

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

# Comportamento assintótico de soluções da equação do aerofólio em intervalos disjuntos

por

Marcos Rondiney dos Santos Ferreira

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Leandro Farina  
Orientador

Profa. Dra Liliane Basso Barichello  
Co-orientadora

Porto Alegre, Março de 2015.

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Ferreira, Marcos Rondiney dos Santos

Comportamento assintótico de soluções da equação do aerofólio em intervalos disjuntos / Marcos Rondiney dos Santos Ferreira.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2015.

74 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2015.

Orientador: Farina, Leandro; Co-orientadora: Barichello, Lilliane Basso

Dissertação: Matemática Aplicada

Equação Integral Singular de Cauchy, Valor Principal de Cauchy, Equação do Aerofólio, Expansão assintótica, Solução Polinomial

# Comportamento assintótico de soluções da equação do aerofólio em intervalos disjuntos

por

Marcos Rondiney dos Santos Ferreira

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

## Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Ondas oceânicas; Computação Científica.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Farina

Co-orientadora: Profa. Dra Liliane Basso Barichello

Banca examinadora:

Prof. Dra. Cynthia Feijó Segatto  
PPGMAp/UFRGS

Prof. Dr. Esequia Sauter  
DMPA/UFRGS

Prof. Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho  
LAC/INPE

Dissertação apresentada e aprovada em  
18/03/2015.

Carlos Hoppen  
Coordenador

## AGRADECIMENTO

Foi desafio escrever meus agradecimentos em poucas linhas a todas as pessoas que fizeram parte de minha trajetória de 3 anos na conquista do meu título de mestre em Matemática Aplicada. Desafio este que se compara as difíceis escolhas que tive que fazer ao abandonar meu emprego como Bombeiro Militar no estado do Amapá e deixar pessoas que amava para ir ao outro lado do país com os objetivos de melhorar minha formação e galgar melhor condição de vida.

Início os agradecimentos por meus pais, que buscaram me proporcionar sempre uma boa educação e me apoiaram em minhas escolhas. Obrigado Sr. Geraldo Lamarão Ferreira e Sra. Áurea Sueli dos Santos Ferreira por, além de me oferecerem oportunidade de estudar, sempre me aconselharam nos momentos mais difíceis, sou muito feliz por ter vocês em minha vida.

Agradeço à meu irmão e amigo Márleson Rôndiner dos Santos Ferreira, por ser uma referência e me incentivar a continuar meus estudos.

Agradeço ainda à meu Avô Benedito, que sinto está próximo de mim em pensamento, por ser um homem admirável, humilde e inspirador. Obrigado por seus incentivos e ensinamentos.

Não posso deixar de agradecer aos meus amigos de Porto Alegre que me incentivaram e compartilharam de minha conquista e fizeram com que a distância de casa se tornasse menos dolorosa. Obrigado pela hospitalidade e amizade de todos.

O presente trabalho foi realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

“Tudo que é preciso para o triunfo do mal é  
que os homens de bem não façam nada.”

Edmund Burke

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b> . . . . .	<b>ix</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b> . . . . .	<b>xi</b>
<b>RESUMO</b> . . . . .	<b>xii</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>xiii</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>2 INTEGRAIS SINGULARES DO TIPO CAUCHY</b> . . . . .	<b>17</b>
2.1 Propriedades da integral singular com núcleo de Cauchy . . . . .	20
2.2 Soluções da equação integral singular unidimensional do primeiro tipo com núcleo de Cauchy . . . . .	23
2.3 Equações integrais singulares aplicadas a problemas de valor de fronteira em elasticidade e mecânica de fluidos . . . . .	24
2.3.1 Um problema de rachadura em teoria da elasticidade . . . . .	25
2.3.2 Um problema de espalhamento de ondas de superfície . . . . .	28
2.3.3 Um problema de distribuição de pressão e sustentação sobre seções planas em pequenos ângulos de ataque . . . . .	32
<b>3 MODELO MATEMÁTICO E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DAS SOLUÇÕES</b> . . . . .	<b>37</b>
3.1 Modelo matemático . . . . .	37

<b>3.2 Resultados principais</b> . . . . .	39
3.2.1 Comportamento assintótico . . . . .	39
3.2.2 Comparação com a solução da equação do aerofólio em um intervalo contínuo . . . . .	39
3.2.2.1 Discussão para funções $\psi$ ímpares . . . . .	40
3.2.2.2 Casos particulares da função $\psi(t)$ . . . . .	40
<b>4 RESULTADOS NUMÉRICOS</b> . . . . .	<b>44</b>
4.1 As soluções $f_\varepsilon$ , $f_0$ e $f$ para $\psi(t) = 1$ e $\psi(t) = t$ . . . . .	44
4.2 A solução $f_\varepsilon$ da equação do aerofólio para vários valores de $\varepsilon$ e funções $\psi(t)$ . . . . .	46
4.3 Comparação entre as soluções $f_\varepsilon$ e $f_0$ . . . . .	50
4.4 Comparação entre as funções $f_\varepsilon$ e $f$ . . . . .	53
4.5 Cálculo de $\ f_\varepsilon - f_0\ _2^2$ . . . . .	58
4.6 Cálculo de $\ f_\varepsilon - f_0\ _2^2$ . . . . .	58
<b>5 SOLUÇÕES POLINOMIAIS E MÉTODO ESPECTRAL</b> . . . . .	<b>60</b>
5.1 Solução quase-polinomial . . . . .	60
5.1.1 Aproximação de ordem 1 . . . . .	60
5.1.2 Um método espectral da equação do aerofólio generalizada em intervalos disjunto próximos . . . . .	61
5.2 Soluções analíticas das equações do aerofólio . . . . .	62

<b>6 CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>68</b>
<b>APÊNDICE A</b> . . . . .	<b>70</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .	<b>73</b>



## LISTA DE FIGURAS

2.1	Escoamento em torno de uma placa plana [1, Cap. 5]. . . . .	33
2.2	Diferença de pressão sobre a placa [1, Cap. 5]. . . . .	34
2.3	Distribuição de vórtices sobre a placa plana [1, Cap. 5]. . . . .	35
4.1	Gráfico de $f_\varepsilon(x)$ , $f_0(x)$ e $f(x)$ sobre o intervalo $(\varepsilon, 1)$ para $\varepsilon = 0.01$ e $\psi(t) = 1$ . . . . .	44
4.2	Gráfico de $f_\varepsilon(x)$ , $f_0(x)$ e $f(x)$ sobre o intervalo $(-1, -\varepsilon)$ para $\varepsilon = 0.01$ e $\psi(t) = 1$ . . . . .	45
4.3	Gráfico de $f_\varepsilon(x)$ (azul) e $f_0(x) = f(x)$ (vermelho) sobre o intervalo $(-1, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, 1)$ para $\varepsilon = 0.01$ e $\psi(t) = t$ . . . . .	46
4.4	Gráfico de $f_\varepsilon(t)$ quando $\psi(t) = 1$ para $\varepsilon = 0.01$ (azul), $\varepsilon =$ $0.005$ (vermelho) e $\varepsilon = 0.001$ (verde). . . . .	47
4.5	Gráfico ampliado de $f_\varepsilon(t)$ quando $\psi(t) = 1$ para $\varepsilon = 0.01$ (azul), $\varepsilon = 0.005$ (vermelho) e $\varepsilon = 0.001$ (verde). . . . .	47
4.6	Gráfico de $f_\varepsilon(t)$ quando $\psi(t) = t$ para $\varepsilon = 0.01$ (azul), $\varepsilon =$ $0.005$ (vermelho) e $\varepsilon = 0.001$ (verde). . . . .	48
4.7	Gráfico ampliado de $f_\varepsilon(t)$ quando $\psi(t) = t$ para $\varepsilon = 0.01$ (azul), $\varepsilon = 0.005$ (vermelho) e $\varepsilon = 0.001$ (verde). . . . .	48
4.8	Gráfico de $f_\varepsilon(t)$ quando $\psi(t) = T_3(t)$ para $\varepsilon = 0.01$ (azul), $\varepsilon =$ $0.005$ (vermelho) e $\varepsilon = 0.001$ (verde). . . . .	49
4.9	Gráfico ampliado de $f_\varepsilon(t)$ quando $\psi(t) = T_3(t)$ para $\varepsilon = 0.01$ (azul), $\varepsilon = 0.005$ (vermelho) e $\varepsilon = 0.001$ (verde). . . . .	49

4.10	Gráfico de $f_\varepsilon(t)$ e $f_0(t)$ (vermelho) quando $\psi(t) = 1$ para $\varepsilon = 0.01$ (azul), $\varepsilon = 0.005$ (cinza) e $\varepsilon = 0.001$ (verde). . . . .	50
4.11	Gráfico de $f_\varepsilon(t)$ e $f_0(t)$ (vermelho) quando $\psi(t) = t$ para $\varepsilon = 0.01$ (azul), $\varepsilon = 0.005$ (cinza) e $\varepsilon = 0.001$ (verde). . . . .	51
4.12	Gráfico de $f_\varepsilon(t)$ e $f_0(t)$ (vermelho) quando $\psi(t) = T_2(t)$ para $\varepsilon = 0.01$ (azul), $\varepsilon = 0.005$ (cinza) e $\varepsilon = 0.001$ (verde). . . . .	52
4.13	Gráfico de $f_\varepsilon(t)$ e $f_0(t)$ (vermelho) quando $\psi(t) = T_3(t)$ para $\varepsilon = 0.01$ (azul), $\varepsilon = 0.005$ (cinza) e $\varepsilon = 0.001$ (verde). . . . .	53
4.14	Gráficos de $f_\varepsilon(t)$ e $f(t)$ para $\varepsilon = 0.01$ , $\varepsilon = 0.005$ e $\varepsilon = 0.001$ quando $\psi(t) = 1$ . . . . .	54
4.15	Gráficos de $f_\varepsilon(t)$ e $f(t)$ para $\varepsilon = 0.01$ , $\varepsilon = 0.005$ e $\varepsilon = 0.001$ quando $\psi(t) = T_2(t)$ . . . . .	55
4.16	Gráficos de $f_\varepsilon(t)$ e $f(t)$ para $\varepsilon = 0.01$ , $\varepsilon = 0.005$ e $\varepsilon = 0.001$ quando $\psi(t) = t$ . . . . .	56
4.17	Gráficos de $f_\varepsilon(t)$ e $f(t)$ para $\varepsilon = 0.01$ , $\varepsilon = 0.005$ e $\varepsilon = 0.001$ quando $\psi(t) = T_3(t)$ . . . . .	57

## LISTA DE TABELAS

4.1	Quadrado da norma $L_2$ de $f_\varepsilon - f_0$ para diferentes valores de $\varepsilon$ e funções $\psi$ . . . . .	58
4.2	Quadrado da norma $L_2$ de $f_\varepsilon - f_0$ para diferentes valores de $\varepsilon$ e funções $\psi$ . . . . .	59

## RESUMO

Neste trabalho investigamos, dos pontos de vistas analítico e numérico, o comportamento assintótico da solução da equação do aerofólio, com uma singularidade do tipo Cauchy, definida sobre um intervalo com uma pequena abertura. Exibimos um modelo matemático com uma solução  $f_\varepsilon$  para o intervalo disjunto  $G_\varepsilon = (-1, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, 1)$  e uma solução  $f_0$  que corresponde ao limite de  $f_\varepsilon$  quando  $(\varepsilon \rightarrow 0)$ , relacionando esta última com a solução da equação do aerofólio  $f$  no intervalo  $(-1, 1)$ . Além do mais, demonstramos casos particulares de funções  $\psi = T_m$  e  $\psi = U_n$  (onde  $T_m$  e  $U_n$  são os polinômios de Tchebychev do primeiro e segundo tipo respectivamente) em que temos a igualdade  $f = f_0$  e conseqüentemente  $f_\varepsilon \approx f$ . Apresentamos e comparamos numericamente as soluções  $f_\varepsilon$ ,  $f_0$  e  $f$  para diferentes funções  $\psi$  e valores de  $\varepsilon$  no intervalo  $G_\varepsilon$ . Mostramos ainda soluções quase polinomiais analíticas da equação do aerofólio, e propomos um método espectral para a equação do aerofólio generalizada. Por fim, obtemos soluções analíticas das equações do aerofólio para os intervalos  $G_\varepsilon$ ,  $(-1, 1) \setminus \{0\}$  e  $(-1, 1)$  para diferentes funções  $\psi(t)$  através da expansão em série da densidade da integral singular com núcleo Cauchy.

**Palavras-Chave:** Equação Integral Singular de Cauchy, Valor Principal de Cauchy, Equação do Aerofólio, Expansão assintótica, Solução Polinomial.

## ABSTRACT

In this work we investigate, of the analytical and numerical points of views, the asymptotic behavior of the airfoil equation solution with a singularity of the Cauchy type, defined over a interval with a small opening. We display a mathematical model with a  $f_\varepsilon$  solution to the disjoint interval  $G_\varepsilon = (-1, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, 1)$  and a  $f_0$  solution corresponding to limit of  $f_\varepsilon$  when  $(\varepsilon \rightarrow 0)$ , linking the latter with the solution of the airfoil equation  $f$  in the interval  $(-1, 1)$ . Furthermore, we demonstrate particular cases of functions  $\psi = T_m$  and  $\psi = U_n$  (where  $T_m$  and  $U_n$  are the Chebyshev polynomials of the first and second type respectively) where we have equality  $f = f_0$  and then  $f_\varepsilon \approx f$ . We present and compare numerically the solutions  $f_\varepsilon$ ,  $f_0$  and  $f$  for different functions  $\psi$  and values of  $\varepsilon$  in  $G_\varepsilon$ . We also show almost polynomial analytical solutions for the airfoil equation, and we propose a spectral method for the generalized airfoil equation. Finally, we obtain analytical solutions of the airfoil equations to the interval  $G_\varepsilon$ ,  $(-1, 1) \setminus \{0\}$  and  $(-1, 1)$  for various functions  $\psi(t)$  by expanding in series the density of the Cauchy singular integral.

**Keywords:** Cauchy Singular Integral Equation, Cauchy Principal Value, Airfoil Equation, Asymptotic Expansion, Polynomial Solution, Principal Part.

# 1 INTRODUÇÃO

A equação do aerofólio, também conhecida como equação integral singular de Cauchy do primeiro tipo, há muitos anos vem sendo estudada devido à sua grande importância em problemas aplicados em mecânica de fluidos, teoria da elasticidade dentre outros ramos da física matemática. Um dos primeiros a tratar da teoria de equações integrais singulares foi Muskhelishvili [11] que apresenta em seu livro um estudo das equações integrais singulares unidimensionais fazendo o uso da teoria de funções de variáveis complexas e a teoria das equações integrais de Fredholm. Ele dá algumas definições a respeito de integral de Cauchy, apresenta resultados clássicos importantes como por exemplo a fórmula de Plemelj, a fórmula de transformação de Poincaré-Bertrand, a fórmula de inversão de Hilbert, dentre outros resultados interessantes. Seguindo na mesma linha de análise complexa, Gakhov [5] aborda em seu livro, problemas de valor de fronteira especialmente voltados para integrais singulares com núcleo do tipo Cauchy definidas tanto sobre curvas abertas quanto em curvas fechadas. Ele define e demonstra propriedades interessantes sobre este tipo de integral com vários resultados analíticos. Livros mais recentes como o de Breslin e Andersen [1] e Lifanov et al. [7, p. 5] apresentam soluções analíticas para a equação do aerofólio sobre um intervalo contínuo de acordo com o comportamento da solução no extremos do aerofólio. Contudo, Breslin e Andersen [1] fornecem uma visão mais física do assunto. Mandal e Chakrabarti [8] cobrem uma variedade de equações integrais singulares com ênfase especial no método de solução, para a equação do aerofólio. Além de fornecerem as soluções analíticas, é mostrado algumas de suas aplicações como por exemplo em mecânica de fluidos e elasticidade.

Como podemos observar, vários trabalhos tratam da equação do aerofólio sobre um intervalo e suas generalizações. Porém, temos poucos livros e artigos abordando a equação do aerofólio sobre um intervalo com uma pequena abertura. No artigo de Tricomi [12], por exemplo, é apresentada uma solução analítica para

a equação do aerofólio em dois intervalos disjuntos  $(-1, -k) \cup (k, 1)$ . Mais recentemente, Chakrabarti e Martha [2] também mostram vários métodos de solução para equações integrais singulares com núcleo Cauchy do primeiro tipo, inclusive a solução apresentada por Tricomi.

Neste trabalho, investigamos o comportamento assintótico da solução da equação do aerofólio com uma singularidade do tipo Cauchy definida sobre um intervalo com uma pequena abertura dos pontos de vistas analítico e numérico. No capítulo 2 apresentamos algumas definições a respeito de valor principal de Cauchy e integrais singulares com núcleo do tipo Cauchy. Apresentamos as soluções analíticas da equação do aerofólio para um intervalo  $(a, b)$  e descrevemos exemplos de algumas aplicações em mecânica de fluidos e elasticidade. No capítulo seguinte, analisamos o comportamento assintótico da equação do aerofólio definida sobre um intervalo com uma pequena abertura. Exibimos um modelo matemático com uma solução  $f_\varepsilon$  para o intervalo disjunto  $(-1, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, 1)$  e uma solução  $f_0$  que corresponde ao limite de  $f_\varepsilon$  quando  $(\varepsilon \rightarrow 0)$ . Podemos relacionar esta com a solução da equação do aerofólio  $f$  definida sobre o intervalo  $(-1, 1)$ . Ainda no capítulo 3 discutimos casos particulares de funções  $\psi$  em que temos a igualdade para  $f = f_0$  e conseqüentemente  $f_\varepsilon \approx f$ , exibimos resultados analíticos. No capítulo 4 apresentamos soluções numéricas comparando as funções  $f_\varepsilon$ ,  $f_0$  e  $f$ . No capítulo 5 apresentamos soluções quase polinomiais da equação do aerofólio e propomos um método espectral para a equação do aerofólio generalizada, fornecemos ainda soluções analíticas das equações do aerofólio para diferentes funções  $\psi(t)$  de entrada. No capítulo 6 discutimos as conclusões e perspectivas em trabalhos futuros.

## 2 INTEGRAIS SINGULARES DO TIPO CAUCHY

Neste capítulo, vamos apresentar e estudar algumas definições e propriedades a respeito das equações integrais singulares do primeiro tipo com núcleo Cauchy, em seguida vamos mostrar aplicações para este tipo de equação integral. Para isso, começamos com algumas definições, segundo [7].

Em todo este capítulo vamos adotar como padrão o plano complexo  $xOy$ . Algumas vezes denotaremos pontos no plano por  $t = x + iy$ , sendo  $i$  a unidade imaginária.

A menos que seja especificado, por padrão vamos sempre trabalhar com *linhas simples*, ou seja, não intersectam-se.

Dizemos que  $L$  é uma curva suave aberta (arco), se  $L$  puder ser definida pelas relações

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad s_a \leq s \leq s_b, \quad (2.0.1)$$

onde  $s_a$  e  $s_b$  são constantes finitas,  $x(s)$  e  $y(s)$  são funções contínuas no intervalo de definição e as derivadas primeira  $x'(s)$  e  $y'(s)$  não podem ser ambas iguais a zero no mesmo ponto do intervalo e diferentes valores do parâmetro  $s$  correspondem a diferentes pontos em  $L$ .

A curva  $L$  será chamada uma *curva suave fechada* se  $L$  é uma curva suave tal que

$$x(s_b) = x(s_a), \quad y(s_b) = y(s_a), \quad (2.0.2)$$

$$x'(s_b - 0) = x'(s_a + 0), \quad y'(s_b - 0) = y'(s_a + 0). \quad (2.0.3)$$

As igualdades (2.0.2) garantem que a curva  $L$  é fechada e (2.0.3) indica que a direção da tangente muda continuamente a medida que passa pelos pontos  $s_a$  e  $s_b$  do arco coordenado. Os zeros presentes dentro dos parênteses das derivadas  $x'$  e



$y'$  servem apenas para indicar que a direção da tangente que tende a esquerda ( $-0$ ) de  $s_b$  será igual a direção da tangente que tende a direita ( $+0$ ) de  $s_a$ . Neste caso, as funções  $x(s)$ ,  $y(s)$  e  $x'(s)$ ,  $y'(s)$  podem ser consideradas periódicas com período  $T = s_b - s_a$ .

Uma *linha suave* (*simples*) é a união de um número finito de curvas suaves fechadas ou abertas mutuamente disjuntas (particularmente estas não tem pontos finais em comum, ou seja, não intersectam-se).

Uma curva é *suave por partes*, se é definida pela união finita de curvas suaves abertas sem pontos em comum, a não ser possivelmente pelos pontos finais.

**Definição 2.1** (CONDIÇÃO DE HÖLDER). Uma função  $\phi(t)$  definida em um conjunto  $D$ , normalmente no plano complexo, satisfaz a condição de Hölder com expoente  $\mu$ , ou seja, é da classe  $H(\mu)$  em  $D$ , se para quaisquer  $t_1, t_2 \in D$ , existem constantes  $A \geq 0$  e  $0 < \mu \leq 1$  tais que

$$|\phi(t_1) - \phi(t_2)| \leq A|t_1 - t_2|^\mu. \quad (2.0.4)$$

As constantes  $A$  e  $\mu$  são chamadas respectivamente o coeficiente e o expoente da condição de Hölder. Algumas vezes a constante  $\mu$  não será explicitada na notação, portanto, podemos apenas dizer que  $\phi(t)$  satisfaz a condição  $H$  ou pertence à classe  $H$  no conjunto  $D$ . Escrevemos  $\phi(t) \in H(\mu)$  ou  $\phi(t) \in H$ .

*Observação 2.1.* A inclusão  $\phi(t) \in H(\mu)$  implica que  $|\phi(t)| \in H(\mu)$ .

*Observação 2.2.*  $\mu$  não deve ser maior que a unidade, pois neste caso a condição (2.0.4) implicaria na derivada  $\phi'(t)$  nula para todo  $t$  e a função  $\phi(t)$  deveria ser igual a uma constante, o que não é um caso interessante a ser estudado.

**Definição 2.2.** Seja  $t_0$  um ponto sobre a curva  $L$  que não sejam suas extremidades. Considere um círculo com centro em  $t_0$  cujo raio  $\varepsilon > 0$  é tão pequeno que sua intersecção com  $L$  consiste de dois pontos  $t'$  e  $t''$ . Denote por  $l$  o arco formado por  $t't'' \subset L$ . Se a integral

$$\int_{L \setminus l} \frac{\phi(t)}{t - t_0} dt$$

tem um limite finito  $\Phi(t_0)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , esse limite é chamado O VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY DA INTEGRAL, ou seja,

$$\Phi(t_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L \setminus I} \frac{\phi(t)}{t - t_0} dt = \int_L \frac{\phi(t)}{t - t_0} dt. \quad (2.0.5)$$

**Notação 2.1.** *O sinal da integral  $\int$  representa a integral no sentido do valor principal de Cauchy.*

Para o caso unidimensional onde a integral singular é definida sobre o segmento  $L = [a, b]$  do eixo  $OX$  temos

$$\begin{aligned} \Phi(x_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L \setminus I} \frac{\phi(x)}{x - x_0} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{x_0 - \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b \frac{\phi(x)}{x - x_0} dx \right] \\ &= \int_a^b \frac{\phi(x)}{x - x_0} dx, \quad x_0 \in (a, b). \end{aligned} \quad (2.0.6)$$

Para mostrarmos que a integral (2.0.6) faz sentido, primeiramente vamos mostrar o caso em que  $\phi(x) = 1$ . Assim, pela definição

$$\int_a^b \frac{1}{x - x_0} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{x_0 - \varepsilon} \frac{1}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b \frac{1}{x - x_0} dx \right], \quad x_0 \in (a, b). \quad (2.0.7)$$

Da primeira integral no lado direito da equação (2.0.7) temos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{x_0 - \varepsilon} \frac{1}{x - x_0} dx \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon - \ln(x_0 - a). \quad (2.0.8)$$

Analogamente para a segunda integral no lado direito de (2.0.7)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{x_0 + \varepsilon}^b \frac{1}{x - x_0} dx \right] = \ln(b - x_0) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon. \quad (2.0.9)$$

Então para  $a < x_0 < b$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{x - x_0} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{x_0 - \varepsilon} \frac{1}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b \frac{1}{x - x_0} dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon - \ln(x_0 - a) + \ln(b - x_0) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon \\ &= -\ln(x_0 - a) + \ln(b - x_0). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_a^b \frac{1}{x - x_0} dx = \ln \left( \frac{b - x_0}{x_0 - a} \right). \quad (2.0.10)$$

Para o caso mais geral requeremos que  $\phi(x)$  obedeça a condição de Hölder no intervalo  $(a, b)$ . Primeiramente, apresentamos uma alternativa, mas definição equivalente, para o valor principal de Cauchy da integral singular (2.0.6), cf. [10, p. 426]:

$$\int_a^b \frac{\phi(x)}{x - x_0} dx = \int_a^b \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} dx + \phi(x_0) \int_a^b \frac{dx}{x - x_0}. \quad (2.0.11)$$

Tendo em vista a condição de Hölder,

$$\left| \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} \right| < \frac{A}{|x - x_0|^{1-\mu}},$$

Gakhov [5] afirma que uma integral imprópria existe se a ordem de infinitude de um integrando  $h(x)$  é muito menor que a unidade, ou seja,

$$|h(x)| < \frac{M}{|x - x_0|^\alpha}, \quad \alpha < 1.$$

Caso contrário a integral *diverge* ou *não existe*.

Portanto, a primeira integral no lado direito de (2.0.11) existe como integral imprópria e a segunda integral é idêntica a (2.0.10).

Conseqüentemente, a integral singular

$$\int_a^b \frac{\phi(x)}{x - x_0} dx$$

onde  $\phi(x)$  satisfaz a condição de Hölder, existe no sentido de valor principal de Cauchy.

## 2.1 Propriedades da integral singular com núcleo de Cauchy

Fica claro que uma integral singular possui a propriedade da soma de uma integral ordinária, ou seja, a integral de uma soma é igual a soma das integrais,

e um fator constante pode ser retirado do sinal da integral. Mas antes de apresentarmos propriedades menos triviais, regra da mudança de variáveis e integração por partes, fazemos uma observação importante.

Anteriormente, na definição da integral singular de Cauchy excluimos uma vizinhança simétrica centrada no ponto singular investigado, porém, isso não é uma exigência, veja [10, pg. 426].

*Observação 2.3.* Se na definição 2.0.6, para o caso real, excluimos uma vizinhança não-simétrica  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  de  $x_0$ , com  $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\varepsilon)$  e  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , então temos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{x_0 - \varepsilon_1} + \int_{x_0 + \varepsilon_2}^b \right] \frac{\phi(x)}{x - x_0} dx = \int_a^b \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} dx + \phi(x_0) \log \frac{b - x_0}{x_0 - a} + \phi(x_0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (2.1.1)$$

Obviamente, o limite só existe se

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = c, \text{ com } c \neq 0 \text{ ou } c \neq \infty. \quad (2.1.2)$$

Em particular, se  $c = 1$  temos a definição para uma vizinhança simétrica. Por outro lado, essa nova definição diferencia-se da padrão por um termo aditivo  $\phi(x_0) \log c$ . Portanto, em 2.0.6 não há necessidade que a vizinhança excluída seja simétrica, mas sim que o limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 1, \quad (2.1.3)$$

seja satisfeito.

**Propriedade 2.1** (MUDANÇA DE VARIÁVEIS). *Se a função  $t = \alpha(\zeta)$  tem primeira derivada contínua  $\alpha'(\zeta)$  que não se anula em toda parte, e constitui um mapeamento injetivo do contorno  $L$  em um contorno  $L'$ , então*

$$\int_L \frac{\phi(t)}{t - t_0} dt = \int_{L'} \frac{\phi[\alpha(\zeta)]\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(\xi_0)} d\zeta, \quad (2.1.4)$$

onde

$$t_0 = \alpha(\xi_0).$$

**Demonstração.** Veja em [5, pg. 17].

**Propriedade 2.2** (INTEGRAÇÃO POR PARTES). *Se  $\phi(t)$  é uma função continuamente diferenciável e o ponto  $t_0$  não coincide com os pontos finais do contorno  $L$  (a ou b), então a fórmula seguinte de integração por parte é válida.*

$$\begin{aligned} \int_L \frac{\phi(t)}{t-t_0} dt &= \pm i\pi\phi(t_0) + \phi(b)\ln(b-t_0) - \phi(a)\ln(a-t_0) \\ &\quad - \int_L \phi'(t)\ln(t-t_0) dt. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

*Se  $a = b$ , ou seja, se o contorno  $L$  for fechado, então a fórmula acima se reduz a:*

$$\int_L \frac{\phi(t)}{t-t_0} dt = +i\pi\phi(t_0) - \int_L \phi'(t)\ln(t-t_0) dt. \quad (2.1.6)$$

**Demonstração.** Veja em [5, pg. 18].

A afirmação abaixo é um resultado muito importante que será bastante utilizado na seção 5.2, cf. [5, pg.81].

**Afirmção 2.1.** *Seja  $L = \sum_{k=1}^m L_k$  um contorno consistindo de  $m$  curvas abertas simples não tendo pontos finais em comum. As coordenadas dos pontos finais são denotadas por  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{2m}$ . Seja  $p$  um inteiro,  $0 \leq p \leq 2m$ , e  $P(z)$  um polinômio.*

*Então, temos*

$$I(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^p (\tau - c_k)^{1/2}}{\prod_{j=p+1}^{2m} (\tau - c_j)^{1/2}} \cdot \frac{P(\tau)}{\tau - t} d\tau = -P^*(t), \quad (2.1.7)$$

*onde  $P^*(z)$  é um polinômio que representa a parte principal da expansão da densidade da integral de Cauchy, na vizinhança do infinito, ou seja, um polinômio que*

obedece a condição

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{\prod_{k=1}^p (z - c_k)^{1/2}}{2m \prod_{j=p+1}^m (z - c_j)^{1/2}} \cdot P(z) - P^*(z) \right] = 0. \quad (2.1.8)$$

## 2.2 Soluções da equação integral singular unidimensional do primeiro tipo com núcleo de Cauchy

Nesta seção, vamos apresentar as soluções da equação integral singular unidimensional do primeiro tipo com núcleo Cauchy também conhecida como *equação do aerofólio*. Esse tipo de equação integral é muito comum em várias áreas de aplicações como elasticidade e mecânica dos fluidos e pode ser escrita como

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\phi(t)}{x - t} dt = f(x), \quad x \in (a, b), \quad (2.2.1)$$

onde a integral é definida no sentido de valor principal de Cauchy e  $f(x)$  é uma função contínua conhecida definida no intervalo  $(a, b)$ . Suas soluções dependem do comportamento de  $\phi(t)$  nos extremos do intervalo  $(a, b)$  e são ditadas pela física dos problemas em que a equação integral aparece. Suas soluções são dadas de três formas (veja [1] para mais detalhes):

1.  $\phi(x) = O(|x - a|^{-1/2})$  com  $x \rightarrow a$  e  $\phi(x) = O(|x - b|^{-1/2})$  com  $x \rightarrow b$ .

Neste caso, dizemos que todas as soluções são de classe  $(\infty, \infty)$ , isto é, podem ser ilimitadas em ambos pontos finais do intervalo  $(a, b)$ . A solução é dada pela fórmula:

$$\phi(x) = -\frac{1}{\pi [(x - a)(b - x)]^{1/2}} \left[ C + \int_a^b [(t - a)(b - t)]^{1/2} \frac{f(t)}{x - t} dt \right], \quad (2.2.2)$$

$$x \in (a, b),$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária e relacionada com  $\phi$  por

$$\int_a^b \phi(t) dt = C.$$

2.  $\phi(x) = O(|x - a|^{-1/2})$  com  $x \rightarrow a$  e  $\phi(x) = O(|x - b|^{1/2})$  com  $x \rightarrow b$ , ou,  
 $\phi(x) = O(|x - a|^{1/2})$  com  $x \rightarrow a$  e  $\phi(x) = O(|x - b|^{-1/2})$  com  $x \rightarrow b$ .

Aqui, em ambos os casos admite-se uma única solução. Se a solução é classe  $(\infty, 0)$ , isto é, limitada apenas no ponto  $t = b$  sua solução é

$$\phi(x) = -\frac{1}{\pi} \left( \frac{b-x}{x-a} \right)^{1/2} \int_a^b \left( \frac{t-a}{b-t} \right)^{1/2} \frac{f(t)}{x-t} dt, \quad x \in (a, b). \quad (2.2.3)$$

Agora, se a solução é limitada apenas no ponto  $t = a$  (ou seja, é classe  $(0, \infty)$ ),

$$\phi(x) = -\frac{1}{\pi} \left( \frac{x-a}{b-x} \right)^{1/2} \int_a^b \left( \frac{b-t}{t-a} \right)^{1/2} \frac{f(t)}{x-t} dt, \quad x \in (a, b). \quad (2.2.4)$$

3.  $\phi(x) = O(|x - a|^{1/2})$  com  $x \rightarrow a$  e  $\phi(x) = O(|x - b|^{1/2})$  com  $x \rightarrow b$ .

Para este caso há apenas uma solução (de classe  $(0, 0)$ ), dada por

$$\phi(x) = -\frac{1}{\pi} [(x-a)(b-x)]^{1/2} \int_a^b \frac{1}{[(t-a)(b-t)]^{1/2}} \frac{f(t)}{x-t} dt, \quad (2.2.5)$$

$x \in (a, b)$ ,

e somente se  $f(x)$  satisfaz o *critério de solubilidade*

$$\int_a^b \frac{f(t)}{[(t-a)(b-t)]^{1/2}} dt = 0.$$

Observe que o critério de solubilidade é satisfeito quando  $f$  é uma função ímpar.

### 2.3 Equações integrais singulares aplicadas a problemas de valor de fronteira em elasticidade e mecânica de fluidos

Nesta seção mostramos algumas aplicações da equação integral singular de Cauchy para um intervalo contínuo. Não entraremos em detalhes, pois isso sairia

do objetivo deste trabalho, mas damos referências para o leitor interessado em mais informações.

### 2.3.1 Um problema de rachadura em teoria da elasticidade

O problema de determinação da distribuição de tensão na vizinhança de uma rachadura de Griffith  $|x| < 1, y = 0$  (no plano cartesiano  $xOy$ ) em uma placa elástica isotrópica infinita pode ser resolvido completamente, utilizando a solução de uma equação integral singular do tipo Cauchy como descreveremos a seguir, cf. [8, p.10].

Considere as equações do equilíbrio dada por

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ para } y > 0,$$

com as condições de fronteira

$$\sigma_{xy} = 0 \text{ em } y = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\sigma_{yy} = -p(x) \text{ em } y = 0, \quad |x| < 1,$$

$$u_y = 0 \text{ em } y = 0, \quad |x| > 1,$$

onde  $u_x, u_y$  representam as componentes do deslocamento e  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}$  e  $\sigma_{yy}$  são as componentes da tensão no ponto  $(x, y)$ . Vamos assumir ainda que não existem forças de corpo.

Por hipótese tomamos  $u_x$  e  $u_y$  iguais a zero quando  $(x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty$ .

Mandal e Chakrabarti [8, p.10] apresentam as seguintes representações do deslocamento e componentes da tensão no ponto  $(x, y)$ .

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \int_0^\infty \frac{P(\xi)}{\xi} (1 - 2\eta - \xi y) e^{-\xi y} \text{sen}(\xi x) d\xi, \\ u_y &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \int_0^\infty \frac{P(\xi)}{\xi} (2(1 - \eta) + \xi y) e^{-\xi y} \text{cos}(\xi x) d\xi, \end{aligned}$$



e

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} y \int_0^\infty \xi P(\xi) e^{-\xi y} \operatorname{sen}(\xi x) d\xi, \\ \sigma_{xx} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty (1 - \xi y) P(\xi) e^{-\xi y} \cos(\xi x) d\xi, \\ \sigma_{yy} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty (1 + \xi y) P(\xi) e^{-\xi y} \cos(\xi x) d\xi,\end{aligned}$$

onde  $P(\xi)$  é uma função a ser determinada. As constantes  $\mu$  e  $\eta$  são o módulo de rigidez e a razão de Poisson, respectivamente, do material da placa elástica considerada.

Aplicando as condições de fronteira, encontramos as seguintes relações para obtenção de  $P(\xi)$ .

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty P(\xi) \cos(\xi x) d\xi = p(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2.3.1)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{P(\xi)}{\xi} \cos(\xi x) d\xi = 0, \quad x > 1. \quad (2.3.2)$$

Podemos notar que a condição  $\sigma_{xy} = 0$  em  $y = 0$  é satisfeita diretamente e que

$$\frac{\mu}{1 - \eta} u_y(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{P(\xi)}{\xi} \cos(\xi x) d\xi = 0, \quad (2.3.3)$$

com a condição de que

$$u_y(x, 0) = \begin{cases} O(1) & \text{com } x \rightarrow 0, \\ O((1 - x^2)^{1/2}) & \text{com } x \rightarrow 1. \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Se integrarmos a equação (2.3.1), obtemos

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{P(\xi)}{\xi} \operatorname{sen}(\xi x) d\xi = \int_0^x p(t) dt \equiv q(x), \quad 0 < x < 1. \quad (2.3.5)$$

Definindo

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{P(\xi)}{\xi} \cos(\xi x) d\xi = \varphi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2.3.6)$$

e usando a fórmula inversa do cosseno de Fourier, em seguida utilizando a equação (2.3.2), temos

$$\frac{P(\xi)}{\xi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \varphi(t) \cos(\xi t) dt. \quad (2.3.7)$$

Então, as equações (2.3.5) e (2.3.7) dão origem a equação (veja [8]):

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t^2 - x^2} dt = -\frac{\pi q(x)}{2x}, \quad 0 < x < 1, \quad (2.3.8)$$

onde a integral acima é definida no sentido do valor principal de Cauchy e  $\varphi(t)$  satisfaz as condições nos extremos do intervalo:

$$\varphi(t) = \begin{cases} O(1) & \text{com } t \rightarrow 0, \\ O((1-t)^{1/2}) & \text{com } t \rightarrow 1. \end{cases} \quad (2.3.9)$$

Fazendo a mudança de variável  $t^2 = s$  e  $x^2 = u$  em (2.3.8) e definindo

$$\phi(s) = \frac{\varphi(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}, \quad f(u) = -\frac{\pi q(\sqrt{u})}{\sqrt{u}},$$

chegamos a equação integral singular do primeiro tipo de Cauchy

$$\int_0^1 \frac{\phi(s)}{s-u} ds = f(u), \quad 0 < u < 1, \quad (2.3.10)$$

que é resolvida sob as condições

$$\phi(s) = \begin{cases} O(s^{-1/2}) & \text{com } s \rightarrow 0, \\ O((1-s)^{1/2}) & \text{com } s \rightarrow 1. \end{cases} \quad (2.3.11)$$

Usando a forma apresentada em (2.2.3) com  $a = 0$ ,  $b = 1$  e substituindo  $\phi(s)$  por  $\frac{\phi(s)}{\pi}$ , obtemos a solução

$$\phi(u) = -\frac{1}{\pi^2} \left( \frac{1-u}{u} \right)^{1/2} \int_0^1 \left( \frac{s}{1-s} \right)^{1/2} \frac{f(s)}{s-u} ds. \quad (2.3.12)$$

### 2.3.2 Um problema de espalhamento de ondas de superfície

O problema para a determinação do potencial de espalhamento, na teoria linearizada de ondas de água, quando o trem de ondas de superfície incide normalmente sobre uma barra vertical fina parcialmente submersa em águas infinitamente profundas, pode ser resolvido completamente reduzindo esse problema a uma equação integral singular homogênea do tipo Cauchy, cf.[8, p.12]. A formulação matemática do problema, onde o potencial de velocidade  $\varphi$  satisfaz a equação de Laplace, é a seguinte:

Para resolver a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.3.13)$$

com condições de fronteira

$$K\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.3.14)$$

onde  $K$  é uma constante real positiva e a condição na placa

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{em } x = 0, \quad 0 < y < a,$$

juntamente com a seguinte condição, em torno de  $x = 0$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{é contínua em } x = 0, \quad 0 < y < \infty, \quad (2.3.15)$$

$$\varphi \quad \text{é contínua em } x = 0, \quad a < y < \infty. \quad (2.3.16)$$

Adicionalmente temos as condições no infinito:

$$\varphi(x, y) \rightarrow \begin{cases} e^{-Ky}(e^{iKx} + Re^{-iKx}) & \text{com } x \rightarrow -\infty, \\ Te^{-Ky+iKx} & \text{com } x \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (2.3.17)$$

$$\varphi, \nabla \varphi \rightarrow 0 \quad \text{com } y \rightarrow \infty, \quad (2.3.18)$$

onde  $R$  e  $T$  são os coeficientes de reflexão e transmissão, respectivamente, a serem determinados e  $e^{-Ky+iKx}$  representa o campo incidente. A função  $\varphi(x, y)$  também satisfaz a condição no extremo do intervalo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, y) = O(|y - a|^{1/2}) \quad \text{com } y \rightarrow a. \quad (2.3.19)$$

Todos os procedimentos para obtenção da equação integral singular de Cauchy podem ser encontrados em [8].

Definindo

$$\varphi(x, y) = \varphi_0(x, y) + \psi(x, y) \quad (2.3.20)$$

onde

$$\varphi_0(x, y) = \begin{cases} e^{-Ky}(e^{iKx} + Re^{-iKx}) & \text{para } x < 0 \\ Te^{-Ky+iKx} & \text{para } x > 0, \end{cases} \quad (2.3.21)$$

e observando que das condições no infinito (2.3.17) e (2.3.18) temos  $\psi \rightarrow 0$  com  $|x| \rightarrow \infty$  e também  $y \rightarrow \infty$ , nós temos a representação da função harmônica  $\psi(x, y)$  satisfazendo a condição de fronteira (2.3.14) dada pelas seguintes expressões

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{A(k)e^{-kx}}{k^2 + K^2} L(k, y) dk, & x > 0, \\ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{B(k)e^{kx}}{k^2 + K^2} L(k, y) dk, & x < 0, \end{cases} \quad (2.3.22)$$

onde  $A(k)$  e  $B(k)$  são duas funções a serem determinadas e

$$L(k, y) = k \cos(ky) - K \sen(ky).$$

Após algumas manipulações usando análise de Fourier, cf.[8], obtemos:

$$A(k) = -B(k) \quad (2.3.23)$$

e

$$R + T = 1. \quad (2.3.24)$$

Pode ser mostrado que, cf.[8, p.16]

$$\int_0^{\infty} g(t) \left( \frac{1}{y+t} + \frac{1}{y-t} + K \ln \left| \frac{y-t}{y+t} \right| \right) = 0, \quad y > a \quad (2.3.25)$$

onde

$$g(t) = h(t) - iK(1-R)e^{-Kt}, \quad t > a \quad (2.3.26)$$

e  $h(t)$  é uma função a ser determinada definida pela fórmula integral

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{kA(k)}{k^2 + K^2} L(k, t) dk \quad a < t < \infty.$$

Agora, das condições apresentadas em (2.3.20) e (2.3.21) encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(+0, y) &= iKTe^{-Ky} + \frac{\partial \psi}{\partial x}(+0, y) \\ &= iK(1-R)e^{-Ky} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{kA(k)}{k^2 + K^2} L(k, y) dk \\ &= iK(1-R)e^{-Ky} - h(y), \quad y > a. \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

Assim, por (2.3.27) e (2.3.26) juntamente com a condição no extremo do intervalo (2.3.19) observamos que o problema físico reduz-se a resolvermos a equação integral singular homogênea em (2.3.25) para determinar uma função desconhecida  $g(y)$  que deve satisfazer a condição no ponto  $y = a$  dada por:

$$g(y) = O(|y - a|^{1/2}) \quad \text{com } y \rightarrow a. \quad (2.3.28)$$

Observe que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = 0. \quad (2.3.29)$$

Após a determinação da função  $g(y)$  e conseqüentemente  $h(y)$ , poderemos obter a constante de reflexão  $R$ , desconhecida até então, por sua vez obtemos também o coeficiente de transmissão  $T$  pela relação (2.3.24).

Vamos agora reduzir a equação (2.3.25) a uma equação integral singular de Cauchy. Primeiramente definimos

$$G(t) = \int_a^t g(s) ds, \quad (2.3.30)$$

tal que

$$G'(t) = g(t) \quad (2.3.31)$$

e

$$G(a) = 0. \quad (2.3.32)$$

Nós agora observamos que

$$\int_a^\infty g(t) \ln \left| \frac{y-t}{y+t} \right| dt = \int_a^\infty G(t) \left( \frac{1}{y+t} + \frac{1}{y-t} \right) dt. \quad (2.3.33)$$

Então a equação (2.3.25) se reduz à forma

$$\int_a^\infty p(t) \left( \frac{1}{y+t} + \frac{1}{y-t} \right) dt = 0, \quad y > a, \quad (2.3.34)$$

que equivale a equação

$$\int_a^\infty \frac{p(t)}{t^2 - y^2} dt = 0, \quad y > a, \quad (2.3.35)$$

onde

$$p(t) = g(t) + KG(t).$$

A integral é definida no sentido de valor principal de Cauchy. Após fazer a mudança de variável  $t^2 = a^2u^{-1}$  e  $y^2 = a^2v^{-1}$  obtemos a equação integral singular homogênea

$$\int_0^1 \frac{\phi(u)}{u-v} du = 0 \quad 0 < v < 1, \quad (2.3.36)$$

onde  $\phi(u) = \frac{p(au^{-1/2})}{u^{1/2}}$ , é sujeita às condições nos pontos finais do intervalo  $(0, 1)$ :

$$\phi(u) = \begin{cases} O(u^{-1/2}) & \text{com } u \rightarrow 0, \\ O((1-u)^{-1/2}) & \text{com } u \rightarrow 1. \end{cases} \quad (2.3.37)$$

Sua solução apropriada agora é obtida da solução apresentada em (2.2.2) com  $a = 0$ ,  $b = 1$  e  $f(x) = 0$  e é dada por

$$\phi(v) = \frac{C}{v^{1/2}(1-v)^{1/2}}, \quad (2.3.38)$$

sendo  $C$  uma constante arbitrária.

### 2.3.3 Um problema de distribuição de pressão e sustentação sobre seções planas em pequenos ângulos de ataque

Vamos agora procurar a distribuição de pressão e sustentação sobre seções de uma placa plana com espessura tendendo a zero, em geral, definida para um ângulo de ataque  $\alpha$  arbitrário (*mas pequeno*) e corrente livre  $-U$ , cf. [1].

Teremos assim, um escoamento padrão como mostrada na figura 2.1 com possíveis pontos de estagnação  $S$  na parte inferior da placa e  $S'$  na parte superior da placa. O escoamento em torno da borda de ataque da placa é fortemente curvado (raio de curvatura muito pequeno) resultando em velocidade local alta e conseqüentemente (pela equação de Bernoulli) gera baixa pressão na parte superior, particularmente próximo a borda de ataque, cf. [1, Cap. 5]. Em um fluido real, o escoamento sobre uma borda de ataque se descola do lado superior da placa e a extensão do descolamento depende do ângulo de ataque. Aqui nós desconsideramos esse fenômeno. Reciprocamente, no lado inferior da placa o fluido é lento e a pressão é maior que a pressão ambiente. Então, podemos escrever a equação da pressão no lado superior como

$$\frac{p_+ - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \left[ \frac{(u_+ - U)^2 + v_+^2}{U^2} \right] = C_{p_+} \quad (2.3.39)$$

e no lado inferior

$$\frac{p_- - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \left[ \frac{(u_- - U)^2 + v_-^2}{U^2} \right] = C_{p_-} \quad (2.3.40)$$

onde  $u$  e  $v$  são as componentes da perturbação nas direções  $x$  e  $y$ ,  $p$  representa a pressão sobre a placa,  $p_\infty$  é a pressão ambiente,  $\rho$  é a densidade do fluido. Os sinais  $+$  e  $-$  presentes nas fórmulas acima indicam respectivamente o lado superior ou inferior da placa.

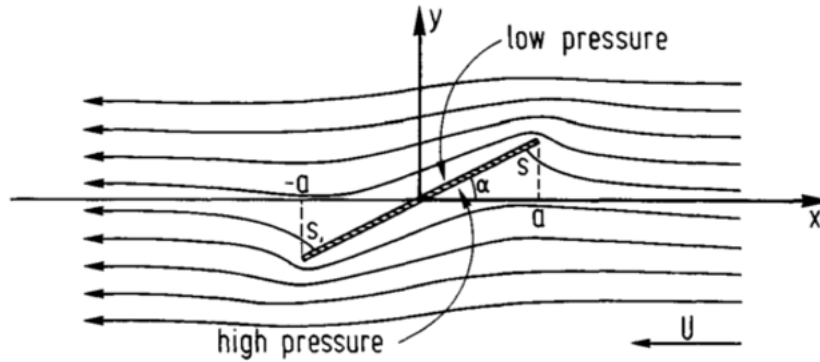


Figura 2.1: Escoamento em torno de uma placa plana [1, Cap. 5].

Na direção da placa, o escoamento deve ser tangencial à placa, ou a inclinação do escoamento deve ser igual a inclinação da placa, ou seja,

$$\frac{v_+}{u_+ - U} = \frac{dy_+}{dx} = \frac{d}{dx}(x \tan \alpha) \approx \alpha \quad (2.3.41)$$

e

$$\frac{v_-}{u_- - U} = \frac{dy_-}{dx} \approx \alpha \quad (2.3.42)$$

Como a inclinação na placa é igual nos dois lados temos

$$v_+ u_- - U v_+ = v_- u_+ - U v_- \quad (2.3.43)$$

Agora como  $u_{\pm}$  e  $v_{\pm}$  são da ordem de  $\alpha$ , então  $v_+ u_-$  e  $v_- u_+$  são da ordem de  $\alpha^2$ . Essa afirmação não é verdade em toda parte (como em escoamentos simétricos) e falha na vizinhança dos pontos de estagnação. Assim, essa aproximação não é uniformemente válida. Adotando isso como sendo suficientemente verdade de (2.3.43) concluímos que

$$v_+ = v_- \quad (2.3.44)$$



Daí, para primeira ordem, o escoamento da perturbação vertical é simétrico.

Usando (2.3.44) em (2.3.39) e (2.3.40) para calcularmos a diferença de pressão entre os lados superior e inferior (veja figura 2.2) em qualquer ponto fixo  $x$  fazemos  $p_- - p_+$  ou

$$\begin{aligned} C_{p-} - C_{p+} = \Delta C_p &= \frac{(u_+ - U)^2 - (u_- - U)^2}{U^2} \\ &= 2 \frac{(u_- - u_+)}{U} + \frac{u_+^2 - u_-^2}{U^2}. \end{aligned} \quad (2.3.45)$$

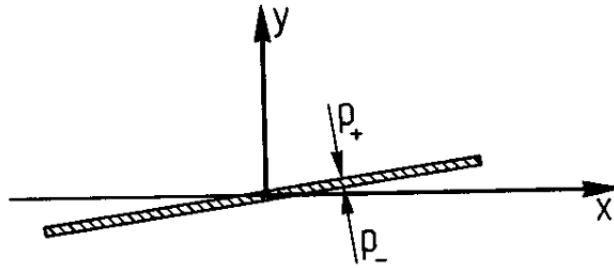


Figura 2.2: Diferença de pressão sobre a placa [1, Cap. 5].

Quando eliminamos os termos de ordem  $\alpha^2$  devemos ter

$$\Delta C_p \approx 2 \frac{(u_- - u_+)}{U}. \quad (2.3.46)$$

Para gerar esse escoamento por uma distribuição de singularidades devemos investigar para que modelo a componente induzida verticalmente é uma função par de  $y$ . A distribuição bidimensional de vórtices mais adequada para uma placa plana é dada pelo potencial, cf. [1, pg. 68]

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \gamma(x') \tan^{-1} \left[ \frac{y - y'}{x - x'} \right] dx', \quad (2.3.47)$$

onde, em princípio, os vórtices são distribuídos ao longo da placa inclinada, (veja figura 2.3).

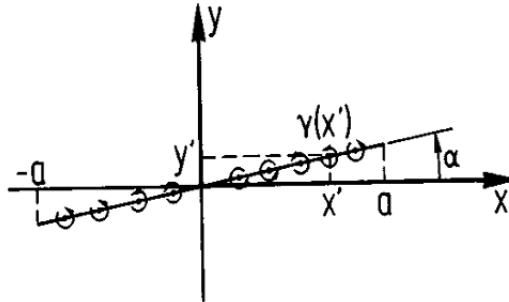


Figura 2.3: Distribuição de vórtices sobre a placa plana [1, Cap. 5].

Assim  $y' = \alpha x'$ . Então a velocidade vertical em qualquer ponto  $(x, y)$ , induzido por essa distribuição de vorticidade, é

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{(x - x')\gamma(x')}{(x - x')^2 + (y - \alpha x')^2} dx'. \quad (2.3.48)$$

Se aplicarmos a condição de fronteira (2.3.41) (negligenciando  $u_+$ ) na placa  $y = \alpha x$ , obtemos o requisito na densidade do vortex desconhecida  $\gamma$  que, em geral

$$\begin{aligned} v(x, \alpha x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{(x - x')\gamma(x')}{(x - x')^2(1 + \alpha^2)} dx' = -U \frac{dy}{dx}; \quad |x| \leq a \\ &= -U\alpha, \quad \text{na placa plana.} \end{aligned} \quad (2.3.49)$$

Veja que ao aplicarmos a condição de fronteira na placa, introduzimos termos da ordem de  $\alpha^2$  e também de ordens maiores, pois  $(1 + \alpha^2)^{-1} = 1 - \alpha^2 + \alpha^4 - \dots$ . Como isso é inconsistente com nossa negligência anterior dos termos  $O(\alpha^2)$ , vemos

que para primeira ordem os vortices devem ser colocados em  $y' \equiv 0$  e os cálculos feitos não em  $y = \alpha x$ , mas em  $y = 0$ , a linha de referência do fluido. Assim, tomando  $\alpha = 0$  no lado esquerdo de (2.3.49) exigimos que  $\gamma$  seja

$$2\pi v(x, 0) = \int_{-a}^a \frac{\gamma(x')}{x - x'} dx' = -2\pi U \frac{dy}{dx} \approx -2\pi U \alpha. \quad (2.3.50)$$

Assim toda a distribuição de vorticidade faz uma contribuição e nos deparamos com uma equação integral singular do primeiro tipo tendo um núcleo Cauchy  $(x - x')^{-1}$ , cuja solução é apresentada pela equação (2.2.2), isto é,

$$\gamma(x') = -\frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x'^2}} \left[ \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - x'^2}}{x - x'} h(x') dx' + \pi C \right],$$

onde  $h(x')$  é um função conhecida, neste caso  $h(x') = -2\pi U \alpha$ , e a constante arbitrária  $C$  pode ser interpretada fisicamente como sendo a circulação  $-\Gamma$  em torno da placa, (veja [1, p.70]).

Observe que o lado direito da equação (2.3.50) é a uma função par, pois depende apenas do ângulo de ataque  $\alpha$  e a velocidade do escoamento  $U$  que são valores constantes pré-definidos.

### 3 MODELO MATEMÁTICO E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DAS SOLUÇÕES

Vários trabalhos tratam da equação do aerofólio sobre um intervalo e suas generalizações, veja e.g. [11, 13, 14, 15]. Neste capítulo, consideramos a equação do aerofólio com uma singularidade do tipo Cauchy definida em um intervalo com uma pequena abertura. Tricomi [13] apresentou uma solução analítica para a equação do aerofólio para um intervalos com uma abertura. Estudamos ainda a questão da solução polinomial para esse problema.

Vamos investigar formalmente e numericamente o comportamento assintótico para a solução  $f_\varepsilon$  da equação do aerofólio quando o tamanho da pequena abertura (comprimento  $2\varepsilon$ ) tende a zero (veja Prop. 3.1).

Primeiramente, identificamos que o limite formal,  $f_0$ , de  $f_\varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) é dado por uma integral singular de Cauchy, equação (3.2.2). O próximo termo que aparece nessa expansão é um resíduo que investigaremos numericamente. Em seguida, na Seção 3.2.2 comparamos o limite formal  $f_0$  com a solução da equação do aerofólio  $f$  definida no intervalo de  $(-1, 1)$ .

Vamos mostrar também que para alguns casos de funções  $\psi = T_n$  e  $\psi = U_n$  obtemos a igualdade  $f = f_0$ , onde  $T_n$  e  $U_n$  correspondem respectivamente os polinômios de Tchebychev do primeiro e segundo tipo.

#### 3.1 Modelo matemático

A equação do aerofólio na sua forma original é escrita como

$$\int_{-1}^1 \frac{f(t)}{x-t} dt = g(x), \quad x \in (-1, 1). \quad (3.1.1)$$

Consideramos a equação do aerofólio com singularidade do tipo Cauchy e definida em um intervalo com uma pequena abertura de comprimento  $2\varepsilon > 0$ , dado por  $G_\varepsilon = (-1, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, 1)$ . Assim, considere

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f_\varepsilon(t)}{x-t} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^1 \frac{f_\varepsilon(t)}{x-t} dt = -\psi(x), \quad x \in G_\varepsilon. \quad (3.1.2)$$

onde,  $\varepsilon > 0$ ,  $f_\varepsilon(t)$  é desconhecida e  $\psi(x)$  é um dado do problema que deve ser Hölder contínua para  $x \in G_\varepsilon$ ,  $\psi(x) \in C^{0,\alpha}(G_\varepsilon)$ .

A solução da equação (3.1.2) foi apresentada pela primeira vez por Tricomi [12]. A solução descrita é

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R_\varepsilon(x)} [C_{1,\varepsilon} + C_{2,\varepsilon}x + \Psi_\varepsilon(x)], & x \in (-1, -\varepsilon) \\ -\frac{1}{\pi R_\varepsilon(x)} [C_{1,\varepsilon} + C_{2,\varepsilon}x + \Psi_\varepsilon(x)], & x \in (\varepsilon, 1) \end{cases} \quad (3.1.3)$$

onde  $\Psi_\varepsilon$  é dada em termos de integrais de Cauchy, como

$$\Psi_\varepsilon(x) = \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\psi(t)R_\varepsilon(t)}{x-t} dt - \int_{\varepsilon}^1 \frac{\psi(t)R_\varepsilon(t)}{x-t} dt, \quad (3.1.4)$$

$C_{1,\varepsilon}$  e  $C_{2,\varepsilon}$  são duas constantes arbitrárias e

$$R_\varepsilon(x) = \sqrt{(1-x^2)(x^2-\varepsilon^2)}, \quad x \in G_\varepsilon. \quad (3.1.5)$$

Primeiramente vamos assumir as constantes  $C_{1,\varepsilon} = C_{2,\varepsilon} = 0$ . Logo temos a solução

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R_\varepsilon(x)} \Psi_\varepsilon(x), & x \in (-1, -\varepsilon) \\ -\frac{1}{\pi R_\varepsilon(x)} \Psi_\varepsilon(x), & x \in (\varepsilon, 1). \end{cases} \quad (3.1.6)$$

Daremos mais detalhes a respeito da escolha das constantes  $C_{1,\varepsilon}$  e  $C_{2,\varepsilon}$ , na seção 3.2.2.

## 3.2 Resultados principais

### 3.2.1 Comportamento assintótico

Vamos investigar o limite formal para a solução da equação do aerofólio (3.1.2) com  $\varepsilon$  tendendo a 0.

**Proposição 3.1.** *Seja  $\psi \in C^{0,\alpha}(-1,1)$ . Então, na Seção 3.1, a solução  $f_\varepsilon$  (3.1.6) da equação do aerofólio (3.1.2) admite um limite formal quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  : logo, temos*

$$f_\varepsilon(x) = f_0(x) + O(\varepsilon^2) \quad \text{para todo } x \in G_\varepsilon . \quad (3.2.1)$$

Aqui

$$f_0(x) = -\frac{1}{\pi x \sqrt{1-x^2}} \Psi_0(x) \quad \text{para todo } x \in (-1,1) \setminus \{0\} , \quad (3.2.2)$$

onde  $\Psi_0$  é definida pela integral singular do tipo Cauchy, cf. [4]:

$$\Psi_0(x) = -\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{x-t} t \psi(t) dt . \quad (3.2.3)$$

### 3.2.2 Comparação com a solução da equação do aerofólio em um intervalo contínuo

Quando  $\psi$  é Hölder contínua em  $[-1,1]$ , a solução geral de (3.1.1) é escrita (veja e.g. [13, pg. 173-180] ou [9]) como

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t^2}{1-x^2}} \frac{\psi(t)}{x-t} dt + \frac{A}{\sqrt{1-x^2}} , \quad (3.2.4)$$

onde  $A$  é uma constante arbitrária. Sendo assim, possuímos infinitas soluções de acordo com a escolha de  $A$ , logo a solução não é única. Uma interpretação física para a escolha para constante  $A$  seria tomá-la como sendo a circulação  $-\Gamma$  sobre o aerofólio, cf. [1, pg. 70]. Ao assumirmos  $A = 0$ , ou seja, a circulação nula, obtemos a solução

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t^2}{1-x^2}} \frac{\psi(t)}{x-t} dt . \quad (3.2.5)$$

Então, quando tomarmos as constantes  $C_{1,\varepsilon} = C_{2,\varepsilon} = 0$  na solução  $f_\varepsilon$  da seção 3.1 para um intervalo com uma pequena abertura  $(-1, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, 1)$ , estamos tentando obter uma solução aproximada da equação do aerofólio sobre o intervalo contínuo  $(-1, 1)$  quando a circulação  $\Gamma = 0$ .

De (3.2.2) e (3.2.5), podemos relacionar as soluções  $f_0(x)$  e  $f(x)$  para todo  $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$  pela equação:

$$f(x) = f_0(x) + \frac{1}{\pi x} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t^2}{1-x^2}} \psi(t) dt . \quad (3.2.6)$$

### 3.2.2.1 Discussão para funções $\psi$ ímpares

Vamos assumir que  $f$  é a solução da equação do aerofólio (3.1.1) e que  $\psi$  é uma função ímpar. De acordo com (3.2.6), temos

$$f(x) = f_0(x) \quad \text{para todo } x \in (-1, 1) \setminus \{0\} ; \quad (3.2.7)$$

isto implica que a expansão (3.2.1) reduz-se a

$$f_\varepsilon(x) \approx f(x) \quad \text{para todo } x \in G_\varepsilon . \quad (3.2.8)$$

Daí, quando  $\psi$  é uma função ímpar, a solução  $f_\varepsilon$  da equação do aerofólio (3.1.2) (definida no intervalo  $G_\varepsilon$  com uma pequena abertura de tamanho  $2\varepsilon$ ) coincide com a solução  $f$  da equação do aerofólio (3.1.1) definida em  $(-1, 1)$ , módulo um termo residual quando  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno. Vale lembrar que essa aproximação é obtida para  $A = 0$  em  $f$  e  $C_{1,\varepsilon} = C_{2,\varepsilon} = 0$  em  $f_\varepsilon$ .

### 3.2.2.2 Casos particulares da função $\psi(t)$

Como vimos na seção anterior para casos onde  $\psi$  é uma função ímpar obtemos a igualdade apresentada na equação (3.2.7). No entanto, observamos também que para alguns casos particulares de funções  $\psi(t)$  pares chegamos a esta

mesma igualdade. É o caso quando tomamos  $\psi(t) = T_n(t)$  e  $\psi(t) = U_n(t)$  em (3.2.6), onde  $T_n$  e  $U_n$  são os polinômios de Tchebychev do primeiro e segundo tipo, respectivamente, e para certos valores de  $n$ . Mais precisamente, temos a proposição a seguir.

**Proposição 3.2.** *Seja  $\psi \in \{T_m(t), U_n(t)$ ,  $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0, 2\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}\}$  ou seja  $\psi$  uma função ímpar em  $C^{0,\alpha}(-1, 1)$ . Aqui  $T_m$  e  $U_n$  são os polinômios de Tchebychev do primeiro e segundo tipo, respectivamente. Então,*

$$f(x) = f_0(x) \quad \text{para todo } x \in (-1, 1) \setminus \{0\}. \quad (3.2.9)$$

**Demonstração:**

De (3.2.6), podemos escrever

$$f(x) = f_0(x) + \frac{1}{\pi x \sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \psi(t) dt, \quad (3.2.10)$$

onde,  $f_0(x)$  corresponde o limite da função  $f_\varepsilon(x)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

É imediato (3.2.9) para  $\psi$  ímpar. De fato,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \psi(t) dt &= \int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2} \psi(t) dt + \int_0^1 \sqrt{1-t^2} \psi(t) dt \\ &= - \int_0^{-1} \sqrt{1-t^2} \psi(t) dt + \int_0^1 \sqrt{1-t^2} \psi(t) dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-\tau^2} \psi(-\tau) d\tau + \int_0^1 \sqrt{1-t^2} \psi(t) dt \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Por outro lado, para mostrar que a igualdade em (3.2.9) também é válida quando  $\psi$  é igual a  $T_m$  e  $U_n$ ,  $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0, 2\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$ , vamos trabalhar com a integral presente no segundo termo da equação (3.2.10). Veja que para  $\psi(t) = T_m(t)$  temos

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} T_m(t) dt.$$



Fazendo a mudança de variável  $t = \cos(\theta)$  segue,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi}^0 \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} T_m(\cos(\theta)) (-\operatorname{sen}(\theta)) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2(\theta) T_m(\cos(\theta)) d\theta. \end{aligned}$$

Como,  $\operatorname{sen}^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$  e  $T_m(\cos(\theta)) = \cos(m\theta)$ , temos

$$I = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(m\theta) d\theta}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(2\theta) \cos(m\theta) d\theta}_{I_2}.$$

Note que

$$I_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \text{ para } m = 0, \\ 0 & , \text{ para outros casos,} \end{cases}$$

e

$$I_2 = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & , \text{ para } m = 2, \\ 0 & , \text{ para outros casos.} \end{cases}$$

Portanto,  $I = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0, 2\}$  e conseqüentemente  $f(x) = f_0(x)$ .

Para  $\psi(t) = U_n(t)$  temos:

$$J = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} U_n(t) dt$$

novamente fazendo a mudança de variável  $t = \cos(\theta)$ , segue

$$\begin{aligned} J &= \int_{\pi}^0 \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} U_n(\cos(\theta)) (-\operatorname{sen}(\theta)) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2(\theta) U_n(\cos(\theta)) d\theta \end{aligned}$$

como  $U_n(\cos(\theta)) = \frac{\operatorname{sen}((n+1)\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}$ , temos:

$$J = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}((n+1)\theta) d\theta$$

Observe que

$$J = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \text{ para } n = 0, \\ 0 & , \text{ para outros casos.} \end{cases}$$

Portanto,  $J = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$  e novamente  $f(x) = f_0(x)$  ■

Concluimos também da expansão (3.2.1) a aproximação

$$f_\varepsilon(x) \approx f(x) \quad \forall x \in G_\varepsilon$$

para a classe de funções  $\psi$  na proposição (3.2).

## 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo apresentamos os resultados numéricos, onde comparamos as três soluções  $f_\varepsilon$ ,  $f_0$  e  $f$ , apresentadas no capítulo anterior, para diferentes funções  $\psi$  e valores de  $\varepsilon$ . Os gráficos a seguir foram produzidos através da solução numérica das soluções  $f$ ,  $f_\varepsilon$  e  $f_0$  que utiliza o método de quadratura Gauss-Legendre modificado para integrais singulares com núcleo do tipo Cauchy, cf.[6].

### 4.1 As soluções $f_\varepsilon$ , $f_0$ e $f$ para $\psi(t) = 1$ e $\psi(t) = t$

Vamos apresentar gráficos das soluções da equação do aerofólio  $f_\varepsilon$ ,  $f_0$  e  $f$  para as funções de entrada  $\psi(t) = 1$  e  $\psi(t) = t$ . Nas figuras 4.1 e 4.2 vemos  $f_\varepsilon$ ,  $f_0$  e  $f$  para  $\psi(t) = 1$ . Neste caso, observamos que a solução  $f$ , no intervalo contínuo, difere-se claramente de  $f_0$ . Notamos também que  $f_\varepsilon$  e  $f_0$  são muito próximas para  $\varepsilon = 0.01$ .

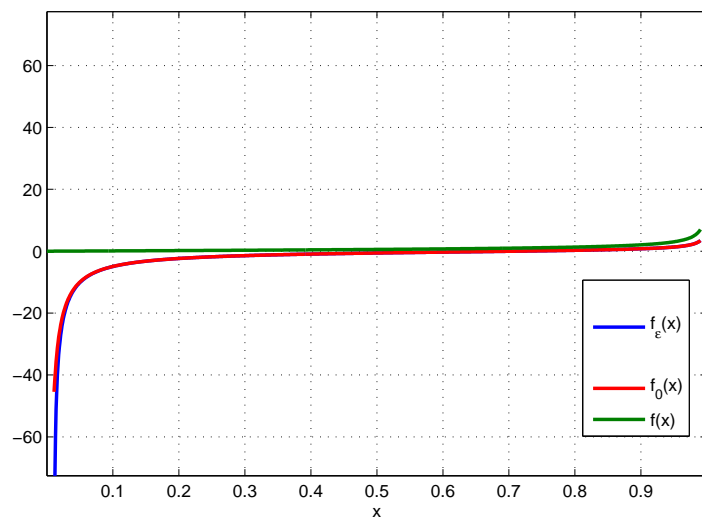


Figura 4.1: Gráfico de  $f_\varepsilon(x)$ ,  $f_0(x)$  e  $f(x)$  sobre o intervalo  $(\varepsilon, 1)$  para  $\varepsilon = 0.01$  e  $\psi(t) = 1$ .

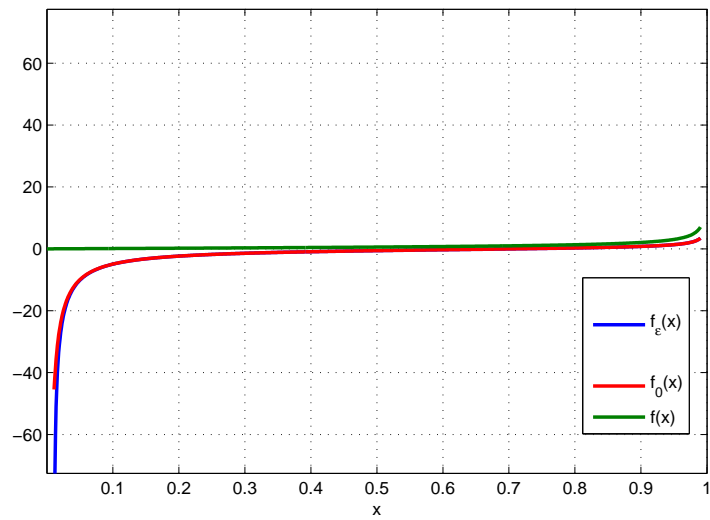


Figura 4.2: Gráfico de  $f_\varepsilon(x)$ ,  $f_0(x)$  e  $f(x)$  sobre o intervalo  $(-1, -\varepsilon)$  para  $\varepsilon = 0.01$  e  $\psi(t) = 1$ .

Na figura 4.3 podemos verificar a igualdade  $f_0(x) = f(x)$  mencionada na subseção 3.2.2.1 quando  $\psi(t) = t$  (ímpar). Os distanciamentos de  $f_\varepsilon$  das outras duas soluções que ocorrem nos extremos do intervalo  $G_\varepsilon$  são devidos às singularidades presentes na solução.

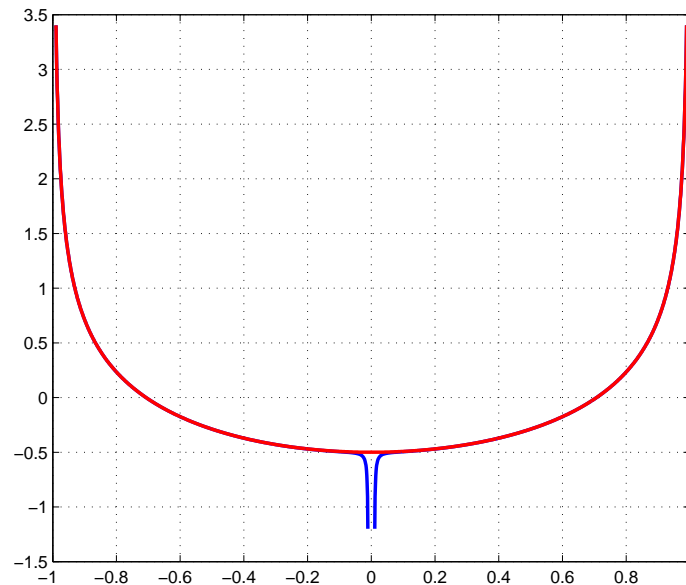


Figura 4.3: Gráfico de  $f_\varepsilon(x)$  (azul) e  $f_0(x) = f(x)$  (vermelho) sobre o intervalo  $(-1, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, 1)$  para  $\varepsilon = 0.01$  e  $\psi(t) = t$ .

## 4.2 A solução $f_\varepsilon$ da equação do aerofólio para vários valores de $\varepsilon$ e funções $\psi(t)$

Agora apresentamos alguns gráficos de  $f_\varepsilon(t)$  para diferentes valores de  $\varepsilon$  e funções  $\psi(t)$ . Como poderá ser observado, os gráficos a seguir são relativamente próximos diferenciando-se apenas nos valores próximos de  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.005$  e  $\varepsilon = 0.001$ , por esse motivo apresentamos duas figuras, uma tomando todo o intervalo  $G_\varepsilon$  e a outra ampliada mais próxima as singularidades junto a origem, onde distingui-se melhor a diferença entre as soluções.

A figura 4.5 mostra o caso em que  $\psi(t) = 1$  com  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.005$  e  $\varepsilon = 0.001$ . Como foi mencionado, observamos a relativa proximidade entre os gráficos para os diferentes valores de  $\varepsilon$ . Veja que a medida que diminuimos o valor

de  $\varepsilon$  o gráfico estende-se um pouco mais antes de “explodir” para o infinito, isto representa um refinamento na solução e conseqüentemente uma convergência para a função  $f_0$ .

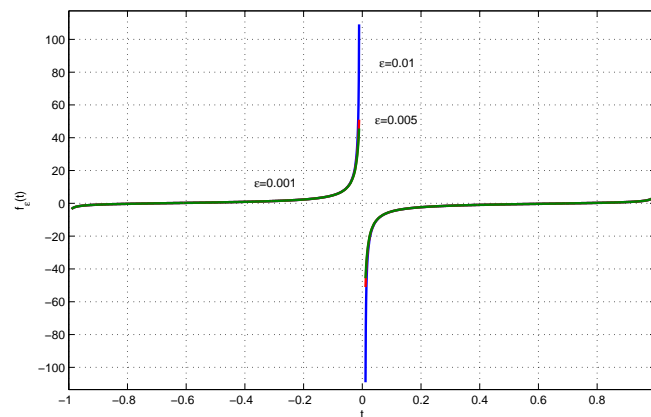


Figura 4.4: Gráfico de  $f_\varepsilon(t)$  quando  $\psi(t) = 1$  para  $\varepsilon = 0.01$ (azul),  $\varepsilon = 0.005$ (vermelho) e  $\varepsilon = 0.001$ (verde).

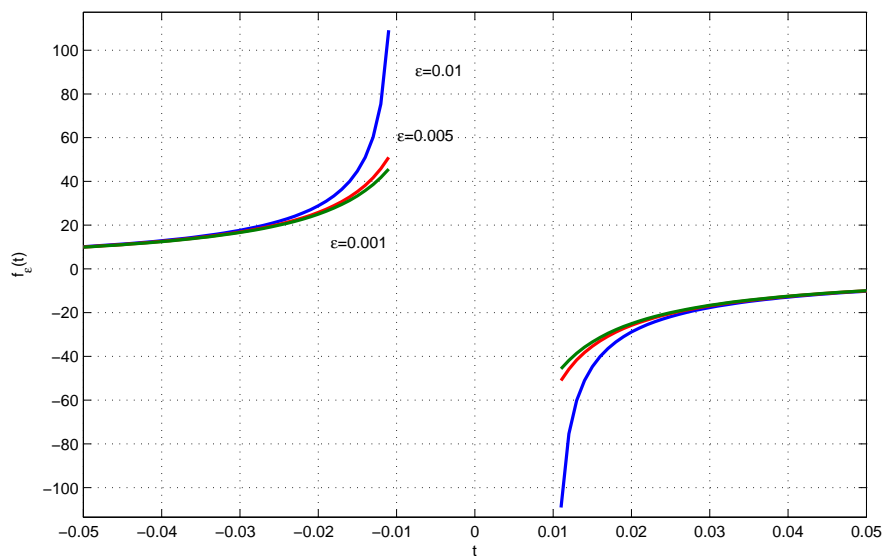


Figura 4.5: Gráfico ampliado de  $f_\varepsilon(t)$  quando  $\psi(t) = 1$  para  $\varepsilon = 0.01$ (azul),  $\varepsilon = 0.005$ (vermelho) e  $\varepsilon = 0.001$ (verde).

Analogamente ao caso anterior a medida que diminuimos o valor de  $\varepsilon$  temos um refinamento da solução  $f_\varepsilon$  que por sua vez converge para  $f_0$ . Para os casos onde  $\psi(t) = T_1(t)$  (figuras 4.6 e 4.7) e  $\psi(t) = T_3(t)$  (figuras 4.8 e 4.9) são funções ímpares, temos a igualdade  $f_0 = f$  garantida pela subseção 3.2.2.1, isto implica que  $f_\varepsilon$  converge para a solução da equação do aerofólio  $f$  em um intervalo contínuo.

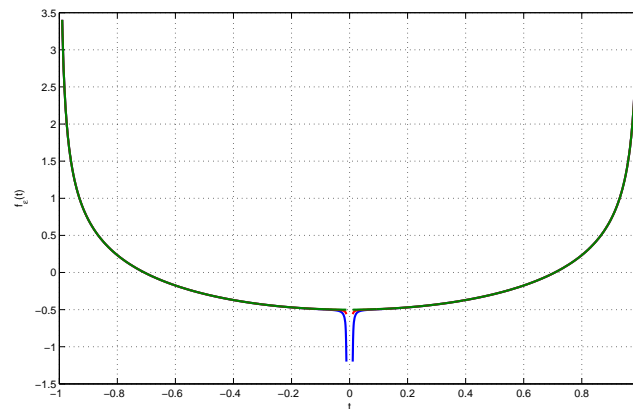


Figura 4.6: Gráfico de  $f_\varepsilon(t)$  quando  $\psi(t) = t$  para  $\varepsilon = 0.01$ (azul),  $\varepsilon = 0.005$ (vermelho) e  $\varepsilon = 0.001$ (verde).

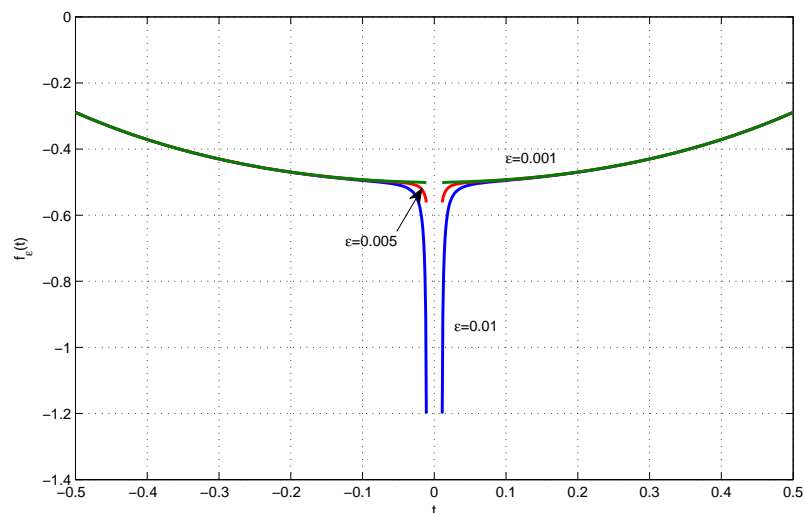


Figura 4.7: Gráfico ampliado de  $f_\varepsilon(t)$  quando  $\psi(t) = t$  para  $\varepsilon = 0.01$ (azul),  $\varepsilon = 0.005$ (vermelho) e  $\varepsilon = 0.001$ (verde).

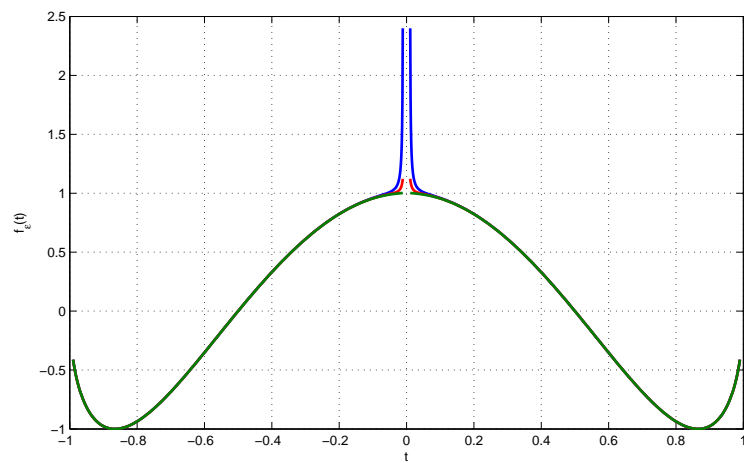


Figura 4.8: Gráfico de  $f_\varepsilon(t)$  quando  $\psi(t) = T_3(t)$  para  $\varepsilon = 0.01$ (azul),  $\varepsilon = 0.005$ (vermelho) e  $\varepsilon = 0.001$ (verde).

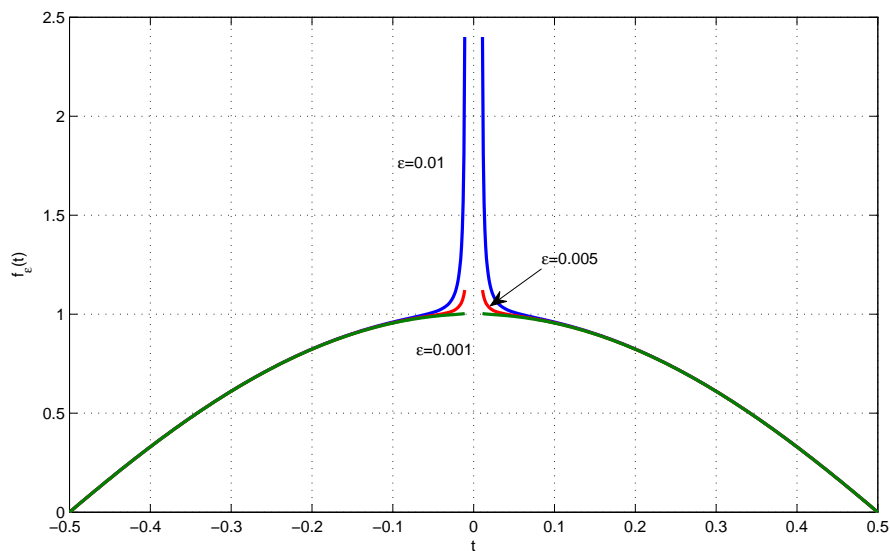


Figura 4.9: Gráfico ampliado de  $f_\varepsilon(t)$  quando  $\psi(t) = T_3(t)$  para  $\varepsilon = 0.01$ (azul),  $\varepsilon = 0.005$ (vermelho) e  $\varepsilon = 0.001$ (verde).



### 4.3 Comparação entre as soluções $f_\varepsilon$ e $f_0$

As próximas figuras mostram as soluções  $f_\varepsilon$  e  $f_0$  para  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.005$  e  $\varepsilon = 0.001$  e diferentes funções  $\psi$ . Em todos os casos a convergência é observada.

Como vimos nos gráficos da seção anterior, as soluções coincidem praticamente durante todo o intervalo  $G_\varepsilon$ , distinguindo-se apenas nas singularidades próximas a origem. Dessa forma, apresentamos apenas figura ampliada para uma melhor distinção entre as soluções  $f_\varepsilon$ .

Veja na figura 4.10 o caso onde  $\psi(t) = 1$  para diferentes valores de  $\varepsilon$ . Podemos visualizar de forma clara que para valores de  $\varepsilon$  cada vez menores a solução  $f_\varepsilon$  converge para a solução  $f_0$ . Em  $\varepsilon = 0.001$  quase não conseguimos verificar a diferença entre as soluções.

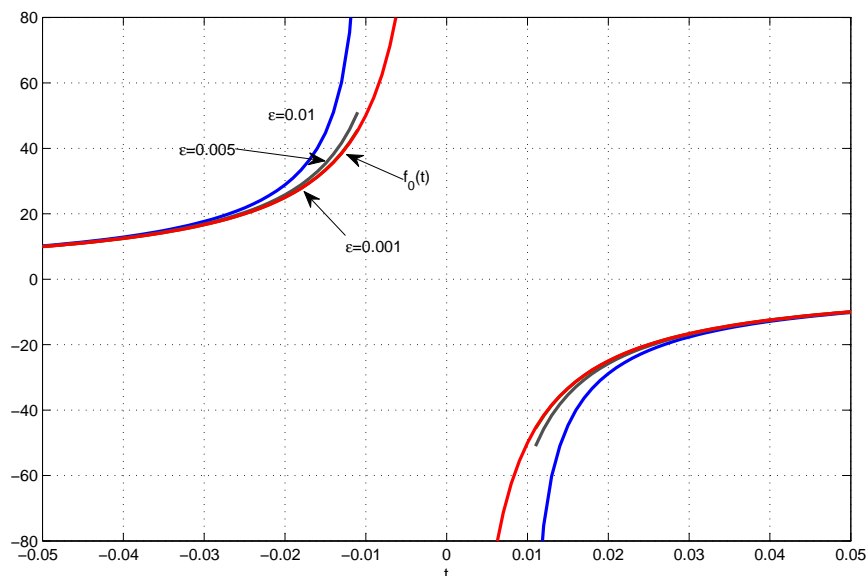


Figura 4.10: Gráfico de  $f_\varepsilon(t)$  e  $f_0(t)$  (vermelho) quando  $\psi(t) = 1$  para  $\varepsilon = 0.01$  (azul),  $\varepsilon = 0.005$  (cinza) e  $\varepsilon = 0.001$  (verde).

Para o caso onde  $\psi(t) = t$  (função ímpar) a igualdade  $f = f_0$  é válida pela subseção 3.2.2.1 com uma restrição no ponto 0, veja figura 4.11. Novamente verificamos a convergência da solução  $f_\varepsilon$  para  $f_0$  e conseqüentemente para  $f$  a medida que diminuimos o valor de  $\varepsilon$ . Em  $\varepsilon = 0.001$  de novo verificamos uma leve distinção entre as soluções.

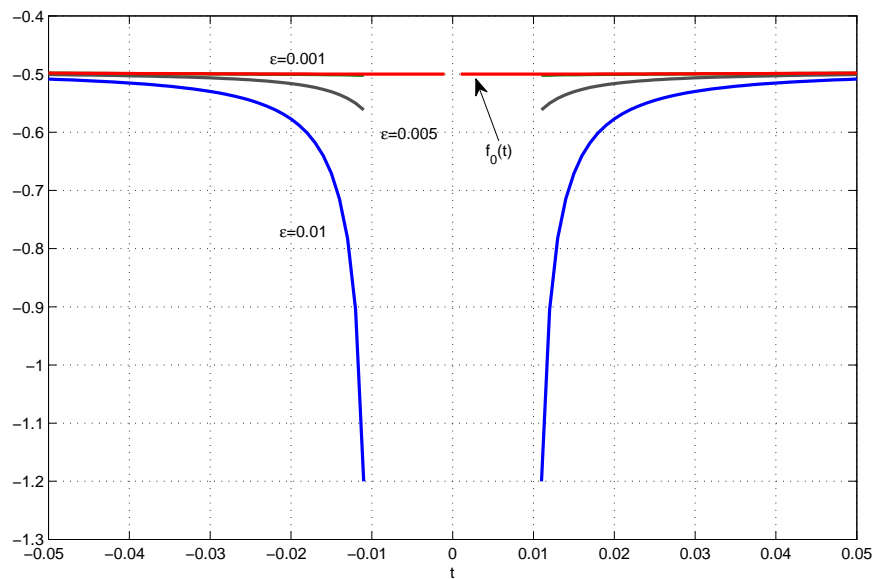


Figura 4.11: Gráfico de  $f_\varepsilon(t)$  e  $f_0(t)$  (vermelho) quando  $\psi(t) = t$  para  $\varepsilon = 0.01$  (azul),  $\varepsilon = 0.005$  (cinza) e  $\varepsilon = 0.001$  (verde).

Analogamente, para os casos  $\psi(t) = T_2(t)$  (figura 4.12) e  $\psi(t) = T_3(t)$  (ímpar) (figura 4.13) com  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.005$  e  $\varepsilon = 0.001$  verificamos numericamente a convergência entre as soluções  $f_\varepsilon$  e  $f_0$ , o que reforça os resultados analíticos apresentados na proposição 3.1 e subseção 3.2.2.1.

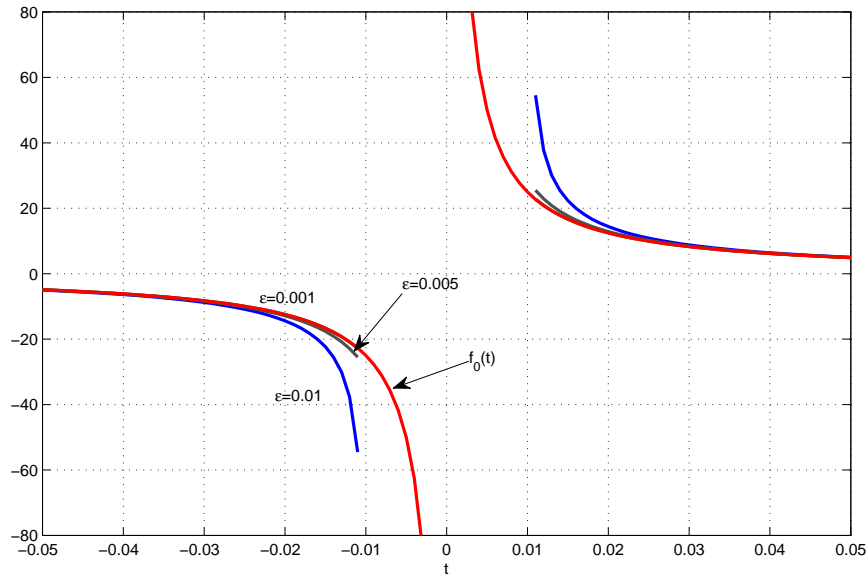


Figura 4.12: Gráfico de  $f_\varepsilon(t)$  e  $f_0(t)$  (vermelho) quando  $\psi(t) = T_2(t)$  para  $\varepsilon = 0.01$  (azul),  $\varepsilon = 0.005$  (cinza) e  $\varepsilon = 0.001$  (verde).

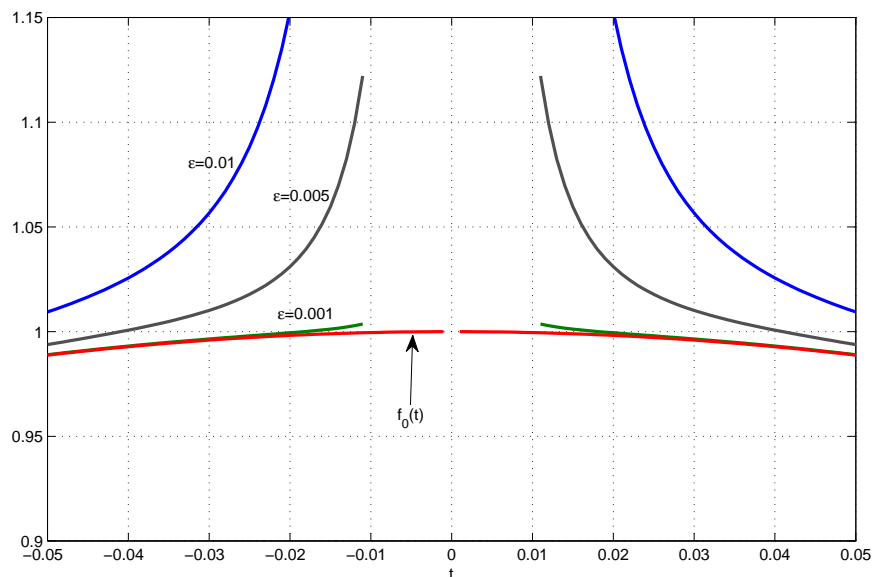


Figura 4.13: Gráfico de  $f_\varepsilon(t)$  e  $f_0(t)$  (vermelho) quando  $\psi(t) = T_3(t)$  para  $\varepsilon = 0.01$  (azul),  $\varepsilon = 0.005$  (cinza) e  $\varepsilon = 0.001$  (verde).

#### 4.4 Comparação entre as funções $f_\varepsilon$ e $f$

Nesta seção fazemos uma comparação entre a solução  $f_\varepsilon$  no intervalo  $G_\varepsilon$  e a solução  $f$  da equação do aerofólio no intervalo contínuo  $(-1, 1)$ . Apresentamos para cada função  $\psi(t)$  uma figura com dois gráficos, um tomando todo o intervalo  $(-1, 1)$  e um outro ampliado próximo as singularidades junto a origem.

Observe nas figuras 4.14 e 4.15 a proximidade das soluções  $f_\varepsilon$  e  $f$ . No entanto, veja que há uma pequena diferença entre elas. Isto ocorre, pois como vimos anteriormente  $f_\varepsilon$  converge para  $f_0$  e não  $f$ , sendo assim quando temos funções  $\psi$  pares, pela fórmula (3.2.6) há um termo somado a  $f_0$ .

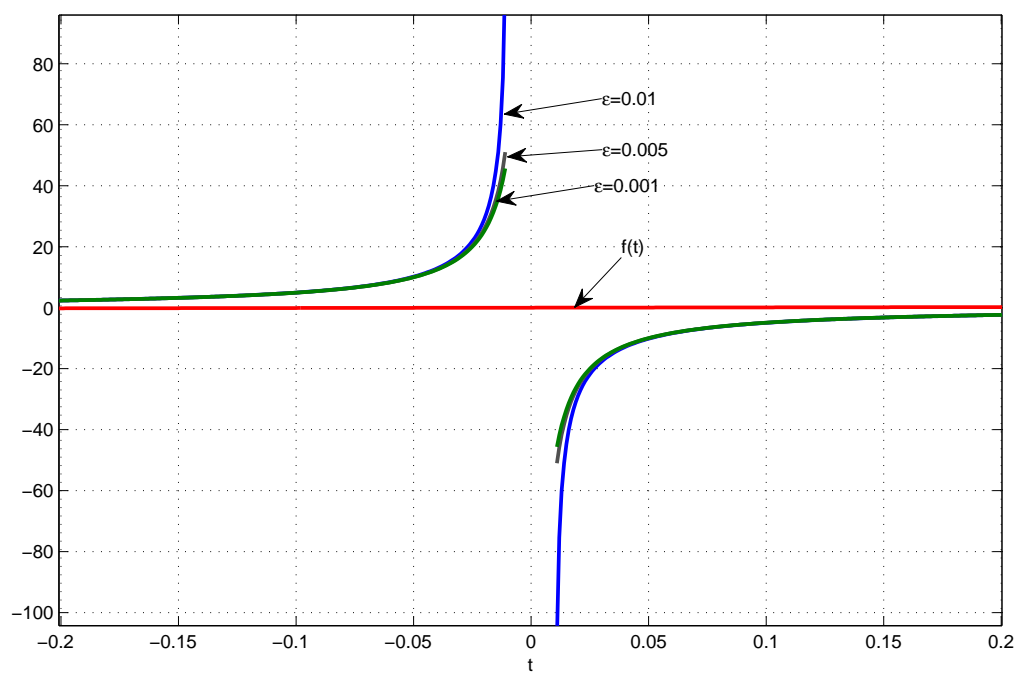
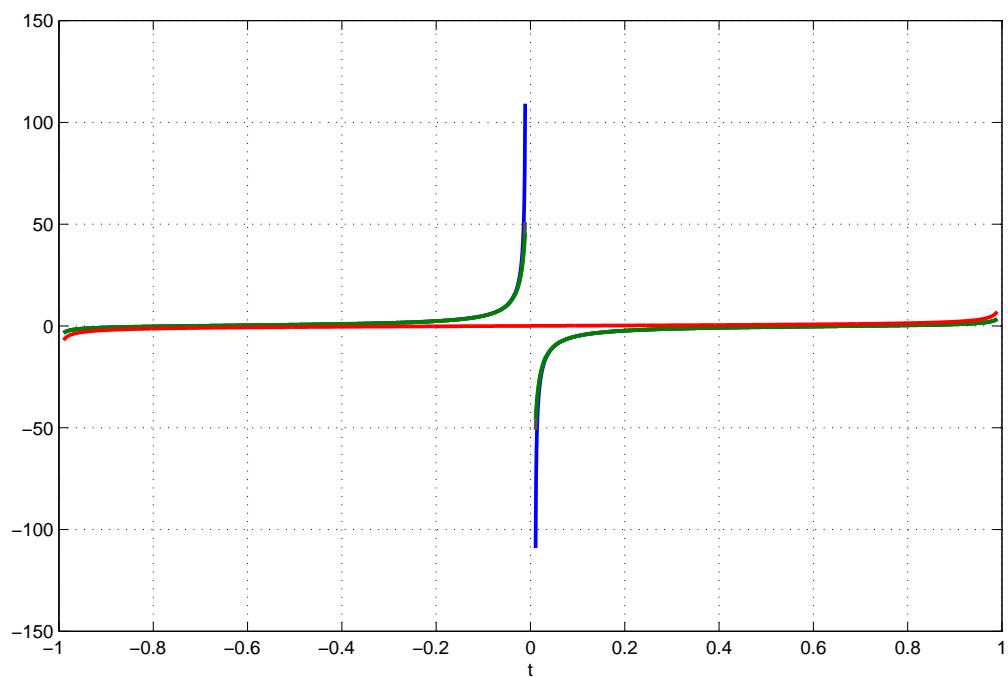


Figura 4.14: Gráficos de  $f_\varepsilon(t)$  e  $f(t)$  para  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.005$  e  $\varepsilon = 0.001$  quando  $\psi(t) = 1$ .

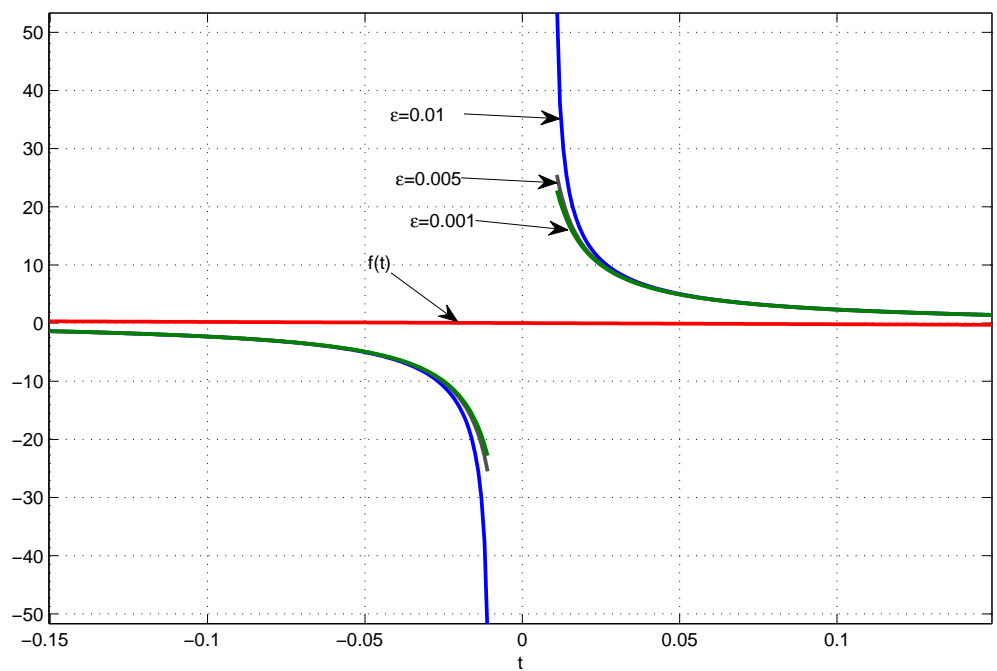
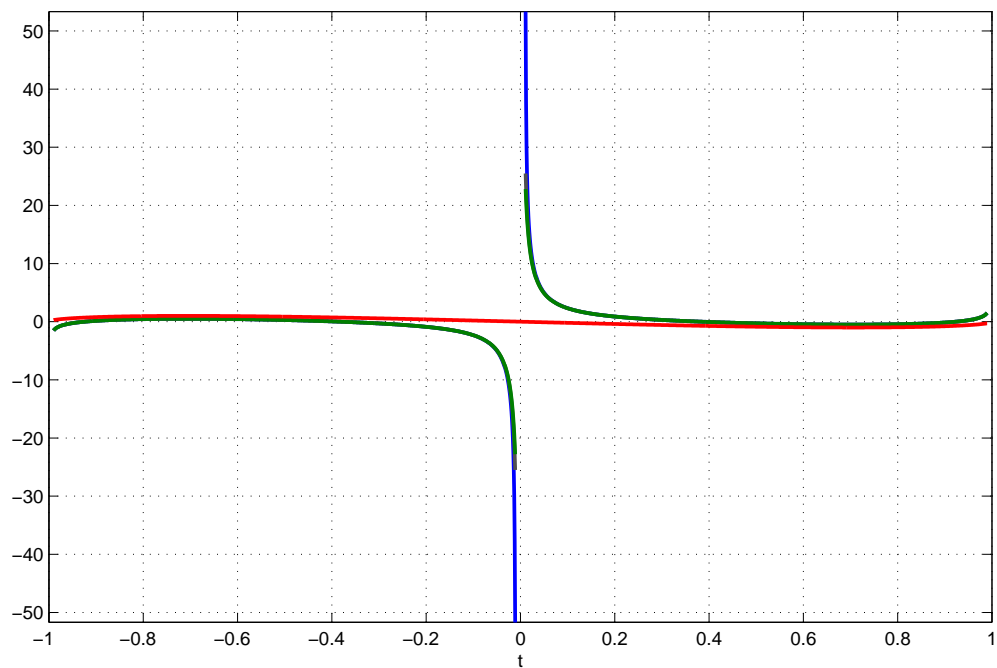


Figura 4.15: Gráficos de  $f_\varepsilon(t)$  e  $f(t)$  para  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.005$  e  $\varepsilon = 0.001$  quando  $\psi(t) = T_2(t)$ .

O mesmo não se repete quando tomamos funções  $\psi$  ímpares como  $\psi(t) = t$  (figura 4.16) e  $\psi(t) = T_3(t)$  (figura 4.17). Pois como vimos nestes casos temos a igualdade  $f_0 = f$  e por sua  $f_\varepsilon$  converge para  $f$ . Isso é um resultado importante pelo fato de podermos obter uma aproximação muito boa da solução da equação do aerofólio em um intervalo contínuo por uma solução no intervalo disjunto  $G_\varepsilon$ .

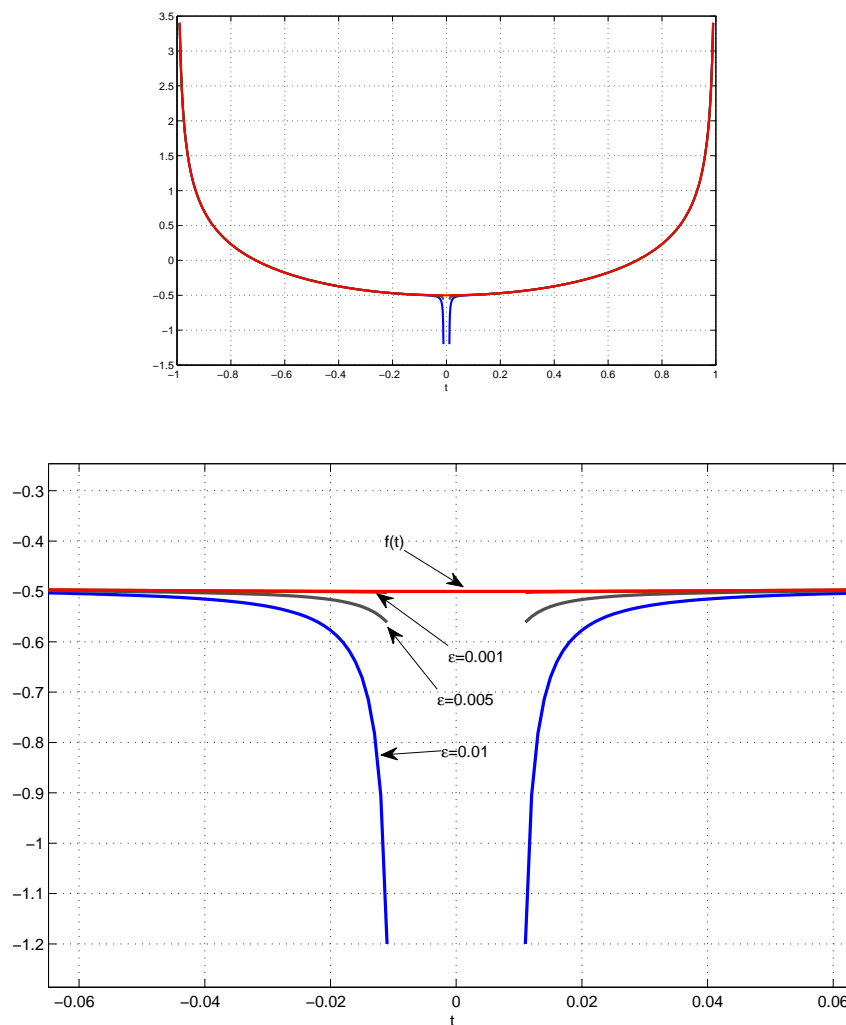


Figura 4.16: Gráficos de  $f_\varepsilon(t)$  e  $f(t)$  para  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.005$  e  $\varepsilon = 0.001$  quando  $\psi(t) = t$ .

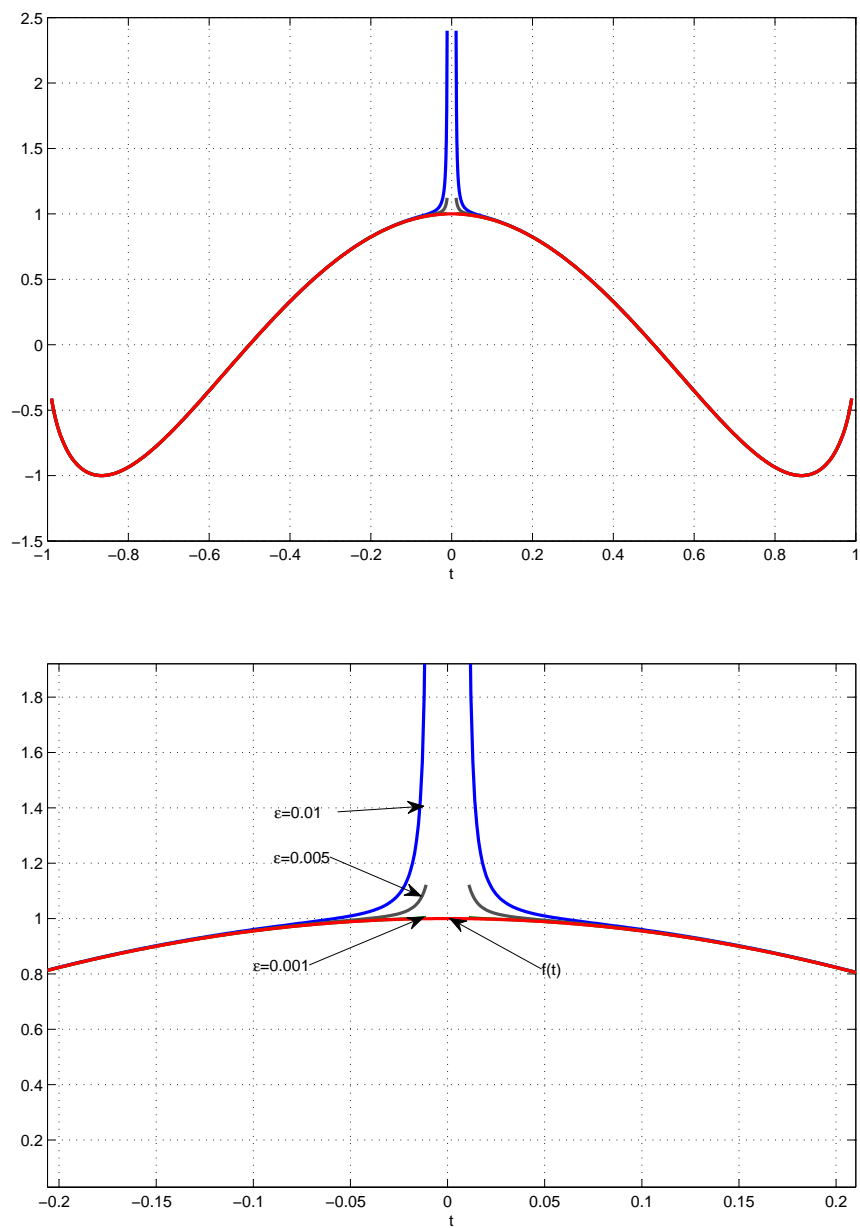


Figura 4.17: Gráficos de  $f_\epsilon(t)$  e  $f(t)$  para  $\epsilon = 0.01$ ,  $\epsilon = 0.005$  e  $\epsilon = 0.001$  quando  $\psi(t) = T_3(t)$ .



#### 4.5 Cálculo de $\|f_\varepsilon - f_0\|_2^2$

O cálculo do quadrado da norma  $L_2$  é feito pela integral (4.5.1) com peso  $\sqrt{(1-x^2)(x^2-\varepsilon^2)}$ .

$$\|f_\varepsilon - f_0\|_2^2 = \int_{G_\varepsilon} |f_\varepsilon - f_0|^2 \sqrt{(1-x^2)(x^2-\varepsilon^2)} dx \quad (4.5.1)$$

onde  $G_\varepsilon = (-1, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, 1)$ .

A tabela apresentada abaixo corresponde ao quadrado da norma  $L_2$  de  $f_\varepsilon - f_0$  para diferentes valores de  $\varepsilon$  e funções  $\psi(t)$ . Os resultado foram obtidos numericamente com a utilização do método de quadratura Gauss-Legendre, próprio para integrais singulares com núcleo Cauchy, cf. [6]. Segue:

$\psi(t) \backslash \varepsilon$	0.1	0.01	0.001	0.0001
$T_0$	0.191342769793206	0.193128932447121	0.193146896818386	0.193147022887962
$T_1$	0.002490215007009	0.000025000462278	0.000000250000183	0.000000002504049
$T_2$	0.045586812076099	0.048259233073517	0.048286495032204	0.048286740875320
$T_3$	0.009738724134028	0.000099979349925	0.000000999935158	0.000000009991048
$T_4$	0.000193256439854	0.000000019996908	0.000000000002036	0.000000000000002
$T_5$	0.009165135785798	0.000099919370265	0.000000999944876	0.000000010007228
$T_6$	0.000415720763719	0.000000044970239	0.000000000004553	0.000000000000002
$T_8$	0.000693636119910	0.000000079894855	0.000000000008071	0.000000000000003

Tabela 4.1: Quadrado da norma  $L_2$  de  $f_\varepsilon - f_0$  para diferentes valores de  $\varepsilon$  e funções  $\psi$ .

#### 4.6 Cálculo de $\|f_\varepsilon - f_0\|_2^2$

Vamos calcular o quadrado da norma  $L_2$  de  $f_\varepsilon - f_0$  pela integral (4.6.1) com peso  $|1-x^2|\sqrt{x^2-\varepsilon^2}$ .

$$\|f_\varepsilon - f_0\|_2^2 = \int_{G_\varepsilon} |f_\varepsilon - f_0|^2 |1-x^2|\sqrt{x^2-\varepsilon^2} dx \quad (4.6.1)$$

onde  $G_\varepsilon = (-1, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, 1)$ .

$\psi(t) \backslash \varepsilon$	0.1	0.01	0.001	0.0001
$T_0$	0.190088028775678	0.193116430894111	0.193146771818238	0.193147021637963
$T_1$	0.002456427032173	0.000024995624238	0.000000249999555	0.000000002504047
$T_2$	0.045287014087441	0.048256109089376	0.048286463782257	0.048286740562819
$T_3$	0.009606020773707	0.000099960000303	0.00000999932643	0.00000009991046
$T_4$	0.000192119995467	0.000000019995741	0.00000000002035	0.000000000000001
$T_5$	0.009038786307812	0.000099900030075	0.00000999942367	0.000000010007226
$T_6$	0.000413273504743	0.000000044967615	0.00000000004552	0.000000000000001
$T_7$	0.000689546549299	0.000000079890193	0.00000000008069	0.000000000000002

Tabela 4.2: Quadrado da norma  $L_2$  de  $f_\varepsilon - f_0$  para diferentes valores de  $\varepsilon$  e funções  $\psi$ .

## 5 SOLUÇÕES POLINOMIAIS E MÉTODO ESPECTRAL

Neste capítulo discutimos a questão da solução polinomial para um modelo de aproximação espectral para a equação do aerofólio generalizada.

Apresentamos ainda algumas soluções analíticas de  $f_\varepsilon$  para da equação do aerofólio sobre intervalos disjuntos.

### 5.1 Solução quase-polinomial

Nessa seção consideramos a questão da solução polinomial para a equação do aerofólio (3.1.2). Propomos resolver parcialmente essa questão usando a solução aproximada  $f_0$  dada por (3.2.1).

#### 5.1.1 Aproximação de ordem 1

De acordo com (3.2.1), consideramos  $f_0$  como uma aproximação da solução  $f_\varepsilon$  para a equação integral (3.1.2). Então, estamos procurando a solução polinomial para a integral singular do tipo Cauchy (3.2.2):

$$f_0(x) = \frac{1}{\pi x \sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{x-t} t \psi(t) dt \quad \text{para todo } x \in (-1, 1) \setminus \{0\}. \quad (5.1.1)$$

É sabido que para todo  $x \in (-1, 1)$  e  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{x-t} U_n(t) dt = T_{n+1}(x),$$

onde  $T_n$  e  $U_n$  são polinômios de Tchebychev do primeiro e segundo tipo, respectivamente (veja e.g. [9]). Daí, definindo

$$\psi(x) = x^{-1} U_n(x) \quad (5.1.2)$$

para todo  $x \in (-1, 1)$  (e  $x \neq 0$  quando  $n$  é ímpar) em (5.1.1), temos

$$f_0(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} T_{n+1}(x). \quad (5.1.3)$$

*Observação 5.1.* Nós explicitamos aqui a solução quase-polinomial para a equação integral (5.1.1) quando  $n = 0, 1, 2, 3$ .

- $n = 0$ :  $\psi(t) = t^{-1}$  e  $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .
- $n = 1$ :  $\psi(t) = 2$  e  $f_0(x) = \frac{2x^2 - 1}{x\sqrt{1-x^2}}$ .
- $n = 2$ :  $\psi(t) = t^{-1}(4t^2 - 1)$  e  $f_0(x) = \frac{4x^2 - 3}{\sqrt{1-x^2}}$ .
- $n = 3$ :  $\psi(t) = 8t^2 - 4$  e  $f_0(x) = \frac{8x^4 - 8x^2 + 1}{x\sqrt{1-x^2}}$ .

### 5.1.2 Um método espectral da equação do aerofólio generalizada em intervalos disjuncto próximos

Dados os resultado apresentados acima podemos propor um método espectral para uma aproximação da equação generalizada (veja [3])

$$\frac{1}{\pi} \int_{G_\varepsilon} \left\{ \frac{1}{x-t} + K(x, t) \right\} f_\varepsilon(t) w(t) dt = -\psi(x), \quad x \in G_\varepsilon, \quad (5.1.4)$$

onde  $K$  é função regular (sem singularidade forte) e  $w(t) = \frac{1}{t\sqrt{t-t^2}}$ .

Expandindo a solução como

$$f_\varepsilon(t) \simeq \sum_{n=0}^N a_n T_{n+1}(t), \quad (5.1.5)$$

de (5.1.2) e (5.1.3)

$$\sum_{n=0}^N a_n [x^{-1} U_n(x) + \mathcal{K} T_{n+1}] = \psi(x), \quad (5.1.6)$$

onde  $\mathcal{K}$  é o operador integral dado por

$$\mathcal{K}(g) = \frac{1}{\pi} \int_{G_\varepsilon} K(x, t) g(t) w(t) dt. \quad (5.1.7)$$

A equação (5.1.6) pode ser resolvida por um método de Galerkin ou colocação.

O método espectral consiste de (5.1.5) e (5.1.6). Note que introduzindo o peso  $w(t)$  no integrando da equação integral as soluções obtidas são puramente polinomiais.

## 5.2 Soluções analíticas das equações do aerofólio

Nesta seção, vamos apresentar alguns resultados analíticos para as soluções da equação do aerofólio  $f_\varepsilon$  definida em  $G_\varepsilon = (-1, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, 1)$ ,  $f_0$  definida no intervalo  $(-1, 1) \setminus \{0\}$  e  $f$  definida no intervalo  $(-1, 1)$ , para  $\psi(t) = 1$ ,  $\psi(t) = t$  e  $\psi(t) = T_2(t)$ .

Sabemos que a solução da equação do aerofólio no intervalo  $G_\varepsilon = (-1, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, 1)$  é dada pela equação (3.1.6) e da equação (3.1.4)  $\Psi_\varepsilon$  pode ser colocado na forma:

$$\Psi_\varepsilon(x) = \int_\varepsilon^1 R_\varepsilon(t) \left[ \frac{\psi(-t)}{x+t} - \frac{\psi(t)}{x-t} \right] dt. \quad (5.2.1)$$

a) Para  $\psi(t) = 1$ , segue

$$\begin{aligned} \Psi_\varepsilon(x) &= \int_\varepsilon^1 R_\varepsilon(t) \left[ \frac{1}{x+t} - \frac{1}{x-t} \right] dt \\ &= - \int_\varepsilon^1 R_\varepsilon(t) \frac{2t}{x^2 - t^2} dt \\ &= - \int_{\varepsilon^2}^1 \sqrt{(1-v)(v-\varepsilon^2)} \frac{dv}{u-v} \quad (\text{subs. } u = x^2 \text{ e } v = t^2) \\ &= -\pi \left( \frac{1}{\pi i} \int_{\varepsilon^2}^1 \sqrt{(v-1)(v-\varepsilon^2)} \frac{dv}{v-u} \right) \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Pela afirmação 2.1, a solução da integral acima corresponde a um polinômio que representa a parte principal da expansão da densidade da integral sin-

gular de Cauchy na vizinhança do infinito, (veja apêndice A equação (A.1)). Vamos denotá-lo por PP. Logo,

$$\begin{aligned}\Psi_\varepsilon(x) &= -\pi \text{PP} \left\{ \sqrt{(u-1)(u-\varepsilon^2)} \right\}_{u \rightarrow \infty} \\ &= -\pi \left( u - \frac{1+\varepsilon^2}{2} \right) \\ &= -\pi \left( x^2 - \frac{1+\varepsilon^2}{2} \right).\end{aligned}\tag{5.2.3}$$

Substituindo em (3.1.6), temos

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} -\frac{1}{R_\varepsilon(x)} \left( x^2 - \frac{1+\varepsilon^2}{2} \right), & x \in (-1, -\varepsilon) \\ \frac{1}{R_\varepsilon(x)} \left( x^2 - \frac{1+\varepsilon^2}{2} \right), & x \in (\varepsilon, 1).\end{cases}\tag{5.2.4}$$

Agora substituindo  $\psi(t) = 1$  na solução  $f_0$  em (5.1.1) vamos ter

$$\begin{aligned}f_0(x) &= \frac{1}{\pi x \sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{x-t} t \, dt \\ &= \frac{1}{\pi x \sqrt{1-x^2}} \pi \left( x^2 - \frac{1}{2} \right), \text{ (cf. [2, pg. 8])} \\ \therefore f_0(x) &= \frac{1}{x \sqrt{1-x^2}} \left( x^2 - \frac{1}{2} \right) \quad \forall x \in (-1, 1) \setminus \{0\}.\end{aligned}\tag{5.2.5}$$

Por fim, substituímos  $\psi(t) = 1$  na solução da equação do aerofólio  $f(x)$  dada em (3.2.5)

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{x-t} \, dt \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} (\pi x), \text{ (cf. [2, pg. 8])} \\ \therefore f(x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}\tag{5.2.6}$$

Observe que com os resultados apresentados acima podemos obter uma relação entre  $f_\varepsilon$  e  $f_0$  para o caso particular  $\psi(t) = 1$ .

$$f_\varepsilon(x) - f_0(x) = \begin{cases} -\frac{1}{R_\varepsilon(x)} \left( x^2 - \frac{1 + \varepsilon^2}{2} \right) - \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \left( x^2 - \frac{1}{2} \right), & x \in (-1, -\varepsilon) \\ \frac{1}{R_\varepsilon(x)} \left( x^2 - \frac{1 + \varepsilon^2}{2} \right) - \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \left( x^2 - \frac{1}{2} \right), & x \in (\varepsilon, 1). \end{cases} \quad (5.2.7)$$

b) Para  $\psi(t) = t$ , primeiro vamos determinar  $\Psi_\varepsilon$  dada por (5.2.1).

$$\begin{aligned} \Psi_\varepsilon(x) &= \int_\varepsilon^1 R_\varepsilon(t) \left[ \frac{-t}{x+t} - \frac{t}{x-t} \right] dt \\ &= -x \int_\varepsilon^1 R_\varepsilon(t) \frac{2t}{x^2 - t^2} dt \\ &= -\sqrt{u} \int_{\varepsilon^2}^1 \sqrt{(1-v)(v-\varepsilon^2)} \frac{dv}{u-v} \quad (\text{subs. } u = x^2 \text{ e } v = t^2) \\ &= -\pi\sqrt{u} \left( \frac{1}{\pi i} \int_{\varepsilon^2}^1 \sqrt{(v-1)(v-\varepsilon^2)} \frac{dv}{v-u} \right) \\ &= -\pi\sqrt{u} \text{PP} \{ \sqrt{(u-1)(u-\varepsilon^2)} \}_{u \rightarrow \infty}. \end{aligned}$$

Pela afirmação 2.1 ao expandirmos em série a densidade da integral acima temos, (veja apêndice A equação (A.1)):

$$\begin{aligned} \Psi_\varepsilon(x) &= -\pi\sqrt{u} \left( u - \frac{1 + \varepsilon^2}{2} \right), \\ &= -\pi x \left( x^2 - \frac{1 + \varepsilon^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Substituindo em (3.1.6), obtemos a solução da equação do aerofólio para intervalos disjuntos

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} -\frac{x}{R_\varepsilon(x)} \left( x^2 - \frac{1 + \varepsilon^2}{2} \right), & x \in (-1, -\varepsilon) \\ \frac{x}{R_\varepsilon(x)} \left( x^2 - \frac{1 + \varepsilon^2}{2} \right), & x \in (\varepsilon, 1). \end{cases} \quad (5.2.8)$$

Vamos agora substituir  $\psi(t) = t$  na solução  $f_0$  dada em (5.1.1). Daí temos,

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{\pi x \sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{x-t} t^2 dt \\ &= \frac{1}{\pi x \sqrt{1-x^2}} \pi \left( x^3 - \frac{x}{2} \right), \text{ (cf. [2, p. 8])} \\ \therefore f_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left( x^2 - \frac{1}{2} \right), \quad \forall x \in (-1, 1). \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

A solução  $f$  dada em (3.2.5) segue analogamente

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{x-t} t dt \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \pi \left( x^2 - \frac{1}{2} \right), \text{ (cf. [2, p. 8])} \\ \therefore f(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left( x^2 - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Veja que para  $\psi(t) = t$  (ímpar) temos a igualdade  $f(x) = f_0(x)$  como apresentado na subseção 3.2.2.1.

c) Para  $\psi(t) = T_2(t) = 2t^2 - 1$ , começamos determinando  $\Psi_\varepsilon$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \Psi_\varepsilon(x) &= \int_\varepsilon^1 R_\varepsilon(t) \left[ \frac{2t^2-1}{x+t} - \frac{2t^2-1}{x-t} \right] dt \\ &= \int_\varepsilon^1 R_\varepsilon(t) \frac{-4t^3+2t}{x^2-t^2} dt \\ &= -4 \underbrace{\int_\varepsilon^1 \frac{R_\varepsilon(t) t^3}{x^2-t^2} dt}_{J_1} + 2 \underbrace{\int_\varepsilon^1 \frac{R_\varepsilon(t) t}{x^2-t^2} dt}_{J_2}. \end{aligned}$$

Veja que  $\Psi_\varepsilon$  é composta por duas integrais singulares cujas soluções são dadas a seguir.

Para a integral

$$J_1 = \int_\varepsilon^1 \frac{R_\varepsilon(t) t^3}{x^2-t^2} dt, \quad (5.2.11)$$



fazemos as mudanças de variáveis  $u = x^2$  e  $v = t^2$ . Logo,

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{1}{2} \int_{\varepsilon^2}^1 \frac{\sqrt{(1-v)(v-\varepsilon^2)} \cdot v}{v-u} dv \\ &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{\pi i} \int_{\varepsilon^2}^1 \frac{\sqrt{(v-1)(v-\varepsilon^2)} \cdot v}{v-u} dv \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u-1)(u-\varepsilon^2)} \cdot u \right\}_{u \rightarrow \infty}. \end{aligned}$$

Novamente, pela afirmação 2.1, ao expandimos a densidade da integral de Cauchy acima obtemos, (veja apêndice A equação (A.4)):

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\pi}{2} \left( u^2 - \frac{1+\varepsilon^2}{2}u - \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{8} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left( x^4 - \frac{1+\varepsilon^2}{2}x^2 - \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{8} \right). \end{aligned}$$

A integral singular  $J_2$  foi obtida da equação (5.2.2). Então, substituindo em  $\Psi_\varepsilon$  temos:

$$\begin{aligned} \Psi_\varepsilon(x) &= -4\frac{\pi}{2} \left( x^4 - \frac{1+\varepsilon^2}{2}x^2 - \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{8} \right) + \pi \left( x^2 - \frac{(1+\varepsilon^2)}{2} \right) \\ &= -2\pi x^4 + \pi x^2 + \pi(1+\varepsilon^2)x^2 - \pi \frac{(1+\varepsilon^2)}{2} + \pi \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{4} \\ &= -2\pi x^4 + \pi(2+\varepsilon^2)x^2 + \pi \frac{(2-\varepsilon^2)^2 - 5}{4}, \end{aligned}$$

dessa forma, a solução  $f_\varepsilon$  dada por (3.1.6) fica:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{R_\varepsilon(x)} \left( -2x^4 + (2+\varepsilon^2)x^2 + \frac{(2-\varepsilon^2)^2 - 5}{4} \right), & x \in (-1, -\varepsilon) \\ -\frac{1}{R_\varepsilon(x)} \left( -2x^4 + (2+\varepsilon^2)x^2 + \frac{(2-\varepsilon^2)^2 - 5}{4} \right), & x \in (\varepsilon, 1). \end{cases} \quad (5.2.12)$$

A solução  $f_0$  para  $\psi(t) = 2t^2 - 1$  é a seguinte:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \frac{1}{\pi x \sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{x-t} t(2t^2-1) dt \\
&= \frac{1}{\pi x \sqrt{1-x^2}} \left( 2 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{x-t} t^3 dt - \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{x-t} t dt \right) \\
&= \frac{1}{\pi x \sqrt{1-x^2}} \left( 2\pi \left( x^4 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8} \right) - \pi \left( x^2 - \frac{1}{2} \right) \right) \\
&= \frac{1}{x \sqrt{1-x^2}} \left( 2x^4 - 2x^2 + \frac{1}{4} \right).
\end{aligned}$$

Podemos também relacionar as soluções  $f_\varepsilon$  e  $f_0$  pela diferença:

$$f_\varepsilon(x) - f_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{R_\varepsilon(x)} \left( -2x^4 + (2 + \varepsilon^2)x^2 + \frac{(2 - \varepsilon^2)^2 - 5}{4} \right) \\ -\frac{1}{x \sqrt{1-x^2}} \left( 2x^4 - 2x^2 + \frac{1}{4} \right), & x \in (-1, -\varepsilon) \\ \\ -\frac{1}{R_\varepsilon(x)} \left( -2x^4 + (2 + \varepsilon^2)x^2 + \frac{(2 - \varepsilon^2)^2 - 5}{4} \right) \\ -\frac{1}{x \sqrt{1-x^2}} \left( 2x^4 - 2x^2 + \frac{1}{4} \right), & x \in (\varepsilon, 1). \end{cases}$$

## 6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, estudamos a integral singular de Cauchy, definições e propriedades importantes foram apresentadas a seu respeito. Apresentamos as soluções analíticas da equação do aerofólio em um intervalo contínuo com aplicações em mecânica de fluidos e elasticidade.

Investigamos formalmente e numericamente o comportamento assintótico da solução  $f_\varepsilon$  da equação do aerofólio sobre intervalos disjuntos. Buscamos comparar e relacionar as três soluções,  $f_\varepsilon$ ,  $f_0$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) e a solução  $f$  do aerofólio sobre o intervalo contínuo  $(-1, 1)$ . Analisamos ainda o comportamento das soluções  $f_0$  e  $f$  de acordo com a escolha da função  $\psi(t)$  como ímpar ou par e polinômios de Tchebychev do primeiro e segundo tipo. Resultados numéricos foram obtidos. Além do mais, investigamos expressões analíticas para as soluções  $f_0$  e  $f$ , das equações do aerofólio sobre o intervalo  $(-1, 1)$  e  $f_\varepsilon$  sobre intervalos com uma abertura não necessariamente pequena.

Tratamos a equação do aerofólio sobre intervalos disjuntos, com solução  $f_\varepsilon$  e obtivemos uma aproximação assintótica  $f_0$ , correspondente ao limite de  $f_\varepsilon$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , da solução da equação do aerofólio  $f$  sobre o intervalo  $(-1, 1)$ . Comparamos as soluções  $f_0$  e  $f$  sobre o intervalo contínuo  $(-1, 1)$  e demonstramos que para os casos onde  $\psi(t)$  é ímpar ou polinômios de Tchebychev do primeiro e segundo tipo,  $T_m$  e  $U_n$  respectivamente, para  $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0, 2\}$  e  $n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$ , obtemos a igualdade entre as soluções e por sua vez a proximidade das funções  $f_\varepsilon$  e  $f$ . Em nossos resultados numéricos exibimos gráficos que mostram a convergência de  $f_\varepsilon$  para  $f_0$  para diferentes funções  $\psi(t)$  e valores de  $\varepsilon$ , comparamos ainda as soluções  $f_\varepsilon$  e  $f$ , exibimos tabelas com o cálculo do quadrado da norma  $L_2$  de  $f_\varepsilon - f_0$  com diferentes pesos que confirmam a convergência entre as soluções, exceto para os casos mencionados anteriormente. Além do mais, mostramos soluções polinomiais para a

equação do aerofólio usando a solução aproximada  $f_0$ . Propomos um método espectral para a equação do aerofólio generalizada sobre intervalos disjuntos que deixamos como uma extensão desta dissertação para trabalhos futuros. O estudo de espaços de funções onde  $f_\varepsilon$  converge analiticamente para  $f_0$  é um tópico de pesquisa que estamos no momento detidos. Ainda, como propostas futuras, buscaremos investigar o comportamento das soluções das equações do aerofólio  $f$  e  $f_\varepsilon$  para outros valores das constantes  $A$ ,  $C_{1,\varepsilon}$  e  $C_{2,\varepsilon}$ , e obter uma relação entre  $\psi$  e  $f_\varepsilon$  para  $\varepsilon$  arbitrário em termos de polinômios ortogonais. Por fim, fornecemos soluções analíticas das equações do aerofólio sobre o intervalo contínuo  $(-1, 1)$  e disjunto  $(-1, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, 1)$  para diferentes funções  $\psi(t)$ .

## APÊNDICE A

Nesta seção vamos mostrar os procedimentos para obtenção da solução analítica de integrais singulares com núcleo de Cauchy.

Como foi mencionado na afirmação 2.1, para encontrarmos a solução analítica devemos expandir em série a densidade da integral singular numa vizinhança no infinito. A solução da integral corresponderá a parte principal da expansão, que denotamos por  $PP$ . Sendo assim, considere a integral singular da forma

$$I = \frac{1}{\pi i} \int_{\varepsilon^2}^1 \sqrt{(v-1)(v-\varepsilon^2)} \frac{dv}{v-u}. \quad (\text{A.1})$$

Então, a solução de (A.1) será

$$I = PP \left\{ \sqrt{(u-1)(u-\varepsilon^2)} \right\}_{u \rightarrow \infty}.$$

Para encontrarmos uma solução analítica da integral primeiramente fazemos a mudança de variável  $u = \frac{1}{w}$  na densidade da integral. Daí,

$$E_1(w) = \frac{1}{w} \sqrt{(1-w)(1-\varepsilon^2 w)}. \quad (\text{A.2})$$

Vamos fazer  $f(w) = \sqrt{(1-w)(1-\varepsilon^2 w)}$  e expandir em série de Taylor centrado em  $w = 0$ . Segue que

$$\begin{aligned} f(w) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} w + O(w^2) + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2} (1 + \varepsilon^2) w + O(w^2) + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Substituindo (A.3) em (A.2) temos

$$\begin{aligned} E_1(w) &= \frac{1}{w} \left( 1 - \frac{1}{2} (1 + \varepsilon^2) w + O(w^2) \right) \\ &= \frac{1}{w} - \frac{1}{2} (1 + \varepsilon^2) + O(w) + \dots \end{aligned}$$

Desfazendo a mudança de variável  $u = \frac{1}{w}$  e tomando a parte principal da expansão anterior quando  $u \rightarrow \infty$ , ou seja, apenas os termos que não se anulam quando  $u$  tende para o infinito obtemos

$$E_1\left(\frac{1}{u}\right) = u - \frac{1}{2}(1 + \varepsilon^2).$$

Portanto, a solução analítica da integral singular (A.1) é

$$I = u - \frac{1}{2}(1 + \varepsilon^2) \blacksquare$$

Considere agora outra integral singular

$$J = \frac{1}{\pi i} \oint_{\varepsilon^2}^1 \sqrt{(v-1)(v-\varepsilon^2)} \cdot v \frac{dv}{v-u}. \quad (\text{A.4})$$

Analogamente ao caso anterior, a solução analítica da integral singular corresponde a parte principal da integral da expansão da densidade da integral numa vizinhança no infinito, ou seja,

$$J = PP \left\{ \sqrt{(u-1)(u-\varepsilon^2)} \cdot u \right\}_{u \rightarrow \infty}.$$

Pela mudança de variável  $u = \frac{1}{w}$  segue

$$E_2(w) = \frac{1}{w^2} \sqrt{(1-w)(1-w\varepsilon^2)}.$$

Como no caso anterior, expandindo em série de Taylor em  $w = 0$  somente a raiz quadrada na expressão acima temos

$$\begin{aligned} E_2(w) &= \frac{1}{w^2} \left( 1 - \frac{1}{2}(1 + \varepsilon^2)w - \frac{1}{8}(1 - \varepsilon^2)^2 w^2 + O(w^3) + \dots \right) \\ &= \frac{1}{w^2} - \frac{1}{2}(1 + \varepsilon^2) \frac{1}{w} - \frac{1}{8}(1 - \varepsilon^2)^2 + O(w) + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Desfazendo a mudança de variável e tomando somente a parte principal da expansão obtemos

$$E_2 \left( \frac{1}{u} \right) = u^2 - \frac{1}{2} (1 + \varepsilon^2) u - \frac{1}{8} (1 - e^2)^2.$$

Portanto, a solução analítica de  $J_2$  é

$$J_2 = u^2 - \frac{1}{2} (1 + \varepsilon^2) u - \frac{1}{8} (1 - e^2)^2 \blacksquare$$

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Breslin, J. P. and Andersen, P. (1994). *Hydrodynamics of ship propellers*, volume 3 of *Cambridge Ocean Technology Series*. Cambridge University Press.
- [2] Chakrabarti, A. and Martha, S. C. (2012). Methods of solution of singular integral equations. *Mathematical Sciences*, 6(15).
- [3] Farina, L. (2014). Convergence of spectral methods for singular integral equations and applications. *In The Third BCAM Workshop on Computacional Mathematics*. Bilbao.
- [4] Farina, L., Péron, V., and Rondiney, M. (2015). Asymptotic behavior for the solution of the airfoil equation on close disjoint intervals.
- [5] Gakhov, F. D. (1966). *Boundary value problems*, volume 85 of *International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics*. Pergamon Press. Translation by I. N. Sneddon.
- [6] Hui, C. Y. and Shia, D. (1999). Evaluations of hypersingular integrals using gaussian quadrature. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (44):205–214.
- [7] Lifanov, I. K., Poltavskii, L. N., and Vainikko, G. M. (2004). *Hypersingular integral equations and their applications*, volume 4 of *Differential and Integral Equations and Their Applications*. CRC Press LLC.
- [8] Mandal, B. N. and Chakrabarti, A. (2011). *Applied singular integral equations*. Science Publishers.
- [9] Martin, P. A. (1992). Exact solution of a simple hypersingular integral equation. *J. Integral Equations Appl.*, 4(2):197–204.



- [10] Monegato, G. (2009). Definitions, properties and applications of finite-part integrals. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, (229):425–439.
- [11] Muskhelishvili, N. I. (1953). *Singular integral equations. Boundary problems of function theory and their application to mathematical physics*. P. Noordhoff N. V., Groningen. Translation by J. R. M. Radok.
- [12] Tricomi, F. G. (1951). The airfoil equation for a double interval. *ZAMP*, 2(5):402–406.
- [13] Tricomi, F. G. (1957). *Integral equations*. Pure and Applied Mathematics. Vol. V. Interscience Publishers, Inc., New York.
- [14] Tuck, E. O. (1980). Application and solution of Cauchy singular integral equations. In *Application and numerical solution of integral equations (Proc. Sem., Australian Nat. Univ., Canberra, 1978)*, volume 6 of *Monographs Textbooks Mech. Solids Fluids: Mech. Anal.*, pages 21–49. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn.
- [15] Wendland, W. L. (1982). On applications and the convergence of boundary integral methods. In *Treatment of integral equations by numerical methods (Durham, 1982)*, pages 463–476. Academic Press, London.