

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**CONDUÇÃO DE CALOR NÃO-ESTACIONÁRIA EM
PAREDES EXTERNAS MULTI-COMPOSTAS**

por

Paulo Otto Beyer

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Junho de 1998

**CONDUÇÃO DE CALOR NÃO-ESTACIONÁRIA EM
PAREDES EXTERNAS MULTI-COMPOSTAS**

por

Paulo Otto Beyer

Mestre em Engenharia

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, **PROMECC**, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Energia

Orientador: Prof. Dr. **Marco Túlio M. B. de Vilhena**

Co-orientador: Prof. Dr. Horácio Antonio Vielmo

Aprovada por:

Prof. Dr. Renato Machado Cotta

Prof. Dr. Paulo Smith Schneider

Profa.. Dra. Liliane Basso Barichello

Dr. Jorge Rodolfo S. Zabadal

Prof. Dr. Paulo Smith Schneider

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 26 de Junho de 1998.

Dedico

Às

Minhas

Três

Anas

Agradeço

ao Vilhena, por sua orientação, estímulo e amizade,
à Elaine, por seu apoio no início deste trabalho,
ao Horácio, pelo apoio das comparações numéricas,
à Liliane, por suas válidas opiniões,

e à Deus, pela graça da vida.

RESUMO

Neste trabalho é desenvolvida uma metodologia semi-analítica com a finalidade de calcular o fluxo de calor não-estacionário em paredes externas multi-compostos de edificações, em uma e duas direções.

A motivação que levou ao desenvolvimento deste assunto foi basicamente a necessidade do conhecimento dos fluxos de calor existentes em edificações. Esta aplicação tem grande importância nos cálculos de carga térmica de ambientes com a finalidade de dimensionamento de sistemas de ar condicionado.

Nesta análise aparece como importante o fato de que a envoltória das edificações apresenta um comportamento térmico não-estacionário, principalmente devido às condições externas jamais estacionarem como conjunto. Este comportamento reflete-se diretamente no comportamento térmico dos ambientes internos da edificação, interferindo em aspectos importantes como conforto térmico e sistemas de climatização.

Procura-se então uma metodologia capaz de realizar de forma semi-analítica o cálculo dos fluxos de calor existentes na envoltória da edificação, dando especial atenção à paredes externas multicompostas.

Para tanto, o problema diferencial em uma direção é transformado do domínio tempo para o domínio complexo s pela Transformada de Laplace, a equação resultante é trabalhada para encontrarem-se as constantes de integração, e o retorno para o domínio tempo é feito pela integral de inversão resolvida por Quadratura Gaussiana.

A metodologia de uma direção acima é aplicada em duas direções resolvendo o problema para temperaturas médias, de forma a reduzir o problema 2D para 1D. Nesta transformação, o efeito da segunda dimensão manifesta-se em um termo fonte. Para resolver este termo fonte é proposto o uso de uma equação auxiliar, que tem seus coeficientes encontrados iterativamente para cada ponto de Quadratura.

Os dois procedimentos, 1D e 2D mostraram-se satisfatório, sendo que o procedimento 1D com ótima precisão, e o procedimento 2D necessitando, após o conhecimento do caminho mostrado neste trabalho, uma maior pesquisa na equação ideal ao problema em análise, dependente das condições de contorno.

A metodologia analítica procurada apresenta como principal vantagem em relação aos métodos numéricos tradicionais o fato de não necessitar incrementos sequenciais no tempo e/ou espaço.

ABSTRACT

“Transient Heat Conduction in Multilayered Exterior Walls”

In this work, the Laplace transform technique with numerical inversion is used to develop solutions for the problem of one and two-dimensional transient heat conduction in multilayered walls. In this method, the partial derivatives with respect to the time variable are removed from the differential equation by the application of the Laplace transform, the resulting system of ordinary differential equations is solved and the transform of the temperature is inverted by numerical method. This method is based on Gaussian Quadrature, a method for the approximation of integrals. To test the method, a comparison was made with the Transfer Function Method, and with the Finite Volumes Method.

The two-dimensional problem is solved by reducing it to one-dimensional problem by the use of average temperatures across the x section, and introducing heat sources at the y boundary.

The advantage of the Laplace/Gaussian method is that there is no need to step in time or position. The solution for any value of t or x can be found immediately.

ÍNDICE

	Pág.
1 Introdução e Revisão Bibliográfica	1
1.1 Objetivos do Trabalho e Descrição do Problema	1
1.2 Revisão Bibliográfica	1
1.2.1 Métodos Numéricos	2
1.2.2 Funções de Transferência e Funções Z	3
1.2.3 Métodos Analíticos Gerais	7
1.2.4 Métodos que Utilizam a Transformada de Laplace	11
2 Fluxo de Calor Não-Estacionário Unidirecional em Paredes Externas Multicompostas	14
2.1 Desenvolvimento do Problema	14
2.2 Solução Analítica	16
2.3 Sistema a ser Resolvido	17
2.4 Quadratura Gaussiana	19
2.5 Aplicação do Método	21
2.6 Temperatura Sol-Ar	22
2.7 Método Numérico de Solução	26
2.8 Método da Função de Transferência	27
2.9 Problema Resolvido	27
2.10 Dados Climáticos Reais	31
2.11 Análise de Erros e Estabilidade	32
3 Fluxo de Calor Bi-Direcional não-Estacionário em Paredes Externas Multi-Compostas	36
3.1 Problema Proposto	36
3.2 Aplicação da Transformada de Laplace ao Problema	37
3.3 Temperatura Média	38
3.4 Aplicação da Transformada de Laplace na Temperatura Média	40
3.5 Equação Auxiliar Proposta	41
3.6 Solução do Problema	42
3.7 Sistema a ser Resolvido para a Temperatura Média	44
3.8 Convergência da Aproximação Proposta	46
3.9 Sistema a ser Resolvido para a Equação Proposta	47

3.10 Método Alternativo de Convergência	48
3.11 Problema Resolvido	50
3.12 Método Numérico Utilizado	56
3.13 Imprecisões	58
4 Conclusões	61
Referências Bibliográficas	64

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Constante de integração	
A_k	Peso de ponto de quadratura	
a	Coefficientes de equação quadrática	
a_{ij}	Coefficiente de matriz	
B	Constante de integração	
b	Coefficiente de equação quadrática	
b_{ij}	Coefficiente de matriz	
c	Coefficiente de equação quadrática	
d	Coefficiente de equação quadrática	
E	Erro percentual	[%]
G	Distribuição inicial de temperaturas	[°C]
H	Altura da parede	[m]
h	Coefficiente de convecção	[W/m ² °C]
I	Resultado de integral	
Id	Resultado da derivada de integral	
K	Valor auxiliar	
k	Condutividade térmica	[W/m °C]
M	Valor auxiliar	
N	Valor auxiliar	
p_k	Ponto de quadratura	
R	Raiz de s/α	
S	Termo fonte de calor	[W]
S_d	Resultado da derivada da integral do termo fonte	
s	Domínio da transformada de Laplace	
T	Temperatura	[°C]
t_{as}	Temperatura Sol-Ar	[°C]
t	Tempo	[s]
u_{ij}	Coefficiente de matriz	
α	Difusividade térmica	[m ² /s]
τ	Temperatura média	[°C]

Subíndices

- d Resultado de derivada
- i Meio constituinte da parede
- k Ponto de quadratura
- n Expoente do polinômio
- o Condição inicial

Superíndices

- p Equação proposta

ÍNDICE DE FIGURAS

	Pág.
2.1 Superfície Multicomposta	15
2.2 Superfície Externa	22
2.3 Temperatura Sol-Ar	24
2.4 Resultado do Polinômio para Temperatura Sol-Ar	25
2.5 Distribuição de Temperaturas e Polinômios	26
2.6 Parede Calculada	28
2.7 Excitação e Resposta do Sistema	30
2.8 Campo de Temperaturas (período crescente)	31
2.9 Evolução Real da Temperatura Sol-Ar	31
2.10 Resposta do Sistema com Polinômios Fracionário e Diário	35
3.1 Elemento Bidirecional Multi-composto	36
3.2 Perfil de Temperatura Transformada em y	42
3.3 Condições de Contorno e Interface	46
3.4 Seções e Pontos para Cálculo dos Coeficientes	49
3.5 Matriz do Método Alternativo	50
3.6 Temperaturas Sol-Ar Vertical e Horizontal	51
3.7 Parede Resolvida	52
3.8 Fluxos de Calor por Três Métodos	54
3.9 Campo de Temperatura e Equação Proposta	59

ÍNDICE DE TABELAS

	Pág.
2.1 Temperatura Sol-Ar	28
2.2 Fluxos de Calor para duas Temperaturas Iniciais, W/m^2	29
2.3 Resultados pelos Três Métodos (dia 4)	29
3.1 Temperatura Sol-Ar para Superfície Horizontal	50
3.2 Fluxos de Calor para Soluções Bi-Direcionais	53
3.3 Fluxo de Calor sem Convecção em y,W	55
3.4 Fluxos de Calor para Quatro dias, W	56

1 INTRODUÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo é feita uma introdução ao problema a ser resolvido e uma ampla revisão bibliográfica de trabalhos correlatos ao assunto em estudo.

1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO E DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Este trabalho visa calcular o fluxo de calor não-estacionário em paredes multi-camadas externas de edificações, em uma e duas direções. Este problema tem grande aplicação no cálculo de carga térmica de ambientes, com a finalidade de dimensionar sistemas de ar condicionado para conforto térmico. Neste problema o principal valor a conhecer é o fluxo de calor que entra no ambiente condicionado.

Para tanto é estudada uma parede referenciada na bibliografia (ASHRAE 1997) para fluxo uni-direcional (em x, chamado 1D) e bi-direcional (em x e y, chamado 2D). Neste cálculo, é considerado que externamente exista uma variação cíclica da temperatura do ar e da radiação solar, representadas pela temperatura Sol-Ar. No problema 1D é considerada a temperatura Sol-Ar para uma parede voltada para oeste, e no problema 2D é acrescentada a variação da temperatura Sol-Ar para uma superfície horizontal que passe a receber sol a partir das 12 horas, como se existisse uma janela vertical acima desta parede e que a proteja do sol antes das 12 horas. Estas configurações são bem detalhadas nos capítulos 2 e 3. O capítulo 2 analisa o fluxo de calor em uma direção, e o capítulo 3 analisa uma parede com fluxo de calor em duas direções.

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Para iniciar a análise do problema, procurou-se primeiramente realizar uma consistente revisão bibliográfica de trabalhos relacionados com o tema em estudo. Na revisão bibliográfica foram analisadas os principais enfoques dados à problemas de difusão de calor e umidade não-estacionários em meios multi-compostos. Procurou-se agrupar as metodologias em quatro grandes grupos: 1 - Métodos numéricos, 2 - Funções de transferência, 3 - Métodos analíticos e 4 - Transformada de Laplace.

1.2.1 MÉTODOS NUMÉRICOS

Esta seção preocupa-se principalmente com os cálculos relativos à difusão de calor e massa em meios variados, e algumas medições experimentais.

Spolek et al (1985) apresentam um trabalho onde preocupam-se com a transferência transiente de calor e massa em paredes, tendo em vista que o isolamento de paredes para conservação de energia aumenta a possibilidade de condensação de umidade no interior destas. Utilizam equações baseadas na conservação de massa e energia. O conjunto de equações diferenciais parciais resultantes incluem armazenagem de entalpia e massa de água. As equações são acopladas através dos coeficientes de transporte. Uma solução numérica por diferenças finitas gera perfis de temperatura e umidade para uma camada de material simples sujeita à uma grande faixa dos coeficientes das condições de contorno.

Burch et al (1989) comparam resultados previstos e medidos na transferência transiente de calor e umidade em paredes multicamadas. Apresentam um modelo de capacidade distribuída em diferenças finitas. O modelo é unidimensional e usa um potencial simples (pressão de vapor d'água) para prever a taxa de transferência de calor.

Ojanen e Kohonen (1989) analisam a influência higrotérmica da convecção do ar na estrutura de paredes. Desenvolvem um modelo numérico de simulação para analisar o comportamento higrotérmico transiente de estruturas de edificações multi-camadas porosas, com condução e convecção acopladas.

Burch e Thomas (1992) apresentam uma análise da acumulação de umidade em uma parede de madeira sujeita ao clima de inverno, através de um modelo transiente, unidimensional, em diferenças finitas, que prediz a transferência acoplada de calor e massa em paredes multicamadas em condições não-isotérmicas

Mahdavi e Lam (1993) apresentam análises dinâmicas e visualizações da difusão de vapor d'água através de componentes multicamadas de edificações, através de um método auxiliado por computador, em tempo real.

Karagiozis e Kumaran (1993) analisam o desempenho de barreiras contra vapor em paredes residenciais típicas. É utilizado um modelo de transporte bi-dimensional transiente para o ar, calor e umidade. São realizadas duas séries de cálculos. Na primeira, a parede é exposta às condições de contorno com coeficientes constantes, representativas de períodos típicos de aquecimento. Na segunda série, as condições externas são modificadas para representar evoluções climáti-

cas conhecidas. Estes cálculos preliminares não consideram efeitos de chuva, radiação solar e ventos.

Chorneyko e Besant (1989) apresentam um modelamento térmico da base de uma edificação com e sem piso isolado, através da instrumentação do porão de uma casa desocupada para medir os fluxos de calor e distribuição de temperaturas nas paredes isoladas e piso não isolado durante um ano. Os dados medidos foram comparados com dois métodos de dimensionamento de fluxos de calor transientes e com um modelo de elementos finitos bi-dimensional que incorpora trocas internas de calor radiante.

Observa-se nos trabalhos acima uma preocupação com o cálculo da difusão de umidade na envoltória das edificações. Um dos métodos para o cálculo transiente da transferência de calor em parede externas de edificações mais utilizado atualmente é o da Função de Transferência, que não permite o conhecimento do campo interno de temperaturas. Nota-se que todos os métodos acima são numéricos. Os métodos a serem desenvolvidos no presente trabalho deverão permitir o conhecimento do campo interno de temperatura sem necessidades de incrementos seqüenciais no tempo e/ou espaço, facilitando os cálculos de difusão de vapor d'água.

1.2.2 FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA E FUNÇÕES Z

O segundo grande grupo de metodologias para transferência transiente de calor em paredes externas de edificações são as Funções de Transferência e outras, a seguir analisadas.

Burch et al. (1987) apresentam um procedimento experimental para medir o desempenho térmico dinâmico de amostras de paredes compostas usando um calorímetro de câmara quente calibrada. Foi gerada uma condição climática externa dependente do tempo, como um ciclo de temperatura diurna sol-ar. A taxa transiente de transferência de calor através da amostra de parede foi determinada por um balanço energético da câmara de medição, e comparada com a taxa prevista usando um modelo analítico e funções de transferência por condução.

Ackerman e Dale (1987) comparam medições experimentais e previsões computacionais das perdas de calor em paredes de concreto isoladas e não-isoladas de porões em climas frios. As previsões foram feitas com um programa computacional de elementos finitos transiente bi-dimensional e pelo método de Mitalas (Função de Transferência). Foi encontrada boa aproximação entre as previsões computacionais e as medições no campo.

Burch et al. (1988) apresentam um método para caracterizar o desempenho dinâmico de amostras de parede de alvenaria com propriedades conhecidas de transferência de calor usando

um calorímetro de câmara quente calibrada. A parede foi instalada entre câmaras de medição e climática do calorímetro. Foram geradas na câmara climática funções excitação dependentes do tempo, incluindo um ciclo sol-ar diurno, um ciclo diurno de quatro harmônicas, uma função degrau e um pulso triangular. A taxa de transferência de calor da parede medida para cada função excitação foi comparada com boa aproximação à valores previstos usando um método analítico. Para cada função excitação, foram determinados coeficientes empíricos das funções de transferência (CFT) para a parede por ajuste de curvas das taxas medidas de transferência de calor. Os CFTs empíricos derivados dos testes de ciclo diurno predizem com sucesso a taxa de transferência de calor da parede para as outras funções excitação. Porém, este conjunto de CFTs não são únicos e diferem daqueles obtidos de um modelo analítico.

Burch et al (1990) mostram uma comparação de dois métodos de teste para determinar os coeficientes da função de transferência para uma parede usando um calorímetro de câmara quente calibrada, onde verifica experimentalmente e compara dois métodos de teste dinâmico para caracterizar o desempenho térmico transiente de paredes compostas. Neste métodos, uma amostra da parede é interposta entre as duas câmaras condicionadas do calorímetro. A superfície exterior da parede é sujeita à uma função excitação variável com o tempo para a temperatura do ar. Na superfície interna, a temperatura do ar é mantida constante, sendo medida a resposta como fluxo de calor. Deriva os coeficientes da função de transferência por condução que relacionam a resposta medida de fluxo de calor com a função excitação. Os dois métodos de teste dinâmicos foram aplicados à uma parede de blocos de concreto ocos isolados que continha pontes térmicas significativas e fluxos laterais de calor. Os coeficientes empíricos da função de transferência derivados pelos métodos de teste estimaram com boa aproximação a resposta de fluxo de calor da parede quando a superfície exterior foi sujeita à funções excitações sensivelmente diferentes daquelas usadas para derivar os coeficientes.

Seem et al (1990) apresentam um modelo para reduzir as funções de transferência usando um método de raiz dominante, colocando que os métodos da função de transferência são mais eficientes para resolver problemas de transferência de calor transientes de tempos longos que os esquemas numéricos de Euler, Crank-Nicolson ou outras técnicas clássicas. Mostra que as funções de transferência relacionam a saída presente de um sistema linear constante com uma série temporal das entradas presentes e passadas, e saídas passadas. No trabalho, as entradas são modeladas por uma função linear contínua por partes. Apresenta um novo modelo para reduzir o número de coeficientes nas funções de transferência que são usadas para resolver problemas de transferência de calor. Mostra duas vantagens no método: primeiro, se a função de transferência

original é estável, a função de transferência reduzida também será estável. Segundo, o método pode determinar as funções de transferência reduzidas para múltiplas entradas e simples saída.

Mais recentemente, Spitler e McQuiston (1993) desenvolvem a revisão de um manual para cálculo de cargas de aquecimento e resfriamento, na forma do novo ASHRAE Cooling and Heating Load Calculation Manual, como parte do ASHRAE RP-626, com ênfase em novas técnicas e dados. Muito do novo material do manual é baseado em recentes pesquisas da ASHRAE. O novo manual cobre três métodos de cálculo das cargas: o método de função de transferência (MFT), base para os seguintes, o método da diferença de temperatura da carga de resfriamento/carga de resfriamento solar/fator da carga de resfriamento (DTCR/CRS/FCR) e o método de diferença de temperatura equivalente total/média temporal (DTET/MT).

O método da Função de Transferência tem sido o método utilizado com mais frequência na resolução dos cálculos transientes de condução de calor em paredes externas multicompostas. Pode ser determinado analiticamente pela solução das matrizes de condução, que relacionam fluxos de calor e temperaturas. Apresenta como vantagem a simplicidade, pois uma vez conhecidos os coeficientes da função de transferência, os mesmos podem ser utilizados com qualquer outra função excitação. Apresenta como desvantagens o fato de não permitir qualquer modificação nos dados da parede original, como coeficientes de película e campo de temperaturas, bem como a exigência de incrementos temporais pré-definidos.

A transformada Z apresenta-se como uma alternativa às funções de transferência.

Eunilkim (1988) discute as bases e formalismo dos fatores de peso ambiental em termos de funções de transferência discretas térmicas de um modelo de zona simples, utilizando técnicas de transformada-Z, para analisar os fenômenos de transferência energética transiente em edificações. Os fatores de peso para temperaturas e fluxos de calor são formulados pelo princípio da superposição e derivados pelo uso do processo de Z-(de)convolução. Os resultados principais obtidos mostram os fatores de peso ambientais na sua forma compacta e também provê interpretações físicas dos parâmetros relacionados.

Haghighat et al. (1991) apresentam um procedimento experimental para obter os coeficientes das funções de transferência Z da envoltória de uma edificação. Considera que os métodos de cálculo para determinar os coeficientes da função de transferência z, que caracterizam o desempenho térmico dinâmico dos componentes da edificação, existem, mas dependem de um número de considerações e pode-se suplementá-los com coeficientes derivados experimentalmente. Discute neste trabalho o uso de técnicas de identificação do sistema para derivar a resposta térmica dinâmica dos componentes de edificação usando sinais seqüenciais multi-freqüência binários

(SMFB). Os SMFB são implementados para determinar a função de resposta de frequência do sistema em multi-freqüências. Os coeficientes da função de transferência Z são obtidos pela aplicação de técnicas de regressão multi-linear à resposta de frequência. Os coeficientes da função de transferência Z também podem ser obtidos utilizando regressão de mínimos quadrados no domínio temporal.

Haghighat e Liang (1992) apresentam uma revisão das alternativas de determinação da condução de calor transiente através da envoltória de edificações. Diferencia entre três métodos principais: técnicas numéricas, análise harmônica e função de transferência Z. Dá as capacidades, limitações e considerações destes métodos. Discute métodos de determinação dos coeficientes da função de transferência Z. Também apresenta uma comparação limitada dos métodos experimentais para determinação dos coeficientes da função de transferência Z. Mostra que análise por resposta de frequência usando sinal seqüencial multi-freqüência binário pode dar uma minuciosa descrição do desempenho térmico dinâmico de um sistema. O coeficiente da função de transferência Z pode então ser obtido usando-se técnicas de regressão multi-linear no domínio frequência. Este trabalho dá prioridade ao método da função de transferência Z, sendo que o único método analítico que comenta é por análise harmônica, um método limitado pelo fato das condições externas não serem sempre cíclicas.

Brown e Stephenson (1993) mostram medições, em calorímetro de câmara quente guarnecida, das características de transmissão de calor dinâmica de algumas espécies de paredes. Medem a resistência térmica estacionária e as características de transmissão de calor transiente de diversas paredes. Para todas as paredes, a resposta de frequência medida aproxima-se da resposta de frequência prevista. Por outro lado, a resistência térmica medida varia de 45 a 90 % da resistência térmica prevista. Concluem que, dentro das condições impostas aos dados e equações e assumindo a resistência térmica real do protótipo, o fluxo de calor previsto usando os coeficientes da função Z de transferência é suficientemente preciso para aplicações práticas.

Krarti et al (1994) descreve um algoritmo que calcula a transferência detalhada de calor entre o solo e edifícios, com análise do efeito do isolamento. Faz análise de sensibilidade espectral para determinar o efeito de mudanças cíclicas nas temperaturas internas e externas. Procura desenvolver uma solução semi-analítica, validar os resultados com dados empíricos ou modelos numéricos tridimensionais detalhados e gerar fatores de resposta para fundações para utilização em programas de simulação. Desenvolve, por análise de frequência, um modelo dinâmico simples baseado na função Z de transferência.

A metodologia de cálculo pela função Z de transferência é bastante semelhante à função de transferência, com a característica de basear-se na análise dos campos de frequência dos problemas transientes.

Uma forma semelhante às funções Z são os fatores de resposta. Irving (1992) coloca que os fatores de resposta térmica oferecem uma forma acurada de caracterizar o desempenho dos componentes da edificação. Mostra que as técnicas existentes usam métodos de séries temporais (seqüência ordenada de dados), e necessitam aparelhos ambientais e condições de contorno especiais, para obter resultados consistentes. Desenvolve um novo método para estimar a resposta dos componentes de edificações em condições de contorno transientes, e após faz uma comparação com o método do valor U (coeficiente global de transferência de calor) padrão. O novo método usa técnica algébrica puntual para obter valores do fator de resposta diretamente de dados medidos. Os valores de resposta são estimados de estatísticas de séries temporais com momentos centrais. O fator de resposta representa a transmissão térmica dinâmica, e a área sobre o fator de resposta é o valor U estacionário. O valor U é determinado e comparado com o valor previsto teoricamente. A relação entre duas séries temporais pode ser caracterizada em termos dos fatores de resposta. O fluxo de calor pode ser expresso como uma convolução entre o gradiente de temperatura observado e o fator de resposta térmica.

1.2.3 MÉTODOS ANALÍTICOS GERAIS

Nesta seção serão vistos métodos analíticos que não utilizam a Transformada de Laplace, que serão vistos mais tarde.

Serão em primeiro lugar comentadas metodologias analíticas baseadas na separação de variáveis ou soluções por séries de potência.

Burow e Weigand (1990) analisam a condução de calor unidimensional em um sólido semi-infinito onde a temperatura superficial é uma função harmônica periódica. Procuram uma solução aproximada simples para o comportamento transiente. Dividem a solução em duas partes: uma com oscilação periódica estacionária e outra que descreve o comportamento transiente da temperatura desde a superfície do sólido. A parte estacionária é conhecida, e a parte transiente é resolvida pela expansão em séries de potência.

Chang e Payne (1991) procuram uma solução analítica exata para a condução de calor em uma placa com duas camadas de materiais diferentes com condutividade linearmente dependente da temperatura. O problema é bi-dimensional sem fonte, com temperaturas prescritas em três la-

dos e isolamento no quarto lado. A condutividade térmica é considerada por uma transformação de Kirchhoff. O problema é linearizado e resolvido por separação de variáveis. Conclui existir diferenças significativas na distribuição de temperatura e fluxo de calor entre casos de condutividade não dependente e dependente da temperatura.

Tsai e Crane (1992) preocupam-se com a transferência de calor entre superfícies com contato imperfeito. Apresenta uma solução analítica para a distribuição de temperaturas em um sistema simétrico unidimensional com fluxo de calor em um lado e isolamento no outro. Resolvem o problema utilizando o método da superposição de subproblemas e pelos autovalores e autofunções.

Choudhury e Jaluria (1994) obtém uma solução analítica para a distribuição de temperatura transiente em uma placa plana e em uma barra cilíndrica de comprimento finito movendo-se a velocidade constante e sujeita a transferência de calor convectivo na superfície. A solução analítica é obtida como uma série infinita. A inclusão dos primeiros 25 termos da série foi suficiente para obter uma solução convergente na maioria dos casos. A solução analítica é comparada com soluções numéricas obtidas previamente para este problema de fronteira móvel. Obtém excelente aproximação entre resultados analíticos e numéricos, indicando a importância da solução analítica para validação dos esquemas numéricos. Investiga a variação do campo de temperatura dentro do material com o tempo. Para tempos muito pequenos, após a partida dos processos, as soluções numéricas são muitas vezes aproximadas. Nestes casos os resultados analíticos são particularmente úteis.

Outras metodologias bastante importantes são os métodos integrais.

Haji-Sheikh e Beck (1990) apresentam um procedimento para obter soluções precisas para muitos problemas de condução transiente em geometrias complexas usando um método integral baseado em Galerkin (IBG). As condições de contorno não-homogêneas são acomodadas pela técnica de solução com funções de Green. Uma função de Green obtida pelo método IBG mostra excelente precisão para grandes tempos. Mostra-se que a partição temporal da função de Green leva à soluções corretas para pequenos e grandes tempos. Em um exemplo, é considerado um cilindro oco com superfície interna convectiva e fluxo de calor prescrito na superfície externa. São suficientes somente poucos termos seja nas soluções para tempos pequenos ou grandes para produzir resultados com excelente precisão. A metodologia usada para sólidos homogêneos é modificada para aplicação em sólidos heterogêneos complexos.

Vujanovic e Jones (1990) consideram três métodos analíticos para procurar as soluções aproximadas de problemas de condução de calor unidimensional, transiente e não linear basean-

do-se nas equações canônicas de transferência de calor. O primeiro método pode ser considerado como uma generalização ou refinamento do método integral. O segundo é um método iterativo similar ao Targ (linearização) utilizado na teoria de camada limite. O terceiro método é um procedimento variacional introduzido no espírito do princípio variacional de Gauss.

Bouzidi (1991a) propõe um modelo analítico para o tratamento do problema de difusão térmica não-estacionária e unidirecional em uma parede multicamadas plana, cilíndrica ou esférica. Este modelo é baseado na técnica de transformação integral e no formalismo das matrizes de transporte para resolver respectivamente o problema homogêneo nos limites e o problema de valores propostos, que não é do tipo Sturm-Liouville convencional por causa da descontinuidade dos coeficientes. Para o cálculo dos valores próprios em vista de uma obtenção numérica do modelo, se apresenta como um procedimento confiável porque os métodos clássicos não afastam o risco de alguma falha no curso dos cálculos.

O modelo analítico desenvolvido em Bouzidi (1991a) é estendido ao problema de difusão térmica não-estacionário entre diversas placas multi-compostas em Bouzidi (1991b) formando um cenário onde se produzem trocas acopladas de condução, convecção e radiação. Esta extensão exige, além da constância dos coeficientes, a linearidade e reciprocidade das transferências térmicas. Para o cálculo dos autovalores do problema singular de Sturm-Liouville, associado ao problema homogêneo nos limites resultante da decomposição do problema original, se mostra que o procedimento descrito em Bouzidi (1991a) é extensível ao caso considerado nesta segunda parte.

Apresenta-se aqui outros métodos analíticos, que não incorporam a transformada de Laplace.

Shapiro e Motakef (1990) investigam experimental e analiticamente a transferência de calor e massa unidimensional transiente com mudança de fase em uma placa porosa. Mostram que para uma grande classe de problemas a taxa de movimentação da zona úmida pode ser desacoplada da troca transiente nos campos de espécie e temperatura, e que o processo transiente pode ser reduzido àqueles de campos quase-estacionários nos domínios dependentes do tempo. Apresenta resultados analíticos para condensados móveis e imóveis. Obtém razoável associação entre as soluções analíticas e dados experimentais.

Caulk (1990) desenvolve um método para calcular as temperaturas da solução estacionária periódica em corpos sólidos com condições de contorno em alta-freqüência. As dificuldades numéricas associadas com os gradientes dos incrementos e rápida variação de temperatura próxima à fronteira são trabalhadas confinando todas as temperaturas transientes à uma camada de con-

torno limítrofe de espessura constante. A espessura da camada é especificada e depende somente do período do distúrbio no contorno e da difusividade térmica do material. A solução transiente na camada superficial é representada por um polinômio em sua coordenada transversal, com coeficientes variáveis temporais determinados por um método Galerkin. O método desenvolvido é suficientemente geral para manusear condições de contorno não-lineares, e particularmente útil no caso importante de coeficiente de transferência de calor variável com o tempo.

Grandjean e Thibault (1991) apresentam um novo critério para assumir resistência térmica interna negligenciável em problemas de condução de calor transientes. Consideram que o limite de Biot igual à 0,1 pode ser aumentado se a mudança da temperatura externa for gradual. Derivam soluções analíticas para a temperatura interna dos sólidos quando a temperatura do fluido externo varia de acordo com dinâmica de primeira ordem. Comparam as diferenças de temperaturas entre o método da capacitância global e soluções exatas como função do número de Biot e do critério de Predvoditelev ($Pd = L^2/\alpha\tau$). Mostram que o número de Biot pode ser relaxado para pequenos valores do critério de Predvoditelev. Para sólidos com condutividade térmica finita, e resistências convectivas e condutivas importantes, o balanço calórico pode ser resolvido pela integral de superposição de Duhamel.

Claridge (1992) apresenta o TC 4.7 Procedimento para Análises Energéticas Simplificadas (PAES), que não incorpora massa térmica como um fator na estimativa das necessidades energéticas de aquecimento e resfriamento de um prédio. O projeto de pesquisa ASHRAE RP-564 foi iniciado em parte para desenvolver um tratamento mássico térmico possível de ser utilizado no PAES. Utiliza um circuito simples RC (resistência / capacitância) com um nó mássico simples usado em cada zona. O modelo é fisicamente intuitivo e flexível, e pode ser resolvido analiticamente.

Hou et al (1993) apresentam um método de elementos discretos para meios compostos e condução de calor unidimensional. A função de Green para estado estacionário e meio discretamente não-homogêneo é mostrada pelo uso de princípio iterativo. As soluções exatas podem portanto serem expressas por representação de funções de Green. Um problema não-estacionário é resolvido numericamente tratando as derivadas temporais como termo fonte. Os resultados demonstram precisão, estabilidade e eficiência.

Wei e Shian (1993) apresentam uma solução analítica para o campo tridimensional de temperaturas no líquido e zonas termicamente afetadas ao redor de uma cavidade de solda produzida por uma radiação móvel distribuída de densidade energética baixa ou alta. A distribuição da taxa de energia incidente é assumida como Gaussiana e a cavidade é idealizada por um parabolóide de

revolução em pedaços de espessura infinita, semi-infinita ou finita. O estudo encontra que os campos de temperaturas podem ser descritos pelas funções de Laguerre e hipergeométricas confluentes. Satisfazendo um balanço da quantidade de movimento na base da cavidade e utilizando uma consequência da segunda lei da termodinâmica, a profundidade de penetração é determinada.

Xin e Tao (1994) investigam uma solução analítica para a condução de calor transiente em dois meios semi-infinitos em contato com diversos materiais. O contato pode ser perfeito ou não, inclusive com fonte de calor entre os meios. Baseiam-se nas soluções fundamentais da condução de calor transiente em meio simples semi-infinito para obter soluções analíticas da condução de calor quando acopla-se dois meios diferentes.

1.2.4 MÉTODOS QUE UTILIZAM A TRANSFORMADA DE LAPLACE

Neste item serão apresentados diversos métodos que utilizam a Transformada de Laplace. Os primeiros analisados são os Métodos Híbridos. Estes métodos em geral utilizam a transformada de Laplace associada com alguma metodologia numérica.

Chen e Chang (1990) desenvolvem uma aplicação do método híbrido em problemas inversos de condução de calor. O método híbrido envolvendo o uso combinado dos métodos da transformada de Laplace e dos elementos finitos é consideravelmente potente para resolver problemas de condução de calor linear unidimensional. Neste método, os termos dependentes do tempo são removidos do problema usando o método da transformada de Laplace e então o método de elementos finitos é aplicado ao domínio espacial. A temperatura transformada é invertida numericamente para obter o resultado da quantidade física. Devido à não existência de incremento temporal, este método pode calcular diretamente as condições superficiais de um problema inverso sem incremento temporal.

Chen e Lin (1991) apresentam um método numérico híbrido que combina a aplicação da técnica de transformada de Laplace e o método de diferenças finitas (MDF) ou o método dos elementos finitos (MEF) em problemas térmicos transientes não-lineares. O domínio espacial nas equações governantes é discretizado pelo MDF ou MEF e os termos não lineares são linearizados por expansão em séries de Taylor. Os termos dependentes do tempo são removidos das equações linearizadas pela transformação de Laplace, e os resultados à um tempo específico podem ser calculados sem incremento computacional no domínio temporal. Para mostrar a eficiência e precisão do método, estuda diversos problemas térmicos transientes não-lineares unidimensionais.

Novamente Chen e Lin (1992) estudam a aplicação híbrida da técnica de transformada de Laplace e método de diferenças finitas (MDF) à problemas de Stefan unidimensionais envolvendo condições de contorno radiativas e convectivas. O termo radiativo é linearizado por aproximação em séries de Taylor, e então é aplicado o método híbrido. Este esquema é obtido pelo uso da técnica de transformada de Laplace para os termos dependentes do tempo e do MDF com grade fixa para o domínio espacial. Pode ser visto em vários exemplos ilustrados que obtém-se excelente ajuste entre os resultados do método e outros de trabalhos anteriores. Para o problema de mudança de fase sujeito à condições de contorno não lineares, três ou quatro iterações são necessárias para obter um resultado convergente num tempo específico. As análises presentes também demonstram que a aplicação da técnica de transformada de Laplace não se limita à problemas de mudança de fase com condições de contorno lineares.

Kolev e Van der Linden (1993) apresentam uma aplicação da transformada de Laplace na solução de problemas de transferência de calor e massa transientes em sistemas de escoamento. Desenvolvem uma técnica numérica rápida para a solução das equações diferenciais parciais que descrevem fenômenos de transporte bi ou tridimensionais transientes. Baseia-se na transformação do domínio temporal original no domínio de Laplace onde são feitas integrações numéricas, e por transformações inversas numéricas subsequentes pode-se obter a solução final. O tempo computacional é reduzido em comparação com as técnicas de diferenças finitas convencionais. A eficiência das técnicas propostas é demonstrada por exemplos ilustrativos. O trabalho propõe técnicas numéricas rápidas para a solução das equações diferenciais parciais lineares, combinando a transformada de Laplace e técnicas de diferenças finitas.

Chen e Lin (1993) investigam uma nova simulação numérica do problema de condução de calor hiperbólico. A primeira dificuldade encontrada na solução numérica destes problemas é oscilação numérica na vizinhança de descontinuidades. Mostram que técnicas híbridas baseadas na transformada de Laplace e métodos de volume de controle podem ser aplicados com sucesso para suprimir estas oscilações. O método da transformada de Laplace é usado para remover os termos temporais e as equações transformadas são discretizadas pelo esquema de volume de controle. São ilustrados vários exemplos comparativos envolvendo um problema não-linear com radiação superficial e a condução de calor hiperbólica em uma região composta, para verificar a precisão do método. Devido à aplicação do método da transformada de Laplace, a técnica não necessita considerar os efeitos do número de Courant nos resultados numéricos.

Os métodos híbridos são interessantes, porém no presente trabalho desenvolve-se uma metodologia que não necessita o apoio de métodos numéricos, ganhando-se tempo computacional.

Outra forma de aplicar a Transformada de Laplace é realizando a inversão por séries ou tabelas. Nestas metodologias, a inversão da transformada de Laplace é feita pela utilização de séries ou pelo uso de transformadas conhecidas.

Kolev e Pungor (1987) discutem o problema de resolver numericamente modelos hidráulicos baseados no fluxo tamponado disperso axialmente, pela transformada de Laplace, que é aplicável para o modelamento matemático de diferentes fluxos através de sistemas seja em análises químicas (cromatografia, análise de injeções em fluxos) ou indústrias químicas (diferentes reatores tubulares). Comparam métodos para inversão numérica dos modelos de solução no domínio Laplace pela expansão em séries das funções ortogonais. Os melhores resultados com respeito à precisão e tempo computacional são encontrados pelos métodos que empregam polinômios de Chebyshev de primeira ordem e séries de Fourier em senos. Estes métodos foram tidos como melhores nestes aspectos que alguns outros freqüentemente usados em métodos de inversão numérica.

Ku e Chan (1990) propõe uma técnica para estender o método da transformada de Laplace de forma a obter uma solução de forma fechada para problemas não lineares de mudança de fase, utilizando transformadas inversas conhecidas. Compara as soluções obtidas com soluções exatas disponíveis.

Blackwell (1990) obtém uma solução analítica para o perfil de temperatura em um sólido semi-infinito com uma fonte com decaimento exponencial (com a posição) e condição de contorno convectiva usando transformadas de Laplace e soluções tabeladas da transformada inversa. Os parâmetros dimensionais apropriados são identificados e apresentadas as temperaturas como função destes parâmetros na forma gráfica. Com resfriamento nas superfícies expostas, a temperatura máxima ocorre no interior do material. A localização da máxima temperatura como função dos vários parâmetros do sistema é apresentada na forma gráfica.

Zedan e Mujahid (1993) desenvolvem um método preciso e eficiente para calcular a resposta transiente (e periódica estacionária) de uma parede composta sujeita à fluidos com temperatura variável periodicamente em um lado e constante no outro. A equação diferencial do problema é resolvida no domínio de Laplace e, após, transformada de volta para o domínio temporal. O método usado para a transformada inversa geral é a aproximação pela técnica das séries de Fourier.

Estes últimos métodos apresentados assemelham-se muito com a metodologia unidirecional desenvolvida no presente trabalho.

2 FLUXO DE CALOR NÃO-ESTACIONÁRIO UNIDIRECIONAL EM PAREDES EXTERNAS MULTICOMPOSTAS

Neste capítulo é desenvolvida uma metodologia semi-analítica para o cálculo do fluxo de calor transiente unidirecional em elementos multicompostos, sujeitos a uma condição de contorno com temperatura variável e outra fixa. Tal método baseia-se na aplicação da Transformada de Laplace com inversão por Quadratura Gaussiana. Como atrativo ele apresenta, em relação aos métodos puramente numéricos, a vantagem de não necessitar incrementos seqüenciais no tempo e no espaço, podendo-se portanto obter a solução desejada em qualquer instante.

Considerando que uma aplicação em potencial desta nova metodologia, no âmbito da Engenharia, é o cálculo da transferência de calor através de paredes externas de habitações, como exemplo aplicam-se condições de contorno envolvendo radiação solar e convecção transientes na face externa de uma parede multicomposta, e convecção na sua face interna. O exemplo é resolvido pelo método proposto, volumes finitos e função de transferência, sendo comparados os resultados.

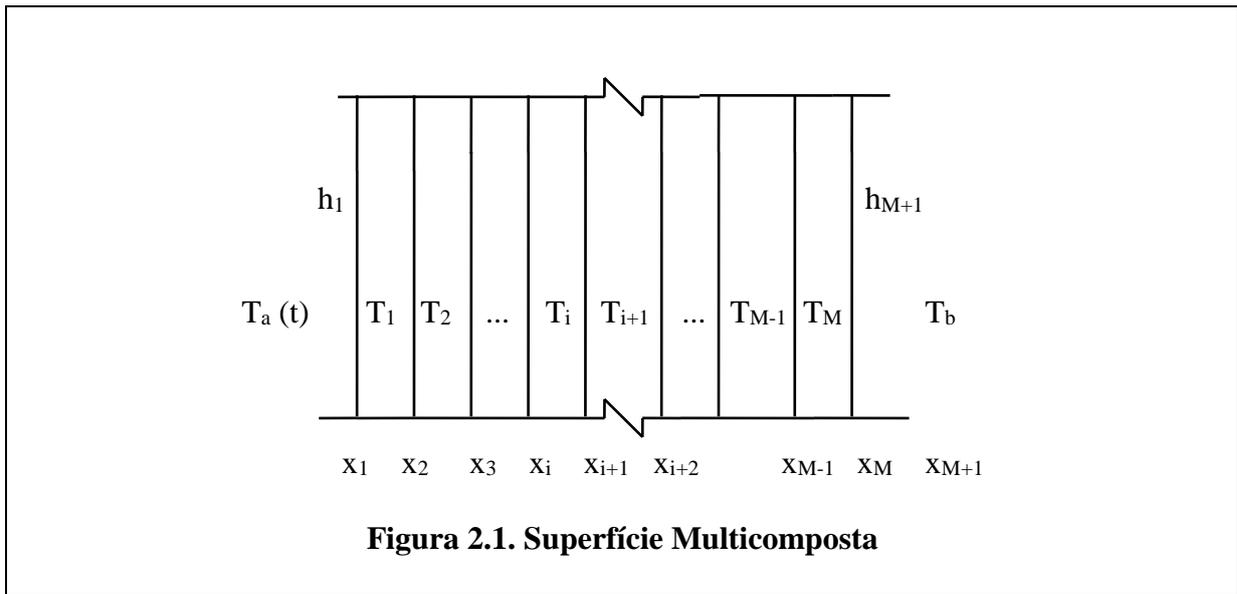
2.1 DESENVOLVIMENTO DO PROBLEMA

Seja um elemento multicomposto conforme representado na figura 2.1. O elemento é composto por diversos meios i , sendo que i varia de 1 ate M . O problema tem no lado esquerdo uma temperatura $T_a(t)$, função horária, cíclica ou não, que será posteriormente analisada, e um coeficiente de convecção conhecido. No lado direito existe uma temperatura e um coeficiente de convecção, ambos constantes. Os meios i são compostos por materiais diferentes, sendo que entre eles pode ou não existir contato térmico perfeito.

A equação básica do problema é:

$$\frac{\partial^2 T_i(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial T_i(x,t)}{\partial t} \quad \begin{array}{l} x_i < x < x_{i+1} \\ i = 1, 2, \dots, M \\ t > 0 \end{array} \quad (1a)$$

sujeita às seguintes condições de contorno e interface:



$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = h_1 (T_a - T_1) \quad x = x_1, t > 0 \quad (1b)$$

$$-k_i \frac{\partial T_i}{\partial x} = h_{i+1} (T_i - T_{i+1}) \quad x = x_{i+1} \quad (1c1)$$

$$T_i = T_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, M-1 \quad (1c2)$$

$$k_i \frac{\partial T_i}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x} \quad t > 0 \quad (1d)$$

$$k_M \frac{\partial T_M}{\partial x} = h_{M+1} (T_b - T_M) \quad x = x_{M+1}, t > 0 \quad (1e)$$

e sujeita à seguinte condição inicial:

$$T_i(x, t) = T_{oi}(x), \dots, \dots \quad t = 0, x_i < x < x_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (1f)$$

O problema pode escolher entre as condições 1c1 (existência de resistência de contato) e 1c2 (contato térmico perfeito). A condição inicial $T_{oi}(x)$ é uma função que deve ser ajustada conforme a distribuição de temperaturas nos diversos meios ao fim de cada período de cálculo, no caso de condição externa cíclica.

O problema acima descrito bem como a aplicação da Transformada de Laplace a seguir podem ser encontrados nos textos básicos de Transferência de Calor (Özisik 1980).

2.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA

Aplicando a Transformada de Laplace à equação básica do problema 1a vem:

$$\frac{d^2 \bar{T}_i(x, s)}{dx^2} - \frac{s}{\alpha_i} \bar{T}_i(x, s) = -\frac{T_{oi}(x)}{\alpha_i} \quad (2a)$$

Nesta equação $\bar{T}_i(x, s) = L\{T_i(x, t); t \rightarrow s\}$, onde L é o operador transformada de Laplace.

Aplicando a Transformada de Laplace às condições de contorno vem:

$$\begin{aligned} -k_1 \frac{d\bar{T}_1}{dx} + h_1 \bar{T}_1 &= h_1 \bar{T}_a \\ -k_i \frac{d\bar{T}_i}{dx} &= h_{i+1} (\bar{T}_i - \bar{T}_{i+1}) \\ \bar{T}_i &= \bar{T}_{i+1} \\ k_i \frac{d\bar{T}_i}{dx} &= k_{i+1} \frac{d\bar{T}_{i+1}}{dx} \\ k_M \frac{d\bar{T}_M}{dx} + h_{M+1} \bar{T}_M &= h_{M+1} \frac{T_b}{s} \end{aligned} \quad (2b)$$

A solução da equação 2a é tomada da forma:

$$\begin{aligned} \bar{T}_i(x, s) &= A_i(s) \exp(-R_i x) + B_i(s) \exp(R_i x) \\ &+ \frac{\exp(-R_i x)}{2R_i \alpha_i} \int_{x_i}^x \exp(R_i x) (a_i + b_i x + c_i x^2) dx \\ &- \frac{\exp(R_i x)}{2R_i \alpha_i} \int_{x_i}^x \exp(-R_i x) (a_i + b_i x + c_i x^2) dx \end{aligned} \quad (3)$$

Nesta equação R_i vale $\sqrt{s/\alpha_i}$ e a distribuição inicial de temperaturas $T_{oi}(x)$, para melhor ajuste ao campo inicial real de temperaturas, é tomada como polinômios quadráticos $a_i + b_i x + c_i x^2$. As exponenciais constantes da equação formam uma base para uma solução apropriada. A integração da equação 3 resulta em:

$$\bar{T}_i(x_i, s) = A_i(s) \exp(-R_i x_i) + B_i(s) \exp(R_i x_i) \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_i(x_{i+1}, s) = & A_i(s) \exp(-R_i x_{i+1}) + \\ & B_i(s) \exp(R_i x_{i+1}) + I_i(x_{i+1}) / 2s \end{aligned} \quad (4b)$$

onde

$$\begin{aligned} I_i(x_{i+1}) = & 2 \left[a_i + b_i x_{i+1} + c_i \left(\frac{2}{R_i^2} + x_{i+1}^2 \right) \right] - \\ & N_1 \exp(-R_i x_{i+1}) - N_2 \exp(R_i x_{i+1}) \end{aligned} \quad (4b1)$$

onde

$$\begin{aligned} N_j = & \exp(\mp R_i x_i) (K_j + M_j x_i + c_j x_i^2), j=1,2 \\ K_i = & a_i - \frac{b_i}{\pm R_i} + \frac{2c_i}{R_i^2} \\ M_i = & b_i - \frac{2c_i}{\pm R_i} \end{aligned} \quad (4b2)$$

Na equação 4b2, j representa a primeira ou segunda integral da equação 3. Estas equações devem ser colocadas junto com suas derivadas nas condições de contorno para encontrarem-se as constantes A_i e B_i . As derivadas ficam:

$$\begin{aligned} d\bar{T}_i(x_i, s) / dx = & -R_i A_i(s) \exp(-R_i x_i) + \\ & R_i B_i(s) \exp(R_i x_i) \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} d\bar{T}_i(x_{i+1}, s) / dx = & -R_i A_i(s) \exp(-R_i x_{i+1}) + \\ & R_i B_i(s) \exp(R_i x_{i+1}) + Id_i(x_{i+1}) / 2s \end{aligned} \quad (5b)$$

onde

$$\begin{aligned} Id_i(x_{i+1}) = & (2b_i + 4c_i x_{i+1}) + R_i [N_1 \exp(-R_i x_{i+1}) - \\ & N_2 \exp(R_i x_{i+1})] \end{aligned} \quad (5c)$$

2.3 SISTEMA A SER RESOLVIDO

Colocando-se as equações acima nas condições de contorno pode-se montar um sistema linear para obtenção dos coeficientes A_i e B_i . A grande maioria das superfícies envoltórias de edificações é composta por quatro ou menos meios, de forma que o problema foi conduzido para resolver uma superfície composta por quatro meios, obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & b_{12} & a_{22} & b_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & b_{13} & a_{23} & b_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{24} & b_{24} & a_{34} & b_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{25} & b_{25} & a_{35} & b_{35} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{36} & b_{36} & a_{46} & b_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{37} & b_{37} & a_{47} & b_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{48} & b_{48} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \\ B_3 \\ A_4 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Neste sistema os termos valem:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= k_1 R_1 + h_1 & b_{11} &= -k_1 R_1 + h_1 \\
 a_{12} &= \exp(-R_1 x_2) & b_{12} &= \exp(R_1 x_2) \\
 a_{22} &= -\exp(-R_2 x_2) & b_{22} &= -\exp(R_2 x_2) \\
 a_{13} &= -k_1 R_1 \exp(-R_1 x_2) & b_{13} &= k_1 R_1 \exp(R_1 x_2) \\
 a_{23} &= k_2 R_2 \exp(-R_2 x_2) & b_{23} &= -k_2 R_2 \exp(R_2 x_2) \\
 a_{24} &= \exp(-R_2 x_3) & b_{24} &= \exp(R_2 x_3) \\
 a_{34} &= -\exp(-R_3 x_3) & b_{34} &= -\exp(R_3 x_3) \\
 a_{25} &= -k_2 R_2 \exp(-R_2 x_3) & b_{25} &= k_2 R_2 \exp(R_2 x_3) \\
 a_{35} &= k_3 R_3 \exp(-R_3 x_3) & b_{35} &= -k_3 R_3 \exp(R_3 x_3) \\
 a_{36} &= \exp(-R_3 x_4) & b_{36} &= \exp(R_3 x_4) \\
 a_{46} &= -\exp(-R_4 x_4) & b_{46} &= -\exp(-R_4 x_4) \\
 a_{37} &= -k_3 R_3 \exp(-R_3 x_4) & b_{37} &= k_3 R_3 \exp(R_3 x_4) \\
 a_{47} &= k_4 R_4 \exp(-R_4 x_4) & b_{47} &= -k_4 R_4 \exp(R_4 x_4) \\
 a_{48} &= \exp(-R_4 x_5) (-k_4 R_4 + h_5) & b_{48} &= \exp(R_4 x_5) (k_4 R_4 + h_5)
 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 C_1 &= h_1 \overline{T_a} \\
 C_i &= -I_i(x_{i+1}) / 2s, \dots, i = 2, 4, 6 \\
 C_i &= -k_i Id_i(x_{i+1}) / 2s, \dots, i = 3, 5, 7 \\
 C_8 &= \frac{h_5}{s} \left(T_b - \frac{I_4(x_5)}{2} \right) - \frac{k_4}{2s} Id_4(x_5)
 \end{aligned} \quad (8)$$

Este sistema linear tem a variável s complexa participando do cálculo dos coeficientes A_i e B_i . Estes coeficientes devem ser colocados nas equações 4 e a função $T_i(x, t)$, solução do problema 1a, é encontrado pela fórmula de inversão da Transformada de Laplace. Neste trabalho utili-

za-se o cálculo desta integral de inversão por Quadratura Gaussiana, substituindo-se a variável complexa s pelos valores dos pontos da Quadratura.

2.4 QUADRATURA GAUSSIANA

A quadratura de Gauss é um método de integração numérica que utiliza intervalos com espaçamentos desiguais. Utiliza polinômios ortogonais para aproximação das funções a serem integradas. Como estes polinômios efetivamente aproximam as funções, pode-se utilizar esquemas de integração numérica baseadas em polinômios ortogonais. A derivação das fórmulas de quadratura, em termos gerais, inclui a normalização do intervalo de integração, a amostragem da função a ser aproximada nas raízes desigualmente espaçadas do polinômio ortogonal e a geração do polinômio de interpolação. As fórmulas de quadratura são então desenvolvidas pela integração de polinômios de interpolação. A escolha do polinômio depende do tipo de função e dos limites de integração.

A seguir será dada uma visão sobre polinômios ortogonais. Seja (Stroud e Secrest 1966)

$$P_n(x) = x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \dots + a_{n,1}x + a_{n,0} \quad (9)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$, sendo P_n uma seqüência de polinômios que satisfazem

$$\int_a^b A(x)P_n(x)P_m(x)dx = 0, \dots, (m \neq n; m, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (10)$$

Então $P_n(x)$ forma uma seqüência ortogonal no intervalo $[a, b]$ com respeito à função peso $A(x)$. Se $A(x)$ não é negativa neste intervalo, a seqüência é única.

A aproximação numérica da integral é dada por (Hornbeck 1975):

$$\bar{I} = C[A_1f(x_1) + A_2f(x_2) + \dots + A_nf(x_n)] \quad (11)$$

onde os x_i são os n pontos com espaçamento variável determinados pelo tipo e grau do polinômio ortogonal utilizado, e os A_i são os fatores de peso encontrados no curso da derivação. O termo C é uma constante determinada pelos limites da integral.

Para utilização da quadratura de Gauss, deve-se colocar que a solução do problema 4 é feita pelo retorno do domínio s para o domínio t , através da integral de inversão:

$$T_i(x, t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s=c-j\infty}^{c+j\infty} \exp(st) \bar{T}_i(x, s) ds \quad (12)$$

Fazendo $st = p$ para obter uma integral definida sem o parâmetro t no termo exponencial, que é a função peso, vem:

$$T_i(x, t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{p=c-j\infty}^{c+j\infty} \exp(p) \frac{\bar{T}_i(x, p/t)}{t} dp \quad (13)$$

onde $c'=c/t$. Tem-se então uma formula de quadratura do tipo:

$$\int_a^b w(x) f(x) dx \cong \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (14)$$

A fórmula de Quadratura Gaussiana apropriada é, segundo Heydarian e Mullineaux (1981):

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \exp(p) \frac{F(p)}{p} dp = \sum_{k=1}^n A_k F(p_k) \quad (15)$$

Observa-se que a função $F(p_k)$ é relacionada com a função $\bar{T}_i(x, p_k/t)$, que deve ser invertida, por:

$$F(p_k) = (p_k/t) \bar{T}_i(x, p_k/t) \quad (16)$$

Colocando a equação 16 em 15 tem-se:

$$\begin{aligned} T_i(x, t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \exp(p) \frac{\bar{T}_i(x, p_k/t)}{t} dp = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k (p_k/t) \bar{T}_i(x, p_k/t) \end{aligned} \quad (17)$$

Pode-se então calcular $T_i(x, t)$ substituindo-se s por p_k/t , o que é feito no sistema 6. Os termos p_k são as raízes do polinômio:

$$(-1)^n \sum_{r=0}^n a(n, r) p^{n-r} = 0 \quad (18a)$$

onde

$$a(n,r) = \frac{(-1)^{n-r} n! (n+r-1)!}{r! (n-r)!} \quad (18b)$$

Os termos A_k são as soluções de:

$$\sum_{k=1}^n A_k p_k^{-r} = 1/r!, 0 \leq r \leq (n-1) \quad (18c)$$

Os termos A_k e p_k podem ser encontrados para até $n = 24$ com 30 casas decimais em Stroud e Secrest (1966). A substituição $s \rightarrow p_k/t$ é utilizada para encontrar as constantes de integração A_i e B_i do problema 6 e junto com os valores de A_k para encontrar $T_i(x,t)$. É necessário portanto inverter a matriz n vezes para qualquer x ou t procurado diretamente, independente de incremento nestas variáveis.

2.5 APLICAÇÃO DO MÉTODO

O desempenho térmico da envoltória de edificações tem participação importante no conforto térmico interno e no consumo de energia no caso de utilização de condicionamento artificial. A envoltória das edificações está normalmente em processo transiente de transferência de calor, seja em resfriamento ou aquecimento. Este cálculo transiente tem como principal forma de realização atualmente o uso do Método da Função de Transferência (ASHRAE 1993, Mitalas 1968 e 1972). Este método necessita um cálculo prévio do fluxo transiente através de pulsos unitários, para encontrar-se após a Função de Transferência. O incremento temporal existe quando já se conhece a função de transferência, devendo ser de mesma magnitude do pulso unitário inicial. Além disso este método tem aplicação para paredes pré-calculadas, dificultando o cálculo de paredes diferentes destas, quando se necessita o recálculo das Funções de Transferência, além de não permitir o conhecimento do campo de temperaturas dentro da parede. Outra metodologia possível é o uso do Método dos Volumes Finitos, que por ser numérico apresenta também as necessidades típicas de incrementos espaciais e temporais, sendo porém mais flexível aos diferentes tipos de paredes.

2.6 TEMPERATURA SOL-AR

A condição de contorno externa é de 3ª espécie, com troca de calor por convecção. Nesta troca, no caso de paredes externas de edificações, deve estar incluído o efeito da radiação solar, o que é feito com a introdução de uma temperatura fictícia chamada Temperatura Sol-Ar (ASHRAE 1993).

Seja uma superfície externa sujeita à convecção com o ar exterior e à incidência de radiação solar, conforme representado na figura 2.2. O balanço do fluxo de calor em uma superfície ensolarada, exprimindo o calor que entra na parede é:

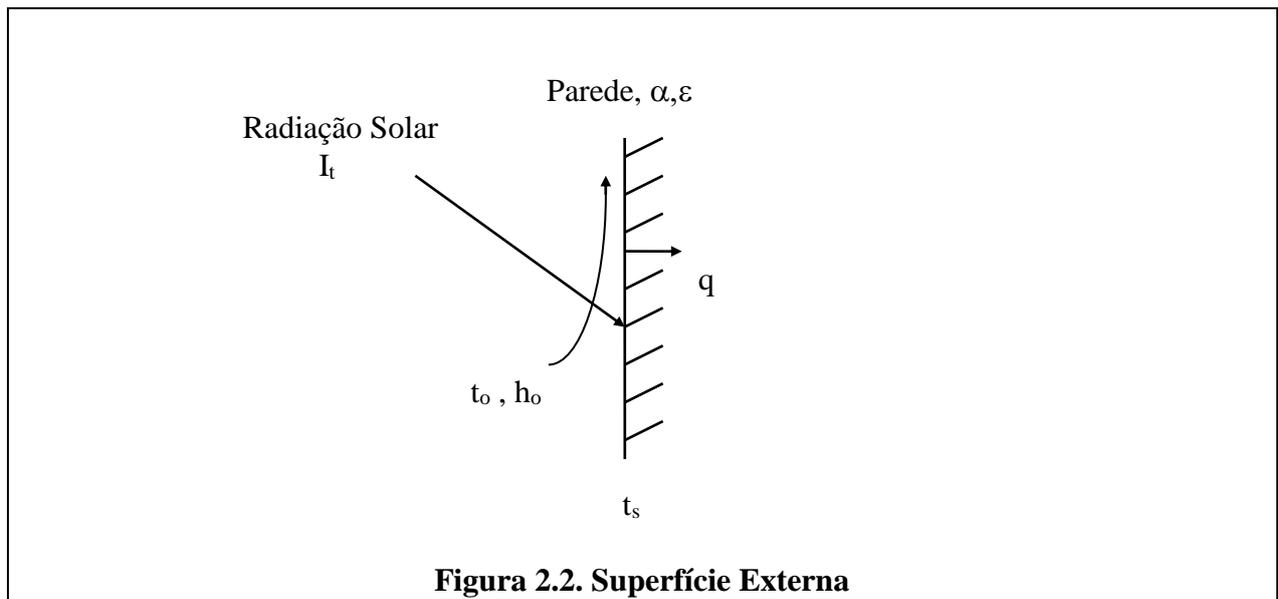


Figura 2.2. Superfície Externa

$$q/A = \alpha I_t + h_o(t_o - t_s) - \epsilon \delta R \quad (19)$$

onde q/A = fluxo de calor, W/m^2 , α = absorvância da superfície para a radiação solar, I_t = radiação solar total incidente na superfície, W/m^2 , h_o = coeficiente de transferência de calor por convecção e radiação de onda longa na superfície externa, $W/m^2 \cdot ^\circ C$, t_o = temperatura do ar externo, $^\circ C$, t_s = temperatura superficial, $^\circ C$, ϵ = emitância hemisférica da superfície em onda longa, δR = diferença entre a radiação de onda longa incidente na superfície do céu e entorno e a radiação emitida por um corpo negro na temperatura do ar externo, W/m^2 .

Assumindo que o fluxo de calor pode ser expresso em termos da Temperatura Sol-Ar, t_{sa} , vem:

$$q/A = h_o(t_{sa} - t_s) \quad (20)$$

Igualando os fluxos de calor vem:

$$t_{sa} = t_o + \alpha I_t / h_o - \varepsilon \delta R / h_o \quad (21)$$

Conforme Bliss (1961), para superfícies normais de edificações, o termo δR vale 63 W/m^2 para superfícies horizontais e 0 W/m^2 para superfícies verticais. Para superfícies comuns $\varepsilon = 1$. Normalmente h_o é tomado constante igual à $16,95 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$, α vale 0,44 para superfícies claras e 0,88 para superfícies escuras.

O valor de I_t pode ser calculado por:

$$I_t = I_b + I_d + I_r \quad (22)$$

onde I_b é radiação direta, I_d é radiação difusa e I_r é radiação refletida pelo entorno. O valor de t_o pode ser calculado por:

$$t_o = t_{máx} - (PVD * VD) \quad (23)$$

onde $t_{máx}$ é a máxima temperatura externa ao longo de um dia, PVD é o percentual horário de variação da temperatura externa (de 0 a 100%) e VD é a variação diária da temperatura externa. A variação da temperatura externa, radiação total e Temperatura Sol-Ar para o problema resolvido neste trabalho podem ser vistas na figura 2.3.

O método analítico necessita uma função contínua sobre as 24 horas do dia, e a equação 18 apresenta como desvantagem o fato da radiação I_t ser descontínua ao longo do dia e de cálculo extenso.

A solução do problema está baseada na função excitação externa, e a precisão da resposta está diretamente dependente da precisão desta função excitação. Em outras palavras, a função analítica contínua representante da temperatura Sol-Ar deve desviar-se o mínimo possível dos valores originais. Isto pode ser feito pela utilização de um polinômio em dupla precisão.

Para tanto, foi escrito um programa computacional para ajuste da função Temperatura Sol-Ar pelo método dos mínimos quadrados e o sistema de equações lineares simultâneas resultante foi resolvido por inversão de matriz pela eliminação de Gauss-Jordan com pivotamento de coluna (Hornbeck 1975).

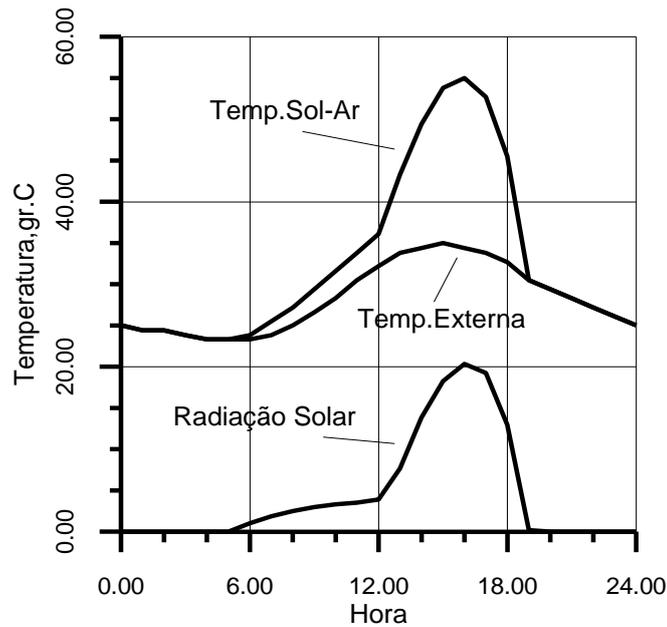


Figura 2.3. Temperatura Sol-Ar

Para eliminar oscilações dos polinômios de graus elevados, o período de 24 horas foi dividido em períodos menores, e ajustado um polinômio, de menor grau, para cada um destes períodos. A formulação de uma função única é possível pela utilização da função unitária de Heaviside, $U(t-a)$, tendo-se:

$$T(t) = \sum_z U(t - t_i(s)) - U(t - t_f(s)) \sum_n c(z, n) t^n \quad (24)$$

onde t_i e t_f são as temperaturas iniciais e finais de cada zona z onde são ajustados cada polinômio com coeficientes c . Para a Temperatura Sol-Ar do problema resolvido neste trabalho, a primeira zona inicia à zero hora e termina às 5 hs, quando inicia a insolação. A segunda zona termina ao meio dia, quando inicia a insolação direta na parede oeste considerada. A terceira zona termina às 16 horas, quando ocorre o pico da Temperatura Sol-Ar. A quarta zona termina às 19 horas, quando cessa a insolação, e a quinta zona termina à meia-noite. Com este fracionamento da Temperatura Sol-Ar consegue-se um perfeito ajuste dos polinômios aos valores originais, conforme figura 2.4.

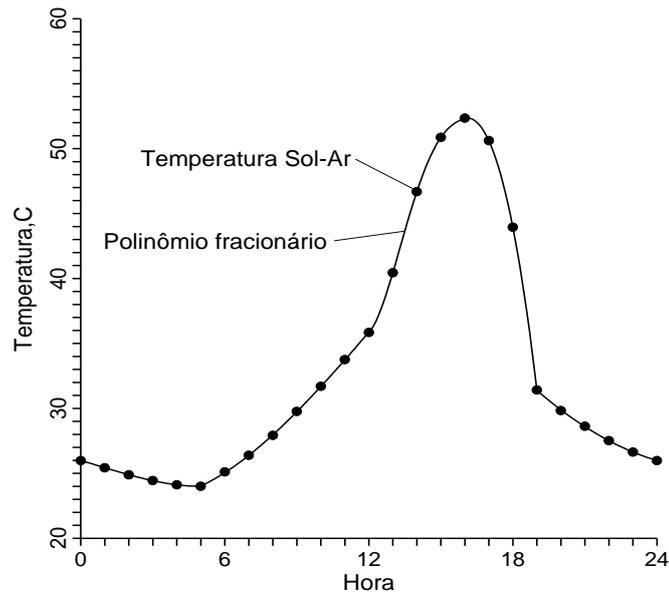


Figura 2.4. Resultado do polinômio para Temperatura Sol-Ar

As tentativas até aqui feitas em aplicar diretamente a Transformada de Laplace às funções de Heaviside não apresentaram bons resultados. Por isso o problema original com ciclo de 24 horas foi dividido em problemas seqüenciais com períodos iguais aos dos polinômios fracionários. Isto permite que se calcule um dia pelo cálculo de cinco horas somente, as horas finais de cada ciclo fracionário. Estes cálculos permitem o conhecimento do campo de temperaturas dentro da parede, que traz a condição inicial do problema para o ciclo seguinte.

É importante comentar que a escolha por resolver um problema com a Temperatura Sol-Ar como excitação se deve ao fato de, por ser esta relativamente mal-comportada, os problemas decorrentes de seu uso, se resolvidos, permitem dizer que a grande maioria de outras excitações também serão resolvidas.

A parede, estando em processo transiente de fluxo de calor, apresenta distribuições não lineares de temperatura. Neste trabalho, são considerados ajustes do campo de temperatura por polinômios quadráticos do tipo $a_i + b_i x + c_i x^2$.

A distribuição de temperaturas e polinômios considerados como condição inicial para as 19 h do quarto dia (regime cíclico) para o estuque e concreto do problema resolvido podem ser vistas na figura 2.5. Observa-se a boa concordância dos polinômios com o campo de temperaturas.

Também a escolha das condições iniciais como polinômios quadráticos permite, a princípio, dizer que a grande maioria dos problemas poderão ser resolvidos com esta consideração.

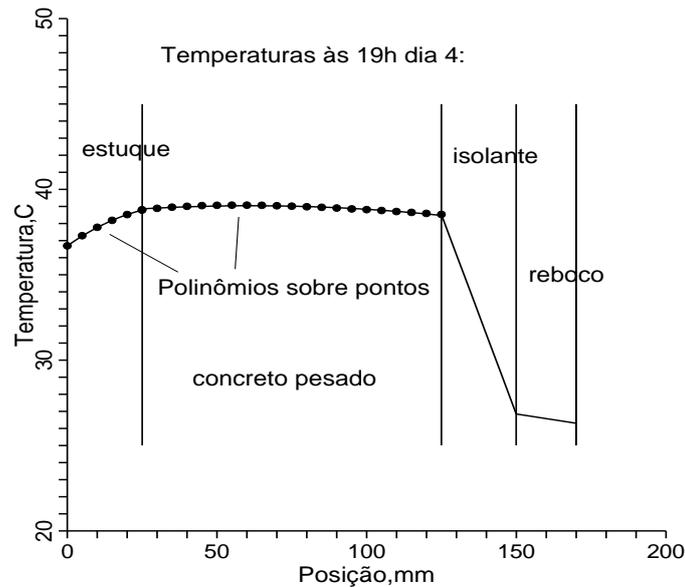


Figura 2.5. Distribuição de Temperaturas e Polinômios

2.7 MÉTODO NUMÉRICO DE SOLUÇÃO

Emprega-se aqui o Método dos Volumes Finitos, conforme descrito por Patankar, 1980. Neste método o domínio de cálculo é discretizado sob a forma de volumes de controle, integrando-se a equação diferencial que descreve o fenômeno estudado ao longo de cada um destes volumes. A equação diferencial é também integrada ao longo de um intervalo de tempo Δt , obtendo-se assim um sistema de equações lineares algébricas, uma para cada volume da malha, a ser resolvido.

A evolução das temperaturas no interior da parede é calculada resolvendo-se o sistema de equações algébricas a cada passo de tempo. As condições de contorno, inclusive a da face externa, que é transiente, são incorporadas nos volumes de controle das fronteiras.

A solução pelo Método dos Volumes Finitos para o problema proposto foi obtida com uma malha de 340 volumes igualmente espaçada, um passo de tempo de 1,5 minutos e uma formulação totalmente implícita, sendo o sistema de equações algébrica resultante resolvido por TDMA (Patankar, 1980).

A independência das malhas foi declarada quando ao refinar-se a malha espacial de 170 para 340 volumes, e a malha temporal de 3 para 1,5 minutos a máxima variação do fluxo térmico ao longo do 4º dia não foi maior do que 2,5%.

2.8 MÉTODO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Este método apresentado em ASHRAE (1993) e Mitalas (1968) calcula o ganho de calor pela parede por:

$$q_{e,\theta} = \left[\sum_{n=0} b_n (t_{e,\theta-n\delta}) - \sum_{n=1} d_n (q_{e,\theta-n\delta}) - t_{rc} \sum_{n=0} c_n \right] \quad (25)$$

onde $q_{e,\theta}$ é o ganho de calor na hora θ , δ é o intervalo de tempo, n é o índice dos somatórios, igual ao número de valores não-negligenciáveis dos coeficientes, $t_{e,\theta-n\delta}$ é a Temperatura Sol-Ar no tempo $\theta-n\delta$, t_{rc} é a temperatura interna constante e b_n , c_n e d_n são os coeficientes da Função de Transferência por condução.

2.9 PROBLEMA RESOLVIDO

Para avaliar o comportamento dos três métodos foi resolvido o problema constante em ASHRAE (1993). Seja uma parede multicomposta (figura 2.6) de cor clara construída com 25 mm estuque ($k = 0,692 \text{ W/m}\cdot\text{°C}$, $\alpha = 4,434\text{E-}7 \text{ m}^2/\text{s}$), 100 mm concreto pesado ($k = 1,731$, $\alpha = 9,187\text{E-}7$), 25 mm isolante ($k = 0,043$, $\alpha = 1,6\text{E-}6$), 20 mm reboco ($k = 0,727$, $\alpha = 5,4\text{E-}7$), e coeficientes de convecção externo e interno de 16,95 e 8,26 $\text{W/m}^2\cdot\text{°C}$ respectivamente. Não há resistência térmica de contato entre as camadas. A temperatura interna da sala é mantida constante, igual à 24 °C. O fluxo foi calculado através de 1 m^2 de parede oeste. A temperatura externa evolui como função horária com ciclo de um dia, segundo a Temperatura Sol-Ar retirada de ASHRAE (1993) para 40° Latitude Norte, 21 de Julho, $\alpha/h_o = 0,026$, cujos valores aparecem na tabela 2.1 (recalculados). Considera-se que estes valores tabelados repetem-se consecutivamente por no mínimo quatro dias, tempo necessário para o sistema entrar em regime periódico (não ocorre nebulosidade atmosférica).

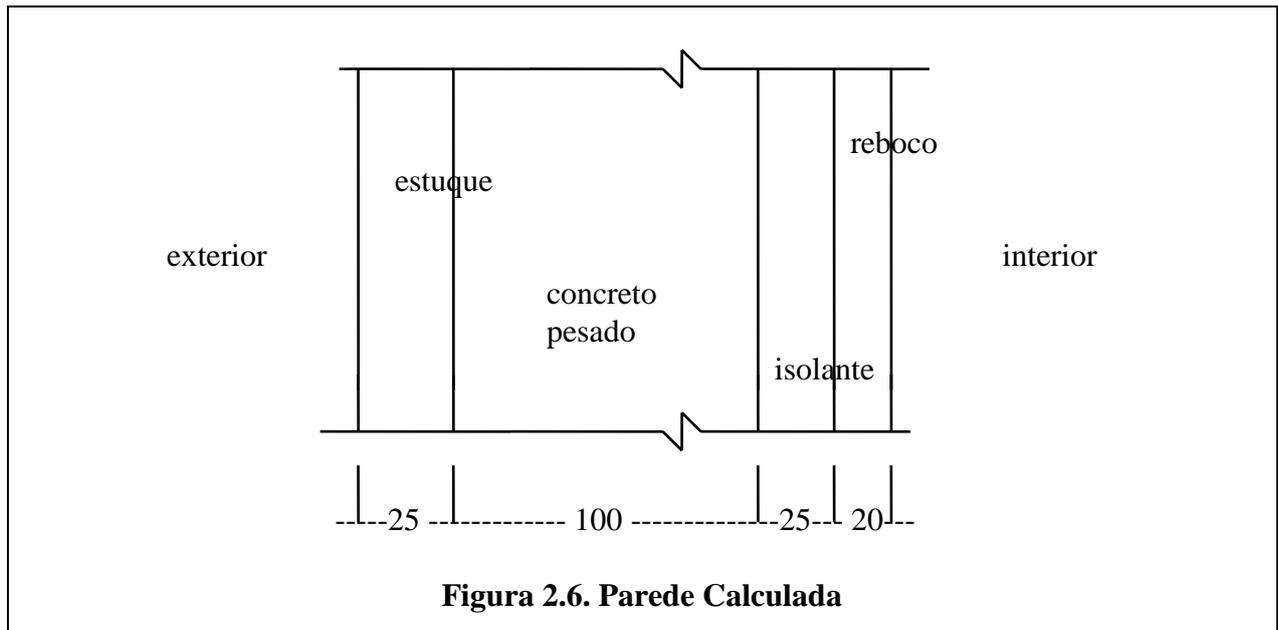


Tabela 2.1. Temperatura Sol-Ar

t,h	t _{sa}	t,h	t _{sa}	t,h	t _{sa}
1	25.43	9	29.764	17	50.618
2	24.88	10	31.7	18	43.948
3	24.44	11	33.752	19	31.416
4	24.11	12	35.85	20	29.83
5	24	13	40.446	21	28.62
6	25.104	14	46.682	22	27.52
7	26.382	15	50.86	23	26.64
8	27.918	16	52.35	24	25.98

Estes valores calculados conforme descrito no item Temperatura Sol-Ar aparecem na figura 2.3 acima citada.

A condição inicial para o Método dos Volumes Finitos foi de 28,5°C em toda a parede, no Método da Transformada de Laplace com Quadratura Gaussiana foi de 24°C, e no Método da Função de Transferência foi de fluxo inicial igual a zero. Estas condições porém tem pouca influência nos resultados do quarto dia, pelo amortecimento da parede. O que ocorre é que como a condição de contorno externa é oscilatória, após o quarto dia o campo inicial já não mais interfere de forma significativa. Para retirar dúvidas, foi resolvido o problema pelo método Laplace/Gaussiana para condição inicial 28,5 e 24 °C, e os resultados aparecem na tabela 2.2.

Tabela 2.2 Fluxos de Calor para duas Temperaturas Iniciais, W/m²

Hora	Fluxo de calor t ₀ =24°C	Fluxo de calor t ₀ =28,5°C
1	11,449916480916750	11,449936498332370
2	9,974905545414860	9,974921981694463
3	8,628499636164763	8,628513372222953
4	7,402345690738550	7,402357162491374
5	6,293862451921888	6,293872233769455
6	5,313087545921974	5,313095383208058
7	4,525417658861408	4,525424450943631
8	4,015240934186479	4,015246721609403
9	3,815837748568795	3,815842531054461
10	3,930391936557937	3,930395975719077
11	4,347889613849477	4,347892965871527
12	5,049087064433408	5,049089930266256
13	6,011276682515802	6,011278966203228
14	7,317324995601704	7,317327111431480
15	9,245493860584922	9,245495538725720
16	11,798682587578230	11,798683968797890
17	14,617496003151430	14,617497081560220
18	17,223952986881420	17,223954125735180
19	19,009866741724400	19,009867580208830
20	19,280180246322690	19,280181076671160
21	18,163261454235770	18,163261934557760
22	16,515674819199540	16,515675314546390
23	14,762236674471040	14,762237028606820
24	13,053898085504450	13,053898481108810

Pode-se observar diferença na quinta casa decimal para a primeira hora (mais perto da condição inicial) e na sétima casa para a última hora.

Os resultados numéricos para os três Métodos aparecem na tabela 2.3.

O fluxo de calor para o quarto dia está colocado na figura 2.7 junto com a Temperatura Sol-Ar. Nesta figura nota-se que a Temperatura Sol-Ar funciona como excitação e o fluxo de calor interno como resposta do sistema, com um retardo devido ao comportamento térmico da parede.

Tabela 2.3 Resultados pelos três Métodos (dia 4)

MFT = Método da Função de Transferência

MVF = Método dos Volumes Finitos

MLG = Método Laplace/Gaussiana

	MFT	MVF	MLG
h	W/m ²	W/m ²	W/m ²
1	11,310	11,440	11,450
2	9,872	9,969	9,975
3	8,556	8,625	8,628

4	7,355	7,401	7,402
5	6,268	6,295	6,294
6	5,304	5,317	5,313
7	4,533	4,533	4,525
8	4,038	4,027	4,015
9	3,843	3,831	3,816
10	3,957	3,947	3,930
11	4,373	4,366	4,348
12	5,069	5,068	5,049
13	6,027	6,031	6,011
14	7,354	7,345	7,317
15	9,272	9,280	9,245
16	11,778	11,831	11,799
17	14,540	14,638	14,618
18	17,071	17,225	17,224
19	18,772	18,983	19,010
20	18,968	19,231	19,280
21	17,839	18,121	18,163
22	16,225	16,486	16,516
23	14,524	14,741	14,762
24	12,868	13,039	13,054

O Método Laplace/Gaussiana (e o Volumes Finitos) permite calcular facilmente as temperaturas dentro da parede ao longo do dia. Esta distribuição pode ser vista na figura 2.8 para o período crescente de Temperatura Sol-Ar..

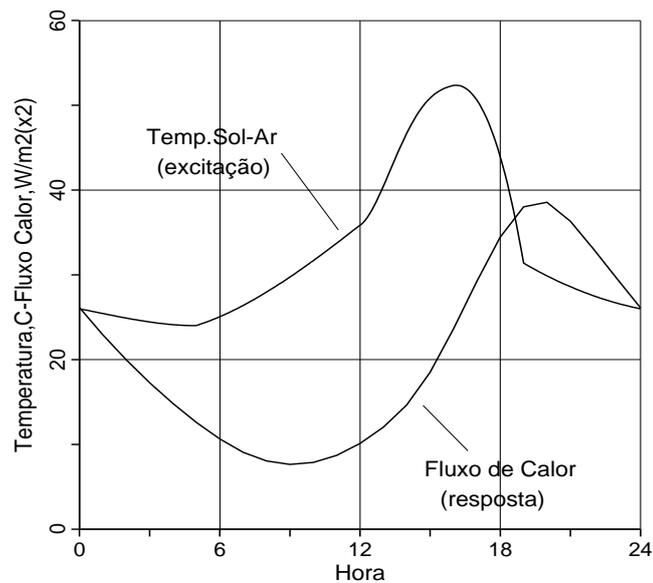


Figura 2.7. Excitação e Resposta do Sistema

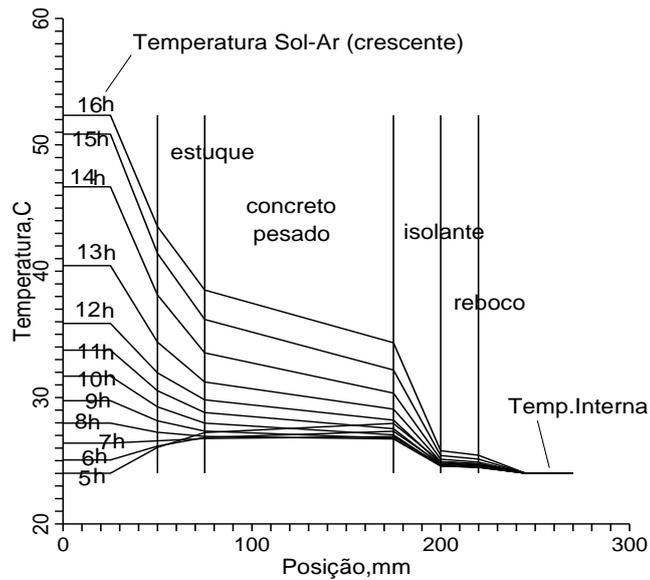


Figura 2.8. Campo de Temperaturas (período crescente)

2.10 DADOS CLIMÁTICOS REAIS

O método proposto também deverá ser aplicado em cálculos que considerem evoluções externas de temperatura e radiação reais, com a finalidade de verificar a resposta do sistema com este tipo de excitação. Uma seqüência real de 5 dias pode ser vista na fig.2.9. Até o presente momento foi analisada a obtenção dos polinômios fracionários, sem apresentar qualquer tipo de dificuldade.

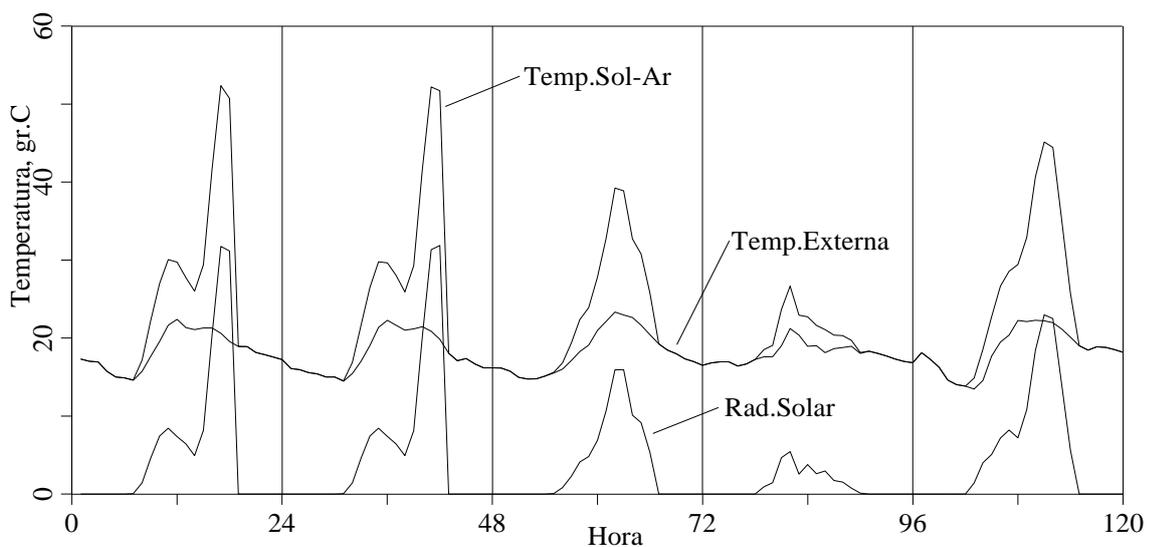


Figura 2.9. Evolução Real da Temperatura Sol-Ar

Esta evolução foi calculada para uma parede oeste de cor média ($\alpha = 0,66$), coeficiente de convecção de $16 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$.

2.11 ANÁLISE DE ERROS E ESTABILIDADE

Os erros aqui analisados foram calculados pela seguinte equação geral:

$$E = \frac{\sum_{i=1}^n \left| \frac{V_{a,i} - V_{r,i}}{V_{r,i}} \right|}{n} \times 100 \quad (26)$$

onde E é o erro médio percentual, $V_{a,i}$ o valor em análise de erro na condição i , $V_{r,i}$ o valor referencial para cálculo do erro na condição i e n o número de resultados em análise.

O primeiro erro a ser analisado será o do polinômio ajustado para a temperatura sol-ar. Para tanto foram comparados os valores calculados pelos cinco polinômios fracionários constantes na equação 24 e que perfazem um dia de cálculo com os dados originais constantes na tabela 2.1. O erro médio percentual encontrado para 24 horas foi de $3,94\text{E-}02\%$, ou $0,0394\%$, muito baixo. Convém porém salientar que o método dos volumes finitos utilizou os resultados da equação 24, não existindo portanto diferença em relação ao método Laplace-Gaussiana, neste item.

O segundo erro analisado foi o introduzido pelos ajustes dos campos de temperaturas das condições iniciais dos problemas seqüenciais, considerados como polinômios quadráticos. É bom lembrar que cada dia foi dividido em cinco problemas seqüenciais para melhor ajuste dos polinômios da temperatura sol-ar. Para tanto foram calculadas as temperaturas em cada meio no final de cada intervalo de tempo, em espaçamento de 5 mm (cinco milímetros), e calculadas as correspondentes temperaturas com os polinômios quadráticos ajustados para cada condição inicial e para cada um dos quatro meios constituintes da parede, num total de 5 períodos \times 4 meios = 20 cálculos de erro conforme equação 26. Foi então feito a média dos 20 cálculos de erro, chegando-se ao valor de $4,405\text{E-}03\%$, ou $0,0044\%$ de erro para as condições iniciais, considerado muito bom.

As próximas análises de erro feitas são ligadas ao método da quadratura Gaussiana propriamente dito, sendo interessante colocar primeiramente uma visão conceitual do erro nas quadraturas Gaussianas.

O melhor método para avaliar a precisão de uma integral calculada por quadratura de Gauss é comparar os resultados para vários valores de n , ou seja, para diversas quantidades de pontos de quadratura. O grau de precisão pode então ser considerado proporcional ao número de

casas decimais que estão corretas nas respostas. Pode-se as vezes encontrar grande variação entre as respostas, devido à presença de singularidades ou oscilações em $f(x)$. Para grandes valores do número de pontos de quadratura pode-se ter deteriorações nas respostas causadas por erro de arredondamento ou truncamento nos cálculos.

Pode-se ter uma idéia da potência da quadratura de Gauss pelo conhecimento de que o método opera essencialmente com um polinômio de interpolação de grau $2n-1$. Portanto, se $n=10$, o polinômio de interpolação é de grau 19. Como o polinômio de interpolação é de grau $2n-1$, o método é exato para integração de polinômios de graus $2n-1$ ou menores.

Esta última consideração não pode ser aplicada diretamente ao problema em análise, pois a função em integração é composta por exponenciais, conforme equação 3. Pode-se porém dizer que os polinômios das condições iniciais são de grau 2 e o polinômio da temperatura sol-ar não passa de grau 10. Convém salientar que os dois participam da solução do problema.

O problema em análise foi então resolvido para diversas quantidades de pontos de quadratura, especificamente para $n=2,4,6,8,10,12,14$ e 16 , e os resultados horários do quarto dia foram seqüencialmente comparados com uso da equação 26. Chamou-se aqui, entretanto, de variação em vez de erro. Os resultados obtidos foram:

Varição de 02 para 04 pontos de quadratura:	10,4%
Varição de 04 para 06 pontos de quadratura:	0,0177%
Varição de 06 para 08 pontos de quadratura:	0,0015%
Varição de 08 para 10 pontos de quadratura:	0,00018%
Varição de 10 para 12 pontos de quadratura:	0,000094%
Varição de 12 para 14 pontos de quadratura:	0,00046%
Varição de 14 para 16 pontos de quadratura:	0,0046%

Observa-se claramente que o sistema vai convergindo até $n = 12$ quando passa a divergir, provavelmente por erros de arredondamento ou truncagem, já que a matriz (6) tem que ser invertida n vezes para se encontrar os coeficientes de integração. Escolhe-se portanto, como valor ideal para o problema em análise o valor de $n = 12$. Os valores calculados e apresentados nos itens acima foram feitos antes desta análise de erro e convergência, tomando-se na época $n = 8$. Mesmo assim, pode-se observar acima que este valor apresenta boa precisão.

Para testar a estabilidade do método foram introduzidas modificações nos valores de entrada do problema e observadas as variações nas respostas. Neste sentido, num primeiro cálculo, a

temperatura externa sol-ar foi variada em mais e menos dez graus hora a hora e foi observada a variação na temperatura da face interna da parede, também hora a hora. Num segundo cálculo, a condutividade térmica dos meios constituintes (e por conseqüência a difusividade térmica) foi variada em mais e menos dez por cento, e observada a variação obtida no fluxo interno de calor hora a hora.

No primeiro caso, a variação de mais e menos 10 °C hora a hora na temperatura sol-ar causou exatas variações de mais e menos 1,37 °C hora a hora na temperatura da face interna da parede, mostrando grande estabilidade do sistema, pois a perturbação foi simétrica em relação à excitação inicial, e a resposta da parede foi exatamente simétrica. Salienta-se aqui que quando da variação menos dez graus, algumas vezes a temperatura da face interna da parede ficou menor que a temperatura interna do ambiente, resultando em carga térmica negativa (entrada de calor na parede), e mesmo assim o sistema apresentou-se estável.

No segundo caso, com variação das propriedades térmicas dos materiais, um acréscimo de 10 % na condutividade e difusividade térmica causou um aumento de 6,7 % no fluxo de calor interno, e uma diminuição de 10 % causou uma diminuição de 7 % no fluxo de calor. As variações não foram idênticas pois não variou-se as demais condições do problema como coeficientes de película, excitação, espessuras, densidades e calor específico. Mas de qualquer forma, a resposta do sistema foi considerada boa.

A última análise de precisão e estabilidade feita sobre o sistema traz junto um retorno no tempo em relação à um procedimento já utilizado, que foi a de ajuste da temperatura sol-ar utilizando um polinômio único para as 24 horas, com oscilações inerentes em torno do valor correto da temperatura. Este procedimento foi abandonado procurando-se melhorar a precisão do método. Como atualmente já se conhece respostas precisas, é possível comparar as respostas obtidas com polinômios fracionários, que divide o dia em cinco problemas, com as respostas obtidas com polinômio único para todo o dia. Perde-se em precisão, mas ganha-se em esforço computacional, pois pode-se ter incrementos temporais de 24 horas, em vez de incrementos próximos de 5 horas.

A diferença média entre os calores calculados pelos dois métodos, hora a hora para o quarto dia foi de 1,24%, podendo-se resolver cinco problemas seqüenciais no lugar de aproximadamente dezoito, dependendo da hora a ser calculada. Considera-se resultados razoáveis do ponto de vista de estabilidade e precisão, principalmente em Engenharia, para uma boa economia computacional. Este aspecto ganha muito em relevância se for comparado com os métodos numéricos, que teriam que discretizar o domínio espacial e temporal, para os quatro dias. Os dois proce-

dimentos, em termos de excitação e resposta aparecem na figura 2.10. Notas-se que, devido ao amortecimento da parede, não fazem muita diferença as oscilações da excitação, sendo muito difícil distinguir diferenças nas respostas do problema. Para uma parede mais leve (150 mm tijolo) a diferença fica em 2,14%.

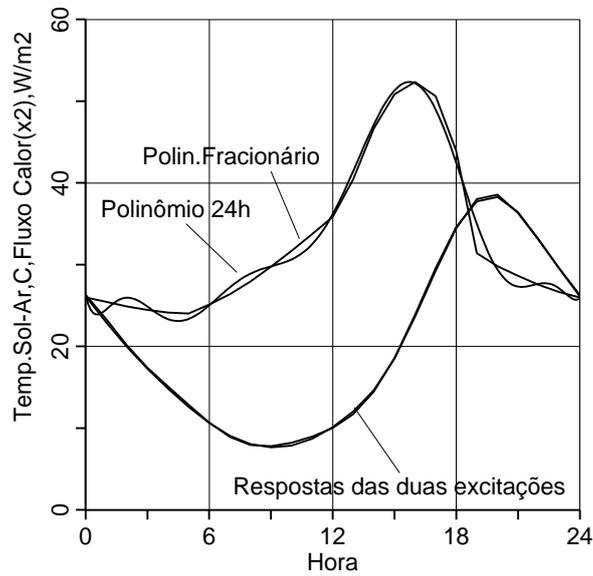


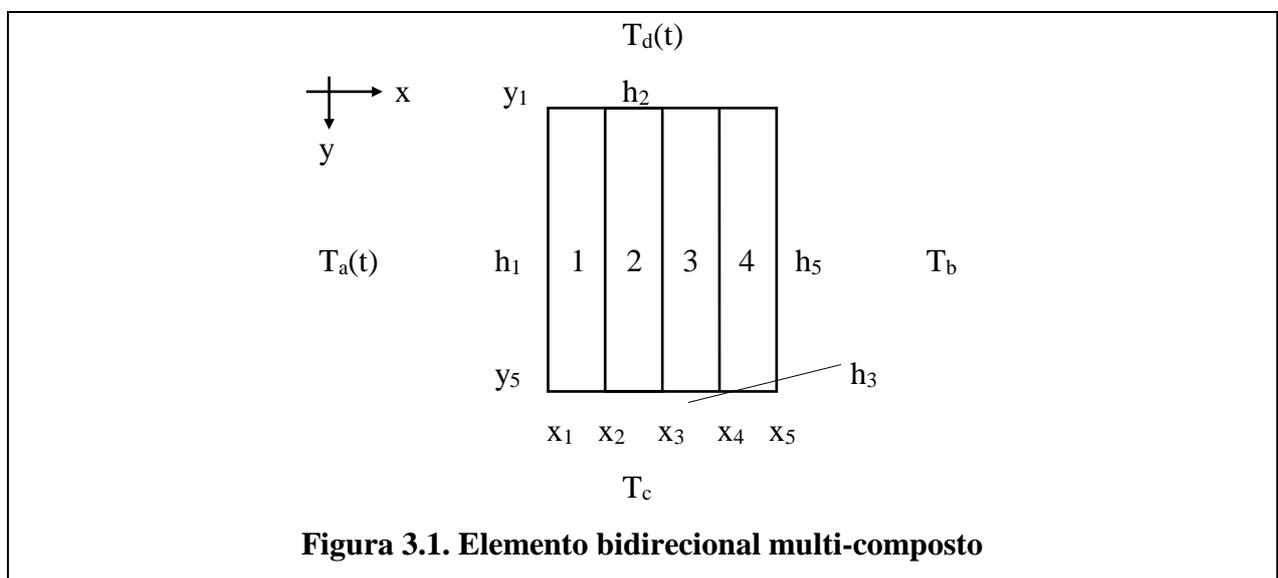
Figura 2.10. Respostas do sistema com polinômios fracionário e diário

3 FLUXO DE CALOR BI-DIRECIONAL NÃO-ESTACIONÁRIO EM PAREDES EXTERNAS MULTI-COMPOSTAS

Procura-se aqui uma metodologia semi-analítica aplicada ao fluxo de calor bidirecional não-estacionário em elementos multi-compostos.

3.1 PROBLEMA PROPOSTO

Seja um elemento multi-composto conforme figura 3.1.



O elemento em análise é composto por diversos meios, numerados de 1 a 4, com propriedades térmicas diferentes. Entre eles pode ou não existir contato térmico perfeito. Na face esquerda existe um fluido com temperatura variável com o tempo, chamada $T_a(t)$, e um coeficiente de convecção constante chamado h_1 . Na face direita existe um fluido com temperatura T_b e um coeficiente de convecção h_5 , ambos constantes com o tempo. Na face inferior existe uma temperatura T_c e um coeficiente de convecção h_3 , ambos constantes. Na face superior existe um fluido com temperatura variável com o tempo $T_d(t)$ e um coeficiente de convecção h_2 constante com o tempo.

A equação básica do problema é:

$$\frac{\partial^2 T_i(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i(x, y, t)}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial T_i(x, y, t)}{\partial t} \dots \dots \left. \begin{array}{l} x_1 \leq x \leq x_5 \\ 1 \leq i \leq 4 \\ t > 0 \\ y_1 \leq y \leq y_5 \end{array} \right\} \quad (27)$$

onde i são os meios participantes do problema e α a difusividade térmica.

As condições de contorno em x são de terceira espécie:

$$\left. \begin{array}{l} -k_1 \frac{\partial T_1(x_1, y, t)}{\partial x} = h_1 [T_a(t) - T_1(x_1, y, t)] \\ k_4 \frac{\partial T_4(x_5, y, t)}{\partial x} = h_5 [T_b - T_4(x_5, y, t)] \end{array} \right\} \dots \dots \left. \begin{array}{l} t > 0 \\ y_1 \leq y \leq y_5 \end{array} \right\} \quad (27a)$$

As condições de contorno em y são de terceira espécie:

$$\left. \begin{array}{l} -k_i \frac{\partial T_i(x, y_1, t)}{\partial y} = h_2 [T_d(t) - T_i(x, y_1, t)] \dots \dots \\ k_i \frac{\partial T_i(x, y_5, t)}{\partial y} = h_3 [T_c - T_i(x, y_5, t)] \end{array} \right\} \dots \dots \left. \begin{array}{l} t > 0 \\ 1 \leq i \leq 4 \\ x_1 \leq x \leq x_5 \end{array} \right\} \quad (27b)$$

As condições de interface em x , considerando contato térmico perfeito, são:

$$\left. \begin{array}{l} T_i(x_{i+1}, y, t) = T_{i+1}(x_{i+1}, y, t) \\ k_i \frac{\partial T_i(x_{i+1}, y, t)}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}(x_{i+1}, y, t)}{\partial x} \dots \dots \end{array} \right\} \dots \dots \left. \begin{array}{l} t > 0 \\ 1 \leq i \leq 3 \\ y_1 \leq y \leq y_5 \end{array} \right\} \quad (27c)$$

A condição inicial do problema é:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq i \leq 4 \\ T_i(x, y, 0) = F_i(x, y) \dots \dots \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x_1 \leq x \leq x_5 \\ y_1 \leq y \leq y_5 \end{array} \right\} \quad (27d)$$

3.2 APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE AO PROBLEMA

Aplicando a Transformada de Laplace ao problema (27) vem:

$$\frac{d^2 \bar{T}_i(x, y, s)}{dx^2} + \frac{d^2 \bar{T}_i(x, y, s)}{dy^2} - \frac{s}{\alpha_i} \bar{T}_i(x, y, s) = -\frac{T_{0i}(x, y)}{\alpha_i} \dots \dots \left. \begin{array}{l} x_1 \leq x \leq x_5 \\ 1 \leq i \leq 4 \\ y_1 \leq y \leq y_5 \end{array} \right\} \quad (28)$$

As condições de contorno em x ficam:

$$\left. \begin{array}{l} -k_1 \frac{d\bar{T}_1(x_1, y, s)}{dx} = h_1 [\bar{T}_a(s) - \bar{T}_1(x_1, y, s)] \\ k_4 \frac{d\bar{T}_4(x_5, y, s)}{dx} = h_5 \left[\frac{T_b}{s} - \bar{T}_4(x_5, y, s) \right] \dots \dots \end{array} \right\} y_1 \leq y \leq y_5 \quad (28a)$$

As condições de contorno em y ficam:

$$\left. \begin{array}{l} -k_i \frac{d\bar{T}_i(x, y_1, s)}{dy} = h_2 [\bar{T}_d(s) - \bar{T}_i(x, y_1, s)] \dots \dots \\ k_i \frac{d\bar{T}_i(x, y_5, s)}{dy} = h_3 \left[\frac{T_c}{s} - \bar{T}_i(x, y_5, s) \right] \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \leq i \leq 4 \\ x_1 \leq x \leq x_5 \end{array} \quad (28b)$$

As condições de interface em x ficam:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{T}_i(x_{i+1}, y, s) = \bar{T}_{i+1}(x_{i+1}, y, s) \\ k_i \frac{d\bar{T}_i(x_{i+1}, y, s)}{dx} = k_{i+1} \frac{d\bar{T}_{i+1}(x_{i+1}, y, s)}{dx} \dots \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \leq i \leq 3 \\ y_1 \leq y \leq y_5 \end{array} \quad (28c)$$

3.3 TEMPERATURA MÉDIA

O principal objetivo do problema é calcular o fluxo de calor na face direita, a carga térmica do ambiente. O problema será primeiramente resolvido em termos de temperaturas médias em y, $\tau_i(x, t)$:

$$\tau_i(x, t) = \frac{1}{H} \int_{y_1}^{y_5} T_i(x, y, t) dy \quad (29)$$

onde $H = y_5 - y_1$.

Escrevendo o problema para temperatura média e aplicando 29 na equação 27 vem:

$$\frac{\partial^2 \tau_i(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{H} \left[\frac{\partial T_i(x, y_5, t)}{\partial y} - \frac{\partial T_i(x, y_1, t)}{\partial y} \right] = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \tau_i(x,t)}{\partial t} \quad (30a)$$

A equação acima pode ser rescrita com termo fonte S_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_i(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \tau_i(x,t)}{\partial t} + S_i(x,t), \dots, \dots \text{onde} \\ S_i(x,t) &= \frac{1}{H} \left[\frac{\partial T_i(x, y_1, t)}{\partial y} - \frac{\partial T_i(x, y_5, t)}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (30b)$$

Lembrando a equação de Fourier, $q = -k \, dT/dy$, facilmente observa-se que a fonte representa os fluxos de calor no contorno y , lembrando que $\alpha = k/\rho c_p$.

As condições de contorno em x ficam:

$$\begin{aligned} -k_1 \frac{\partial \tau_1(x_1, t)}{\partial x} &= h_1 [T_a(t) - \tau_1(x_1, t)] \\ k_4 \frac{\partial \tau_4(x_5, t)}{\partial x} &= h_5 [T_b - \tau_4(x_5, t)] \end{aligned} \quad (30c)$$

As condições de contorno em y permanecem:

$$\begin{aligned} -k_i \frac{\partial T_i(x, y_1, t)}{\partial y} &= h_2 [T_d(t) - T_i(x, y_1, t)] \\ k_i \frac{\partial T_i(x, y_5, t)}{\partial y} &= h_3 [T_c - T_i(x, y_5, t)] \end{aligned} \quad (30d)$$

As condições de interface em x ficam:

$$\begin{aligned} \tau_i(x_{i+1}, t) &= \tau_{i+1}(x_{i+1}, t) \\ k_i \frac{\partial \tau_i(x_{i+1}, t)}{\partial x} &= k_{i+1} \frac{\partial \tau_{i+1}(x_{i+1}, t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (30e)$$

A condição inicial fica:

$$\tau_i(x,0) = G_i(x) \quad (30f)$$

3.4 APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE NA TEMPERATURA MÉDIA

Aplicando a Transformada de Laplace à equação 30b vem:

$$\frac{d^2 \bar{\tau}_i(x,s)}{dx^2} - \frac{s}{\alpha_i} \bar{\tau}_i(x,s) = -\frac{\tau_{oi}(x)}{\alpha_i} + \bar{S}_i(x,s), \dots, \dots \text{onde} \quad (31)$$

$$\bar{S}_i(x,s) = \frac{1}{H} \left[\frac{d \bar{T}_i(x, y_1, s)}{dy} - \frac{d \bar{T}_i(x, y_5, s)}{dy} \right]$$

As condições de contorno em x ficam:

$$-k_1 \frac{d\bar{\tau}_1(x_1, s)}{dx} + h_1 \bar{\tau}_1(x_1, s) = h_1 \bar{T}_a(s) \quad (31a)$$

$$k_4 \frac{d\bar{\tau}_4(x_5, s)}{dx} + h_5 \bar{\tau}_4(x_5, s) = h_5 \frac{T_b}{s}$$

As condições de contorno em y ficam:

$$-k_i \frac{d\bar{T}_i(x, y_1, s)}{dy} + h_2 \bar{T}_i(x, y_1, s) = h_2 \bar{T}_d(s) \quad (31b)$$

$$k_i \frac{d\bar{T}_i(x, y_5, s)}{dy} + h_3 \bar{T}_i(x, y_5, s) = h_3 \frac{T_c}{s}$$

As condições de interface em x ficam:

$$\bar{\tau}_i(x_{i+1}, s) = \bar{\tau}_{i+1}(x_{i+1}, s) \quad (31c)$$

$$k_i \frac{d\bar{\tau}_i(x_{i+1}, s)}{dx} = k_{i+1} \frac{d\bar{\tau}_{i+1}(x_{i+1}, s)}{dx}$$

A solução do problema 31 é tomada da forma:

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}_i(x, s) = & A_i(s) \exp(-R_i x) + B_i(s) \exp(R_i x) \\
& + \frac{\exp(-R_i x)}{2R_i} \int_{x_i}^x \exp(R_i x) \left[\frac{\tau_{oi}(x)}{\alpha_i} + \bar{S}_i(x, s) \right] dx \\
& - \frac{\exp(R_i x)}{2R_i} \int_{x_i}^x \exp(-R_i x) \left[\frac{\tau_{oi}(x)}{\alpha_i} + \bar{S}_i(x, s) \right] dx
\end{aligned} \tag{32}$$

Nesta equação R_i vale $\sqrt{s/\alpha_i}$. Para resolver a equação 32 é necessário conhecer a distribuição inicial de temperaturas médias e o termo fonte. A distribuição inicial de temperaturas será tomada por polinômios quadráticos, como feito no capítulo unidimensional. Resta conhecer a fonte S_i .

3.5 EQUAÇÃO AUXILIAR PROPOSTA

Para a temperatura transformada T_i , constituinte do termo fonte, será proposta uma equação baseada também em polinômios quadráticos em x e y , obtendo-se:

$$\bar{T}_i^p(x, y, s) = \sum_{n=0}^2 a_{ni}(s) y^n + \left(\sum_{n=0}^2 b_{ni}(s) y^n \right) x + \left(\sum_{n=0}^2 c_{ni}(s) y^n \right) x^2 \tag{33}$$

Esta equação proposta deve ser função de x e y , não necessitando ser função explícita de s , já que os coeficientes da equação são encontrados iterativamente para cada valor s dos pontos de quadratura. A equação proposta deve, da melhor maneira possível, aproximar o campo de temperaturas em determinado instante, função de x e y . Deve também ter bom comportamento computacional, em termos de inversão da matriz resultante.

As equações propostas serão assinaladas por um índice p . Para encontrarem-se os coeficientes a_{ni} , b_{ni} e c_{ni} serão utilizadas as equações de contorno em y (31b) e a definição da temperatura média, equação 29, obtendo-se (para $y_1 = 0$ e $y_5 = 1$, ou seja, parede com 1 m de altura):

$$\bar{\tau}_i^p(x, s) = \sum_{n=0}^2 \frac{a_{ni}(s)}{n+1} + \left(\sum_{n=0}^2 \frac{b_{ni}(s)}{n+1} \right) x + \left(\sum_{n=0}^2 \frac{c_{ni}(s)}{n+1} \right) x^2 \tag{34}$$

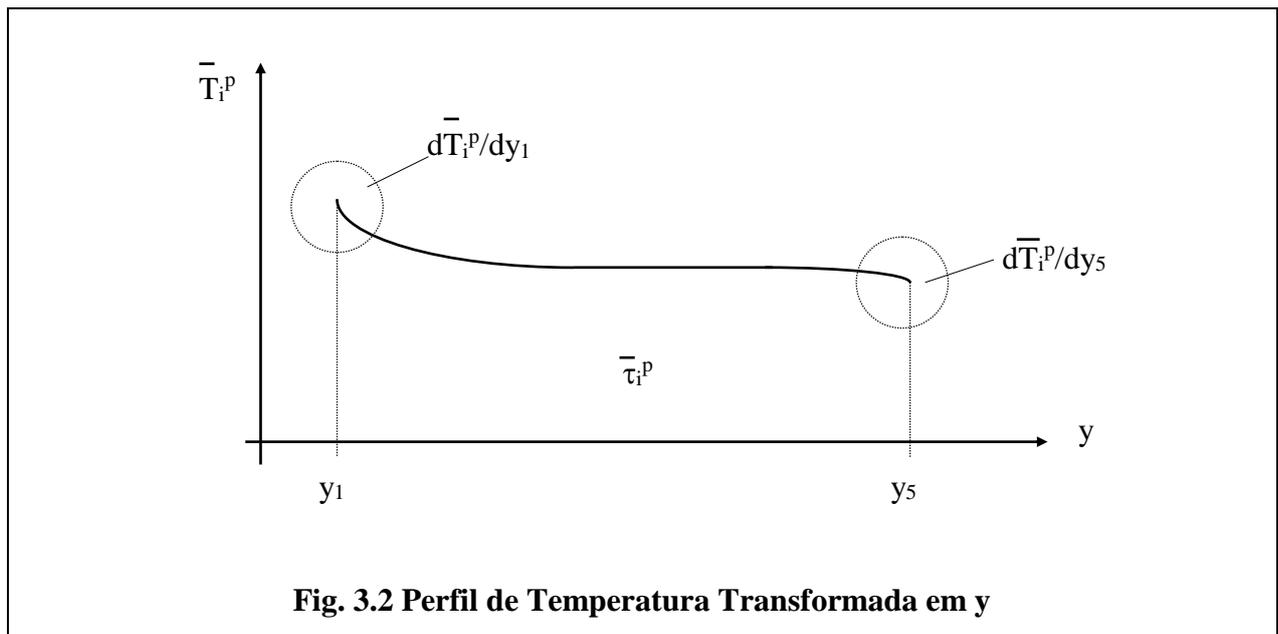
Como tem-se um total de nove incógnitas, a equação acima, junto com as condições de contorno em y serão aplicadas em três seções de cada meio i . Para tanto é necessária a derivada em y , obtendo-se:

$$\frac{d\bar{T}_i^p(x, y, s)}{dy} = \sum_{n=1}^2 n a_{ni}(s) y^{n-1} + \left(\sum_{n=1}^2 n b_{ni}(s) y^{n-1} \right) x + \left(\sum_{n=1}^2 n c_{ni}(s) y^{n-1} \right) x^2 \quad (35)$$

Colocando a equação 35 em 31 obtém-se:

$$\bar{S}_i^p(x, s) = -2(a_{2i}(s) + b_{2i}(s)x + c_{2i}(s)x^2) \quad (36)$$

As três equações utilizadas para encontrar os coeficientes podem ser vistas na figura abaixo.



3.6 SOLUÇÃO DO PROBLEMA

A condição inicial τ_{oi} da equação 32 será calculada por ajuste de polinômio quadrático, conforme método unidirecional, da forma:

$$\tau_{oi}(x) = \sum_{n=0}^2 d_{ni} x^n \quad (37)$$

Estes dados deverão ser colocados na equação 32, que deverá ser integrada e derivada, para ser colocada nas condições de contorno, formando um sistema que deverá ser resolvido, como no caso unidirecional, por Transformada de Laplace com Quadratura Gaussiana.

O caso mais simples é quando $x = x_i$, quando as integrais ficam nulas, obtendo-se:

$$\bar{\tau}_i(x_i, s) = A_i(s) \exp(-R_i x_i) + B_i(s) \exp(R_i x_i) \quad (38)$$

Para um x qualquer, a equação 32 pode ser escrita de outra forma, ficando então:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_i(x, s) &= A_i(s) \exp(-R_i x) + B_i(s) \exp(R_i x) \\ &+ \frac{\exp(-R_i x)}{2R_i} \int_{x_i}^x \exp(R_i x) \frac{\tau_{oi}(x)}{\alpha_i} dx - \frac{\exp(R_i x)}{2R_i} \int_{x_i}^x \exp(-R_i x) \frac{\tau_{oi}(x)}{\alpha_i} dx \\ &+ \frac{\exp(-R_i x)}{2R_i} \int_{x_i}^x \exp(R_i x) \bar{S}_i(x, s) dx - \frac{\exp(R_i x)}{2R_i} \int_{x_i}^x \exp(-R_i x) \bar{S}_i(x, s) dx \end{aligned} \quad (39)$$

Observa-se na equação acima que as duas primeiras linhas representam o problema unidimensional do capítulo anterior, e a terceira linha o efeito da segunda dimensão. Pode-se portanto utilizar o resultado unidirecional acrescido do resultado das duas integrais da última linha acima. Como o termo fonte tem uma equação semelhante à condição inicial, os resultados das integrais também serão semelhantes, obtendo-se:

$$\bar{\tau}_i(x, s) = A_i(s) \exp(-R_i x) + B_i(s) \exp(R_i x) + \frac{I_i(x)}{2s} - \frac{\alpha_i S_i(x)}{s} \quad (40)$$

onde

$$I_i(x) = 2 \left[d_{1i} + d_{2i}x + d_{3i} \left(\frac{2}{R_i^2} + x^2 \right) \right] - N_1 \exp(-R_i x) - N_2 \exp(R_i x)$$

$$N_j = \exp(\mp R_i x_i) (K_j + M_j x_i + d_{3i} x_i^2), \dots, j = 1, 2$$

$$\text{onde} \quad K_j = d_{1i} - \frac{d_{2i}}{\pm R_i} + \frac{2d_{3i}}{R_i^2} \quad (40a)$$

$$M_j = d_{2i} - \frac{2d_{3i}}{\pm R_i}$$

$$S_i(x) = 2 \left[a_{2i} + b_{2i}x + c_{2i} \left(\frac{2}{R_i^2} + x^2 \right) \right] - N'_1 \exp(-R_i x) - N'_2 \exp(R_i x)$$

$$\begin{aligned}
N'_j &= \exp(\mp R_i x_i) (K'_j + M'_j x_i + c_{3i} x_i^2), \dots, j = 1, 2 \\
\text{onde} \quad K'_j &= a_{2i} - \frac{b_{2i}}{\pm R_i} + \frac{2c_{2i}}{R_i^2} \\
M'_j &= b_{2i} - \frac{2c_{2i}}{\pm R_i}
\end{aligned} \tag{40b}$$

A equação acima é a solução genérica do problema. A equação 40a é a parte unidirecional, capítulo anterior, e a 39b o efeito da segunda dimensão. Esta equação, junto com a 38, deve ser colocada nas condições de contorno para encontrarem-se as constantes de integração A_i e B_i . Além delas, é necessário colocarem-se as derivadas destas equações, obtendo-se para x_i :

$$\frac{d\bar{\tau}_i(x_i, s)}{dx} = R_i [B_i(s) \exp(R_i x_i) - A_i(s) \exp(-R_i x_i)] \tag{41}$$

Para x qualquer obtém-se, também baseado no capítulo anterior:

$$\frac{d\bar{\tau}_i(x, s)}{dx} = R_i [B_i(s) \exp(R_i x) - A_i(s) \exp(-R_i x)] + \frac{Id_i(x)}{2s} - \frac{\alpha_i Sd_i(x)}{s} \tag{42}$$

onde

$$Id_i(x) = (2d_{2i} + 4d_{3i}x) + R_i [N_1 \exp(-R_i x) - N_2 \exp(R_i x)] \tag{42a}$$

$$Sd_i(x) = (2b_{3i} + 4c_{3i}x) + R_i [N'_1 \exp(-R_i x) - N'_2 \exp(R_i x)] \tag{42b}$$

3.7 SISTEMA A SER RESOLVIDO PARA A TEMPERATURA MÉDIA

A equação 42a representa o problema unidirecional, e a 42b o bidirecional. Deve-se agora colocar as equações 38, 40, 41 e 42 nas condições de contorno em x , equações 31a, e interface em x , equações 31c, para acharem-se as constantes de integração das equações 38 e 40, soluções do problema, obtendo-se:

$$\begin{aligned}
& -k_1 \frac{d\bar{\tau}_1(x_1, s)}{dx} + h_1 \bar{\tau}_1(x_1, s) = h_1 \bar{T}_a(s) \\
& \left. \begin{aligned}
& \bar{\tau}_i(x_{i+1}, s) = \bar{\tau}_{i+1}(x_{i+1}, s) \\
& k_i \frac{d\bar{\tau}_i(x_{i+1}, s)}{dx} = k_{i+1} \frac{d\bar{\tau}_{i+1}(x_{i+1}, s)}{dx}
\end{aligned} \right\} \dots, \dots, i = 1, 2, 3 \\
& k_4 \frac{d\bar{\tau}_4(x_5, s)}{dx} + h_5 \bar{\tau}_4(x_5, s) = h_5 \frac{T_b}{s}
\end{aligned} \tag{43}$$

Com as equações acima pode-se montar um sistema linear para obtenção dos coeficientes A_i e B_i obtendo-se:

$$\begin{bmatrix}
a_{11} & b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_{12} & b_{12} & a_{22} & b_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_{13} & b_{13} & a_{23} & b_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_{24} & b_{24} & a_{34} & b_{34} & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_{25} & b_{25} & a_{35} & b_{35} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{36} & b_{36} & a_{46} & b_{46} \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{37} & b_{37} & a_{47} & b_{47} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{48} & b_{48}
\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \\ B_3 \\ A_4 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix} \tag{44}$$

Neste sistema os termos valem:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= (k_1 R_1 + h_1) \exp(-R_1 x_1) & b_{11} &= (-k_1 R_1 + h_1) \exp(R_1 x_1) \\
a_{12} &= \exp(-R_1 x_2) & b_{12} &= \exp(R_1 x_2) \\
a_{22} &= -\exp(-R_2 x_2) & b_{22} &= -\exp(R_2 x_2) \\
a_{13} &= -k_1 R_1 \exp(-R_1 x_2) & b_{13} &= k_1 R_1 \exp(R_1 x_2) \\
a_{23} &= k_2 R_2 \exp(-R_2 x_2) & b_{23} &= -k_2 R_2 \exp(R_2 x_2) \\
a_{24} &= \exp(-R_2 x_3) & b_{24} &= \exp(R_2 x_3) \\
a_{34} &= -\exp(-R_3 x_3) & b_{34} &= -\exp(R_3 x_3) \\
a_{25} &= -k_2 R_2 \exp(-R_2 x_3) & b_{25} &= k_2 R_2 \exp(R_2 x_3) \\
a_{35} &= k_3 R_3 \exp(-R_3 x_3) & b_{35} &= -k_3 R_3 \exp(R_3 x_3) \\
a_{36} &= \exp(-R_3 x_4) & b_{36} &= \exp(R_3 x_4) \\
a_{46} &= -\exp(-R_4 x_4) & b_{46} &= -\exp(-R_4 x_4) \\
a_{37} &= -k_3 R_3 \exp(-R_3 x_4) & b_{37} &= k_3 R_3 \exp(R_3 x_4) \\
a_{47} &= k_4 R_4 \exp(-R_4 x_4) & b_{47} &= -k_4 R_4 \exp(R_4 x_4)
\end{aligned} \tag{44a}$$

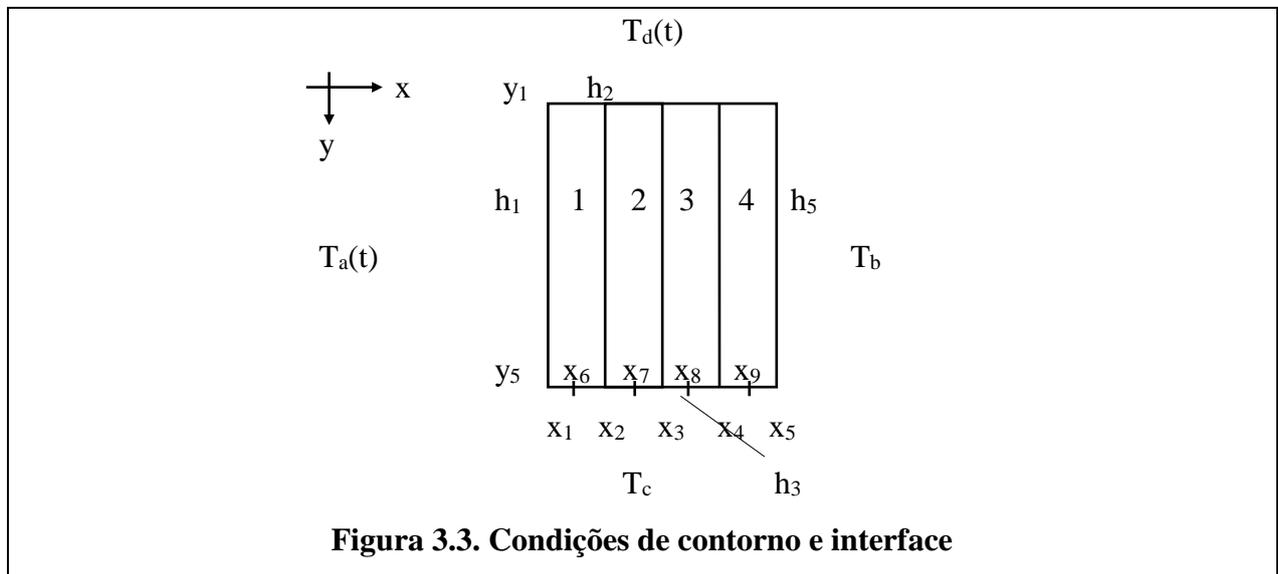
$$a_{48} = \exp(-R_4 x_5) (-k_4 R_4 + h_5) \quad b_{48} = \exp(R_4 x_5) (k_4 R_4 + h_5)$$

$$\begin{aligned}
 C_1 &= h_1 \bar{T}_a \\
 C_j &= -\frac{I_i(x)}{2s} + \frac{\alpha_i S_i(x)}{s} \dots, \dots, j = 2, 4, 6 \\
 C_j &= -\frac{k_i}{s} \left(\frac{Id_i(x)}{2} - \alpha_i Sd_i(x) \right) \dots, \dots, j = 3, 5, 7 \\
 C_8 &= \frac{h_5}{s} \left(T_b - \frac{I_4(x_5)}{2} + \alpha_4 S_4(x_5) \right) - \frac{k_4}{s} \left(\frac{Id_4(x_5)}{2} - \alpha_4 Sd_4(x_5) \right)
 \end{aligned}
 \tag{44b}$$

3.8 CONVERGÊNCIA DA APROXIMAÇÃO PROPOSTA

É necessário encontrarem-se os coeficientes a_{ni} , b_{ni} e c_{ni} das equações acima. Como tem-se nove incógnitas, serão necessárias nove equações para cada meio, as duas de contorno em y e a temperatura média, aplicadas em três seções x.

A equação 33 deve ser aplicada nas condições de contorno em y junto com sua derivada. Obtém-se então as seguintes equações, escritas para as interfaces x_1 a x_5 e os pontos centrais de cada meio x_6 a x_9 , conforme desenho a seguir:



$$\begin{aligned}
 (h_2 a_{0i} - K_i a_{1i}) + (h_2 b_{0i} - K_i b_{1i})x + (h_2 c_{0i} - K_i c_{1i})x^2 &= h_2 \bar{T}_d(s) \\
 \sum_{n=0}^2 (nK_i + h_3) a_{ni} + \sum_{n=0}^2 (nK_i + h_3) x b_{ni} + \sum_{n=0}^2 (nK_i + h_3) x^2 c_{ni} &= h_3 \frac{T_c}{s}
 \end{aligned}
 \tag{45}$$

A temperatura média proposta pode ser vista na eq.34, que será igualada ao resultado da equação 40, junto com as condições de contorno em y, formando um sistema a ser resolvido iterativamente para se encontrar os coeficientes a_{ni} , b_{ni} e c_{ni} .

3.9 SISTEMA A SER RESOLVIDO PARA A EQUAÇÃO PROPOSTA

O sistema será resolvido substituindo-se s por p_k/t dos pontos de quadratura e encontrando-se a_{ni} , b_{ni} e c_{ni} iterativamente. Os termos da matriz codificados u(linha,coluna) podem ser vistos abaixo. Os termos independentes estão chamados C'(linha).

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & u_{14} & u_{15} & 0 & u_{17} & u_{18} & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 & u_{24} & u_{25} & 0 & u_{27} & u_{28} & 0 \\ u_{31} & u_{32} & 0 & u_{34} & u_{35} & 0 & u_{37} & u_{38} & 0 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & u_{45} & u_{46} & u_{47} & u_{48} & u_{49} \\ u_{51} & u_{52} & u_{53} & u_{54} & u_{55} & u_{56} & u_{57} & u_{58} & u_{59} \\ u_{61} & u_{62} & u_{63} & u_{64} & u_{65} & u_{66} & u_{67} & u_{68} & u_{69} \\ u_{71} & u_{72} & u_{73} & u_{74} & u_{75} & u_{76} & u_{77} & u_{78} & u_{79} \\ u_{81} & u_{81} \\ u_{91} & u_{92} & u_{93} & u_{94} & u_{95} & u_{96} & u_{97} & u_{98} & u_{99} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{0i} \\ a_{1i} \\ a_{2i} \\ b_{0i} \\ b_{1i} \\ b_{2i} \\ c_{0i} \\ c_{1i} \\ c_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_1 \\ C'_2 \\ C'_3 \\ C'_4 \\ C'_5 \\ C'_6 \\ C'_7 \\ C'_8 \\ C'_9 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Os termos da matriz e os independentes podem ser vistos abaixo, escritos em linguagem Fortran. As linhas da matriz estão representadas por j, k p, e os termos foram aplicados à três cotas x para cada meio i.

```
c ***** Cond.cont.y1,xtt(i,j) ***** (47a)
```

```
c **** j=1,2,3 *****
c'(j)=ah2*td
u(j,1)=ah2
u(j,2)=-ak(i)
u(j,3)=0
u(j,4)=ah2*xtt(i,j)
u(j,5)=-ak(i)*xtt(i,j)
u(j,6)=0
u(j,7)=ah2*xtt(i,j)**2
u(j,8)=-ak(i)*xtt(i,j)**2
u(j,9)=0
```

```
c ***** Cond.cont.y5,xtt(i,j) ***** (47b)
```

```
c ***** k=4,5,6 *****
c'(k)=ah3*Tc*t/p(k)
u(k,1)=ah3
```

$$\begin{aligned}
& u(k,2)=ah3+ak(i) \\
& u(k,3)=ah3+2*ak(i) \\
& u(k,4)=ah3*xtt(i,j) \\
& u(k,5)=(ah3+ak(i))*xtt(i,j) \\
& u(k,6)=(ah3+2*ak(i))*xtt(i,j) \\
& u(k,7)=ah3*xtt(i,j)**2 \\
& u(k,8)=(ah3+ak(i))*xtt(i,j)**2 \\
& u(k,9)=(ah3+2*ak(i))*xtt(i,j)**2 \\
c & \text{ ***** Temp.media xtt(i,j) *****} \\
c & \text{ ***** p=7,8,9 *****} \\
& c'(p)=txt(i,j) \\
& u(p,1)= (1.0d+00,0.0d+00) \\
& u(p,2)=(0.5d+00,0.0d+00) \\
& u(p,3)=(1.0d+00,0.0d+00)/(3.0d+00,0.0d+00) \\
& u(p,4)=xtt(i,j) \\
& u(p,5)=xtt(i,j)/2 \\
& u(p,6)=xtt(i,j)/3 \\
& u(p,7)=xtt(i,j)**2 \\
& u(p,8)=(xtt(i,j)**2)/2 \\
& u(p,9)=(xtt(i,j)**2)/3
\end{aligned} \tag{47c}$$

É necessária uma estimativa inicial para a_{ni} , b_{ni} e c_{ni} . Uma primeira consideração pode ser um campo de temperatura constante, independente de x e y . Isto leva para a_{0i} igual ao valor da temperatura inicial, e os demais coeficientes iguais à zero. Após, é feita a convergência dos coeficientes. No problema resolvido, a convergência foi feita adotando um critério de diferença máxima de 0,01% (zero vírgula zero um por cento) entre o valor adotado e o calculado.

Esta convergência será chamada no texto de Matriz 9, pois utiliza quatro matrizes 9×9 .

O retorno da temperatura média τ para o domínio tempo também será feito, como no caso unidirecional, através de Quadratura Gaussiana, obtendo-se:

$$\tau_i(x,t) = \sum_{k=1}^n A_k(p_k/t) \bar{\tau}_i(x,p_k/t) \tag{48}$$

Nesta equação a temperatura média transformada é calculada pelas equações 40, substituindo-se s por $p(k)/t$.

3.10 MÉTODO ALTERNATIVO DE CONVERGÊNCIA

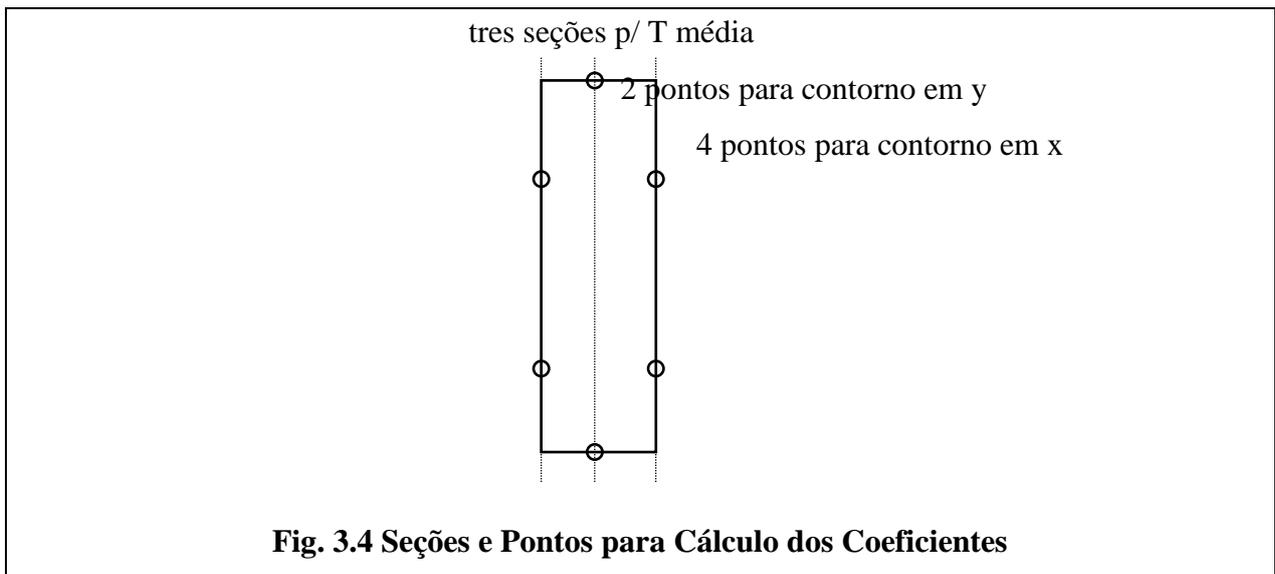
O método acima trata cada meio independentemente, sendo a união deles feita pela solução 1D, ou pelo cálculo das temperaturas médias. Como forma de verificação, desenvolveu-se outra forma de convergência, semelhante ao problema 1D, onde utilizaram-se as condições de contor-

no e interface em x para efetuar a convergência dos coeficientes da equação proposta. Estas condições podem ser vistas nas equações 28a e 28c.

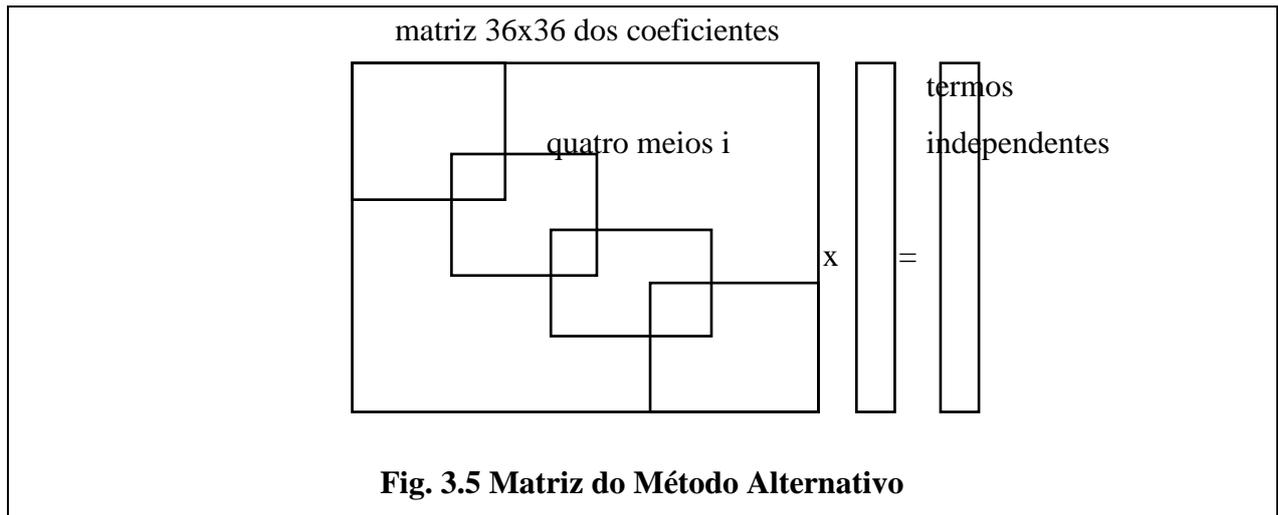
Para tanto, foi necessária a derivada da equação proposta em x , ou seja:

$$\frac{d\bar{T}_i^p(x, y, s)}{dx} = \left(\sum_{n=0}^2 b_{ni}(s) y^n \right) + 2 \left(\sum_{n=0}^2 c_{ni}(s) y^n \right) x \quad (49)$$

Esta equação foi então aplicada nas condições de contorno e interface em x , junto com as interfaces em y e a temperatura média. Como é necessário nove equações por meio, foram utilizadas tres seções para temperaturas médias, duas condições de contorno em y , nas seções médias, e quatro pontos de contorno em x , dois de cada lado de cada meio, à $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ da altura y . Como as condições de interface em x são interligadas, é necessário a solução do sistema integral formado pelos quatro meios, gerando uma matriz 36 por 36. Os locais de aplicação das equações podem ser vistos na fig. 3.4.



A matriz tridiagonal gerada aparece esquematizada na fig. abaixo. O cálculo do fluxo de calor por este método aparece no texto como Matriz 36.



3.11 PROBLEMA RESOLVIDO

As temperaturas externas função do tempo serão consideradas como temperaturas Sol-Ar, conforme considerado no capítulo anterior. A parede será a mesma, voltada para oeste. Logo, $T_a(t)$ será a mesma do capítulo anterior. A temperatura $T_d(t)$ será calculada para uma superfície horizontal, com insolação direta a partir das 12 horas. Antes, será considerada com a mesma insolação da superfície oeste. A temperatura Sol-Ar para a superfície horizontal pode então ser vista na tabela abaixo.

Tabela 3.1 Temperatura Sol-Ar para Superfície Horizontal

h	T_{sa}	h	T_{sa}	h	T_{sa}
1	25.43	9	29.764	17	41.128
2	24.88	10	31.7	18	35.29
3	24.44	11	33.752	19	31.286
4	24.11	12	53.946	20	29.83
5	24	13	54.642	21	28.62
6	25.104	14	53.624	22	27.52
7	26.382	15	50.886	23	26.64
8	27.918	16	46.604	24	25.98

As duas temperaturas Sol-Ar podem ser vistas na figura abaixo.

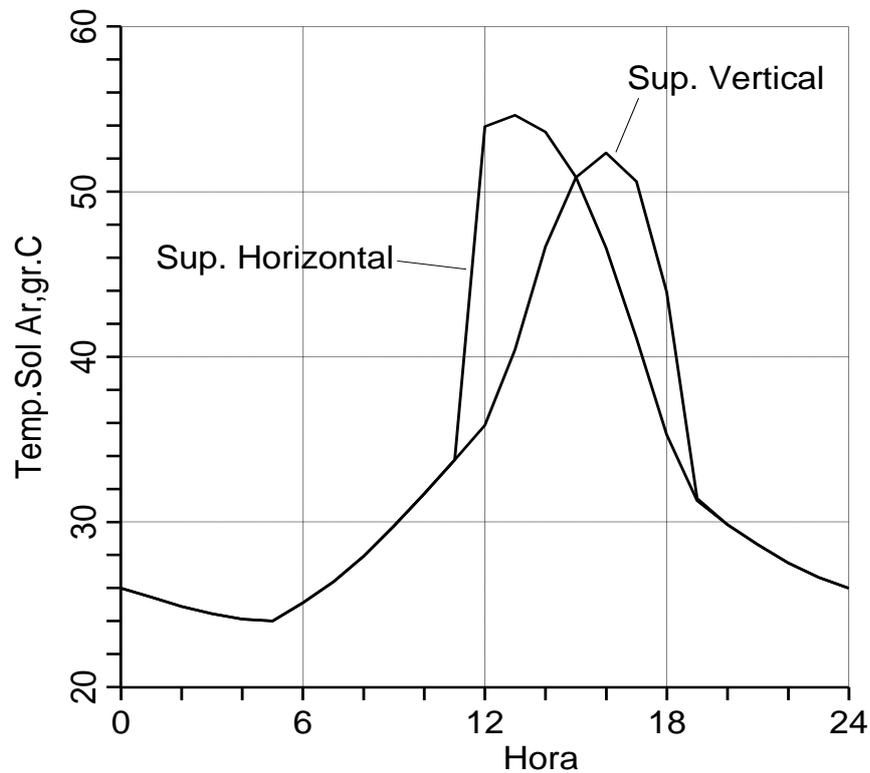


Figura 3.6 Temperaturas Sol-Ar Vertical e Horizontal

O dia foi dividido em cinco problemas seqüenciais, como no problema unidirecional, com intervalo nas principais inflexões do gráfico acima, a saber, às 5, 11, 15 e 19 horas, quando são calculadas as condições iniciais do problema seguinte. Para o cálculo das temperaturas médias foram considerados 12 pontos de quadratura, por ter sido o melhor valor na análise de erro feito no capítulo anterior.

Com as considerações feitas, chega-se à uma parede com quatro meios, espessura total 17 cm e altura 1 metro, com relação base/altura de 0,17 (baixa, ou seja, figura esbelta), conforme desenho a seguir, em escala. Na face esquerda e superior tem se temperaturas variáveis com o tempo, e na direita e inferior constantes. O problema resolvido pode ser considerado como uma parede voltada para oeste e com um vidro vertical na aresta superior direita, conforme desenho, o que traz insolação conforme já comentado.

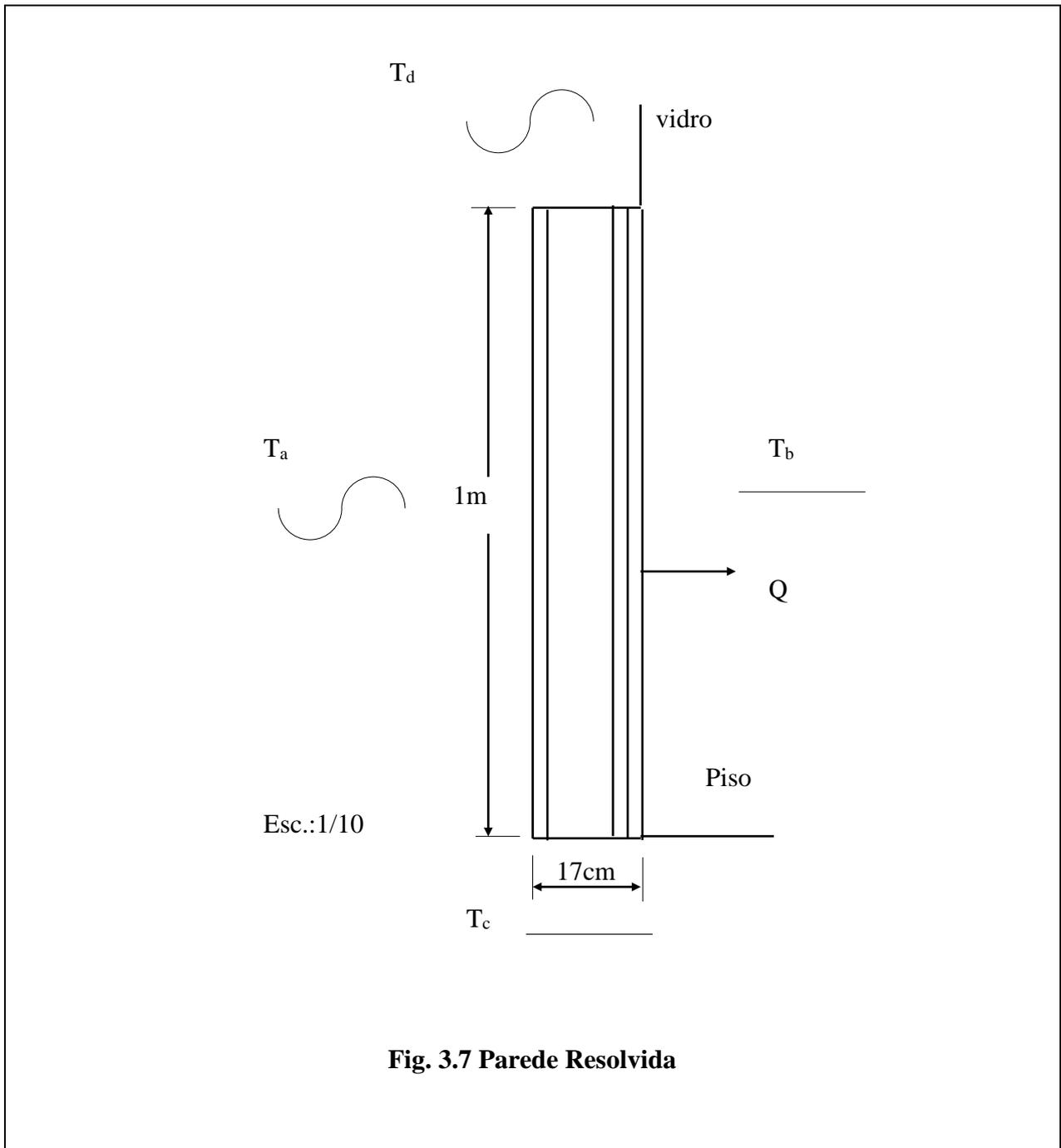


Fig. 3.7 Parede Resolvida

O problema foi resolvido de tres formas: método numérico, conforme Patankar (1980), e método proposto (Laplace/Gaussiana) pela forma Matriz 9 e Matriz 36. Os fluxos de calor para os problemas resolvidos para o quarto dia consecutivo podem ser vistos na tabela abaixo. A razão para ser o quarto dia é a mesma comentada no problema 1D, e será adiante analisada.

Tab. 3.2 Fluxos de Calor para Soluções Bi-Direcionais

Hora	Numérico	Matriz 9	Matriz 36
0	11.854	14.049	14.132
1	10.188	12.530	12.652
2	8.686	11.104	11.223
3	7.339	9.779	9.887
4	6.140	8.549	8.643
5	5.093	7.414	7.492
6	4.295	6.357	6.422
7	3.802	5.439	5.497
8	3.644	4.763	4.813
9	3.833	4.371	4.417
10	4.357	4.276	4.318
11	5.195	4.478	4.513
12	8.200	4.359	4.394
13	10.602	4.579	4.593
14	12.323	5.526	5.490
15	14.255	7.283	7.166
16	16.194	9.954	9.889
17	18.010	13.103	13.038
18	19.318	16.219	16.193
19	19.818	18.590	18.581
20	19.250	19.335	19.339
21	17.629	18.574	18.587
22	15.655	17.187	17.214
23	13.689	15.624	15.672
24	11.854	14.049	14.132

Estes fluxos, colocados na forma gráfica podem ser vistos na figura abaixo.

Calculando-se o fluxo médio de calor para os tres métodos ao longo do dia chega-se nos seguintes valores:

- Método Numérico: 10,85 W
- Método Matriz 9: 10,30 W
- Método Matriz 36: 10,33 W

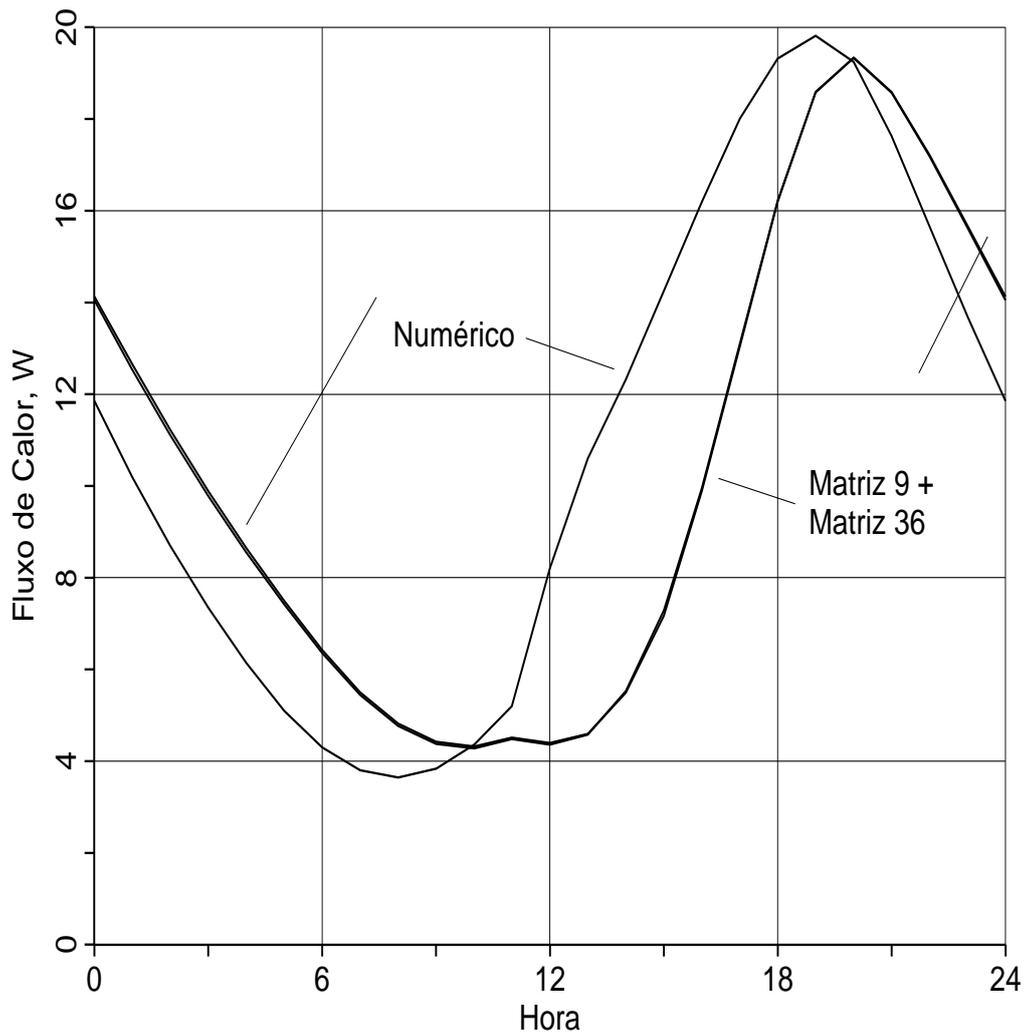


Fig. 3.8 Fluxos de Calor por Três Métodos

A diferença do maior para o menor é de 5 % (cinco por cento). É importante salientar aqui que os métodos propostos levam em torno de 5 (cinco) minutos para se obter os resultados acima.

Os fluxos de calor estão em W para a parede com 1 metro de altura e 1 metro de largura.

Um teste interessante a ser feito é colocar os coeficientes de convecção nas fronteiras y próximos de zero, levando o problema 2D a se comportar como 1D, e comparar os resultados obtidos pelo procedimento 2D com os obtidos pelo procedimento 1D. Isto feito, os resultados podem ser vistos na tabela abaixo.

Tabela 3.3 Fluxo de Calor sem Convecção em y, W

h=hora
 q12=calor 1D calculado pelo método 2D
 q11=calor 1D calculado pelo método 1D

h	q12	q11
1	11.455	11.449
2	9.980	9.974
3	8.634	8.628
4	7.407	7.402
5	6.298	6.293
6	5.317	5.313
7	4.529	4.525
8	4.018	4.015
9	3.819	3.815
10	3.931	3.930
11	4.347	4.347
12	5.043	5.049
13	5.990	6.011
14	7.302	7.317
15	9.229	9.245
16	11.796	11.798
17	14.623	14.617
18	17.231	17.223
19	19.018	19.009
20	19.288	19.280
21	18.169	18.163
22	16.519	16.515
23	14.765	14.762
24	13.058	13.053

Também é importante verificar a necessidade de calcular quatro dias em seqüência para o sistema entrar em regime cíclico. Após o cálculo dos quatro dias, vistos na tabela abaixo, conclui-se ser necessário calcular os quatro dias para se ter melhores resultados, como foi feito no problema 1D.

Tabela 3.4 Fluxos de Calor para Quatro Dias, W

Hora	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4
1	-.047	11.534	11.661	11.663
2	.126	10.130	10.239	10.240
3	.355	8.831	8.923	8.924
4	.537	7.542	7.617	7.618
5	.658	6.216	6.276	6.276
6	.541	5.202	5.253	5.253
7	.446	4.405	4.447	4.448
8	.487	3.817	3.853	3.853
9	.709	3.452	3.482	3.482
10	1.137	3.308	3.332	3.332
11	1.779	3.374	3.391	3.391
12	2.050	3.360	3.374	3.374
13	2.688	3.802	3.814	3.814
14	4.161	5.097	5.107	5.107
15	6.632	7.402	7.411	7.411
16	9.209	9.861	9.869	9.869
17	12.523	13.079	13.085	13.085
18	16.103	16.571	16.576	16.576
19	19.168	19.553	19.557	19.557
20	19.415	19.742	19.745	19.745
21	18.434	18.712	18.715	18.715
22	16.953	17.187	17.190	17.190
23	15.218	15.411	15.413	15.413
24	13.316	13.469	13.471	13.471

3.12 MÉTODO NUMÉRICO UTILIZADO

Na solução numérica foi utilizado o Método dos Volumes Finitos, conforme descrito por Patankar, 1980. Neste método o domínio de cálculo é discretizado sob a forma de volumes de controle, integrando-se a equação diferencial que descreve o fenômeno estudado ao longo de cada um destes volumes. A equação diferencial é também integrada ao longo de um intervalo de tempo Δt , obtendo-se assim um sistema de equações lineares algébricas, uma para cada volume da malha, a ser resolvido.

Integrando então a equação da condução transiente de calor, em uma dimensão, com o termo fonte S , no volume de controle, e ao longo do intervalo de tempo Δt , vem

$$\rho c \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt dx = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e S dx dt \quad (50a)$$

$$\rho c \Delta x \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt = \int_t^{t+\Delta t} \left(\left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right) dt + \bar{S} \Delta x \Delta t \quad (50b)$$

onde \bar{S} é o termo fonte associado ao volume de controle considerado, ao longo do intervalo de tempo Δt .

Para a avaliação das derivadas da temperatura nas faces “e” e “w” do volume de controle é necessário assumir uma função de interpolação entre o ponto “P”, que representa o centro do volume em questão, e seus vizinhos. Adotando um perfil linear de temperaturas tem-se

$$\rho c \Delta x \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt = \int_t^{t+\Delta t} \left(k_e \frac{(T_E - T_P)}{\delta x_e} - k_w \frac{(T_P - T_W)}{\delta x_w} \right) dt + \bar{S} \Delta x \Delta t \quad (50c)$$

Integrando agora no tempo e avaliando as diferenças de temperatura, que constam no lado direito da equação, no final do intervalo de tempo Δt , ou seja, no tempo $t + \Delta t$ (esquema totalmente implícito), tem-se

$$\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} (T_P - T_P^o) = k_e \frac{(T_E - T_P)}{\delta x_e} - k_w \frac{(T_P - T_W)}{\delta x_w} + \bar{S} \Delta x \quad (50d)$$

onde o superíndice “o” refere-se ao valor da temperatura do ponto “P” no tempo t .

Linearizando o termo fonte \bar{S} da seguinte forma, $\bar{S} = S_C + S_P T_P$, a equação (50d) pode ser assim reescrita

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b \quad (51a)$$

$$\text{onde} \quad a_E = \frac{k_e}{\delta x_e} \quad a_W = \frac{k_w}{\delta x_w} \quad a_P^o = \frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} \quad (51b)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_P^o - S_P \Delta x \quad b = S_C \Delta x + a_P^o T_P^o \quad (51c)$$

Observe-se que nestes coeficientes figura a condutividade térmica do meio nas faces dos volumes de controle. Quando o meio é homogêneo, e não for considerada a variação da sua condutividade com a temperatura, tem-se um valor constante. Entretanto neste trabalho propõe-se resolver meios multicompostos, onde comumente as propriedades físicas variam de meio para meio.

Supondo então que a interface entre dois meios distintos coincida com a interface entre dois volumes de controle, e aplicando o princípio físico da continuidade do fluxo térmico através da interface, obtém-se

$$k_e = \left(\frac{1-f_e}{k_p} + \frac{f_e}{k_E} \right)^{-1} \quad \text{onde} \quad f_e = \frac{\delta x_{e+}}{\delta x_e} \quad (52)$$

Em outras palavras trata-se da média harmônica das condutividades térmicas de cada meio com o posicionamento relativo da interface.

A integração da equação diferencial num volume de controle, e ao longo de um intervalo de tempo Δt , gerou uma equação algébrica linear para este volume de controle. Este procedimento da origem portanto a um sistema de equações algébricas, sendo uma equação para cada volume da malha de volumes que discretiza o domínio de solução.

A evolução das temperaturas no interior da parede é então calculada resolvendo-se o sistema de equações algébricas a cada passo de tempo. As condições de contorno, inclusive a da face externa, que é transiente, são incorporadas nos volumes de controle das fronteiras.

Embora se tenha mostrado uma integração em uma dimensão, a integração em duas dimensões é semelhante. Tudo o que vale para uma valerá para outra.

Na solução bidimensional deste trabalho, visando gerar uma base precisa de comparação, o problema foi resolvido com uma discretização de 170 volumes na direção x e 168 volumes na direção y. Foram empregados mais volumes na direção x em função da maior área de troca. Os efeitos bidimensionais são relativamente reduzidos, em função da razão de aspecto da parede ser da ordem de 6.

Foi resolvido o transiente real, de forma totalmente implícita com passos de tempo de 3 minutos. A convergência em cada passo de tempo foi declarada quando a variação relativa entre uma iteração e a anterior foi menor do que 10^{-10} . O sistema linear foi resolvido pelo Algoritmo de Thomas (TDMA), linha a linha, específico para matrizes diagonais dominantes.

Foi empregado o código computacional multipropósito de Patankar.

3.13 IMPRECISÕES

Em relação à análise de erros, pode-se começar dizendo que a análise feita para a parede 1D pode ser aplicada ao problema 2D, no tocante ao procedimento 1D de cálculo. Em relação ao

procedimento 2D, deve existir alguma margem de erro imposta pelo polinômio interpolador. Provavelmente, a equação proposta não representa bem o campo de temperaturas para gradientes acentuados de temperatura no contorno. Talvez, em problemas mais suaves, este tipo de equação apresenta melhores resultados.

O problema calculado para coeficientes de convecção em y próximos de zero refaz com boa precisão o problema 1D, servindo como referência de um bom desempenho do modelo proposto.

A equação proposta, polinômio duplo de segundo grau é extremamente simples. Para melhoria do desempenho do método, é necessária a procura e teste de outras equações propostas. A título de ilustração, foi calculado pelo método numérico o campo de temperaturas para determinada seção em determinado horário. Nestas mesmas condições, foram calculados os coeficientes do polinômio duplo interpolador, fazendo a importante ressalva que o polinômio opera nos pontos de quadratura, s ou $p(k)/t$, e os coeficiente foram calculados para o domínio t , não sendo garantidamente os mesmos valores. De qualquer forma, os resultados podem ser vistos na fig. abaixo.

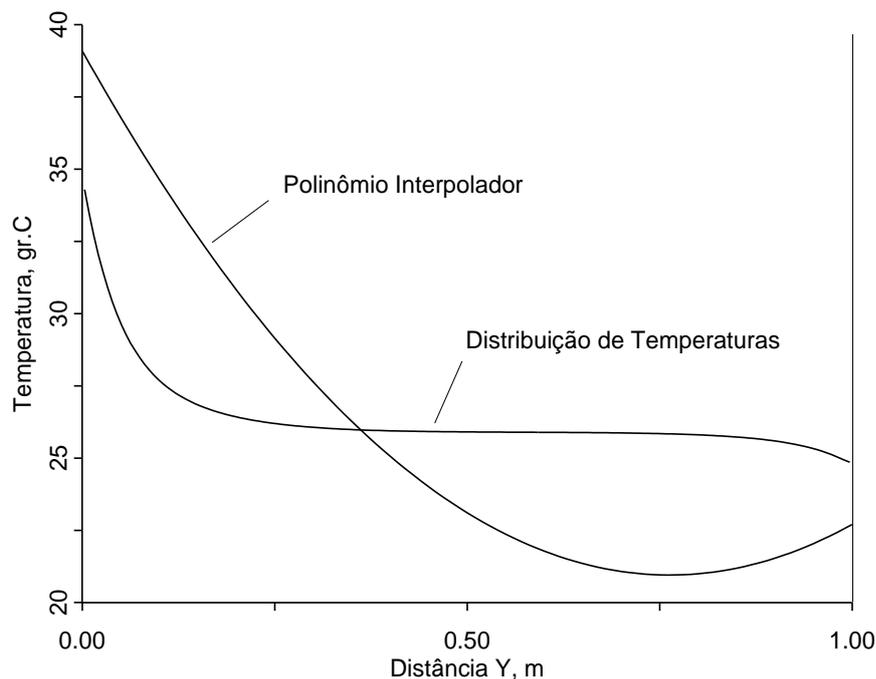


Fig. 3.9 Campo de Temperatura e Equação Proposta

O polinômio obtido não acompanha o campo de temperaturas. Como o modelo obtém resultados razoáveis? A principal razão deve ser que o problema está preocupado em resolver a temperatura média pelo procedimento 1D, e não pelo polinômio interpolador, que é uma função

auxiliar. De qualquer forma, pode ser observado que a temperatura média, mesmo com curvas diferentes como acima, pode ser bastante próxima.

A procura de melhores equações propostas deve basear-se na figura acima. Pelo tipo de perfil de temperaturas, em forma de S, aparecem como candidatas equações do tipo tangente hiperbólica, ou arco-tangente hiperbólico, ou derivadas, que provavelmente representarão bem melhor o problema em análise do que o polinômio. De qualquer forma, o caminho está mostrado e provado que converge para resultados extremamente razoáveis.

4 CONCLUSÕES

Em relação à revisão bibliográfica pode-se concluir que, no âmbito do desempenho térmico de edificações, o principal método utilizado é o das funções de transferência ou funções Z de transferência. Esta metodologia apresenta como desvantagem o fato de não permitir qualquer modificação sobre a parede que originou os coeficientes da função de transferência. Qualquer modificação, como os coeficientes de convecção, exige que encontre-se novamente os coeficientes da função de transferência. Também não permite o conhecimento do campo de temperaturas interna da parede, tornando extremamente difícil análises onde este dado é importante, como condensação de umidade e/ou difusão de vapor d'água. Também exige sempre o incremento temporal no cálculo dos fluxos de calor.

Os métodos híbridos da transformada de Laplace apareceram em alguns trabalhos, misturando a transformada de Laplace com esquemas numéricos como diferenças finitas, elementos finitos ou volumes finitos, procurando retirar a dependência temporal pela transformada de Laplace e aplicação do esquema numérico no domínio espacial. Consegue-se com isto alguma redução no tempo computacional.

Os trabalhos propostos revelam também uma grande procura por resolver problemas acoplados de difusão de calor e massa. Esta aplicação utiliza muito bem uma vantagem do método 1D, que é o conhecimento da temperatura em qualquer ponto do domínio e a qualquer tempo requerido, o que é necessário para os cálculos de difusão de massa.

Em relação ao procedimento 1D, pode-se concluir que os três métodos analisados, Função de Transferência, Volumes Finitos e Laplace/Gaussiana apresentaram resultados numéricos próximos.

O Método Laplace/Gaussiana apresenta facilidades de uso, permitindo maior flexibilidade em relação à possibilidade de calcular-se qualquer tipo de parede, inclusive com alterações nos coeficientes de película. O método pode ser aplicado às paredes utilizadas nas construções brasileiras, procurando analisar-se os efeitos de distintos materiais, espessuras, cores e orientações nestas paredes.

Em relação aos métodos numéricos tradicionais, o Método Laplace/Gaussiana apresenta como grande vantagem o fato de não depender de incremento sequencial seja na variável espacial ou na temporal. Com isto consegue uma rapidez de cálculo bem maior, pois pode-se chegar diretamente ao quarto dia de cálculo somente calculando-se a distribuição de temperatura ao fim de cada período fracionário, já que o método analítico tem inerente em sua formulação o efeito tem-

poral total da função excitação do problema. Também o método analítico permite o cálculo das temperaturas somente nas interfaces, por eliminar a necessidade de discretização do domínio espacial. Consegue-se com isto uma diminuição significativa no tempo computacional para solução do fluxo em superfícies opacas multicompostas.

O método da Função de Transferência aparece como o menos flexível, por se aplicar somente à paredes previamente calculadas e sem calcular o campo de temperaturas nas mesmas. Em relação à Volumes Finitos, tem como vantagem o fato do incremento temporal ser horário. A Função de Transferência tem também limitações importantes para paredes muito finas ou muito espessas, o que não acontece com o método Laplace/Gaussiana.

Existe também a possibilidade do método 1D ser estendido ao cálculo de difusão de massa (vapor d'água) nas paredes, pois diferentemente da Função de Transferência, o método Laplace-Gaussiana permite o conhecimento do campo interno de temperaturas.

Em termos de erro conclui-se que o método 1D é preciso o suficiente para a grande maioria das aplicações de Engenharia, com alguns ganhos computacionais. O método 1D respondeu muito bem a todas as variações introduzidas nas condições do problema.

A metodologia 2D estudada atendeu o objetivo esperado, que era calcular o fluxo de calor na face interna de paredes multi-compostas de edificações com fluxos de calor em duas direções. A solução 2D proposta apresenta-se como uma metodologia simples e que permite o cálculo de difusão de calor em duas dimensões, reduzindo o problema para uma dimensão. Apresenta boas possibilidades de ser expandida para três direções, x, y e z.

O método apresenta recursos a serem explorados, como a tentativa de outras equações propostas. Também pode ser procurada a solução do campo de temperaturas puntuais, na medida que for melhorada a equação interpoladora.

Apresenta como vantagem a não necessidade de discretização dos domínios espacial e temporal, resguardando-se a necessidade dos incrementos temporais entre problemas seqüenciais, já que o dia é dividido em cinco problemas seqüenciais. Isto permite que o problema tenha um incremento temporal de aproximadamente cinco horas.

Resolveu bastante bem o problema proposto, que era o cálculo do fluxo de calor na face interna da parede. A comparação da solução 2D com a solução 1D não mostrou diferenças significativas., o que era esperado. Isto combina com a sistemática usual do cálculo dos fluxos de calor em paredes, que é considerá-las uni-direcional.

Na comparação com os resultados numéricos pode-se observar, aparentemente, alguma discrepância nos resultados, provavelmente porque a equação proposta (polinômio de 2^o grau)

não acompanhe bem o campo de temperaturas. A melhora da equação interpoladora poderá ser obtida com a procura de outras equações a serem testadas, agora que o procedimento está proposto e mostrado que funciona. Para tanto, uma solução a ser verificada é resolver o problema por algum outro método, por exemplo o numérico, resolver o campo de temperaturas e procurar um bom ajuste de equação para o mesmo, lançar a equação no presente método e analisar os resultados obtidos.

Na análise geral, porém, o método proposto mostrou-se extremamente rápido e com resultados aproximados o suficiente para as aplicações em Engenharia Térmica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ackerman, M. e Dale, J.D. – “Measurement and prediction of insulated and aninsulated basement wall heat losses in a heating climate” - **ASHRAE Transactions**, 1987, vol. 93, part 1.

ASHRAE, "**Handbook of Fundamentals**", ASHRAE, pp.26.17-26.28, 1993.

Beyer, P.O., Vilhena, M.T.M.B., e Streck.E.I., "Fluxo de Calor Transiente em Paredes pela Transformada de Laplace com Inversão Numérica", **XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**, pp. 609 - 612, Brasília, Brasil, 1993.

Beyer, P.O. e Vilhena, M.T.M.B., "Fluxo de Calor Transiente em Paredes Externas Multicompostas", **V Encontro Nacional de Ciências Térmicas**, São Paulo, Brasil, 1994.

Beyer, P.O., "Fluxo de Calor Transiente em Paredes Externas de Edificações", **III Congresso Ibero-Americano de Ar Condicionado e Refrigeração**, São Paulo, 1995.

Beyer, P.O., Vielmo, H.A. e Vilhena, M.T.M.B., “Estudo Comparativo entre Soluções para a Transferência de Calor em Paredes Multicompostas”, **XIII Congresso Brasileiro e II Congresso Ibero Americano de Engenharia Mecânica**, Belo Horizonte, MG, 1995.

Beyer, P.O., Vielmo, H.A. e Vilhena, M.T.M.B., “Fluxo de Calor Transiente em Paredes Externas Multicompostas”, **III Encontro Nacional e I Encontro Latino-Americano de Conforto no Ambiente Construído**, Gramado, RS, 1995.

Blackwell, B.F. – “Temperature profile in semi-infinite body with exponential source and convective boundary condition” - **ASME Journal of Heat Transfer**, vol. 112, 1990.

Bliss,R.W., "Atmospheric Radiation near the Surface of the Ground", **Solar Energy** 5(3):103, 1961.

Bouzidi, M. – “Diffusion thermique non-stationnaire dans des milieux multicouches et problème aux valeurs propres-1. Une paroi unique multicouches”. - **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol. 34, No. 4/5, 1991a.

Bouzidi, M. – “Diffusion thermique non-stationnaire dans des milieux multicouches et problème aux valeurs propres-2. Plusieurs parois couplées entre elles”. - **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol. 34, No. 4/5, 1991b.

Brown, W.C. e Stephenson, D.G. – “Guarded hot box measurements of the dynamic heat transmission characteristics of seven wall specimens” - **ASHRAE Transactions** 1993, Vol. 99, Part 1.

Burch, D.M., Licitra, B.A. e Zarr, R.R. – “A comparison of two test methods for determining transfer function coefficients for a wall using a calibrated hot box”. - **ASME Journal of Heat Transfer**, vol. 112, 1990.

Burch, D.M. e Thomas, W.C. – “An analysis of moisture accumulation in a wood-frame wall subject to winter climate”. - *Thermal Performance of the Exterior Envelopes of Buildings V, Proceedings of ASHRAE/DOE/BTECC/CIBSE Conference*, Florida, 1992.

Burch, D.M., Thomas, W.C., Mathena, L.R. – “Transient moisture and heat transfer in multilayer non-isothermal walls - comparison of predicted and measured results”. - *Thermal performance of the exterior envelopes of buildings IV. - Proceedings of the ASHRAE/DOE/BTECC/CIBSE Conference*, Orlando, 1989.

Burch, D.M., Zarr, R.R. e Faison, T.K. – “A procedure for measuring the dynamic thermal performance of wall specimens using a calibrated hot box” - **ASHRAE Transactions**, 1987, vol. 93, part 2.

Burch, D.M., Zarr, R.R. e Licitra, B.A. – “A method for characterizing the dynamic performance of wall specimens using a calibrated hot box”. - **ASHRAE Transactions**, 1988, vol. 94, part 1.

Burow, P. e Weigand, B. - One-dimensional heat conduction in a semi-infinite solid with the surface temperature a harmonic function of time: a simple approximate solution for the transient behavior”. - **ASME Journal of Heat Transfer**, vol. 112, 1990.

Caulk, D.A. – “A method for analyzing heat conduction with high-frequency periodic boundary conditions” - **ASME Journal of Heat Transfer**, vol. 112, 1990.

Chang, K.C. e Payne, U.J. – “Analytical solution for heat conduction in a two-material-layer slab with linearly temperature dependent conductivity” - **ASME Journal of Heat Transfer**, vol. 113, 1991.

Chen, H-T e Chang, S-M. – “Application of the hybrid method to inverse heat conduction problems”. - **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol. 33, No. 4, 1990.

Chen, H-T. e Lin, J-Y. – “Hybrid Laplace transform technique for non-linear transient thermal problems”. - **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol. 34, No. 4/5, 1991.

Chen, H-T. e Lin, J-Y. – “Hybrid Laplace transform technique for Stefan problems with radiation-convection boundary condition”. - **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol. 35, No. 12, 1992.

Chen, H-T. e Lin, J-Y. – “Numerical analysis for hyperbolic heat conduction” - **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol. 36, No. 11, 1993.

Chorneyko, D.S. e Besant, R.W. – “Thermal modeling of a basement with insulated and uninsulated floor” - Thermal performance of the exterior envelopes of buildings IV. - **Proceedings of the ASHRAE/DOE/BTECC/CIBSE Conference**, Orlando, 1989.

Choudhury, S.R. e Jaluria, Y. – “Analytical solution for the transient temperature distribution in a moving rod or plate of finite length with surface heat transfer” - **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol. 37, No. 8, 1994.

Claridge, D.E. – “A thermal mass treatment for the TC 4.7 simplified energy analysis procedure”. - **ASHRAE Transactions** 1992, vol. 98, part 1.

Eunilkim, D.H. – “Basis and formalism of room weighting factors - thermal discrete transfer functions of a single zone model”. - **ASHRAE Transactions**, 1988, vol. 94, part 2.

Grandjean, B.P.A. e Thibault, J. – “A new criterion for assuming negligible internal thermal resistance in transient heat conduction problem” - **ASME Journal of Heat Transfer**, vol. 113, 1991.

Haghighat, F. e Liang, H. – “Determination of transient heat conduction through building envelopes - a review”. - **ASHRAE Transactions** 1992, vol. 98, part 1.

Haghighat, F., Sander, P.E. e Liang, H. – “An experimental procedure for deriving z-transfer function coefficients of a building envelope” - **ASHRAE Transactions** 1991, Vol 97, Part 2.

Haji-Sheikh, A. e Beck, J.V. – “Green’s function partitioning in Galerkin-based integral solution of the diffusion equation”. - **ASME Journal of Heat Transfer**, vol. 112, 1990.

Heydarian, M. e Mullineaux, N., "Solution of Parabolic Partial Differential Equations", **Appl. Math. Modelling**, 5, pp.448-449, 1981.

Hornbeck, R. W., “**Numerical Methods**”, Quantum Publishers, New York, 1975.

Hou, S., Cogley, A.C. e Sharma, A.- “A discrete element method for composite media: one-dimensional heat conduction” - **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol. 36, No. 12, 1993.

Irving, A.D. – “Dynamic response factor estimation: A point algebraic method” - **ASHRAE Transactions** 1992, Vol. 98, Part 2.

Karagiozis, A.N. e Kumaran, M.K. – “Computer model calculations on the performance of vapor barriers in canadian residential buildings”. - **ASHRAE Transactions** 1993, Vol. 99, Part 2.

Kolev, S.D. e Pungor, E. – “Numerical solution of hydraulic models based on the axially dispersed plug flow model by Laplace transforms”. - **Analytica Chimica Acta**, 194, 1987.

Kolev, S.D. e Van der Linden, W.E. – “Application of Laplace transforms for the solution of transient mass and heat transfer problems in flow systems” - **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol. 36, No. 1, 1993.

Krarti, M., Claridge, D.E. e Kreider, J.F. – “A foundation heat transfer algorithm for detailed building energy programs”. - **ASHRAE Transactions** 1994, Vol.100, Part 2.

Ku, J.Y. e Chan, S.H. – “A generalized Laplace transform technique for phase-change problems”. - **ASME Journal of Heat Transfer**, vol. 112, 1990.

Mahdavi, A. e Lam. K.P. – “Dynamic analysis and visualization of water vapor diffusion through building components” - **ASHRAE Transactions** 1993, Vol.99, Part 1.

Mitalas,G.P., "Calculation of Transient Heat Flow through Walls and Roofs", **ASHRAE Transactions**, Vol.74, Part 2, 1968.

Mitalas,G.P., "Transfer Function Method of Calculating Cooling Loads, Heat Extraction Rate and Space Temperature, **ASHRAE Journal**, 14(12), 1972.

Ojanen, T. e Kohonen, R. – “Hygrothermal influence of air convection in wall structures”. - Thermal performance of the exterior envelopes of buildings IV. - **Proceedings of the ASHRAE/DOE/BTECC/CIBSE Conference**, Orlando, 1989.

Özisik,M.N., "**Heat Conduction**", Ed.John Wiley & Sons, 1980.

Patankar, S. V., “**Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**”, New York, McGraw Hill, 1980.

Seem, J.E., Klein, S.A., Beckman, W.A. e Mitchell, J.W. – “Model reduction of transfer functions using a dominant root method” - **ASME Journal of Heat Transfer**, vol. 112, 1990.

Shapiro, A.P. e Motakef, S. – “Unsteady heat and mass transfer with phase change in porous slabs: analytical solutions and experimental results”. - **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol. 33, No. 1, 1990.

Spitler, J.D. e McQuiston, F.C. – “Development of a revised Cooling and Heating Load Calculation Manual” - **ASHRAE Transactions** 1993, Vol. 99, Part 1.

Spolek, G.A., Oosterhout, G.R. e Apfel, R.I. – “Transient heat and mass transfer in walls” - Thermal performance of the exterior envelopes of buildings III. - **Proceedings of the ASHRAE/ DOE/BTECC Conference**, Florida 1985.

Stroud, A.H. e Secrest, D., "**Gaussian Quadrature Formulas**", Prentice Hall, New Jersey, 1966.

Tsai, Y.M. e Crane, R.A. – “An analytical solution of a one-dimensional thermal contact conductance problem with one heat flux and one insulated boundary condition” - **ASME Journal of Heat Transfer**, vol. 114, 1992.

Vujanovic, B.D. e Jones, S.E. – “Approximate solutions of canonical heat conduction equations” - **ASME Journal of Heat Transfer**, vol. 112, 1990.

Wei, P.S. e Shian, M.D. – “Three-dimensional analytical temperature field around the welding cavity produced by a moving distributed high-intensity beam” - **ASME Journal of Heat Transfer**, Vol.115, 1993.

Xin, R.C. e Tao, W.Q. – “Analytical solution for transient heat conduction in two semi-infinite bodies in contact” - **ASME Journal of Heat Transfer**, Vol. 116, 1994.

Zedan M.F. e Mujahid, A.M. – “Laplace transform solutions for heat transfer in composite walls with periodic boundary conditions”. - **ASME Journal of Heat Transfer**, Vol.115, 1993.