

**Alguns Resultados sobre Sistemas de Equações Diferenciais  
Ordinárias e Equações Algébrico-Diferenciais**

Janáína Moreira Pires

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Argimiro R. Secchi <sup>ssmoli</sup>  
Orientador

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS  
Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada  
Porto Alegre, RS - Brasil  
Dezembro, 1996

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Pires, Janáina Moreira

Alguns Resultados sobre Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias e Equações Algébrico-Diferenciais / Janaína Moreira Pires — Porto Alegre: CPGMAP da UFRGS, 1996.

101+vi p.: il.

Dissertação (mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 1996.

Orientador: Argimiro R. Secchi

Dissertação: Equações Diferenciais Ordinárias, Equações Algébrico-Diferenciais, Métodos Analíticos e Computacionais

Palavras chave: Métodos de passo múltiplo lineares, Convergência, Problema de valor inicial, Equações algébrico-diferenciais, Solubilidade, Índice, Sistemas nilpotentes.

*Ao Paulo e Carolina*

## Resumo

Neste trabalho, são discutidas algumas propriedades básicas sobre a convergência de métodos de passo múltiplo lineares

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{y}_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbf{f}(t_{n+j}, \mathbf{y}_{n+j})$$

aplicados à solução numérica de problemas de condições iniciais

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

$$\mathbf{y}(t_0) = \zeta$$

para uma ampla classe de funções  $\mathbf{f}$  de interesse nas aplicações.

Além disso, também são discutidos vários aspectos básicos da teoria de equações algébrico-diferenciais lineares

$$A(t) \frac{d\mathbf{x}}{dt} + B(t) \mathbf{x}(t) = \mathbf{h}(t)$$

onde  $A(t), B(t)$  são matrizes  $n \times n$  suficientemente diferenciáveis, com  $A(t)$  singular (i.e., não inversível) em todo o intervalo de interesse.

## Abstract

In this work, we discuss some of the basic results about the convergence of linear multistep methods

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{y}_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbf{f}(t_{n+j}, \mathbf{y}_{n+j})$$

as applied to the solution of the initial value problem

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \boldsymbol{\zeta} \end{aligned}$$

for a large class of functions  $\mathbf{f}$  including practically all cases of interest in applications.

Moreover, we also discuss some basic theoretical results regarding linear systems of differential algebraic equations

$$A(t) \frac{d\mathbf{x}}{dt} + B(t) \mathbf{x}(t) = \mathbf{h}(t)$$

where  $A(t), B(t)$  are sufficiently smooth  $n \times n$  matrices, with  $A(t)$  singular (i.e., non-invertible) for every value of  $t$  concerned.

# Índice

<b>Resumo</b> .....	iv
<b>Abstract</b> .....	v
<b>Introdução</b> .....	1
<b>I. Métodos de Passo Múltiplo Lineares</b> .....	4
1.1 Introdução .....	5
1.2 Consistência e Estabilidade .....	12
1.3 Equações a Diferenças .....	16
1.4 Convergência .....	19
<b>II. Equações Algébrico-Diferenciais Lineares de Coeficientes Constantes</b> ....	39
2.1 Introdução .....	40
2.2 Solubilidade e Índice .....	44
<b>III. Equações Algébrico-Diferenciais Lineares de Coeficientes Variáveis</b> .....	48
3.1 Introdução .....	49
3.2 Sistemas Nilpotentes .....	55
3.3 Matrizes de Funções .....	69
3.4 Sistemas Solúveis .....	75
<b>Epílogo</b> .....	81
<b>Referências</b> .....	82
<b>Apêndice A</b> .....	84
<b>Apêndice B</b> .....	91

# Introdução

O presente trabalho discute certas propriedades básicas fundamentais de sistemas de equações diferenciais ordinárias não lineares

$$(0.1) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

e equações algébrico-diferenciais lineares

$$(0.2) \quad A(t) \frac{d\mathbf{x}}{dt} + B(t) \mathbf{x}(t) = \mathbf{h}(t)$$

onde  $A(t)$  é uma matriz singular (i.e., não inversível) em todo o intervalo de interesse. No primeiro caso, investiga-se a convergência de métodos lineares de passo  $h$

$$(0.3) \quad \sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{y}_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbf{f}(t_{n+j}, \mathbf{y}_{n+j})$$

aplicados à solução numérica de problemas de valor inicial

$$(0.4a) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

$$(0.4b) \quad \mathbf{y}(t_0) = \zeta$$

onde  $\mathbf{f} : \Omega \mapsto \mathbf{R}^n$  é uma aplicação contínua numa região aberta  $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ ,

$$(0.5a) \quad \mathbf{f} \in C^0(\Omega, \mathbf{R}^n)$$

e localmente Lipschitziana com relação à variável  $\mathbf{y}$ , i.e., para cada compacto  $\mathcal{K} \subseteq \Omega$ , tem-se

$$(0.5b) \quad \|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{v})\| \leq L_{\mathcal{K}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad \forall (t, \mathbf{u}), (t, \mathbf{v}) \in \mathcal{K}$$

para alguma constante  $L_{\mathcal{K}} > 0$ . Por exemplo, as condições (0.5) são satisfeitas se  $\mathbf{f}$  for continuamente diferenciável em  $\Omega$ , i.e.,  $\mathbf{f} \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^n)$ . Dado o ponto inicial  $(t_0, \zeta) \in \Omega$ , existe uma única solução  $\mathbf{y} \in C^1(\mathcal{J}, \mathbf{R}^n)$  do problema (0.4) numa vizinhança  $\mathcal{J}$  do ponto  $t_0$ ; ademais, tal solução pode ser estendida a um intervalo maximal  $\mathcal{I} \supseteq \mathcal{J}$ . O resultado fundamental sobre a convergência do esquema (0.3), mostrado no Capítulo I (Teorema 4.2), garante a convergência das aproximações  $\mathbf{y}_n$  uniformemente em cada compacto  $[a, b]$  contido no intervalo de existência  $\mathcal{I}$ , i.e.,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \max_{t_n \in [a, b]} \|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}(t_n)\| \right\} = 0$$

desde que (0.3) seja um método consistente e zero-estável, i.e., satisfaça

$$(0.6) \quad \sum_{j=0}^k \alpha_j = 0 \quad , \quad \sum_{j=0}^k j \alpha_j = \sum_{j=0}^k \beta_j$$

e

$$(0.7) \quad \rho(z) \equiv \sum_{j=0}^k \alpha_j z^j \quad \text{satisfaz a condição da raiz}$$

onde a última condição significa que o polinômio característico  $\rho(z)$  tem todas as raízes no disco unitário  $|z| \leq 1$ , e cada raiz com  $|z| = 1$  é simples. Reciprocamente, mostra-se no Capítulo I que, quando as aproximações  $\mathbf{y}_n$  computadas por um método (0.3) consistente e satisfazendo apenas

$$(0.8) \quad \sum_{j=0}^k \beta_j \neq 0$$

(em vez de (0.7)) convergirem uniformemente em algum intervalo a uma certa função  $\mathbf{y}(t)$ , então  $\mathbf{y}(t)$  é diferenciável e satisfaz (0.4) em cada ponto deste intervalo (Teorema 4.3).

No Capítulo II, é apresentada a teoria básica de sistemas singulares (0.2) de coeficientes constantes, i.e.,

$$(0.9) \quad A \frac{d\mathbf{x}}{dt} + B \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$$

cujos espaço de soluções está intimamente associado à estrutura do feixe de matrizes  $\mathcal{A}(\lambda) = \lambda A + B$  (Seção §2.2). Em particular, demonstra-se que a solubilidade (conforme Definição 1.1, Seção §2.1) do sistema singular (0.9) é equivalente à regularidade do feixe  $\mathcal{A}(\lambda)$ , i.e., à propriedade de  $\mathcal{A}(\lambda)$  ter posto maximal (Teorema 2.1).

No caso de sistemas (0.2) de coeficientes variáveis, considerados no Capítulo III, a caracterização da solubilidade é menos simples. Inicialmente, é mostrado que o conceito de solubilidade considerado na literatura corrente [01], [04] requer que  $A(t)$  seja singular para *todo* ponto  $t$  do intervalo de interesse (Proposição 1.1, §3.1). A seguir, o sistema particular

$$(0.10) \quad N(t) \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{x}(t) = \mathbf{h}(t)$$

é investigado (Seção §3.2), onde  $N(t)$  é nilpotente para todo  $t \in \mathcal{I}$ , mostrando-se que (0.10) é solúvel sempre que o operador diferencial

$$(0.11) \quad N(t) \frac{d}{dt}$$



for nilpotente (Teorema 2.1). Nesse caso, a solução da equação (0.10) depende possivelmente das derivadas de  $h(t)$  de ordem até  $n - 1$ , como no caso de coeficientes constantes (Teorema 2.3).

Na Seção §3.3, dois resultados importantes (Teoremas 3.1 e 3.2) sobre matrizes de funções contínuas ou de dada classe de diferenciabilidade são examinados, com parte da análise apresentada no Apêndice B. Estes resultados são por sua vez utilizados na investigação da estrutura das soluções de (0.2) na Seção §3.4, seguindo a discussão apresentada em [04].

No texto a seguir, cada capítulo é dividido em seções, com os enunciados (teoremas, definições, etc.) enumerados por seção; assim, por exemplo, o Teorema 2.3 do Capítulo III refere-se ao terceiro teorema da seção 2 deste capítulo, (i.e., §3.2), e, similarmente, a Definição 4.2 indica a segunda definição apresentada na seção 4 do capítulo em questão. Os resultados discutidos são em geral apresentados como Lemas, Proposições ou Teoremas, de acordo com sua relativa importância no capítulo. Em todo o texto, símbolos em negrito denotam grandezas vetoriais, e letras latinas maiúsculas são usadas geralmente para denotar matrizes. A notação  $\|\cdot\|$  é usada para indicar uma norma no espaço  $\mathbf{R}^n$ , e  $C^k(\mathcal{I}, X)$  denota o espaço das funções definidas no intervalo  $\mathcal{I}$  com valores num espaço de Banach  $X$  que são  $k$  vezes continuamente diferenciáveis em cada ponto deste intervalo.  $GL_n(\mathbf{R})$  denota o grupo linear das matrizes inversíveis de ordem  $n$  e coeficientes reais, e  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  o espaço de todas as matrizes reais de dimensão  $n \times n$ .

Finalmente, cumpre destacar a contribuição oferecida no presente trabalho. De um modo geral, exceto onde explicitamente indicado o contrário, as provas apresentadas no texto são contribuições da autora, elaboradas na maior parte dos casos a partir de sugestões e discussões com os professores orientadores. Alguns poucos resultados parecem não ter aparecido na literatura anteriormente (possivelmente, o Teorema 4.3 (Capítulo I) e Teoremas 2.1 e 2.3 (Capítulo III)), e outros parecem não ter a prova publicada em nenhum lugar (por exemplo, o Teorema 4.2 (Capítulo I), Proposição 1.1 (Capítulo III), Teorema 1.1 (Capítulo III), Teoremas 3.1, 3.2, 3.3 (Capítulo III) e Proposições B-5, B-7 e B-8 (Apêndice B)). Em relação aos exemplos, os seguintes são de responsabilidade da autora: Exemplos 1.1 e 1.2 (Capítulo II) e Exemplos 1.1, 2.1 e 2.4 (Capítulo III).

Por último, mas não menos importante, a autora gostaria de registrar seu sincero agradecimento aos Professores Argimiro R. Secchi (orientador) e Paulo R. Zingano (co-orientador), sem os quais este trabalho não teria sido possível.

# Capítulo I

## Métodos de Passo Múltiplo Lineares

Neste capítulo, derivaremos alguns resultados sobre métodos de passo  $k$  lineares

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{y}_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbf{f}_{n+j}$$

aplicados à solução numérica do problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

$$\mathbf{y}(a) = \boldsymbol{\zeta}$$

para uma ampla classe de funções  $\mathbf{f}$ , onde  $\mathbf{y}_n$  denota a aproximação calculada para o valor  $\mathbf{y}(t_n)$  da solução exata no ponto  $t_n$  de uma malha uniforme de espaçamento  $h$ , i.e.,  $t_n = a + nh$ .

Na seção §1.1 são apresentados alguns exemplos de métodos da forma acima (métodos de Adams-Bashforth e métodos BDF), além de se introduzir vários conceitos fundamentais como consistência, zero-estabilidade e convergência. A seguir, na seção §1.2, mostra-se que consistência e estabilidade são condições necessárias para que um método linear possa convergir em pelo menos um ponto à solução do problema. Após derivar em §1.3 alguns resultados simples sobre seqüências satisfazendo equações a diferenças relacionadas ao método acima, demonstra-se na seção §1.4 três resultados fortes sobre a convergência de métodos lineares, que constituem os principais resultados deste capítulo.

## §1.1 – Introdução

Seja  $f : [a, b] \times \mathbf{R}^m \mapsto \mathbf{R}^m$  uma função dada, contínua em seu domínio, i.e.,  $f \in C^0([a, b] \times \mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m)$ , e consideremos o problema de valor inicial

$$(1.1a) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

$$(1.1b) \quad \mathbf{y}(a) = \zeta$$

onde  $\zeta \in \mathbf{R}^m$  é um vetor dado. Quando  $f$  satisfaz a condição de Lipschitz

$$(1.2) \quad \|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{v})\| \leq L \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad \forall t \in [a, b], \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^m$$

pode-se mostrar [11] que o problema (1.1) admite uma única solução  $\mathbf{y}(t)$ , que está definida em todo o intervalo  $[a, b]$ , é continuamente diferenciável neste intervalo,

$$\mathbf{y} \in C^1([a, b], \mathbf{R}^m)$$

e satisfaz a equação (1.1a) em cada ponto  $t \in [a, b]$ . (Acima,  $\|\cdot\|$  denota uma norma em  $\mathbf{R}^m$ ; como por exemplo

$$\|\mathbf{v}\| = \max_{1 \leq i \leq m} |v_i|$$

sendo  $v_1, v_2, \dots, v_m$  as componentes de  $\mathbf{v}$ .) Com exceção de casos especiais onde se consegue integrar (1.1) analiticamente, em geral só é factível encontrar *aproximações*  $\mathbf{y}^{[h]}$  para a solução  $\mathbf{y}$  em  $[a, b]$ . Um modo de se obter  $\mathbf{y}^{[h]}$  pode ser descrito como segue. Tomando-se  $h > 0$ , define-se a *malha* (ou *rede*, *grid*) formada pelos  $N + 1$  pontos

$$t_0 = a, t_1 = a + h, t_2 = a + 2h, \dots, t_N = a + Nh$$

onde  $N > 0$  é tal que  $Nh \leq b - a$  e  $(N + 1)h > b - a$ , obtendo-se, para cada  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ , uma aproximação numérica  $\mathbf{y}_n$  (ou, para maior clareza,  $\mathbf{y}_n^{[h]}$ ) para o valor exato  $\mathbf{y}(t_n)$ , que, espera-se, seja próximo a este valor se a malha for suficientemente fina, tendo-se

$$(1.3) \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t_* - a}} \mathbf{y}_n^{[h]} = \mathbf{y}(t_*)$$

para cada ponto de interesse  $t_* \in [a, b]$ , ver Definição 1.5 a seguir. A partir dos valores discretos  $\mathbf{y}_n^{[h]}$  obtidos nos pontos da malha, pode-se obter (por interpolação ou outro procedimento), se desejado, uma aproximação  $\mathbf{y}^{[h]}(t)$  para o valor exato  $\mathbf{y}(t)$  em *cada* ponto  $t \in [a, b]$ , construindo-se desse modo uma função

$$\mathbf{y}^{[h]} : [a, b] \mapsto \mathbf{R}^m$$

que aproxima a solução  $\mathbf{y}$  em todo o intervalo  $[a, b]$ . Em termos de  $\mathbf{y}^{[h]}$ , pode-se reformular a condição de convergência (1.3) como

$$(1.4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{y}^{[h]}(t) = \mathbf{y}(t)$$

para cada  $t \in [a, b]$ .

**Exemplo 1.1** (*fórmulas de Adams-Bashforth*)

Integrando-se a equação (1.1a) entre os pontos  $t_n$  e  $t_{n+1}$ , obtém-se

$$(1.5) \quad \mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}(t_n) = \int_{t_n}^{t_n+h} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt$$

Supondo já terem sido obtidas aproximações  $\mathbf{y}_j^{[h]}$  para  $j \leq n$ , podemos utilizar (1.5) para definir a aproximação  $\mathbf{y}_{n+1}^{[h]}$  em  $t = t_{n+1}$  do seguinte modo. Aproximando o integrando  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$  no intervalo de integração  $[t_n, t_{n+1}]$  pelo polinômio  $\mathbf{p}_{AB}^{[k]}$  de Lagrange de grau máximo  $k - 1$  interpolando os  $k$  valores aproximados

$$\mathbf{f}_{n-j} \equiv \mathbf{f}(t_{n-j}, \mathbf{y}_{n-j}^{[h]}) \quad , \quad j = 0, 1, 2, \dots, k - 1$$

onde  $k \geq 1$  é fixado, obtemos  $\mathbf{y}_{n+1}^{[h]}$  pondo

$$\mathbf{y}_{n+1}^{[h]} - \mathbf{y}_n^{[h]} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{p}_{AB}^{[k]}(t) dt$$

Introduzindo as diferenças descendentes

$$\nabla \mathbf{f}_n \equiv \mathbf{f}_n - \mathbf{f}_{n-1} \quad , \quad \nabla^2 \mathbf{f}_n \equiv \nabla \mathbf{f}_n - \nabla \mathbf{f}_{n-1} = \mathbf{f}_n - 2\mathbf{f}_{n-1} + \mathbf{f}_{n-2}$$

e em geral

$$\nabla^k \mathbf{f}_n \equiv \nabla^{k-1} \mathbf{f}_n - \nabla^{k-1} \mathbf{f}_{n-1} = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \mathbf{f}_{n-j}$$

onde  $\binom{k}{j}$  denota o coeficiente binomial, tem-se [11]

$$\mathbf{p}_{AB}^{[k]}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{-\tau(t)}{j} \nabla^j \mathbf{f}_n$$

sendo

$$\tau(t) = \frac{t - t_n}{h}$$

e, para  $\tau \in \mathbf{R}$ ,

$$\binom{\tau}{0} = 1 \quad , \quad \binom{\tau}{j} = \frac{\tau(\tau-1) \cdots (\tau-j+1)}{j!} \quad , \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Integrando-se  $p_{AB}^{[k]}$ , obtém-se então

$$\mathbf{y}_{n+1}^{[k]} - \mathbf{y}_n^{[k]} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{p}_{AB}^{[k]}(t) dt = h \sum_{j=0}^{k-1} c_j \nabla^j \mathbf{f}_n$$

onde

$$c_j = (-1)^j \int_0^1 \binom{-\tau}{j} d\tau$$

são constantes independentes de  $\mathbf{f}$  que podem ser calculadas facilmente: assim,  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = 1/2$ ,  $c_2 = 5/12$ ,  $c_3 = 3/8$ ,  $c_4 = 251/720$ , etc. Em particular, obtém-se, para  $k = 1$ ,

$$\mathbf{y}_{n+1}^{[1]} - \mathbf{y}_n = h \mathbf{f}_n$$

para  $k = 2$ ,

$$\mathbf{y}_{n+1}^{[2]} - \mathbf{y}_n = h \left( \frac{3}{2} \mathbf{f}_n - \frac{1}{2} \mathbf{f}_{n-1} \right)$$

para  $k = 3$ ,

$$\mathbf{y}_{n+1}^{[3]} - \mathbf{y}_n = h \left( \frac{23}{12} \mathbf{f}_n - \frac{16}{12} \mathbf{f}_{n-1} + \frac{5}{12} \mathbf{f}_{n-2} \right)$$

para  $k = 4$ ,

$$\mathbf{y}_{n+1}^{[4]} - \mathbf{y}_n = h \left( \frac{55}{24} \mathbf{f}_n - \frac{59}{24} \mathbf{f}_{n-1} + \frac{37}{24} \mathbf{f}_{n-2} - \frac{9}{24} \mathbf{f}_{n-3} \right)$$

para  $k = 5$ ,

$$\mathbf{y}_{n+1}^{[5]} - \mathbf{y}_n = h \left( \frac{1901}{720} \mathbf{f}_n - \frac{2774}{720} \mathbf{f}_{n-1} + \frac{2616}{720} \mathbf{f}_{n-2} - \frac{1274}{720} \mathbf{f}_{n-3} + \frac{251}{720} \mathbf{f}_{n-4} \right)$$

para  $k = 6$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{n+1}^{[6]} - \mathbf{y}_n = h & \left( \frac{4277}{1440} \mathbf{f}_n - \frac{7923}{1440} \mathbf{f}_{n-1} + \frac{9982}{1440} \mathbf{f}_{n-2} - \frac{7298}{1440} \mathbf{f}_{n-3} \right. \\ & \left. + \frac{2877}{1440} \mathbf{f}_{n-4} - \frac{475}{1440} \mathbf{f}_{n-5} \right) \end{aligned}$$

e assim sucessivamente. □

### Exemplo 1.2 (fórmulas BDF)

Supondo obtidas aproximações  $\mathbf{y}_j^{[h]}$  para  $j \leq n$ , podemos construir  $\mathbf{y}_{n+1}^{[h]}$  aproximando o termo esquerdo da equação (1.1a) em  $t = t_{n+1}$ ,

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt}(t_{n+1}) = \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}(t_{n+1}))$$

pela derivada em  $t_{n+1}$  do polinômio  $p_{BDF}^{[k]}(t)$  de Lagrange de grau máximo  $k$  interpolando os  $k + 1$  pontos  $(t_j, \mathbf{y}_j^{[h]})$ ,  $j = n + 1, n, \dots, n - k + 1$ ,

$$p_{BDF}^{[k]}(t) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{-\tau}{j} \nabla^j \mathbf{y}_{n+1}^{[h]} \quad , \quad \tau(t) = \frac{t - t_{n+1}}{h}$$

obtendo-se então

$$\sum_{j=1}^k \delta_j \nabla^j \mathbf{y}_{n+1}^{[h]} = h f(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}^{[h]})$$

onde

$$\delta_j = (-1)^j \frac{d}{d\tau} \binom{-\tau}{j} \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{j}$$

Desenvolvendo as diferenças finitas  $\nabla^j \mathbf{y}_{n+1}^{[h]}$  em termos das ordenadas  $\mathbf{y}_i^{[h]}$ , obtém-se, para  $k = 1$ ,

$$\mathbf{y}_{n+1}^{[h]} - \mathbf{y}_n^{[h]} = h f(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}^{[h]})$$

para  $k = 2$ ,

$$\frac{3}{2} \mathbf{y}_{n+1}^{[h]} - 2 \mathbf{y}_n^{[h]} + \frac{1}{2} \mathbf{y}_{n-1}^{[h]} = h f(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}^{[h]})$$

para  $k = 3$ ,

$$\frac{11}{6} \mathbf{y}_{n+1}^{[h]} - 3 \mathbf{y}_n^{[h]} + \frac{3}{2} \mathbf{y}_{n-1}^{[h]} - \frac{1}{3} \mathbf{y}_{n-2}^{[h]} = h f(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}^{[h]})$$

para  $k = 4$ ,

$$\frac{25}{12} \mathbf{y}_{n+1}^{[h]} - 4 \mathbf{y}_n^{[h]} + 3 \mathbf{y}_{n-1}^{[h]} - \frac{4}{3} \mathbf{y}_{n-2}^{[h]} + \frac{1}{4} \mathbf{y}_{n-3}^{[h]} = h f(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}^{[h]})$$

para  $k = 5$ ,

$$\frac{137}{60} \mathbf{y}_{n+1}^{[h]} - 5 \mathbf{y}_n^{[h]} + 5 \mathbf{y}_{n-1}^{[h]} - \frac{10}{3} \mathbf{y}_{n-2}^{[h]} + \frac{5}{4} \mathbf{y}_{n-3}^{[h]} - \frac{1}{5} \mathbf{y}_{n-4}^{[h]} = h f(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}^{[h]})$$

e, para  $k = 6$ ,

$$\begin{aligned} \frac{147}{60} \mathbf{y}_{n+1}^{[h]} - 6 \mathbf{y}_n^{[h]} + \frac{15}{2} \mathbf{y}_{n-1}^{[h]} - \frac{20}{3} \mathbf{y}_{n-2}^{[h]} + \frac{15}{4} \mathbf{y}_{n-3}^{[h]} - \frac{6}{5} \mathbf{y}_{n-4}^{[h]} + \frac{1}{6} \mathbf{y}_{n-5}^{[h]} = \\ = h f(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}^{[h]}) \end{aligned}$$

Para  $k \geq 7$ , o método BDF correspondente resulta não convergente, como mostrado em [06], [10].  $\square$

Os métodos para obtenção das aproximações  $\mathbf{y}_n^{[h]}$  descritos nos Exemplos 1.1 e 1.2 acima têm a forma geral

$$(1.6) \quad \sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{y}_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbf{f}_{n+j}$$

onde  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$  são constantes reais, características de cada método. Para  $k$  estar bem definido na expressão acima, assume-se  $\alpha_k \neq 0$  e  $\alpha_0, \beta_0$  não simultaneamente nulos, i.e.,

$$(1.7) \quad \alpha_k \neq 0 \quad , \quad |\alpha_0| + |\beta_0| > 0$$

Uma vez obtidos  $\mathbf{y}_n^{[h]}, \mathbf{y}_{n+1}^{[h]}, \dots, \mathbf{y}_{n+k-1}^{[h]}$ , utilizando-se (1.6) pode-se computar  $\mathbf{y}_{n+k}^{[h]}$  a partir desses  $k$  valores anteriores, sendo por isso (1.6) um método de *passo  $k$*  (ou de *passo múltiplo*). Ademais,  $\mathbf{y}_{n+k}^{[h]}$  depende *linearmente* dos valores  $\mathbf{f}_n, \mathbf{f}_{n+1}, \dots, \mathbf{f}_{n+k}$ ; de onde o termo *método de passo múltiplo linear*.

A aplicação do esquema (1.6) para o cálculo das aproximações  $\mathbf{y}_j^{[h]}$  pressupõe que sejam fornecidos os  $k$  valores  $\mathbf{y}_0^{[h]}, \mathbf{y}_1^{[h]}, \dots, \mathbf{y}_{k-1}^{[h]}$  necessários para a geração dos demais,  $\mathbf{y}_k^{[h]}, \mathbf{y}_{k+1}^{[h]}, \dots, \mathbf{y}_N^{[h]}$ . Naturalmente, os valores de inicialização (ou partida) para (1.6) devem ser compatíveis com a condição inicial (1.1b) do problema a ser resolvido, uma possibilidade sendo, por exemplo, tomar  $\mathbf{y}_0^{[h]} = \mathbf{y}_1^{[h]} = \dots = \mathbf{y}_{k-1}^{[h]} = \zeta$ . Mais geralmente, uma inicialização consistente com (1.1b) consiste em tomar

$$\mathbf{y}_0^{[h]} = \boldsymbol{\eta}_0(h) \quad , \quad \mathbf{y}_1^{[h]} = \boldsymbol{\eta}_1(h) \quad , \dots \quad , \quad \mathbf{y}_{k-1}^{[h]} = \boldsymbol{\eta}_{k-1}(h)$$

onde

$$\boldsymbol{\eta}_0(h) \rightarrow \zeta \quad , \quad \boldsymbol{\eta}_1(h) \rightarrow \zeta \quad , \dots \quad , \quad \boldsymbol{\eta}_{k-1}(h) \rightarrow \zeta \quad \text{ao } h \rightarrow 0$$

Associados ao método (1.6), os polinômios

$$\rho(\zeta) = \alpha_0 + \alpha_1 \zeta + \alpha_2 \zeta^2 + \dots + \alpha_k \zeta^k$$

e

$$\sigma(\zeta) = \beta_0 + \beta_1 \zeta + \beta_2 \zeta^2 + \dots + \beta_k \zeta^k$$

são denominados *primeiro e segundo polinômios característicos* do método linear (1.6), respectivamente.

**Definição 1.1 (consistência)**

O método linear de passo  $k$  (1.6) é dito consistente se satisfizer

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^k j \alpha_j = \sum_{j=0}^k \beta_j$$

ou seja,  $\rho(1) = 0$ ,  $\rho'(1) = \sigma(1)$ .

Por exemplo, os métodos apresentados nos Exemplos 1.1 e 1.2 acima são todos consistentes, qualquer que seja o passo  $k$  considerado [11]. Como será visto na seção §1.2, consistência é uma condição *necessária*, mas não suficiente, para que o método (1.6) possa ser convergente. Uma caracterização equivalente para a consistência de (1.6) pode ser dada como segue. Por sua própria construção, as aproximações  $\mathbf{y}_n^{[h]}$  satisfazem

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{y}_{n+j} - h \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbf{f}(t_{n+j}, \mathbf{y}_{n+j}) = \mathbf{0}$$

para todo  $n = 0, 1, \dots, N - k$ . Por outro lado, sendo  $\mathbf{y}(t)$  a solução do problema (1.1), tem-se

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{y}(t_{n+j}) - h \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbf{f}(t_{n+j}, \mathbf{y}(t_{n+j})) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{y}(t_{n+j}) - h \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbf{y}'(t_{n+j})$$

visto que, pela equação (1.1a),  $\mathbf{f}(t_{n+j}, \mathbf{y}(t_{n+j})) = \mathbf{y}'(t_{n+j})$  para todo  $n, j$ .

**Definição 1.2** (*erro de truncamento local*)

O erro de truncamento local do método (1.6) no ponto  $t_{n+k} \in [a, b]$ , denotado por  $\mathcal{L}(t_{n+k}; h)$ , é a diferença

$$\mathcal{L}(t_{n+k}; h) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{y}(t_{n+j}) - h \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbf{y}'(t_{n+j})$$

onde  $\mathbf{y}(t)$  denota a solução do problema (1.1).

Utilizando-se as expansões de Taylor de ordem 1 e 0, respectivamente, dos termos  $\mathbf{y}(t_{n+j})$  e  $\mathbf{y}'(t_{n+j})$ , centradas no ponto  $t_n$ , pode-se verificar sem dificuldade que a consistência do método (1.6) é equivalente a se ter  $\mathcal{L}(t_{n+k}; h)/h \rightarrow \mathbf{0}$  ao  $h \rightarrow 0$ , para cada  $n = 0, 1, 2, \dots, N - k$ .

Claramente, a expressão acima para o erro de truncamento pode ser computada em qualquer ponto  $t \in [a + kh, b]$  pondo-se

$$\mathcal{L}(t; h) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{y}(t - (k - j)h) - h \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbf{y}'(t - (k - j)h)$$

**Definição 1.3** (*ordem de convergência*)

O método (1.6) é dito ter ordem  $p$  quando existir uma constante  $C > 0$ , dependendo só do método, tal que

$$\|\mathcal{L}(t; h)\| \leq C \left\{ \sup_{\tau \in [a, b]} \|\mathbf{y}^{(p+1)}(\tau)\| \right\} h^{p+1} \quad \forall t \in [a + kh, b]$$



sempre que se tiver  $\mathbf{y} \in C^{p+1}([a, b], \mathbf{R}^m)$ .

Por exemplo, pode-se mostrar que os métodos de Adams-Bashforth e BDF de passo  $k$  têm ordem  $k$  [11].

Outra definição importante refere-se à *estabilidade* do método (1.6) ao  $h \rightarrow 0$ , ou *zero-estabilidade*. Um polinômio  $p(\zeta) = a_0 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \dots + a_k \zeta^k$  é dito satisfazer a *condição da raiz*, ou ser *zero-estável*, se todas as raízes de  $p(\zeta) = 0$  estiverem no disco unitário  $\{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$ , e aquelas sobre o círculo  $|z| = 1$ , se existirem, forem todas simples.

**Definição 1.4 (estabilidade)**

O método (1.6) é dito **zero-estável** (ou, simplesmente, **estável**) se o polinômio característico  $\rho(\zeta)$  satisfizer a condição da raiz.

Por exemplo, as fórmulas de Adams-Bashforth são estáveis para todo  $k$ , já que, nesse caso, tem-se  $\rho(\zeta) = \zeta^k - \zeta^{k-1}$ , que é claramente zero-estável. Por outro lado, as fórmulas BDF de ordem  $k$  são estáveis se e somente se  $1 \leq k \leq 6$  [06], [10], [13]. Como será mostrado nas seções seguintes, consistência e estabilidade são condições necessárias e suficientes para a convergência do método.

**Definição 1.5 (convergência)**

O método (1.6) é dito **convergente** se, para cada  $\mathbf{f} \in C^0([a, b] \times \mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m)$  satisfazendo a condição de Lipschitz (1.2), e cada esquema de inicialização adotado  $\mathbf{y}_j^{[h]} = \boldsymbol{\eta}_j(h)$ ,  $j = 0, 1, \dots, k-1$ , que seja consistente com a condição inicial (1.1a), i.e.,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \boldsymbol{\eta}_j(h) = \boldsymbol{\zeta} \quad \forall j = 0, 1, \dots, k-1$$

tivermos

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t-a}} \mathbf{y}_n^{[h]} = \mathbf{y}(t)$$

para cada  $t \in [a, b]$ .

Para um esquema (1.6) convergente, será mostrado na seção §1.4 que o limite acima vale *uniformemente* em  $t \in [a, b]$ . Ademais, quando  $\mathbf{f} \in C^0([a, b] \times \mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m)$  for apenas *localmente* Lipschitziana com relação à variável  $\mathbf{y}$ , i.e.,

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{v})\| \leq L_{\mathcal{K}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{K}$$

onde  $\mathcal{K}$  é compacto em  $\mathbf{R}^m$ , então o limite acima valerá para cada ponto  $t$  pertencente ao intervalo de existência  $\mathcal{I}$  da solução  $\mathbf{y}(t)$  de (1.1), e uniformemente sobre compactos contidos em  $\mathcal{I}$ . Este e outros resultados serão investigados nas seções a seguir.

## §1.2 – Consistência e Estabilidade

Nesta seção, pretende-se mostrar que consistência e estabilidade são condições necessárias para a convergência do método

$$(2.1) \quad \sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{y}_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbf{f}_{n+j}$$

aplicado ao problema de valor inicial

$$(2.2a) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

$$(2.2b) \quad \mathbf{y}(a) = \zeta$$

onde  $\mathbf{f}: [a, b] \times \mathbf{R}^m \mapsto \mathbf{R}^m$  é uma função contínua tal que (2.2) admite uma única solução  $\mathbf{y}(t)$  no intervalo  $[a, b]$ . Acima, como na seção §1.1,  $\mathbf{f}_{n+j} = \mathbf{f}(t_{n+j}, \mathbf{y}_{n+j})$  e, para  $n$  inteiro,  $\mathbf{y}_n$  (ou, para maior clareza,  $\mathbf{y}_n^{[h]}$ ) é o valor calculado no ponto  $t_n = a + nh$  da malha.

Quando o esquema (2.1) é convergente, conforme a Definição 1.5, as aproximações obtidas  $\mathbf{y}^{[h]}(t)$  convergem ao valor exato  $\mathbf{y}(t)$  em *cada* ponto  $t$  do intervalo  $[a, b]$ . Como mostraremos abaixo, é possível derivar o resultado assumindo-se tão somente que  $\mathbf{y}^{[h]}(t)$  convirja em pelo menos *um* ponto de  $[a, b]$ , digamos  $t = t_*$ , o que motiva a definição a seguir.

**Definição 2.1** (*convergência em algum ponto*)

*O método linear de passo  $k$*

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{y}_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbf{f}_{n+j}$$

*é dito convergir em algum ponto para um problema particular*

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{y}(t))$$

$$\mathbf{y}(a) = \zeta^*$$

*se para cada escolha de valores iniciais  $\mathbf{y}_0^{[h]}, \mathbf{y}_1^{[h]}, \dots, \mathbf{y}_{k-1}^{[h]}$  com  $\mathbf{y}_j^{[h]} \rightarrow \zeta^*$  ao  $h \rightarrow 0$ ,  $j = 0, 1, \dots, k-1$ , existir um ponto  $t_* \in ]a, b[$  (dependendo possivelmente do modo de inicialização escolhido) tal que ao  $h \rightarrow 0$  o método converge à solução exata do problema nesse ponto, i.e.,*

$$\mathbf{y}_{n_*}^{[h]} \rightarrow \mathbf{y}(t_*) \quad \text{ao} \quad n_* \rightarrow \infty, \quad a + n_*h = t_*$$

Convergência em um ponto representa certamente o mínimo que um método numérico para o problema de valor inicial acima deve satisfazer para ser aceitável. Surpreendentemente, os resultados discutidos a seguir e em §1.4 mostram que se (2.1) for convergente em um ponto para um único problema (2.2), dado abaixo, então, para uma ampla classe de problemas que inclui todos aqueles considerados na seção anterior, (2.1) será necessariamente convergente em todo o intervalo de existência da solução  $y(t)$ , sendo, ademais, a convergência uniforme sobre compactos deste intervalo.

### Teorema 2.1

Se o método linear

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}$$

converge em algum ponto para o problema

$$\frac{dy}{dt} = 1$$

$$y(0) = 0$$

então

(i) o método é consistente, i.e.,  $\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0$ ,  $\sum_{j=0}^k j \alpha_j = \sum_{j=0}^k \beta_j$

(ii) o método é zero-estável, i.e.,  $\rho(z) = \alpha_k z^k + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$  satisfaz a condição da raiz.

*Prova:* Aplicado ao problema dado, o método fornece, sendo  $B = \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_k$ ,

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j}^{[h]} = h B$$

Para provar (i), suponha inicialmente que  $A \equiv \sum_{j=0}^k \alpha_j \neq 0$ . Então, tomando

$$y_0^{[h]} = y_1^{[h]} = \dots = y_{k-1}^{[h]} = h \frac{B}{A}$$

obtem-se, para todo  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$y_n^{[h]} = h \frac{B}{A}$$

Pela hipótese, existe  $t_* \neq 0$  onde o método converge: sendo  $h = t_*/n_*$ , tem-se, ao  $n_* \rightarrow \infty$

$$y_{n_*}^{[h]} \rightarrow y(t_*) = t_*$$

Mas

$$y_{n_*}^{[h]} = \frac{t_*}{n_*} \frac{B}{A} \rightarrow 0$$

ou seja,  $A$  não pode ser diferente de zero. Conclui-se assim

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0$$

Por outro lado, como  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  não são todos nulos, existe  $p$  inteiro positivo tal que

$$A_p \equiv \sum_{j=0}^k j^p \alpha_j \neq 0$$

Afirmamos que  $A_1 \neq 0$ . Para mostrar isso, seja  $p$  o menor inteiro positivo tal que  $A_p \neq 0$ . Assumindo  $A_1 = 0$ , teríamos  $p \geq 2$  e, nesse caso, para os valores iniciais

$$y_j^{[h]} = h \frac{B}{A_p} j^p, \quad j = 0, 1, \dots, k-1$$

seriam obtidos

$$y_n^{[h]} = h \frac{B}{A_p} n^p \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Pela hipótese, para algum  $t_* \neq 0$

$$y_{n_*}^{[h]} \rightarrow t_* \quad \text{ao} \quad n_* \rightarrow \infty, \quad h = \frac{t_*}{n_*}$$

ou seja,

$$t_* \frac{B}{A_p} n_*^{p-1} \rightarrow t_* \quad \text{ao} \quad n_* \rightarrow \infty$$

o que é impossível para  $p \geq 2$ . Logo, deve-se ter  $p = 1$ , i.e.,

$$\sum_{j=0}^k j \alpha_j \neq 0$$

Tomando-se então, para  $j = 0, 1, \dots, k-1$ ,

$$y_j^{[h]} = h \frac{B}{A_1} j$$

obtém-se, para todo  $n$ ,

$$y_n^{[h]} = h \frac{B}{A_1} n$$

Pela hipótese, existe  $t_* \neq 0$  onde o método converge, de modo que, para  $h = \frac{t_*}{n_*}$

$$\lim_{n_* \rightarrow \infty} \frac{t_*}{n_*} \frac{B}{A_1} n_* = t_*$$

Portanto,  $B = A_1$ , ou seja,

$$\sum_{j=0}^k \beta_j = \sum_{j=0}^k j \alpha_j$$

o que conclui a prova de (i).

Para mostrar (ii), suponha inicialmente que  $\rho(z) = \alpha_k z^k + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$  possui raiz  $\omega_* \in \mathbb{C}$  com  $|\omega_*| > 1$ . Tomando-se, para  $j = 0, 1, \dots, k-1$ ,

$$y_j^{[h]} = h \omega_*^j + \frac{B h}{A_1} j$$

obtém-se, para todo  $n$ ,

$$y_n^{[h]} = h \omega_*^n + \frac{B h}{A_1} n$$

Pela hipótese, existe  $t_* \neq 0$  onde o método converge: sendo  $h = t_*/n_*$ , tem-se  $y_{n_*}^{[h]} \rightarrow y(t_*) = t_*$  ao  $n_* \rightarrow \infty$ , ou seja,

$$\lim_{n_* \rightarrow \infty} \frac{t_*}{n_*} \omega_*^{n_*} + \frac{B t_*}{A_1} = t_*$$

o que contradiz  $|\omega_*| > 1$ .

De modo análogo, se  $\rho(z) = 0$  possui raiz de multiplicidade maior que 1 sobre o círculo unitário, digamos  $w_*$ , então, tomando-se, para  $j = 0, 1, \dots, k-1$ ,

$$y_j^{[h]} = \sqrt{h} j w_*^j + \frac{B h}{A_1} j$$

obtém-se, para todo  $n$ ,

$$y_n^{[h]} = \sqrt{h} n w_*^n + \frac{B h}{A_1} n$$

Pela hipótese, existe  $t_* \neq 0$  tal que o método converge em  $t_*$ : sendo  $h = t_*/n_*$ , obtém-se então

$$\lim_{n_* \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t_*}}{\sqrt{n_*}} n_* w_*^{n_*} + \frac{B t_*}{A_1} = t_*$$

o que é impossível, ou seja, tal  $w_*$  não pode existir. Portanto,  $\rho(z)$  é zero-estável.  $\square$

### §1.3 – Equações a Diferenças

Nesta seção, derivaremos dois resultados básicos sobre equações a diferenças lineares de coeficientes constantes que serão utilizados na análise da convergência de métodos de passo múltiplo apresentada na seção §1.4.

Sendo  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$  constantes reais dadas, com  $\alpha_k \neq 0$ , consideremos o problema de determinar  $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n, \dots$  pertencentes ao espaço  $\mathbf{R}^m$  que satisfazem a equação a diferenças

$$(3.1) \quad \alpha_k \mathbf{y}_n + \alpha_{k-1} \mathbf{y}_{n-1} + \dots + \alpha_1 \mathbf{y}_{n-k+1} + \alpha_0 \mathbf{y}_{n-k} = \mathbf{b}_{n-k}$$

para todo  $n \geq k$ , sendo  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n, \dots$  vetores de  $\mathbf{R}^m$  dados. Claramente, o problema é solúvel: tomando-se  $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1} \in \mathbf{R}^m$  quaisquer, a equação (3.1), para  $n = k$ , fornece um único  $\mathbf{y}_k \in \mathbf{R}^m$  que a satisfaz, e então, para  $n = k + 1$ , um único  $\mathbf{y}_{k+1} \in \mathbf{R}^m$ , e assim sucessivamente para cada  $n \geq k$ . No que segue, obteremos uma forma equivalente de calcular essa seqüência ( $\mathbf{y}_n$ ) que será importante para os resultados a serem discutidos em §1.4.

Seguindo [11], introduzimos os coeficientes reais  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$  definidos por

$$(3.2) \quad \frac{1}{\alpha_0 z^k + \alpha_1 z^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} z + \alpha_k} = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots + \gamma_n z^n + \dots$$

de modo que  $\gamma_0 = 1/\alpha_k$  e

$$(3.3a) \quad \sum_{j=0}^{\ell} \alpha_{k-j} \gamma_{\ell-j} = 0 \quad \forall \ell = 1, 2, \dots, k-1$$

$$(3.3b) \quad \sum_{j=0}^k \alpha_{k-j} \gamma_{n-j} = 0 \quad \forall n = k, k+1, \dots$$

Dado  $n \geq k$ , tem-se, para cada  $\ell = 0, 1, 2, \dots, n-k$ ,

$$(3.4) \quad \sum_{j=0}^k \alpha_{k-j} \mathbf{y}_{n-\ell-j} = \mathbf{b}_{n-\ell-k}$$

Multiplicando-se (3.4) por  $\gamma_\ell$  e somando o resultado para todo  $\ell$ , obtém-se

$$\sum_{\ell=0}^{n-k} \sum_{j=0}^k \gamma_\ell \alpha_{k-j} \mathbf{y}_{n-\ell-j} = \sum_{\ell=0}^{n-k} \gamma_\ell \mathbf{b}_{n-\ell-k}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \gamma_0 \alpha_k \mathbf{y}_n + \sum_{\ell=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{\ell} \gamma_{\ell-j} \alpha_{k-j} \mathbf{y}_{n-\ell} + \sum_{\ell=k}^{n-k} \sum_{j=0}^k \gamma_{\ell-j} \alpha_{k-j} \mathbf{y}_{n-\ell} \\ + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j \alpha_i \gamma_{n-k-j+i} \mathbf{y}_j = \sum_{\ell=0}^{n-k} \gamma_{\ell} \mathbf{b}_{n-\ell-k} \end{aligned}$$

onde se define, no último somatório do membro esquerdo da igualdade acima,

$$\gamma_i = 0 \quad \forall i < 0$$

Usando (3.3), obtém-se então

$$\mathbf{y}_n + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j \alpha_i \gamma_{n-k-j+i} \mathbf{y}_j = \sum_{\ell=0}^{n-k} \gamma_{\ell} \mathbf{b}_{n-\ell-k}$$

ficando assim demonstrado o resultado abaixo.

### Lema 3.1

A solução da equação (3.1) que satisfaz as condições iniciais

$$\mathbf{y}_0 = \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{y}_1 = \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1} = \boldsymbol{\theta}_{k-1},$$

é dada por

$$\mathbf{y}_n = \sum_{\ell=0}^{n-k} \gamma_{\ell} \mathbf{b}_{n-k-\ell} - \sum_{j=0}^{k-1} \Gamma_{j,n} \boldsymbol{\theta}_j$$

para todo  $n \geq k$ , onde

$$\Gamma_{j,n} = \sum_{i=0}^j \alpha_i \gamma_{n-k-j+i}$$

para cada  $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$ .

Outra propriedade fundamental refere-se ao comportamento dos coeficientes  $\gamma_n$  ao  $n \rightarrow \infty$ , examinado no resultado a seguir.

### Lema 3.2

Quando o polinômio característico  $\rho(z)$  associado à equação a diferenças (3.1), i.e.,

$$\rho(z) = \alpha_k z^k + \alpha_{k-1} z^{k-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

for zero-estável, então os coeficientes  $\gamma_n$  introduzidos em (3.2) acima formam uma seqüência limitada, ou seja,

$$\sup_{n \geq 0} |\gamma_n| < \infty$$

*Prova:* Seja  $j \in \{0, 1, 2, \dots, k-1, k\}$  tal que  $\alpha_j \neq 0$  e  $\alpha_i = 0$  para todo  $i < j$ . Se  $j = k$ , o resultado é imediato, de modo que assumimos  $j \leq k-1$ . Como  $\rho(z)$  é zero-estável, o polinômio (de grau  $k-j$ )  $\tilde{\rho}(z) = z^k \rho(1/z)$ , i.e.,

$$\tilde{\rho}(z) = \alpha_0 z^k + \alpha_1 z^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} z + \alpha_k$$

tem todas as raízes em  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ , e aquelas satisfazendo  $|z| = 1$  são todas simples. Em particular, desenvolvendo  $1/\tilde{\rho}(z)$  em frações parciais, tem-se

$$\frac{1}{\alpha_0 z^k + \alpha_1 z^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} z + \alpha_k} = \sum_{\ell=1}^p \frac{A_\ell}{z - w_\ell^*} + \sum_{\ell=p+1}^{p+q} \frac{A_\ell}{(z - w_\ell^*)^{m_\ell}}$$

onde  $|w_\ell^*| > 1$  para todo  $\ell \geq p+1$ . Assim, é suficiente mostrar que os coeficientes  $\gamma_n$  correspondentes a cada parcela da soma acima formam uma seqüência limitada.

Como

$$\frac{1}{z - w_\ell^*} = -\frac{1}{w_\ell^*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w_\ell^*}\right)^j$$

e  $|w_\ell^*| \geq 1$ , o resultado é evidente para cada termo na expansão acima correspondente às raízes simples de  $\tilde{\rho}(z)$ . Similarmente, tem-se

$$\frac{1}{(z - w_\ell^*)^{m_\ell}} = (-1)^{m_\ell} \frac{1}{(w_\ell^*)^{m_\ell}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{m_\ell(m_\ell+1) \cdots (m_\ell+j-1)}{j! (w_\ell^*)^j} z^j$$

de modo que, ao  $j \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} \frac{m_\ell(m_\ell+1) \cdots (m_\ell+j-1)}{j! (w_\ell^*)^j} &= O(1) \frac{(m_\ell+j)^{m_\ell+j}}{j^j} \frac{1}{m_\ell+j} \frac{1}{(w_\ell^*)^j} \\ &= O(1) \frac{j^{m_\ell}}{(w_\ell^*)^j} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

visto que  $|w_\ell^*| > 1$  neste caso. □

É interessante observar que a recíproca do resultado acima é verdadeira, de modo que a condição

$$\Gamma \equiv \sup_{n \geq 0} |\gamma_n| < \infty$$

é equivalente à propriedade de o polinômio  $\rho(z)$  ser zero-estável. A prova deste resultado, incluindo sua generalização para o caso de funções  $\rho(z)$  holomorfas no disco unitário  $\bar{B}_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  que não se anulam na origem  $z = 0$ , é apresentada no Apêndice A.



## §1.4 – Convergência

Nesta seção, será mostrado que consistência e estabilidade, além de serem condições *necessárias* para a convergência de um método linear (ver Teorema 2.1), são também *suficientes* para assegurar a convergência do método para uma ampla classe de problemas (Teoremas 4.1 e 4.2 abaixo). Para isso, será obtida uma cota para o erro de truncamento  $\| \mathbf{y}^{[h]}(t) - \mathbf{y}(t) \|$ , de onde a natureza da convergência em questão ficará evidente. Em particular, obteremos que o método fornece aproximações  $\mathbf{y}^{[h]}(t)$  convergindo *uniformemente* sobre partes compactas do intervalo de existência da solução exata  $\mathbf{y}(t)$ , como indicado anteriormente. Finalmente, consideraremos também a questão *inversa*: supondo que as aproximações computadas convirjam uniformemente em um dado intervalo, então será mostrado que o limite é obrigatoriamente solução (no referido intervalo) do problema que se pretendia resolver (Teorema 4.3). Este resultado permanece válido mesmo nos casos em que a solução do problema não é única.

Consideremos então um método linear de passo  $h$

$$(4.1) \quad \sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{y}_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbf{f}_{n+j}$$

aplicado ao problema de valor inicial

$$(4.2a) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

$$(4.2b) \quad \mathbf{y}(t_0) = \zeta$$

Inicialmente, vamos assumir que  $\mathbf{f}$  está definida em  $[a, b] \times \mathbf{R}^m$ , com  $t_0 \in [a, b]$ , satisfazendo

$$(4.3a) \quad \mathbf{f} \in C^0([a, b] \times \mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m)$$

e a condição de Lipschitz

$$(4.3b) \quad \| \mathbf{f}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{v}) \| \leq L \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \| \quad \forall t \in [a, b], \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^m$$

onde  $L$  é uma constante positiva. É bem sabido que (4.3a) e (4.3b) asseguram a existência de uma única solução  $\mathbf{y} = \varphi(t)$  passando pelo ponto  $(t_0, \zeta)$ , que está definida e satisfaz a equação para todo  $t$  do intervalo  $[a, b]$  (ver e.g. [09], [11]).

**Teorema 4.1**

Se o método (4.1) for zero-estável e consistente, então, quando aplicado ao problema (4.2), (4.3), é uniformemente convergente à solução exata em  $[a, b]$ , i.e.,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \max_{t_n \in [a, b]} \| \mathbf{y}_n^{[h]} - \varphi(t_n) \| \right\} = 0$$

assumindo-se  $\mathbf{y}_0^{[h]}, \mathbf{y}_1^{[h]}, \dots, \mathbf{y}_{k-1}^{[h]} \rightarrow \zeta$  ao  $h \rightarrow 0$ .

Mais precisamente, existem constantes  $C, \kappa > 0$  (dependendo só do método) tais que

$$\| \mathbf{y}_n^{[h]} - \varphi(t_n) \| \leq C \theta_h \left\{ |t_n - t_0| \cdot \frac{L_n(h)}{|h|} + E_k(h) \right\} e^{\kappa \theta_h |t_n - t_0| L}$$

para todo  $n \geq k$  com  $t_n \in [a, b]$ , onde

$$\theta_h = \frac{1}{1 - |h| \frac{|\beta_k|}{|\alpha_k|} L},$$

$L_n(h)$  é o máximo erro de truncamento local cometido até o ponto  $t_n$ ,

$$L_n(h) = \max_{k \leq \ell \leq n} \| \mathcal{L}(t_\ell; h) \|$$

e  $E_k(h)$  é o erro de inicialização,

$$E_k(h) = \max_{0 \leq j \leq k-1} \| \mathbf{y}_j^{[h]} - \varphi(t_j) \|$$

Em particular, se (4.1) tiver ordem  $p \geq 1$  e  $\varphi \in C^{q+1}([a, b])$  para algum  $q \leq p$ , então

$$\| \mathbf{y}_n^{[h]} - \varphi(t_n) \| \leq C \theta_h \left\{ |t_n - t_0| D_p \| \varphi \|_{q+1} |h|^q + E_k(h) \right\} e^{\kappa \theta_h |t_n - t_0| L}$$

para cada  $n \geq k$  com  $t_n \in [a, b]$ , onde  $D_p$  é uma constante que depende apenas do método e

$$\| \varphi \|_{q+1} \equiv \max_{a \leq t \leq b} \| \varphi^{(q+1)}(t) \|^2$$

*Prova:* O argumento a seguir é adaptado de P. Henrici [11]. Observamos inicialmente que é suficiente mostrar o resultado para  $h > 0$  (i.e., no intervalo  $[t_0, b]$ ), visto que a prova para  $h < 0$  é a mesma, apenas trocando  $h$  por  $|h|$  nas estimativas abaixo. Dado então  $h > 0$ , seja  $N_h$  o maior positivo tal que  $N_h h \leq b - t_0$ , de modo que  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{N_h} \in [t_0, b]$ , onde  $t_j = t_0 + j h$ .

Dados  $\mathbf{y}_0^{[h]}, \mathbf{y}_1^{[h]}, \dots, \mathbf{y}_{k-1}^{[h]} \in \mathbf{R}^m$ ; seja  $E_k(h)$  o erro de inicializaçãõ

$$E_k(h) \equiv \max \{ \|\mathbf{y}_0^{[h]} - \varphi(t_0)\|, \|\mathbf{y}_1^{[h]} - \varphi(t_1)\|, \dots, \|\mathbf{y}_{k-1}^{[h]} - \varphi(t_{k-1})\| \}$$

Tem-se então, para cada  $n = k, k+1, \dots, N_h$ ,

$$\alpha_k \mathbf{y}_n^{[h]} + \alpha_{k-1} \mathbf{y}_{n-1}^{[h]} + \dots + \alpha_1 \mathbf{y}_{n-k+1}^{[h]} + \alpha_0 \mathbf{y}_{n-k}^{[h]} = h \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbf{f}(t_{n-k+j}, \mathbf{y}_{n-k+j}^{[h]})$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \alpha_k \varphi(t_n) + \alpha_{k-1} \varphi(t_{n-1}) + \dots + \alpha_1 \varphi(t_{n-k+1}) + \alpha_0 \varphi(t_{n-k}) = \\ h \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbf{f}(t_{n-k+j}, \varphi(t_{n-k+j})) + \mathcal{L}(t_n; h) \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{L}(t_n; h)$  denota o erro de truncamento local em  $t_n$ , i.e.,

$$\mathcal{L}(t_n; h) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \varphi(t_{n-k+j}) - h \sum_{j=0}^k \beta_j \varphi'(t_{n-k+j})$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, resulta

$$\alpha_k \boldsymbol{\varepsilon}_n^{[h]} + \alpha_{k-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}^{[h]} + \dots + \alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{n-k+1}^{[h]} + \alpha_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{n-k}^{[h]} = \mathbf{b}_{n-k}^{[h]}$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}_\ell^{[h]}$  denota o erro de truncamento global em  $t_\ell$ ,  $\ell = 0, 1, 2, \dots, N_h$ ,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\ell^{[h]} = \mathbf{y}_\ell^{[h]} - \varphi(t_\ell)$$

e

$$\mathbf{b}_\ell^{[h]} = h \sum_{j=0}^k \beta_j \left( \mathbf{f}(t_{\ell+j}, \mathbf{y}_{\ell+j}) - \mathbf{f}(t_{\ell+j}, \varphi(t_{\ell+j})) \right) - \mathcal{L}(t_{\ell+k}; h)$$

para  $\ell = 0, 1, 2, \dots, N_h - k$ .

Pelo Lema 3.1, obtém-se

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n^{[h]} = \sum_{j=0}^{n-k} \gamma_j \mathbf{b}_{n-k-j}^{[h]} - \sum_{j=0}^{k-1} \Gamma_{j,n} \boldsymbol{\varepsilon}_j^{[h]}$$

onde  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\ell, \dots$  são dados por

$$\frac{1}{\alpha_0 z^k + \alpha_1 z^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} z + \alpha_k} = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots + \gamma_\ell z^\ell + \dots$$

e, para  $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$ ,

$$\Gamma_{j,n} = \alpha_j \gamma_{n-k} + \alpha_{j-1} \gamma_{n-k-1} + \dots + \alpha_1 \gamma_{n-k-j+1} + \alpha_0 \gamma_{n-k-j}$$

onde se assume  $\gamma_i = 0$  para  $i < 0$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \epsilon_n^{[h]} &= h \sum_{j=0}^{n-k} \gamma_j \sum_{l=0}^k \beta_l \left( \mathbf{f}(t_{n-k-j+l}, \mathbf{y}_{n-k-j+l}^{[h]}) - \mathbf{f}(t_{n-k-j+l}, \varphi(t_{n-k-j+l})) \right) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{n-k} \gamma_j \mathcal{L}(t_{n-j}; h) - \sum_{j=0}^{k-1} \Gamma_{j,n} \epsilon_j^{[h]} \end{aligned}$$

de onde se obtém

$$\|\epsilon_n^{[h]}\| \leq h \sum_{j=0}^{n-k} |\gamma_j| \sum_{l=0}^k |\beta_l| L \|\epsilon_{n-k-j+l}^{[h]}\| + \sum_{j=0}^{n-k} |\gamma_j| \|\mathcal{L}(t_{n-j}; h)\| + \sum_{j=0}^{k-1} |\Gamma_{j,n}| \|\epsilon_j^{[h]}\|$$

Sendo então

$$A = \sum_{j=0}^{k-1} |\alpha_j|, \quad B = \sum_{j=0}^k |\beta_j|, \quad \Gamma = \sup_{\ell \geq 0} |\gamma_\ell|$$

obtem-se, pelo Lema 3.2, que  $\Gamma$  é finito, e então

$$\|\epsilon_n^{[h]}\| \leq h |\gamma_0| |\beta_k| L \|\epsilon_n^{[h]}\| + h B \Gamma L \sum_{\ell=0}^{n-1} \|\epsilon_\ell^{[h]}\| + n \Gamma L_n(h) + \Gamma A k E_k(h)$$

onde, para cada  $n = k, k+1, \dots, N_h$ ,

$$L_n(h) = \max_{k \leq \ell \leq n} \|\mathcal{L}(t_\ell; h)\|$$

Em particular,

$$\left( 1 - h \frac{|\beta_k|}{|\alpha_k|} L \right) \|\epsilon_n^{[h]}\| \leq h B \Gamma L \sum_{\ell=0}^{n-1} \|\epsilon_\ell^{[h]}\| + n h \Gamma \frac{L_n(h)}{h} + k \Gamma A E_k(h)$$

Assim, assumindo  $h > 0$  suficientemente pequeno tal que

$$h \frac{|\beta_k|}{|\alpha_k|} L < 1$$

obtém-se

$$\| \epsilon_n^{[h]} \| \leq h \theta_h B \Gamma L \sum_{\ell=0}^{n-1} \| \epsilon_\ell^{[h]} \| + \theta_h |t_n - t_0| \Gamma \frac{L_n(h)}{h} + \theta_h k \Gamma A E_k(h)$$

onde

$$\theta_h = \frac{1}{1 - h \frac{|\beta_k|}{|\alpha_k|} L}$$

Como  $\Gamma A \geq 1$ , tem-se, para todo  $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$ ,

$$\| \epsilon_j^{[h]} \| \leq E_k(h) \leq \theta_h \Gamma A k E_k(h) (1 + h \theta_h B \Gamma L)^j$$

Segue então

$$\begin{aligned} \| \epsilon_k^{[h]} \| &\leq h \theta_h B \Gamma L \sum_{j=0}^{k-1} \| \epsilon_j^{[h]} \| + \theta_h |t_k - t_0| \Gamma \frac{L_k(h)}{h} + \theta_h \Gamma A k E_k(h) \\ &\leq h \theta_h^2 B \Gamma L \mathcal{K}_k^*(h) \sum_{j=0}^{k-1} (1 + h \theta_h B \Gamma L)^j + \theta_h \mathcal{K}_k^*(h) \\ &\leq \theta_h \mathcal{K}_k^*(h) (1 + h \theta_h B \Gamma L)^k \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{K}_k^*(h) = |t_k - t_0| \Gamma \frac{L_k(h)}{h} + \Gamma A k E_k(h)$$

Mais geralmente, definindo

$$\mathcal{K}_\ell^*(h) = |t_\ell - t_0| \Gamma \frac{L_\ell(h)}{h} + \Gamma A k E_k(h)$$

para  $\ell = k, k+1, \dots, N_h$ , e

$$\mathcal{K}_j^*(h) = \Gamma A k E_k(h)$$

para  $j = 0, 1, \dots, k-1$ , tem-se

$$\| \epsilon_\ell^{[h]} \| \leq \theta_h \mathcal{K}_\ell^*(h) (1 + h \theta_h B \Gamma L)^\ell$$

para  $\ell = 0, 1, 2, \dots, k$ . Assumindo que essa desigualdade vale para todo  $\ell \geq 0$  tal que  $\ell \leq n-1$ , onde  $1 \leq n \leq N_h$ , obtém-se

$$\| \epsilon_n^{[h]} \| \leq h \theta_h B \Gamma L \sum_{\ell=0}^{n-1} \| \epsilon_\ell^{[h]} \| + \theta_h \mathcal{K}_n^*(h)$$

$$\begin{aligned} &\leq h\theta_h^2 B\Gamma L \mathcal{K}_n^*(h) \sum_{\ell=0}^{n-1} (1+h\theta_h B\Gamma L)^\ell + \theta_h \mathcal{K}_n^*(h) \\ &= \theta_h \mathcal{K}_n^*(h) (1+h\theta_h B\Gamma L)^n \end{aligned}$$

de modo que, por indução, a desigualdade é válida para todo  $0 \leq n \leq N_h$ . Em particular,

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_n^{[h]}\| &\leq \theta_h \mathcal{K}_n^*(h) (1+h\theta_h B\Gamma L)^n \\ &\leq \theta_h \mathcal{K}_n^*(h) e^{|t_n - t_0| \theta_h B\Gamma L} \end{aligned}$$

o que conclui o argumento.  $\square$

Em muitos problemas de interesse, a função  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  não satisfaz as condições do teorema acima, podendo não estar definida para todo  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ , ou não ser uniformemente Lipschitziana com respeito a  $\mathbf{y}$ . Com efeito, é mais realista supor

$$(4.4a) \quad \mathbf{f} \in C^0(\Omega, \mathbf{R}^m)$$

onde  $\Omega \subseteq \mathbf{R}^m$  é uma região aberta contendo o ponto inicial  $(t_0, \zeta)$ , com  $\mathbf{f}$  apenas *localmente* Lipschitziana em  $\mathbf{y}$  na região  $\Omega$ , i.e., para cada subconjunto compacto  $K \subset \Omega$ , existe constante  $L_K > 0$  tal que

$$(4.4b) \quad \|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{v})\| \leq L_K \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad \forall (t, \mathbf{u}), (t, \mathbf{v}) \in K$$

Sob essas condições, pode-se mostrar que existe uma única solução  $\mathbf{y} = \varphi(t)$  do problema (4.2) passando pelo ponto  $(t_0, \zeta)$ , que pode ser estendida a um intervalo maximal  $I_\varphi = ]a_\varphi, b_\varphi[$ , onde  $-\infty \leq a_\varphi < b_\varphi \leq +\infty$ , e satisfazendo a equação identicamente neste intervalo. Nessa situação, a convergência a que se refere o teorema acima vale pontualmente em todo o intervalo  $I_\varphi$ , mas em geral só é uniforme em subconjuntos *compactos* desse intervalo. Mais precisamente, tem-se o seguinte resultado:

#### **Teorema 4.2**

*Sejam  $\mathbf{f}$  uma função satisfazendo (4.4),  $(t_0, \zeta)$  um ponto da região  $\Omega$  e  $\varphi : \mathcal{I} \mapsto \mathbf{R}^m$  a solução do problema*

$$(4.5a) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

$$(4.5b) \quad \mathbf{y}(t_0) = \zeta$$

*num dado intervalo  $\mathcal{I}$ . Se o método (4.1) for zero-estável e consistente, então, para*

cada intervalo compacto  $[a, b] \subseteq \mathcal{I}$ , o método converge uniformemente à solução exata ao  $h \rightarrow 0$ , i.e.,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \max_{t_n \in [a, b]} \|\mathbf{y}_n^{[h]} - \varphi(t_n)\| \right\} = 0$$

desde que se tome  $\mathbf{y}_0^{[h]}, \mathbf{y}_1^{[h]}, \dots, \mathbf{y}_{k-1}^{[h]} \rightarrow \zeta$  ao  $h \rightarrow 0$ .

Mais precisamente, existem constantes  $C, \kappa > 0$  (dependendo só do método) e  $\eta > 0, h_0 > 0$  suficientemente pequenos (dependendo do método, do intervalo  $[a, b]$ , de  $\mathbf{f}$  e da solução  $\varphi$ ) tais que, para cada  $|h| \leq h_0$  e valores iniciais  $\mathbf{y}_0^{[h]}, \mathbf{y}_1^{[h]}, \dots, \mathbf{y}_{k-1}^{[h]}$  satisfazendo

$$\|\mathbf{y}_j^{[h]} - \zeta\| \leq \eta \quad \forall j = 0, 1, \dots, k-1,$$

tem-se

$$\|\mathbf{y}_n^{[h]} - \varphi(t_n)\| \leq C \theta_h \left\{ |t_n - t_0| \cdot \frac{L_n(h)}{|h|} + E_k(h) \right\} e^{\kappa \theta_h |t_n - t_0| L}$$

para todo  $n \geq k$  com  $t_n \in [a, b]$ , onde

$$\theta_h = \frac{1}{1 - |h| \frac{|\beta_k|}{|\alpha_k|} L},$$

$L_n(h)$  é o máximo erro de truncamento local cometido até o ponto  $t_n$  da malha,

$$L_n(h) = \max_{k \leq \ell \leq n} \|\mathcal{L}(t_\ell; h)\|$$

e  $E_k(h)$  é o erro de inicialização,

$$E_k(h) = \max_{0 \leq j \leq k-1} \|\mathbf{y}_j^{[h]} - \varphi(t_j)\|$$

Em particular, quando  $|h| \leq h_0$  o método está bem definido, i.e., tem-se  $(t_n, \mathbf{y}_n^{[h]})$  pertencente à região  $\Omega$  enquanto se tiver  $t_n \in [a, b]$ . No caso de métodos *implícitos* (i.e.,  $\beta_k \neq 0$ ),  $\mathbf{y}_n^{[h]}$  é obtido resolvendo-se o sistema (em geral não linear) de equações

$$\alpha_k \mathbf{y}_n^{[h]} = h \beta_k \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n^{[h]}) + \sum_{j=0}^{k-1} \left( -\alpha_{n-k+j} \mathbf{y}_{n-k+j}^{[h]} + h \beta_j \mathbf{f}(t_{n-k+j}, \mathbf{y}_{n-k+j}^{[h]}) \right)$$

iterativamente a partir de uma aproximação inicial  $(\mathbf{y}_n^{[h]})_0$ , que pode ser obtida tomando-se, por exemplo, qualquer dos pontos  $\mathbf{y}_{n-1}^{[h]}, \mathbf{y}_{n-2}^{[h]}, \dots, \mathbf{y}_{n-k}^{[h]}$  recentemente calculados. Alternativamente, pode-se usar um método explícito (dito *preditor*)

$$\alpha_{k_*}^* \mathbf{y}_n^* + h \sum_{j=0}^{k_*-1} \alpha_j^* \mathbf{y}_{n-k+j}^{[h]} = h \sum_{j=0}^{k_*-1} \beta_j^* \mathbf{f}(t_{n-k+j}, \mathbf{y}_{n-k+j}^{[h]})$$

tomando-se então

$$(\mathbf{y}_n^{[h]})_0 = \mathbf{y}_n^*$$

Em qualquer dos casos, para  $|h|$  suficientemente pequeno o processo iterativo

$$\alpha_k (\mathbf{y}_n^{[h]})_{r+1} = h \beta_k \mathbf{f}(t_n, (\mathbf{y}_n^{[h]})_r) + \sum_{j=0}^{k-1} \left( -\alpha_{n-k+j} \mathbf{y}_{n-k+j}^{[h]} + h \beta_j \mathbf{f}_{n-k+j} \right)$$

$$r = 0, 1, 2, \dots$$

está bem definido (i.e.,  $(t_n, (\mathbf{y}_n^{[h]})_r) \in \Omega$  para todo  $r$ ) e converge a um único limite, a saber, a solução  $\mathbf{y}_n^{[h]} \in \mathbf{R}^m$  da equação não linear acima. Na prática, itera-se apenas um número finito  $\mathcal{N}$  de vezes, tomando-se ao invés

$$\mathbf{y}_n^{[h]} = (\mathbf{y}_n^{[h]})_{\mathcal{N}}$$

Também nesse caso o método irá convergir (ao  $h \rightarrow 0$ ) à solução exata  $\varphi$  em cada compacto contido no intervalo de existência  $I_\varphi$ .

*Prova:* Dada  $\varphi \in C^1([a, b])$  solução do problema num certo intervalo compacto  $[a, b]$ , seja  $\delta > 0$  suficientemente pequeno tal que a vizinhança tubular

$$K_\delta = \{ (t, \mathbf{y}) : a \leq t \leq b \text{ e } \|\mathbf{y} - \varphi(t)\| \leq \delta \}$$

esteja inteiramente contida na região  $\Omega$ . Como  $K_\delta$  é compacta, existe constante  $L_* > 0$  tal que

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{v})\| \leq L_* \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad \forall (t, \mathbf{u}), (t, \mathbf{v}) \in K_\delta$$

A seguir, mostraremos o resultado em  $[t_0, b]$ , a prova em  $[a, t_0]$  sendo inteiramente análoga e por essa razão omitida. Como sempre, dado  $h$ , denotamos por  $t_n$  os pontos

$$t_n = t_0 + n h \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_h$$

sendo  $N_h$  o maior inteiro tal que  $t_n \in [a, b]$ .

Caso I: o método (4.1) é explícito

Da prova do teorema anterior, seja  $\hat{\delta} > 0$  tal que

$$(i)_r \quad \hat{\delta} \{ (b-a)\Gamma + k\Gamma A \} e^{(b-a)B\Gamma L_*} \leq \delta$$

onde

$$A = \sum_{j=0}^{k-1} |\alpha_j| \quad , \quad B = \sum_{j=0}^k |\beta_j| \quad , \quad \Gamma = \sup_{\ell \geq 0} |\gamma_\ell|$$



Como o método é consistente,

$$\sup \left\{ \frac{1}{h} \|\mathcal{L}(t; h)\| : t_0 + kh \leq t \leq b \right\} \rightarrow 0$$

ao  $h \rightarrow 0$ , onde  $\mathcal{L}(t; h)$  denota o erro de truncamento local no ponto  $t$ . Assim, podemos tomar  $h_0 > 0$  suficientemente pequeno tal que, para todo  $h \in ]0, h_0]$ ,

$$(ii)_t \quad \sup \left\{ \frac{1}{h} \|\mathcal{L}(t; h)\| : t_0 + kh \leq t \leq b \right\} \leq \hat{\delta}$$

Também assumimos

$$(iii)_t \quad \|\varphi(t) - \zeta\| \leq \frac{\hat{\delta}}{2} \quad \text{para todo } t \in [a, b] \text{ com } |t - t_0| \leq kh_0$$

Tomando-se então valores iniciais  $\mathbf{y}_0^{[h]}, \mathbf{y}_1^{[h]}, \dots, \mathbf{y}_{k-1}^{[h]}$  satisfazendo

$$(iv)_t \quad \|\mathbf{y}_j^{[h]} - \zeta\| \leq \frac{\hat{\delta}}{2} \quad \forall j = 0, 1, \dots, k-1$$

obtém-se, para todo  $h \in ]0, h_0]$ ,

$$\|\mathbf{y}_j^{[h]} - \varphi(t_j)\| \leq \|\mathbf{y}_j^{[h]} - \zeta\| + \|\zeta - \varphi(t_j)\| \leq \hat{\delta}$$

ou seja,

$$E_k(h) = \max_{0 \leq j \leq k-1} \|\mathbf{y}_j^{[h]} - \varphi(t_j)\| \leq \hat{\delta}$$

Como  $(t_j, \mathbf{y}_j^{[h]}) \in K_\delta$  para todo  $j = 0, 1, \dots, k-1$ , obtém-se da prova do Teorema 4.1 a estimativa

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\varepsilon}_k^{[h]}\| &\leq h B \Gamma L_* \sum_{\ell=0}^{k-1} \|\boldsymbol{\varepsilon}_\ell^{[h]}\| + |t_k - t_0| \Gamma \frac{L_k(h)}{h} + \Gamma A k E_k(h) \\ &\leq \mathcal{K}_k^*(h) (1 + h B \Gamma L_*)^k \end{aligned}$$

onde, para qualquer  $n = k, k+1, \dots, N_n$ ,

$$\mathcal{K}_n^*(h) \equiv |t_n - t_0| \Gamma \frac{L_n(h)}{h} + \Gamma A k E_k(h)$$

Em particular,

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}_k^{[h]}\| \leq \hat{\delta} \{(b-a)\Gamma + \Gamma A k\} e^{(b-a)B\Gamma L_*} \leq \delta$$

de modo que  $(t_k, \mathbf{y}_k^{[h]}) \in K_\delta$ , o que permite obter  $\mathbf{y}_{k+1}^{[h]}$  e repetir a análise acima obtendo

$$\|\epsilon_{k+1}^{[h]}\| \leq \mathcal{K}_{k+1}^*(h)(1 + hB\Gamma L_*)^{k+1}$$

e  $(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}^{[h]}) \in K_\delta$ . Prosseguindo-se sucessivamente para os demais pontos  $t_n$ , obtém-se

$$\|\epsilon_n^{[h]}\| \leq \mathcal{K}_n^*(h)(1 + hB\Gamma L_*)^n$$

e em particular

$$\|\epsilon_n^{[h]}\| \leq \delta$$

para todo  $n = k, k+1, \dots, N_h$ .

Caso II: o método (4.1) é implícito

Sejam

$$V = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{|\alpha_j|}{|\alpha_k|}, \quad M_\delta = \max_{(t, \mathbf{u}) \in K_\delta} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{u})\|$$

Da prova do Teorema 4.1, seja  $\hat{\delta} > 0$  suficientemente pequeno tal que

$$(i)_{II} \quad \hat{\delta} \{2(b-a)\Gamma + 2k\Gamma A\} e^{2(b-a)B\Gamma L_*} \leq \frac{\delta}{(k+2)V}$$

e  $h_0 > 0$  tal que

$$(ii)_{II} \quad h_0 \frac{|\beta_k|}{|\alpha_k|} L_* \leq \frac{1}{2}$$

$$(iii)_{II} \quad \|\varphi(t) - \zeta\| \leq \frac{\hat{\delta}}{2} \quad \forall t \in [a, b] \text{ com } |t - t_0| \leq kh_0$$

$$(iv)_{II} \quad \|\varphi(t) - \varphi(t')\| \leq \frac{\delta}{(k+2)V} \quad \forall t, t' \in [a, b] \text{ com } |t - t'| \leq h_0$$

$$(v)_{II} \quad h_0 M_\delta \sum_{j=0}^k \frac{|\beta_j|}{|\alpha_k|} \leq \frac{\delta}{k+2}$$

$$(vi)_{II} \quad \sup \left\{ \frac{1}{h} \|\mathcal{L}(t; h)\| : t_0 + kh \leq t \leq b \right\} \leq \hat{\delta} \quad \forall h \in ]0, h_0]$$

Para cada  $h \in [0, h_0]$ , tomando-se condições iniciais  $\mathbf{y}_0^{[h]}, \mathbf{y}_1^{[h]}, \dots, \mathbf{y}_{k-1}^{[h]}$  satisfazendo

$$\|\mathbf{y}_j^{[h]} - \zeta\| \leq \frac{\hat{\delta}}{2} \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots, k-1,$$

obtem-se

$$\| \mathbf{y}_j^{[h]} - \varphi(t_j) \| \leq \| \mathbf{y}_j^{[h]} - \zeta \| + \| \zeta - \varphi(t_j) \| \leq \hat{\delta}$$

de modo que

$$E_k(h) = \max_{0 \leq j \leq k-1} \| \boldsymbol{\varepsilon}_j^{[h]} \| \leq \hat{\delta}$$

Em particular,  $(t_j, \mathbf{y}_j^{[h]}) \in K_\delta$  para  $j = 0, 1, \dots, k-1$ .

Para obter  $\mathbf{y}_k^{[h]}$ , é preciso resolver a equação

$$\mathbf{y}_k^{[h]} = \mathbf{w}_k + h \frac{\beta_k}{\alpha_k} \mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}_k^{[h]})$$

onde

$$\mathbf{w}_k \equiv \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\alpha_k} \left( -\alpha_j \mathbf{y}_j^{[h]} + h \beta_j \mathbf{f}(t_j, \mathbf{y}_j^{[h]}) \right)$$

Observamos que  $\mathbf{w}_k \in \bar{B}_\delta(\varphi(t_k))$ , i.e.,

$$\| \mathbf{w}_k - \varphi(t_k) \| \leq \delta$$

Com efeito, como

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} = -1$$

pela consistência do método, obtém-se, usando (i)<sub>II</sub>, (iii)<sub>II</sub>, (iv)<sub>II</sub>,

$$\begin{aligned} \left\| - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} \mathbf{y}_j^{[h]} - \varphi(t_k) \right\| &= \left\| \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} (\mathbf{y}_j^{[h]} - \varphi(t_k)) \right\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{|\alpha_j|}{|\alpha_k|} \left( \| \boldsymbol{\varepsilon}_j^{[h]} \| + \| \varphi(t_j) - \varphi(t_k) \| \right) \leq \frac{k+1}{k+2} \delta \end{aligned}$$

enquanto, por (v)<sub>II</sub>,

$$\left\| h \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\beta_j}{\alpha_k} \mathbf{f}(t_j, \mathbf{y}_j^{[h]}) \right\| \leq h M_\delta \sum_{j=0}^{k-1} \frac{|\beta_j|}{|\alpha_k|} \leq \frac{\delta}{k+2}$$

Seja então, para  $\mathbf{u}$  em  $\Omega$ ,

$$\mathcal{F}_k(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{w}_k + h \frac{\beta_k}{\alpha_k} \mathbf{f}(t_k, \mathbf{u})$$

Assumindo  $\mathbf{u} \in \bar{B}_\delta(\varphi(t_k))$ , obtém-se, de modo análogo à estimativa acima para  $\|\mathbf{w}_k - \varphi(t_k)\|$ ,

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{F}_k(\mathbf{u}) - \varphi(t_k)\| \leq \\ & \leq \left\| \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} \left( \mathbf{y}_j^{[h]} - \varphi(t_k) \right) \right\| + h \sum_{j=0}^{k-1} \frac{|\beta_j|}{|\alpha_k|} \|\mathbf{f}(t_j, \mathbf{y}_j^{[h]})\| + h \frac{|\beta_k|}{|\alpha_k|} \|\mathbf{f}(t_k, \mathbf{u})\| \\ & \leq \frac{k+1}{k+2} \delta + h M_\delta \sum_{j=0}^k \frac{|\beta_j|}{|\alpha_k|} \leq \delta \end{aligned}$$

usando (v)<sub>II</sub>.

Assim, tomando-se  $\mathbf{u}^{[0]}$  qualquer em  $\bar{B}_\delta(\varphi(t_k))$ , e definindo

$$\mathbf{u}^{[r+1]} = \mathcal{F}_k(\mathbf{u}^{[r]})$$

para  $r = 0, 1, 2, \dots$ , obtém-se uma seqüência  $\{\mathbf{u}^{[r]} : r \geq 0\} \subseteq \bar{B}_\delta(\varphi(t_k))$ .

Por (ii)<sub>II</sub>, para  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \bar{B}_\delta(\varphi(t_k))$ ,

$$\|\mathcal{F}_k(\mathbf{u}) - \mathcal{F}_k(\mathbf{v})\| \leq h \frac{|\beta_k|}{|\alpha_k|} L_* \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

ou seja,  $\mathcal{F}_k$  é uma contração em  $\bar{B}_\delta(\varphi(t_k))$ , de onde segue que existe um único ponto fixo  $\mathbf{y}_k^{[h]}$  de  $\mathcal{F}_k$  em  $\bar{B}_\delta(\varphi(t_k))$ , tendo-se

$$\mathbf{y}_k^{[h]} = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{u}^{[r]}$$

Como  $\mathbf{y}_k^{[h]} \in \bar{B}_\delta(\varphi(t_k)) \subseteq K_\delta$ , pode-se estimar  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_k^{[h]}\|$  como na prova do Teorema 4.1, obtendo-se

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\varepsilon}_k^{[h]}\| & \leq \theta_h h B \Gamma L_* \sum_{\ell=0}^{k-1} \|\boldsymbol{\varepsilon}_\ell^{[h]}\| + \theta_h \mathcal{K}_k^*(h) \\ & \leq \theta_h \mathcal{K}_k^*(h) (1 + \theta_h h B \Gamma L_*)^k \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{K}_k^*(h)$  é dado acima. Em particular,

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\varepsilon}_k^{[h]}\| & \leq \theta_h \mathcal{K}_k^*(h) e^{\theta_h |t_k - t_0| B \Gamma L_*} \\ & \leq \hat{\delta} \{2|t_n - t_0| \Gamma + 2k \Gamma A\} e^{2|t_n - t_0| B \Gamma L_*} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\delta}{(k+2)V}$$

Pode-se agora prosseguir indutivamente: supondo, para um dado  $1 \leq n \leq N_n$ ,

$$\|\varepsilon_\ell^{[h]}\| \leq \theta_h \mathcal{K}_\ell^*(h) (1 + \theta_h h B \Gamma L_*)^\ell$$

para todo  $\ell = 0, 1, \dots, n-1$ , e em particular

$$\|\varepsilon_\ell^{[h]}\| \leq \frac{\delta}{(k+2)V}$$

pode-se repetir o argumento acima obtendo-se, para dado  $\mathbf{u}^{[0]} \in \bar{B}_\delta(\varphi(t_n))$ ,

$$\mathbf{y}_n^{[h]} = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{u}^{[r]} \in \bar{B}_\delta(\varphi(t_n))$$

onde, para  $r \geq 0$ ,

$$\mathbf{u}^{[r+1]} = \mathbf{w}_n + h \frac{\beta_k}{\alpha_k} \mathbf{f}(t_n, \mathbf{u}^{[r]})$$

$$\mathbf{w}_n = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\alpha_k} \left( -\alpha_j \mathbf{y}_{n-k+j}^{[h]} + h \beta_j \mathbf{f}_{n-k+j} \right)$$

Da prova do Teorema 4.1, obtém-se então

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_n^{[h]}\| &\leq \theta_h h B \Gamma L_* \sum_{\ell=0}^{n-1} \|\varepsilon_\ell^{[h]}\| + \theta_h \mathcal{K}_n^*(h) \\ &\leq \mathcal{K}_n^*(h) (1 + \theta_h h B \Gamma L_*)^n \end{aligned}$$

para todo  $n = k, k+1, \dots, N_n$ .

Resta finalmente considerar, em cada estágio  $n = k, k+1, \dots$  do método acima, como é feita a escolha de  $\mathbf{u}^{[0]}$  em  $\bar{B}_\delta(\varphi(t_n))$ . Uma estratégia imediata consiste em tomar simplesmente

$$\mathbf{u}^{[0]} \in \{ \mathbf{y}_{n-k}^{[h]}, \mathbf{y}_{n-k+1}^{[h]}, \dots, \mathbf{y}_{n-1}^{[h]} \}$$

visto que, para cada  $j = 0, 1, \dots, k-1$ ,

$$\|\mathbf{y}_{n-k+j}^{[h]} - \varphi(t_n)\| \leq \|\varepsilon_{n-k+j}^{[h]}\| + \|\varphi(t_{n-k+j}) - \varphi(t_n)\| \leq \frac{k+1}{k+2} \frac{\delta}{V} \leq \delta$$

Alternativamente, pode-se obter  $\mathbf{u}^{[0]}$  utilizando um método preditor de passo  $k$ .

$$\sum_{j=0}^{k_*} \alpha_j^* \mathbf{y}_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k_*-1} \beta_j^* \mathbf{f}_{n+j}$$

para estimar  $\mathbf{y}_n^{[h]}$  a partir dos valores  $\mathbf{y}_{n-j}^{[h]}$  previamente obtidos pelo método principal (ou corretor), tomando-se

$$\mathbf{u}^{[0]} = \mathbf{y}_n^*$$

com  $\mathbf{y}_n^*$  dado por

$$\mathbf{y}_n^* = \frac{1}{\alpha_{k_*}^*} \sum_{j=0}^{k_*-1} \left( -\alpha_j^* \mathbf{y}_{n-k_*+j}^{[h]} + h \beta_j^* \mathbf{f}(t_{n-k_*+j}, \mathbf{y}_{n-k_*+j}^{[h]}) \right)$$

Nesse caso, assumindo-se que  $\hat{\delta}$  e  $h_0$  satisfazem, além de (i)<sub>II</sub> - (vi)<sub>II</sub> acima, as condições adicionais

$$(vii)_{II} \quad \hat{\delta} \{ 2(b-a)\Gamma + 2k\Gamma A \} e^{2(b-a)B\Gamma L_*} \leq \frac{\delta}{3V^*}$$

$$(viii)_{II} \quad h_0 L_* \sum_{j=0}^{k_*-1} \frac{|\beta_j^*|}{|\alpha_{k_*}^*|} \leq 1$$

$$(ix)_{II} \quad \sup \{ \|\mathcal{L}^*(t; h)\| : t_0 + kh \leq t \leq b \} \leq \frac{\delta}{3}$$

onde

$$V^* = \sum_{j=0}^{k_*-1} \frac{|\alpha_j^*|}{|\alpha_{k_*}^*|}$$

e  $\mathcal{L}^*(t; h)$  é o erro de truncamento

$$\mathcal{L}^*(t; h) = \sum_{j=0}^{k_*} \alpha_j^* \varphi(t - k_*h + jh) - h \sum_{j=0}^{k_*-1} \beta_j^* \varphi'(t - k_*h + jh)$$

obtém-se que o valor predito  $\mathbf{y}_n^*$  satisfaz

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}_n^* - \varphi(t_n)\| &\leq \sum_{j=0}^{k_*-1} \frac{|\alpha_j^*|}{|\alpha_{k_*}^*|} \|\varepsilon_{n-k_*+j}^{[h]}\| + h \sum_{j=0}^{k_*-1} \frac{|\beta_j^*|}{|\alpha_{k_*}^*|} L_* \|\varepsilon_{n-k_*+j}^{[h]}\| + \|\mathcal{L}^*(t_n; h)\| \\ &\leq \frac{\delta}{3V^*} \sum_{j=0}^{k_*-1} \frac{|\alpha_j^*|}{|\alpha_{k_*}^*|} + \frac{\delta}{3V^*} h L_* \sum_{j=0}^{k_*-1} \frac{|\beta_j^*|}{|\alpha_{k_*}^*|} + \frac{\delta}{3} \leq \delta \end{aligned}$$

usando (vii)<sub>II</sub> - (ix)<sub>II</sub>. Tomando-se então  $\mathbf{u}^{[0]} = \mathbf{y}_n^*$  como a aproximação inicial para  $\mathbf{y}_n^{[h]}$  e iterando-se qualquer número de vezes (finito ou infinito) via

$$\mathbf{u}^{[r+1]} = \mathbf{w}_n + h \frac{\beta_k}{\alpha_k} \mathbf{f}(t_n, \mathbf{u}^{[r]})$$

obtém-se um valor  $\mathbf{y}_n^{[h]}$  em  $\bar{B}_\delta(\varphi(t_n))$ . Para uma aproximação assim calculada, resulta então, repetindo o argumento indutivo apresentado acima,

$$\|\mathbf{y}_n^{[h]} - \varphi(t_n)\| \leq \theta_h \mathcal{K}_n^*(h) (1 + \theta_h h B \Gamma L_*)^n$$

para todo  $n = k, k+1, \dots, N_h$ . □

Por outro lado, para qualquer  $f \in C^0(\Omega, \mathbf{R}^m)$ , é interessante observar que *sempre que o método (4.1) convergir a alguma função uniformemente em um certo intervalo, ela é solução do problema (4.2) neste intervalo*. Mais precisamente, pode-se mostrar o seguinte resultado:

### Teorema 4.3

Se o método (4.1) satisfizer

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0$$

e

$$\sum_{j=0}^k j \alpha_j = \sum_{j=0}^k \beta_j \neq 0$$

e, quando aplicado a um problema

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \zeta \end{aligned}$$

onde  $f \in C^0(\Omega, \mathbf{R}^m)$  e  $(t_0, \zeta) \in \Omega$ , tivermos que (4.1) produz, para uma dada seqüência de passos  $h_\ell \rightarrow 0$  e condições iniciais

$$\mathbf{y}_0^{[h_\ell]}, \mathbf{y}_1^{[h_\ell]}, \dots, \mathbf{y}_{k-1}^{[h_\ell]}$$

convergindo a  $\zeta$  ao  $\ell \rightarrow \infty$ , uma seqüência de aproximações  $\{\mathbf{y}_n^{[h_\ell]} : t_n \in [a, b]\}$  que, ao  $\ell \rightarrow \infty$ , converge uniformemente em  $[a, b]$  a uma determinada aplicação  $\varphi : [a, b] \mapsto \mathbf{R}^m$ ; então

$$\varphi \in C^1([a, b], \mathbf{R}^m)$$

e  $\varphi$  satisfaz o problema (4.2) em  $[a, b]$ .

*Prova:* Mostraremos o resultado no intervalo  $[t_0, b]$ , a prova em  $[a, t_0]$  sendo inteiramente análoga. Mais precisamente, dados  $\hat{t} < \tilde{t} \in [t_0, b]$  quaisquer, mostraremos

$$(*) \quad \varphi(\tilde{t}) - \varphi(\hat{t}) = \int_{\hat{t}}^{\tilde{t}} \mathbf{f}(t, \varphi(t)) dt$$

de onde o resultado a provar é evidente. Para mostrar (\*), tomemos inicialmente  $\bar{\delta} > 0$  suficientemente pequeno tal que  $K_{\bar{\delta}} \subseteq \Omega$ , onde  $K_{\bar{\delta}}$  denota o conjunto compacto

$$K_{\bar{\delta}} \equiv \{ (t, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}^{m+1} : t \in [a, b], \|\mathbf{y} - \varphi(t)\| \leq \bar{\delta} \}$$

e  $M_{\bar{\delta}}$  o máximo valor de  $\|\mathbf{f}\|$  em  $K_{\bar{\delta}}$ , i.e.,

$$M_{\bar{\delta}} \equiv \max_{(t, \mathbf{y}) \in K_{\bar{\delta}}} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\|$$

Para cada  $\ell = 1, 2, 3, \dots$ , seja  $t_n^{[\ell]}$  o  $n$ -ésimo ponto da malha correspondente ao passo  $h_\ell$ , ou seja,

$$t_n^{[\ell]} = t_0 + n h_\ell$$

e tomemos  $\bar{\ell} > 0$  tal que, para cada  $\ell \geq \bar{\ell}$ ,

$$\|\mathbf{y}_n^{[\ell]} - \varphi(t_n^{[\ell]})\| \leq \bar{\delta}$$

para todo  $n$  tal que  $t_n^{[\ell]} \in [a, b]$ , de modo que

$$(t_n^{[\ell]}, \mathbf{y}_n^{[\ell]}) \in K_{\bar{\delta}} \quad \forall t_n^{[\ell]} \in [a, b], \forall \ell \geq \bar{\ell}$$

Sejam

$$A \equiv \sum_{j=0}^k |\alpha_j| \quad , \quad B \equiv \sum_{j=0}^k |\beta_j|$$

Dado  $\varepsilon > 0$  arbitrário, seja  $\delta_\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que

$$(i) \quad \|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{v})\| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall (t, \mathbf{u}), (t, \mathbf{v}) \in K_{\bar{\delta}} \text{ com } \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| \leq \delta_\varepsilon$$

$$(ii) \quad \|\varphi(t) - \varphi(t')\| \leq \frac{\varepsilon}{A k^2} \quad \forall t, t' \in [a, b] \text{ com } |t - t'| \leq \delta_\varepsilon$$

e tomemos  $\ell_\varepsilon \geq \bar{\ell}$  tal que

$$(iii) \quad |h_\ell| \leq \delta_\varepsilon \quad \forall \ell \geq \ell_\varepsilon$$

$$(iv) \quad \|\mathbf{y}_n^{[\ell]} - \varphi(t_n^{[\ell]})\| \leq \min \left\{ \delta_\varepsilon, \frac{\varepsilon}{A k} \right\} \quad \forall n \text{ tal que } t_n^{[\ell]} \in [a, b], \forall \ell \geq \ell_\varepsilon$$



Sejam então  $\hat{t}, \check{t} \in [t_0, b]$  fixados, arbitrariamente tomados, com  $\hat{t} < \check{t}$ . Para cada  $\ell \geq \ell_\varepsilon$  dado, sejam  $\hat{n}, \check{n}$  inteiros tais que

$$t_{\hat{n}}^{[h_\ell]} \geq \hat{t} \quad , \quad t_{\hat{n}-1}^{[h_\ell]} < \hat{t} \quad , \quad t_{\check{n}}^{[h_\ell]} \leq \check{t} \quad , \quad t_{\check{n}+1}^{[h_\ell]} > \check{t}$$

onde  $t_{\hat{n}}^{[h_\ell]} = t_0 + \hat{n} h_\ell$ ,  $t_{\check{n}}^{[h_\ell]} = t_0 + \check{n} h_\ell$ .

Somando as equações

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{y}_{p+j}^{[h_\ell]} = h_\ell \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbf{f}_{p+j}$$

para  $p = \hat{n}, \hat{n} + 1, \dots, \check{n} - k$ , obtém-se

$$(**) \quad \mathbf{L}(\hat{t}, \check{t}; \ell) = \mathbf{R}(\hat{t}, \check{t}; \ell)$$

onde, visto que  $\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\hat{t}, \check{t}; \ell) = & \\ & (\alpha_{k-1} + \alpha_{k-2} + \dots + \alpha_1 + \alpha_0) \mathbf{y}_{\hat{n}+k-1}^{[h_\ell]} + \\ & (\alpha_{k-2} + \alpha_{k-3} + \dots + \alpha_1 + \alpha_0) \mathbf{y}_{\hat{n}+k-2}^{[h_\ell]} + \dots + \\ & (\alpha_1 + \alpha_0) \mathbf{y}_{\hat{n}+1}^{[h_\ell]} + \alpha_0 \mathbf{y}_{\hat{n}}^{[h_\ell]} + \\ & (\alpha_k + \alpha_{k-1} + \dots + \alpha_2 + \alpha_1) \mathbf{y}_{\check{n}-k+1}^{[h_\ell]} + \\ & (\alpha_k + \alpha_{k-1} + \dots + \alpha_3 + \alpha_2) \mathbf{y}_{\check{n}-k+2}^{[h_\ell]} + \dots + \\ & (\alpha_k + \alpha_{k-1}) \mathbf{y}_{\check{n}-1}^{[h_\ell]} + \alpha_k \mathbf{y}_{\check{n}}^{[h_\ell]} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\hat{t}, \check{t}; \ell) = & \\ & h_\ell S_b \{ \mathbf{f}_{\hat{n}+k} + \mathbf{f}_{\hat{n}+k+1} + \dots + \mathbf{f}_{\check{n}-k-1} + \mathbf{f}_{\check{n}-k} \} + \\ & h_\ell (\beta_{k-1} + \beta_{k-2} + \dots + \beta_1 + \beta_0) \mathbf{f}_{\hat{n}+k-1} + \\ & h_\ell (\beta_{k-2} + \beta_{k-3} + \dots + \beta_1 + \beta_0) \mathbf{f}_{\hat{n}+k-2} + \dots + \\ & h_\ell (\beta_1 + \beta_0) \mathbf{f}_{\hat{n}+1} + h_\ell \beta_0 \mathbf{f}_{\hat{n}} + \\ & h_\ell (\beta_k + \beta_{k-1} + \dots + \beta_1) \mathbf{f}_{\check{n}-k+1} + \\ & h_\ell (\beta_k + \beta_{k-1} + \dots + \beta_2) \mathbf{f}_{\check{n}-k+2} + \dots + \\ & h_\ell (\beta_k + \beta_{k-1}) \mathbf{f}_{\check{n}-1} + h_\ell \beta_k \mathbf{f}_{\check{n}} \end{aligned}$$

sendo

$$S_b \equiv \sum_{j=0}^k \beta_j$$

Em particular, podemos escrever

$$\begin{aligned} L(\hat{t}, \check{t}; \ell) = & \\ & (\alpha_{k-1} + \alpha_{k-2} + \dots + \alpha_1 + \alpha_0) \left\{ \varphi(\hat{t}) + \hat{w}_{k-1}^{[h_\ell]} \right\} + \\ & (\alpha_{k-2} + \alpha_{k-3} + \dots + \alpha_1 + \alpha_0) \left\{ \varphi(\hat{t}) + \hat{w}_{k-2}^{[h_\ell]} \right\} + \dots + \\ & (\alpha_1 + \alpha_0) \left\{ \varphi(\hat{t}) + \hat{w}_1^{[h_\ell]} \right\} + \alpha_0 \left\{ \varphi(\hat{t}) + \hat{w}_0^{[h_\ell]} \right\} + \\ & (\alpha_k + \alpha_{k-1} + \dots + \alpha_2 + \alpha_1) \left\{ \varphi(\check{t}) + \check{w}_1^{[h_\ell]} \right\} + \\ & (\alpha_k + \alpha_{k-1} + \dots + \alpha_3 + \alpha_2) \left\{ \varphi(\check{t}) + \check{w}_2^{[h_\ell]} \right\} + \dots + \\ & (\alpha_k + \alpha_{k-1}) \left\{ \varphi(\check{t}) + \check{w}_{k-1}^{[h_\ell]} \right\} + \alpha_k \left\{ \varphi(\check{t}) + \check{w}_k^{[h_\ell]} \right\} \end{aligned}$$

onde, para cada  $j = 0, \dots, k$ , define-se  $\hat{w}_j^{[h_\ell]} \equiv \mathbf{y}_{\hat{n}+j}^{[h_\ell]} - \varphi(\hat{t})$  e  $\check{w}_j^{[h_\ell]} \equiv \mathbf{y}_{\check{n}-k+j}^{[h_\ell]} - \varphi(\check{t})$ . Por (ii), (iii), (iv), tem-se

$$\| \hat{w}_j^{[h_\ell]} \| \leq \frac{2\varepsilon}{Ak} \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots, k-1$$

e

$$\| \check{w}_j^{[h_\ell]} \| \leq \frac{2\varepsilon}{Ak} \quad \forall j = 1, 2, \dots, k-1, k$$

Usando novamente que  $\alpha_k + \dots + \alpha_1 + \alpha_0 = 0$ , obtém-se então

$$\begin{aligned} L(\hat{t}, \check{t}; \ell) = & \\ & - \alpha_k \left\{ \varphi(\hat{t}) + \hat{w}_{k-1}^{[h_\ell]} \right\} - (\alpha_k + \alpha_{k-1}) \left\{ \varphi(\hat{t}) + \hat{w}_{k-2}^{[h_\ell]} \right\} - \dots - \\ & (\alpha_k + \alpha_{k-1} + \dots + \alpha_3 + \alpha_2) \left\{ \varphi(\hat{t}) + \hat{w}_1^{[h_\ell]} \right\} - \\ & (\alpha_k + \alpha_{k-1} + \dots + \alpha_2 + \alpha_1) \left\{ \varphi(\hat{t}) + \hat{w}_0^{[h_\ell]} \right\} + \\ & (\alpha_k + \alpha_{k-1} + \dots + \alpha_2 + \alpha_1) \left\{ \varphi(\check{t}) + \check{w}_1^{[h_\ell]} \right\} + \\ & (\alpha_k + \alpha_{k-1} + \dots + \alpha_3 + \alpha_2) \left\{ \varphi(\check{t}) + \check{w}_2^{[h_\ell]} \right\} + \dots + \\ & (\alpha_k + \alpha_{k-1}) \left\{ \varphi(\check{t}) + \check{w}_{k-1}^{[h_\ell]} \right\} + \alpha_k \left\{ \varphi(\check{t}) + \check{w}_k^{[h_\ell]} \right\} \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} L(\hat{t}, \check{t}; \ell) &= \left( k\alpha_k + (k-1)\alpha_{k-1} + \dots + 2\alpha_2 + \alpha_1 \right) \varphi(\check{t}) - \\ &\quad \left( k\alpha_k + (k-1)\alpha_{k-1} + \dots + 2\alpha_2 + \alpha_1 \right) \varphi(\hat{t}) + W_\ell \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} W_\ell \equiv & \\ & (\alpha_k + \alpha_{k-1} + \dots + \alpha_2 + \alpha_1) \check{\omega}_1^{[h_\ell]} + \\ & (\alpha_k + \alpha_{k-1} + \dots + \alpha_3 + \alpha_2) \check{\omega}_2^{[h_\ell]} + \dots + \\ & (\alpha_k + \alpha_{k-1}) \check{\omega}_{k-1}^{[h_\ell]} + \alpha_k \check{\omega}_k^{[h_\ell]} - \\ & \alpha_k \hat{\omega}_{k-1}^{[h_\ell]} - (\alpha_k + \alpha_{k-1}) \hat{\omega}_{k-2}^{[h_\ell]} - \dots - \\ & (\alpha_k + \alpha_{k-1} + \dots + \alpha_3 + \alpha_2) \hat{\omega}_1^{[h_\ell]} - \\ & (\alpha_k + \alpha_{k-1} + \dots + \alpha_2 + \alpha_1) \hat{\omega}_0^{[h_\ell]} \end{aligned}$$

Pela hipótese, tem-se

$$k\alpha_k + (k-1)\alpha_{k-1} + \dots + 2\alpha_2 + \alpha_1 = \beta_k + \beta_{k-1} + \dots + \beta_1 + \beta_0 \equiv S_b$$

de modo que

$$L(\hat{t}, \check{t}; \ell) = S_b \{ \varphi(\check{t}) - \varphi(\hat{t}) \} + W_\ell$$

onde  $W_\ell$  satisfaz

$$\| W_\ell \| \leq 4\varepsilon$$

Por outro lado, da expressão acima para  $R(\hat{t}, \check{t}; \ell)$ , obtém-se

$$R(\hat{t}, \check{t}; \ell) = h_\ell S_b \{ f_{\hat{n}+k} + f_{\hat{n}+k+1} + \dots + f_{\check{n}-k-1} + f_{\check{n}-k} \} + W_\ell$$

onde

$$\| W_\ell \| \leq 2h_\ell B k M_{\bar{\delta}}$$

Como, para todo  $j = \hat{n} + k, \hat{n} + k + 1, \dots, \check{n} - k - 1, \check{n} - k$ , tem-se

$$f_j = f(t_j^{[h_\ell]}, y_j^{[h_\ell]}) = f(t_j^{[h_\ell]}, \varphi(t_j^{[h_\ell]})) + a_j^{[h_\ell]}$$

onde, por (i), (iv),

$$\| a_j^{[h_\ell]} \| \leq \frac{\varepsilon}{b-a},$$

segue que

$$\begin{aligned} R(\hat{t}, \check{t}; \ell) &= h_\ell S_b \{ f_{\hat{n}+k} + f_{\hat{n}+k-1} + \dots + f_{\hat{n}-k-1} + f_{\hat{n}-k} \} + \mathcal{W}_\ell \\ &= h_\ell S_b \left\{ \mathcal{A}_\ell + \sum_{j=\hat{n}+k}^{\hat{n}-k} f(t_j, \varphi(t_j)) \right\} + \mathcal{W}_\ell \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{A}_\ell \equiv \sum_{j=\hat{n}+k}^{\hat{n}-k} a_j^{[h_\ell]}$  satisfaz

$$\|\mathcal{A}_\ell\| \leq \frac{\varepsilon}{h_\ell}$$

Portanto, (\*\*) fornece

$$S_b \varphi(\check{t}) - S_b \varphi(\hat{t}) + \mathcal{W}_\ell = S_b h_\ell \sum_{j=\hat{n}+k}^{\hat{n}-k} f(t_j^{[h_\ell]}, \varphi(t_j^{[h_\ell]})) + S_b h_\ell \mathcal{A}_\ell + \mathcal{W}_\ell$$

Logo, como  $S_b \neq 0$ , obtém-se

$$(***) \quad \varphi(\check{t}) - \varphi(\hat{t}) = \sum_{j=\hat{n}+k}^{\hat{n}-k} f(t_j^{[h_\ell]}, \varphi(t_j^{[h_\ell]})) h_\ell + e_\ell$$

onde

$$\|e_\ell\| \leq \frac{4\varepsilon}{|S_b|} + \varepsilon + 2 \frac{B k M_{\bar{\delta}}}{|S_b|} h_\ell$$

Como  $\varphi \in C^0([a, b])$ , temos, ao  $\ell \rightarrow \infty$ ,

$$\sum_{j=\hat{n}+k}^{\hat{n}-k} f(t_j^{[h_\ell]}, \varphi(t_j^{[h_\ell]})) h_\ell \rightarrow \int_i^{\check{t}} f(t, \varphi(t)) dt$$

de modo que, fazendo  $\ell \rightarrow \infty$  em (\*\*\*), obtemos

$$\left\| \varphi(\check{t}) - \varphi(\hat{t}) - \int_i^{\check{t}} f(t, \varphi(t)) dt \right\| \leq \frac{4\varepsilon}{|S_b|} + \varepsilon$$

Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, obtemos então

$$\left\| \varphi(\check{t}) - \varphi(\hat{t}) - \int_i^{\check{t}} f(t, \varphi(t)) dt \right\| = 0$$

ou seja,

$$\varphi(\check{t}) - \varphi(\hat{t}) = \int_i^{\check{t}} f(t, \varphi(t)) dt$$

como havia sido afirmado. □

## Capítulo II

### Equações Algébrico-Diferenciais Lineares de Coeficientes Constantes

Neste capítulo, apresentaremos um breve tratamento sobre algumas propriedades fundamentais de sistemas de equações algébrico-diferenciais lineares

$$A \dot{\mathbf{x}}(t) + B \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$$

onde  $A, B$  são matrizes constantes de ordem  $n$  dadas, com  $A$  singular, e  $\mathbf{f}(t)$  denota um vetor  $n$ -dimensional de funções suficientemente diferenciáveis em um certo intervalo  $\mathcal{I} \subseteq \mathbf{R}$ .

Em anos recentes, a teoria de sistemas singulares da forma acima foi substancialmente desenvolvida (ver por exemplo [02], [03]), permitindo um entendimento satisfatório do comportamento analítico e computacional envolvido [01]. Apesar do interesse recente nestes sistemas, vários resultados fundamentais já eram essencialmente conhecidos, ou podiam ser derivados facilmente a partir de resultados clássicos em teoria de matrizes [07].

Na seção §2.1, é apresentada uma breve introdução à teoria de sistemas singulares do tipo acima, seguindo [01]. Como no Capítulo III, define-se inicialmente *solubilidade* de um modo levemente diferente do apresentado em [01], exigindo-se que o termo  $\mathbf{f}(t)$  seja infinitamente diferenciável, mostrando-se posteriormente, na seção §2.2, que é suficiente tomar  $\mathbf{f}$   $k$ -vezes diferenciável, sendo  $k$  o índice do sistema. Na falta de referências como [02], [03], alguns dos resultados fundamentais da teoria destes sistemas são derivados em §2.2 a partir de resultados conhecidos sobre a estrutura de feixes de matrizes, discutidos em [07].

## §2.1 – Introdução

Nesta seção apresentaremos alguns resultados e conceitos básicos sobre sistemas de equações diferenciais lineares da forma

$$(1.1) \quad A \dot{\mathbf{x}}(t) + B \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$$

onde  $A, B$  são matrizes reais  $n \times n$  de coeficientes constantes, com  $A$  *singular* (i.e., não inversível), e  $\mathbf{f}(t)$  denota um vetor  $n$ -dimensional de funções contínuas em um dado intervalo  $\mathcal{I}$ . Sistemas como (1.1) em que  $A$  é singular são denominados sistemas de *equações algébrico-diferenciais* ou sistemas *singulares, com vínculos, ou implícitos* [01], [04]. Uma *solução* de (1.1) num intervalo  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$  é uma função  $\mathbf{x} \in C^1(\mathcal{J}, \mathbf{R}^n)$  que verifica a equação (1.1) em cada ponto  $t \in \mathcal{J}$ . Contrariamente ao caso explícito em que  $A$  é inversível, para que existam soluções da equação (1.1) é preciso em geral assumir alguma regularidade adicional do termo independente  $\mathbf{f}(t)$ .

### Exemplo 1.1

Considere o sistema

$$(1.2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) + \dot{y}(t) + \dot{z}(t) = f(t) \\ \dot{x}(t) + \dot{z}(t) = g(t) \\ y(t) + z(t) = h(t) \end{cases}$$

correspondente à equação (1.1) onde

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T, \quad \mathbf{f}(t) = (f(t), g(t), h(t))^T$$

e

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Supondo existir solução  $\mathbf{x}(t)$  num intervalo  $\mathcal{I}$ , obtém-se da terceira equação que  $h(t)$  é diferenciável em cada ponto de  $\mathcal{I}$ . Nestas condições, subtraindo a segunda equação da primeira, obtém-se

$$\dot{y}(t) = f(t) - g(t)$$

de onde  $y(t)$  pode ser determinada unicamente, supondo-se conhecido seu valor em algum ponto  $t_0 \in \mathcal{I}$ . Derivando-se a terceira equação com respeito a  $t$  e subtraindo-se o resultado da primeira, obtém-se

$$\dot{x}(t) = f(t) - h'(t)$$

de onde  $x(t)$  pode ser determinada a partir de um valor inicial  $x(t_0)$ . Finalmente, obtém-se  $z(t)$  da terceira equação,

$$z(t) = h(t) - y(t)$$

Em particular, dadas  $f, g, h \in C^0(\mathcal{I}, \mathbf{R})$ , a equação acima possui soluções num intervalo  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$  se e somente se  $h$  for diferenciável em  $\mathcal{J}$ .  $\square$

Como mostra o Exemplo 1.1, a continuidade de  $f(t)$  não é em geral suficiente para assegurar a existência de soluções para o sistema singular (1.1). Para outros sistemas, pode não haver soluções mesmo quando  $f$  for infinitamente diferenciável.

### Exemplo 1.2

Considere o sistema

$$(1.3) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) + \dot{y}(t) + \dot{z}(t) = f(t) \\ \dot{x}(t) + \dot{z}(t) = g(t) \\ x(t) + z(t) = h(t) \end{cases}$$

correspondente à equação (1.1) onde

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e onde se assume  $f, g, h \in C^\infty(\mathcal{I}, \mathbf{R})$ . Claramente, da segunda e terceira equações resulta que o sistema admite soluções se e somente se  $g(t) = h'(t)$ .  $\square$

### Definição 1.1 (solubilidade)

O sistema (1.1) é dito **solúvel** no intervalo  $\mathcal{I}$  se as seguintes condições forem verificadas:

- (i) para cada  $f \in C^\infty(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ , existe pelo menos uma solução em algum subintervalo  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$  de classe  $C^1(\mathcal{J}, \mathbf{R}^n)$
- (ii) cada solução  $\mathbf{x} \in C^1(\mathcal{J}, \mathbf{R}^n)$  de (1.1), onde  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ , na verdade está definida em todo o intervalo  $\mathcal{I}$ , é de classe  $C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  e satisfaz a equação em cada ponto de  $\mathcal{I}$
- (iii) as soluções de (1.1) são unicamente determinadas pelo seu valor em qualquer ponto do intervalo  $\mathcal{I}$ , ou seja: se  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  são soluções quaisquer tais que  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}(t_0)$  para algum  $t_0 \in \mathcal{I}$ , então  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$  para todo  $t \in \mathcal{I}$

Assim, o sistema (1.3) não é solúvel em nenhum intervalo  $\mathcal{I}$ , dado que (i) e (iii)

não são satisfeitas. Por outro lado, como ficou mostrado na análise do Exemplo 1.1, (1.2) é solúvel em qualquer intervalo  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ , admitindo, para cada  $\mathbf{f} \in C^\infty(\mathcal{I})$  dada, infinitas soluções  $\mathbf{x} \in C^1(\mathcal{I})$ . Um caso extremo de sistema solúvel — que exhibe, para cada  $\mathbf{f} \in C^\infty(\mathcal{I}, \mathbb{R}^n)$ , uma única solução  $\mathbf{x}(t)$  — é dado pela proposição a seguir.

### Proposição 1.1

*Seja  $N$  matriz  $n \times n$  nilpotente, então o sistema*

$$(1.4) \quad N \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$$

*é solúvel em qualquer intervalo  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ .*

*Mais precisamente, sendo  $k \in \{1, \dots, n\}$  a nilpotência de  $N$ , então, para cada  $\mathbf{f} \in C^k(\mathcal{I}, \mathbb{R}^n)$ , (1.4) admite uma única solução  $\mathbf{x}(t)$ , dada por*

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j N^j \mathbf{f}^{(j)}(t)$$

*para cada  $t \in \mathcal{I}$ .*

*Prova:* Claramente,  $\mathbf{w} \in C^1(\mathcal{I}, \mathbb{R}^n)$  definida por

$$\mathbf{w}(t) \equiv \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j N^j \mathbf{f}^{(j)}(t)$$

é solução de (1.4) no intervalo  $\mathcal{I}$ , visto que

$$\begin{aligned} N \dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{w}(t) &= \\ &= N \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j N^j \mathbf{f}^{(j+1)}(t) + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j N^j \mathbf{f}^{(j)}(t) \\ &= - \sum_{j=1}^k (-1)^j N^j \mathbf{f}^{(j)}(t) + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j N^j \mathbf{f}^{(j)}(t) \\ &= \mathbf{f}(t) - (-1)^k N^k \mathbf{f}^{(k)}(t) \\ &= \mathbf{f}(t) \end{aligned}$$

Para mostrar que  $\mathbf{w}(t)$  acima é a única solução da equação (1.4) em qualquer subintervalo  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ , seja  $\mathbf{x} \in C^1(\mathcal{J}, \mathbb{R}^n)$  uma solução arbitrária, e tomemos a diferença  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{x} - \mathbf{w}$ , que satisfaz

$$(*) \quad N \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) + \boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{0}$$



para todo  $t \in \mathcal{J}$ . Multiplicando-se (\*) à esquerda por  $N^{k-1}$ , obtém-se

$$N^{k-1} \theta(t) = \mathbf{0}$$

visto que  $N^k = 0$ . Derivando-se essa equação com relação a  $t$ , resulta

$$(**) \quad N^{k-1} \dot{\theta}(t) = \mathbf{0}$$

Subtraindo (\*\*) da equação (\*) multiplicada à esquerda por  $N^{k-2}$ , obtém-se

$$N^{k-2} \theta(t) = \mathbf{0}$$

Repetindo o argumento, obtém-se então

$$N^{k-3} \theta(t) = \mathbf{0}$$

e assim sucessivamente, até obter

$$\theta(t) = \mathbf{0}$$

ou seja,  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{w}(t)$ , concluindo o argumento. □

Introduzindo na equação (1.1) a mudança de variável

$$\mathbf{x}(t) = Q \mathbf{y}(t)$$

onde  $Q$  é uma matriz inversível constante, i.e.,

$$Q \in GL_n(\mathbf{R}) \equiv \{ G \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : \det G \neq 0 \}$$

e multiplicando-se (1.1) à esquerda por  $P \in GL_n(\mathbf{R})$ , obtém-se o sistema equivalente

$$(1.5) \quad PAQ \dot{\mathbf{y}}(t) + PBQ \mathbf{y}(t) = P \mathbf{f}(t)$$

Claramente, (1.1) é solúvel num dado intervalo  $\mathcal{I}$  se e somente se (1.5) for solúvel em  $\mathcal{I}$ . Ademais, como será visto na seção a seguir, é possível encontrar  $P, Q$  adequadas tais que (1.5) tem uma forma padrão simples, de onde propriedades importantes do sistema original podem ser mais facilmente derivadas.

## §2.2 – Solubilidade e Índice

Nesta seção apresentaremos uma caracterização simples para a solubilidade (cf. Definição 1.1) do sistema de equações algébrico-diferenciais

$$(2.1) \quad A \dot{\mathbf{x}}(t) + B \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$$

e analisaremos a estrutura de um sistema solúvel genérico, seguindo a discussão em [01], [07]. Como na seção anterior,  $A$  e  $B$  denotam matrizes constantes de dimensão  $n \times n$ , e  $\mathbf{f}(t)$  é um vetor  $n$ -dimensional de funções (suaves) dadas.

Será conveniente no que segue considerar o feixe matricial  $\mathcal{A}(\lambda)$  associado ao sistema (2.1), i.e.,

$$\mathcal{A}(\lambda) = \lambda A + B$$

onde  $\lambda \in \mathbf{C}$  é um parâmetro livre. Em particular,  $\mathcal{A}(\lambda)$  é uma matriz  $n \times n$  de polinômios de grau não superior a 1. Definindo o posto do feixe  $\mathcal{A}(\lambda)$  como a ordem da maior submatriz quadrada de  $\mathcal{A}(\lambda)$  cujo determinante não seja o polinômio identicamente nulo em  $\lambda$ , então  $\mathcal{A}(\lambda)$  é dito ser um feixe *regular* quando tiver posto máximo  $n$ , e *singular* em caso contrário [07].

### Proposição 2.1

Se  $\mathcal{A}(\lambda) = \lambda A + B$  for um feixe regular, então existem matrizes  $n \times n$  inversíveis  $P, Q$  tais que

$$(2.2) \quad P A Q = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad P B Q = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix}$$

onde  $N$  é uma matriz nilpotente  $s \times s$  e  $I_r, I_s$  são as matrizes identidades de ordem  $r$  e  $s$ , respectivamente, com  $r + s = n$ .

*Prova:* Ver F. Gantmacher [07], vol. II, pag. 28. □

Em particular, introduzindo em (2.1) a mudança de variável  $\mathbf{x}(t) = Q \mathbf{y}(t)$  e multiplicando a equação (2.1) à esquerda pela matriz  $P$ , obtém-se o sistema equivalente

$$(2.3a) \quad \dot{\mathbf{y}}_1(t) + C \mathbf{y}_1(t) = \mathbf{g}_1(t)$$

$$(2.3b) \quad N \dot{\mathbf{y}}_2(t) + \mathbf{y}_2(t) = \mathbf{g}_2(t)$$

onde  $\mathbf{g} = P \mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)^T$ ,  $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)^T$ . A equação (2.3a) é um sistema explícito de equações diferenciais ordinárias, e assim admite uma única solução  $\mathbf{y}_1(t)$  para cada  $\mathbf{g}_1 \in C^0(\mathcal{I}, \mathbf{R}^r)$  e valor inicial  $\mathbf{y}_1(t_0) \in \mathbf{R}^r$  dados, enquanto, pela

Proposição 1.1, (2.3b) admite uma única solução para cada  $\mathbf{g}_2 \in C^k(\mathcal{I}, \mathbf{R}^s)$ , que é dada por

$$\mathbf{y}_2(t) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j N^j \mathbf{g}_2^{(j)}(t)$$

onde  $k \in \{1, 2, \dots, s\}$  é a nilpotência de  $N$ . Portanto, segue que (2.1) é solúvel (no intervalo  $\mathcal{I}$ ) nesse caso, admitindo soluções satisfazendo (ii) e (iii) da Definição 1.1 para cada  $\mathbf{f} \in C^k(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ , e não somente  $\mathbf{f} \in C^\infty(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  como sugerido pela Definição 1.1. Em particular, temos mostrado o seguinte resultado.

**Proposição 2.2**

Se  $\mathcal{A}(\lambda) = \lambda A + B$  for um feixe regular, então o sistema singular (2.1) é solúvel em qualquer intervalo  $\mathcal{I}$ .

Por outro lado, quando o feixe  $\mathcal{A}(\lambda) = \lambda A + B$  for singular, pode-se mostrar que (2.1) não é solúvel em nenhum intervalo  $\mathcal{I}$ , de modo que temos a seguinte caracterização para a solubilidade do sistema singular (2.1).

**Teorema 2.1**

A equação (2.1) é solúvel se e somente se  $\mathcal{A}(\lambda) = \lambda A + B$  é regular.

Por exemplo, quando existe dependência linear entre as colunas de  $\mathcal{A}(\lambda)$ , de modo que

$$\mathcal{A}(\lambda) Q = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & 0 \\ * & * & \cdots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & 0 \end{bmatrix}$$

para alguma matriz (constante)  $Q \in GL_n(\mathbf{R})$ , obtém-se, introduzindo a mudança de variável  $\mathbf{y}(t) = Q^{-1} \mathbf{x}(t)$ , o sistema

$$\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & 0 \\ * & * & \cdots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & 0 \\ * & * & \cdots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

de modo que  $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_{n-1}(t), y_n(t))^T$  é solução se e somente se, para qualquer  $\tilde{y}_n(t)$ , tivermos que  $\tilde{\mathbf{y}}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_{n-1}(t), \tilde{y}_n(t))^T$  é solução, seguindo então que a condição de unicidade (iii) da definição de solubilidade não pode ser satisfeita.

Analogamente, havendo dependência entre as linhas de  $\mathcal{A}(\lambda)$ , é fácil ver que a condição (i) não pode ser satisfeita para  $\mathbf{f}$  arbitrária (infinitamente diferenciável), de modo que o problema não é solúvel. Novamente nesse caso, pode-se mostrar que (iii) também não é satisfeita.

Finalmente, no caso restante em que as linhas e colunas de  $\mathcal{A}(\lambda)$  são linearmente independentes, o resultado decorre por um argumento similar explorando-se a forma canônica do feixe singular  $\mathcal{A}(\lambda)$ , conforme discutido em [07].  $\square$

Ademais, examinando-se os divisores elementares [07] dos feixes  $\mathcal{A}(\lambda) = \lambda A + B$  e  $\mathcal{B}(\lambda) = A + \lambda B$  associados ao sistema (2.1), pode-se mostrar o seguinte resultado.

**Proposição 2.3**

Seja  $\mathcal{A}(\lambda) = \lambda A + B$  regular e  $P, Q, \tilde{P}, \tilde{Q}$  matrizes  $n \times n$  inversíveis tais que

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad PBQ = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix}$$

$$\tilde{P}A\tilde{Q} = \begin{bmatrix} I_{\tilde{r}} & 0 \\ 0 & \tilde{N} \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}B\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{C} & 0 \\ 0 & I_{\tilde{s}} \end{bmatrix}$$

onde  $N, \tilde{N}$  são matrizes nilpotentes de dimensão  $s \times s$  e  $\tilde{s} \times \tilde{s}$ , respectivamente, então  $r = \tilde{r}$ ,  $s = \tilde{s}$  e  $N$  é similar a  $\tilde{N}$ .

*Prova:* Sejam  $C_1, C_2, \dots, C_i$  os blocos de Jordan da matriz  $C$  (de dimensão  $r \times r$ ), i.e., os blocos de ordem  $m_1, m_2, \dots, m_i$ , respectivamente, ao longo da diagonal da forma de Jordan de  $C$ . Para cada  $i = 1, 2, \dots, \hat{i}$ , tem-se  $C_i = [c_i]$  se  $m_i = 1$ , e

$$C_i = \begin{bmatrix} c_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{C})$$

se  $m_i > 1$ , onde  $c_i \in \mathbb{C}$ , tendo-se ademais  $m_1 + m_2 + \dots + m_i = r$ . Analogamente, sejam  $N_1, N_2, \dots, N_j$  os blocos de Jordan da matriz  $N$  (de dimensão  $s \times s$ ), de ordem  $n_1, n_2, \dots, n_j$ , respectivamente, onde  $n_1 + n_2 + \dots + n_j = s$ . A partir das formas de Jordan de  $C$  e  $N$  dadas acima, é fácil obter que os divisores elementares [07] de  $\mathcal{B}(\lambda) = \lambda B + A$  são dados por

$$(1 + \lambda c_1)^{m_1}, (1 + \lambda c_2)^{m_2}, \dots, (1 + \lambda c_i)^{m_i}, \lambda^{n_1}, \lambda^{n_2}, \dots, \lambda^{n_j}$$

Por outro lado, sendo  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_i$  os blocos de Jordan da matriz  $\tilde{C}$  (de dimensão  $\tilde{r} \times \tilde{r}$ ), de ordem  $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \dots, \tilde{m}_i$ , respectivamente, onde  $\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2 + \dots + \tilde{m}_i = \tilde{r}$ , e sendo  $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \dots, \tilde{N}_j$  os blocos de Jordan da matriz  $\tilde{N}$  (de dimensão  $\tilde{s} \times \tilde{s}$ ), de ordem  $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_j$ , respectivamente, onde  $\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2 + \dots + \tilde{n}_j = \tilde{s}$ , obtém-se pelo mesmo cálculo que os divisores elementares de  $\lambda B + A$  são dados por

$$(1 + \lambda \tilde{c}_1)^{\tilde{m}_1}, (1 + \lambda \tilde{c}_2)^{\tilde{m}_2}, \dots, (1 + \lambda \tilde{c}_i)^{\tilde{m}_i}, \lambda^{\tilde{n}_1}, \lambda^{\tilde{n}_2}, \dots, \lambda^{\tilde{n}_j}$$

Como as duas listas obtidas acima para os divisores elementares de  $\lambda B + A$  têm de ser idênticas, segue imediatamente que  $\hat{i} = \tilde{i}$ ,  $\hat{j} = \tilde{j}$  e

$$m_i = \tilde{m}_i, c_i = \tilde{c}_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, \hat{i}$$

$$n_j = \tilde{n}_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, \hat{j}$$

Em particular, tem-se  $r = \tilde{r}$ ,  $s = \tilde{s}$  e  $C, N$  são similares a  $\tilde{C}, \tilde{N}$ , respectivamente, como havia sido afirmado.  $\square$

Como conseqüência da Proposição 2.3 acima, segue que a nilpotência  $k$  da matriz  $N$  em (2.3) é univocamente determinada, sendo denominada de **índice** do sistema de equações algébrico-diferenciais (2.1). Pela definição, o índice  $k$  de um sistema de dimensão  $n$  é um número inteiro entre 0 e  $n$ , tendo-se ademais que dois sistemas equivalentes quaisquer têm obrigatoriamente o mesmo índice. Além disso, observando-se a forma das equações (2.3), é imediato obter, da Proposição 1.1, o seguinte resultado.

### **Teorema 2.2**

*Se o sistema singular (2.1) for solúvel, então, sendo  $k$  o índice do sistema e  $\mathcal{I} \subseteq \mathbf{R}$  um intervalo qualquer, tem-se que*

- (i) *para cada  $\mathbf{f} \in C^k(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ , existe pelo menos uma solução de (2.1) em algum subintervalo  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$  de classe  $C^1(\mathcal{J}, \mathbf{R}^n)$*
- (ii) *cada solução  $\mathbf{x} \in C^1(\mathcal{J}, \mathbf{R}^n)$  de (2.1), onde  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ , na verdade está definida em todo o intervalo  $\mathcal{I}$ , é de classe  $C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  e satisfaz a equação em cada ponto de  $\mathcal{I}$*
- (iii) *as soluções de (2.1) são unicamente determinadas pelo seu valor em qualquer ponto do intervalo  $\mathcal{I}$ , ou seja: se  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  são soluções quaisquer tais que  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}(t_0)$  para algum  $t_0 \in \mathcal{I}$ , então  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$  para todo  $t \in \mathcal{I}$*

*Ademais, sendo  $m \geq k$  qualquer, para cada  $\mathbf{f} \in C^m(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  dada, toda solução da equação (2.1) é de classe  $C^{m-k+1}(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ .*

## Capítulo III

### Equações Algébrico-Diferenciais Lineares de Coeficientes Variáveis

Neste capítulo, derivaremos alguns resultados sobre sistemas de equações algébrico-diferenciais lineares

$$A(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + B(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$$

onde  $A(t), B(t)$  são matrizes  $n \times n$  de coeficientes variáveis, definidos num intervalo  $\mathcal{I} \subseteq \mathbf{R}$ , com  $A(t)$  singular para todo  $t$  em  $\mathcal{I}$ , e  $\mathbf{f}(t)$  denota um vetor  $n$ -dimensional de funções suficientemente diferenciáveis no intervalo  $\mathcal{I}$ .

Na seção §3.1, são apresentados alguns conceitos e resultados básicos sobre o problema acima, seguindo [01], [04]. Em particular, a noção de solubilidade de um sistema singular é discutida, derivando-se alguns resultados de interesse relacionados a esse conceito. Na seção §3.2, investiga-se o importante caso particular

$$N(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$$

em que  $N(t)$  é nilpotente para cada  $t \in \mathcal{I}$ . Em contraste com o caso de coeficientes constantes considerado no Capítulo II, estes sistemas podem não ser solúveis, e alguns resultados fornecendo condições suficientes para sua solubilidade são derivados nesta seção. Em §3.3, dois resultados importantes sobre matrizes de funções contínuas ou de dada classe de diferenciabilidade são investigados, e na falta de referências providenciamos sua demonstração em detalhe, deixando alguns resultados técnicos para o Apêndice B em ordem a não prejudicar a continuidade da exposição. A seção §3.4 é baseada na referência [04], apresentando a derivação de um teorema fundamental descrevendo a estrutura de sistemas singulares genéricos obtido recentemente por S. L. Campbell.

### §3.1 – Introdução

Nesta seção apresentaremos alguns resultados e conceitos básicos sobre sistemas algébrico-diferenciais

$$(1.1) \quad A(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + B(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$$

seguinto a discussão em [01], [04]. Na equação (1.1),  $A(t)$ ,  $B(t)$  são matrizes  $n \times n$  de funções contínuas num intervalo  $\mathcal{I}$ , e  $\mathbf{f}(t)$  denota um vetor  $n$ -dimensional de funções contínuas no mesmo intervalo. Uma solução de (1.1) num intervalo  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$  é uma função  $\mathbf{x} \in C^1(\mathcal{J}, \mathbf{R}^n)$  que verifica a equação (1.1) em cada ponto  $t \in \mathcal{J}$ . Em contraste com o caso de equações diferenciais ordinárias, assumimos que  $A(t)$  seja *singular* (i.e., não inversível) para cada  $t \in \mathcal{I}$ , com posto  $0 \leq r(t) \leq n - 1$  não necessariamente constante. Como foi visto no Capítulo II, para que existam soluções da equação (1.1) é preciso em geral assumir alguma regularidade adicional do termo independente  $\mathbf{f}(t)$  e, similarmente, dos coeficientes  $A(t)$ ,  $B(t)$ .

#### Exemplo 1.1

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + \dot{z}(t) = 1 \\ \sqrt{t} \dot{y}(t) + \sqrt{t} \dot{z}(t) + z(t) = 0 \\ y(t) + z(t) = t \end{cases}$$

correspondente à equação (1.1) onde  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ ,  $\mathbf{f}(t) = (1, 0, t)^T$  e

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{t} & \sqrt{t} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Da terceira equação, segue que  $\dot{y}(t) + \dot{z}(t) = 1$ , de modo que, pela segunda equação, obtemos

$$z(t) = -\sqrt{t}$$

Como  $z(t)$  não é diferenciável no ponto  $t = 0$ , segue que a primeira equação não pode ser satisfeita em nenhum intervalo da forma  $\mathcal{I} = [0, \delta]$ ,  $\delta > 0$ , apesar de se ter  $A, B, \mathbf{f}$  contínuas em  $[0, +\infty[$ . Logo, diferentemente do que acontece em equações diferenciais ordinárias onde  $A(t)$  é inversível em cada ponto, para sistemas singulares como (1.1) a continuidade de  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $\mathbf{f}(t)$  não é em geral suficiente para assegurar a existência de soluções. Em particular, na maior parte dos resultados deste capítulo é assumido que esses termos satisfazem condições de regularidade mais restritivas que meramente continuidade no intervalo de interesse.

**Definição 1.1** (solubilidade)

O sistema (1.1) é dito **solúvel** no intervalo  $\mathcal{I}$  se as seguintes condições forem verificadas:

- (i) para cada  $\mathbf{f} \in C^\infty(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ , existe pelo menos uma solução em algum subintervalo  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$  de classe  $C^1(\mathcal{J}, \mathbf{R}^n)$
- (ii) cada solução  $\mathbf{x} \in C^1(\mathcal{J}, \mathbf{R}^n)$  de (1.1), onde  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ , na verdade está definida em todo o intervalo  $\mathcal{I}$ , é de classe  $C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  e satisfaz a equação em cada ponto de  $\mathcal{I}$
- (iii) as soluções de (1.1) são univocamente determinadas pelo seu valor em qualquer ponto do intervalo  $\mathcal{I}$ , ou seja: se  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  são soluções quaisquer tais que  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}(t_0)$  para algum  $t_0 \in \mathcal{I}$ , então  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$  para todo  $t \in \mathcal{I}$

Outra definição importante é a de sistemas equivalentes:

**Definição 1.2** (equivalência analítica)

Dois sistemas

$$A(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + B(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$$

e

$$\tilde{A}(t)\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) + \tilde{B}(t)\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{f}}(t)$$

com  $A, \tilde{A} \in C^k(\mathcal{I}, \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$  e  $B, \tilde{B} \in C^{k-1}(\mathcal{I}, \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$ , são ditos **equivalentes** no intervalo  $\mathcal{I}$  se existirem matrizes inversíveis  $H(t), K(t)$  de classe  $C^k(\mathcal{I})$  tais que

$$(1.2a) \quad H(t)A(t)K(t) = \tilde{A}(t)$$

$$(1.2b) \quad H(t)A(t)K'(t) + H(t)B(t)K(t) = \tilde{B}(t)$$

$$(1.2c) \quad H(t)\mathbf{f}(t) = \tilde{\mathbf{f}}(t)$$

para cada  $t \in \mathcal{I}$ , de modo que  $A(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + B(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$  pode ser colocado na forma  $\tilde{A}(t)\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) + \tilde{B}(t)\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{f}}(t)$  fazendo-se a mudança de variável  $\mathbf{x}(t) = K(t)\tilde{\mathbf{x}}(t)$  e multiplicando a equação à esquerda por  $H(t)$ .

Claramente, quando (1.1) for equivalente a um sistema solúvel num dado intervalo, então o sistema original também será solúvel neste intervalo.

Associado ao sistema (1.1), será útil considerar a equação *homogênea*

$$(1.3) \quad A(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + B(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

visto que qualquer solução de (1.1) é da forma



$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{x}_h(t)$$

onde  $\mathbf{x}_p(t)$  denota uma solução particular qualquer da equação (1.1) e  $\mathbf{x}_h(t)$  é uma solução arbitrária da equação homogênea associada (1.3).

### Teorema 1.1

Se (1.1) for solúvel num intervalo  $\mathcal{I}$ , com  $A(t)$  singular em pelo menos um ponto deste intervalo, então o espaço das soluções da equação homogênea associada (1.3),

$$\mathcal{W}_H = \{ \mathbf{x} \in C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) : A(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + B(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \ \forall t \in \mathcal{I} \}$$

tem dimensão  $0 \leq s \leq n - 1$ .

*Prova:* Se a equação (1.3) possui apenas a solução trivial  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , o resultado é imediato, de modo que vamos assumir que existem soluções não triviais  $\mathbf{x}(t)$  para a equação homogênea.

Primeiramente, observamos que, para um problema *solúvel* de dimensão  $n$ , não podem existir mais que  $n$  soluções de (1.3) linearmente independentes no intervalo considerado. Com efeito, dadas  $n + 1$  soluções quaisquer

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \varphi_{n+1}(t)$$

da equação (1.3), e tomando um ponto qualquer  $t_0$  no intervalo  $\mathcal{I}$ , os  $n + 1$  vetores  $\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0), \varphi_{n+1}(t_0)$  são linearmente dependentes em  $\mathbf{R}^n$ , de modo que pelo menos um deles, digamos  $\varphi_{n+1}(t_0)$ , pode ser escrito como uma combinação linear dos demais, i.e.,

$$\varphi_{n+1}(t_0) = c_1 \varphi_1(t_0) + c_2 \varphi_2(t_0) + \dots + c_n \varphi_n(t_0)$$

para determinadas constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Em particular, as soluções de (1.3) dadas por  $\varphi_{n+1}(t)$  e

$$\phi(t) \equiv c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \dots + c_n \varphi_n(t)$$

coincidem no ponto  $t_0 \in \mathcal{I}$ ; pela condição (iii) de solubilidade, tem-se então  $\varphi_{n+1}(t) = \phi(t)$  para todo  $t \in \mathcal{I}$ , ou seja,

$$\varphi_{n+1}(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \dots + c_n \varphi_n(t)$$

de modo que  $\{ \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1} \}$  é um conjunto linearmente dependente de soluções, como havia sido afirmado. Portanto, o espaço

$$\mathcal{W}_H = \{ \varphi \in C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) : A(t)\dot{\varphi}(t) + B(t)\varphi(t) = \mathbf{0} \ \forall t \in \mathcal{I} \}$$

tem dimensão finita e não superior a  $n$ .

Para mostrar que  $\dim \mathcal{W}_H \leq n - 1$ , suponha que fosse possível encontrar  $n$  soluções

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in \mathcal{W}_H$  linearmente independentes no intervalo  $\mathcal{I}$ . Em particular, a matriz  $\Phi(t)$  formada pelas colunas  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ , ou seja,

$$\Phi(t) = [\varphi_1(t) | \varphi_2(t) | \dots | \varphi_n(t)]$$

seria inversível para cada  $t \in \mathcal{I}$ , com  $\Phi \in C^1(\mathcal{I}, GL_n(\mathbf{R}))$ . Afirmamos que nesse caso  $E(t) \equiv A(t)\Phi(t)$  *teria de ser inversível para todo  $t \in \mathcal{I}$* . Com efeito, supondo que, para algum ponto  $\hat{t} \in \mathcal{I}$  se tivesse  $E(\hat{t})$  singular, então existiria  $\hat{v} \in \mathbf{R}^n$  tal que

$$E(\hat{t})\mathbf{u} \neq \hat{v} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$$

Tomando-se então  $\mathbf{f} \in C^\infty(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  dada por

$$\mathbf{f}(t) = \hat{v} \quad \forall t \in \mathcal{I}$$

e sendo  $\mathbf{x} \in C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  a solução da equação (1.1) para  $\mathbf{f}$  acima, ou seja,

$$A(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + B(t)\mathbf{x}(t) = \hat{v}$$

então, introduzindo  $\tilde{\mathbf{x}} \in C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  dada por

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\tilde{\mathbf{x}}(t)$$

para todo  $t \in \mathcal{I}$ , ou seja,  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t)^{-1}\mathbf{x}(t)$ , obteríamos

$$A(t)\Phi(t)\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) + [A(t)\Phi'(t) + B(t)\Phi(t)]\tilde{\mathbf{x}}(t) = \hat{v}$$

Como  $A(t)\Phi'(t) + B(t)\Phi(t) = 0$  pela definição da matriz  $\Phi(t)$  acima, teríamos então

$$E(t)\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \hat{v}$$

Em particular, fazendo  $t = \hat{t}$ ,

$$E(\hat{t})\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(\hat{t}) = \hat{v}$$

de modo que  $\hat{v}$  pertenceria à imagem de  $E(\hat{t})$ , contrariamente ao que foi assumido sobre  $\hat{v}$ . Logo, temos de ter  $E(t) = A(t)\Phi(t)$  inversível para todo  $t \in \mathcal{I}$ , e então  $A(t)$  inversível para todo  $t$ , o que contradiz a hipótese.  $\square$

Observa-se da prova acima que, quando (1.1) é solúvel em  $\mathcal{I}$ , sendo  $s = \dim \mathcal{W}_H$  e  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s\}$  uma base para o espaço  $\mathcal{W}_H$ , tem-se que, para cada  $t \in \mathcal{I}$ , o conjunto  $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_s(t)\}$  é linearmente independente. Ademais, *ou  $A(t)$  é inversível para todo  $t \in \mathcal{I}$  ou  $A(t)$  é singular para todo  $t \in \mathcal{I}$* . Com efeito, se  $A \in C^0(\mathcal{I}, \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$  for inversível num dado  $\hat{t} \in \mathcal{I}$ , então temos  $A(t)$  inversível em todo um intervalo  $\mathcal{J}$  contendo o ponto  $\hat{t}$ , e assim as soluções da equação homogênea no intervalo  $\mathcal{J}$  formam um espaço de dimensão  $n$ . Como (1.1) é solúvel em  $\mathcal{I}$ ,

essas soluções estão definidas em todo o intervalo  $\mathcal{I}$  e, pela condição (iii) de solubilidade, formam um conjunto linearmente independente em cada ponto de  $\mathcal{I}$ . Assim,  $\dim \mathcal{W}_H = n$ , e, como foi visto na prova acima, segue que  $A(t)$  é inversível para todo  $t \in \mathcal{I}$ . Temos com isso mostrado o seguinte resultado:

**Proposição 1.1**

*Sendo  $A, B \in C^0(\mathcal{I}, \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$  tais que o problema (1.1) é solúvel em  $\mathcal{I}$  conforme a Definição 1.1, então*

*ou  $A(t)$  é inversível para cada  $t \in \mathcal{I}$*

*ou  $A(t)$  é singular para cada  $t \in \mathcal{I}$*

*tendo-se ademais  $A(t)$  inversível se e somente se  $\dim \mathcal{W}_H = n$ , onde  $\mathcal{W}_H$  denota o espaço das soluções da equação homogênea (1.3).*

Como a diferença de duas soluções quaisquer de (1.1) satisfaz a equação homogênea, tem-se a seguinte consequência do Teorema 1.1.

**Proposição 1.2**

*Sendo  $A, B \in C^0(\mathcal{I}, \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$  tais que (1.1) é solúvel no intervalo  $\mathcal{I}$  e  $A(t)$  é não inversível para todo  $t \in \mathcal{I}$ , então, dado  $t_0 \in \mathcal{I}$  qualquer, o conjunto dos valores assumidos no ponto  $t_0$  pelas soluções da equação (1.1),*

$$CI(t_0) = \{ \mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n : \text{existe solução } \mathbf{x}(t) \text{ de (1.1) com } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \}$$

*forma uma variedade linear de dimensão  $0 \leq s \leq n - 1$ , onde  $s = \dim \mathcal{W}_H$ .*

Com efeito, sendo  $\hat{\mathbf{x}} \in C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  uma solução qualquer da equação (1.1), tem-se

$$CI(t_0) = \hat{\mathbf{x}}(t_0) + \mathcal{W}(t_0)$$

onde

$$\mathcal{W}(t_0) = \{ \mathbf{u}_0 \in \mathbf{R}^n : \text{existe } \varphi \in \mathcal{W}_H \text{ tal que } \varphi(t_0) = \mathbf{u}_0 \}$$

Em particular, quando  $A(t)$  é singular, o problema de condições iniciais

$$(1.4a) \quad A(t) \dot{\mathbf{x}}(t) + B(t) \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$$

$$(1.4b) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

não admite em geral solução para  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$  dado arbitrariamente. Aqueles  $\mathbf{x}_0$  para os quais (1.4a), (1.4b) é solúvel, ou seja,

$$\mathbf{x}_0 \in CI(t_0)$$

são denominados de condições iniciais *consistentes* no ponto  $t_0$ . Por exemplo, quando

$A(t)$  é nilpotente, e tal que (1.1) é solúvel, será mostrado na seção §3.2 a seguir que existe uma única condição inicial  $\mathbf{x}_0$  em  $t = t_0$  consistente com a equação (1.4a), tendo-se  $CI(t_0)$  reduzido a um único ponto. No caso em que  $A(t)$  é mais geral, não inversível,  $CI(t_0)$  é uma variedade linear de dimensão  $s$ , com  $0 \leq s \leq n - 1$  como foi visto acima.

**Definição 1.3**

O sistema (1.1) está na *forma canônica padrão* se tiver a forma

$$\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & N(t) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} C(t) & 0 \\ 0 & I_{n-s} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$$

onde  $I_s, I_{n-s}$  denotam as matrizes identidade de ordem  $s$  e  $n - s$ , respectivamente, e  $N(t)$  é uma matriz estritamente triangular inferior de ordem  $n - s$  para todo  $t \in \mathcal{I}$ , ou seja,

$$N(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n_{21}(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n_{31}(t) & n_{32}(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n_{n-s,1}(t) & n_{n-s,2}(t) & n_{n-s,3}(t) & \cdots & n_{n-s,n-s-1}(t) & 0 \end{bmatrix}$$

para  $0 \leq s \leq n - 1$ .

Claramente, um sistema na forma canônica padrão (ou equivalente a um sistema nessa forma) é solúvel em  $\mathcal{I}$ . Contudo, como será mostrado na próxima seção, essa não é uma condição necessária para a solubilidade de (1.1) num dado intervalo.

### §3.2 – Sistemas Nilpotentes

Nesta seção derivaremos resultados sobre sistemas algébrico-diferenciais lineares da forma

$$(2.1) \quad N(t)\dot{z}(t) + z(t) = h(t)$$

onde  $N(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  é matriz nilpotente para cada  $t \in \mathcal{I}$ . Em contraste com o caso de coeficientes *constantes* considerado em §2.2, tais sistemas podem não ser solúveis.

#### Exemplo 2.1

Tomando

$$N(t) = \begin{bmatrix} t & 1 \\ -t^2 & -t \end{bmatrix}$$

observa-se que  $N(t)^2 = 0$  para todo  $t$ , e

$$z(t) = \varphi(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$$

satisfaz  $N(t)\dot{z}(t) + z(t) = \mathbf{0}$  em  $\mathcal{I}$  para *qualquer*  $\varphi \in C^1(\mathcal{I})$  dada. Em particular, tomando-se  $t_0 \in \mathcal{I}$ , existem infinitas soluções  $z(t)$  do problema homogêneo verificando  $z(t_0) = \mathbf{0}$ , bastando escolher  $\varphi(t)$  com  $\varphi(t_0) = 0$ . Logo, para a matriz  $N(t)$  em questão, (2.1) não é solúvel em *nenhum* intervalo  $\mathcal{I} \subseteq \mathbf{R}$ .  $\square$

#### Exemplo 2.2

Seja  $N \in C^n(\mathcal{I}, \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$  estritamente triangular inferior (superior) para todo  $t \in \mathcal{I}$ , i.e., com as entradas  $(i, j)$  nulas se  $i \leq j$  ( $i \geq j$ ), então (2.1) é claramente solúvel em  $\mathcal{I}$ . Com efeito, o problema homogêneo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \nu_{21}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{n1}(t) & \nu_{n2}(t) & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

admite apenas a solução trivial  $z = \mathbf{0}$ , já que, da primeira equação, obtém-se  $z_1(t) \equiv 0$ , e então, da segunda,  $z_2(t) \equiv 0$ , e assim sucessivamente. Analogamente, dada  $h \in C^n(\mathcal{I})$ , a equação (2.1) admite exatamente uma solução, dada por  $z_1(t) \equiv h_1(t)$ ,  $z_2(t) \equiv h_2(t) - \nu_{21}(t)\dot{z}_1(t)$ ,  $z_3(t) \equiv h_3(t) - \nu_{31}(t)\dot{z}_1(t) - \nu_{32}(t)\dot{z}_2(t)$ , e assim sucessivamente.

Alternativamente, podemos computar essa solução  $z(t)$  do seguinte modo. Considerando o operador diferencial

$$N(t) \frac{d}{dt} : C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \longrightarrow C^0(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$$

e suas potências

$$\begin{aligned} \left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^2 &: C^2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \longrightarrow C^0(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \\ \left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^3 &: C^3(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \longrightarrow C^0(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \\ &\vdots \\ \left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^n &: C^n(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \longrightarrow C^0(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \end{aligned}$$

não é difícil mostrar (ver Proposição 2.3 abaixo) que

$$\left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^n \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$$

para todo  $\mathbf{u} \in C^n(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ , ou seja,

$$\left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^n = 0$$

Definindo-se então, para  $\mathbf{h} \in C^n(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ ,

$$\mathbf{w}(t) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^k \mathbf{h}(t)$$

tem-se  $\mathbf{w} \in C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  e

$$\begin{aligned} &N(t) \dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{w}(t) = \\ &= \left( N(t) \frac{d}{dt} \right) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^k \mathbf{h}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^k \mathbf{h}(t) \\ &= - \sum_{k=1}^n (-1)^k \left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^k \mathbf{h}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^k \mathbf{h}(t) \\ &= -(-1)^n \left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^n \mathbf{h}(t) + \mathbf{h}(t) \\ &= \mathbf{h}(t) \end{aligned}$$

ou seja,  $\mathbf{w}(t)$  é solução de (2.1) no intervalo  $\mathcal{I}$ . Como já mostrado acima, para  $N(t)$  estritamente triangular a solução é única, de modo que  $\mathbf{w}(t)$  corresponde à solução encontrada anteriormente.  $\square$

Consideremos agora uma aplicação matricial  $A \in C^p(\mathcal{I}, \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$  qualquer, com  $p \geq 1$ , e o operador diferencial associado

$$A(t) \frac{d}{dt} : C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \longrightarrow C^0(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$$

Para  $\mathbf{u} \in C^2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ , tem-se

$$\left( A(t) \frac{d}{dt} \right)^2 \mathbf{u}(t) = A(t)^2 \ddot{\mathbf{u}}(t) + A(t) \dot{A}(t) \dot{\mathbf{u}}(t)$$

ou seja,

$$\left( A(t) \frac{d}{dt} \right)^2 = A(t)^2 \frac{d^2}{dt^2} + A(t) \dot{A}(t) \frac{d}{dt}$$

em  $C^2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ .

Do mesmo modo, para  $\mathbf{u} \in C^3(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ ,

$$\begin{aligned} \left( A(t) \frac{d}{dt} \right)^3 \mathbf{u}(t) &= \left( A(t) \frac{d}{dt} \right) \left[ A(t)^2 \ddot{\mathbf{u}}(t) + A(t) \dot{A}(t) \dot{\mathbf{u}}(t) \right] \\ &= A(t)^3 \ddot{\mathbf{u}}(t) + 2 A(t) A(t) \dot{A}(t) \ddot{\mathbf{u}}(t) + A(t) \dot{A}(t) A(t) \ddot{\mathbf{u}}(t) \\ &\quad + A(t) A(t) \ddot{A}(t) \dot{\mathbf{u}}(t) + A(t) \dot{A}(t) \dot{A}(t) \dot{\mathbf{u}}(t) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \left( A(t) \frac{d}{dt} \right)^3 &= A(t)^3 \frac{d^3}{dt^3} + \left\{ 2 A(t) A(t) \dot{A}(t) + A(t) \dot{A}(t) A(t) \right\} \frac{d^2}{dt^2} \\ &\quad + \left\{ A(t) A(t) \ddot{A}(t) + A(t) \dot{A}(t) \dot{A}(t) \right\} \frac{d}{dt} \end{aligned}$$

em  $C^3(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ .

Analogamente, para cada  $k = 2, 3, \dots, p$ , tem-se

$$\left( A(t) \frac{d}{dt} \right)^k = \sum_{j=1}^k \mathcal{A}_{kj}(t) \frac{d^j}{dt^j}$$

em  $C^k(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ , onde

$$\mathcal{A}_{kj}(t) = A(t) \sum_{j_2, j_3, \dots, j_k=0}^{k-j} \alpha_{j_2, j_3, \dots, j_k}^{[k]} A^{(j_2)}(t) A^{(j_3)}(t) \cdots A^{(j_k)}(t)$$

para  $j = 1, 2, \dots, k$ , sendo  $\alpha_{j_2, j_3, \dots, j_k}^{[k]}$  constantes inteiras.

### Proposição 2.1

Na notação acima, tem-se

$$\left( A(t) \frac{d}{dt} \right)^k = 0 \quad \text{em } C^k(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$$

se e somente se

$$\mathcal{A}_{kj}(t) = 0 \quad \forall t \in \mathcal{I}, \forall j = 1, 2, \dots, k$$

*Prova:* Claramente, a condição  $\mathcal{A}_{kj} = 0$  é suficiente; para mostrar que é também necessária, sejam  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$  um vetor (constante) arbitrário de  $\mathbf{R}^n$  e  $\lambda \in \mathbf{R}$  escalar qualquer. Definindo (para  $t \in \mathcal{I}$ )

$$\mathbf{u}(t) \equiv e^{\lambda t} \mathbf{v}$$

tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \left( A(t) \frac{d}{dt} \right)^k \mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^k \mathcal{A}_{kj}(t) \frac{d^j}{dt^j} [e^{\lambda t} \mathbf{v}] \\ &= e^{\lambda t} \sum_{j=1}^k \lambda^j \mathcal{A}_{kj}(t) \mathbf{v} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^k \lambda^j \mathcal{A}_{kj}(t) \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

para todo  $\lambda \in \mathbf{R}$ , e então

$$\mathcal{A}_{kj}(t) \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

para cada  $j = 1, 2, \dots, k$ . Como  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$  é arbitrário, essa última condição é equivalente a se ter  $\mathcal{A}_{kj}(t) = 0$  para cada  $j = 1, 2, \dots, k$  e  $t \in \mathcal{I}$ , como afirmado.  $\square$

Em particular, se

$$\left( A(t) \frac{d}{dt} \right)^k = 0$$

para algum  $k$ , então  $\mathcal{A}_{kk}(t) = 0$ , ou seja,  $A(t)^k = 0$  para todo  $t$  no intervalo em questão. Temos assim o seguinte resultado:

### Proposição 2.2

Se o operador  $A(t) \frac{d}{dt}$  for nilpotente em um dado intervalo  $\mathcal{I}$ , então  $A(t)$  é matriz nilpotente  $\forall t \in \mathcal{I}$ .

Por outro lado, dada  $N(t)$  matriz nilpotente,  $N(t) \frac{d}{dt}$  não é em geral nilpotente, como se pode ver no Exemplo 2.1 acima.



**Proposição 2.3**

Seja  $N \in C^n(\mathcal{I}, \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$  tal que  $N(t)$  é estritamente triangular inferior (superior) para todo  $t \in \mathcal{I}$ , então

$$\left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^n = 0$$

*Prova:* Tem-se

$$\left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^n = \sum_{j=1}^n \mathcal{N}_{nj}(t) \frac{d^j}{dt^j}$$

onde, para cada  $j = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\mathcal{N}_{nj}(t) = \sum_{j_2, j_3, \dots, j_n=0}^{n-j} \alpha_{j_2, j_3, \dots, j_n}^{[n]} N(t) N^{(j_2)}(t) N^{(j_3)}(t) \dots N^{(j_n)}(t)$$

ou seja,  $\mathcal{N}_{nj}(t)$  é uma soma de produtos de  $n$  matrizes estritamente triangulares inferiores (superiores) de ordem  $n$ . Porém, como é fácil de mostrar por uma computação direta, o produto de duas matrizes  $n \times n$  estritamente triangulares inferiores quaisquer, com respectivamente  $p \geq 0$  e  $q \geq 0$  subdiagonais nulas imediatamente abaixo da diagonal principal, é uma matriz triangular inferior com a diagonal e  $s = \min \{ p + q + 1, n - 1 \}$  subdiagonais abaixo dela nulas. Conclui-se assim:

*O produto de quaisquer  $n$  matrizes  $n \times n$  estritamente triangulares inferiores é nulo.*

Logo, para cada  $t \in \mathcal{I}$ ,  $\mathcal{N}_{nj}(t)$  é uma soma de matrizes nulas, e portanto nula, para cada  $j = 1, 2, \dots, n$ , demonstrando o resultado. A prova no caso de  $N(t)$  ser estritamente triangular superior para todo  $t$  em  $\mathcal{I}$  é inteiramente análoga.  $\square$

Como foi visto no Exemplo 2.2 acima, quando o sistema (2.1) se encontra na forma canônica padrão, ou seja, tendo  $N(t)$  estritamente triangular inferior em todo o intervalo  $\mathcal{I}$ , o problema é solúvel no referido intervalo e possui, para cada  $\mathbf{h} \in C^n(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ , uma única solução em  $\mathcal{I}$ , dada por

$$(2.2) \quad \mathbf{z}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^k \mathbf{h}(t)$$

Mais geralmente, se (2.1) for *analiticamente equivalente* a um sistema em forma canônica  $\tilde{N}(t) \dot{\tilde{\mathbf{z}}}(t) + \tilde{\mathbf{z}}(t) = \tilde{\mathbf{h}}(t)$ , com

$$\tilde{N}(t) = H(t) N(t) K(t) \quad , \quad I = H(t) N(t) K'(t) + H(t) K(t)$$

e  $\tilde{N}(t)$  estritamente triangular inferior,  $H(t)$ ,  $K(t)$  inversíveis para cada  $t \in \mathcal{I}$ , tem-se que, para cada  $\mathbf{h} \in C^n(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ , o problema admite uma única solução, dada por

$$(2.3) \quad z(t) = K(t) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left( H(t) N(t) K(t) \frac{d}{dt} \right)^k [H(t) h(t)]$$

Contudo, existem sistemas (2.1) *solúveis* que não podem ser colocados na forma canônica padrão globalmente no intervalo de interesse, como mostra o exemplo a seguir.

**Exemplo 2.3** (S. Campbell, 1987)

Seja  $\varphi \in C^{2n}([-1, 1])$  tal que  $\varphi^{(j)}(0) = 0$  para todo  $j = 0, 1, 2, \dots, 2n$  e não identicamente nula de tal modo a ser possível obter duas seqüências de pontos  $t_-^m < 0$  e  $t_+^m > 0$  com  $\varphi(t_-^m) \neq 0$ ,  $\varphi(t_+^m) \neq 0$  para todo  $m$  e  $t_-^m \rightarrow 0$ ,  $t_+^m \rightarrow 0$  ao  $m \rightarrow \infty$ . Tomando  $N_-, N_+ \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  nilpotentes (constantes em  $t$ ) e definindo  $N \in C^{2n}([-1, 1], \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$  por

$$N(t) \equiv \begin{cases} \varphi(t) N_- & \text{se } t \leq 0 \\ \varphi(t) N_+ & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

tem-se que (2.1) é solúvel em  $[-1, 1]$  mas não pode ser colocado na forma canônica em nenhuma vizinhança do ponto  $t = 0$  quando os espaços nulos de  $N_-$  e  $N_+$  se interceptarem somente no zero, i.e.,

$$\text{Ker}(N_-) \cap \text{Ker}(N_+) = \{ \mathbf{0} \}$$

Com efeito, é fácil ver que  $\left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^n = 0$  nesse caso, de modo que

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^k h(t)$$

é solução do problema para  $h \in C^n([-1, 1])$ . Por outro lado, essa é a única solução existente, já que o problema homogêneo admite apenas a solução trivial  $z(t) = \mathbf{0}$ , como pode ser demonstrado facilmente em  $[-1, 0]$  e  $[0, 1]$  separadamente, usando-se a forma simples que  $N(t)$  assume em cada intervalo.

Para mostrar que o problema não pode ser colocado na forma canônica quando os núcleos de  $N_-$  e  $N_+$  se interceptam apenas trivialmente, suponha que seja possível encontrar  $H, K \in C^0([-\delta, \delta])$  tais que  $\tilde{N}(t) \equiv H(t) N(t) K(t)$  seja estritamente triangular inferior para cada  $-\delta \leq t \leq \delta$ : em particular,

$$H(t) N(t) K(t) e_n = \mathbf{0}$$

para todo  $|t| \leq \delta$ , onde  $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$ . Multiplicando-se por  $H(t)^{-1}$  e tomando  $t = t_{\pm}^m$ , obtém-se

$$N_{\pm} K(t_{\pm}^m) e_n = \mathbf{0}$$

visto que  $N(t_{\pm}^m) = \varphi(t_{\pm}^m) N_{\pm}$  com  $\varphi(t_{\pm}^m) \neq 0$ . Tomando o limite ao  $m \rightarrow \infty$ , resulta

$$N_- K(0) \mathbf{e}_n = \mathbf{0} \text{ , } N_+ K(0) \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

de modo que  $\text{Ker}(N_-) \cap \text{Ker}(N_+)$  contém o vetor (não nulo)  $K(0) \mathbf{e}_n$ , contrariamente à hipótese.  $\square$

Na Proposição 2.3 acima, observou-se que (2.1) é solúvel num intervalo em que  $N(t)$  seja estritamente triangular inferior para todo  $t$ , e analogamente se for triangular superior, tendo-se uma única solução no intervalo, dada por (2.2). Mais geralmente, é suficiente assumir que  $N(t)$  seja estritamente *triangular* para todo  $t$ , como mostra o resultado abaixo.

#### Proposição 2.4

Seja  $N \in C^n(\mathcal{I}, \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$  tal que  $N(t)$  é estritamente triangular para cada  $t \in \mathcal{I}$ , então

$$\left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^n = 0$$

e, para cada  $\mathbf{h} \in C^n(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ , o problema (2.1) admite exatamente uma solução no intervalo  $\mathcal{I}$ , que é dada por (2.2).

*Prova:* Observamos inicialmente que, dado qualquer intervalo  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ , existe sub-intervalo  $\tilde{\mathcal{J}} \subseteq \mathcal{J}$  tal que  $\left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^n = 0$  em  $C^n(\tilde{\mathcal{J}}, \mathbf{R}^n)$ . Com efeito, se existir  $t_0$  no interior de  $\mathcal{J}$  tal que alguma entrada da matriz  $N(t_0)$  seja diferente de zero, então (por continuidade de  $N(t)$ ) existe um intervalo aberto  $\tilde{\mathcal{J}} \subseteq \mathcal{J}$  contendo  $t_0$  tal que a referida entrada nunca se anula, de modo que em todo o  $\tilde{\mathcal{J}}$  tem-se que  $N(t)$  é de um tipo apenas, ou seja, ou sempre triangular inferior ou sempre triangular superior naquele intervalo. Em particular, pela Proposição 2.3, tem-se  $\left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^n = 0$  em  $\tilde{\mathcal{J}}$ . Por outro lado, se não existisse um tal  $t_0$  em  $\mathcal{J}$ , teríamos  $N(t) = 0$  para todo  $t$  em  $\mathcal{J}$ , e o resultado seria verdadeiro em  $\tilde{\mathcal{J}} = \mathcal{J}$ . Escrevendo-se então (em  $C^n(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ )

$$\left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^n = \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{N}_{nj}(t) \frac{d^j}{dt^j}$$

temos, pela Proposição 2.1,  $\mathcal{N}_{nj}(t) = 0$  para todo  $t \in \tilde{\mathcal{J}}$  e  $j = 1, 2, \dots, n-1$ . Como a união de todos tais intervalos  $\tilde{\mathcal{J}}$  é densa em  $\mathcal{I}$ , segue então (por continuidade) que, para cada  $j$ ,  $\mathcal{N}_{nj}(t) = 0$  para todo  $t$  em  $\mathcal{I}$ , de modo que  $\left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^n = 0$  em  $C^n(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ , como afirmado. Em particular, dada  $\mathbf{h} \in C^n(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  tem-se que

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^k \mathbf{h}(t)$$

é solução da equação (2.1) no intervalo  $\mathcal{I}$ . Finalmente, para mostrarmos que é única, ou seja, que a equação homogênea admite apenas a solução trivial  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ ,

observamos que, pela Proposição 2.3,  $z = 0$  em cada subintervalo  $\tilde{J}$  construído acima. Novamente, como a união desses intervalos é densa em  $\mathcal{I}$ , obtemos por continuidade que  $z = 0$  em todo o  $\mathcal{I}$ , como afirmado.  $\square$

Ainda mais geralmente, tem-se o seguinte resultado.

**Teorema 2.1**

Seja  $N \in C^{k-1}(\mathcal{I}, \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$  tal que  $\left(N(t) \frac{d}{dt}\right)^k = 0$  em  $C^k(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ , então, para cada  $h \in C^k(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  a equação (2.1) possui uma única solução, que é dada por

$$z(t) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left(N(t) \frac{d}{dt}\right)^j h(t)$$

*Prova:* Como já foi feito acima, uma computação direta mostra que  $z(t)$  assim definida é solução do problema (2.1) no intervalo  $\mathcal{I}$ . Para mostrar a unicidade, seja  $\theta \in C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  solução da equação homogênea, ou seja,

$$N(t) \dot{\theta}(t) + \theta(t) = 0$$

para todo  $t \in \mathcal{I}$ . Introduzindo o operador  $\mathbf{P} : C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow C^0(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  definido por

$$\mathbf{P}[\psi](t) \equiv -\frac{d}{dt} (N(t)^T \psi(t)) = -N(t)^T \dot{\psi}(t) - \dot{N}(t)^T \psi(t)$$

tem-se

$$(*) \quad \int_{\mathcal{I}} \langle \theta(t), \mathbf{P}^k[\varphi](t) \rangle dt = 0$$

para cada  $\varphi \in C^k(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  com suporte compacto contido no interior do intervalo  $\mathcal{I}$ , ou seja,  $\varphi \in C_0^k(\overset{\circ}{\mathcal{I}}, \mathbf{R}^n)$ . Na expressão acima,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno canônico de  $\mathbf{R}^n$ ,

$$\langle u(t), v(t) \rangle = \sum_{i=1}^n u_i(t) v_i(t)$$

e  $N(t)^T$  denota a transposta de  $N(t)$ .

Para mostrar (\*), observamos inicialmente que, para quaisquer  $u \in C^k(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  e  $\varphi \in C_0^k(\overset{\circ}{\mathcal{I}}, \mathbf{R}^n)$ , tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{I}} \left\langle \left(N(t) \frac{d}{dt}\right)^k u(t), \varphi(t) \right\rangle dt = \\ \int_{\mathcal{I}} \left\langle \left(N(t) \frac{d}{dt}\right)^{k-1} u(t), \mathbf{P}[\varphi](t) \right\rangle dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{I}} \left\langle \left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^{k-2} \mathbf{u}(t), \mathbf{P}^2[\varphi](t) \right\rangle dt = \dots \\
&\dots = \int_{\mathcal{I}} \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{P}^k[\varphi](t) \rangle dt
\end{aligned}$$

Como  $\left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^k = 0$  em  $C^k(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ , segue que

$$(**) \quad \int_{\mathcal{I}} \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{P}^k[\varphi](t) \rangle dt = 0$$

para  $\mathbf{u} \in C^k(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ ,  $\varphi \in C_0^k(\overset{\circ}{\mathcal{I}}, \mathbf{R}^n)$  arbitrárias.

Suponha agora  $\mathbf{u} \in C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ : dada  $\varphi \in C_0^k(\overset{\circ}{\mathcal{I}}, \mathbf{R}^n)$ , seja  $[a, b]$  compacto  $\subseteq \mathcal{I}$  contendo o suporte de  $\varphi$ . Tomando uma seqüência  $(\mathbf{u}_\ell)$  em  $C^k(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  com

$$\mathbf{u}_\ell(t) \rightarrow \mathbf{u}(t)$$

uniformemente em  $a \leq t \leq b$  ao  $\ell \rightarrow \infty$ , tem-se

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathcal{I}} \langle \mathbf{u}_\ell(t), \mathbf{P}^k[\varphi](t) \rangle dt = \int_a^b \langle \mathbf{u}_\ell(t), \mathbf{P}^k[\varphi](t) \rangle dt \\
&\xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} \int_a^b \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{P}^k[\varphi](t) \rangle dt = \int_{\mathcal{I}} \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{P}^k[\varphi](t) \rangle dt
\end{aligned}$$

de modo que (\*\*) é válida para quaisquer  $\mathbf{u} \in C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ ,  $\varphi \in C_0^k(\overset{\circ}{\mathcal{I}}, \mathbf{R}^n)$ . Em particular, tomando  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\theta}$  obtemos (\*).

Como  $\boldsymbol{\theta}(t)$  satisfaz (2.1) em  $\mathcal{I}$ , obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{I}} \langle \boldsymbol{\theta}(t), \mathbf{P}^k[\varphi](t) \rangle dt &= \int_{\mathcal{I}} \left\langle N(t) \frac{d}{dt} \boldsymbol{\theta}(t), \mathbf{P}^{k-1}[\varphi](t) \right\rangle dt \\
&= - \int_{\mathcal{I}} \langle \boldsymbol{\theta}(t), \mathbf{P}^{k-1}[\varphi](t) \rangle dt
\end{aligned}$$

e então, usando (\*),

$$\int_{\mathcal{I}} \langle \boldsymbol{\theta}(t), \mathbf{P}^{k-1}[\varphi](t) \rangle dt = 0$$

Repetindo o argumento, obtemos

$$\int_{\mathcal{I}} \langle \boldsymbol{\theta}(t), \mathbf{P}^{k-2}[\varphi](t) \rangle dt = 0$$

e, aplicando outra vez,

$$\int_{\mathcal{I}} \langle \theta(t), \mathbf{P}^{k-3}[\varphi](t) \rangle dt = 0$$

e assim sucessivamente, obtendo-se afinal

$$\int_{\mathcal{I}} \langle \theta(t), \varphi(t) \rangle dt = 0$$

Como  $\varphi \in C_0^k(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  é arbitrária, segue então que  $\theta(t) = \mathbf{0}$  para todo  $t$  em  $\mathcal{I}$ , como afirmado.  $\square$

Em particular, quando  $N(t) \frac{d}{dt}$  é nilpotente, o problema (2.1) é solúvel, embora não se possa em geral colocá-lo na forma canônica padrão, como ficou mostrado no Exemplo 2.3 acima. Contudo, um resultado derivado por Petzold e Gear [14] mostra que, *para um sistema algébrico-diferencial que seja solúvel em um dado intervalo  $\mathcal{I}$ , com coeficientes suaves ( $C^n(\mathcal{I})$ ), é sempre possível decompor o intervalo  $\mathcal{I}$  numa coleção enumerável de subintervalos abertos  $\mathcal{I}_i$  com  $\cup \mathcal{I}_i$  denso em  $\mathcal{I}$  e tal que o problema pode ser colocado na forma canônica em cada  $\mathcal{I}_i$  separadamente.* Esse resultado permite a derivação de várias propriedades importantes, conforme ilustramos a seguir. Por exemplo, em todos os casos tratados acima em que (2.1) se mostrou solúvel, o problema admitia uma *única* solução no intervalo dado. Essa propriedade na verdade vale para *todos* os problemas da forma (2.1) que forem solúveis, conforme mostra o resultado seguinte.

### **Teorema 2.2**

*Seja  $N \in C^n(\mathcal{I}, \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$  nilpotente em cada ponto do intervalo  $\mathcal{I}$ , então*

$$N(t) \dot{z}(t) + z(t) = h(t) \text{ é solúvel em } \mathcal{I}$$

*se e somente se*

*para cada  $h \in C^n(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ , existe exatamente uma solução  $z \in C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ .*

*Prova:* Basta mostrar que, sendo (2.1) um problema solúvel em  $\mathcal{I}$ , existe apenas uma solução tão somente, ou seja, que o problema homogêneo  $N(t)\dot{z}(t) + z(t) = \mathbf{0}$  admite apenas a solução trivial  $z(t) = \mathbf{0} \forall t \in \mathcal{I}$ .

Pelo resultado de Petzold e Gear [14], existem subintervalos abertos  $\mathcal{I}_i \subseteq \mathcal{I}$  tais que  $\mathcal{I} = \cup \mathcal{I}_i$  é denso em  $\mathcal{I}$  e, em cada  $\mathcal{I}_i$ , o problema  $N(t)\dot{z}(t) + z(t) = \mathbf{0}$  pode ser colocado na forma canônica,

$$\tilde{N}(t) \dot{\tilde{z}}(t) + \tilde{z}(t) = \mathbf{0}$$

onde  $\tilde{N}(t)$  é matriz nilpotente triangular inferior para todo  $t$  em  $\mathcal{I}_i$ ,  $\mathbf{z}(t) = K(t) \tilde{\mathbf{z}}(t)$ ,  $\tilde{N}(t) = H(t) N(t) K(t)$ , e  $H(t), K(t)$  são inversíveis em  $\mathcal{I}_i$ . Em particular, como é fácil de ver pela forma triangular de  $\tilde{N}(t)$ , tem-se de ter  $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$  em  $\mathcal{I}_i$ , de onde segue que  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$  em  $\mathcal{I}_i$ . Portanto, tem-se  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{0}$  para todo  $t$  em  $\cup \mathcal{I}_i$ , e então, sendo este conjunto denso em  $\mathcal{I}$ , em todo o intervalo  $\mathcal{I}$ , concluindo o argumento.  $\square$

Quando  $N(t) \frac{d}{dt}$  é nilpotente em  $\mathcal{I}$ , com, digamos, nilpotência  $k$ , obtivemos anteriormente que a equação (2.1) admitia, para cada  $\mathbf{h} \in C^k(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ , exatamente uma solução, dada por

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathcal{S}_j(t) \frac{d^j}{dt^j} \mathbf{h}(t)$$

onde  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_{k-1} \in C^1(\mathcal{I}, \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$  e, de acordo com (2.2),

$$\sum_{j=0}^{k-1} \mathcal{S}_j(t) \frac{d^j}{dt^j} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^j$$

Caso se tenha  $k > n$ , a expressão acima envolve derivadas de ordem  $n, n+1, \dots, k-1$  de  $\mathbf{h}(t)$ . Contudo, mostraremos a seguir que, nesse caso, as matrizes  $\mathcal{S}_n(t), \mathcal{S}_{n+1}(t), \dots, \mathcal{S}_{k-1}(t)$  são todas nulas  $\forall t \in \mathcal{I}$ , de modo que  $\mathbf{z}(t)$  depende apenas de  $\mathbf{h}(t)$  e suas  $n-1$  primeiras derivadas  $\mathbf{h}'(t), \mathbf{h}''(t), \dots, \mathbf{h}^{(n-1)}(t)$ .

### Teorema 2.3

Seja  $N \in C^k(\mathcal{I}, \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$  tal que  $\left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^k = 0$  em  $C^k(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ , então, sendo  $k_* = \min\{k, n\}$ , existem matrizes  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_{k_*-1} \in C^1(\mathcal{I}, \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$  com  $\mathcal{S}_0(t), \mathcal{S}_1(t), \dots, \mathcal{S}_{k_*-1}(t)$  dependendo apenas de  $N(t), N'(t), N''(t), \dots, N^{(k-1)}(t)$  tais que, para cada  $\mathbf{h}$  em  $C^{k_*}(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ , a (única) solução de

$$N(t) \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{z}(t) = \mathbf{h}(t)$$

é dada por

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{j=0}^{k_*-1} \mathcal{S}_j(t) \mathbf{h}^{(j)}(t)$$

Ademais,  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_{k_*-1} \in C^{m-k_*+1}(\mathcal{I}, \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$  quando  $N \in C^m(\mathcal{I}, \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$ ,  $m \geq k$ .

*Prova:* Se  $k \leq n$  o resultado é imediato do Teorema 2.1. Supondo então  $k > n$ , obtemos, para cada  $\mathbf{h} \in C^k(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^j \mathbf{h}(t) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \mathcal{S}_j(t) \mathbf{h}^{(j)}(t) \end{aligned}$$

Pelo resultado de Petzold e Gear [14], existem subintervalos abertos  $\mathcal{I}_i \subseteq \mathcal{I}$  com  $\cup \mathcal{I}_i$  denso em  $\mathcal{I}$  tais que em cada  $\mathcal{I}_i$  o problema (2.1) pode ser colocado na forma canônica,

$$\tilde{N}_i(t) \dot{\tilde{z}}_i(t) + \tilde{z}_i(t) = \tilde{h}_i(t)$$

onde  $\tilde{N}_i(t)$  é matriz nilpotente triangular inferior para todo  $t$  em  $\mathcal{I}_i$ , tendo-se  $\tilde{N}_i(t) = H_i(t) N(t) K_i(t)$ ,  $z(t) = K_i(t) \tilde{z}_i(t)$ , com  $H_i(t)$  e  $K_i(t)$  inversíveis.

Seja  $t_0 \in \cup \mathcal{I}_i$  qualquer, fixado no que segue, e seja  $i_0$  tal que  $t_0 \in \mathcal{I}_{i_0}$ . Dado  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$  arbitrário, tomemos  $\mathbf{h} \in C^\infty(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  definida por

$$\mathbf{h}(t) = (t - t_0)^{k-1} \mathbf{v}$$

e seja  $\mathbf{z} \in C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  solução de  $N(t) \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{z}(t) = \mathbf{h}(t)$  no intervalo  $\mathcal{I}$ . Em  $\mathcal{I}_{i_0}$  tem-se, por (2.3),

$$\mathbf{z}(t) = K_{i_0}(t) \sum_{j=0}^{n-1} \left( H_{i_0}(t) N(t) K_{i_0}(t) \frac{d}{dt} \right)^j [H_{i_0}(t) \mathbf{h}(t)]$$

de modo que  $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{0}$ .

Por outro lado, como

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathcal{S}_j(t) \frac{d^j}{dt^j} \mathbf{h}(t)$$

para todo  $t$ , obtém-se

$$\mathbf{z}(t_0) = (k-1)! \mathcal{S}_{k-1}(t_0) \mathbf{v}$$

Logo,  $\mathcal{S}_{k-1}(t_0) \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , e, como  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$  é arbitrário, segue que  $\mathcal{S}_{k-1}(t_0) = 0$ . Como  $t_0 \in \cup \mathcal{I}_i$  é arbitrário, tem-se então que  $\mathcal{S}_{k-1}(t) = 0$  para todo  $t \in \cup \mathcal{I}_i$ ; sendo esse conjunto denso no intervalo  $\mathcal{I}$ , segue então, por continuidade de  $\mathcal{S}_{k-1}(t)$ , que

$$\mathcal{S}_{k-1}(t) = 0$$

para todo  $t \in \mathcal{I}$ . Em particular, tem-se

$$\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^j = \sum_{j=0}^{k-2} \mathcal{S}_j(t) \frac{d^j}{dt^j}$$

Se  $k \leq n+1$ , o resultado está demonstrado; se  $k \geq n+2$ , repetimos o argumento acima tomando

$$\mathbf{h}(t) = (t - t_0)^{k-2} \mathbf{v}$$

onde  $t_0 \in \cup \mathcal{I}_i$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$  são arbitrários, obtendo-se nesse caso

$$\mathcal{S}_{k-2}(t) = 0$$



para todo  $t \in \mathcal{I}$ , e assim sucessivamente, obtendo-se finalmente

$$\mathcal{S}_{k-1}(t) = \mathcal{S}_{k-2}(t) = \cdots = \mathcal{S}_n(t) = 0$$

para todo  $t \in \mathcal{I}$ . Em particular, o operador solução de (2.1) tem a forma

$$\mathbf{S}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^j = \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{S}_j(t) \frac{d^j}{dt^j}$$

como afirmado. □

Como foi visto no Exemplo 2.1 acima, quando  $N(t) \frac{d}{dt}$  não é nilpotente, (2.1) pode não ser solúvel. Porém, não ser um operador nilpotente não é uma condição que caracteriza a insolubilidade da equação (2.1), conforme mostra o seguinte exemplo.

#### Exemplo 2.4

Considere o sistema  $N(t) \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}(t) = \mathbf{h}(t)$  onde

$$N(t) = \begin{bmatrix} 1 & -(1+t^2)^{-1} \\ 1+t^2 & -1 \end{bmatrix}$$

Observamos que  $N(t)^2 = 0$  para todo  $t$ , e então, para cada  $j \geq 1$ ,

$$\left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^j = N(t) \dot{N}(t)^{j-1} \frac{d}{dt}$$

Como

$$\dot{N}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2t(1+t^2)^{-2} \\ 2t & 0 \end{bmatrix} = 2t \begin{bmatrix} 0 & (1+t^2)^{-2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

obtem-se, para cada  $k$ ,

$$\dot{N}(t)^{2k} = \left( \frac{2t}{1+t^2} \right)^{2k} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\dot{N}(t)^{2k+1} = 2t \left( \frac{2t}{1+t^2} \right)^{2k} \begin{bmatrix} 0 & (1+t^2)^{-2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^{2k+1} = N(t) \dot{N}(t)^{2k} \frac{d}{dt} = \left( \frac{2t}{1+t^2} \right)^{2k} N(t) \frac{d}{dt}$$

e

$$\begin{aligned} & \left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^{2k} = N(t) \dot{N}(t)^{2k-1} \frac{d}{dt} = \\ & = 2t \left( \frac{2t}{1+t^2} \right)^{2k-2} \begin{bmatrix} 1 & -(1+t^2)^{-1} \\ 1+t^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -(1+t^2)^{-2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \\ & = \left( \frac{2t}{1+t^2} \right)^{2k-1} \begin{bmatrix} -1 & 1+t^2 \\ -(1+t^2) & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \end{aligned}$$

Em particular,  $N(t) \frac{d}{dt}$  não é um operador nilpotente, e o operador

$$\mathcal{S}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^n$$

está bem definido em  $C^1(]-1, 1[, \mathbf{R}^2)$ , tendo-se

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( N(t) \frac{d}{dt} \right)^n \mathbf{h}(t) = \\ & = \mathbf{h}(t) - \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{2t}{1+t^2} \right)^{2k} N(t) \dot{\mathbf{h}}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2t}{1+t^2} \right)^{2k-1} B(t) \dot{\mathbf{h}}(t) \end{aligned}$$

para cada  $t$  em  $]-1, 1[$  e  $\mathbf{h} \in C^1(]-1, 1[, \mathbf{R}^2)$ , onde

$$B(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1+t^2 \\ -(1+t^2) & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, para  $|t| < 1$ ,

$$\mathcal{S}(t) \mathbf{h}(t) = \mathbf{h}(t) - \left( \frac{1+t^2}{1-t^2} \right)^2 N(t) \dot{\mathbf{h}}(t) + \frac{2t(1+t^2)}{(1-t^2)^2} B(t) \dot{\mathbf{h}}(t)$$

ou seja,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{h}(t) + \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2} \begin{bmatrix} -(1+t)^2 & 1+2t(1+t^2) \\ -(1+t)^2(1+t^2) & (1+t)^2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{h}}(t)$$

Em particular, (2.1) é solúvel em  $]-1, 1[$ . □

### §3.3 – Matrizes de funções

Nesta seção derivaremos alguns resultados básicos sobre vetores e matrizes de funções de uma variável que serão utilizados no estudo sobre a estrutura de equações algébrico-diferenciais apresentado na seção §3.4 a seguir. Mais exatamente, pretendemos demonstrar os seguintes resultados:

#### Teorema 3.1

Sejam  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r \in C^0(\mathcal{I}, \mathbb{R}^n)$  tais que, para cada  $t \in \mathcal{I}$ ,  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_r(t)$  são linearmente independentes em  $\mathbb{R}^n$ , então existem aplicações infinitamente diferenciáveis  $\tilde{\varphi}_{r+1}, \tilde{\varphi}_{r+2}, \dots, \tilde{\varphi}_n \in C^\infty(\mathcal{I}, \mathbb{R}^n)$  tais que, para cada  $t \in \mathcal{I}$ ,

$$\{ \varphi_1(t), \dots, \varphi_r(t), \tilde{\varphi}_{r+1}(t), \tilde{\varphi}_n(t) \}$$

é uma base para  $\mathbb{R}^n$ .

Em termos equivalentes: dada uma matriz  $\Phi(t)$  de dimensão  $n \times r$ , contínua em  $\mathcal{I}$  e de posto máximo  $r$  para todo  $t \in \mathcal{I}$ , onde  $1 \leq r \leq n - 1$ ,

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1r}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nr}(t) \end{bmatrix}$$

existe matriz  $\tilde{\Phi}(t)$  infinitamente diferenciável em  $\mathcal{I}$ , de dimensão  $n \times (n - r)$ ,

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_{1r+1}(t) & \tilde{\varphi}_{1r+2}(t) & \cdots & \tilde{\varphi}_{1n}(t) \\ \tilde{\varphi}_{2r+1}(t) & \tilde{\varphi}_{2r+2}(t) & \cdots & \tilde{\varphi}_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\varphi}_{nr+1}(t) & \tilde{\varphi}_{nr+2}(t) & \cdots & \tilde{\varphi}_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

tal que a matriz  $[\Phi(t) | \tilde{\Phi}(t)]$  obtida justapondo-se  $\Phi(t)$  e  $\tilde{\Phi}(t)$ , i.e.,

$$[\Phi(t) | \tilde{\Phi}(t)] = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1r}(t) & \tilde{\varphi}_{1r+1}(t) & \tilde{\varphi}_{1r+2}(t) & \cdots & \tilde{\varphi}_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{2r}(t) & \tilde{\varphi}_{2r+1}(t) & \tilde{\varphi}_{2r+2}(t) & \cdots & \tilde{\varphi}_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nr}(t) & \tilde{\varphi}_{nr+1}(t) & \tilde{\varphi}_{nr+2}(t) & \cdots & \tilde{\varphi}_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

é inversível para cada  $t$  em  $\mathcal{I}$ .

#### Teorema 3.2

Dada  $A(t)$  matriz de ordem  $r \times n$  ( $1 \leq r \leq n - 1$ ) com posto máximo  $r$  para todo  $t \in \mathcal{I}$  e de classe  $C^m(\mathcal{I})$ ,  $0 \leq m \leq \infty$ , então existe matriz  $Q(t)$  de ordem  $n \times n$  inversível para cada  $t \in \mathcal{I}$  e de classe  $C^m(\mathcal{I})$  tal que

$$A(t)Q(t) = [I_r | \mathbf{0}]$$

onde  $I_r$  denota a matriz identidade  $r \times r$  e  $\bigcirc$  denota a matriz nula de dimensão  $r \times (n - r)$ , ou seja,

$$A(t)Q(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos derivar o Teorema 3.1 a partir do Teorema 3.2 do seguinte modo. Dados  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_r(t)$  linearmente independentes em  $\mathbf{R}^n$  para cada  $t \in \mathcal{I}$ , seja  $A(t)$  a matriz  $r \times n$  formada tomando-se os vetores dados  $\varphi_i(t)$  como suas linhas (onde  $i = 1, 2, \dots, r$ ). Pelo Teorema 3.2, existe matriz  $Q(t)$  contínua e inversível para cada  $t \in \mathcal{I}$ , de dimensão  $n \times n$ , tal que

$$A(t)Q(t) = [I_r | \bigcirc]$$

Em particular,  $A(t)$  coincide com as  $r$  primeiras linhas da matriz inversa  $Q(t)^{-1}$ , de modo que as últimas  $n - r$  linhas de  $Q(t)^{-1}$  definem vetores com as propriedades pedidas, exceto (possivelmente) pela regularidade. Sendo, porém, contínuas, podem ser aproximadas arbitrariamente sobre partes compactas do intervalo  $\mathcal{I}$  por vetores infinitamente diferenciáveis, de onde se pode obter o resultado.  $\square$

Reciprocamente, pode-se também derivar o Teorema 3.2 a partir do Teorema 3.1, observando que as  $r$  linhas da matriz  $A(t)$  dada definem, para cada  $t \in \mathcal{I}$ ,  $r$  vetores linearmente independentes. De acordo com o Teorema 3.1, é possível então tomar uma matriz  $(n - r) \times n$  de classe  $C^\infty(\mathcal{I})$ , digamos  $\tilde{A}(t)$ , tal que a matriz formada acrescentando-se as  $n - r$  linhas de  $\tilde{A}(t)$  às  $r$  linhas de  $A(t)$ ,

$$\begin{bmatrix} A(t) \\ \hline \tilde{A}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}(t) & a_{r2}(t) & \cdots & a_{rn}(t) \\ \hline \tilde{a}_{11}(t) & \tilde{a}_{12}(t) & \cdots & \tilde{a}_{1n}(t) \\ \tilde{a}_{21}(t) & \tilde{a}_{22}(t) & \cdots & \tilde{a}_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n-r,1}(t) & \tilde{a}_{n-r,2}(t) & \cdots & \tilde{a}_{n-r,n}(t) \end{bmatrix}$$

é inversível para cada  $t \in \mathcal{I}$ , e tão regular quanto  $A(t)$ , ou seja, de classe  $C^m(\mathcal{I})$ . Claramente, basta então que se tome

$$Q(t) = \begin{bmatrix} A(t) \\ \hline \tilde{A}(t) \end{bmatrix}^{-1}$$

Alternativamente, podemos derivar o Teorema 3.2 a partir de um caso *particular* do Teorema 3.1, via o seguinte processo que constrói a matriz pedida  $Q(t)$  numa seqüência finita de etapas. Suponha que se tenha algum algoritmo para, dado qualquer vetor não nulo  $\mathbf{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t))^T$  de classe  $C^m(\mathcal{I})$ , construir  $n - 1$  vetores de classe  $C^m(\mathcal{I})$  de modo a formar uma base de  $\mathbf{R}^n$  para cada  $t \in \mathcal{I}$ . Em outros termos, sabemos construir uma matriz  $n \times n$  inversível  $P(t)$ , tão regular quanto o vetor  $\mathbf{a}(t)$  dado, tendo  $\mathbf{a}(t)$  como primeira coluna. Por exemplo, se  $n = 2$ , podemos tomar

$$P(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) & -a_2(t) \\ a_2(t) & a_1(t) \end{bmatrix}$$

enquanto, se  $n = 3$ ,

$$P(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) & -a_2(t) & -2a_3(t) \\ a_2(t) & a_3(t) & -a_1(t) \\ a_3(t) & a_1(t) & a_2(t) \end{bmatrix}$$

e, no caso  $n = 4$ ,

$$P(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) & -a_2(t) & -a_3(t) & -a_4(t) \\ a_2(t) & a_1(t) & a_4(t) & -a_3(t) \\ a_3(t) & -a_4(t) & a_1(t) & a_2(t) \\ a_4(t) & a_3(t) & -a_2(t) & a_1(t) \end{bmatrix}$$

Seja então

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) & a_2(t) & \cdots & a_r(t) & a_{r+1}(t) & a_{r+2}(t) & \cdots & a_n(t) \\ * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

uma matriz dada de classe  $C^m(\mathcal{I})$ , dimensão  $r \times n$  e posto máximo  $r$  para todo  $t \in \mathcal{I}$ . Tomando  $P_1 \in C^m(\mathcal{I}, \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$  inversível da forma

$$P_1(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ a_2(t) & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_r(t) & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ a_{r+1}(t) & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n(t) & * & \cdots & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

tem-se

$$A(t)P_1(t) = \begin{bmatrix} \sigma_1(t) & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

onde  $\sigma_1(t) = a_1(t)^2 + \dots + a_n(t)^2 > 0$  para todo  $t \in \mathcal{I}$ : logo, podemos utilizar a primeira coluna da matriz transformada  $A(t)P_1(t)$  para eliminar os elementos da primeira linha nas outras colunas desta matriz, construindo assim  $Q_1(t)$   $n \times n$  inversível e de classe  $C^m(\mathcal{I})$ , com a forma

$$Q_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

tal que

$$A(t)P_1(t)Q_1(t) = \begin{bmatrix} \sigma_1(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \tilde{a}_2(t) & \tilde{a}_3(t) & \cdots & \tilde{a}_r(t) & \tilde{a}_{r+1}(t) & \cdots & \tilde{a}_n(t) \\ * & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

Procedendo analogamente com a submatriz  $(r-1) \times (n-1)$  da matriz acima formada pelas linhas  $2, 3, \dots, r$  e colunas  $2, 3, \dots, n$ , que tem posto máximo  $r-1$ , tomamos uma matriz  $n \times n$  inversível de classe  $C^m(\mathcal{I}, \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$  da forma

$$P_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{a}_2(t) & * & \cdots & * \\ 0 & \tilde{a}_3(t) & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_n(t) & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

de modo que, multiplicando  $A(t)P_1(t)Q_1(t)$  à direita por  $P_2(t)$ , obtemos

$$A(t)P_1(t)Q_1(t)P_2(t) = \begin{bmatrix} \sigma_1(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \sigma_2(t) & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

Como  $\sigma_2(t) = \tilde{a}_2(t)^2 + \dots + \tilde{a}_n(t)^2 > 0$  para todo  $t \in \mathcal{I}$ , podemos utilizar a segunda coluna da matriz obtida acima para anular os elementos da segunda linha nas demais colunas. Sendo  $Q_2(t)$  a matriz elementar  $n \times n$  que realiza essa operação,

$$Q_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

tem-se  $Q_2 \in C^m(\mathcal{I}, \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$  e

$$A(t)P_1(t)Q_1(t)P_2(t)Q_2(t) = \begin{bmatrix} \sigma_1(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

Na próxima etapa, procedemos analogamente com a submatriz  $(r-2) \times (n-2)$  da matriz acima formada pelas linhas  $3, 4, \dots, r$  e colunas  $3, 4, \dots, n$ , de posto máximo  $r-2$ , e assim sucessivamente, obtendo-se afinal, após  $r$  etapas,

$$A(t)G(t) = \begin{bmatrix} \sigma_1(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3(t) & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_r(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  são funções de classe  $C^m(\mathcal{I}, \mathbf{R})$  positivas em todo o intervalo  $\mathcal{I}$ . Resta então multiplicar  $A(t)G(t)$  à direita pela matriz

$$H(t) = \begin{bmatrix} \sigma_1(t)^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2(t)^{-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r(t)^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ficando assim demonstrado o Teorema 3.2 acima, com  $Q(t) = G(t)H(t)$ .  $\square$

Por um raciocínio análogo, ou simplesmente tomando-se a transposta e aplicando o Teorema 3.2, pode-se obter a seguinte versão equivalente deste resultado:

**Teorema 3.3**

Dada  $A(t)$  matriz de ordem  $n \times r$  ( $1 \leq r \leq n - 1$ ) com posto máximo  $r$  para todo  $t \in \mathcal{I}$  e de classe  $C^m(\mathcal{I})$ ,  $0 \leq m \leq \infty$ , então existe matriz  $P(t)$  de ordem  $n \times n$  inversível para cada  $t \in \mathcal{I}$  e de classe  $C^m(\mathcal{I})$  tal que

$$P(t)A(t) = \begin{bmatrix} I_r \\ \text{---} \\ \text{O} \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$P(t)A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, a demonstração do Teorema 3.1 será feita a partir de uma seqüência de resultados técnicos apresentados no Apêndice B. Um dos passos fundamentais consiste em mostrar o seguinte resultado.

**Proposição 3.1**

Sendo  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \in C^m([a, b], \mathbf{R}^n)$ ,  $0 \leq m \leq \infty$ ,  $1 \leq r \leq n - 1$ , tais que, para cada  $t \in [a, b]$ ,  $\{\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t)\}$  é um conjunto de vetores ortonormais, então existem aplicações  $\tilde{\mathbf{a}}_{r+1}, \tilde{\mathbf{a}}_{r+2}, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_n \in C^m([a, b], \mathbf{R}^n)$  tais que, para cada  $t \in [a, b]$ ,

$$\{\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t), \tilde{\mathbf{a}}_{r+1}(t), \tilde{\mathbf{a}}_{r+2}(t), \dots, \tilde{\mathbf{a}}_n(t)\}$$

é uma base ortonormal para  $\mathbf{R}^n$ .

Em termos equivalentes, dadas  $r$  colunas  $\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t) \in \mathbf{R}^n$  ortonormais de classe  $C^m([a, b])$ , existe uma matriz  $n \times n$  ortogonal  $\Phi(t)$  de classe  $C^m([a, b])$  tendo as  $r$  colunas dadas. Ademais, como é mostrado no Apêndice B, esse resultado pode ser estendido a intervalos  $\mathcal{I} \subseteq \mathbf{R}$  arbitrários, não necessariamente compactos (ver Proposição B-7).



### §3.4 – Sistemas Solúveis

Nesta seção apresentaremos alguns resultados sobre a estrutura de sistemas algébricos diferenciais

$$(4.1) \quad A(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + B(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$$

solúveis em um intervalo  $[a, b]$ , seguindo a discussão em [01], [04]. Assume-se aqui que  $A(t)$ ,  $B(t)$  são matrizes  $n \times n$  de classe  $C^{2n}(\mathcal{I})$  com  $A(t)$  singular para cada  $t \in \mathcal{I}$ , e  $\mathbf{f} \in C^n(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ . Para as finalidades desta seção, por *solubilidade* em um intervalo  $\mathcal{I}$  entende-se as cinco propriedades seguintes.

#### Definição 4.1

O sistema (4.1) é dito solúvel no intervalo  $\mathcal{I}$  se as seguintes condições forem verificadas:

- (i) para cada  $\mathbf{f} \in C^n(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ , existe pelo menos uma solução em algum subintervalo  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$  de classe  $C^1(\mathcal{J}, \mathbf{R}^n)$
- (ii) cada solução  $\mathbf{x} \in C^1(\mathcal{J}, \mathbf{R}^n)$  de (4.1) na verdade está definida em todo o intervalo  $\mathcal{I}$ , é de classe  $C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  e satisfaz a equação em  $\mathcal{I}$
- (iii) as soluções de (4.1) são unicamente determinadas pelo seu valor em qualquer ponto do intervalo  $\mathcal{I}$ , ou seja: se  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  são soluções quaisquer tais que  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}(t_0)$  para algum  $t_0 \in \mathcal{I}$ , então  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$  para todo  $t \in \mathcal{I}$
- (iv) se  $\mathbf{f} \in C^m(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  para algum  $n \leq m \leq 2n$ , então cada solução em  $\mathcal{I}$  da equação (4.1) é de classe  $C^{m-n+1}(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$
- (v) cada solução da equação homogênea  $A(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + B(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  é de classe  $C^{2n+1}(\mathcal{I})$

Por exemplo, sendo  $N(t)$  matriz  $n \times n$  nilpotente para cada  $t \in \mathcal{I}$ , de classe  $C^{k+n}(\mathcal{I})$ ,  $k \geq n$ , e tal que  $(N(t) \frac{d}{dt})^k = 0$ , então, pelos resultados da seção §3.2, tem-se que (2.1) é solúvel em  $\mathcal{I}$  conforme a definição acima.

Similarmente, será conveniente redefinir equivalência entre sistemas como segue.

#### Definição 4.2

Dois sistemas  $A(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + B(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$  e  $\tilde{A}(t)\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) + \tilde{B}(t)\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{f}}(t)$  são ditos **equivalentes** no intervalo  $\mathcal{I}$  se existirem matrizes inversíveis  $H(t)$ ,  $K(t)$  de classes  $C^{2n}(\mathcal{I}, GL_n(\mathbf{R}))$  e  $C^{2n+1}(\mathcal{I}, GL_n(\mathbf{R}))$ , respectivamente, tais que

$$(4.2a) \quad H(t)A(t)K(t) = \tilde{A}(t)$$

$$(4.2b) \quad H(t)A(t)K'(t) + H(t)B(t)K(t) = \tilde{B}(t)$$

$$(4.2c) \quad H(t) \mathbf{f}(t) = \tilde{\mathbf{f}}(t)$$

para cada  $t \in \mathcal{I}$ , de modo que  $A(t) \dot{\mathbf{x}}(t) + B(t) \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$  pode ser colocado na forma  $\tilde{A}(t) \tilde{\dot{\mathbf{x}}}(t) + \tilde{B}(t) \tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{f}}(t)$  tomando-se  $\mathbf{x}(t) = K(t) \tilde{\mathbf{x}}(t)$  e multiplicando-se à esquerda por  $H(t)$ .

Sob as definições acima, (4.1) é solúvel sempre que for equivalente a um sistema na forma canônica padrão. Contudo, como mostra o Exemplo 2.3, nem todo sistema solúvel pode ser colocado na forma canônica. Um resultado bastante útil mostrando a estrutura genérica de um sistema solúvel foi obtido em [04], e reproduzido a seguir.

**Teorema 4.1** (S. L. Campbell, 1987)

Suponha que o sistema singular (4.1) seja solúvel em  $[a, b]$ . Então (4.1) é equivalente a um sistema na forma

$$(4.3a) \quad \dot{\mathbf{y}}(t) + C(t) \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{g}(t)$$

$$(4.3b) \quad N(t) \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{z}(t) = \mathbf{h}(t)$$

onde (4.3a) pode estar ausente e (4.3b) tem exatamente uma solução para cada  $\mathbf{h}(t)$  suficientemente regular (por exemplo, de classe  $C^n([a, b])$ ).

*Prova:* A demonstração a seguir é devida a S. Campbell [04]. Supondo que o sistema (4.1) é solúvel em  $[a, b]$ , vamos mostrar inicialmente que é possível encontrar um sistema equivalente com a forma

$$(4.4a) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) + A_1(t) \dot{\mathbf{y}}(t) + C(t) \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}_1(t)$$

$$(4.4b) \quad A_2(t) \dot{\mathbf{y}}(t) + D(t) \mathbf{y}(t) = \mathbf{f}_2(t)$$

onde a equação (4.4a) pode estar ausente e (4.4b) possui somente uma solução para cada  $\mathbf{f}_2$  suficientemente regular. Com efeito, se o sistema homogêneo associado,

$$(4.5) \quad A(t) \dot{\mathbf{x}}(t) + B(t) \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

tiver apenas a solução  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , então (4.1) já se encontra na forma (4.4), com a equação (4.4a) ausente, e a afirmação está verificada. No caso de a equação homogênea possuir soluções não triviais, podemos tomar, como observado no Teorema 1.1, soluções linearmente independentes  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s \in C^{2n+1}([a, b], \mathbf{R}^n)$  da equação (4.5) que formam uma base para o espaço de todas as soluções desta equação no intervalo  $[a, b]$ ,

$$\mathcal{W}_H = \{ \varphi \in C^1([a, b], \mathbf{R}^n) : A(t) \dot{\varphi}(t) + B(t) \varphi(t) = \mathbf{0} \}$$

onde  $1 \leq s \leq n-1$ . Como já se observou na seção §3.1, pela hipótese de solubilidade

tem-se  $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_s(t)\}$  linearmente independente para cada  $t \in [a, b]$ ; pelo Teorema 3.1, existem  $\varphi_{s+1}, \varphi_{s+2}, \dots, \varphi_n \in C^\infty([a, b], \mathbf{R}^n)$  tais que, para cada  $t$  no intervalo  $[a, b]$ , a matriz  $n \times n$

$$\Phi(t) = [\varphi_1(t) | \varphi_2(t) | \dots | \varphi_s(t) | \varphi_{s+1}(t) | \varphi_{s+2}(t) | \dots | \varphi_n(t)]$$

é inversível para cada  $t \in [a, b]$ . Seja então  $\tilde{x} \in C^1([a, b], \mathbf{R}^n)$  dado por

$$x(t) = \Phi(t) \tilde{x}(t)$$

para cada  $t \in [a, b]$ . Em termos de  $\tilde{x}(t)$ , a equação (4.1) torna-se

$$A(t) \Phi(t) \dot{\tilde{x}}(t) + (A(t) \Phi'(t) + B(t) \Phi(t)) \tilde{x}(t) = f(t)$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} E_{11}(t) & E_{12}(t) \\ E_{21}(t) & E_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & F_{12}(t) \\ 0 & F_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

onde  $E_{11}, F_{11} \in C^{2n}([a, b], \mathcal{M}_s(\mathbf{R}))$ ,  $E_{22}, F_{22} \in C^{2n}([a, b], \mathcal{M}_{n-s}(\mathbf{R}))$ ,  $E_{12}, F_{12}$ ,  $E_{21}, F_{21} \in C^{2n}([a, b])$  são os blocos de dimensões correspondentes formando as matrizes  $E(t) \equiv A(t) \Phi(t)$  e  $F(t) \equiv A(t) \Phi'(t) + B(t) \Phi(t)$ , respectivamente.

Afirmamos que, para cada  $t \in [a, b]$ , a matriz  $n \times s$  dada por

$$\begin{bmatrix} E_{11}(t) \\ E_{21}(t) \end{bmatrix}$$

tem posto máximo  $s$ . Com efeito, suponha que existisse  $\hat{t} \in [a, b]$  tal que o posto fosse menor que  $s$ . Então existiria um vetor constante  $\hat{v} \in \mathbf{R}^s$  não nulo tal que

$$\begin{bmatrix} E_{11}(\hat{t}) \\ E_{21}(\hat{t}) \end{bmatrix} \hat{v} = \mathbf{0}$$

Nesse caso, definindo-se, para cada  $t \in [a, b]$ ,

$$\hat{f}(t) \equiv \begin{cases} \frac{1}{t - \hat{t}} \begin{bmatrix} E_{11}(t) \\ E_{21}(t) \end{bmatrix} \hat{v} & \text{se } t \neq \hat{t} \\ \begin{bmatrix} E'_{11}(\hat{t}) \\ E'_{21}(\hat{t}) \end{bmatrix} \hat{v} & \text{se } t = \hat{t} \end{cases}$$

teríamos  $\hat{f} \in C^{2n-1}([a, b], \mathbf{R}^n)$ , de modo que, pela hipótese de solubilidade, existiria solução  $\hat{x} \in C^1([a, b], \mathbf{R}^n)$  para a equação  $E(t)\dot{\hat{x}}(t) + F(t)\hat{x}(t) = \hat{f}(t)$ . Porém,  $\hat{x}(t)$  dada por

$$\hat{x}(t) = \begin{pmatrix} \ln |t - \hat{t}| \hat{v} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

definiria uma solução não limitada em  $[a, b] \setminus \{\hat{t}\}$ , contradizendo a solubilidade da equação no intervalo  $[a, b]$ . Portanto, a matriz acima tem de ter posto máximo  $s$  para todo  $t \in [a, b]$ , como havia sido afirmado.

Pelo Teorema 3.3, existe então  $P \in C^{2n}([a, b], GL_n(\mathbf{R}))$  tal que, para cada  $t \in [a, b]$ ,

$$P(t) \begin{bmatrix} E_{11}(t) \\ E_{21}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Segue que, multiplicando-se

$$\begin{bmatrix} E_{11}(t) & E_{12}(t) \\ E_{21}(t) & E_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & F_{12}(t) \\ 0 & F_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

à esquerda por  $P(t)$ , obtém-se

$$\begin{bmatrix} I_s & E_1(t) \\ 0 & E_2(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & F_1(t) \\ 0 & F_2(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(t) \\ \tilde{f}_2(t) \end{pmatrix}$$

onde, por construção de  $\Phi(t)$ ,  $E_2(t)\dot{\hat{x}}_2(t) + F_2(t)\hat{x}_2(t) = \tilde{f}_2(t)$  tem exatamente uma solução para cada  $\tilde{f}_2(t)$  dada.

Tomando-se  $S \in C^{2n+1}([a, b], GL_{n-s}(\mathbf{R}))$  e introduzindo  $\bar{x} \in C^1([a, b], \mathbf{R}^n)$  pondo-se  $\bar{x}(t) = (\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t))^T$ , onde

$$\bar{x}_1(t) = \hat{x}_1(t) \quad , \quad S(t)\bar{x}_2(t) = \hat{x}_2(t)$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} I_s & E_1(t)S(t) \\ 0 & E_2(t)S(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & G_1(t) \\ 0 & G_2(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(t) \\ \tilde{f}_2(t) \end{pmatrix}$$

onde

$$G_1(t) \equiv F_1(t)S(t) + E_1(t)S'(t) \quad , \quad G_2(t) \equiv F_2(t)S(t) + E_2(t)S'(t)$$

e onde se assume que  $S(t)$  é uma dada matriz inversível de ordem  $n - s$  e classe  $C^{2n+1}([a, b])$ . Supondo que se possa encontrar uma tal  $S(t)$  tal que

$$G_2(t) = E_2(t) S'(t) + F_2(t) S(t)$$

seja também inversível para cada  $t \in [a, b]$ , então, multiplicando-se a equação acima à esquerda pela matriz  $n \times n$

$$\begin{bmatrix} I_s & -G_1(t) G_2(t)^{-1} \\ 0 & G_2(t)^{-1} \end{bmatrix}$$

obtém-se o sistema equivalente

$$\begin{bmatrix} I_s & C(t) \\ 0 & N(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-s} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$$

que tem as propriedades pedidas.

Resta mostrar que existe de fato  $S \in C^{2n+1}([a, b], GL_{n-s}(\mathbf{R}))$  tal que  $E_2(t) S'(t) + F_2(t) S(t)$  é inversível para cada  $t \in [a, b]$ . Para este fim, consideremos o operador

$$\mathcal{L} : C^1([a, b], \mathcal{M}_{n-s}(\mathbf{R})) \rightarrow C^0([a, b], \mathcal{M}_{n-s}(\mathbf{R}))$$

dado por

$$\mathcal{L}(\tilde{S})(t) = E_2(t) \tilde{S}'(t) + F_2(t) \tilde{S}(t)$$

Visto que  $E_2(t) \dot{s}(t) + F_2(t) s(t) = g(t)$  é solúvel no intervalo  $[a, b]$ , dada  $\tilde{G}$  em  $C^n([a, b], GL_{n-s}(\mathbf{R}))$  existe  $\tilde{S} \in C^1([a, b], \mathcal{M}_{n-s}(\mathbf{R}))$  tal que  $\mathcal{L}(\tilde{S}) = \tilde{G}$ , i.e., para todo  $t \in [a, b]$ ,

$$E_2(t) \tilde{S}'(t) + F_2(t) \tilde{S}(t) = \tilde{G}(t)$$

Sendo  $[a, b]$  compacto, pode-se encontrar seqüência  $(S_j) \subseteq C^{2n+1}([a, b], GL_{n-s}(\mathbf{R}))$  tal que, ao  $j \rightarrow \infty$ ,  $S_j \rightarrow \tilde{S}$  em  $C^1([a, b], \mathcal{M}_{n-s}(\mathbf{R}))$ , ou seja,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{t \in [a, b]} \|S_j'(t) - \tilde{S}'(t)\| + \sup_{t \in [a, b]} \|S_j(t) - \tilde{S}(t)\| \right\} = 0$$

de modo que  $\mathcal{L}(S_j) \rightarrow \mathcal{L}(\tilde{S})$  em  $C^0([a, b], \mathcal{M}_{n-s}(\mathbf{R}))$ , i.e.,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{t \in [a, b]} \|\mathcal{L}(S_j)(t) - \mathcal{L}(\tilde{S})(t)\| \right\} = 0$$

Como  $GL_{n-s}(\mathbf{R})$  é aberto em  $C^0([a, b], \mathcal{M}_{n-s}(\mathbf{R}))$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\left\{ G \in C^0([a, b], \mathcal{M}_{n-s}(\mathbf{R})) : \|G(t) - \tilde{G}(t)\| \leq \delta \forall t \in [a, b] \right\} \subseteq GL_{n-s}(\mathbf{R})$$

bastando assim que se tome  $S = S_{\hat{j}}$ , onde  $\hat{j}$  é suficientemente grande de modo a satisfazer

$$\sup_{t \in [a, b]} \|\mathcal{L}(S_{\hat{j}})(t) - \mathcal{L}(\tilde{S})(t)\| \leq \delta$$

o que conclui o argumento. □

## Epílogo

No presente trabalho, são investigadas várias propriedades básicas fundamentais referentes à solução numérica de sistemas de equações diferenciais ordinárias e teoria de equações algébrico-diferenciais, com algumas pequenas contribuições. No prosseguimento, pretende-se continuar este estudo abordando aspectos que não receberam aqui o tratamento adequado ou foram até completamente omitidos.

No Capítulo I, seria interessante estender a teoria apresentada para outras classes importantes de métodos, como por exemplo os métodos de Runge-Kutta. Também o conceito de *estabilidade* requer um estudo mais aprofundado. Por exemplo, a condição de estabilidade impõe importantes limitações na ordem de convergência do método [09], [11]. Além disso, outros conceitos de estabilidade, que também desempenham papel importante no estudo de diferentes aspectos do desempenho de métodos numéricos, precisam ser considerados. Igualmente, seria útil desenvolver estimativas menos pessimistas que as apresentadas na Seção §1.4 para o erro cometido, i.e.,  $\| \mathbf{y}_n - \mathbf{y}(t_n) \|$ . Outro ponto importante refere-se à *implementação* computacional dos métodos aqui abordados, que envolve dificuldades próprias que sequer foram mencionadas. Em particular, seria importante estender a discussão apresentada no Capítulo I ao caso importante de malhas *não* uniformes.

Com relação ao estudo desenvolvido sobre equações algébrico-diferenciais, novamente vários aspectos fundamentais foram omitidos. Por exemplo, nenhuma consideração foi feita sobre problemas *não* lineares, que incluem muitos dos sistemas importantes nas aplicações. Em particular, a noção de *índice*, e suas diferentes formulações (não necessariamente equivalentes), requer certamente um estudo mais aprofundado do que o apresentado no texto. O mesmo pode ser dito com relação aos resultados abordados sobre a estrutura de sistemas singulares, que recebeu aqui um tratamento apenas introdutório. Relacionado a este ponto, seria útil examinar algumas áreas de aplicação onde equações algébrico-diferenciais têm-se mostrado de grande utilidade, como por exemplo na simulação de processos dinâmicos em Engenharia Química ou dinâmica de fluidos incompressíveis [01], [12]. Finalmente, nenhuma consideração foi feita nos Capítulos II, III sobre a *resolução numérica* destes sistemas, uma área que tem experimentado intensa investigação nos anos recentes. Em particular, dado o porte elevado que estes problemas podem apresentar nas aplicações concretas, seria interessante examinar métodos de alto desempenho adequados para arquiteturas paralelas e massivamente paralelas em desenvolvimento, como por exemplo o *método de relaxação de onda* introduzido recentemente, cujo sucesso tem sido reportado por vários autores [15], [16].

## Referências

- [01] K. E. Brenan, S. L. Campbell and L. R. Petzold – Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. Elsevier, New York, 1989.
- [02] S. L. Campbell – Singular Systems of Differential Equations. Pitman, New York, 1980.
- [03] S. L. Campbell – Singular Systems of Differential Equations, II. Pitman, New York, 1982.
- [04] S. L. Campbell – *A general form for solvable linear time varying singular systems of differential equations*. SIAM J. Math. Anal. **18** (1987), 1101 - 1115.
- [05] S. L. Campbell and L. Petzold – *Canonical forms and solvable singular systems of differential equations*. SIAM J. Alg. Discrete Meth. **4** (1983), 517 - 521.
- [06] C. W. Cryer – *On the instability of high-order backward-difference multistep methods*. BIT, **12** (1972), 17 - 25.
- [07] F. R. Gantmacher – The Theory of Matrices, Vols. I, II. Chelsea, New York, 1960.
- [08] G. H. Golub and C. F. Van Loan – Matrix Computations. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1983.
- [09] E. Hairer, S. P. Norsett and G. Wanner – Solving Ordinary Differential Equations, Vol. I. Springer, New York, 1987.
- [10] E. Hairer and G. Wanner – *On the instability of the BDF formulas*. SIAM J. Numer. Anal. **20** (1983), 1206 - 1209.
- [11] P. Henrici – Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations. John Wiley, New York, 1962.
- [12] K. C. Mendonça e E. C. Biscaia Jr. – *Resolução numérica de um modelo algébrico-diferencial da adsorção em banho finito*. Anais do XVII CNMAC, Vitória, ES, 1994.



- [13] A. R. Mitchell and J. W. Craggs – *Stability of difference relations in the solution of ordinary differential equations*. Math. Tables Aids Comput. **7** (1953), 127 - 129.
  
- [14] L. R. Petzold and C. W. Gear – *ODE methods for the solution of differential/algebraic systems*. Sandia Report 82-8051, 1982.
  
- [15] A. R. Secchi – *Simulação dinâmica de processos químicos pelo método da relaxação em forma de onda em computadores paralelos*. PhD Thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, October 1992.
  
- [16] A. R. Secchi, M. Morari and E. C. Biscaia Jr. – *The waveform relaxation method in the concurrent dynamic process simulation*. Comp. Chem. Eng., 1992.

## Apêndice A

### Sobre os coeficientes da série de potências de $1/f(z)$

Neste apêndice, será examinado o comportamento dos coeficientes  $\gamma_n$  da expansão em séries de potências

$$\frac{1}{f(z)} = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots + \gamma_n z^n + \dots$$

onde  $f(z)$  é uma função holomorfa numa vizinhança aberta  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  da origem  $z = 0$ , com  $f(0) \neq 0$ .

#### **Teorema A-1**

Assumindo  $\Omega \supseteq \bar{B}_1(0)$ , onde  $\bar{B}_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ , tem-se

$$\sup_{n \geq 0} |\gamma_n| < \infty$$

se e somente se  $f$  satisfaz as condições

(i) toda raiz de  $f(z) = 0$  pertence a  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$

(ii) as raízes de  $f(z) = 0$  sobre o círculo unitário, se existirem, são todas simples.

*Prova:* Suponha que  $f$  satisfaz (i) e (ii). Se todas as raízes de  $f(z) = 0$  pertencem ao exterior de  $\bar{B}_1(0)$ , então se pode tomar  $\delta > 0$  suficientemente pequeno tal que

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1+\delta} f(z)^{-1} \frac{1}{z^{n+1}} dz \quad \forall n \geq 0$$

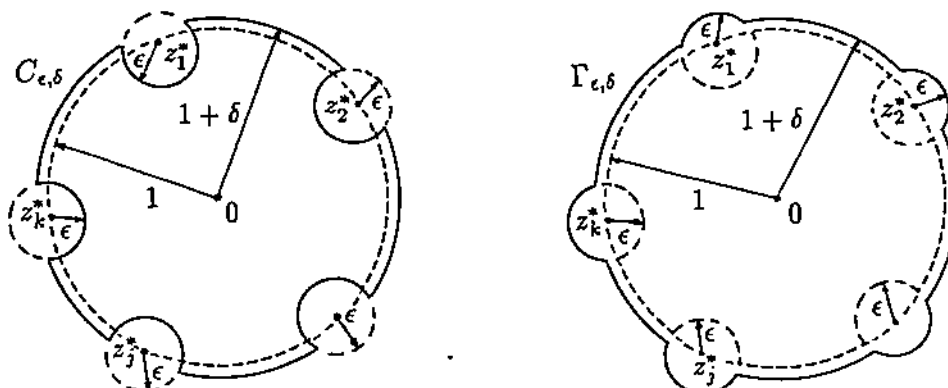
de onde se obtém

$$|\gamma_n| \leq \frac{1}{\min_{|z|=1+\delta} |f(z)|} \frac{1}{(1+\delta)^n}$$

ou seja,  $\gamma_n \rightarrow 0$  ao  $n \rightarrow \infty$ .

No caso geral em que  $f(z) = 0$  possui raízes sobre o círculo unitário (digamos,  $z_1^*$ ,  $z_2^*$ , ...,  $z_k^*$ ) e fora dele, tomemos  $\delta, \epsilon > 0$  suficientemente pequenos de tal modo que  $z_1^*$ ,  $z_2^*$ , ...,  $z_k^*$  sejam os únicos zeros de  $f(z) = 0$  em  $|z| \leq 1 + \delta$  e, para cada  $j = 1, 2, \dots, k$ , não haja raízes em  $\bar{B}_\epsilon(z_j^*) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_j^*| \leq \epsilon\}$  além de  $z_j^*$ .

Tomando-se os caminhos  $C_{\epsilon, \delta}$ ,  $\Gamma_{\epsilon, \delta}$  indicados na figura abaixo,



obtém-se, para todo  $n$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\epsilon, \delta}} f(z)^{-1} \frac{1}{z^{n+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\epsilon, \delta}} f(z)^{-1} \frac{1}{z^{n+1}} dz - \sum_{j=1}^k \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_j^*|=\epsilon} f(z)^{-1} \frac{1}{z^{n+1}} dz \end{aligned}$$

Mas

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_j^*|=\epsilon} f(z)^{-1} \frac{1}{z^{n+1}} dz = \operatorname{Res}_{z=z_j^*} \frac{1}{z^{n+1} f(z)} = \frac{1}{f'(z_j^*) (z_j^*)^{n+1}}$$

visto que  $f'(z_j^*) \neq 0$ .

Como a integral sobre  $\Gamma_{\epsilon, \delta}$  tende a zero ao  $n \rightarrow \infty$ , obtém-se imediatamente

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\gamma_n| \leq \sum_{j=1}^k \frac{1}{|f'(z_j^*)|}$$

Em particular,  $\sup_{n \geq 0} |\gamma_n| < \infty$ .

Antes de se provar a recíproca, é interessante notar que  $\gamma_n \rightarrow 0$  ao  $n \rightarrow \infty$  se e somente se as raízes de  $f(z) = 0$  (se existirem) estão todas no exterior do círculo unitário. Com efeito, se  $k = 1$ , é imediato da expressão acima que  $|\gamma_n| \rightarrow |f'(z_1^*)|^{-1}$ , que é positivo; se  $k \geq 2$ , não é difícil mostrar, usando-se um argumento análogo ao que será apresentado abaixo, que necessariamente  $\limsup |\gamma_n| > 0$ .

Assumindo-se agora

$$|\gamma_n| \leq C \quad \forall n$$

para alguma constante  $C > 0$ , tem-se que a série  $\gamma_0 + \gamma_1 z + \dots + \gamma_n z^n + \dots$  converge para  $|z| < 1$ , de modo que  $1/f(z)$  é holomorfa em  $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . Em particular, todas as raízes de  $f(z) = 0$  satisfazem  $|z| \geq 1$ . Resta mostrar que os zeros de  $f$  sobre o círculo unitário (se existirem) são necessariamente simples. Por contradição, suponha que existam  $k \geq 1$  raízes distintas  $z_1^*, z_2^*, \dots, z_k^*$  de  $f(z) = 0$  sobre o círculo unitário com multiplicidade maior que 1, e sejam  $m_1^*, m_2^*, \dots, m_k^*$  suas respectivas multiplicidades. Sendo  $C_{\epsilon, \delta}, \Gamma_{\epsilon, \delta}$  os caminhos indicados na figura acima, tem-se, para  $\epsilon, \delta > 0$  suficientemente pequenos,

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\epsilon, \delta}} f(z)^{-1} \frac{1}{z^{n+1}} dz - \sum_{\substack{|z_*|=1 \\ f(z_*)=0 \\ f'(z_*) \neq 0}} \frac{1}{f'(z_*)} \frac{1}{z_*^{n+1}} - \sum_{\substack{|z_*|=1 \\ f(z_*)=0 \\ f'(z_*)=0}} \operatorname{Res}_{z=z_j^*} \frac{1}{z^{n+1} f(z)} \\ &= O(1) - \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z=z_j^*} \frac{1}{z^{n+1} f(z)} \end{aligned}$$

Desenvolvendo

$$\begin{aligned} \frac{(z - z_j^*)^{m_j^*}}{f(z)} &= \frac{1}{a_{m_j^*}^{[j]} + a_{m_j^*+1}^{[j]}(z - z_j^*) + a_{m_j^*+2}^{[j]}(z - z_j^*)^2 + \dots} \\ &= c_0^{[j]} + c_1^{[j]}(z - z_j^*) + \dots + c_q^{[j]}(z - z_j^*)^q + \dots \end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{z^{n+1}} = b_0^{[n]} + b_1^{[n]}(z - z_j^*) + b_2^{[n]}(z - z_j^*)^2 + \dots + b_q^{[n]}(z - z_j^*)^q + \dots$$

onde, para  $q = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$a_q^{[j]} = \frac{f^{(q)}(z_j^*)}{q!}$$

e

$$b_q^{[n]} = (-1)^q \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+q)}{q!} \frac{1}{(z_j^*)^{n+q+1}}$$

$$= \frac{(-1)^q}{q!} \frac{n^q}{(z_j^*)^{n+q+1}} + O(1)n^{q-1}$$

obtem-se

$$\operatorname{Res}_{z=z_j^*} \frac{1}{z^{n+1}f(z)} = b_{m_j^*-1}^{[n]} c_0^{[j]} + b_{m_j^*-2}^{[n]} c_1^{[j]} + \dots + b_1^{[n]} c_{m_j^*-2}^{[j]} + b_0^{[n]} c_{m_j^*-1}^{[j]}$$

Observando que

$$c_0^{[j]} = \frac{m_j^{*!}}{f^{(m_j^*)}(z_j^*)}$$

obtem-se, para  $j = 1, 2, \dots, k$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=z_j^*} \frac{1}{z^{n+1}f(z)} &= c_0^{[j]} b_{m_j^*-1}^{[n]} + O(1)n^{m_j^*-2} \\ &= -\frac{(-1)^{m_j^*} m_j^*}{(z_j^*)^{n+m_j^*} f^{(m_j^*)}(z_j^*)} n^{m_j^*-1} + O(1)n^{m_j^*-2} \end{aligned}$$

Assim, ao  $n \rightarrow \infty$

$$\gamma_n = \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{m_j^*} m_j^*}{(z_j^*)^{m_j^*} f^{(m_j^*)}(z_j^*)} \frac{n^{m_j^*-1}}{(z_j^*)^n} + O(1)n^{p^*-2}$$

onde  $p^* = \max_{1 \leq j \leq k} \{m_1^*, m_2^*, \dots, m_k^*\}$ .

Logo,

$$\gamma_n = (-1)^{p^*} p^* \left( \sum_{\substack{j=1 \\ m_j^*=p^*}}^k \frac{1}{f^{(p^*)}(z_j^*)} \frac{1}{(z_j^*)^{p^*+n}} \right) n^{p^*-1} + O(1)n^{p^*-2}$$

No caso de existir somente uma raiz  $z_j^*$  sobre o círculo unitário com multiplicidade  $m_j^* = p^*$ , digamos  $z_j^* = \omega^*$ , então

$$\gamma_n = (-1)^{p^*} p^* \frac{1}{f^{(p^*)}(\omega^*)} \frac{1}{(\omega^*)^{p^*+n}} n^{p^*-1} + O(1)n^{p^*-2}$$

ou seja,  $|\gamma_n| \sim C n^{p^*-1}$  ao  $n \rightarrow \infty$  para uma constante  $C > 0$ , o que contradiz a hipótese de ser  $\{\gamma_n\}$  um conjunto limitado.

Mais geralmente, sejam  $\omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_l^*$  as raízes de  $f(z) = 0$  sobre o círculo unitário

com multiplicidade maximal  $p^*$ , ou seja

$$\{ z_j^* : 1 \leq j \leq k \text{ e } m_j^* = p^* \} = \{ \omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_l^* \}$$

onde  $p^* = \max \{ m_1^*, m_2^*, \dots, m_k^* \}$ . Então se pode mostrar que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=1}^l \frac{1}{f^{(p^*)}(\omega_j^*)} \frac{1}{(\omega_j^*)^{p^*+n}} \right| > 0$$

Com efeito, suponha que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\zeta_n| = 0$ , onde

$$\zeta_n \equiv \sum_{j=1}^l \frac{1}{f^{(p^*)}(\omega_j^*)} \frac{1}{(\omega_j^*)^n}$$

Em tal caso, para cada  $\eta > 0$  dado, arbitrariamente pequeno, existiria  $N_\eta > 0$  tal que  $|\zeta_n| \leq \eta$  para todo  $n \geq N_\eta$ . Seja então  $n \geq N_\eta$  qualquer, fixado. Para  $i = 0, 1, 2, \dots, l-1$ , tem-se

$$\sum_{j=1}^l \frac{1}{f^{(p^*)}(\omega_j^*)} \frac{1}{(\omega_j^*)^{p^*+n+i}} = \zeta_{p^*+n+i}$$

onde  $|\zeta_{p^*+n+i}| \leq \eta$  para cada  $i$ , ou seja,

$$V_l \omega_n = \zeta_n$$

sendo  $V_l$  a matriz de Vandermonde  $l \times l$

$$V_l \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{\omega_1^*} & \frac{1}{\omega_2^*} & \frac{1}{\omega_3^*} & \dots & \frac{1}{\omega_l^*} \\ \left(\frac{1}{\omega_1^*}\right)^2 & \left(\frac{1}{\omega_2^*}\right)^2 & \left(\frac{1}{\omega_3^*}\right)^2 & \dots & \left(\frac{1}{\omega_l^*}\right)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{1}{\omega_1^*}\right)^{l-1} & \left(\frac{1}{\omega_2^*}\right)^{l-1} & \left(\frac{1}{\omega_3^*}\right)^{l-1} & \dots & \left(\frac{1}{\omega_l^*}\right)^{l-1} \end{pmatrix}$$

e

$$\omega_n \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{f^{(p^*)}(\omega_1^*)} & \frac{1}{(\omega_1^*)^{p^*+n}} \\ \frac{1}{f^{(p^*)}(\omega_2^*)} & \frac{1}{(\omega_2^*)^{p^*+n}} \\ \frac{1}{f^{(p^*)}(\omega_3^*)} & \frac{1}{(\omega_3^*)^{p^*+n}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{f^{(p^*)}(\omega_l^*)} & \frac{1}{(\omega_l^*)^{p^*+n}} \end{pmatrix}, \quad \zeta_n \equiv \begin{pmatrix} \zeta_{p^*+n} \\ \zeta_{p^*+n+1} \\ \zeta_{p^*+n+2} \\ \vdots \\ \zeta_{p^*+n+l-1} \end{pmatrix}$$

Como  $\omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_l^*$  são pontos distintos, segue que

$$\|\omega_n\|_\infty \leq \|V_l^{-1}\|_{\infty, \infty} \|\zeta_n\|_\infty \leq C\eta$$

onde  $C = \|V_l^{-1}\|_{\infty, \infty}$ , ou seja,

$$\left| \frac{1}{f^{(p^*)}(\omega_j^*)} \right| = \left| \frac{1}{f^{(p^*)}(\omega_j^*)} \frac{1}{(\omega_j^*)^{p^*+n}} \right| \leq C\eta \quad \forall j = 1, 2, \dots, l$$

Como  $\eta > 0$  é arbitrário, segue que

$$\frac{1}{f^{(p^*)}(\omega_j^*)} = 0$$

o que é impossível.

Logo, deve-se ter

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\gamma_n|}{n^{p^*-1}} = p^*a$$

para algum  $a > 0$ , e em particular  $\limsup |\gamma_n| = \infty$ , contradizendo a limitação dos coeficientes  $\gamma_n$ .  $\square$

Na prova do teorema acima, ficou demonstrado o seguinte resultado adicional:

### Teorema A-2

Sejam  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  um conjunto aberto contendo  $\bar{B}_1(0)$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa com  $f(0) \neq 0$ . Então, sendo  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  os coeficientes da expansão em série de potências de  $1/f(z)$ , i.e.,

$$\frac{1}{f(z)} = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots + \gamma_n z^n + \dots$$

tem-se, para  $p \geq 1$  real,

$$\gamma_n = O(1)n^{p-1} \quad \text{ao } n \rightarrow \infty$$

se e somente se  $f$  satisfaz as duas condições abaixo:

- (i) cada raiz de  $f(z) = 0$  verifica  $|z| \geq 1$
- (ii) as raízes de  $f(z) = 0$  com  $|z| = 1$  têm multiplicidade menor ou igual a  $p$

Usando a transformação

$$z \mapsto \frac{z}{R}$$

que transforma as raízes de  $f(z) = 0$  sobre o círculo  $|z| = R$  em raízes de  $\tilde{f}(z) = f(z/R)$  sobre  $|z| = 1$ , obtém-se imediatamente do teorema acima o seguinte resultado.

### **Teorema A-3**

Assumindo  $\Omega \supseteq \bar{B}_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$  para algum  $R > 0$ , tem-se, sendo  $p \geq 1$  real,

$$\gamma_n = O(1) \frac{n^{p-1}}{R^n} \quad \text{ao } n \rightarrow \infty$$

se e somente se  $f$  satisfaz as seguintes condições:

- (i) cada raiz de  $f(z) = 0$  verifica  $|z| \geq R$
- (ii) as raízes de  $f(z) = 0$  satisfazendo  $|z| = R$  têm multiplicidade menor ou igual a  $p$



## Apêndice B

### Matrizes de funções

Neste apêndice, pretende-se demonstrar o Teorema 3.1, §3.3, o que será feito derivando-se vários resultados de interesse por si mesmos, apresentados a seguir. Na discussão abaixo,  $GL_n(\mathbf{R})$  denota o espaço das matrizes  $n \times n$  de elementos reais que são inversíveis, ou seja,

$$GL_n(\mathbf{R}) = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : \det A \neq 0 \}$$

Similarmente,  $GL_n^+(\mathbf{R})$  e  $GL_n^-(\mathbf{R})$  denotam os conjuntos

$$GL_n^+(\mathbf{R}) = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : \det A > 0 \}$$

$$GL_n^-(\mathbf{R}) = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : \det A < 0 \}$$

Como  $\det A$  é uma função contínua dos elementos de  $A$ , tem-se que  $GL_n(\mathbf{R})$ ,  $GL_n^+(\mathbf{R})$  e  $GL_n^-(\mathbf{R})$  são conjuntos abertos em  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Ademais, não é difícil mostrar que  $GL_n^+(\mathbf{R})$  e  $GL_n^-(\mathbf{R})$  são conjuntos conexos por caminhos infinitamente diferenciáveis.

#### Proposição B-1

*Dadas matrizes  $A_0, A_1 \in GL_n^+(\mathbf{R})$  e números reais  $a < \alpha < \beta < b$ , existe aplicação  $G \in C^\infty([a, b], GL_n^+(\mathbf{R}))$  tal que  $G(t) = A_0$  para todo  $a \leq t \leq \alpha$  e  $G(t) = A_1$  para todo  $\beta \leq t \leq b$ .*

*Prova:* Claramente, é suficiente mostrar o resultado no caso em que  $A_0 = I$ , onde  $I$  denota a matriz identidade  $n \times n$ . Sendo  $J[A_1]$  a forma de Jordan real de  $A_1$ , é fácil construir aplicação  $B \in C^\infty([a, b], GL_n^+(\mathbf{R}))$  tal que  $B(t) = I$  para todo  $a \leq t \leq \alpha$  e  $B(t) = J[A_1]$  para todo  $\beta \leq t \leq b$ . Definindo-se então  $G(t) \equiv Q_1 B(t) Q_1^{-1}$ , onde  $Q_1 \in GL_n(\mathbf{R})$  é tal que  $J[A_1] = Q_1^{-1} A_1 Q_1$ , obtém-se a aplicação pedida.  $\square$

A proposição acima é igualmente verdadeira quando  $A_0, A_1 \in GL_n^-(\mathbf{R})$ , com prova inteiramente análoga. Em particular,  $GL_n^+(\mathbf{R})$  e  $GL_n^-(\mathbf{R})$  são as componentes conexas do conjunto de matrizes inversíveis  $GL_n(\mathbf{R})$ . Uma generalização importante da Proposição B-1 é dada pelo resultado a seguir.

#### Proposição B-2

*Sendo  $a < \alpha < \beta < b$  e  $A \in C^m([a, \alpha], \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$ ,  $B \in C^m([\beta, b], \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$  aplicações matriciais tais que  $A(\alpha), B(\beta) \in GL_n^+(\mathbf{R})$ , onde  $0 \leq m \leq \infty$ , então*

existe  $G \in C^\infty([\alpha, \beta], GL_n^+(\mathbf{R}))$  tal que  $G(\alpha) = A(\alpha)$ ,  $G(\beta) = B(\beta)$  e a aplicação

$$\Phi(t) \equiv \begin{cases} A(t) & \text{se } a \leq t \leq \alpha \\ G(t) & \text{se } \alpha \leq t \leq \beta \\ B(t) & \text{se } \beta \leq t \leq b \end{cases}$$

é de classe  $C^m([a, b], \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$ , com  $\Phi(t)$  inversível para todo  $\alpha \leq t \leq \beta$ .

Em particular, sendo dada aplicação  $\mathcal{A} \in C^m([a, \alpha] \cup [\beta, b], GL_n^+(\mathbf{R}))$  com  $\mathcal{A}(t)$  inversível para cada  $t$  em  $[a, \alpha] \cup [\beta, b]$ , existe  $\Phi \in C^m([a, b], GL_n^+(\mathbf{R}))$  que estende  $\mathcal{A}$  a todo o intervalo  $[a, b]$ , com  $\Phi(t)$  inversível em cada ponto. Novamente, resultados análogos podem ser enunciados para o conjunto  $GL_n^-(\mathbf{R})$ , e provados analogamente, de modo que é suficiente considerar o caso  $GL_n^+(\mathbf{R})$ .

*Prova:* Sejam  $a_{ij} \in C^m(I, \mathbf{R})$ ,  $b_{ij} \in C^m(I, \mathbf{R})$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) as componentes de  $A(t)$  e  $B(t)$ , respectivamente. Como  $A(\alpha)$ ,  $B(\beta)$  são inversíveis, podemos tomar  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que, se  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  satisfizer  $\|C - A(\alpha)\| \leq \varepsilon$  ou  $\|C - B(\beta)\| \leq \varepsilon$ , então  $C$  é inversível (onde  $\|\cdot\|$  denota, digamos, a norma

$$\|M\| = \max_{1 \leq i, j \leq n} |m_{ij}|$$

sendo  $m_{ij}$  os elementos de  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , com  $C \in GL_n^+(\mathbf{R})$ . Seja  $\delta = (\beta - \alpha)/5$ , e tomemos, para cada  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\tilde{a}_{ij} \in C^\infty([\alpha, \alpha + 2\delta], \mathbf{R}) \quad , \quad \tilde{b}_{ij} \in C^\infty([\beta - 2\delta, \beta], \mathbf{R})$$

tais que

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij}^{(\ell)}(\alpha) &= a_{ij}^{(\ell)}(\alpha) \text{ para todo } \ell = 0, 1, 2, \dots, m \\ \tilde{a}_{ij}(t) &= a_{ij}(\alpha) \text{ para todo } \alpha + \delta \leq t \leq \alpha + 2\delta \\ |\tilde{a}_{ij}(t) - a_{ij}(\alpha)| &\leq \varepsilon \text{ para todo } \alpha \leq t \leq \alpha + \delta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{ij}^{(\ell)}(\beta) &= b_{ij}^{(\ell)}(\beta) \text{ para todo } \ell = 0, 1, 2, \dots, m \\ \tilde{b}_{ij}(t) &= b_{ij}(\beta) \text{ para todo } \beta - 2\delta \leq t \leq \beta - \delta \\ |\tilde{b}_{ij}(t) - b_{ij}(\beta)| &\leq \varepsilon \text{ para todo } \beta - \delta \leq t \leq \beta \end{aligned}$$

Sendo  $\tilde{A} \in C^\infty([\alpha, \alpha + 2\delta], \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$ ,  $\tilde{B} \in C^\infty([\beta - 2\delta, \beta], \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$  formadas pelas funções  $\tilde{a}_{ij}$ ,  $\tilde{b}_{ij}$  acima, tem-se então  $\tilde{A}(t) \in GL_n^+(\mathbf{R})$  para cada  $t \in [\alpha, \alpha + 2\delta]$  e  $\tilde{B}(t) \in GL_n^+(\mathbf{R})$  para cada  $t \in [\beta - 2\delta, \beta]$ . Conectando  $\tilde{A}(\alpha + 2\delta)$  (ou seja,  $A(\alpha)$ ) a  $\tilde{B}(\beta - 2\delta)$  (ou seja,  $B(\beta)$ ) por um caminho  $\tilde{C} \in C^\infty([\alpha + 2\delta, \beta - 2\delta], GL_n^+(\mathbf{R}))$

como descrito na Proposição B-1, tem-se claramente que

$$G(t) \equiv \begin{cases} A(t) & \text{se } a \leq t \leq \alpha \\ \tilde{A}(t) & \text{se } \alpha \leq t \leq \alpha + 2\delta \\ \tilde{C}(t) & \text{se } \alpha + 2\delta \leq t \leq \beta - 2\delta \\ \tilde{B}(t) & \text{se } \beta - 2\delta \leq t \leq \beta \\ B(t) & \text{se } \beta \leq t \leq b \end{cases}$$

satisfaz as condições pedidas.  $\square$

É conveniente observar que as matrizes  $n \times n$  ortogonais, que formam uma parte fechada de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , possuem propriedades análogas, como mostram as proposições a seguir.

### Proposição B-3

Dadas matrizes  $Q_0, Q_1 \in GL_n^+(\mathbf{R})$  ortogonais, e números reais  $a < \alpha < \beta < b$ , existe aplicação  $Q \in C^\infty([a, b], GL_n^+(\mathbf{R}))$  tal que  $Q(t) = Q_0$  para todo  $a \leq t \leq \alpha$  e  $Q(t) = Q_1$  para todo  $\beta \leq t \leq b$ , com  $Q(t)$  ortogonal para todo  $a \leq t \leq b$ .

Analogamente, as matrizes ortogonais de determinante negativo (i.e.,  $-1$ ) formam um subconjunto fechado de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  que é conexo por caminhos infinitamente diferenciáveis. Assim, os conjuntos  $\{Q \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : Q \text{ é ortogonal, } \det Q = +1\}$  e  $\{Q \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : Q \text{ é ortogonal, } \det Q = -1\}$  são as componentes conexas do conjunto de todas as matrizes ortogonais de ordem  $n$ .

*Prova:* Pela Proposição B-1, existe  $G \in C^\infty([a, b], GL_n^+(\mathbf{R}))$  tal que  $G(t) = Q_0$  para todo  $t$  em  $[a, \alpha]$  e  $G(t) = Q_1$  para todo  $t$  em  $[\beta, b]$ . Ortogonalizando  $G(t)$  pelo processo de Gram-Schmidt [08], obtemos  $H \in C^\infty([a, b], GL_n^+(\mathbf{R}))$  com  $H(t) = I_n$  em  $[a, \alpha] \cup [\beta, b]$ , onde  $I_n$  denota a matriz identidade  $n \times n$ , e tal que, para cada  $t$  em  $[a, b]$ ,  $G(t)H(t)$  é ortogonal. Claramente,  $Q(t) \equiv G(t)H(t)$  possui as propriedades exigidas.  $\square$

### Proposição B-4

Seja  $a < \alpha < \beta < b$  e  $P \in C^m([a, \alpha], GL_n^+(\mathbf{R}))$ ,  $Q \in C^m([\beta, b], GL_n^+(\mathbf{R}))$ ,  $0 \leq m \leq \infty$ , aplicações matriciais com  $P(t)$  ortogonal para todo  $t \in [a, \alpha]$  e  $Q(t)$  ortogonal para todo  $t \in [\beta, b]$ , então existe aplicação  $\Phi \in C^m([a, b], GL_n^+(\mathbf{R}))$  com  $\Phi(t)$  ortogonal para todo  $t \in [a, b]$  e tal que

$$\Phi(t) = P(t) \quad \forall t \in [a, \alpha] \quad , \quad \Phi(t) = Q(t) \quad \forall t \in [\beta, b]$$

*Prova:* Pela Proposição B-2, existe  $G \in C^m([a, b], GL_n^+(\mathbf{R}))$  tal que  $G(t) = P(t)$

em  $[a, \alpha]$  e  $G(t) = Q(t)$  em  $[\beta, b]$ . Usando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt [08], existe  $H \in C^m([a, b], GL_n^+(\mathbf{R}))$  com  $H(t) = I_n$  para todo  $t$  em  $[a, \alpha] \cup [\beta, b]$  e tal que  $G(t)H(t)$  é ortogonal para todo  $t \in [a, b]$ . Logo, basta tomar  $\Phi(t) \equiv G(t)H(t)$ .  $\square$

Novamente, o resultado acima pode ser enunciado e provado analogamente para o caso de matrizes ortogonais de determinante negativo (i.e.,  $-1$ ).

### Proposição B-5

Seja  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \in C^m([a, b], \mathbf{R}^n)$ ,  $0 \leq m \leq \infty$ ,  $1 \leq r \leq n - 1$ , tais que, para cada  $t \in [a, b]$ ,  $\{\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t)\}$  é um conjunto de vetores ortonormais, então existem aplicações  $\tilde{\mathbf{a}}_{r+1}, \tilde{\mathbf{a}}_{r+2}, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_n \in C^m([a, b], \mathbf{R}^n)$  tais que, para cada  $t \in [a, b]$ ,

$$\{\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t), \tilde{\mathbf{a}}_{r+1}(t), \tilde{\mathbf{a}}_{r+2}(t), \dots, \tilde{\mathbf{a}}_n(t)\}$$

é uma base ortonormal para  $\mathbf{R}^n$ .

Em termos equivalentes, dadas  $r$  colunas  $\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t) \in \mathbf{R}^n$  ortonormais de classe  $C^m([a, b])$ , existe uma matriz  $n \times n$  ortogonal  $\Phi(t)$  de classe  $C^m([a, b])$  tendo as  $r$  colunas dadas.

*Prova:* Observamos inicialmente que, para cada  $t_0 \in [a, b]$  dado, é possível construir  $\tilde{\mathbf{a}}_{r+1}, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_n$  com as propriedades pedidas em alguma vizinhança de  $t_0$  em  $[a, b]$ : com efeito, sendo  $\mathbf{a}_j(t) = (a_{1j}(t), a_{2j}(t), \dots, a_{nj}(t))^T$  para  $j = 1, 2, \dots, r$ , considere a matriz  $n \times r$  de posto  $r$  formada pelas  $r$  colunas dadas por  $\mathbf{a}_1(t), \dots, \mathbf{a}_r(t)$ : tomando, para  $t = t_0$ , um menor não nulo de ordem  $r$  dessa matriz – formado, digamos, pelas linhas  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$ ,

$$M_{1,2,\dots,r}^{i_1,i_2,\dots,i_r}(t_0) \neq 0$$

então, por continuidade,

$$M_{1,2,\dots,r}^{i_1,i_2,\dots,i_r}(t) \neq 0$$

para todo  $t \in [a, b]$  suficientemente próximo de  $t_0$ , digamos  $t \in \mathcal{V}_\varepsilon$ , onde

$$\mathcal{V}_\varepsilon = \{t \in [a, b] : |t - t_0| < \varepsilon\}$$

Sendo então  $i_{r+1}, i_{r+2}, \dots, i_n$  os  $n - r$  inteiros em  $\{1, 2, \dots, n\}$  que não pertencem ao conjunto  $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ , e  $\mathbf{e}_i \in \mathbf{R}^n$  o  $i$ -ésimo vetor da base canônica de  $\mathbf{R}^n$ , temos que a matriz  $n \times n$

$$G(t) \equiv [\mathbf{a}_1(t) | \dots | \mathbf{a}_r(t) | \mathbf{e}_{i_{r+1}} | \dots | \mathbf{e}_{i_n}]$$

é inversível para todo  $t \in \mathcal{V}_\varepsilon$ . Substituindo-se  $\mathbf{e}_{i_n}$  por  $-\mathbf{e}_{i_n}$  se necessário, podemos assumir  $\det G(t) > 0 \quad \forall t \in \mathcal{V}_\varepsilon$ . Ortogonalizando-se então  $G(t)$  pelo processo de Gram-Schmidt [08], obtém-se uma matriz ortogonal  $\Phi(t)$  de determinante  $+1$  e

classe  $C^m(\mathcal{V}_\varepsilon)$  com as propriedades pedidas na vizinhança  $\mathcal{V}_\varepsilon$  de  $t_0$ .

Seja então  $\mathcal{T}^*$  o conjunto de todos os pontos  $t^* \in [a, b]$  tais que seja possível encontrar aplicações  $\tilde{\mathbf{a}}_{r+1}, \tilde{\mathbf{a}}_{r+2}, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_n \in C^m([a, t^*], \mathbf{R}^n)$  tais que, para cada  $t \in [a, t^*]$ ,

$$\{ \mathbf{a}_1(t), \dots, \mathbf{a}_r(t), \tilde{\mathbf{a}}_{r+1}(t), \dots, \tilde{\mathbf{a}}_n(t) \}$$

seja uma base ortonormal para  $\mathbf{R}^n$ , com determinante +1 para todo  $t \in [a, t^*]$ .

Pela construção acima, temos  $\mathcal{T}^* \supseteq [a, a + \varepsilon]$  para algum  $\varepsilon > 0$ ; para concluir a prova, devemos mostrar que na verdade  $\mathcal{T}^* = [a, b]$ . Para isso, seja  $\beta \in ]a, b[$  definido por

$$\beta = \sup \{ t^* : t^* \in \mathcal{T}^* \}$$

Afirmamos que  $\beta \in \mathcal{T}^*$ . De fato, como  $\beta \in [a, b]$  existem  $\varepsilon > 0$  e aplicações  $\mathbf{b}_{r+1}, \mathbf{b}_{r+2}, \dots, \mathbf{b}_n \in C^m(\mathcal{B}_\varepsilon, \mathbf{R}^n)$ , onde  $\mathcal{B}_\varepsilon = \{ t \in [a, b] : |t - \beta| < \varepsilon \}$ , tais que

$$\{ \mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t), \mathbf{b}_{r+1}(t), \mathbf{b}_{r+2}(t), \dots, \mathbf{b}_n(t) \}$$

é uma base ortonormal de  $\mathbf{R}^n$  para cada  $t \in \mathcal{B}_\varepsilon$ , com determinante +1 em cada  $t$ . Por outro lado, existe  $t^* \in \mathcal{T}^*$  com  $\beta - \varepsilon < t^* < \beta$ , e assim existem  $\tilde{\mathbf{a}}_{r+1}, \tilde{\mathbf{a}}_{r+2}, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_n \in C^m([a, t^*], \mathbf{R}^n)$  tais que, para cada  $t \in [a, t^*]$ ,

$$\{ \mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t), \tilde{\mathbf{a}}_{r+1}(t), \tilde{\mathbf{a}}_{r+2}(t), \dots, \tilde{\mathbf{a}}_n(t) \}$$

é uma base ortonormal de  $\mathbf{R}^n$ , com determinante +1 em todo  $t$ .

Em particular, para cada  $t \in ]\beta - \varepsilon, t^*]$ , tem-se

$$\mathbf{b}_{r+1}(t), \mathbf{b}_{r+2}(t), \dots, \mathbf{b}_n(t) \in \text{Span} \{ \mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t) \}^\perp$$

e

$$\tilde{\mathbf{a}}_{r+1}(t), \tilde{\mathbf{a}}_{r+2}(t), \dots, \tilde{\mathbf{a}}_n(t) \in \text{Span} \{ \mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t) \}^\perp$$

ou seja,  $\{ \mathbf{b}_{r+1}(t), \dots, \mathbf{b}_n(t) \}$  e  $\{ \tilde{\mathbf{a}}_{r+1}(t), \dots, \tilde{\mathbf{a}}_n(t) \}$  são duas bases (ortonormais) para o mesmo subespaço de dimensão  $n - r$ , a saber, o subespaço ortogonal ao subespaço  $\text{Span} \{ \mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t) \}$  gerado pelos vetores  $\mathbf{a}_1(t), \dots, \mathbf{a}_r(t)$ . Assim, existe  $Q \in C^m(] \beta - \varepsilon, t^* ], \mathcal{M}_{n-r}(\mathbf{R}))$  tal que, para cada  $t \in ] \beta - \varepsilon, t^* ]$ ,  $Q(t)$  é matriz ortogonal de dimensão  $(n - r) \times (n - r)$  com

$$[ \mathbf{b}_{r+1}(t) | \mathbf{b}_{r+2}(t) | \dots | \mathbf{b}_n(t) ] = [ \tilde{\mathbf{a}}_{r+1}(t) | \tilde{\mathbf{a}}_{r+2}(t) | \dots | \tilde{\mathbf{a}}_n(t) ] Q(t)$$

De fato, sendo  $q_{i\ell}(t)$  o elemento  $(i, \ell)$  de  $Q(t)$ , onde  $1 \leq i, \ell \leq n - r$ , tem-se

$$q_{i\ell}(t) = \langle \mathbf{b}_{r+\ell}(t), \tilde{\mathbf{a}}_{r+i}(t) \rangle$$

para todo  $t \in ] \beta - \varepsilon, t^* ]$ . Ademais,  $Q(t)$  tem de ter determinante positivo em  $] \beta - \varepsilon, t^* ]$ , de modo que, tomando  $c, d$  no interior deste intervalo, com  $c < d$ ,

pela Proposição B-4 existe  $\Phi \in C^m([a, t^*], GL_n^+(\mathbf{R}))$  com  $\Phi(t)$  ortogonal para todo  $t \in [a, t^*]$  e

$$\Phi(t) = I_{n-r} \quad \forall t \in [a, c] \quad , \quad \Phi(t) = Q(t) \quad \forall t \in [d, t^*]$$

Sendo, então,  $\beta_\epsilon = \min\{\beta + \epsilon, b\}$ , definindo  $\check{\mathbf{a}}_{r+1}(t), \check{\mathbf{a}}_{r+2}(t), \dots, \check{\mathbf{a}}_n(t)$  para cada  $t \in [a, \beta_\epsilon]$  por

$$[\check{\mathbf{a}}_{r+1}(t) | \dots | \check{\mathbf{a}}_n(t)] = \begin{cases} [\check{\mathbf{a}}_{r+1}(t) | \dots | \check{\mathbf{a}}_n(t)] Q(t) & \text{se } a \leq t \leq t^* \\ [\mathbf{b}_{r+1}(t) | \dots | \mathbf{b}_n(t)] & \text{se } t^* \leq t \leq \beta_\epsilon \end{cases}$$

temos  $\check{\mathbf{a}}_{r+1}, \check{\mathbf{a}}_{r+2}, \dots, \check{\mathbf{a}}_n \in C^m([a, \beta_\epsilon], \mathbf{R}^n)$ , com

$$\check{\mathbf{a}}_{r+1}(t), \check{\mathbf{a}}_{r+2}(t), \dots, \check{\mathbf{a}}_n(t) \in \text{Span}\{\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t)\}^\perp$$

para todo  $t \in [a, \beta_\epsilon]$ , com  $\check{\mathbf{a}}_{r+1}(t), \check{\mathbf{a}}_{r+2}(t), \dots, \check{\mathbf{a}}_n(t)$  ortogonais entre si. Logo, temos  $\beta_\epsilon \in \mathcal{T}^*$ ; como  $\beta \leq \beta_\epsilon$ , segue que  $\beta \in \mathcal{T}^*$ , conforme afirmado anteriormente. Além disso, temos  $\beta = b$ , visto que, se tivéssemos  $\beta < b$ , então, tomando  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno de tal modo a se ter  $\beta + \epsilon \leq b$ , teríamos nesse caso  $\beta_\epsilon = \beta + \epsilon$ , o que seria impossível, já que  $\beta = \sup \mathcal{T}^*$  e, como vimos acima,  $\beta_\epsilon \in \mathcal{T}^*$ . Portanto, tem-se  $\mathcal{T}^* = [a, b]$ , como se queria demonstrar.  $\square$

No resultado acima, em geral não é possível encontrar  $\check{\mathbf{a}}_{r+1}(t), \check{\mathbf{a}}_{r+2}(t), \dots, \check{\mathbf{a}}_n(t)$  com regularidade superior à dos vetores inicialmente dados  $\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t)$ . Por exemplo, no caso  $n = 2$ , tomando-se  $\mathbf{a}_1(t) = (1, f(t))^T$ , verifica-se que qualquer vetor  $\check{\mathbf{a}}_2(t) = (a(t), b(t))^T$  ortogonal a  $\mathbf{a}_1(t)$  satisfaz  $a(t) = -b(t)f(t)$  no intervalo de interesse, de modo que, para um vetor  $\check{\mathbf{a}}_2(t)$  não nulo,  $f(t) = -a(t)/b(t)$ , ou seja,  $\mathbf{a}_1(t)$  não pode ser menos regular que  $\check{\mathbf{a}}_2(t)$ . Contudo, se exigirmos que os vetores  $\mathbf{a}_1(t), \dots, \mathbf{a}_r(t), \check{\mathbf{a}}_{r+1}(t), \dots, \check{\mathbf{a}}_n(t)$  sejam apenas *linearmente independentes* no intervalo considerado, é sempre possível encontrar  $\check{\mathbf{a}}_{r+1}(t), \dots, \check{\mathbf{a}}_n(t)$  infinitamente diferenciáveis, como mostram as Proposições B-6 e B-8 abaixo.

### Proposição B-6

Seja  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \in C^0([a, b], \mathbf{R}^n)$ ,  $1 \leq r \leq n-1$ , tais que, para cada  $t \in [a, b]$ ,  $\{\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t)\}$  é um conjunto de vetores linearmente independentes em  $\mathbf{R}^n$ ; então existem aplicações  $\check{\mathbf{a}}_{r+1}, \check{\mathbf{a}}_{r+2}, \dots, \check{\mathbf{a}}_n \in C^\infty([a, b], \mathbf{R}^n)$  tais que, para cada  $t \in [a, b]$ ,

$$\{\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t), \check{\mathbf{a}}_{r+1}(t), \check{\mathbf{a}}_{r+2}(t), \dots, \check{\mathbf{a}}_n(t)\}$$

é uma base para  $\mathbf{R}^n$ .

Em termos equivalentes, dadas  $r$  colunas  $\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t) \in \mathbf{R}^n$  contínuas no intervalo  $[a, b]$  e linearmente independentes em cada ponto deste intervalo, existem  $n-r$  colunas  $\check{\mathbf{a}}_{r+1}(t), \check{\mathbf{a}}_{r+2}(t), \dots, \check{\mathbf{a}}_n(t)$  de classe  $C^\infty([a, b])$  tais que a matriz  $n \times n$

$$\Phi(t) = [\mathbf{a}_1(t) | \mathbf{a}_2(t) | \dots | \mathbf{a}_r(t) | \check{\mathbf{a}}_{r+1}(t) | \check{\mathbf{a}}_{r+2}(t) | \dots | \check{\mathbf{a}}_n(t)]$$

é inversível para cada  $t$  em  $[a, b]$ .

*Prova:* Usando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt [08], podemos construir  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r \in C^0([a, b], \mathbf{R}^n)$  tais que, para cada  $t$  em  $[a, b]$ ,

$$\text{Span}\{\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t)\} = \text{Span}\{\mathbf{b}_1(t), \mathbf{b}_2(t), \dots, \mathbf{b}_r(t)\}$$

com  $\{\mathbf{b}_1(t), \mathbf{b}_2(t), \dots, \mathbf{b}_r(t)\}$  ortonormal. Pela proposição anterior, existem então  $n - r$  aplicações  $\tilde{\mathbf{b}}_{r+1}, \tilde{\mathbf{b}}_{r+2}, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_n \in C^0([a, b], \mathbf{R}^n)$  tais que, para cada  $t$  em  $[a, b]$ ,

$$\{\mathbf{b}_1(t), \mathbf{b}_2(t), \dots, \mathbf{b}_r(t), \tilde{\mathbf{b}}_{r+1}(t), \tilde{\mathbf{b}}_{r+2}(t), \dots, \tilde{\mathbf{b}}_n(t)\}$$

é uma base ortonormal para  $\mathbf{R}^n$ , com determinante  $+1$  para cada  $t$ . Em particular,

$$\{\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t), \tilde{\mathbf{b}}_{r+1}(t), \tilde{\mathbf{b}}_{r+2}(t), \dots, \tilde{\mathbf{b}}_n(t)\}$$

é uma base de  $n$  vetores linearmente independentes em  $\mathbf{R}^n$ . Pelo teorema de aproximação de Weierstrass, podemos aproximar  $\tilde{\mathbf{b}}_{r+1}, \tilde{\mathbf{b}}_{r+2}, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_n$  uniformemente no intervalo compacto  $[a, b]$  por funções infinitamente diferenciáveis (polinômios); em particular, pela continuidade do determinante em  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , podemos tomar

$$\tilde{\mathbf{a}}_{r+1}, \tilde{\mathbf{a}}_{r+2}, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_n \in C^\infty([a, b], \mathbf{R}^n)$$

suficientemente próximas (uniformemente em  $[a, b]$ ) de  $\tilde{\mathbf{b}}_{r+1}, \tilde{\mathbf{b}}_{r+2}, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_n$  de modo a se ter

$$\det[\mathbf{a}_1(t) | \mathbf{a}_2(t) | \dots | \mathbf{a}_r(t) | \tilde{\mathbf{a}}_{r+1}(t) | \tilde{\mathbf{a}}_{r+2}(t) | \dots | \tilde{\mathbf{a}}_n(t)] > 0$$

para todo  $t$  em  $[a, b]$ , o que conclui o argumento.  $\square$

É interessante observar que os resultados acima podem ser estendidos a intervalos arbitrários, não necessariamente compactos.

### Proposição B-7

*Sendo  $\mathcal{I}$  intervalo qualquer e  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \in C^m(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ ,  $0 \leq m \leq \infty$ ,  $1 \leq r \leq n-1$ , tais que, para cada  $t \in \mathcal{I}$ ,  $\{\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t)\}$  é um conjunto ortonormal de vetores em  $\mathbf{R}^n$ ; então existem aplicações  $\tilde{\mathbf{a}}_{r+1}, \tilde{\mathbf{a}}_{r+2}, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_n \in C^m(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  tais que, para cada  $t \in \mathcal{I}$ ,*

$$\{\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t), \tilde{\mathbf{a}}_{r+1}(t), \tilde{\mathbf{a}}_{r+2}(t), \dots, \tilde{\mathbf{a}}_n(t)\}$$

*é uma base ortonormal para  $\mathbf{R}^n$ .*

*Prova:* Quando  $\mathcal{I} = [a, b]$  é compacto, o resultado já foi mostrado num resultado anterior (Proposição B-5); consideraremos então o caso  $\mathcal{I} = [a, b[$ , onde  $-\infty < a < b \leq +\infty$ , observando que a prova nos demais casos  $\mathcal{I} = ]a, b]$ ,  $\mathcal{I} = ]a, b[$  pode ser obtida por um argumento análogo.

Sendo então  $\mathcal{I} = [a, b[$ , tomamos uma seqüência  $(b_k)$  crescente,

$$a < b_1 < b_2 < \dots < b_k < b_{k+1} < \dots < b$$

com  $b_k \rightarrow b$  ao  $k \rightarrow \infty$ . Pela Proposição B-5, em cada compacto  $[a, b_k]$  existem aplicações

$$\tilde{\mathbf{a}}_{r+1}^{[k]}, \tilde{\mathbf{a}}_{r+2}^{[k]}, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_n^{[k]} \in C^m([a, b_k], \mathbf{R}^n)$$

tais que a matriz  $\Phi_k(t)$  de dimensão  $n \times n$  dada por

$$\Phi_k(t) = \left[ \mathbf{a}_1(t) \mid \mathbf{a}_2(t) \mid \dots \mid \mathbf{a}_r(t) \mid \tilde{\mathbf{a}}_{r+1}^{[k]}(t) \mid \tilde{\mathbf{a}}_{r+2}^{[k]}(t) \mid \dots \mid \tilde{\mathbf{a}}_n^{[k]}(t) \right]$$

é ortogonal, com determinante  $+1$ , para cada  $t \in [a, b_k]$ . Sejam  $(\alpha_k)$ ,  $(\beta_k)$  seqüências de escalares tais que  $b_{k-1} < \alpha_k < \beta_k < b_k$  para todo  $k \geq 2$ . Para cada  $k$ , vamos construir uma aplicação  $\check{\Phi}_k \in C^m([a, b_k], GL_n^+(\mathbf{R}))$  com  $\check{\Phi}_k(t)$  ortogonal para cada  $t \in [a, b_k]$  e tendo a forma

$$\check{\Phi}_k(t) = \left[ \mathbf{a}_1(t) \mid \mathbf{a}_2(t) \mid \dots \mid \mathbf{a}_r(t) \mid \check{\mathbf{a}}_{r+1}^{[k]}(t) \mid \check{\mathbf{a}}_{r+2}^{[k]}(t) \mid \dots \mid \check{\mathbf{a}}_n^{[k]}(t) \right]$$

e verificando  $\check{\Phi}_{k+1}(t) = \check{\Phi}_k(t)$  para todo  $t \in [a, \alpha_k]$ , de modo que o limite

$$\Phi(t) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \check{\Phi}_k(t)$$

está bem definido para cada  $t \in \mathcal{I}$  e satisfaz as propriedades exigidas.

Pondo  $\check{\Phi}_1(t) = \check{\Phi}_2(t) = \Phi_2(t)$  para todo  $t \in [a, b_2]$ , definimos  $\check{\Phi}_k$ ,  $k \geq 3$ , do seguinte modo: supondo  $\check{\Phi}_k$  definida, satisfazendo as propriedades referidas acima, construímos  $\check{\Phi}_{k+1}$  em  $[a, b_{k+1}]$  colocando

$$\check{\Phi}_{k+1}(t) = \begin{cases} \check{\Phi}_k(t) \check{Q}_k(t) & \text{se } t \in [a, \beta_k] \\ \Phi_{k+1}(t) & \text{se } t \in [\beta_k, b_{k+1}] \end{cases}$$

onde, para cada  $t$  em  $[a, \beta_k]$ ,  $\check{Q}_k(t)$  denota uma matriz ortogonal de ordem  $n - r$  satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i)  $\check{Q}_k \in C^m([a, \beta_k], \mathcal{M}_{n-r}(\mathbf{R}))$ ,  $\det \check{Q}_k = +1$
- (ii)  $\check{Q}_k(t) = I_{n-r}$  para todo  $t \in [a, \alpha_k]$
- (iii)  $\check{Q}_k(t) = Q_k(t)$  para todo  $t \in [\beta_k, b_k]$

onde  $Q_k \in C^m([a, b_k], \mathcal{M}_{n-r}(\mathbf{R}))$  é definida pela equação

$$\left[ \tilde{\mathbf{a}}_{r+1}^{[k+1]}(t) \mid \tilde{\mathbf{a}}_{r+2}^{[k+1]}(t) \mid \dots \mid \tilde{\mathbf{a}}_n^{[k+1]}(t) \right] = \left[ \check{\mathbf{a}}_{r+1}^{[k]}(t) \mid \check{\mathbf{a}}_{r+2}^{[k]}(t) \mid \dots \mid \check{\mathbf{a}}_n^{[k]}(t) \right] Q_k(t)$$

para todo  $t$  em  $[a, b_k]$ . Pela Proposição B-4, existe  $\check{Q}_k$  satisfazendo (i), (ii) e (iii) acima, de modo que uma seqüência  $(\check{\Phi}_k)$  com as propriedades pedidas pode ser construída, concluindo o argumento.  $\square$



**Proposição B-8**

Seja  $\mathcal{I}$  intervalo qualquer e  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \in C^0(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ ,  $1 \leq r \leq n-1$ , tais que, para cada  $t \in \mathcal{I}$ ,  $\{\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t)\}$  é um conjunto de vetores linearmente independentes em  $\mathbf{R}^n$ ; então existem aplicações  $\tilde{\mathbf{a}}_{r+1}, \tilde{\mathbf{a}}_{r+2}, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_n \in C^\infty(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  tais que, para cada  $t \in \mathcal{I}$ ,

$$\{\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_r(t), \tilde{\mathbf{a}}_{r+1}(t), \tilde{\mathbf{a}}_{r+2}(t), \dots, \tilde{\mathbf{a}}_n(t)\}$$

é uma base para  $\mathbf{R}^n$ .

*Prova:* Quando  $\mathcal{I} = [a, b]$  é compacto, o resultado já foi mostrado anteriormente (Proposição B-6); consideraremos então o caso  $\mathcal{I} = [a, b[$ , onde  $-\infty < a < b \leq +\infty$ , a prova nos demais casos  $\mathcal{I} = ]a, b]$ ,  $\mathcal{I} = ]a, b[$  sendo análoga.

Seja então  $\mathcal{I} = [a, b[$ , tomamos uma seqüência  $(b_k)$  crescente,

$$a = b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_k < b_{k+1} < \dots < b$$

com  $b_k \rightarrow b$  ao  $k \rightarrow \infty$ .

Pela Proposição B-7, existem  $\tilde{\mathbf{a}}_{r+1}, \tilde{\mathbf{a}}_{r+2}, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_n \in C^0(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  tais que

$$\Phi(t) \equiv [\mathbf{a}_1(t) | \mathbf{a}_2(t) | \dots | \mathbf{a}_r(t) | \tilde{\mathbf{a}}_{r+1}(t) | \tilde{\mathbf{a}}_{r+2}(t) | \dots | \tilde{\mathbf{a}}_n(t)]$$

é inversível para todo  $t \in \mathcal{I}$ , com determinante sempre positivo.

Para cada  $k$ , seja  $\varepsilon_k > 0$  suficientemente pequeno tal que, para quaisquer

$$\mathbf{b}_{r+1}, \mathbf{b}_{r+2}, \dots, \mathbf{b}_n \in C^0([a, b_k], \mathbf{R}^n)$$

com  $\|\mathbf{b}_j(t) - \tilde{\mathbf{a}}_j(t)\| \leq \varepsilon_k$  para todo  $t \in [a, b_k]$  e  $j = r+1, r+2, \dots, n$ , se tenha

$$[\mathbf{a}_1(t) | \mathbf{a}_2(t) | \dots | \mathbf{a}_r(t) | \mathbf{b}_{r+1}(t) | \mathbf{b}_{r+2}(t) | \dots | \mathbf{b}_n(t)]$$

inversível para cada  $t$  em  $[a, b_k]$ , com determinante positivo. Sem perda de generalidade, podemos assumir  $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1/2$ ,  $\varepsilon_3 \leq \varepsilon_2/2$ , e em geral, para todo  $k$ ,

$$\varepsilon_{k+1} \leq \frac{1}{2} \varepsilon_k$$

Para cada  $k \geq 1$ , tomemos então

$$\varphi_{r+1}^{[k]}, \varphi_{r+2}^{[k]}, \dots, \varphi_n^{[k]} \in C^\infty([a, b_k], \mathbf{R}^n)$$

com

$$\sup_{a \leq t \leq b_k} \|\varphi_j^{[k]}(t) - \tilde{\mathbf{a}}_j(t)\| \leq \frac{1}{2} \varepsilon_k$$

para todo  $j = r+1, r+2, \dots, n$ . Ademais, para cada  $k$  tomamos  $\delta_k > 0$  tal que  $b_k - \delta_k > b_{k-1}$ , por exemplo tomando

$$\delta_k = \frac{b_k - b_{k-1}}{2}$$

Finalmente, para cada  $j = r + 1, r + 2, \dots, n$ , definiremos  $\tilde{\mathbf{a}}_j \in C^\infty(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$  de modo a obter

$$[ \mathbf{a}_1(t) | \mathbf{a}_2(t) | \dots | \mathbf{a}_r(t) | \tilde{\mathbf{a}}_{r+1}(t) | \tilde{\mathbf{a}}_{r+2}(t) | \dots | \tilde{\mathbf{a}}_n(t) ]$$

inversível para cada  $t \in \mathcal{I}$ , estabelecendo assim o resultado. Para isso, construiremos, para cada  $j = r + 1, r + 2, \dots, n$ , uma seqüência de aplicações  $(\tilde{\varphi}_j^{[k]})$  satisfazendo, para cada  $k$ ,

$$(i) \quad \tilde{\varphi}_j^{[k]} \in C^\infty([a, b_k - \delta_k], \mathbf{R}^n)$$

$$(ii) \quad \tilde{\varphi}_j^{[k+1]}(t) = \tilde{\varphi}_j^{[k]}(t) \quad \forall t \in [a, b_k - \delta_k]$$

$$(iii) \quad \det [ \mathbf{a}_1(t) | \dots | \mathbf{a}_r(t) | \tilde{\varphi}_{r+1}^{[k]}(t) | \dots | \tilde{\varphi}_n^{[k]}(t) ] > 0 \quad \forall t \in [a, b_k - \delta_k]$$

de modo que, para cada  $j = r + 1, r + 2, \dots, n$  e  $t \in \mathcal{I}$ , o limite

$$\tilde{\mathbf{a}}_j(t) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}_j^{[k]}(t)$$

está bem definido e possui as propriedades exigidas.

Resta apenas mostrar como construir, para cada  $j = r + 1, r + 2, \dots, n$ , a seqüência de funções  $(\tilde{\varphi}_j^{[k]})$  descrita acima. Para  $k = 1$ , definiremos, em  $[a, b_1 - \delta_1]$ ,

$$\tilde{\varphi}_j^{[1]}(t) = \varphi_j^{[1]}(t)$$

Para  $k = 2$ , tomamos, como na Proposição B-2,  $\tilde{\varphi}_j^{[2]} \in C^\infty([a, b_2 - \delta_2], \mathbf{R}^n)$  tal que

$$\tilde{\varphi}_j^{[2]}(t) = \tilde{\varphi}_j^{[1]}(t) \quad \forall t \in [a, b_1 - \delta_1] \quad , \quad \tilde{\varphi}_j^{[2]}(t) = \varphi_j^{[2]}(t) \quad \forall t \in [b_1, b_2 - \delta_2]$$

e

$$\| \tilde{\varphi}_j^{[2]}(t) - \tilde{\mathbf{b}}_j(t) \| \leq \varepsilon_1 \quad \forall t \in [b_1 - \delta_1, b_1]$$

Em particular, tem-se que

$$[ \mathbf{a}_1(t) | \mathbf{a}_2(t) | \dots | \mathbf{a}_r(t) | \tilde{\varphi}_{r+1}^{[2]}(t) | \tilde{\varphi}_{r+2}^{[2]}(t) | \dots | \tilde{\varphi}_n^{[2]}(t) ]$$

é inversível para cada  $t \in [a, b_2 - \delta_2]$ , com determinante positivo.

Em geral, supondo obtida  $\tilde{\varphi}_j^{[k]} \in C^\infty([a, b_k - \delta_k], \mathbf{R}^n)$  com as propriedades (i), (ii) e (iii) acima, tomamos, como na Proposição B-2,  $\tilde{\varphi}_j^{[k+1]} \in C^\infty([a, b_{k+1} - \delta_{k+1}], \mathbf{R}^n)$  tal que

$$\tilde{\varphi}_j^{[k+1]}(t) = \tilde{\varphi}_j^{[k]}(t) \quad \forall t \in [a, b_k - \delta_k] \quad , \quad \tilde{\varphi}_j^{[k+1]}(t) = \varphi_j^{[k+1]}(t) \quad \forall t \in [b_k, b_{k+1} - \delta_{k+1}]$$

e

$$\|\tilde{\varphi}_j^{[k+1]}(t) - \tilde{b}_j(t)\| \leq \varepsilon_k \quad \forall t \in [b_k - \delta_k, b_k]$$

Claramente, para cada  $j = r + 1, r + 2, \dots, n$ , a seqüência  $(\tilde{\varphi}_j^{[k]})$  assim construída satisfaz as propriedades pedidas para todo  $k$ , de modo que  $\tilde{\alpha}_{r+1}(t), \tilde{\alpha}_{r+2}(t), \dots, \tilde{\alpha}_n(t)$  procuradas podem ser facilmente obtidas tomando-se o limite acima.  $\square$