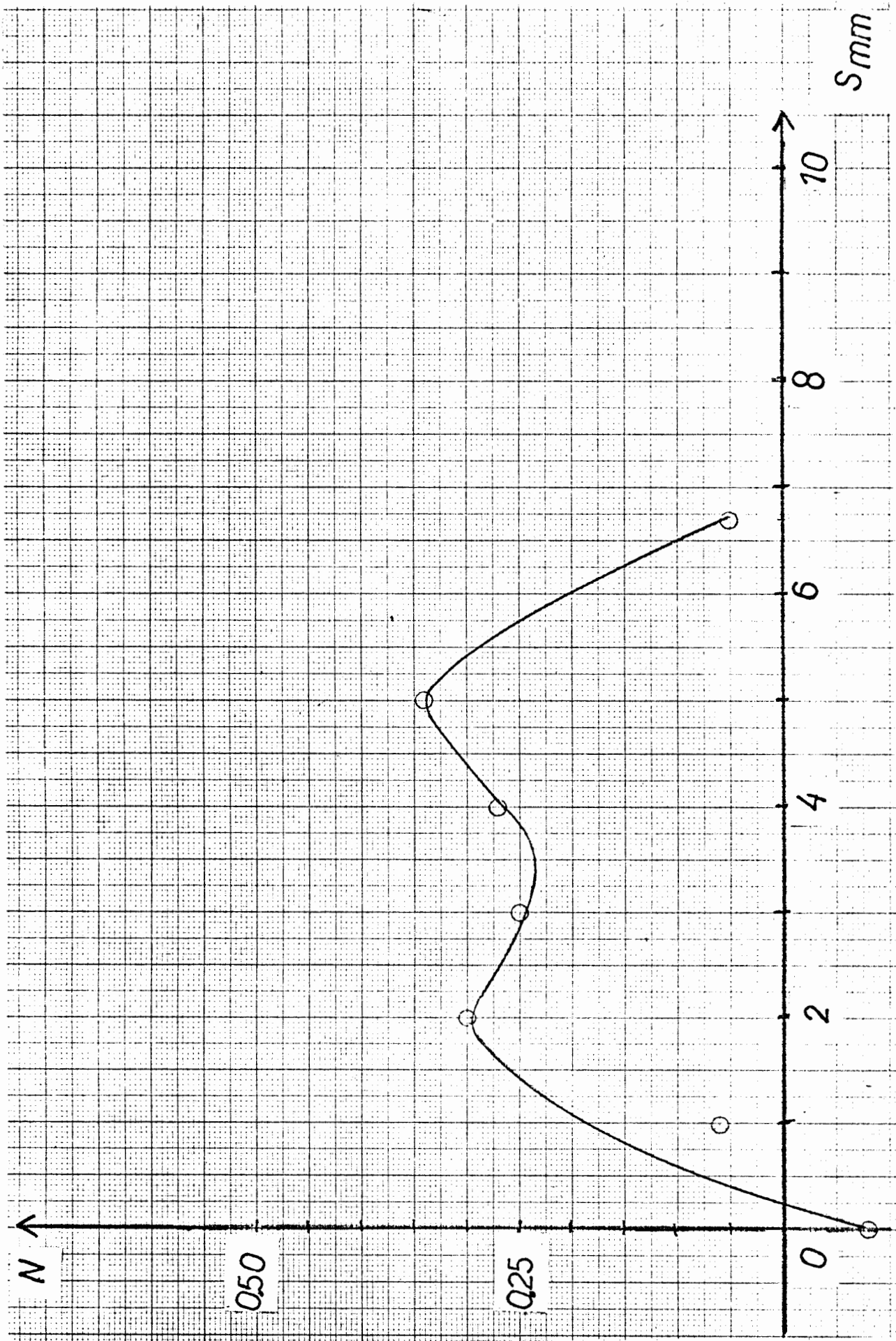


Figura B11 - Ordem de franja da fatia RB do modelo de 10°

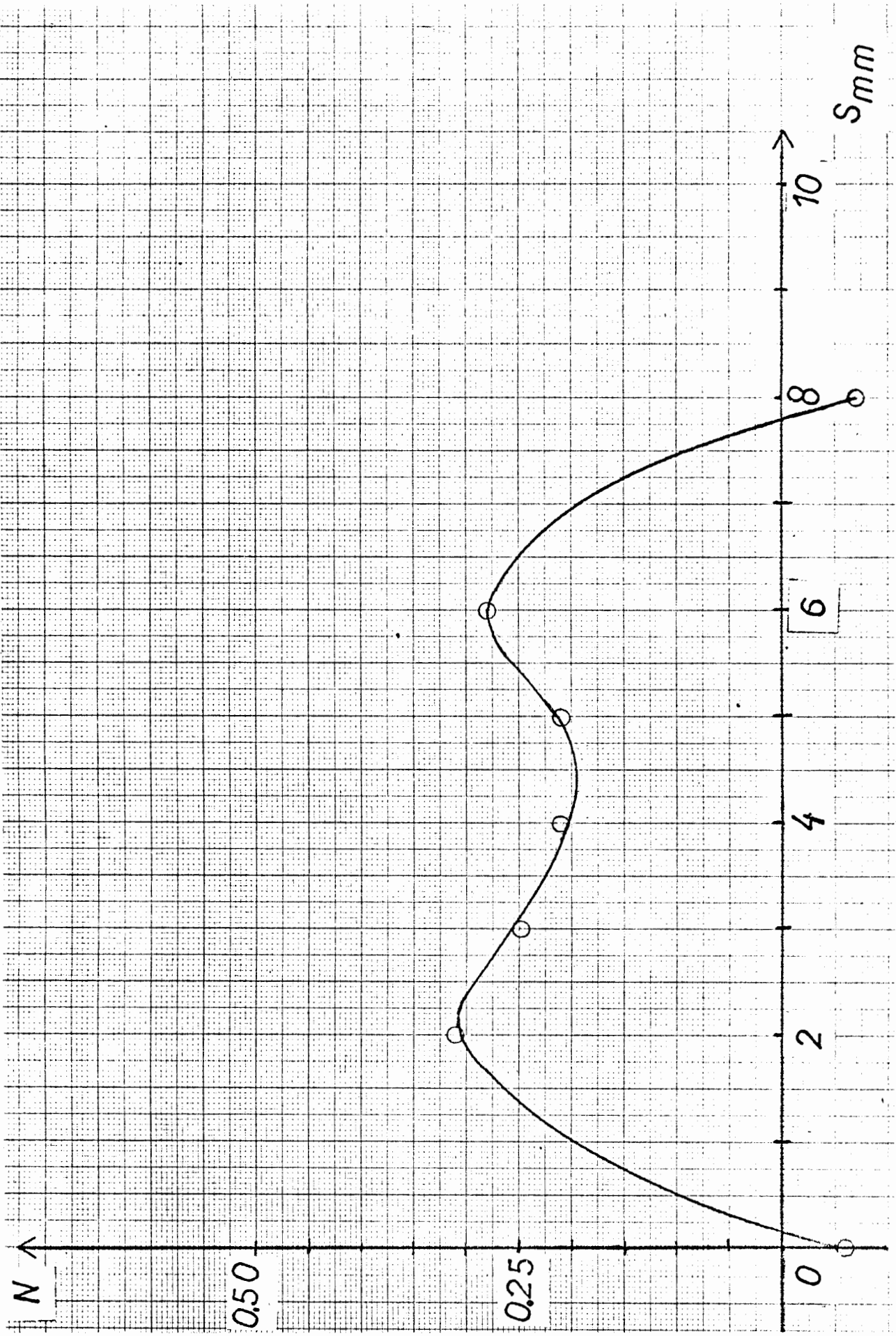


Figura B12 - Ordem de franja da fatia RC do modelo de 10°

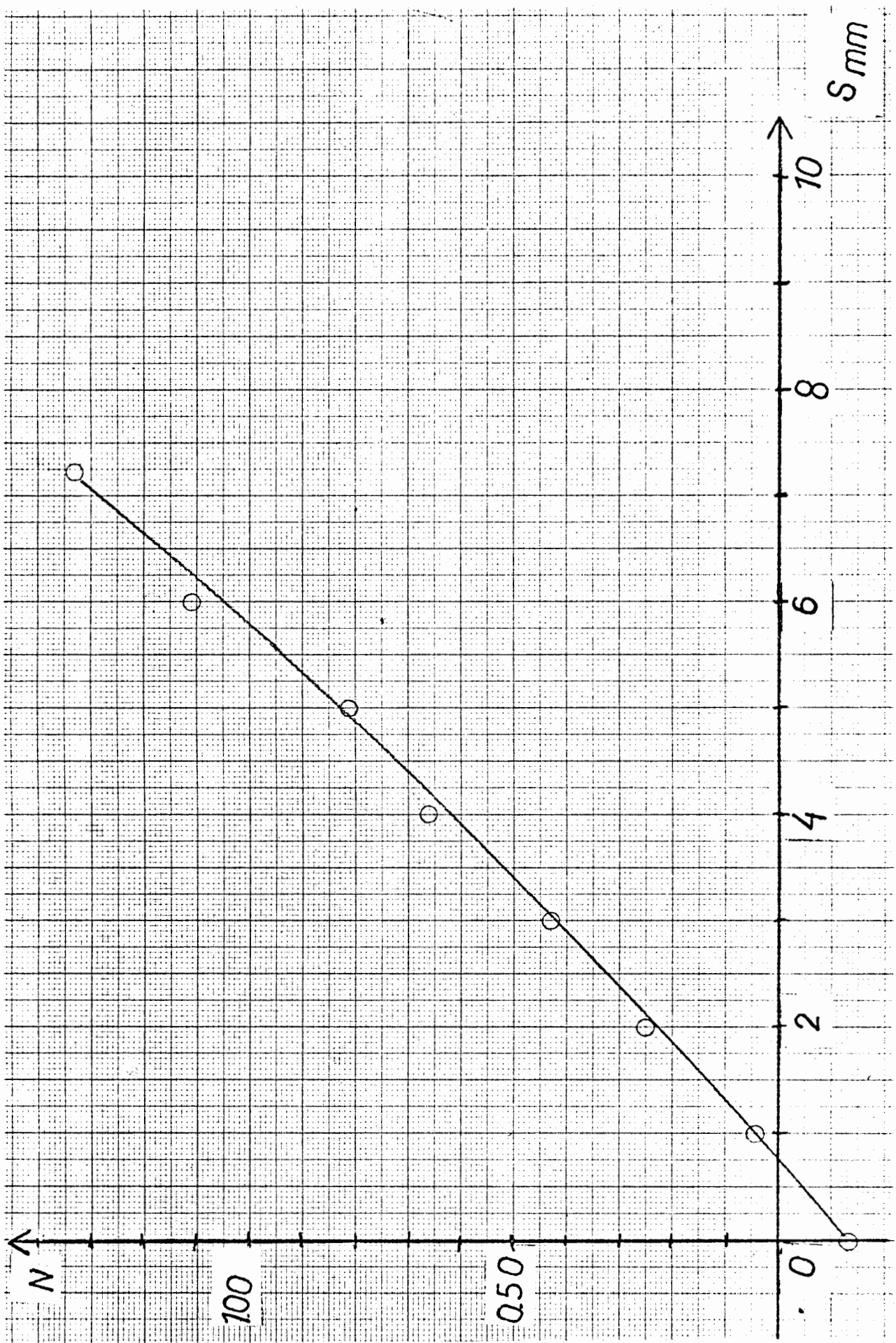


Figura B13 - Ordem de franja da fatia NT do modelo de 10°

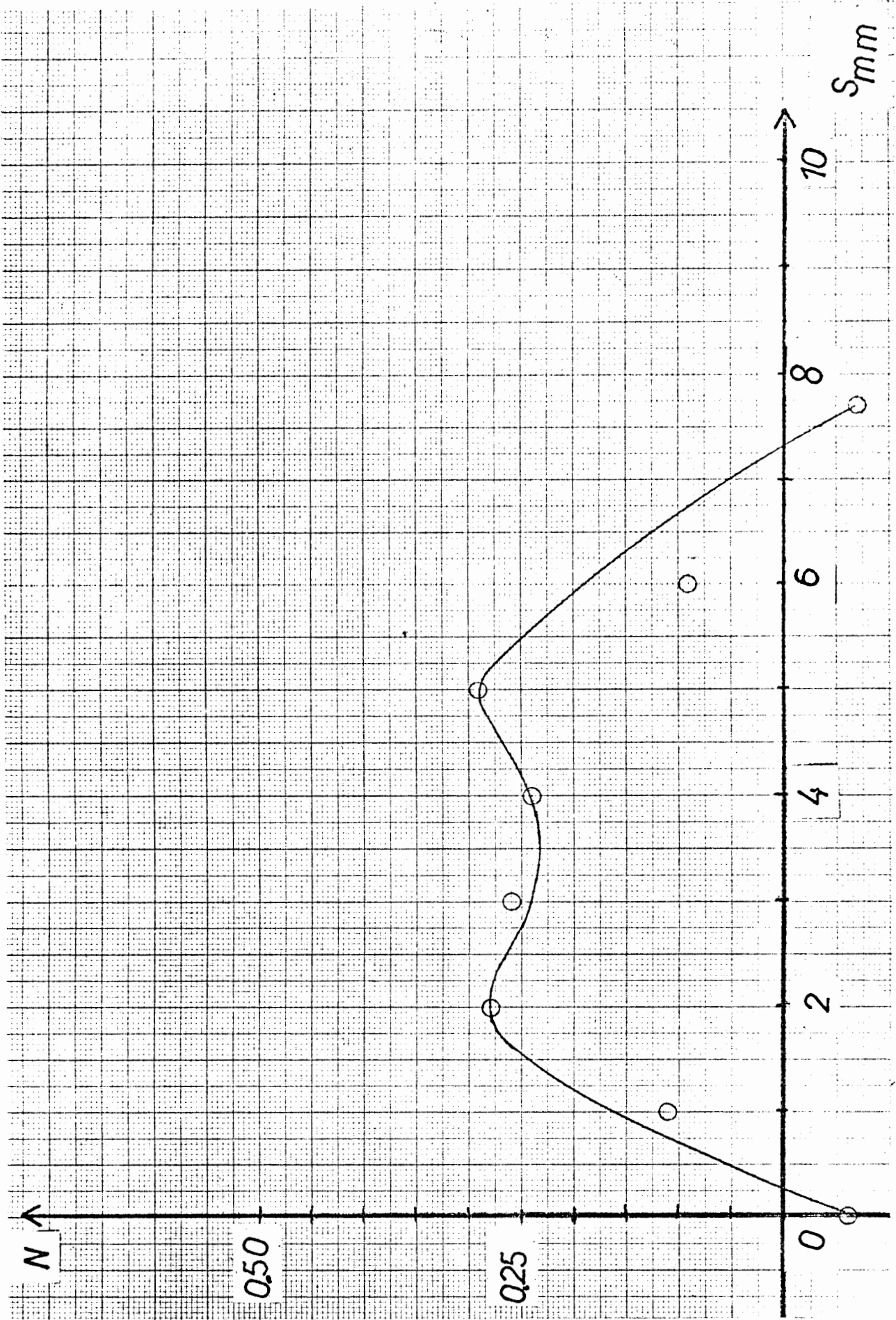


Figura B14 - Ordem de franja da fatia PP do modelo de 10°

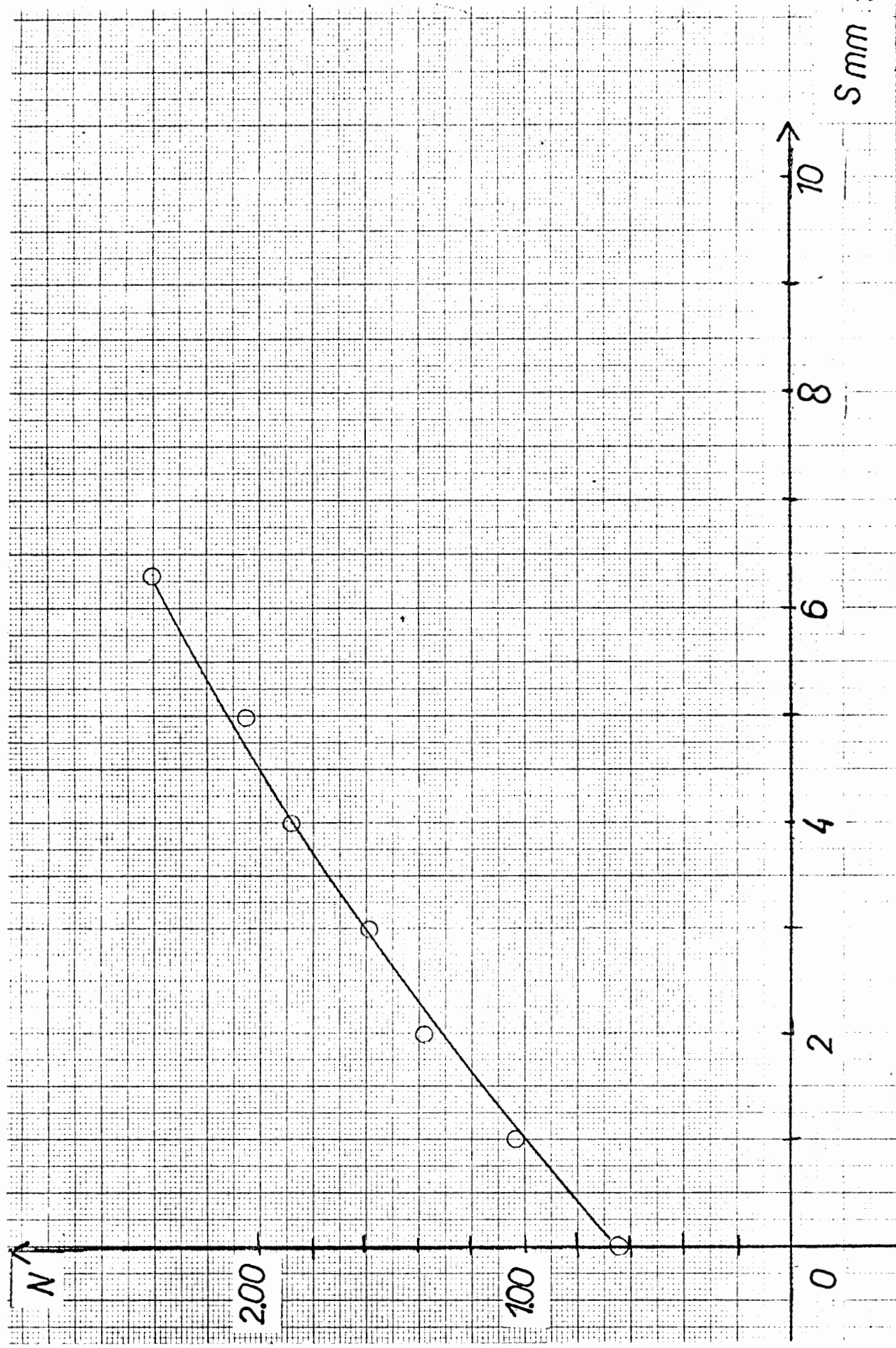


Figura B15 -- Ordem de franja da fatia TB do modelo de 10°

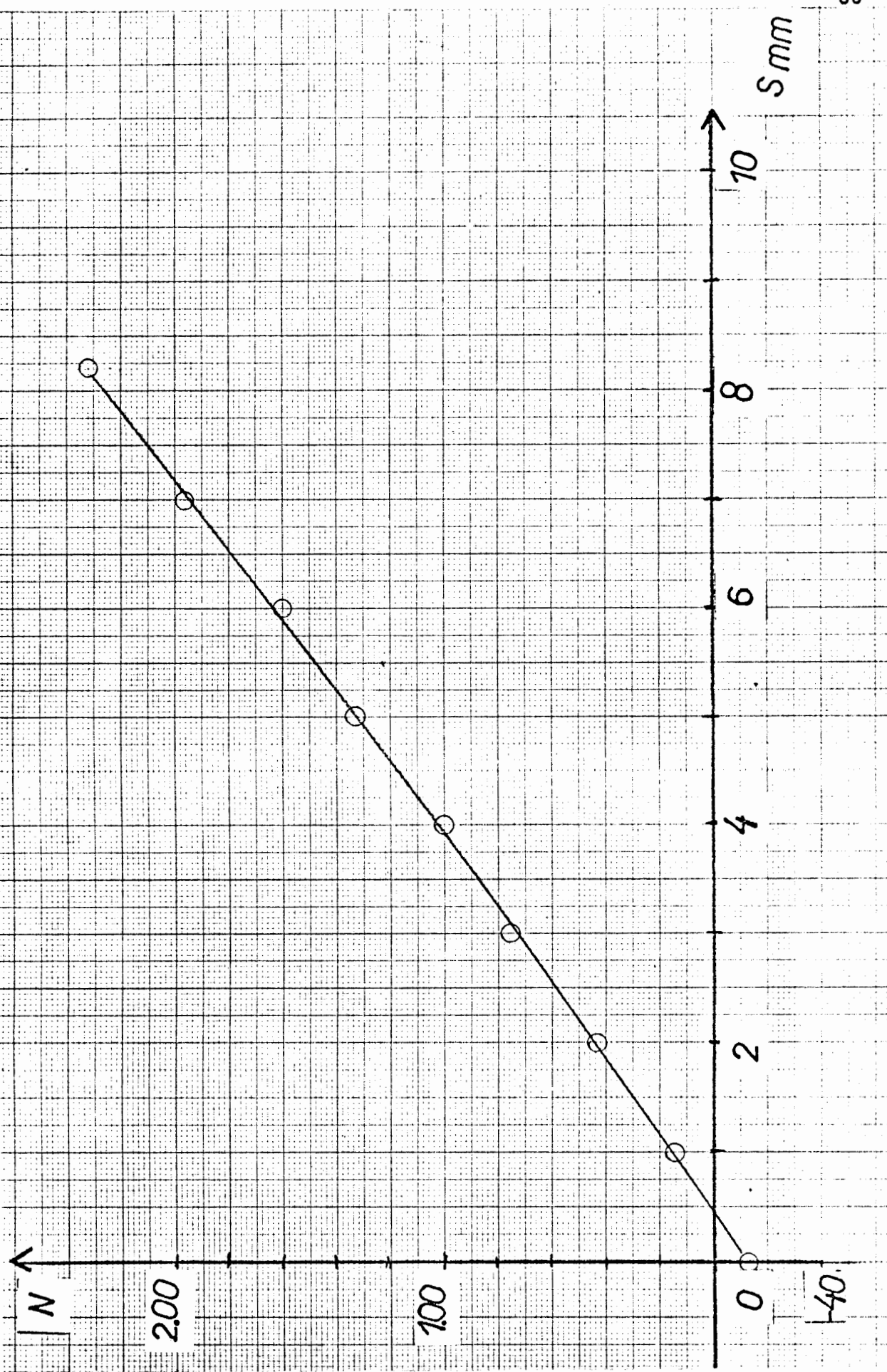


Figura B16- Ordem de franja da fatia TC do modelo de 10°

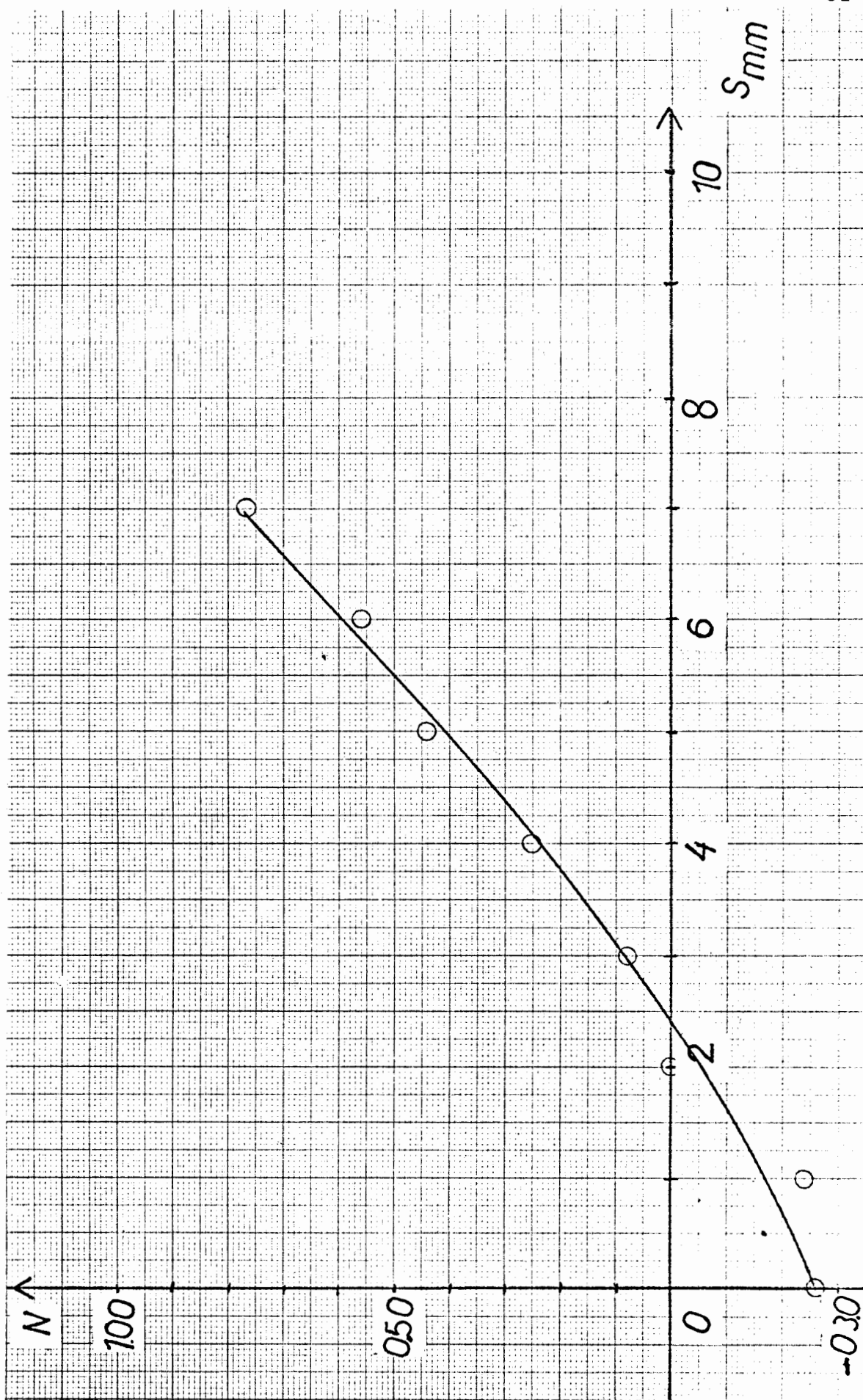


Figura B17 - Ordem de franja da fatia RN do modelo de 20°

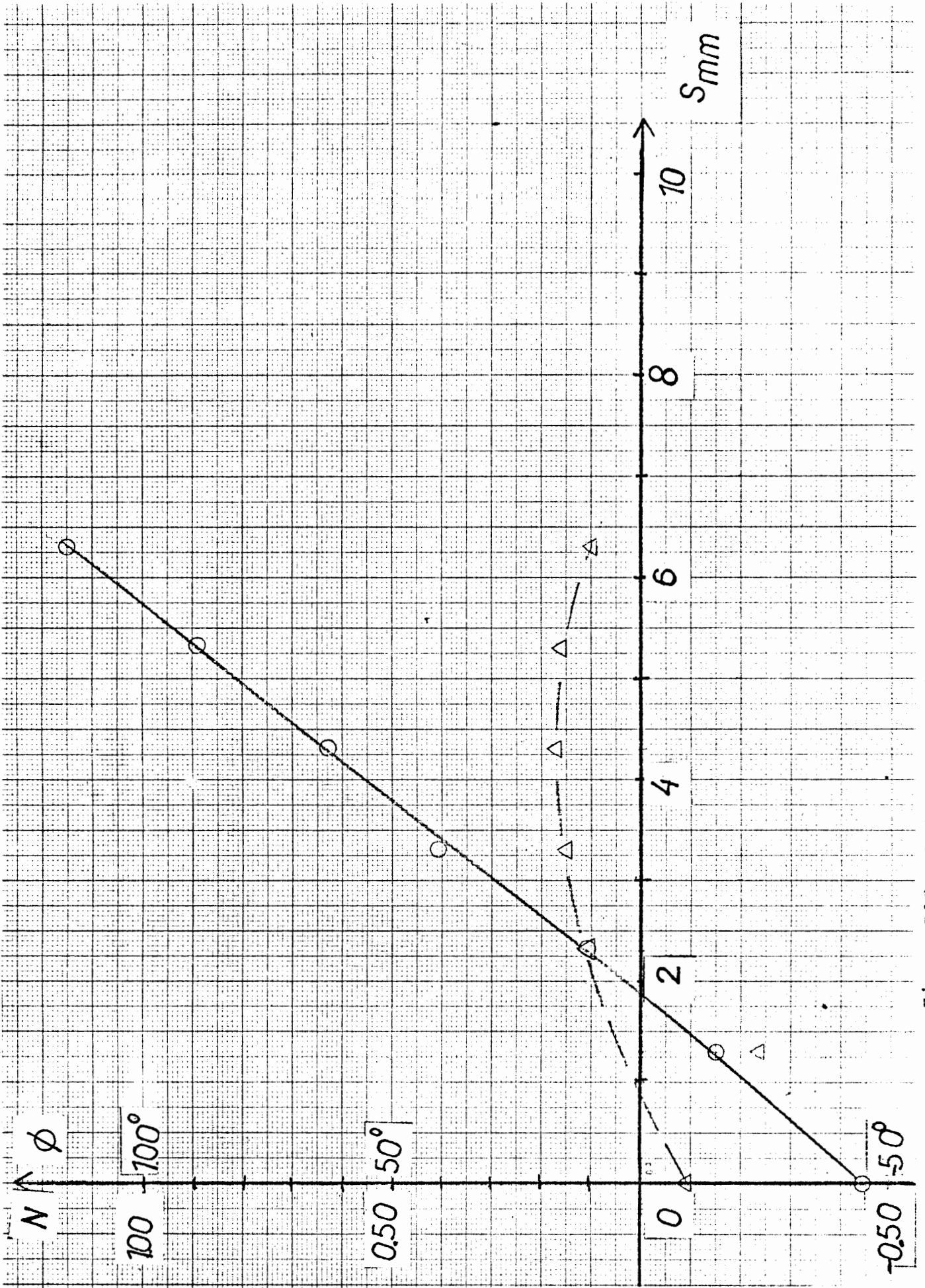


Figura B18 - Ordem de franja e parametro da isoclinica da fatia RI do modelo de 20°

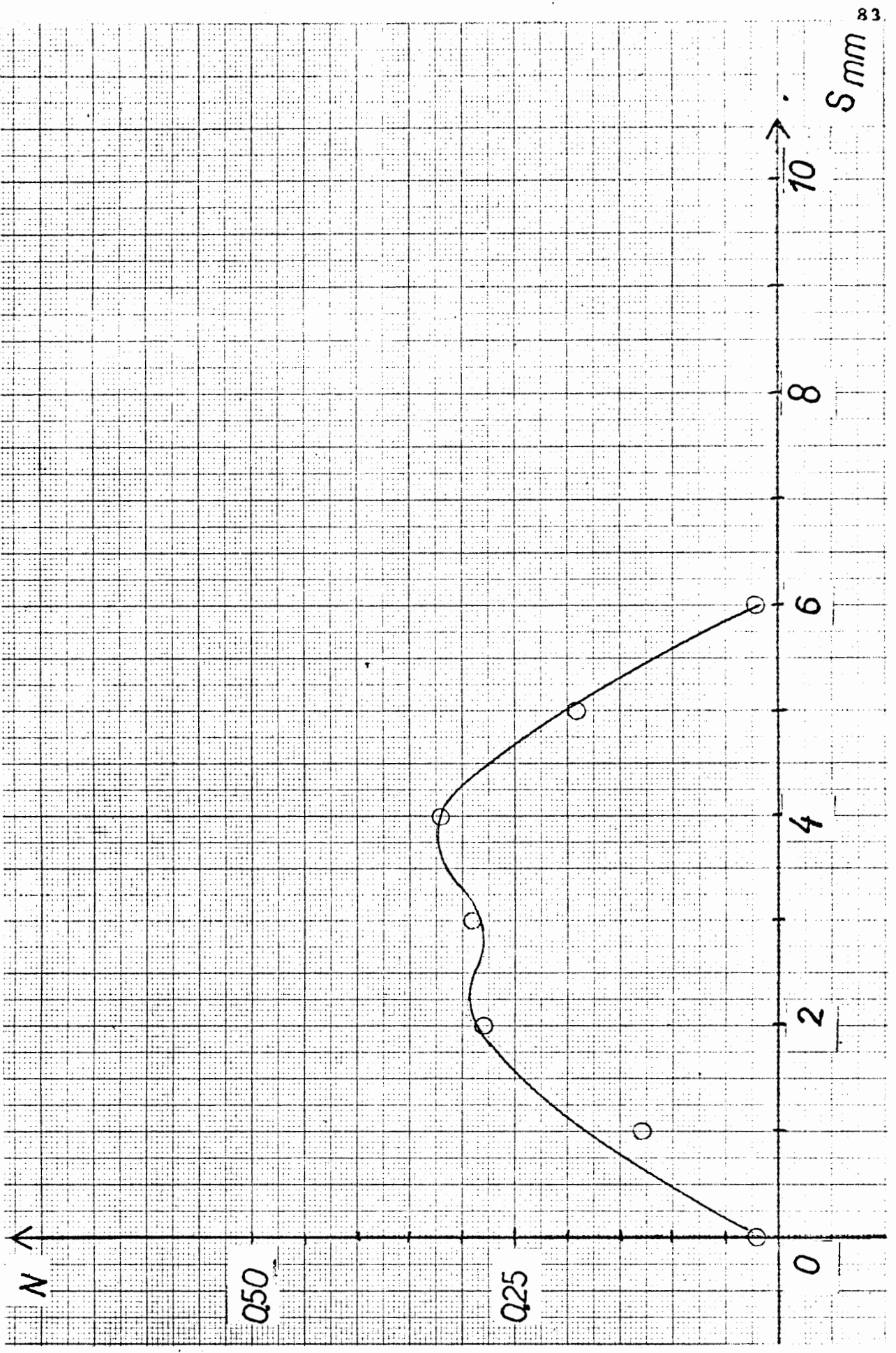


Figura B19 - Ordem de franja da fatia RB do modelo de 20°

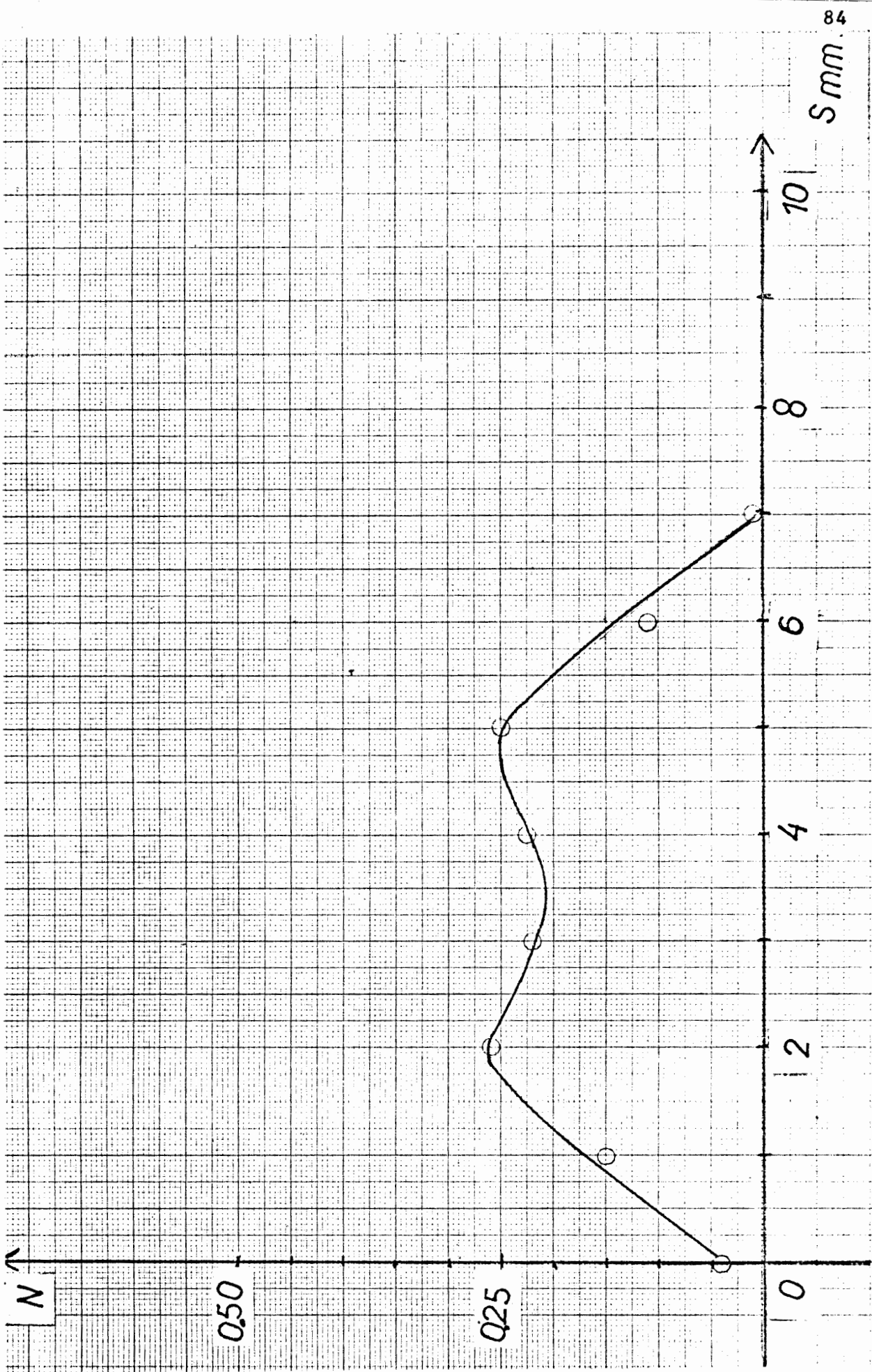


Figura B20 - Ordem de franja da fatia RC do modelo de 20°

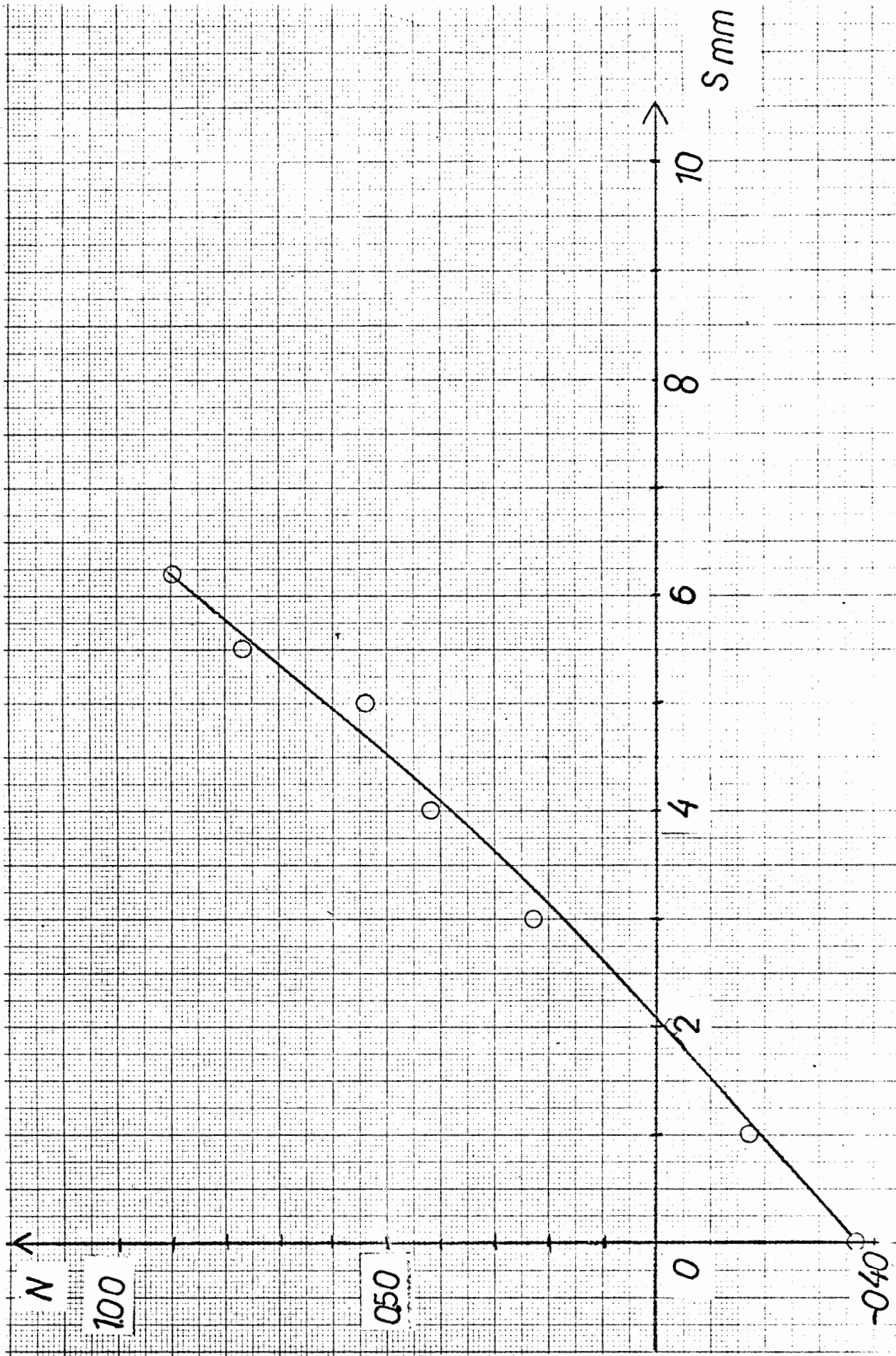


Figura B21- Ordem de franja da fatia NT do modelo de 20°

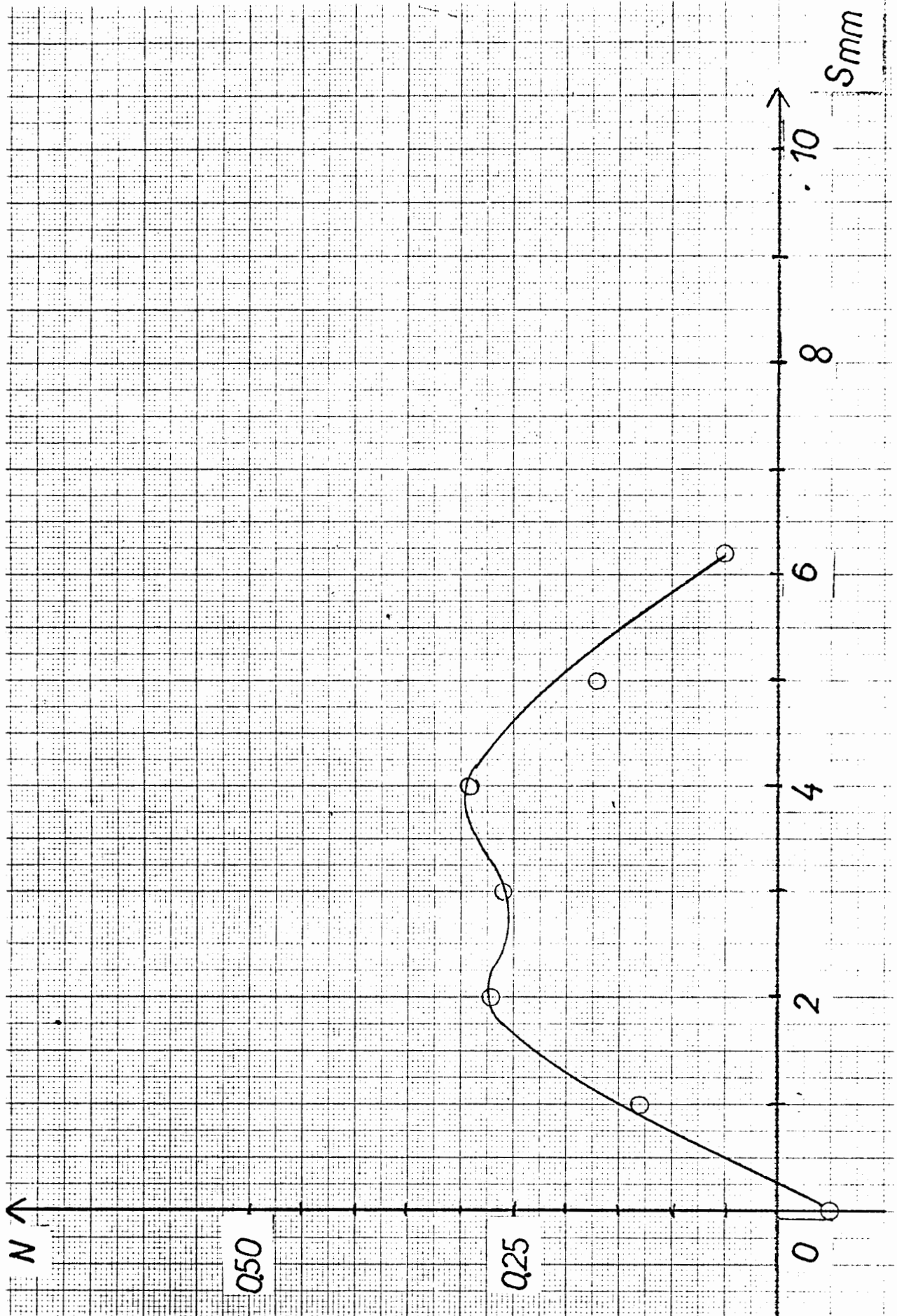


Figura B22 - Ordem de franja da fatia PP do modelo de 20°

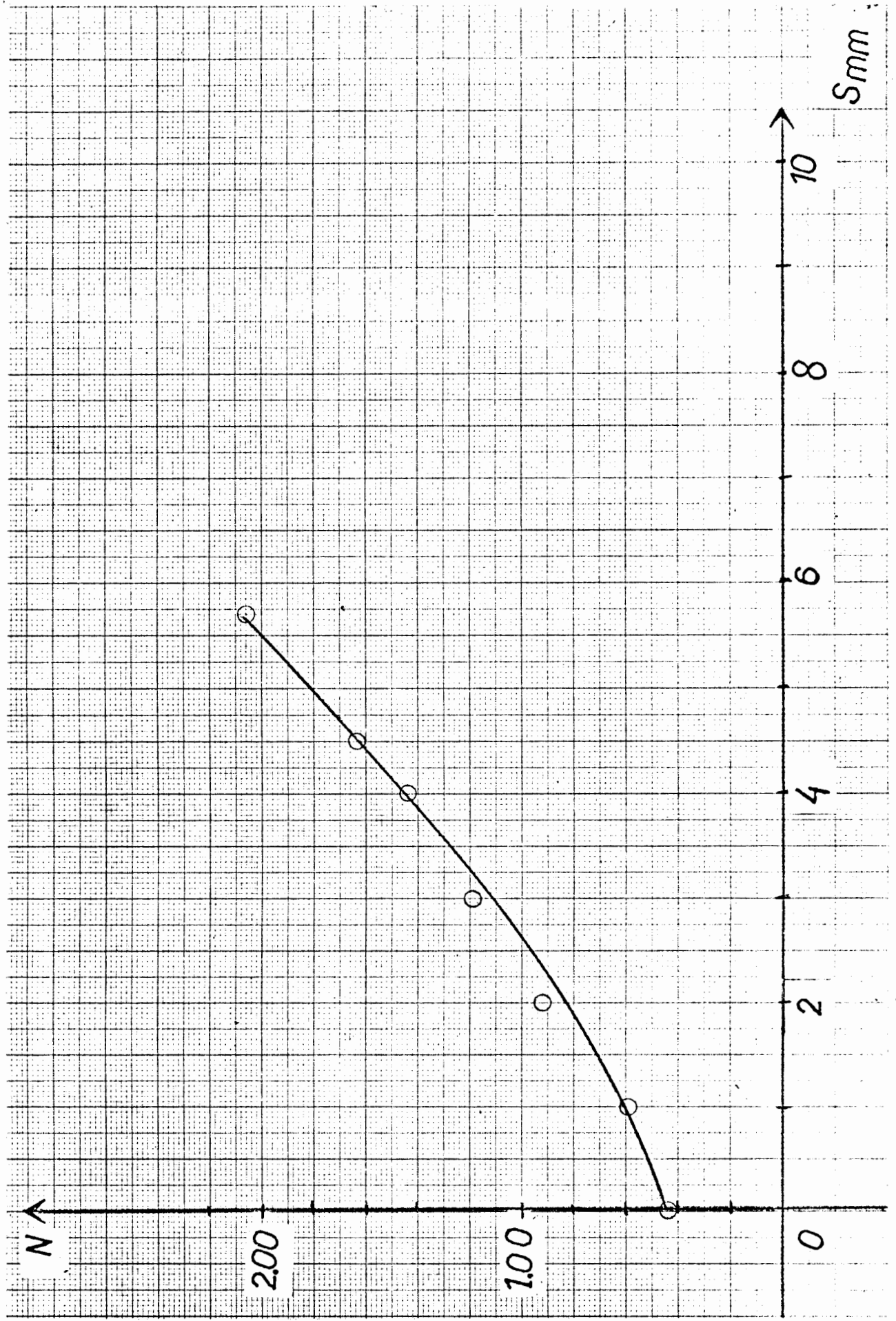


Figura B23 - Ordem de franja da fatia TB do modelo de 200

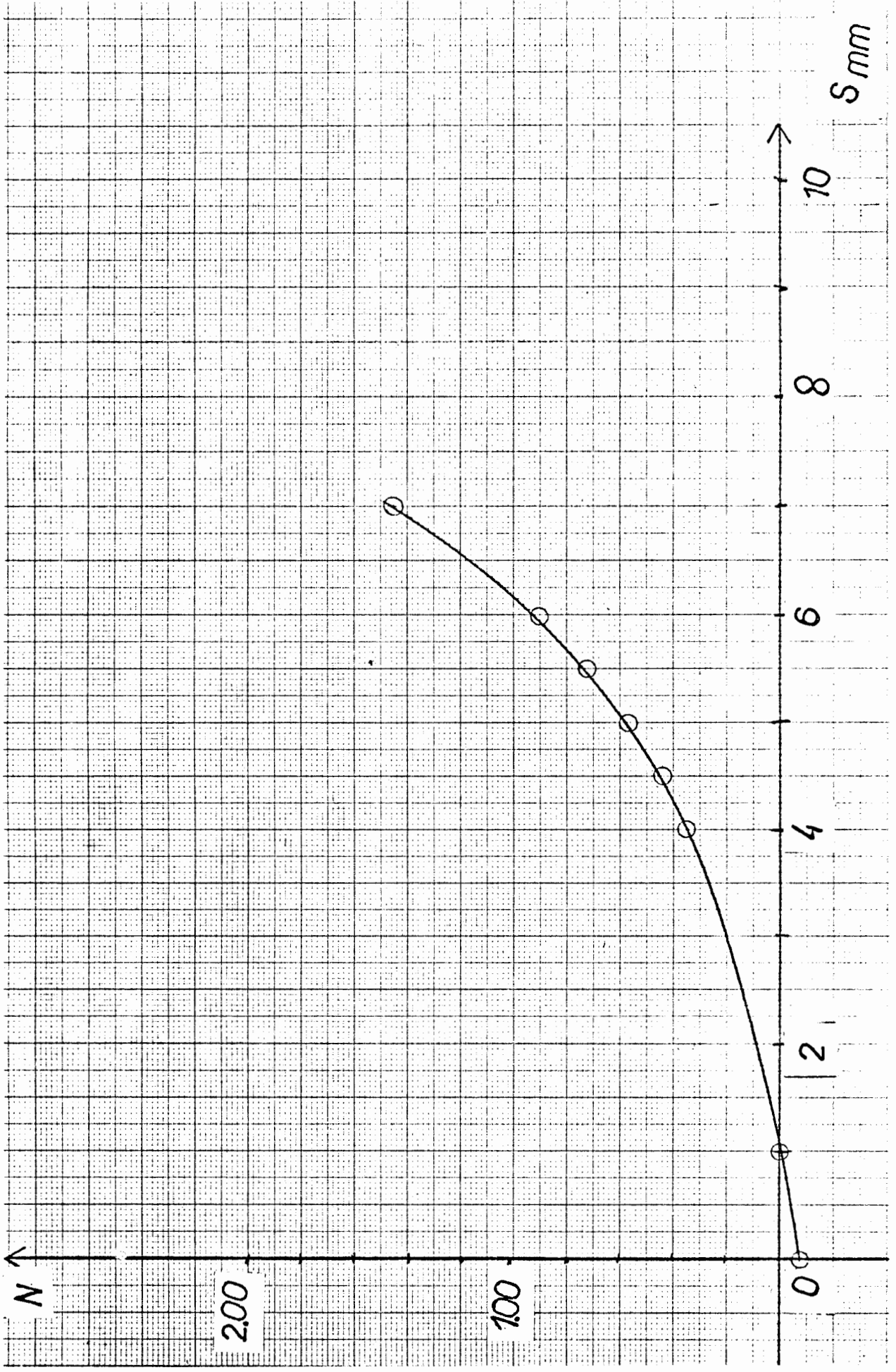


Figura B24 - Ordem de franja da fatia TC do modelo de 20°

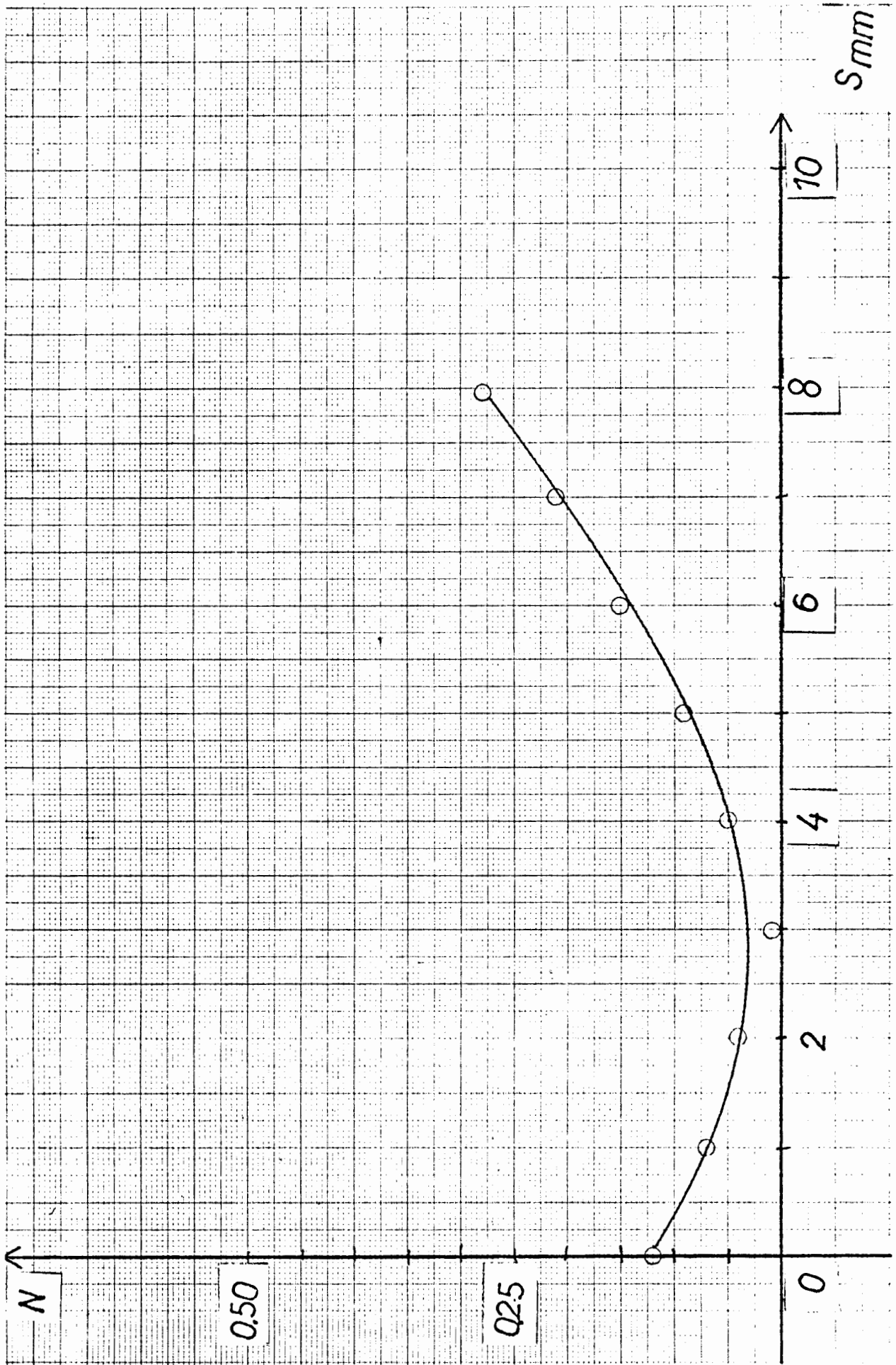


Figura B25 - Ordem de franja da fatia RN do modelo de 45°

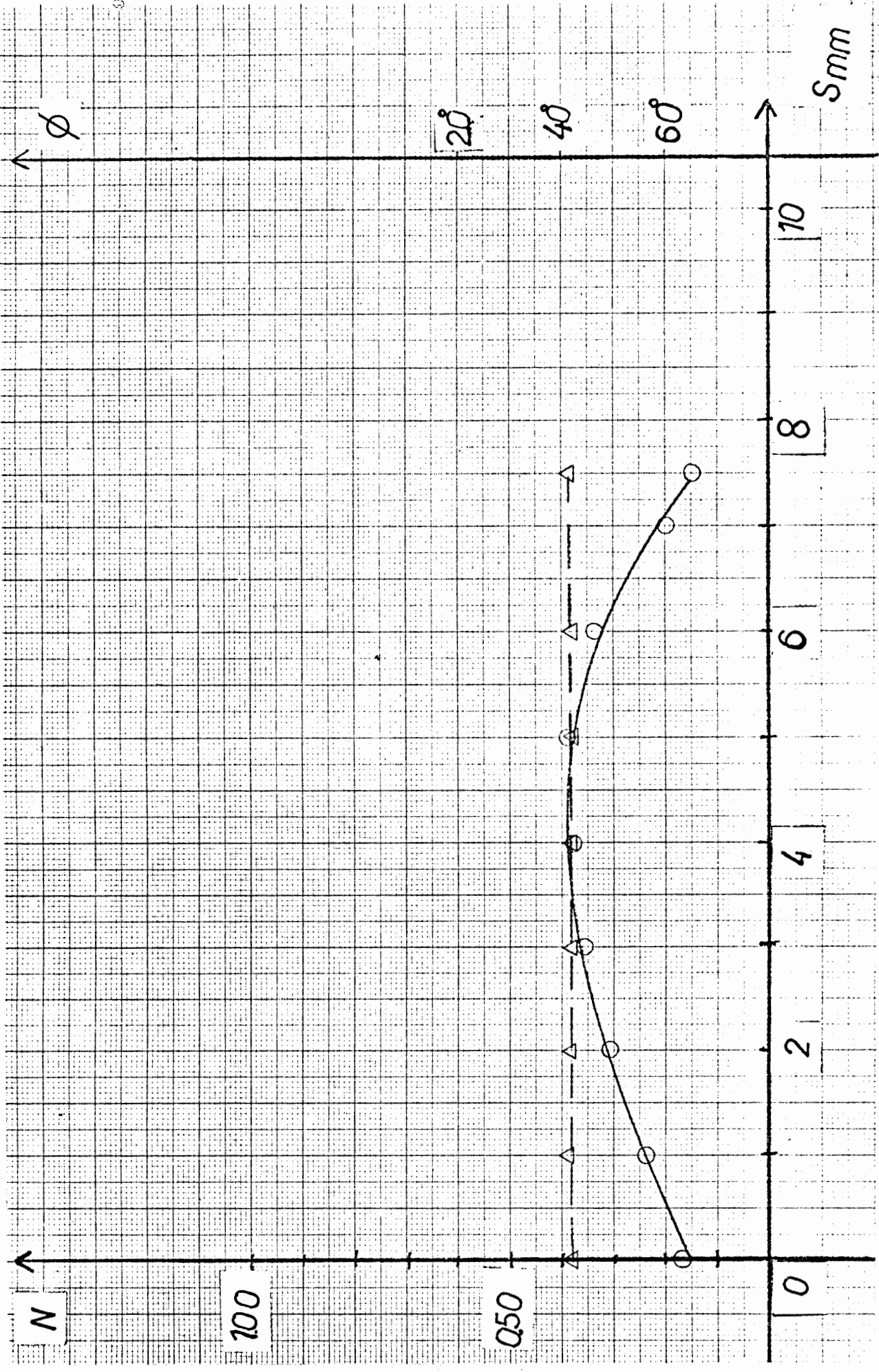


Figura B26 - Ordem de franja e parametro da isoclinica da fatia RT do modelo de 45°

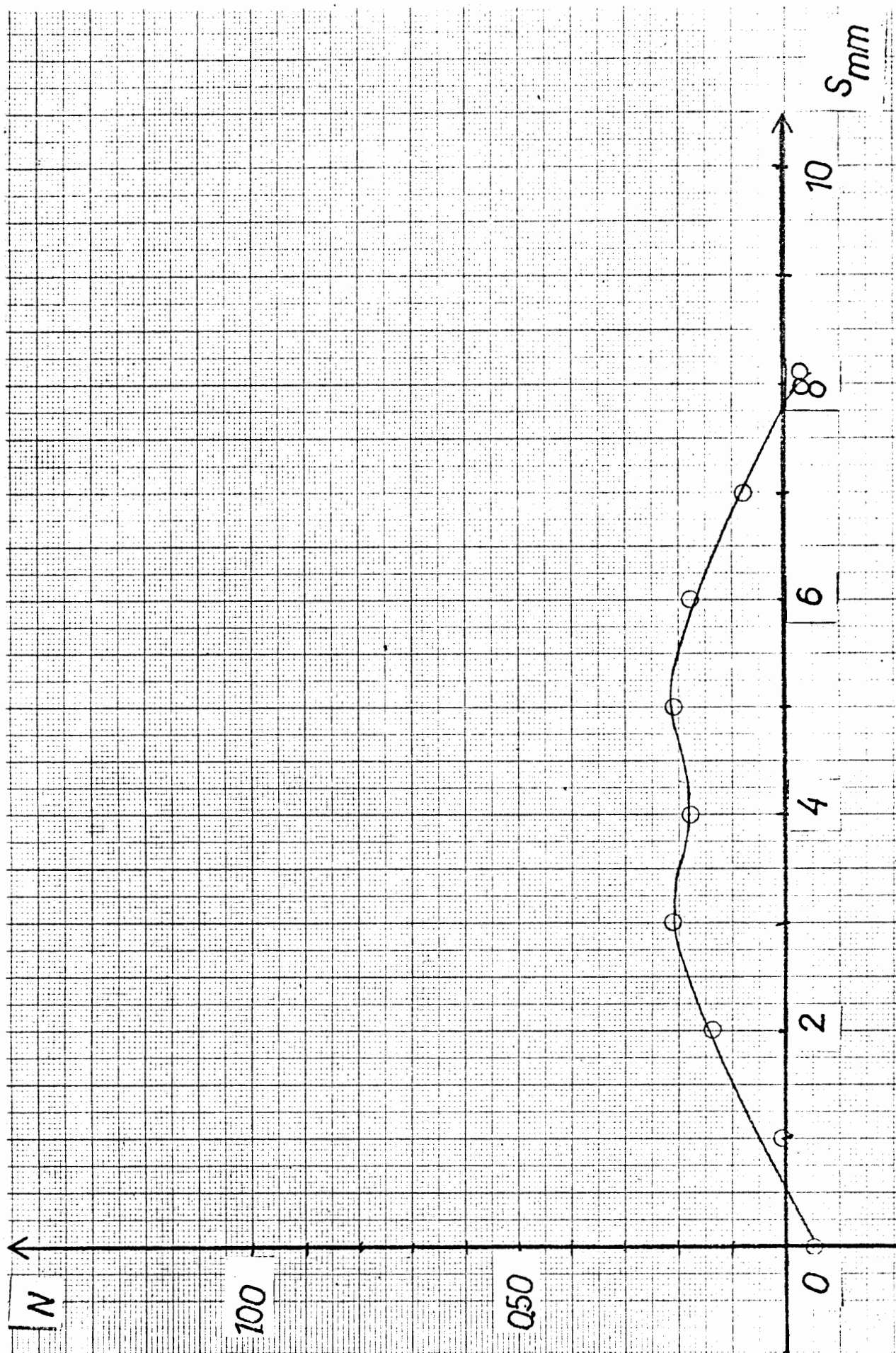


Figura B27 - Ordem de franja da fatia RB do modelo de 45°

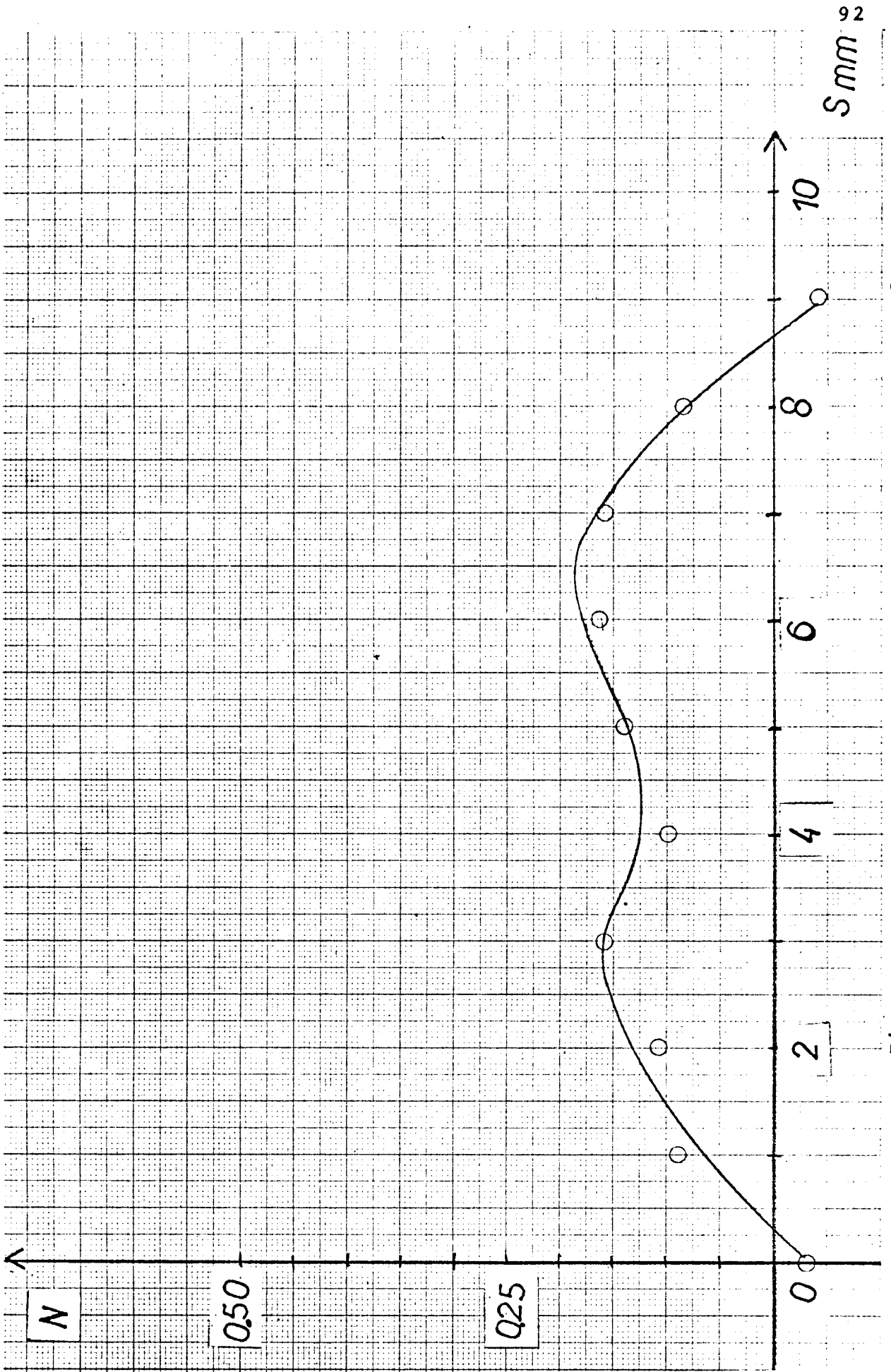


Figura B28 - Ordem de franja da fatia RC do modelo de 45°

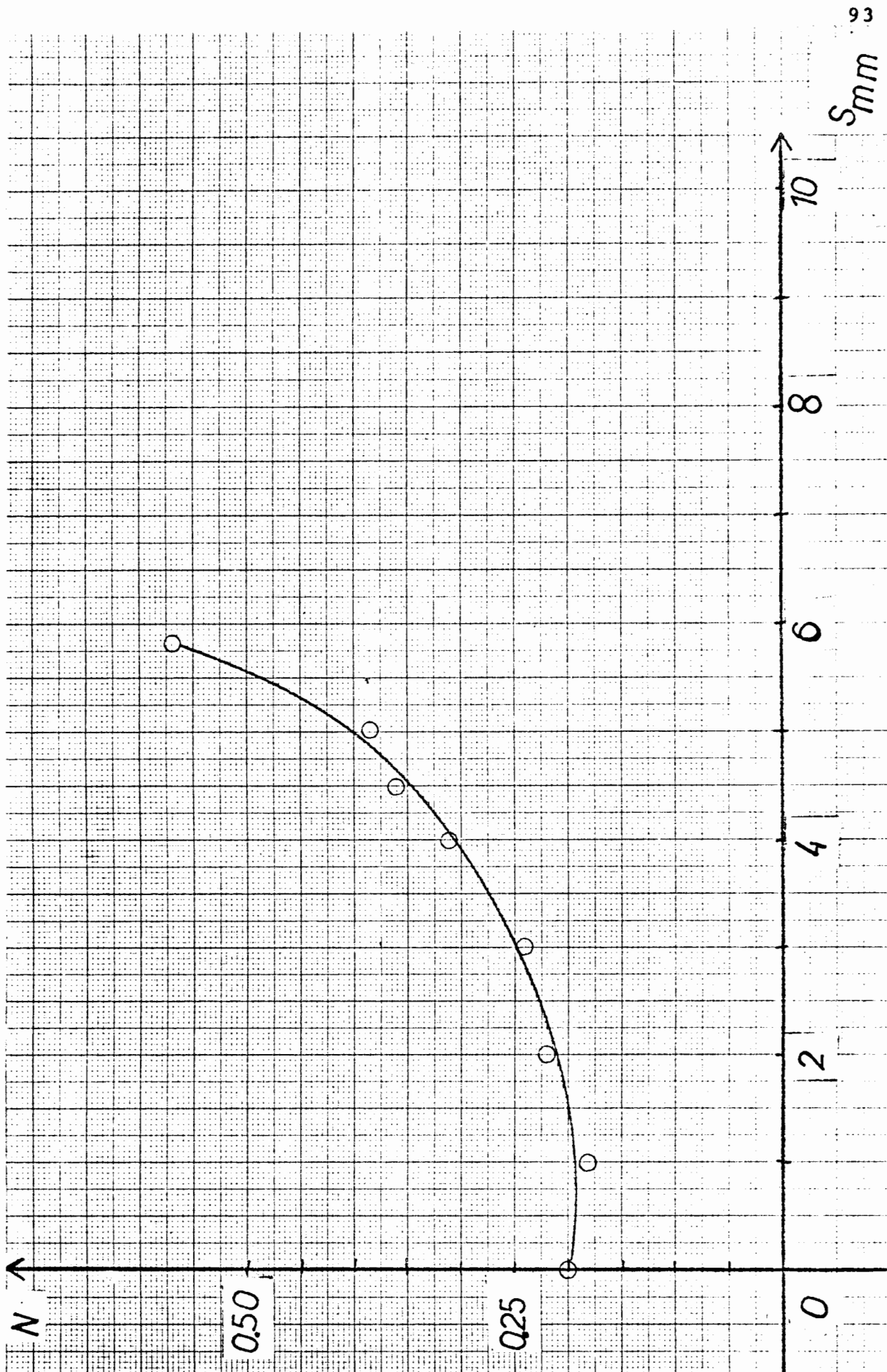


Figura B29 - Ordem de franja da fatia NT do modelo de 45°

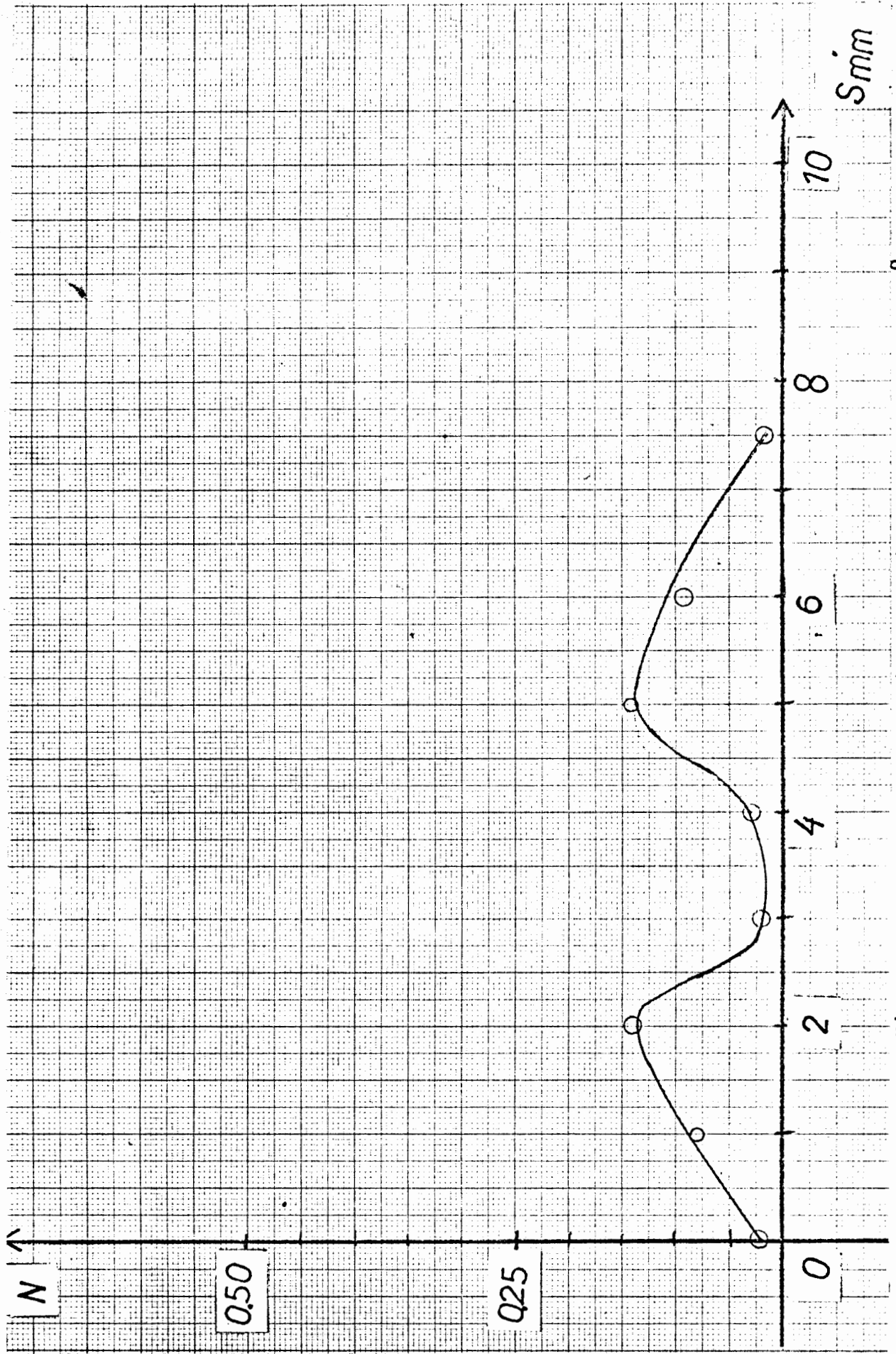


Figura B30 - Ordem de franja da fatia PP do modelo de 45°

Elaborado por: Eng.º de Estruturas da Universidade de Coimbra

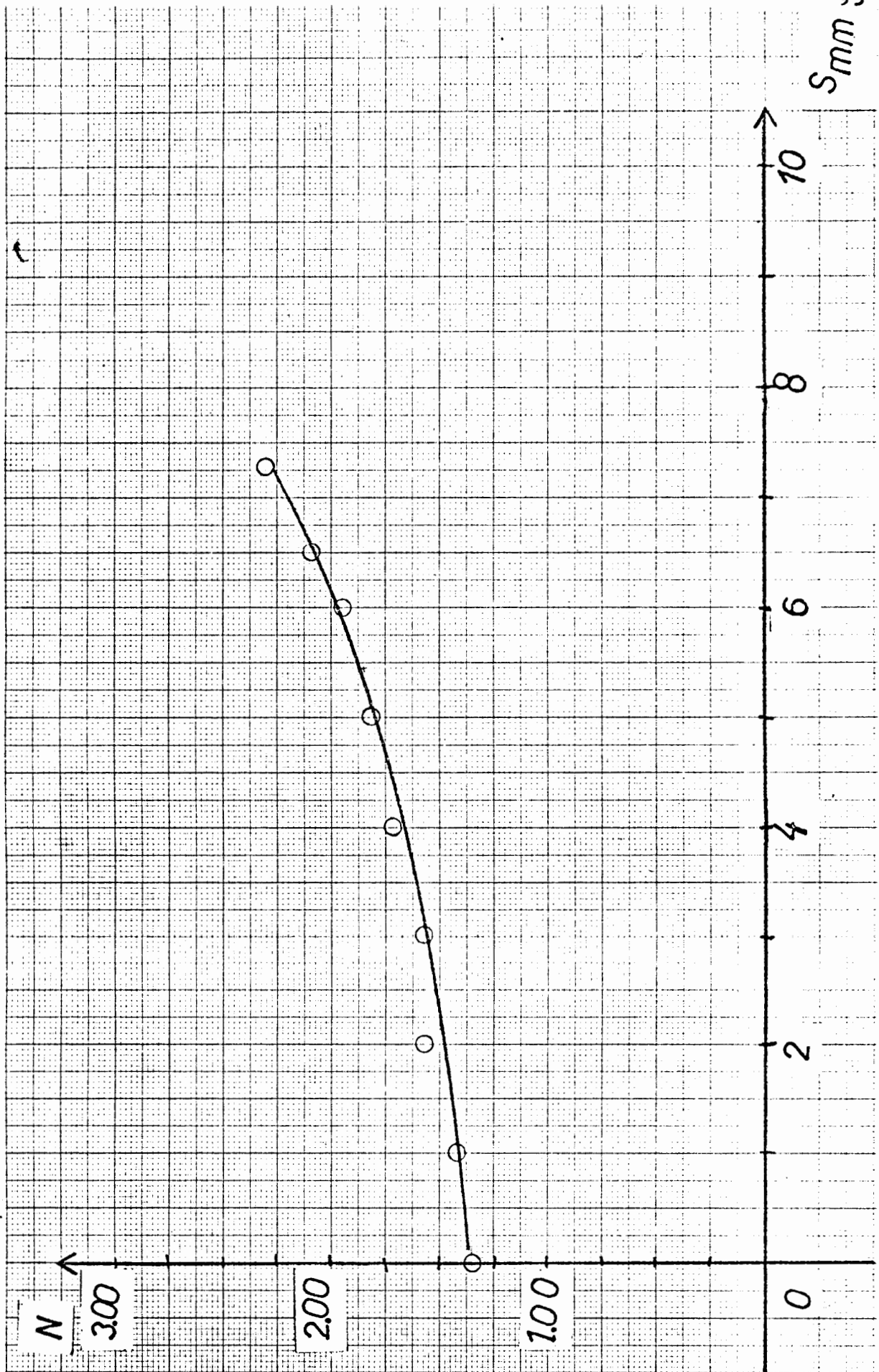


Figura B31 - Ordem de franja da fatia TB do modelo de 45°

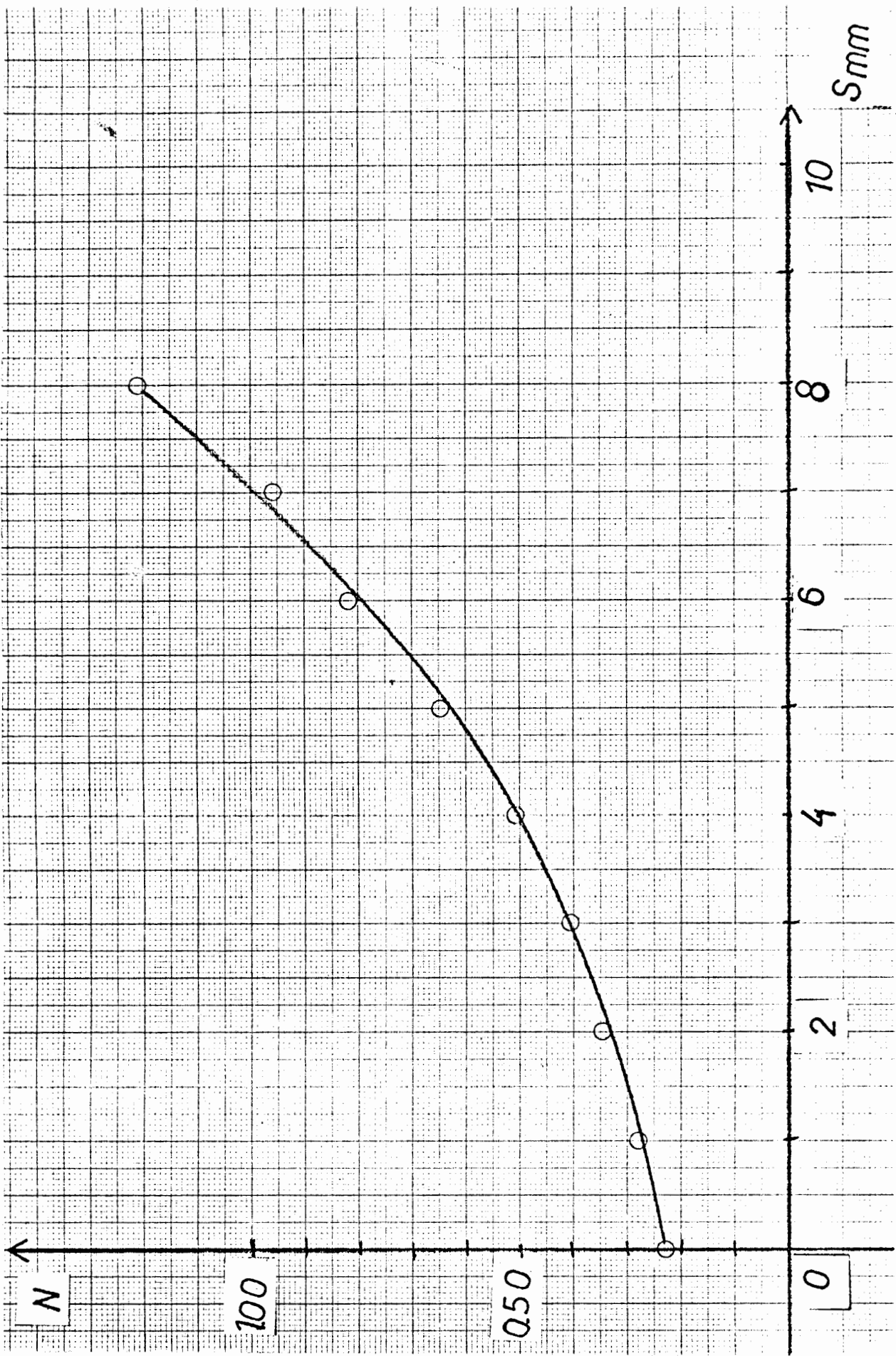


Figura B32 - Ordem de franja da fatia TC do modelo de 45°

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Teverovsky, I.G. "An investigation of the stresses in rotating discs with a number of apertures", Sov. Kotlo turbostr. 1940, nº 11, p.402, M.A.P. Trans. nº 1493.
2. Leist, K. e Weber, J. "Optical stress distributions in rotating discs with non-central holes", Rep. nº 57, 1956 (Inst. Jet. Prop., German Res. Inst. for Aeronautics, Aachen).
3. Green, W.A., Hooper, G.T.J. e Hetherington, R. "Stress distribution in rotating discs with non-central holes", Aero. Quart. 1964, 15, p.107.
4. Hetenyi, M.J. "The application of hardening resins to three dimensional photoelastic studies", J. Appl. Phys. 1939, 10, 295.
5. Newton, R.E. "A photoelastic study of stresses in rotating discs", Trans. Am. Soc. Mech. Engrs., 1940, A57, A174.
6. Edmunds, H.G. "Stress concentrations in rotating discs with non-central holes", Engineer, 1954, 198, 618.
7. Barnhart, K.E., Hale, A.L. and Merian, J.L. "Stresses in rotating discs due to non-central holes", Proc. Soc. Exp. Stress Analysis, 1951, 9 (nº 1), 35.
8. Fessler, H. e Thorpe, T.E. "Optimization of stress concentration at holes in rotating discs", J. Strain Analysis 1967, 2, 152.
9. Fessler, H. e Thorpe, T.E. "Reinforcement of non-central holes in rotating discs", J. Strain Analysis 1967 2, 317.
10. Fessler, H. e Thorpe, T.E. "Centrifugal stresses in rotationally symmetrical gas-turbine discs, J. Strain Analysis 1968, 3, 135.

11. Gomide, H.A. "*Desenvolvimento de um modelo material para fotoelasticidade tri-dimensional*", Tese de Mestrado, PUC/RJ, 1972.
12. Cernosek, J. e Perla, M. "*Composite model technique for three-dimensional photoelastic stress analysis*", Proceedings of IV International Conference on Stress and Strain Analysis, Cambridge, England, April 1970.
13. Leven, M.M. e Sampson, R.C. "*Large epoxy resin casting for three-dimensional photoelastic tests*". Res. Rept., 60-94459-2-R3, Westinghouse Research Laboratories, 1956.
14. Vilchez, C.M.M. "*Distribuição de tensões próximo das extremidades de dois cilindros montados com interferência*", Tese de Mestrado, PUC/RJ, 1972.
15. Dally, J.W. e Riley, W.F. "*Experimental Stress Analysis*", Mc-Graw-Hill, 1965.
16. Frocht, M.M. "*Photoelasticity*", Vol.I e II, John Wiley & Sons, Inc. 1965.
17. Durelli, A.J. e Riley, W.F. "*Introduction to photo-mechanics*", Prentice-Hall, 1965.

Obs: As referências de nºs 1 a 7 não puderam ser encontradas pelo autor, foram citadas para servirem como possível referência a algum trabalho futuro.