UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

PAOLA ROSSATO BERNARDO

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE FUNÇÕES PARA O PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

Porto Alegre
2015

PAOLA ROSSATO BERNARDO

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE FUNÇÕES PARA O PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana
Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS

Profª. Drª. Elisabete Zardo Búrigo
Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS

Profª. Drª. Marilaine de Fraga Sant'Ana
Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS

Porto Alegre, 24 de junho de 2015

“A educação está em crise. A escola, como instituição responsável pela disseminação de conhecimentos, já não consegue atender aos seus objetivos. (...) No Brasil, a evasão escolar é a epítome viva desta situação: de cada 100 alunos que entram na primeira série, 47 chegam até a segunda série, e somente 17 terminam o primeiro grau. (...) A questão, portanto, é como **reviver** a educação para que ela realmente cumpra seus objetivos mais amplos” (VALENTE, 1985, p. 7 – 10)

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que estiveram ao meu lado durante esta importante etapa de minha vida, que foram esses anos da minha graduação. Peço desculpas por não conseguir citar ao longo desse agradecimento todas elas, mas saibam que sei da importância de cada uma.

Primeiramente, gostaria de agradecer à minha família: Veronice, Moacir, Priscila, William e Murilo, por me lembrarem que a família é a peça mais importante de qualquer quebra-cabeça, por me apoiarem na minha decisão de ser professora e me ajudarem sempre que necessitei. Podem ter havido discussões no meio do caminho, mas tenho certeza que a nossa união e amor nunca deixarão que diminua a nossa proximidade. Em particular agradeço a minha mãe, pois a sua força de vontade e dedicação me fizeram vencer todos os obstáculos que encontrei em minha vida. Um dia espero ser metade da mãe que tu és para nós.

Ao resto de meus familiares, em particular a família da minha tia Eronilda, tia Vera e de minha prima Janete. Obrigada pelas tardes maravilhosas de conversa fiada, pelo apoio e admiração de vocês. Obrigada pelos cuidados quando estive doente e pela motivação que me concederam ao longo da minha vida acadêmica.

Ao meu Orientador Alvino, que mesmo sem me conhecer como aluna, aceitou o desafio de ser meu orientador e, sem o qual este trabalho não existiria. Seja fazendo com que ele seja menos “explosivo”, quer seja procurando palavras mais adequadas. Obrigada pela paciência ao longo de tantas horas de orientação. Aos membros dessa banca, Professora Marilaine e Professora Elisabete, por terem aceitado analisar um trabalho de mais de cem páginas. Obrigada Professora Marilaine, por também ter me orientado neste trabalho, na disciplina que ministrou, me ensinando como buscar referências e em como escrever de modo acadêmico minha opinião sobre cada uma delas. Obrigada Professora Elisabete, por ter aceitado o pedido sem ao menos eu ter sido sua aluna ao longo de minha graduação. Ao professor Vilmar Trevisan, meu orientador da Bolsa de Iniciação Científica, por ter me guiado para o caminho do estudo de Matemática Aplicada, e ter me ajudado a ver qual o futuro que eu mais ficaria feliz na carreira como professora.

A todos os meus amigos do ISL, da UFRGS e aos que conheci através de outros meios. Vocês são muitos, mas sabem que se refere a vocês este trecho. Obrigada por me ajudaram em todos os momentos que precisei, jogando Magic, vendo filmes, jogando truco, ou fazendo qualquer outra coisa para me animar. Agradeço a todos principalmente pela compreensão em momentos difíceis, nos quais eu não dei a devida atenção a vocês: Andressa

P., Camila F, Natália S., Patrícia M., Bruna H., Natalia G., Carlos C., Luis A., Vinicius B., Malú A., Mauricio V., Bruno A., Clayton T., Richard T., Guilherme G., Fernando B., Fábio J., Camila N. e Felipe A. vocês fazem parte deste grupo.

Agradeço também aos professores e coordenadores da Escola Técnica Estadual Irmão Pedro, por terem me recebido em sua escola de braços abertos e terem me tratado como sua igual durante todo o tempo que estive com vocês. Obrigada, em particular, a Professora Suzana Bertoletti, que sem o apoio, dedicação e incentivo não teria conseguido me tornar a profissional que sou hoje.

E por último, mas não menos importante, muito pelo contrário, agradeço ao Francisco Wagner de Moura, por todo apoio, dedicação, cuidado, amor e carinho. Obrigada por, nos momentos de escuridão, ter me segurado e me guiado no caminho certo, espantando todos os pensamentos ruins de minha cabeça. Obrigada pela fé que sempre depositou em mim, pois sem essa fé não sei se estaria aqui hoje, prestes a me tornar professora. Obrigada por todos os ensinamentos concedidos e todos os temas discutidos. Obrigada por me mostrar o que é companheirismo. Espero que nossa amizade perdure por muitos anos, pois não sei o que faria sem ti.

É a todos vocês que agradeço e dedico este trabalho.

RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso tem por objetivo apresentar uma proposta sobre o ensino de funções utilizando as questões das provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP. A motivação para a criação desta proposta foi que, durante minha vida acadêmica, presenciei diversos equívocos acerca do assunto, tanto nas escolas em que estagiei, quanto em livros que analisei. Especificamente, esta pesquisa analisa como as questões da OBMEP podem propiciar aos alunos um ambiente que facilite o aprimoramento de sua maturidade intelectual via resolução de problemas. Para verificar a eficácia da proposta, todas as hipóteses foram testadas em um estudo de caso realizado na Escola Técnica Estadual Irmão Pedro, no primeiro semestre de 2015.

Palavras-Chave: Funções. OBMEP. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

This Conclusion Work has as its objectives to perform an analysis on the education of functions utilizing questions from the tests of Brazilian Math Olympics of Public School – OBMEP. The motivation for this proposal was that, during my academic life I've come upon, both in the schools I worked in and in books I analyzed, several mistakes on the subject. More specifically, this research analyzes how the questions from OBMEP can give the students an appropriate ambient that enables the upgrading of their intellectual maturity via solving problems. To verify the efficiency of this proposal, all the hypothesis were tested in a study of cases performed in the Technical State School Irmão Pedro, in the first semester of 2015.

Keywords: functions. OBMEP. problem solving.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

Sumário

1. Introdução e Motivação

Este Trabalho de Conclusão de Curso apresenta uma proposta de Ensino de funções para o primeiro ano do Ensino Médio, utilizando como ferramentas de ensino adaptações das questões da Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas – OBMEP. Para elaborar essa proposta, pensamos em diversos temas vinculados a esse conteúdo e formulamos uma questão central de pesquisa.

Quando vemos as ferramentas de ensino escolhidas para ensinar o conteúdo, nos deparamos com várias perguntas a serem respondidas e dúvidas a serem sanadas. Pretendemos, ao longo deste trabalho, responder todas essas questões que serão explicitadas adiante. Para sanar tais dificuldades e suprir as demandas que o conteúdo exige, realizamos algumas perguntas específicas, tais como: Por que repensar no modo de se ensinar funções? Por que utilizar as questões da OBMEP para ensinar funções? Como e de que maneira essa didática pode ajudar no desenvolvimento da maturidade intelectual dos alunos? Essas foram os questionamentos que me fiz ao começar a escrever o projeto para o Trabalho de Conclusão de Curso e que nortearam esta pesquisa. Porém, elas não surgiram de uma única vez, mas tiveram uma ordem cronológica durante minha vida acadêmica, na qual relatarei brevemente a seguir.

Meu primeiro contato com o conteúdo de funções foi quando o estudei no Ensino Médio e, apesar de gostar de matemática, o método utilizado pelo professor não me atingiu da maneira esperada, assim como aconteceu com meus outros vinte e quatro colegas que ficaram em recuperação naquele ano.

O segundo contato foi na UFRGS, na disciplina de *Fundamentos da Matemática Elementar II*, em 2011/2. Nesta disciplina, foi desenvolvida uma atividade na qual os alunos deveriam procurar erros na abordagem do ensino de funções que poderiam estar presentes nos livros didáticos. Nessa experiência pude perceber que nenhuma das explicações nos livros didáticos escolares pesquisados apresentavam o conteúdo de maneira satisfatória, de maneira que sempre havia equívocos em alguma definição, exercício ou exemplo proposto, o que pode acarretar na compreensão equivocada deste em seus leitores.

Por último, saliento as minhas observações de Estágio, que me mostraram o quanto os professores ainda encontram dúvidas sobre o assunto e acabam recorrendo ao livro didático, tornando o processo de ensino repetitivo: o livro didático contém equívocos e os professores dúvidas sobre o assunto, ensinam aos alunos o que sabem utilizando tais livros, contribuindo para que alguns estudantes não compreendam o conteúdo. Em particular, no caso da

Licenciatura em Matemática, é quase provável que, se os mesmos, quando alunos, não notaram o erro do qual fizeram parte, repetirão o mesmo processo quando professores.

Diante dessa realidade, eu, como futura professora de Matemática, me senti desconfortável com o fato de que os alunos não estão aprendendo da maneira que deveriam o conteúdo de funções – sem equívocos ou erros nas definições, exercícios ou motivações para o conteúdo –, assim como afirmam diversas outras pesquisas realizadas sobre o assunto, tais como: Zuffi e Pacca, 2000; Costa, A., 2004; Costa, C., 2008; Mariani, 2004; Barreto, 2008; Magarinus, 2006 e 2013. Visto isso, resolvi pensar em uma maneira de ensinar funções de um jeito diferente da qual tive contato até agora: utilizando algumas questões da OBMEP.

Ao comentar o tema com meus colegas, eles me perguntaram o que havia me motivado a utilizar as questões da OBMEP. A resposta é que durante os dois últimos anos nos quais eu fui fiscal da aplicação das provas de OBMEP da segunda fase, eu observava como os alunos resolviam a prova e depois também resolvia tais questões. Desta maneira, acabei me identificando com o modo que os conteúdos, vistos no Ensino Fundamental e Ensino Médio, eram abordados nas diferentes questões, de forma a fazer os alunos chegarem nas respostas passo a passo: a letra "a" é necessária para a resolução da "b" e assim por diante, contribuindo para que os mesmos sigam os métodos de resolução de problemas descritos por Polya em "*How to Solve it*" (POLYA, 1957). Foi neste momento que surgiu a dúvida: utilizar essas questões em uma abordagem de resolução de problemas para o ensino de funções é eficaz?

Após, cursei a disciplina de *Educação, Matemática e Tecnologia*, no qual um dos trabalhos era transformar uma questão da OBMEP em uma aula expositiva. A minha proposta foi como se poderia ensinar funções segundo uma questão específica que escolhi da prova de 2013 (fase 2).

Após todas essas considerações, reparei o quanto eu era interessada no ensino de funções no Ensino Médio e resolvi torná-lo o tema do meu Trabalho de Conclusão de Curso. Em 2014/1, cursando a disciplina de *Pesquisa em Matemática*, consegui pôr em palavras o que eu gostaria de responder com a minha pesquisa de meu trabalho: "*Ensinar funções utilizando adaptações das questões da OBMEP pode ser eficaz?*".

Sabemos que não é possível identificar qual o melhor método de ensino, mas há maneiras de saber se os que existem e os que são aplicadas podem ser eficazes ou não. É necessário determinar em qual método cada professor e aluno melhor se identificam. No meu caso, foi com o uso destas questões em uma abordagem de resolução de problemas como ferramenta, que eu mais me identifiquei.

Para obter uma resposta para a minha questão de pesquisa, este trabalho foi separado em três tópicos principais: o referencial teórico, a coleta de dados e o resultado da análise da prática.

No referencial teórico estão todos os temas que necessitavam ser relatados e entendidos para a coleta de dados e formulação dos planos de aula, que são: como está sendo ensinado o conteúdo de funções em algumas escolas e em alguns livros didáticos; o que é a OBMEP e porque ela se tornou o principal recurso para a aplicação desta pesquisa; resolução de problemas segundo os ensinamentos de Polya (1995); qual a metodologia adotada para a aplicação da pesquisa; qual a avaliação que será realizada para a análise dos dados coletados; a caracterização de estudo de caso e da escola escolhida para análise; como foram formulados os planos de aula.

Na coleta de dados se encontra a descrição de todas as aulas e trabalhos realizados, bem como a análise parcial de cada um deles, segundo as referências teóricas do trabalho.

Para finalizar este trabalho está o resultado da análise total da prática, no qual se encontram todas as análises parciais, realizadas anteriormente na coleta de dados em cada trabalho, juntamente com o que estes resultados juntos significam para a pesquisa e, se estas respondem positivamente ou negativamente nossa questão de pesquisa.

2. Considerações Iniciais

Cada vez que lemos um texto, buscamos nele uma fonte de inspiração. Seja esta uma palavra, uma frase ou até mesmo um parágrafo, para que o mesmo nos faça refletir sobre nossas verdades, fazendo com que possivelmente mudemos nossas atitudes. É assim que acontece na preparação de uma aula, na qual pesquisamos, refletimos e pensamos em como podemos mudar o jeito que a abordamos, de preferência para um modo melhor do que tínhamos antes.

"Precisamos de inspiração" (CORAZZA, 2007) é o que dizemos a nós mesmos para propor aquele problema que sabemos que atrairá a atenção de, ao menos, uma parte significativa da turma. E ficamos durante horas nessa divagação, apenas para pensar em alguma ideia brilhante para começar uma aula para adolescentes, jovens e adultos. E foi assim durante todos os meus Estágios e experiências no Programa de Iniciação à Docência - PIBID nas escolas.

Como meu objetivo ao me tornar Professora é lecionar para alunos do Ensino Médio ou para alunos de alguma Instituição de Ensino Superior, meu sonho é que minhas aulas sempre comecem com algo atrativo, com algum problema que tenha ao menos um contexto interessante para os alunos.

Comecemos analisando o objetivo do meu primeiro plano de aula de meu Estágio em 2014/2, para lecionar em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio da Escola Técnica Estadual Irmão Pedro: "Objetivos: Os alunos deverão desenvolver conhecimentos matemáticos básicos acerca da definição de uma função exponencial".

Podemos observar que este é um objetivo um tanto genérico e é uma tarefa simples escrever um plano de aula que o abranja de forma sucinta e rápida, porém eu não queria apenas um plano rápido, eu queria um plano eficaz. Surgiu então a ideia de, ao invés de expor primeiramente a teoria do conteúdo, começar a aula com um problema um tanto quanto surpreendente, que foi o seguinte: "Estudando a altura de plantas mutantes da Idade Jurássica: durante um determinado período de desenvolvimento, a altura de certos tipos de plantas desta época dobravam a cada 30 dias. Um fato que intrigava muitos cientistas de épocas posteriores era como essas plantas cresciam rápido, visto que eles não tinham as ferramentas necessárias para fazer este cálculo. Posteriormente, com o conhecimento da função Exponencial, conseguimos analisar metodicamente seu crescimento. "

Então, propus a seguintes perguntas para os alunos: "C*omo essas plantas cresciam? Como se desenvolviam? Vamos fazer agora o trabalho de cientistas e desvendar este caso*". E, da mesma forma que imaginei conquistá-los, eu consegui.

Foi desta mesma maneira que começaram todas minhas aulas, que, ao meu ver, tinham sempre um bom começo e um bom final.

Porém, a cada plano de aula, maior tinha que ser minha concentração, pesquisa e inspiração para a criação dos mesmos, exatamente da maneira como descreve Deleuze, no texto de Sandra Corazza (2007) em "Para pensar, pesquisar e artistar a educação: sem ensaio, não há inspiração".

Começamos pelo título da obra de Corazza do qual é impossível discordar, pois para qualquer trabalho que realizamos, e que queremos que seja bem sucedido, precisamos nos preparar, seja para fazer um plano de como iremos executá-lo, seja descrevendo cada detalhe de como o faremos. Sempre que escrevo um novo plano de aula, tento refazer o plano que já havia utilizado em outra aula do mesmo conteúdo, pois com certeza já não sou a mesma de antigamente. Assim, o escrevo de modo a abranger aquele conteúdo uma maneira diferente, permitindo que os alunos viajem para onde forem e tentem voltar com respostas acerca do que foi solicitado. Se não voltarem, não há problema, pois pesquisar não significa uma passagem do não-saber ao saber, mas com certeza os torna, no mínimo, alunos pensadores e originais, e não "copiadores". Penso em meus planos de aula como algo a sempre se pensar, questões a se criticar: "Uma nova maneira de sentir, uma nova maneira de pensar. [...] Uma educação a ser criticada, lida e escrita, sabendo que não conseguimos evitar aquilo que não sabemos ou que sabemos mal." (CORAZZA, 2007, p. 2). Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2000), são pré-requisitos básicos de qualquer conteúdo o desenvolvimento de seres pensantes e críticos.

Temos uma aula a ser lecionada e questões a serem abrangidas, então surge a dúvida: *o que fazer para uma boa aula*? Tem que haver insipiração. *Como ter inspiração*? A aula e os conteúdos devem ser "ensaiados". Quando ocorre a inspiração, ocorre a fascinação, o entusiasmo e então a aula lecionada vai ser vista por nós como algo interessante, e assim, talvez, os alunos também se interessem, contribuindo para que se reestabeleça o que está sendo perdido nas salas de aula que é a *originalidade de cada pensar (*LARROSA, 2002).

Os planos de aula para esta pesquisa precisam abranger tópicos importantes para o ensino-aprendizagem de funções que, como citado anteriormente, contribuam para reestabelecer a originalidade de cada pensar. Mas como fazer esse reestabelecimento? Para responder essa pergunta, pensamos em sugerir aos alunos a resolução de *problemas*[1] ao invés de, somente, *exercícios*[2]. Cabe salientar que não estamos desprezando a resolução de exercícios, mas sugerindo uma didática oposta, que é a *Resolução de Problemas*[3].

Deste modo, concordamos com os ensinamentos de Milauskas, quando o autor escreveu que: "Tenho convicção de que o aluno aprende a resolver problemas, resolvendo problemas de qualidade" (MILAUSKAS, 1994, p. 86). Isso nos motiva, ainda mais, a formular problemas a partir das questões da OBMEP e a analisar as respostas dos alunos através da Resolução de Problemas, em especial através dos métodos descritos por Polya (1995).

Escolhemos as questões propostas na OBMEP, pois estas são situações-problemas que estão de acordo com o que escreve Larrosa: "requer parar para pensar, parar para olhar, [...], pensar mais devagar, olhar mais devagar, [...] demorar-se nos detalhes, suspender a opinião [...] cultivar a atenção [...] ter paciência e dar-se tempo e espaço" (LARROSA, 2002, p. 24), fatos que geralmente não ocorrem em sala de aula, porém são de suma importância para que os alunos pensem e reflitam sobre o que estão aprendendo. O enunciado destas questões, não expõe um modo evidente de resolução, exigindo que o aluno utilize seus conhecimentos matemáticos prévios, pois, caso contrário, ele não conseguirá solucionar o problema.

O que esta proposta de ensino sugere, de uma maneira geral, é pensar o ensino de funções a partir do par experiência/sentido, da originalidade de cada pensar, de trocas de experiência, pois segundo Magarinus: "o ensino contextualizado da matemática deve privilegiar situações em que a significação de conceitos matemáticos seja construída mediante um processo de interação social, de trocas de experiência." (MAGARINUS, 2013, p. 25). Diz-se *experiência*, pois os alunos terão que pensar ao resolver os problemas tendo em vista tudo que aprenderam no ramo da matemática e em outras matérias até aquele estágio, e com essa *experiência* conseguir resolver tais problemas, sem saber o caminho a se seguir e onde irão chegar. Esta experiência não é no sentido de escrever informações no quadro (definições matemáticas) para os alunos, e esperar que os mesmos compreendam o conteúdo e motivo pelo qual o estão estudando. Para tentar ensinar aos alunos qualquer assunto, temos que entender que o conhecimento não se dá na forma de informação, isto é, aprender não é

[1] O conceito de problema será apresentado nas próximas seções.
[2] O conceito de uma aula focada na resolução de exercícios será apresentado nas próximas seções, bem como sua diferença entre problema.
[3] O conceito de Resolução de Problemas será apresentado nas próximas seções.

simplesmente adquirir e processar informações. A informação não é experiência. A experiência é algo que nos toca, que nos faz pensar, que nos faz sermos originais e únicos. E *sentido*, pois ao final da resolução de cada problema, tudo que eles aprenderam até agora terá algum sentido, afinal. De acordo com Larrosa:

> "A experiência é irreptível, sempre há algo como a primeira vez [...] Além disso, posto que não se pode antecipar o resultado, a experiência não é o caminho até um objetivo previsto, até uma meta que se conhece de antemão, mas é uma abertura para o desconhecido" (LARROSA, 2002, p. 28)

O contato com problemas fora dos padrões que os alunos estavam acostumados, ajudando-os a exercer suas "faculdades de resolução de problemas" (MILAUSKAS, 1994). Deste modo, não bastaria escolher algumas questões da OBMEP para aplicar ao final das aulas e continuar com o sistema de "adquirir e processar informação", mas sim implantar essas situações-problemas a fim de induzi-los a formular as definições necessárias para o entendimento do conteúdo. Desta maneira, os alunos não ficariam somente no mundo das ideias, no mundo de definições e sem práticas, mas iria direto de problemas "reais" para as definições, contribuindo para que os conceitos matemáticos estejam mais próximos da realidade deles.

Mas por que preocupar-se em realizar este planejamento para, especificamente, o conteúdo de funções? Vejamos na próxima seção uma possível resposta para essa dúvida: como este conteúdo está sendo ensinado em algumas escolas e em alguns livros didáticos e a sua importância para a vida acadêmica e profissional dos alunos que estão nesse meio.

2.1 O Ensino de Funções

Como escrito anteriormente na Introdução deste trabalho, minha escolha por funções começou com meu desempenho no primeiro ano do Ensino Médio, no ano de 2008, em uma escola particular de Porto Alegre. A prática utilizada por meu professor para o ensino deste conteúdo não foi eficaz para quase metade das duas turmas existentes de primeiro ano da escola: de cinquenta alunos, vinte e quatro ficaram em recuperação. A sua abordagem foi através dos livros didáticos que continham questões que eram resolvidas de maneira mecânica, não chegando a serem *problemas*, mas apenas *exercícios* a serem resolvidos.

Para Echeverría e Pozo (1998), um exercício é obtido a partir da seguinte situação:

> "Quando a prática nos proporcionar a soluções direta e eficaz para a solução de um problema, escolar ou pessoal, acabaremos aplicando essa solução rotineiramente, e a tarefa servirá, simplesmente, para exercitar habilidades já adquiridas" (ECHEVERRÍA e POZO, 1998, p. 17)

Segundo Skovsmose (2000), em uma aula que tenha como foco a realização de exercícios, o chamado “paradigma do exercício” (SKOVSMOSE, 2000), o professor ensina definições e técnicas que mais tarde os alunos utilizarão para efetuar os exercícios que serão propostos. Nesse método de ensino de Matemática, os alunos não têm espaço para questionamentos, visto que a resposta de cada exercício proposto é única e, segundo Echeverría e Pozo (1998), servirá apenas para “exercitar habilidades já adquiridas” (ECHEVERRÍA e POZO, 1998, p. 17). Diferente da abordagem de uma aula focada na resolução de problemas, no qual relataremos nas seções posteriores.

No primeiro semestre de 2013, ao cursar a disciplina de *Estágio em Educação Matemática I*, tive novamente o contato com o ensino de funções ao estagiar em uma escola de Porto Alegre e, infelizmente, a metodologia era idêntica. Ela continuou sendo em 2014/2, quando cursei a disciplina de *Estágio em Educação Matemática III*, quando resolvi fazer minha prática em outra escola de Porto Alegre.

Estes fatos me fizeram concordar com Valente quando escreveu que “A educação está em crise. A escola, como instituição responsável pela disseminação de conhecimentos, já não consegue atender aos seus objetivos” (VALENTE, 1985, prefácio p. 7). Afinal, qual o objetivo de ensinar os conteúdos por meio de procedimentos mecânicos, se esses não fornecem ao aluno o conhecimento do qual necessitam nos dias de hoje? O que as escolas fizeram, em todos esses momentos que presenciei, é exatamente o que Duval (2003) relata que não são os objetivos de se ensinar Matemática no Ensino Médio e Fundamental:

> [...] o objetivo do ensino da Matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocino, análise e visualização. (DUVAL, 2003, p.11)

Porém, aparentemente, nem todos os professores perceberam que os alunos que atualmente ingressam no Ensino Médio não são mais os mesmos de uma década atrás, na qual eram ensinados processos repetitivos e cansativos de realizar contas, e muito menos são os mesmos do ano passado. Os jovens que ingressam hoje em dia na escola são os que têm rápido e fácil acesso ao mundo da informação e, segundo Magarinus, “[...] a matemática é vista pelos alunos como uma disciplina difícil e de conteúdos, muitas vezes, incompreensíveis." (MAGARINUS, 2013, p. 22). Eles, em sua maioria, têm aversão ao estilo tradicional de ensino.

Este ensino tradicional é devoto à "transmissão" de um saber já construído, tornando o aluno apenas um espectador. Em particular, este ensino tradicional de Matemática é adepto a memorização de fórmulas, regras, definições e teoremas. Não é à toa que, segundo Leite (2014), uma pesquisa realizada em 2010 pelo INEP/MEC- o chamado Censo Escolar da Educação Básica - mostrou que apenas 53,1%, dos alunos do Ensino Médio estão na faixa etária entre 15 e 17 anos, idade esperada para cursá-lo. Sendo a defasagem idade-série de 30,5%, também no Ensino Médio.

Dados assim nos remetem a realizar certas perguntas, tais como: O que está acontecendo com nosso sistema de ensino? Quem são esses professores e alunos que tornam esses dados tão reais e alarmantes? O que poderia ser feito para mudar?

Segundo relato feito por alguns professores da rede de ensino de Porto Alegre durante minha convivência com eles, o conceito de função é o conteúdo que os alunos mais enfrentam dificuldades no Ensino Médio, mesmo sendo um dos tópicos mais importantes da Matemática nesta etapa segundo Barreto: "O conceito de função é considerado um dos mais importantes da Matemática e seus aspectos mais simples estão presentes nas noções mais básicas desta ciência, como por exemplo, na contagem" (BARRETO, 2008, p. 1). Segundo Magarinus, que se refere aos PCNEM (BRASIL, 2000) "em relação ao estudo de funções o documento o considera como articulador de diferentes conteúdos dentro e fora da própria matemática" (MAGARINUS, 2013, p. 22).

Se analisarmos o quanto um mau aprendizado deste conteúdo pode acarretar no futuro de alguns alunos, veremos o quão importante este é para eles. Basta, por exemplo, os mesmos escolherem algum curso e/ou carreira relacionada com as Ciências Exatas. No inicio destes cursos, eles terão que lidar com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral que, embora seu currículo possa variar dependendo da Instituição de Ensino Superior, tem como pré-requisito absoluto o entendimento do conteúdo de funções. E, em particular, segundo os PCNEM (BRASIL, 2000), o estudo de funções deve ser realizado no primeiro ano do Ensino Médio.

A quantidade de alunos que não obtém aprovação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, justamente por não possuir o conhecido básico requisitado pela disciplina, é alarmante. Em geral, são nas primeiras aulas que o professor revisa rapidamente as funções que teriam sido aprendidas no Ensino Médio. Nesse momento, alguns alunos já desistem de cursar a disciplina, acarretando no atraso de sua conclusão de curso. Esses foram os fatos que presenciei ao ministrar aulas particulares para alunos das universidades UFRGS e PUCRS de cursos que tinham esta disciplina no currículo, nos quais o problema foi sempre o mesmo: não saber o conteúdo de funções.

Foi escrito até agora sobre o possível destino acadêmico dos alunos que não conseguem aprender de maneira eficaz este conteúdo. Porém, o estudo dele é de suma importância não somente para uma vida acadêmica nas Ciências Exatas, mas também para a vida profissional do aluno. De acordo com Magarinus, o ensino de Matemática: “deve contribuir para a construção de uma visão geral do mundo, onde os estudantes tenham condições de ler e interpretar a realidade e desenvolver as habilidades e competências que, ao longo de suas vidas, poderão lhe ser exigidas” (MAGARINUS, 2013, p. 27). Em particular, este conteúdo pode ajudar o aluno a: aprender relacionar grandezas, visto que ele necessita saber trabalhar tanto com a linguagem algébrica quanto com a linguagem geométrica, e uma função nada mais é do que uma relação entre grandezas; expandir seu pensamento abstrato; aprender a modelar situações-problema dos mais diversos gêneros, os ajudando a fazer conexões entre os diversos conteúdos das Ciências Exatas e da Terra; conforme escreveu Duval (2003), estimular seu raciocínio.

Durante a disciplina de *Fundamentos da Matemática Elementar II*, a minha turma teve a oportunidade de realizar atividades extraclasses, nos quais o professor da disciplina nos guiava. Nestas atividades tínhamos que investigar em livros didáticos o ensino do conteúdo de funções e, se possível, encontrar erros ou equívocos nas explicações ou exercícios e explicar por que tais estavam errados ou equivocados. As observações nas escolas citadas anteriormente e as pesquisas nos livros didáticos, afirmaram que a escola ainda “pensa a sociedade como um mecanismo de processamento de informação” (LARROSA, 2002, p. 22) e realmente não pensa a Educação Matemática pelo par *experiência/sentido*.

Porém, criar atividades que prezem a experiência do aluno e não a representação mecânica de atividades, pode ser uma tarefa muito exaustiva. Sabemos que ao passar dos anos precisamos de cada vez mais concentração e inspiração para realização de planos de aulas que sejam satisfatórios: "Se você quer cinco, dez minutos de inspiração, tem de fazer uma longa preparação." (entrevista de DELEUZE, 1996, apud CORAZZA, 2007, p. 1). O trabalho de um professor que trabalha vinte ou quarenta horas semanais é massante e exaustivo, não sobrando tempo para ter esses momentos de inspiração. Se o professor não ter essa inspiração e perdeu esse fascínio pelo conteúdo, possívelmente os alunos também não o terão. Logo, uma possível saída é utilizar o livro didático e lecionar uma aula tradicional.

Estes fatos são de extrema importância para a pesquisa, pois a maioria dos professores das escolas que observei utilizava o livro didático como principal recurso de ensino aos alunos, assim mesmo como escreve Barreto: “[...] estudo deste tópico no currículo médio brasileiro segue uma ordenação ainda tradicional e ditada, na maioria das vezes, pela sequencia sugerida pelos livros didáticos” (BARRETO, 2008, p. 1). O ensino deste conteúdo através de determinados livros didáticos pode acarretar no mau aprendizado deste, tanto por uma má utilização deste recurso realizada pelo professor sem *inspiração*, quanto pelo conteúdo não estar sendo explicado e abrangido de maneira satisfatória nestes livros, o que, segundo Magarinus:

> [...] um fator a interferir na aprendizagem do conceito de função é a maneira como este é apresentado aos alunos. [...] Um dos principais obstáculos didáticos enfrentados no ensino de matemática, refere-se a forma simplificada e formal como os conteúdos são apresentados nos livros didáticos. (MAGARINUS, 2013, p. 21 e 28)

Nos livros didáticos pesquisados na disciplina anteriormente citada, encontramos autores fornecendo motivação para o estudo do conceito de função de maneira equivocada. Eles associavam a noção de função estritamente à proporcionalidade direta entre duas variáveis, sem considerar as funções afins, polinomiais, exponenciais e logarítmicas, que não seguem o mesmo raciocínio. Todos eles, sem exceção, restringiram a definição de função por “lei, regra ou conjunto de instruções”, necessitando haver uma expressão que defina como associar os elementos do conjunto, porém sabemos que uma função também pode ser definida pelo seu gráfico, tabela de valores, diagrama ou conjunto de pares de ordenados. Este fato também foi constatado por Sierpinska, citado por Magarinus:

> Sierpinska (1992 apud TRINDADE e MORETTI, 2000) identificou alguns obstáculos epistemológicos enfrentados pelos alunos em relação ao estudo de funções. Entre estes, os autores destacam o fato dos alunos considerarem que uma função deva ter, necessariamente, uma descrição analítica. Este fato pode evidenciar um ensino que possivelmente tenha priorizado a representação algébrica no estudo de funções. (MAGARINUS, 2013, p. 32)

Cabe salientar também que a linguagem dos autores não estava compatível para com alunos que estão tendo o seu primeiro contato com o conteúdo de funções, sendo demasiadamente formal, o que, também segundo a autora, os PCNEM salientam: “[...] a linguagem excessivamente formal deve ser moderada e, em determinados momentos, deixada de lado” (MAGARINUS, 2013, p. 23)

Estes equívocos que foram encontrados podem contribuir para a não aprendizagem desse conteúdo pelos estudantes. A abordagem destes autores, de um modo geral, foi feita através de exercícios não contextualizados, evidenciando a variação e a dependência entre grandezas, servindo apenas para facilitar o aprendizado de funções, falhando na definição formal do conteúdo e na abordagem de suas possíveis representações.

É fundamental trabalhar todas as maneiras de representar uma função, visto que isso estimula as faculdades mentais dos alunos ao passar de um sistema de representação para outro. Então, deixar os alunos cientes dessas diversas representações é de extrema importância para o Ensino de Matemática e de outros conteúdos e, alguns livros didáticos não estão atendendo tais demandas.

Pode ocorrer que os alunos não percebam tais detalhes e mesmo assim aprendam o conteúdo. Porém, os professores de Matemática devem se ater a essas minudências e se importar com o fato de que pode haver alunos que notem tais equívocos e que isso atrapalhe as suas concepções acerca do conteúdo ensinado. Segundo Dionizio e Bandt que citam Duval:

> Segundo o autor (2009), os sujeitos, em fase de aprendizagem, confundem os objetos matemáticos com suas representações. Isto acontece porque eles só podem lidar com as representações semióticas para realizar uma atividade sobre os objetos matemáticos e acabam não reconhecendo o mesmo objeto, por meio de representações semióticas diferentes. (DUVAL, 2009 apud DIONÍZIO e BANDT, 2012, p 11)

E isto se tornou motivação suficiente para realizar uma proposta que contribua para o ensino de funções em nossas escolas.

2.2 Metodologia

2.2.1 Caracterização: Estudo de Caso

A pesquisa realizada neste trabalho é uma abordagem qualitativa. Pois o que estamos buscando é responder se a proposta apresentada na Introdução, é eficaz ou não com cada aluno da turma. Deste modo, prezamos pela melhoria do processo de aprendizagem decorrente das aulas realizadas.

Para isso, precisamos, em um primeiro momento, nos ater a todos os detalhes que um observador poderia obter da(s) turma(s), isto é: qual o local em que os alunos estão inseridos (tipo de escola, bairro da escola, situação financeira dos alunos, situação dos alunos com a área pedagógica da escola, etc.); se os alunos gostam de Matemática; se eles gostariam de participar da pesquisa que está sendo realizada; se eles têm ou não facilidade em Matemática; etc. Em um segundo momento, analisar os dados que foram coletados.

De acordo com Ludke e André:

> A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento. [...] A pesquisa supõe o contato direto e prolongado do pesquisados com o ambiente e a situação que está sendo investigada, via de regra através do trabalho intensivo de campo. (LUDKE e ANDRÉ, 1986, p. 11)

O trabalho de campo mencionado na citação acima, não é somente em sala de aula, mas na escola e nas vidas dos alunos. Pois não adiantaria analisar somente a nota ou conceito de um aluno que obteve aprendizagem insuficiente para realização dos trabalhos, se o mesmo está com problemas pessoais, não quer participar da pesquisa ou até mesmo não teve professor de Matemática na série anterior. Deste modo estaríamos concluindo que a proposta não foi eficaz para este aluno por culpa somente do método, enquanto na verdade havia outros problemas para serem analisados.

Este tipo de abordagem, de acordo com Ludke e André, requer que "os dados coletados são predominantemente descritivos. O material obtido nessas pesquisas é rico em descrições de pessoas, situações, acontecimentos" (LUDKE e ANDRÉ, 1986, p. 12) e principalmente "A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto. O interesse do pesquisador é verificar como ele se manifesta nas atividades, nos procedimentos e nas interações cotidianas" (LUDKE e ANDRÉ, 1986, p. 12). Por isso, não basta para esta pesquisa lecionar todas as aulas e fornecer, no resultado da análise, dados que esclareçam se a questão e o objetivo da pesquisa foram cumpridos ou não. É preciso haver detalhes de cada aula, análises de aula, análise dos alunos, análise da turma como um todo e, somente após, tentar chegar a um resultado final, pois nem sempre é fácil avaliar se o objetivo foi alcançado ou não.

Sabemos que, como já dito anteriormente, são nas últimas seções que se encontram as descrições das aulas e análises dos trabalhos realizados pelos alunos. Porém, escrever as análises dos dados obtidos se torna uma tarefa difícil sem a análise das aulas e dos alunos. Mas, é também complicado transcrever o que aconteceu em sala de aula através da visão do professor. Por isso, muitas vezes os dados e as conclusões a partir deles não fazem sentindo para um leitor externo, mas com a ajuda da descrição das aulas e dos alunos, as duas em conjunto se complementam, passando uma perspectiva geral, porém não igual, ao que aconteceu em sala de aula. Ludke e André afirmam que:

> O significado que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisados. Nesses estudos já sempre uma tentativa de capturar a 'perspectiva dos participantes', isto é, a maneira como os informantes encaram as questões que estão sendo focalizadas. Ao considerar os diferentes pontos de vista dos participantes, os estudos qualitativos permitem iluminar o dinamismo interno das situações, geralmente inacessível ao observador externo. (LUDKE e ANDRÉ, 1986, p. 12)

Esta análise dos dados, apesar de já haver um objetivo apresentado no plano de aula, e uma questão de pesquisa a sanar, não segue um processo já pré-determinado, visto que não sabemos qual o resultado que teremos. Concordo com Ludke e André quando os autores escrevem que "a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo" (LUDKE e ANDRÉ, 1986, p. 13). Das formas que pesquisa qualitativa pode assumir, destacamos o Estudo de Caso. Os autores definem este estudo de uma maneira clara:

> O estudo de caso é o estudo de *um* caso, seja ele simples e especifico [...] ou complexo e abstrato [...]. O caso é sempre bem delimitado, devendo ter seus contornos claramente definidos no desenrolar do estudo. O caso pode ser similar a outros, as é ao mesmo tempo distinto, pois tem um interesse próprio, singular. [...] O interesse, portanto, incide naquilo que ele tem de único, de particular, mesmo que posteriormente venham a ficar evidentes certas semelhanças com outros casos ou situações. (LUDKE e ANDRÉ, 1986, p. 17)

Através desse significado podemos observar claramente que o estudo desta pesquisa é realmente o Estudo de Caso, visto que estamos estudando como ocorre o aprendizado do conceito de funções de *uma* turma de *um* colégio específico (veremos essas delimitações nas seções seguintes).

É importante ressaltar que nem tudo em uma pesquisa qualitativa acontece como planejado, isto é, veremos no decorrer da pesquisa de campo que nem tudo que foi planejado realmente pôde acontecer. Isto é considerado aceitável visto que "[...] o estudo qualitativo, como já visto, é o que se desenvolve em uma situação natural, é rico em dados descritivos, tem um plano aberto e flexível e focaliza a realidade de forma complexa e contextualizada." (LUDKE e ANDRÉ, 1986, p. 18)

A seguir serão relatadas as características fundamentais do estudo de caso. Estes relatos irão explicar o porquê a pesquisa, mostrada no decorrer deste trabalho, foi realizada de certas maneiras: “Os estudos de caso visam a descoberta. Mesmo que o investigador parta de alguns pressupostos teóricos iniciais, ele procurará se manter constantemente atento a novos elementos que podem emergir como importantes durante o estudo.” (LUDKE e ANDRÉ, 1986, p. 18) Desta maneira, o que há no referencial teórico da pesquisa afirma um determinado assunto, porém as considerações finais, feitas a partir de toda análise da coleta de dados, pode afirmar outra completamente diferente e que se apoiará em autores diferentes do supracitados.

> Enfatizam a ‘interpretação do contexto’. Um princípio básico desse tipo de estudo é que, para uma apreensão mais completa do objeto, é preciso levar em conta o contexto em que ele se situa. [...] buscam retratar a realidade de forma completa e profunda. O pesquisador procurar revelar a multiplicidade de dimensões presentes numa determinada situação ou problema, focalizando-o como um todo. [...] Usam uma variedade de fontes de informação. [...] Com essa variedade de informações, oriundas de fontes variadas, [...] poderá cruzar informações, confirmar ou rejeitar hipóteses, descobrir novos dados, afastar suposições ou levantar hipóteses alternativas. (LUDKE e ANDRÉ, 1986, p. 18-19)

Assim como citado anteriormente, a citação acima explicita a importância de se ter dados da vida dos alunos, da vida escolar deles, da escola, de seus gostos, etc. E é por isso que no decorrer da descrição das aulas haverá tabelas que ressaltam se os alunos irão escrever se gostam ou não de Matemática, se eles tiveram matemática nos anos anteriores. Em particular uma seção que explicita e contextualiza a escola no qual foi realizada a pesquisa. Para então podermos concluir com base em dados coerentes para a proposta. Ainda de acordo com os autores:

> Os estudos de caso revelam experiência vicária e permitem generalizações naturalísticas. O pesquisador procura relatar as suas experiências durante o estudo de modo que o leitor ou usuário possa fazer as suas “generalizações naturalísticas”. [...] Procuram representar os diferentes e às vezes conflitantes pontos de vistas presentes numa situação social. Quando o objeto ou situação estudados podem suscitar opiniões divergentes, o pesquisador vai procurar trazer para o estudo essa divergência de opiniões, revelando ainda o seu próprio ponto de vista. (LUDKE e ANDRÉ, 1986, p. 20)

Este tipo de estudo geralmente remete diversas opiniões sobre o mesmo assunto, devido ao fato da singularidade de cada pessoa. Por isso, é possível que no resultado da análise esteja um fato, fruto dos dados do decorrer do trabalho, e nas considerações finais, momento em que o pesquisar explicita *sua* opinião acerca dos dados, esteja exposto outro fato: "o pressuposto que fundamenta essa orientação é o de que a realidade pode ser vista sob diferentes perspectivas, não havendo uma única que seja mais verdadeira." (LUDKE e ANDRÉ, 1986, p. 20).

Veremos que nas seções acerca da descrição das aulas e dos dados das análises dos trabalhos, que não há outra maneira de explicitar os acontecimentos com frases formais, sem que haja o que o aluno disse ou escreveu em seu caderno. É por isso que muitas vezes os relatos estarão em primeira pessoa do singular, e não sempre em terceira, havendo uma quantidade enumerável de imagens, colagens e citações dos alunos:

> Os relatos do estudo de caso utilizam uma linguagem e uma forma mais acessível do que os outros relatórios de pesquisa. Os dados do estudo de caso podem ser apresentados numa variedade de formas, tais como dramatizações, [...], desenhos, fotografias, colagens, discussões, [...] etc. (LUDKE e ANDRÉ, 1986, p. 20)

O desenvolvimento do estudo de caso se dá, segundo Ludke e André, em três fases: exploratória, sistemática e análise.

A fase exploratória se encontra na descrição de cada aula e no conhecimento aprofundado dos alunos. A sistemática é a aplicação dos trabalhos e coleta dos dados. Por fim a análise será o que dará significado para os dados obtidos.

Para a segunda fase, a sistemática, foi escolhido um tipo de método pelo qual queríamos que os alunos seguissem. Para tal, foi escolhido a *Resolução de Problemas,* método já pré-determinado na indagação da pesquisa.

Para a última fase, a da análise, teríamos que escolher um método de avaliação considerado mais eficaz para este tipo de estudo.

Nas próximas seções, iremos escrever brevemente sobre de Resolução de Problemas e apresentar a Avaliação escolhida.

2.3 Resolução de Problemas

Na seção 2.1 relatamos sobre como o conceito de função está sendo ensinado em algumas escolas e o que isso pode acarretar na vida dos alunos.

Tendo em vista a importância do ensino deste conteúdo e em como abrangê-lo satisfatoriamente de modo que, assim como propõe Larrosa, levemos em consideração o par *experiência/sentido*, foi pensado em uma maneira de ensinar funções através da resolução de problemas. Esta maneira, que também é citado nos PCNEM (2000), sugere que a resolução de problemas seja o ponto de partida para o ensino-aprendizagem dos conteúdos e não apenas como aplicação do conteúdo ensinado: “A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem." (ONUCHIC, 1999, p. 215)

Além disso, segundo Magarinus “a resolução de problemas é uma tendência no ensino de matemática e sua importância é indiscutível” (MAGARINUS, 2013, p. 29) e segundo Pozo “[...] quando um aluno ou qualquer pessoa enfrenta uma tarefa do tipo que denominamos *problema*, precisa colocar em ação uma ampla série de habilidades e conhecimentos.” (POZO, 1998, p. 19). Podemos perceber que, não somente a resolução de problemas se encontra nos PCNEM (BRASIL, 2000), como realmente é vista pelos autores como uma importante ferramenta para o ensino-aprendizagem de Matemática.

Primeiramente, para entender a *resolução de problemas* descrita por estes autores, precisamos entender o que é um *problema* e o que denominamos por *problema*, para então definir a resolução de problemas. Até porque o que é um problema para um determinada pessoa pode não ser um problema para os outros. Assim, recorremos a Vianna (2002), quando escreveu que: “Uma coisa que desconheço não é, para mim, um problema. Para que eu possa pensar em uma situação como problemática eu preciso ter consciência dela, preciso ter a necessidade de responder às questões... eu preciso saber.” (VIANNA, 2002, p. 1)

E ainda de acordo com o autor:

> 1. Um sujeito está diante de um problema quando se confronta com uma questão à qual não sabe dar resposta ou quando está diante de uma situação, que não sabe resolver usando os conhecimentos de que já dispõe [...] Um sujeito está diante de um problema quando:
> a) tem uma questão para resolver;
> b) **quer** ter uma resposta para essa questão;
> c) não tem, previamente, uma resposta para essa questão. (VIANNA, 2002, p. 2)

Então, a partir do autor, podemos associar um problema com uma situação para a qual um sujeito não possui método de resolução determinado, e principalmente, o sujeito deve querer resolvê-la, assim fomo afirmam também Echeverría e Pozo (1998) e Polya (1995). O significado de problema perde o sentido quando o sujeito já tiver disposto um sistema de respostas para tal.

Entendida a noção do que é um *problema*, a *resolução de problemas* é um método de resolução matemático que, segundo diversos autores, só ocorre quando as estratégias de resolução do problema não são evidentes e muito menos dispostos no enunciado do problema. Segundo Milauskas:

> Enfatizar a resolução de problemas não significa simplesmente inserir alguns "problemas especializados" aqui e ali na sala de aula. [...] Toda tarefa escolar deveria incluir problemas planejados para estimular a flexibilidade e o raciocínio. Os problemas deveriam utilizar capacidades adquiridas em outras disciplinas [...]. A matemática torna-se mais significativa para o aluno que está constantemente em contato com uma ampla variedade de problemas. Ele estará mais capacitado a se adaptar a novas situações e a abordar novos problemas com segurança. (MILAUSKAS, 1994, p. 86)

E de acordo com Magarinus (2013) que supracita Onuchic (1999) e Bisognin (2009):

> De acordo com Schroeder e Lester (1989 apud ONUCHIC 1999), podemos abordar a resolução de problemas a partir de três diferentes concepções: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar matemática através da resolução de problemas. (ONUCHIC 1999 apud MAGARINUS, 2013, p. 29) [...] Na última concepção, os problemas são vistos como o primeiro passo para se aprender matemática. O problema é considerado 'como um elemento formador de um processo de construção do conhecimento matemático, ou seja, essa metodologia vem a contribuir na formação de conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem abstrata. ' (LEÃO, BISOGNIN, 2009, p. 30). (LEÃO e BISOGNIN, 2009 apud MAGARINUS, 2013, p. 29-30)

Este método é considerado tão importante por estes autores por exigir um tipo de raciocínio diferente do da resolução de *exercícios*. Os exercícios são dispostos após uma breve fundamentação teórica de conteúdos matemáticos. A resolução de problemas pode ser solicitada previamente a formalização de quaisquer novos conceitos matemáticos, e a partir dele chegar às definições que estão por trás de cada conteúdo. podendo tornar a matemática muito mais importante para os alunos. Magarinus descreve, citando Onuchic (1999), que "[...] o ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição, mas o problema. [...] a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem" (ONUCHIC, 1999 apud MAGARINUS 2013, p. 215)

O raciocínio utilizado para a resolução de problemas foi pesquisado nos meados de 1960, por George Polya. As pesquisas do autor se encaixam na primeira concepção descrita por Magarinus, pois foi ele o mediador dos ensinamentos sobre resolução de problemas, e é até hoje. A partir de então, não há como pensar em entender o funcionamento da resolução de problemas sem utilizar os conhecimentos descritos pelo autor. Segue no Anexo 1 deste trabalho, uma imagem do livro de Polya (1995), que descreve os passos para se resolver um problema.

A metodologia de resolver problemas, como podemos analisar no Anexo 1 em cada um dos passos de Polya (1995), prevê muito mais que apenas levar o aluno a encontrar soluções, assim como funcionam os exercícios. O objetivo dele é fazer o aluno questionar suas hipóteses a cada passo dado, sendo o mais importante o caminho que é percorrido até a solução, pois é nessa caminhada que importantes conceitos matemáticos poderão ser encontrados e determinados por eles. O método preza a formulação de hipóteses e verificação de teses, procedimentos importantes para um ser humano crítico e que vive constantemente reformulando suas verdades e conhecimentos.

E é a partir destes passos que iremos analisar as respostas dos alunos em cada trabalho, isto é, se os que seguiram acertaram os problemas propostos; e se os que não chegaram em uma resposta final apropriada seguiram ou não os passos dados por Polya (1995).

2.4 A OBMEP e sua ligação com a Resolução de Problemas

O contexto histórico de Olimpíadas de Matemática é antigo, pois o mesmo acontece desde 1894, no qual ocorreu a primeira Olimpíada de Matemática da história, na Hungria. Porém, apenas em 2005, foi realizada a primeira Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Uma Olímpiada de Matemática é, segundo Todeschini:

> [...] composta por provas envolvendo problemas matemáticos instigantes que exigem dos competidores, além de um conhecimento básico dos conteúdos matemáticos, uma capacidade imaginativa e interpretativa, necessitando normalmente de criatividade e improvisação para serem resolvidos. (TODESCHINI, 2012, p.11)

Em particular, a OBMEP é um projeto implementado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Segundo o site oficial da Olimpíada[4], as provas têm como objetivo estimular o estudo da matemática e revelar talentos na área. O estudo para a prova e a resolução de suas questões estimula e promove o estudo da Matemática nas escolas públicas, contribuindo para o crescimento da qualidade da Educação Matemática entre esses alunos e entre os seus professores (visto que os professores também concorrem a prêmios pelo desempenho de seus alunos). Além disso, identificam jovens talentos nesta área e incentivam desde cedo o seu ingresso na pesquisa em Matemática (por intermédio de Bolsas de Iniciação Científica, Mestrado e Doutorado).

As provas, realizadas todos os anos desde 2005, em diversas cidades do país, são divididas em três níveis e duas fases. A prova de nível 1 é aplicado para os alunos de 6º e 7º anos, a de nível dois para os alunos de 8º e 9º anos, e a de nível três para os alunos do Ensino Médio. A primeira fase é composta por provas objetivas, isto é, de múltipla escolha, nos quais participam todos os alunos inscritos pelas escolas. A segunda fase é composta por uma prova dissertativa, no qual é realizada apenas pelos alunos que obtiveram um bom desempenho na primeira fase, se destacando dentre seus colegas, ou por alunos que compõe um pequeno grupo nos níveis de sua escola.

É importante ressaltar que a pesquisa realizada para este trabalho utilizou como base somente as questões da segunda fase, como será mostrado nas próximas seções.

Para explicar a ligação da OBMEP com a resolução de problemas, começaremos citando Milauskas: "Tenho convicção de que o aluno aprende a resolver problemas resolvendo problemas de qualidade. O treinamento, aliado ao contato com problemas fora dos padrões, estimula o aluno a exercer suas faculdades de resolução de problemas." (Milauskas, 1994, p. 86).

Como vimos na seção anterior, a resolução de problemas não exige uma aplicação direta de regras, que foram aprendidas ao resolver outros exercícios semelhantes. Este método, segundo Polya (1995, p. 14), não contribui para o desenvolvimento intelectual do aluno. Os problemas, chamado pelo autor de "não rotineiros" (POLYA, 1995, p. 14), exigem que estudante pense, reflita e se esforce, desde que o mesmo esteja motivado a resolvê-lo. Ele, assim como já citado anteriormente, deve ter um propósito pelo ponto de vista do aluno.

---

[4] Site oficial: http://www.obmep.org.br/

Para tais, é necessário que, além de um problema interessante, o enunciado do mesmo esteja claro, sucinto, e que facilite a compreensão do aluno, sem utilizar uma linguagem matemática demasiadamente formal.

Dado esse resumo sobre questões que utilizam resolução de problemas, concordo com Todeschini, quando escreve que "as questões utilizadas na segunda fase da OBMEP estão focadas na resolução de problemas." (TODESCHINI, 2012, p. 29). Como as questões desta fase são dissertativas, é importante que os alunos justifiquem seu raciocínio, de modo que deixe claro em sua escrita como chegou à resposta. Dentro de uma mesma questão, que contém diversos itens para serem dissertados, o grau de dificuldade de cada item vai aumentando na medida que o aluno avança em sua resolução. Desta forma, os raciocínios e resultados obtidos nos primeiros itens podem ser usados na estratégia de resolução dos demais itens. O que demonstra o quanto o objetivo da prova é, na verdade, desenvolver alunos pensadores e autônomos.

Note que para esta resolução, é necessário que o aluno tenha capacidade de compreender completamente o problema (pois questões sem justificativa não são aceitas), desenvolver uma estratégia de resolução e, obviamente, executar a estratégia. Sendo estes três dos quatro passos descritos por Polya. A revisão ou retrospecto do problema pode ser realizado pelos alunos, o que facilitaria a sua compreensão sobre o problema, mas nem sempre é necessário se o mesmo já conseguiu compreendê-lo. Segundo Todeschini "São problemas que exigem reflexão. não são triviais de serem resolvidos e, utilizando as fases de resolução sugeridas por Polya, podem se tornar uma importante forma de desenvolver a capacidade de pensamento do aluno." (TODESCHINI, 2012, p. 35).

2.5 Avaliação

Avaliar os alunos é de suma importância para a análise deste trabalho, pois é a partir desta avaliação que a proposta deste estudo de caso será julgada. Porém, lidar com a responsabilidade de avaliar os alunos tanto para um trabalho desta magnitude quanto para a vida escolar deles se tornou um grande problema. Segundo Souza: “certamente um dos maiores desafios com que se defronta o educador e o professor é o problema da avaliação. Todos aqueles que estudam ou se interessam por este problema sabem do grau de dificuldade que representa fazer uma avaliação significativa.” (SOUZA, 2005, p. 107)

Pois como avaliar uma proposta de trabalho como eficaz ou não sem considerar diversos fatores que são quase impossíveis de diagnosticar, tais como: o que o aluno está querendo dizer com o que escreveu? Será que ele sabe a matéria e não sabe escrever seu raciocínio? O que ele escreveu está parcialmente correto, porém errou ao finalizar, como considerado esta resposta? Enfim, são diversas questões que surgem quando o professor avalia seus alunos.

Visto isso, foi decidido analisar os trabalhos realizados pelos alunos de maneira particular, sem, apenas, fornecer ao final do trabalho dados gerais de como cada aluno/a turma se saiu com esta didática, mas fornecer também, para cada atividade realizada, as respostas dos alunos, as perguntas realizadas por eles e por fim uma nota, pois segundo Larrosa:

> [...] o saber da experiência é um saber particular, subjetivo, relativo, contingente, pessoal. Se a experiência não é o que acontece, mas o que nos acontece, duas pessoas ainda que enfrentem o mesmo acontecimento, não fazem a mesma experiência. O acontecimento é comum, mas a experiência é para cada qual sua, singular e de alguma maneira impossível de ser repetida. (LARROSA, 2002, p. 27)

Os pareceres de cada atividade estará associada ao que escreve Souza (2005), no qual o "resultado" de uma educação é o que nos tornamos, logo, não há como medir isso em, por exemplo, menos que um trimestre em notas ou conceitos. Mas, é diagnosticado que existem relações entre algumas ações feitas pelos alunos que indicam que está havendo um processo educativo (ele está aprendendo), porém mesmo assim são apenas indícios, isto é, não garante o aprendizado do aluno e não garante que o "processo se instale" (SOUZA, 2005, p. 108).

Portanto esta nota servirá apenas para indicar: o quanto os alunos entenderam do problema e conseguem deixar explícito na escrita das resoluções dos problemas; se os mesmos discutiram comigo ou com seus colegas possíveis resoluções dos problemas; se os mesmos fizeram os problemas de modo correto ou até mesmo parcialmente correto; se os mesmos cooperaram com o bom andamento de sua aprendizagem, isto é, se ficavam conversando em sala de aula sobre outros assuntos senão o trabalho ou se queriam ao menos tentar resolver o problema. Ela será fornecida através de *registros de desempenho,* no qual a cada ação do aluno/grupo de alunos em seu(s) trabalho(s), será (ão) avaliado(s) através de dados que ressaltam o quanto eles acertaram de cada conteúdo, isto é, totalmente ou parcialmente. Os que escreverem coisas que não tenha relação com a matéria entrará no campo em que o aluno/grupo de alunos "errou" a resposta. Note que "errou" não significa que ele ou o grupo não compreenderam a matéria, mas que eles não escreveram uma resposta considerada correta para aquela situação.

Ao final de cada trabalho, além da avaliação, terá também a análise de cada trabalho. Esta análise, assim como citado anteriormente, será apoiada nos ensinamentos de Polya (1995).

2.6 Público-alvo da pesquisa: Escola Técnica Estadual Irmão Pedro

Para iniciar a pesquisa foi preciso, primeiramente, determinar a escola em que a realizaríamos. A escola escolhida foi a Escola Técnica Estadual Irmão Pedro, localizada na cidade de Porto Alegre – Rio Grande do Sul, na rua Félix da Cunha, 515, no Bairro Floresta. A escola possui um site próprio e página no *Facebook*

Trata-se de uma escola de Ensino Médio Politécnico que oferece aos alunos cursos de formação técnica de: secretariado; contabilidade; publicidade; e programas de estágios diversos. Também temos nesta escola a presença de bolsistas do Programa de Iniciação a Docência - PIBID de Geografia, História e Matemática.

A escola possui: biblioteca com ampla escolha de livros; sala de estudos com reto projetor e quadro; campos de futebol, vôlei e basquete; sala de informática com computadores bem equipados; ginásio coberto para o intervalo das aulas ou eventos diversos; acompanhamento pedagógico para alunos e professores, quando necessário; ventiladores em todas as salas de aula, bem como luz, classes e assentos em bom estado; controle de entrada e saída de todos os alunos; etc.

O Público-alvo da pesquisa foi a turma 105, composta por trinta e três alunos. Os alunos, segundo pesquisa realizada com os professores da turma, pedagoga da escola e diretora da Escola, são de classe média alta e baixa. Apenas dois dos trinta e três alunos necessitam trabalhar. É importante ressaltar que todos tiveram professores de Matemática nos anos anteriores a este.

2.7 Procedimentos Metodológicos

As seções seguintes estão separadas em: questões escolhidas das provas da OBMEP, suas resoluções, seus objetivos e os correspondentes planos de aula que as envolve. Separamos assim, pois para ter um trabalho bem sucedido, por parte do professor (já que ele é a principal ferramenta para o sucesso ou fracasso de sua atividade), ele deve ter pleno conhecimento dos conteúdos que serão ensinados. O professor deve ter clareza dos objetivos que deseja alcançar com seus alunos em cada atividade proposta e também deve elaborar um plano pedagógico que abranja e identifique as potencialidades e limitações de cada problema que será proposto.

As aulas para o ensino-aprendizagem do conteúdo de funções foram preparadas de maneira a induzir o pensamento dos alunos para a formalização do conceito de funções. Deste modo, os alunos deverão se contextualizar no problema e tentar resolvê-los, pois segundo Magarinus:

> No processo de aprendizagem, a contextualização do conhecimento permite que o aluno tenha um raciocínio contínuo ao resolver um problema matemático, além de estar mais apto a transferir para novas situações o conhecimento que foi construído na prática. [...] O ensino deve priorizar a construção e a compreensão dos conceitos, proporcionando atividades significativas e possibilitando aos alunos fazer indagações, observações, comparações e constatações sobre o objeto em estudo, para finalmente, chegar às definições formais. (MAGARINUS, 2013, p. 26)

Segundo Dante (2005) e ainda Magarinus (2013) esta maneira de se ensinar funções pode ajudar a promover a capacidade do aluno em relacionar o que aprendeu no desenvolver da prática com o observado, assim como sua capacidade em formular hipóteses para definir teoremas, juntando a prática exercida com a teoria que mais tarde irá ser estudada formalmente.

A partir dessas concepções, entendemos que o *contextualizar* citado pelos autores, nada mais é que uma ação pedagógica que favorece o estímulo do pensamento crítico dos alunos, para que os mesmos resolvam problemas que tenham algum sentido para eles e que, segundo Magarinus, "de algum modo seus conhecimentos prévios sejam mobilizados na busca por soluções e na geração de novos saberes" (MAGARINUS, 2013, p. 26).

Deste modo, pretendemos que os alunos participem ativamente do seu processo de aprendizagem, e que o professor seja seu mediador, de modo que os mesmos tenham a oportunidade de parar para refletir, para discutir, para formular hipóteses, para encontrar dúvidas, questionar informações e tentar expandir seus mundos intelectuais.

Iremos encontrar no decorrer dos objetivos e análises dos trabalhos dos alunos um foco especial e particular no aprendizado da compreensão do significado das variáveis de uma função, mesmo esse assunto sendo, para muitos matemáticos, um conhecimento trivial e intuitivo. Porém, isso contradiz os estudos realizados por Magarinus (2006 p. 42 e 2013, p. 38), Oliveira, (1999, p. 57); Mariani, (2004, p. 49) e Costa, (2004, p. 53-52) quando relatam perceber que os alunos apresentam dificuldades em desenvolver a noção de variação e dependência entre duas grandezas, que, como sabemos, é a base do conceito de função.

Estudos realizados por Magarinus (2006 p.42, 2013 p. 38), Mariani (2004, p. 50) e Zuffi e Pacca (2001, p. 15) indicam que a representação algébrica das funções também não é bem formulada e que os alunos têm dificuldades em encontrar a relação entre as variáveis, quando já sabem quem são elas.

A partir dessas premissas, os procedimentos metodológicos desse trabalho foram divididos em três etapas distintas para a criação de planos para as aulas. A primeira etapa é constituída do plano de aula teórico para a primeira questão escolhida da OBMEP. A segunda etapa é constituída do plano de aula teórico de outras duas questões escolhidas da OBMEP. E a terceira e última etapa é constituída do plano de aula teórico da última questão escolhida da OBMEP.

Seguem abaixo o objetivo para cada um dos problemas que serão abordados a partir destas questões escolhidas.

Objetivo para o primeiro plano de aula (4 períodos)

Dada uma situação-problema baseada nas questões propostas na OBMEP, ensinar aos alunos a:

a) identificar e classificar quem são as variáveis dependentes e independentes, o que significam para o problema e sua importância;

b) definição de Domínio e Imagem da função da situação-problema, para que servem e como criar tais conjuntos de modo que satisfaçam todos os possíveis valores para a situação em estudo;

c) interpretar uma situação-problema, recolhendo os dados que serão necessários para sua resolução;

d) modelar situações-problema, construindo expressões.

Objetivo para o segundo plano de aula (de 4 a 6 períodos)

Fornecer problemas baseados nas provas da OBMEP, para que, em grupo, os alunos os resolvam, em sala de aula. Nestas aulas os alunos deverão:

a) com a orientação do professor, saber classificar as variáveis dependentes e independentes, determinar o domínio e a imagem de cada função obtida. Além disso, saber trabalhar algebricamente com as funções construídas;

Objetivo para o terceiro plano de aula (de 4 períodos)

Fornecer aos alunos um trabalho sem consulta e individual (de no máximo dois períodos) com duas questões e uma situação - problema. A situação-problema é uma adaptação da questão 2 de 2006 do nível 3 - fase 2 da OBMEP. Neste trabalho, os alunos deverão mostrar seus conhecimentos acerca:

a1) dos conjuntos trabalhados em sala de aula: conjuntos finitos e infinitos, mais especificamente intervalos;

a2) das definições de variável, Domínio e Imagem;

a3) da modelagem de funções, explicitando as variáveis envolvidas, construindo expressões da situação-problema e o Domínio e Imagem propícios para tal.

Além dos ensinamentos dos autores anteriormente, também levamos em consideração, na criação dos planos de aulas, os PCNEM (BRASIL, 2000) sobre o que o ensino de funções deve abranger e como pode ser feito: "o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algebricamente" (BRASIL, 2000, p. 21).

Para uma boa aplicação dos planos, além dos alunos e de todo o embasamento teórico que tivemos até então, o professor é a peça fundamental, visto que é a partir de sua orientação no decorrer das atividades que poderá determinar o sucesso ou fracasso da prática. Será o professor quem levará os alunos, através de seus questionamentos, a refletirem a respeito do problema, conduzindo suas perguntas e desenvolvendo dessa forma o seu pensamento crítico: "auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionas-lhes alguns meios para alcançar este objetivo". (POLYA, 1995, p. V)

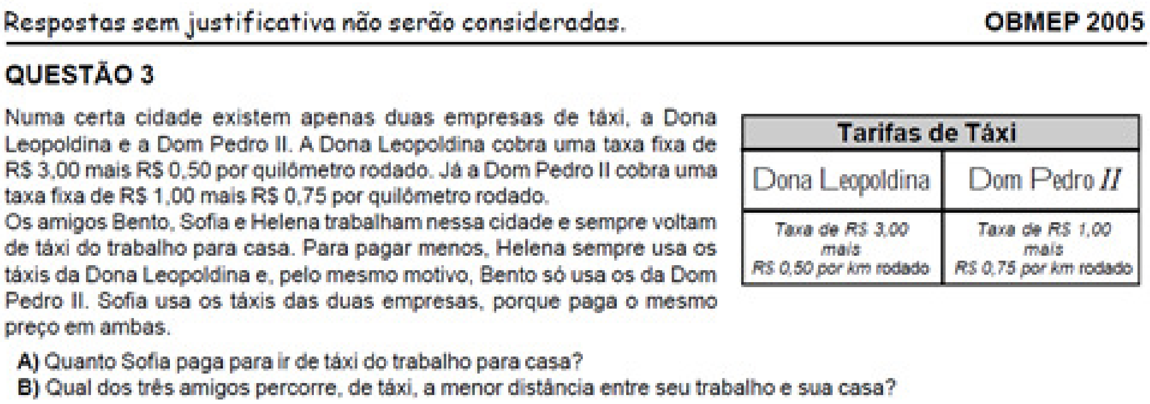
Para trabalhar com o conceito de função, foram utilizadas tabelas e expressões algébricas. Tabelas, pois seus valores podem indicar uma relação de dependência mais clara entre as variáveis, possibilitando a elaboração de hipóteses sobre o seu comportamento no infinito e sua possível representação algébrica. Expressões algébricas, pois, apesar de não ser mais importante que as outras representações de uma função, são as mais utilizadas nos livros didáticos, provas e concursos.

2.7.1 Questões da OBMEP escolhidas e suas resoluções

É importante ressaltar que o modo com o qual as questões da OBMEP estão resolvidas nesta seção, não seguem os passos de Polya (1995). Visto que, em nível acadêmico, não há necessidade de se abranger este tipo de questão segundo os quatro passos, por conta do espaço que se ocuparia descrevendo cada um deles. Segue, na figura abaixo, a resolução juntamente com as questões escolhidas para tal:

Questão 1)

Figura 1: Nível 3; Questão 3 da OBMEP de 2005; Segunda fase



Respostas sem justificativa não serão consideradas. OBMEP 2005

QUESTÃO 3

Numa certa cidade existem apenas duas empresas de táxi, a Dona Leopoldina e a Dom Pedro II. A Dona Leopoldina cobra uma taxa fixa de R$ 3,00 mais R$ 0,50 por quilômetro rodado. Já a Dom Pedro II cobra uma taxa fixa de R$ 1,00 mais R$ 0,75 por quilômetro rodado.
Os amigos Bento, Sofia e Helena trabalham nessa cidade e sempre voltam de táxi do trabalho para casa. Para pagar menos, Helena sempre usa os táxis da Dona Leopoldina e, pelo mesmo motivo, Bento só usa os da Dom Pedro II. Sofia usa os táxis das duas empresas, porque paga o mesmo preço em ambas.

Tarifas de Táxi	
Dona Leopoldina	Dom Pedro *II*
Taxa de R$ 3,00 mais R$ 0,50 por km rodado	*Taxa de R$ 1,00 mais R$ 0,75 por km rodado*

A) Quanto Sofia paga para ir de táxi do trabalho para casa?
B) Qual dos três amigos percorre, de táxi, a menor distância entre seu trabalho e sua casa?

Fonte: http://www.obmep.org.br/

Resolução:

a) Denotemos por L a função que determina o preço da corrida de táxi da empresa Dona Leopoldina, então:

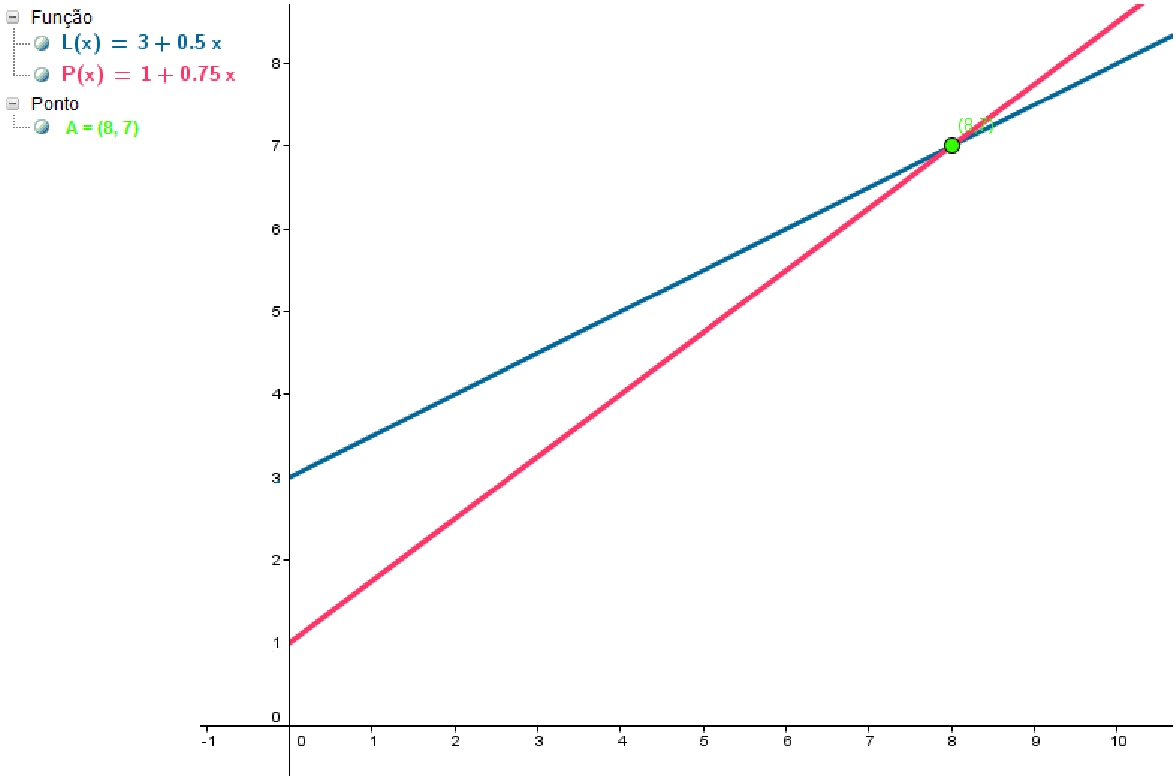
$$L: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad L(x) = 3 + 0{,}5x$$

Agora, denotemos por P a função que determina o preço da corrida de táxi da empresa Dom Pedro II, então:

$$P: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad P(x) = 1 + 0{,}75x$$

Segue na figura abaixo os gráficos relacionados a cada uma das funções:

Figura 2: Gráfico das Funções L(x) e P(x)



Fonte: Acervo pessoal (Arquivo GeoGebra)

De acordo com o enunciado, Sofia paga o mesmo preço para ambos, logo para saber quanto Sofia paga, basta analisar em que ponto dos gráficos dessas funções se interceptam:

$$3 + 0{,}5x = 1 + 0{,}75x \Leftrightarrow x = 8, \text{ verificando:}$$

$$L(8) = 3 + 0{,}5.8 = 7$$

$$P(8) = 1 + 0{,}75.8 = 7$$

Concluimos que Sofia mora a 8km do trabalho e paga R$ 7,00 pela corrida, independente da empresa.

b) Helena usa $L(x)$ para pagar menos, logo queremos saber para quais valores de x $L(x) < P(x)$, ou seja:

$$3 + 0{,}5x < 1 + 0{,}75x \ \Leftrightarrow 8 < x$$

Portanto, Helena percorre mais de 8 km de táxi. Analogamente, Bento percorre menos de 8 km e é o que mora mais perto do trabalho.

Questão 2)

Figura 3: Nível 3; Questão 1 da OBMEP de 2006; Segunda fase

2 *Respostas sem justificativa não serão consideradas*

(1) Raimundo e Macabéa foram a um restaurante que cobra R$ 1,50 por cada 100 gramas de comida para aqueles que comem até 600 gramas e R$ 1,00 por cada 100 gramas para aqueles que comem mais de 600 gramas.

(a) Quanto paga quem come 350 gramas? E quem come 720 gramas?

(b) Raimundo consumiu 250 gramas mais que Macabéa, mas ambos pagaram a mesma quantia. Quanto cada um deles pagou?

(c) Desenhe o gráfico que representa o valor a ser pago em função do peso da comida. Marque nesse gráfico os pontos que representam a situação do item (b).

Fonte: http://www.obmep.org.br/

Resolução:

Vemos pelo enunciado da questão que, como o preço da comida do restaurante depende de quanto a pessoa comerá, isto é, quantas gramas de comida será consumida, a variável independente são as gramas de comida consumidas e a variável dependente é o preço. Por outro lado, quem come até 600 gramas paga R$ 1,50 a cada 100g e, quem come mais que 600 gramas, paga R$ 1,00 a cada 100g, o que sugere uma função definida por duas expressões:

1) Até 600 gramas paga R$ 1,50 a cada 100g: $y = 1{,}50.\left(\frac{x}{100}\right), 0 < x \leq 600$

2) Mais que 600 gramas paga R$ 1,00 a cada 100g: $y = 1.\left(\frac{x}{100}\right), x > 600$

Portanto, a função será:

$$f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1{,}50.\left(\frac{x}{100}\right), 0 < x \leq 600 \\ 1.\left(\frac{x}{100}\right), x > 600 \end{cases}$$

a) 350g está entre $0 < x \leq 600$, primeira lei, logo: $f(350) = 1{,}50.\left(\frac{350}{100}\right) = 5{,}25.$

No entanto 720g está em $x > 600$, segunda lei, logo: $f(720) = 1.(\frac{720}{100}) = 7{,}20$

b) $1{,}50.\left(\frac{x}{100}\right) = 1.\left(\frac{x+250}{100}\right) \Leftrightarrow 1{,}5x = x + 250 \Leftrightarrow x = 500$

Então:

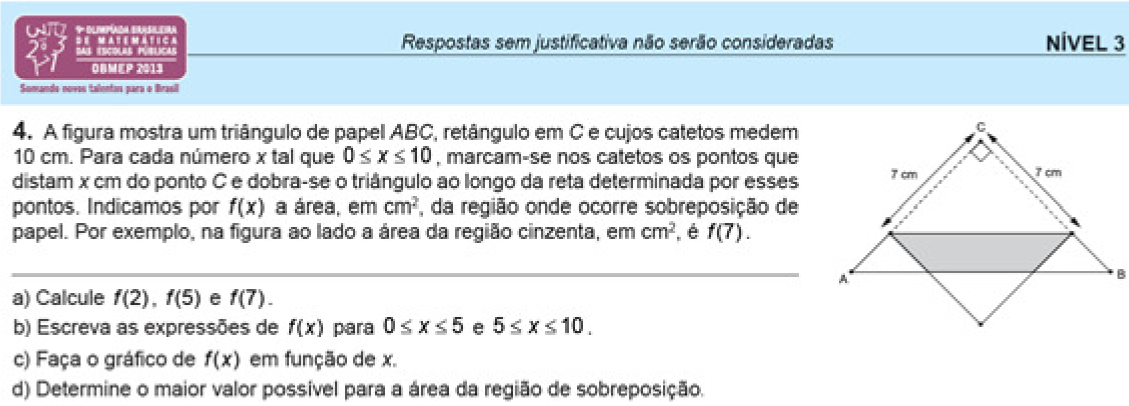
$$f(500) = 1{,}50.\left(\frac{500}{100}\right) = 7{,}50 \text{ e}$$

$$f(500 + 250) = f(750) = 1.\left(\frac{750}{100}\right) = 7{,}50$$

Ambos pagaram R$ 7,50.

Questão 3)

Figura 4: Nível 3; Questão 4 da OBMEP de 2013; Segunda fase



9ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS OBMEP 2013 — Somando novos talentos para o Brasil

Respostas sem justificativa não serão consideradas **NÍVEL 3**

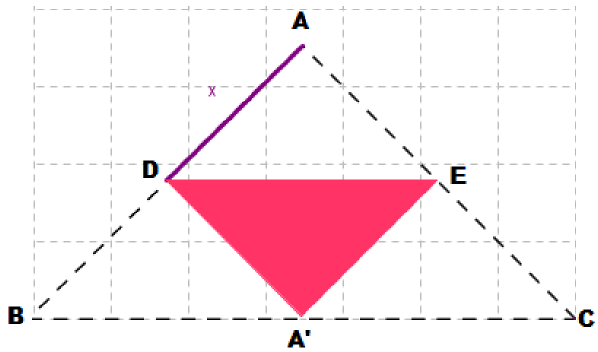
4. A figura mostra um triângulo de papel ABC, retângulo em C e cujos catetos medem 10 cm. Para cada número x tal que $0 \le x \le 10$, marcam-se nos catetos os pontos que distam x cm do ponto C e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por $f(x)$ a área, em cm², da região onde ocorre sobreposição de papel. Por exemplo, na figura ao lado a área da região cinzenta, em cm², é $f(7)$.

a) Calcule $f(2)$, $f(5)$ e $f(7)$.
b) Escreva as expressões de $f(x)$ para $0 \le x \le 5$ e $5 \le x \le 10$.
c) Faça o gráfico de $f(x)$ em função de x.
d) Determine o maior valor possível para a área da região de sobreposição.

Imagem editada - Fonte: http://www.obmep.org.br/

Teremos duas expressões para esta função: uma quando temos um triângulo na área hachurada, e outra quando temos um trapézio.

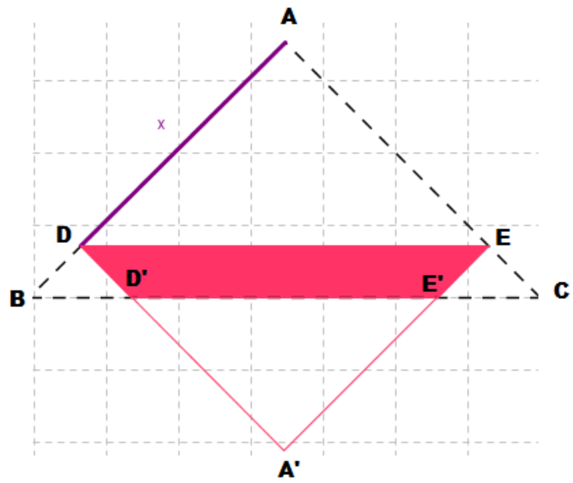
Figura 5: Triângulo delineado pela área hachurada - Primeira Expressão



Fonte: Acervo pessoal (Arquivo GeoGebra)

1ª expressão (valores de x entre $0\ cm$ e $5\ cm$): A base de nosso triângulo é sempre x assim como sua altura, então sua área é $\frac{x^2}{2}$. Portanto a primeira expressão para o cálculo de uma área qualquer para valores de x entre $0\ cm$ e $5\ cm$ será $\frac{x^2}{2}$

Figura 6: Trapézio delineado pela área hachurada - Segunda Expressão



Fonte: Acervo pessoal (Arquivo GeoGebra)

2ª expressão (valores de x maiores que 5 cm até 10 cm): Sabemos que

$$\overline{AD} \equiv \overline{AE} \equiv \overline{DA'} \equiv \overline{A'E} = x$$

Sabemos também que, anteriormente, quando $|\overline{AE}| = 8$ $\overline{|EC|} = \overline{|EE'|} = 10 - 8 = 2$

Então, para um valor qualquer de $|\overline{AE}|$, teremos que $\overline{|EE'|} = 10 - x$.

Se $\overline{|EE'|} = 10 - x$ então $\overline{|E'A|} = |x - (10 - x)| = 2x - 10$ (o módulo é necessário, pois $x \leq 10$).

Logo $Área\ (DD'E'E) =$

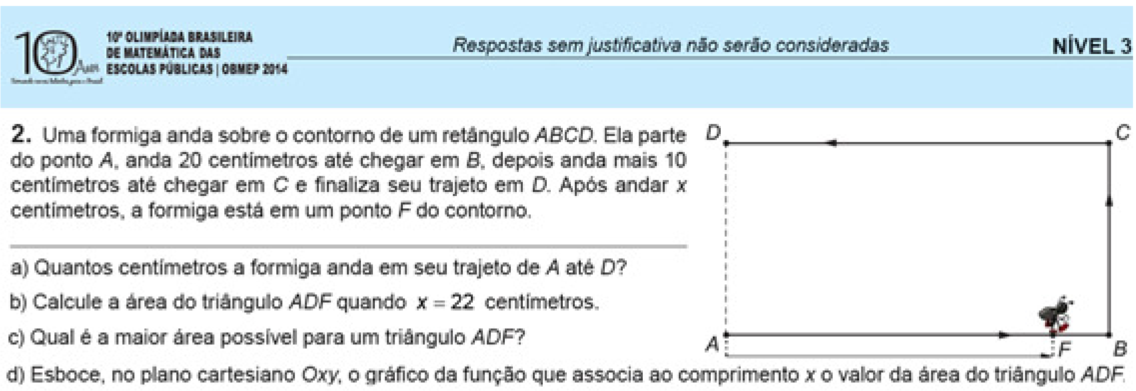
$$= \frac{x.x}{2} - \frac{(2x-10)(2x-10)}{2} = \frac{x^2 - 4x^2 + 40x - 100}{2} = \frac{-3x^2 + 40x - 100}{2}$$

a) $f(2) = \frac{(2)^2}{2} = 2\ cm^2; f(5) = \frac{(5)^2}{2} = \frac{25}{2} cm^2; f(7) = \frac{-3.7^2+40.7-100}{2} = \frac{33}{2} cm^2$

b) 1ª expressão: $\frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq 5$; e 2ª expressão: $\frac{-3x^2+40x-100}{2}$ para $5 < x < 10$.

Questão 4)

Figura 7: Nível 3; Questão 2 da OBMEP de 2014; Segunda fase



10ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS | OBMEP 2014

Respostas sem justificativa não serão consideradas **NÍVEL 3**

2. Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo *ABCD*. Ela parte do ponto *A*, anda 20 centímetros até chegar em *B*, depois anda mais 10 centímetros até chegar em *C* e finaliza seu trajeto em *D*. Após andar *x* centímetros, a formiga está em um ponto *F* do contorno.

a) Quantos centímetros a formiga anda em seu trajeto de *A* até *D*?

b) Calcule a área do triângulo *ADF* quando $x = 22$ centímetros.

c) Qual é a maior área possível para um triângulo *ADF*?

d) Esboce, no plano cartesiano *Oxy*, o gráfico da função que associa ao comprimento *x* o valor da área do triângulo *ADF*.

Fonte: http://www.obmep.org.br/

a) A formiga andou 20 cm de A até B, depois mais 10 cm de B até C e por fim 20 cm de C até D, visto que seu trajeto é de A a D. Logo:

Trajeto = $20cm + 10cm + 20cm = 50\ cm$

b) Base = $AD = 10cm$ e altura no segmento BC = altura de $DAB = 20\ cm$ então:

$\frac{10x20}{2} = 100\ cm^2$

c) A maior área vem do triângulo com maior altura relativa à base AD, ou seja, 10 cm, como no triângulo da letra B.

2.7.2 Plano de aula para o Primeiro Trabalho

Neste momento, iremos apresentar o plano de aula proposto para a turma, bem como o primeiro trabalho a ser realizado.

Segue abaixo a questão que escolhemos para abordar o primeiro trabalho:

Figura 8: Nível 3; Questão 3 da OBMEP de 2005; Segunda fase

Respostas sem justificativa não serão consideradas. **OBMEP 2005**

QUESTÃO 3

Numa certa cidade existem apenas duas empresas de táxi, a Dona Leopoldina e a Dom Pedro II. A Dona Leopoldina cobra uma taxa fixa de R$ 3,00 mais R$ 0,50 por quilômetro rodado. Já a Dom Pedro II cobra uma taxa fixa de R$ 1,00 mais R$ 0,75 por quilômetro rodado.
Os amigos Bento, Sofia e Helena trabalham nessa cidade e sempre voltam de táxi do trabalho para casa. Para pagar menos, Helena sempre usa os táxis da Dona Leopoldina e, pelo mesmo motivo, Bento só usa os da Dom Pedro II. Sofia usa os táxis das duas empresas, porque paga o mesmo preço em ambas.

Tarifas de Táxi	
Dona Leopoldina	Dom Pedro *II*
Taxa de R$ 3,00 mais R$ 0,50 por km rodado	*Taxa de R$ 1,00 mais R$ 0,75 por km rodado*

A) Quanto Sofia paga para ir de táxi do trabalho para casa?
B) Qual dos três amigos percorre, de táxi, a menor distância entre seu trabalho e sua casa?

Fonte: http://www.obmep.org.br/

Metodologia:

Ensino de funções: cabe salientar que não iremos definir o que é uma função, mas trabalhar com este conceito. Em um segundo momento, formalizamos o conceito de função.

Adaptação da questão da OBMEP: "Numa certa cidade existem apenas duas empresas de táxi, a Dona Leopoldina e a Dom Pedro II. A empresa Dona Leopoldina cobra uma certa taxa fixa mais uma valor por quilômetro rodado, assim como a Dom Pedro II. Os amigos Bento, Sofia e Helena, trabalham nesta cidade e sempre voltam de táxi do trabalho para suas casas. Para pagar menos, Helena sempre usa o táxi da Dona Leopoldina, e pelo mesmo motivo, Bento só usa os da Dom Pedro II. Sofia usa os taxis das duas empresas, porque paga o mesmo em ambas."

Variáveis dependentes e independentes de uma Função

Problemas propostos:

a) Se quiséssemos saber quanto Helena pagaria pela corrida até sua casa, quais informações seriam necessárias?

Resposta: As informações necessárias são: a taxa fixa, os quilômetros que foram rodados e a taxa cobrada por quilômetro rodado. Todas as informações da empresa Dona Leopoldina.

b) Se um cliente entra no táxi e pergunta o preço da corrida, qual é a informação que o taxista necessita?

Resposta: Ele necessita da quilometragem que será rodada.

c) Depois que o cliente disser os quilômetros que serão rodados, como é calculado o preço?

Resposta: Valor da taxa fixa + (valor cobrado pelos quilômetros) * (pelos quilômetros rodados)

d) Vamos imaginar que nesta situação a taxa fixa é R$ 3,00 e a taxa por quilômetro rodado é R$ 0,50. Quanto Helena pagaria por 5 km? E por 8 km? E por 10 km?

Resposta: Helena pagaria, respectivamente, $3 + 0{,}5(5) = 5{,}5$ reais, $3 + 0{,}5(8) = 7$ reais e $3 + 0{,}5(10) = 8$ reais.

e) Dependendo do número de quilômetros rodados o que muda na resposta do taxista?

Resposta: O que mudará na resposta do taxista, nas duas empresas apresentadas na questão, será o preço da corrida. Que é determinado somente pelos quilômetros rodados.

Podemos notar nas perguntas acima que temos dois valores que estão mudando: o preço da corrida e o número de quilômetros que estão sendo rodados. Essas duas informações são de extrema importância para resolver esta situação-problema. No estudo de funções, estes valores que estão *mudando* recebe o nome de *variáveis*, tendo duas classificações: a variável *dependente* e a variável *independente*.

Neste momento pergunta-se aos alunos qual eles acham que é qual. Em seguida:

Observamos que *número de km rodados* é a variável que *determina* o preço; e temos que o *preço* é a variável *determinada* pelos km rodados:

$$\boxed{Km\ rodados \rightarrow\ Define\ o\ preço\ \rightarrow Varia\ independentemente \rightarrow V.Independente}$$

$$\boxed{Preço \rightarrow \text{ É } definida\ pelos\ km\ rodados \rightarrow Varia\ dependendo \rightarrow V.Dependente}$$

Definição de Variável dependente: é a variável que depende da outra para assumir determinados valores, isto é, é a variável que está em função da variável independente (livre).

Definição de variável independente: é a variável que não depende de nada para variar, é uma variável "livre".

Imagem e Domínio de uma Função

Podemos reparar que temos determinados valores para responder cada uma das perguntas dadas anteriormente. De onde saem esses valores? Poderíamos ter um número de km rodados negativos? Poderíamos obter preços negativos?

a) Construa um conjunto dos possíveis valores dos quilômetros rodados.

Resposta: $(0, +\infty)$.

b) Construa um conjunto dos possíveis preços obtidos pelos quilômetros rodados.

Resposta: $(3, +\infty)$.

Podemos notar que o conjunto da letra a) contém todos os possíveis valores para a variável independente. Chamamos esse conjunto de Domínio. O mesmo acontece para a variável dependente no conjunto da letra b), o qual chamamos de Imagem.

O Domínio de uma função é indispensável para modelar essas situações-problema, pois sem o domínio não sabemos quais números podemos usar. No exemplo acima temos que ter um conjunto para os quilômetros rodados, os quais não podem ser negativos. Então toda função tem um domínio, e é fundamental que seja determinado. O mesmo acontece para imagem, pois, se não temos o conjunto Imagem, não temos como saber que tipo de valores teremos no final do problema, ou seja, não teríamos como saber o preço que o taxista está cobrando.

A expressão de uma função

Vamos agora, ver como modelar esse problema, de uma forma geral, ou seja, que podemos determinar qualquer preço a partir de qualquer quilometragem. Observe que na letra d) temos três exemplos de possíveis valores para o preço da corrida. Para alguns tipos de função, temos como "prever" o modo que ela se comporta de forma que conseguimos escrever o que chamamos de "expressão de uma função". A expressão é a maneira que escrevemos a relação, explícita, entre as variáveis.

A próxima tabela exibe as respostas da letra d):

Tabela 1: Exemplos de quilômetros rodados e preços obtidos

Corrida (em Km)	**Cálculo realizado**	**Preço (em reais)**
$5\ km$	$3 + 0{,}5(5)$	$5{,}50$
$8\ km$	$3 + 0{,}5(8)$	$7{,}00$
$10\ km$	$3 + 0{,}5(10)$	$8{,}00$

Fonte: Acervo Pessoal

Vamos chamar a variável dependente de y (o preço da corrida) e a variável independente de x (os km rodados). A partir dos exemplos exibidos na letra d), podemos generalizar o cálculo dessas situações:

Tabela 2: Correspondência entre as variáveis x e y

Corrida= x (em km)	**Cálculo realizado**	**Preço = $f(x)$ (em reais)**
$x = 5\ km$	$3 + 0{,}5(5)$	$y = 5{,}50$
$x = 8\ km$	$3 + 0{,}5(8)$	$y = 7{,}00$
$x = 10\ km$	$3 + 0{,}5(10)$	$y = 8{,}00$
x	$3 + 0{,}5(x)$	$y = 3 + 0{,}5(x)$

Fonte: Acervo Pessoal

Portanto, a lei da função que generaliza a letra d), isto é, nos fornece o preço que os táxis da Dona Leopoldina cobram por uma corrida de x quilômetros: $f(x) = 3 + 0{,}5(x)$.

Ou seja, com as informações: expressão da função, Domínio e Imagem, conseguimos calcular e determinar qualquer preço cobrado pelos táxis em função da quilometragem disposta.

Neste momento será solicitado aos alunos que resolvam o exercício abaixo, idêntico ao problema anterior:

Exercício: Criar a expressão que define o preço da corrida feita por algum táxi da Dom Pedro II, supondo que ele cobre uma taxa fixa de R$ 1,00 e R$ 0,75 por quilômetro rodado. Determine também o seu domínio e imagem.

Resolução: As variáveis dependentes e independentes são as mesmas do problema anterior. Construímos uma tabela com alguns possíveis valores para a função e então generalizamos.

Tabela 3: Correspondência entre as variáveis x e y

Corrida= x (em km)	Cálculo realizado	Preço = $f(x)$
$x = 5\ km$	$1 + 0{,}75(5)$	$f(5) = 4{,}75$
$x = 8\ km$	$1 + 0{,}75(8)$	$f(8) = R\$\ 7$
$x = 10\ km$	$1 + 0{,}75(10)$	$f(10) = R\$\ 8{,}5$
x	$1 + 0{,}75(x)$	$f(x) = 1 + 0{,}75(x)$

Fonte: Acervo Pessoal

Logo, a expressão é $f(x) = 1 + 0{,}75(x)$.

O Domínio desta função é o mesmo que antes, pois podemos admitir os mesmos valores para a quilometragem. Porém, a Imagem mudará, pois nossa taxa fixa é agora R\$ 1,00.

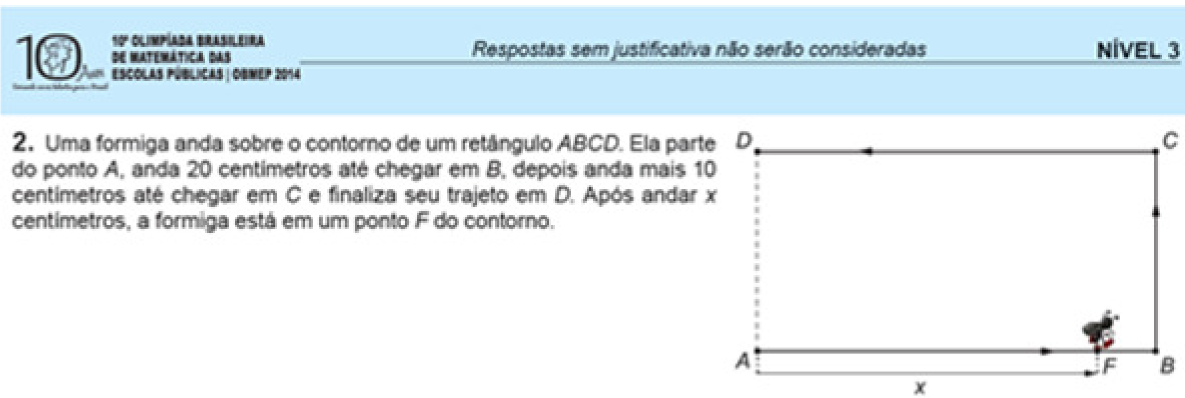
2.7.3 Plano de aula para o Segundo Trabalho

Nestas aulas, os alunos serão separados em grupos. Cada grupo receberá dois problemas baseados nas questões da OBMEP, e serão convidados a resolvê-los. Após o término dos problemas, serão sorteados grupos para apresentar a sua resolução no quadro.

Os grupos poderão solicitar a orientação da professora toda vez que encontrarem dúvidas sobre o assunto e necessitem de alguém para guiá-los. Segue abaixo o roteiro de cada questão.

Questão escolhida para a primeira parte do trabalho:

Figura 9: Nível 3; Questão 2 da OBMEP de 2014; Segunda fase



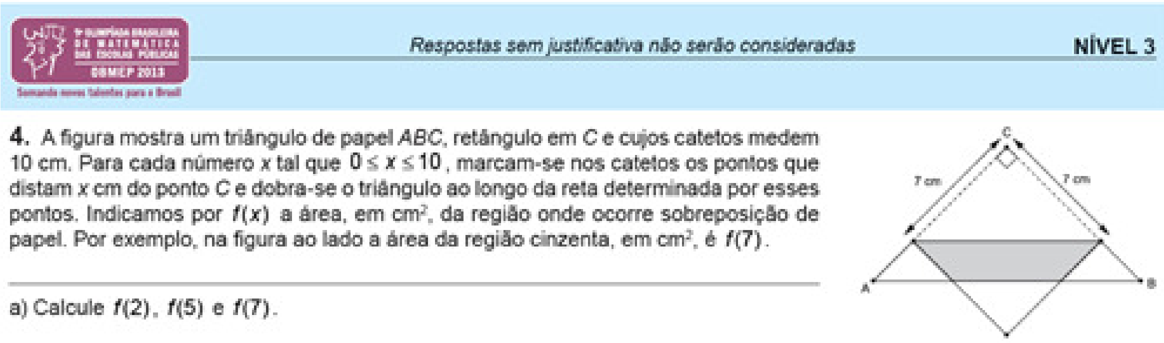
Fonte: http://www.obmep.org.br/

Problemas propostos:

1. Quantos centímetros a formiga anda em seu trajeto de A até D?
2. Calcule a área do triângulo ADF quando $x = 22$ cm.
3. Qual é a variável independente de problemas parecidos ao exercício 2.?
4. Qual é a variável dependente de problemas parecidos ao exercício 2.?
5. Qual é o valor máximo da variável dependente para o triângulo ADF?
6. O que você tem a dizer sobre a variável independente?
7. Construa um conjunto para os possíveis valores da variável independente.
8. Faça o mesmo para a variável dependente. Dica: Separe em casos!
9. Construa regras, de acordo com os cálculos feitos, que calculem de um modo geral a área do triângulo ADF em função de x.

Questão escolhida para a segunda parte do trabalho:

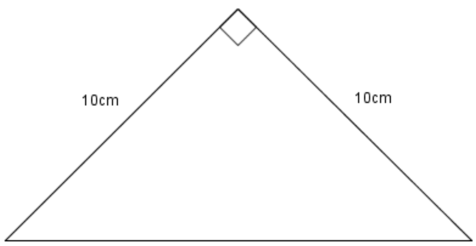
Figura 10: Nível 3; Questão 4 da OBMEP de 2013; Segunda fase



Fonte: http://www.obmep.org.br/

Enunciado: Observe a figura abaixo (figura 1 no trabalho) que representa uma folha de papel no formato de um triângulo retângulo e isóscele, ou seja, é retângulo por ter um ângulo reto e é isóscele por ter dois lados iguais. Estes lados iguais medem 10 cm.

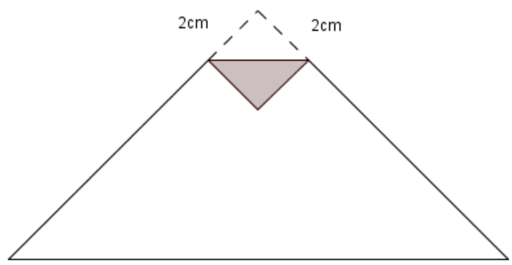
Figura 11: Figura 1 proposta no trabalho



Fonte: Acervo Pessoal

Imagine agora que estamos dobrando o triângulo pelo vértice no qual está o ângulo reto, de modo que forme um triângulo virado para baixo, como na figura a seguir (figura 2 no trabalho). Nessa figura a distância do vértice do ângulo reto ao longo dos catetos até a dobra é 2 cm.

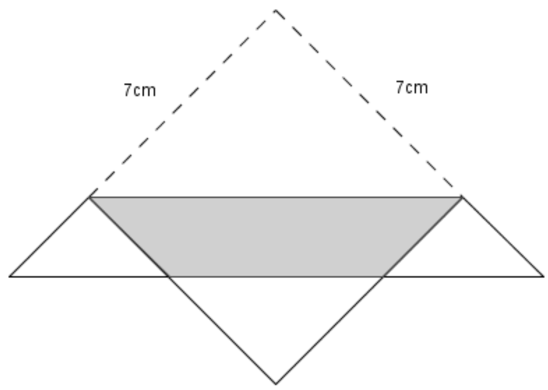
Figura 12: Figura 2 proposta no trabalho



Fonte: Acervo Pessoal

Observe a próxima figura (figura 3 no trabalho), na qual estamos dobrando mais ainda o nosso triângulo. Note que, agora, a parte sobreposta determina um trapézio. Nesta figura a distância do vértice do ângulo reto ao longo dos catetos até a dobra é de 7 cm.

Figura 13: Figura 3 proposta no trabalho



Fonte: Acervo Pessoal

O objetivo desta situação-problema é calcular a área da região onde a folha se sobrepõe, para cada valor possível da distância do vértice ao longo dos catetos até a dobra.

Problemas propostos:

1. Com a folha fornecida contendo os triângulos, represente cada situação dada e pinte qual a área que queremos calcular.

De acordo com a figura 2:

2. Dado que a distância do vértice do ângulo reto até a dobra é 2 cm, calcule a área do triângulo sobreposto.

3. Qual é a variável independente (livre) do problema?

4. Qual é a variável dependente do problema?

5. Qual é o valor máximo da variável independente para que a figura sobreposta continue sendo um triângulo?

6. Qual é o valor da variável dependente para esse caso?

7. Construa um conjunto para os possíveis valores da variável independente para que a figura continue sendo um triângulo.

8. Faça o mesmo para a variável dependente.

9. Construa a expressão, de acordo com os cálculos feitos, que expresse, de um modo geral, a área do triângulo sobreposto.

De acordo com a figura 3:

10. Dado que a distância do vértice do ângulo reto ao longo dos catetos até a dobra é 7 cm, calcule a área do trapézio sobreposto.

11. Faça o mesmo para $\frac{20}{3}$ cm.

12. Considerando que a área máxima é a encontrada no exercício anterior, construa um conjunto dos possíveis valores para a variável dependente.

13. Qual é a variável independente do problema?

14. Qual é a variável dependente do problema?

15. Para qual valor da variável independente a figura sobreposta deixa de existir?

16. Construa um conjunto para os possíveis valores da variável livre para que a figura continue existindo e sendo um trapézio.

17. Construa a expressão, de acordo com os cálculos feitos, que expresse de um modo geral a área do trapézio sobreposto.

De acordo com todo o problema:

18. Construa o domínio;

19. Construa a imagem;

É importante salientar neste plano de aula que o aluno, não só aprenderia resolvendo o problema, como também aprenderia a matemática para poder resolvê-la, uma vez que o conteúdo exigido para a realização dos problemas envolve também uma razoável percepção de geometria espacial e conhecimentos básicos de geometria plana.

2.7.4 Plano de aula para o Terceiro Trabalho

Cabe ressaltar que a primeira questão que compõe este trabalho foi solicitada pela professora regente da turma, por fazer parte de um dos conteúdos já ensinados no trimestre e portanto deve também ser avaliado. Como este conteúdo interfere diretamente no conhecimento dos alunos acerca de expressarem corretamente o Domínio e a Imagem de uma função, esta questão também faz parte das seções de análise das respostas dos alunos. O seu objetivo é analisar se os alunos compreenderam os conteúdos de: conjuntos, em particular intervalos; números racionais e irracionais; reta real.

Questão 1) Observe as questões abaixo e faça o que se pede:

a) Crie um conjunto utilizando { }; Quais números pertencem a esse conjunto?

b) Dado o conjunto $(1,2)$: o número 1 pertence ao conjunto? E o número 2? Que tipo de números pertencem a este conjunto? Dê um exemplo.

c) Dado o conjunto $[-1,+\infty)$: o número -1 pertence ao conjunto? O que significa "$+\infty$"? Que tipos de números pertencem a este conjunto? Dê cinco exemplos.

O objetivo da segunda questão é saber se os alunos conseguem associar o que aprenderam até este estágio com as devidas definições matemáticas de cada conteúdo.

Questão 2)Relacione os itens da coluna 1 com o seu respectivo significado na coluna 2:

<u>Coluna 1</u>

a) Variável
b) Variável Dependente
c) Variável Independente
d) Domínio
e) Imagem
f) 100.000

<u>Coluna 2</u>

( ) É um número.
( ) Pode assumir qualquer um dos valores em um conjunto de valores.
( ) É a variável que não depende de outra variável para variar.
( ) É a variável que depende de outra para variar.
( ) É o conjunto que contém os números para a variável dependente.
( ) É o conjunto que contém os números para a variável independente.

3) Observe o enunciado abaixo, que foi retirado da prova da OBMEP de 2006, 2ª fase do nível 3, e responda as questões a seguir:

Figura 14: Nível 3; Questão 1 da OBMEP de 2006; Segunda fase

2

Raimundo e Macabéa foram a um restaurante que cobra R$ 1,50 por cada 100 gramas de comida para aqueles que comem até 600 gramas e R$ 1,00 por cada 100 gramas para aqueles que comem mais de 600 gramas.

Fonte: http://www.obmep.org.br/

a) Quanto paga quem come 350 gramas?

b) Quanto paga quem come 720 gramas?

Se quiséssemos saber qual o valor a ser pago por qualquer quantidade de comida:

c) Quem seria a variável independente?

d) Quem seria a variável dependente?

e) Construa uma expressão que calcule o preço da comida para quem come até 600 gramas.

f) Construa a imagem e o domínio para essa expressão.

g) Construa uma expressão que calcule o preço da comida para quem come mais que 600 gramas

h) Construa imagem e o Domínio para essa expressão.

Questão Bônus:

Figura 15: Nível 3; Questão 1 da OBMEP de 2006; Segunda fase

Raimundo consumiu 250 gramas mais que Macabéa, mas ambos pagaram a mesma quantia. Quanto cada um deles pagou?

Fonte: http://www.obmep.org.br/

Podemos notar que o objetivo do problema proposto, é que os alunos percorram cada um dos passos descritos por Polya (1995): as primeiras duas perguntas (a e b) exigem cálculos em situações particulares que o enunciado propõe, afim de que o aluno entenda o problema; as perguntas seguintes (c e d) induzem os alunos a relacionar as perguntas a) e b) com o conteúdo estudado para, desta forma, elaborar uma estratégia para a construção da expressão da função, visto que determinar as variáveis dependente e independente é fundamental para a solução; e as últimas questões, exigem dos alunos que coloquem em prática a estratégia elaborada anteriormente, pela qual eles necessitam, de fato, construir a expressão e criar os conjuntos Domínio e Imagem. Portanto, os alunos que acertarem a questão por completo ou a acertarem parcialmente, estarão colocando em prática os passos proposto por Polya (1995), mesmo que inconscientemente.

3. Coleta de dados

Apresentamos nesta seção a sequência das aulas lecionadas na turma, juntamente com a análise de cada um dos trabalhos realizados pelos alunos. Primeiramente serão descritos cada uma das aulas. Essas descrições terão algumas das perguntas realizadas pelos alunos, dificuldades encontradas, etc. Momentos que são de relevância para a análise dos trabalhos.

As descrições das aulas visa o melhor entendimento dos leitores sobre como aconteceram as aulas, levando em consideração apenas a visão do professor da turma. As análises presentes em cada um dos trabalhos realizados visam avaliar a proposta desta pesquisa, verificando se os objetivos de cada trabalho foram atingidos ou não.

3.1 Descrição das Aulas e Análise das respostas dos alunos

É importante ressaltar que as descrições dos trabalhos e aulas realizados com a turma 105 serão realizadas em primeira pessoa do singular. Este método, assim como consta na seção 2.5.1, torna mais acessível para o leitor entender o que se passou em sala de aula.

3.1.1 Descrição da Primeira Aula

Primeiramente os meus períodos na escola foram divididos em dois períodos na terça-feira (segundo e terceiro período da tarde) e dois períodos na quinta-feira (os dois últimos períodos da tarde). Nas terças-feiras, a escola solicitava que os alunos fossem liberados cinco minutos mais cedo para o intervalo, e nas quintas-feiras, apesar das aulas pela tarde acabarem às 18h30min, era solicitado que os liberassem às 18h15min, uma vez que as turmas noturnas das escolas entravam em sala às 18h30min. É importante realizar estas observações, pois esses poucos minutos acarretam na perda de tempo para a realização de um plano de aula, o que compromete a conclusão da prática.

De um modo geral, posso dizer que gostei muito de atuar como professora nessa turma. Fui muito bem recebida por todos em minha primeira aula, na qual os alunos me respeitaram e se esforçavam para criar um agradável ambiente de estudo. Nesta aula foi realizada uma pesquisa para saber quantos alunos tinham facilidade em Matemática, dos consultados (29 alunos): 18 responderam que tinham facilidade e 11 responderam que não tinham. Após esta consulta foi iniciado o estudo do conteúdo de funções.

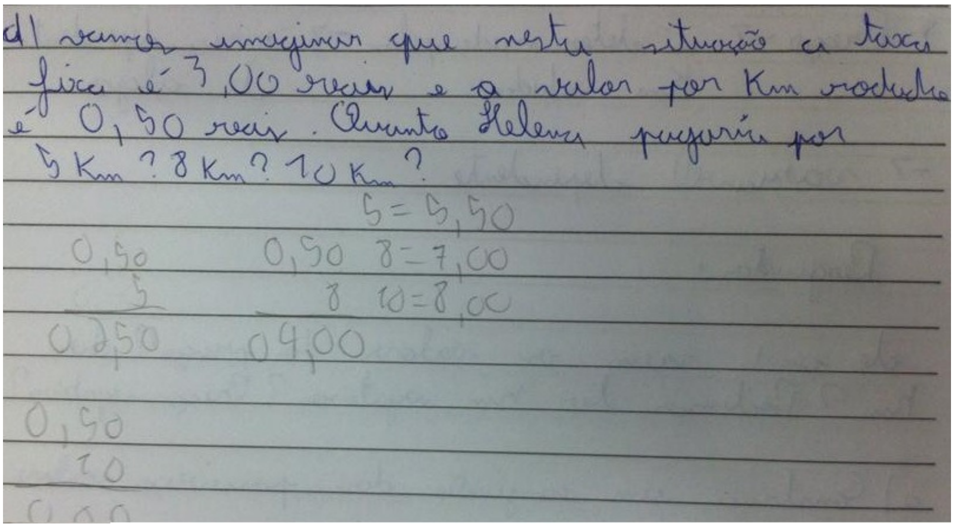
Iniciei o conteúdo escrevendo no quadro a corrida dos táxis e após 10 minutos de espera para que todos copiassem a questão em seu caderno, perguntei aos alunos qual situação o texto estava descrevendo (para que eles pudessem ler e interpretar o que estava sendo abordado – primeiro passo de Polya (1995)). Alguns minutos se passaram e nenhum aluno respondeu. Todos demonstraram espanto e dúvida. O que mostra que os alunos: ou não se sentem à vontade em ler e interpretar questões de Matemática, pois como podemos perceber, o tópico abordado é uma situação que descreve a corrida de duas empresas de táxi e o valor (subentendido) de cada uma delas; ou não foram "tocados" (POLYA, 1995) pelo problema, visto que, segundo o autor, para que o problema seja considerado, de fato, um problema pelo aluno, o mesmo "deve desejar resolvê-lo" (POLYA, 1995, p. 5), caso contrário, o problema proposto não trará para ele todo o seu potencial, não acrescentando em sua maturidade intelectual. Após um longo tempo esperando, um aluno, que irei nomear por Aluno 17, respondeu o que havia entendido (estava correto) e, pela expressão dos outros, ninguém havia compreendido sua explicação.

Segundo Polya (1995), o primeiro passo para resolver um problema é entendê-lo (sendo este é um dos requisitos fundamentais para a resolução de problemas). Como os alunos não estavam acostumados com esse tipo de situação, resolvi ajudá-los e ler em voz alta o tópico e explicar o enunciado. Segui o plano escrevendo as perguntas no quadro. Após esperar eles copiarem para o caderno, perguntei em voz alta: "Depois que o cliente disser os quilômetros que serão rodados, como é calculado o preço?" Somente o aluno, que vou nomear por Aluno 1, soube responder, e o mesmo nunca havia andado de táxi, o que mostra que mesmo este assunto não sendo de sua realidade, bastou ele interpretar o enunciado do problema para responder o que foi solicitado. Perguntei se todos haviam entendido a resposta do mesmo, porém praticamente a turma toda negou com a cabeça. Visto isso, expliquei, mostrando no texto, como modelar o que estava exposto ali.

No momento que li em voz alta "Vamos imaginar que nesta situação a taxa fixa é 3 reais e a taxa por quilômetro rodado é 50 centavos. Quanto Helena pagaria por 5 km? E 8 km? E 10 km?" e solicitado que os alunos a fizesse, quase todos que me mostraram seus cadernos se confundiram entre primeiro somar os R$ 3,00 com os R$ 0,50 e depois multiplicar pelos quilômetros, porém mostraram ter entendido a modelagem do problema, substituindo as variáveis (que ainda não sabiam que eram) nos lugares corretos da expressão (que ainda não estava no formato de uma). Isto nos mostra que os alunos, após passarem das etapas de Polya (1995) sobre entender o problema e entender a estratégia utilizada pelo Aluno 1, conseguiram executá-la sem maiores esforços, apenas encontrando dificuldade na álgebra da expressão.

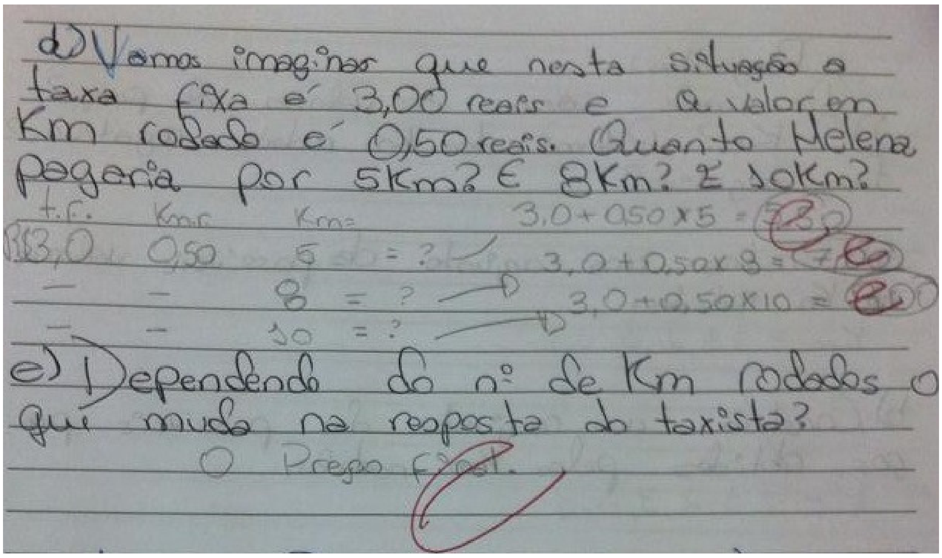
Dentre sete alunos que me mostraram e perguntaram se sua conta estava correta, apenas dois não cometeram esse erro, o aluno que vou chamar de Aluno 1 e o aluno que vou chamar de Aluno 2:

Figura 16: Resposta do Aluno 1



Fonte: Acervo Pessoal

Figura 17: Resposta do Aluno 2



Fonte: Acervo Pessoal

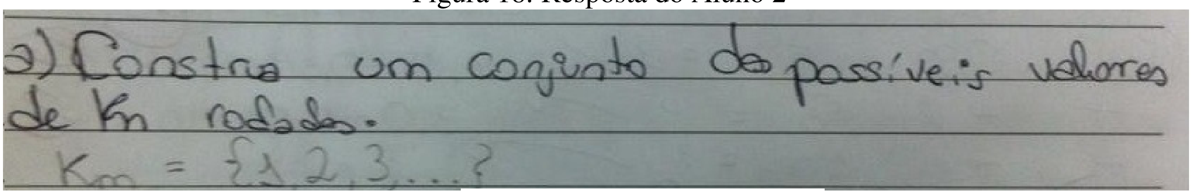
Observação: Os sinais de "correto" ao lado das questões é do próprio aluno.

E então corrigi no quadro os problemas propostos e todos os alunos que estavam prestando atenção na aula pareceram entender o que estava acontecendo, o que nos leva a acreditar que obteriam um bom desempenho no exercício que seria proposto ao término do plano. Continuei a aula com as explicações de variáveis dependentes e independentes.

Os alunos tiveram muitas dificuldades em entender qual variável era dependente de qual neste problema. Então eu respondia aos alunos para que parassem de pensar no problema do modo "matemático", mas no modo "real": O que a situação relata? O que queremos saber? O que precisamos para saber para resolver o que foi pedido? Essas perguntas, segundo Polya (1995), são fundamentais para um bom desempenho do raciocínio dos alunos. Com estas perguntas, o professor orienta seus alunos na construção de uma estratégia de resolução. Como esperado, a orientação contribuiu para a compreensão deles acerca da situação. Esse fato ficou evidente, principalmente, por suas expressões de entusiasmo.

Até então foi descrito a dificuldade que os alunos encontraram nos problemas propostos, mas nada se compara a que tiveram para compreender a diferença entre um conjunto com chaves e um conjunto na forma de intervalo, mesmo este conteúdo já tendo sido ensinado. Visto isso, tive que explicar o conteúdo de conjuntos, dando exemplos destas duas maneiras de abordá-lo, e fazendo sua relação com a reta real. O que me levou a ocupar mais dois períodos além dos previstos. Ao retornar ao problema, isto é, quando chegamos à parte do plano em que eles tinham que criar o conjunto para satisfazer as condições dos problemas, todos os alunos que me mostraram seus cadernos me apresentaram a resposta como a do Aluno 2:

Figura 18: Resposta do Aluno 2



Fonte: Acervo Pessoal

Mas quando os questionei sobre o fato de se eu poderia ter 5,5 km, 6,66667 km como quilômetros rodados, todos responderam que sim, mas que não sabiam ao certo criar um conjunto que abrangesse todos estes números. Cabe salientar que para um modelo real de modelagem de corridas de táxis, o conjunto criado pelo aluno estaria correto, porém, segundo o modelo matemático ideal, não. Por isso, expliquei novamente a eles como escrever em forma de intervalo e todos pareceram compreender como determinar o conjunto. E assim terminamos a primeira aula de dois períodos.

A segunda aula (na quinta-feira) aconteceu na véspera da Sexta-feira Santa (Páscoa), o que atrapalhou meus planos, visto que metade da turma não compareceu a aula e tive que liberá-los às 18h. Portanto, não consegui avançar no conteúdo.

O relato que tenho a fazer deste período foi que os alunos encontraram muita dificuldade em entender como generalizar os exemplos realizados. O que me levou a explicar durante todo o período que as variáveis x e y serviam para "ocupar" o lugar dos números e, tornar os exemplos realizados em uma expressão que calcule qualquer preço da corrida de táxi.

Após realizar (já na outra semana) as mesmas explicações, foi solicitado o trabalho mencionado no plano de aula. Segue abaixo a análise deste trabalho.

3.1.2 Análise do Primeiro Trabalho

Tabela 4: Registros de Desempenho

Afirmações	**Nº de alunos**	**Afirmações**	**Nº de alunos**
1. Identificaram as variáveis do problema	16	7. Criaram os conjuntos I e D	7
2. Identificaram as variáveis com a ajuda da professora	8	8. Explicaram os conjuntos I e D	9
3. Construíram a expressão	19	9. Explicaram parcialmente os conjuntos I e D	9
4. Fizeram exemplos corretos, mas não chegaram na expressão	4	10. Não explicou os conjuntos I e D	6
5. Não criaram os conjuntos Imagem e Domínio - (I e D)	4	11. Copiou do colega	3
6. Criaram parcialmente os conjuntos I e D	13	12. Total de alunos que realizaram o trabalho	27

Fonte: Acervo Pessoal

A tabela acima foi realizada com o intuito de ajudar na análise de cada tópico proposto no objetivo do plano de aula para este trabalho.

Dos itens 1 e 2 temos que $\frac{16}{27}$ ou $59{,}26\%$ dos alunos da turma souberam identificar as variáveis dependente e independente do exercício, vencendo as dificuldades encontradas no primeiro problema proposto. Concluímos atingido o primeiro objetivo do plano de aula, que era ensinar os alunos a: a) identificar e classificar as variáveis dependentes e independentes, o que significam e sua importância.

Dos itens 3 e 4, segue que $\frac{19}{27}$ ou 70,37% da turma soube construir a expressão que modela o problema, vencendo as dificuldades encontradas no primeiro problema proposto, no qual apenas um aluno soube modelar a situação-problema. Podemos considerar atingidos os dois últimos objetivos deste plano de aula, que eram ensinar os alunos a: c) interpretar uma situação-problema, recolhendo os dados que serão necessários para sua resolução; d) modelar situações-problema, construir expressões.

Dos itens 5, 6 e 7 temos que $\frac{4}{27}$ ou $14{,}81\%$ da turma não soube criar os conjuntos Domínio e Imagem, pois ainda não haviam compreendido a ideia de conjuntos; $\frac{13}{27}$ ou 48,15% da turma soube criar parcialmente os conjuntos, isto é, soube construir apenas um dos dois ou errou os números dos extremos do conjunto; $\frac{7}{27}$ ou $25{,}93\%$ soube criar os conjuntos, não cometendo erros, vencendo as dificuldades encontradas no primeiro problema proposto, no qual praticamente toda a turma não compreendeu a ideia de conjunto. Então, $74{,}08\%$ da turma soube criar, no mínimo, um dos conjuntos, o que abrange parte do objetivo dos procedimentos metodológicos do primeiro trabalho: ensinar os alunos a entender o que é domínio e imagem da situação-problema, como criar tais conjuntos de modo que satisfaçam todos os possíveis valores para o contexto imposto.

Dos itens 8, 9 e 10 concluímos que $\frac{9}{27}$ ou $33{,}33\%$ da turma soube explicar como chegaram aos conjuntos, mostrando que entenderam o conteúdo e a importância destes números para a situação-problema; $\frac{9}{27}$ ou $33{,}33\%$ da turma soube explicar parcialmente como chegaram aos conjuntos, em particular, não souberam explicar como chegaram aos números nos quais os conjuntos se iniciavam; $\frac{6}{27}$ ou $22{,}22\%$ da turma não soube explicar como chegou aos conjuntos. Como $66{,}66\%$ da turma entendeu a situação e explicaram, no mínimo, parte dos conjuntos, consideramos abrangido o resto do objetivo dos procedimentos metodológicos do primeiro trabalho: entender o que é Domínio e Imagem da função da situação-problema, para que servem, como criar tais conjuntos de modo que satisfaçam todos os possíveis valores para o contexto imposto.

Para concluir a análise do problema e exercício sugeridos, segundo os passos descritos por Polya (1995), averiguamos que para o primeiro tópico, no qual os alunos devem entender o problema: todos eles compreenderam o problema (seja no momento da explicação do problema ou seja no momento da resolução do exercício); 16 encontraram as incógnitas, isto é, variáveis dependente e independente (podemos observar este fato no exercício, no qual foi solicitado a identificação das variáveis, visto que no problema não havia ficado claro qual era dependente e qual independente); todos conseguiram separar os dados de forma precisa (tanto no problema quanto no exercício proposto); vinte alunos introduziram uma notação adequada. No tópico dois, que é o momento em que o aluno constrói uma estratégia de resolução: quatro utilizaram elementos auxiliares para a resolução do exercício, isto é, na construção de tabela de valores (assim como era proposto fazer no problema), com exemplos para diferentes valores de x; percebemos que praticamente todos encontraram conexões entre os dados e as incógnitas para conseguir construir a expressão (fato que não haviam realizado no problema). No tópico três, no qual os alunos devem executar as estratégias construídas no tópico dois: vinte e quatro alunos conseguiram visualizar que seu raciocínio estava correto, tanto no problema quanto no exercício. Nenhum aluno revisou sua estratégia, tópico quatro do autor.

Podemos notar que, por mais que não sejam exatamente todos os passos descritos por Polya, os alunos os percorreram e consequentemente obtiveram um bom desempenho no trabalho, pois segundo Aliardi:

> Haverá situações de alunos que não precisarão das quatro etapas, porque poderão ter a compreensão do problema e chegar a solução fina sem precisar dessa sistematização. Em outras palavras, o sucesso não está intimamente ligado na realização das quatro etapas, pois é possível chegar ao resultado esperado com a exclusão de etapas. (ALIARDI, 2014, p. 39).

3.1.3 Descrição e Análise do Segundo Trabalho

Descrição das Aulas

Em um primeiro momento os grupos tiveram 35 minutos para realizar o trabalho. Havia dez grupos em sala de aula, compostos por três ou quatro alunos, assim como previsto no plano de aula.

Das nove questões propostas no trabalho, seis grupos conseguiram realizar a questão 1, três grupos chegaram a realizar contas na questão 2 e um grupo conseguiu realizar contas até a questão 4.

Todos acertaram a questão 1 e erraram o resto.

Ao ler a situação-problema, vários grupos não entendiam o que estava acontecendo, falhando já no primeiro passo de Polya (1995), fazendo com que eles não conseguissem seguir adiante em sua resolução. Surgiram perguntas como:

(I) "A formiga está andando no sentido horário ou anti-horário?"

(II) "A formiga está andando de A para D e depois C?"

(III) "A formiga sai de F?"

(IV) "A formiga sai de que ponto?"

Podemos, a partir destas perguntas, pensar o porquê de os alunos as fazerem, ou seja: será que os alunos leram o enunciado? Será que os alunos pararam para refletir? Será que encontramos nos alunos desta turma um grave problema de interpretação e atenção (visto que presenciamos o mesmo fato no primeiro trabalho)? Será que os alunos queriam resolver o trabalho (um dos requisitos fundamentais descritos por Polya (1995))?

Estas perguntas surgiram visto que podemos observar no enunciado do problema as respostas para as perguntas que eles estavam realizando:

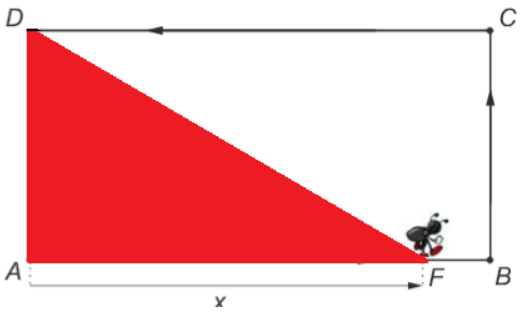
Resposta para as perguntas (I) e (II) no enunciado: "(...) Ela parte do ponto A, anda 20 centímetros até chegar em B, depois anda mais 10 centímetros até chegar em C e finaliza seu trajeto em D(...)".

Resposta para perguntas (III) e (IV): "(...) Ela parte do ponto A (...)"

Após todas as dúvidas com a questão 1, eles também tiveram dificuldade na questão 2. Não só tiveram dificuldade como nenhum grupo conseguiu respondê-la de modo correto, tendo dificuldades também com a figura da questão, visto que achavam que F e x estavam fixos.

Parte dos grupos não sabiam qual o triângulo que estava sendo solicitado na questão e a outra parte dos grupos (a maioria deles) queriam calcular a área do triângulo da imagem abaixo:

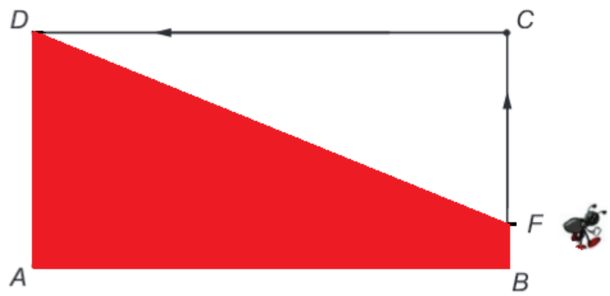
Figura 19: Situação apresentada em aula



Fonte: Acervo Pessoal

A orientação para estas dúvidas se tornou algo relativamente complicado, visto que eu não estava esperando este tipo de dúvida. No primeiro grupo que apresentou tal dificuldade, levei algum tempo para sugerir questionamentos que os remetessem a uma possível resposta, visto que, segundo Polya (1995), o professor não deve apenar dizer a resposta final, mas conduzir o aluno ao raciocínio correto: “O professor deve auxiliar, nem de mais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho” (POLYA, 1995, p. 4). Então, ao longo dos meus questionamentos sobre essa dúvida para grupos que requisitavam minha ajuda, os alunos concluíram onde estava o ponto F e que o x era uma variável. Porém, surgiu o problema de que alguns grupos queriam calcular a área da imagem hachurada abaixo:

Figura 20: Situação apresentada em aula



Fonte: Acervo Pessoal

Quando os grupos superaram a parte de identificar o triângulo, de todos eles (sem exceção) nenhum soube calcular a sua área ou/e achavam que um dos lados triângulo media $22\ cm$, medida esta que, conforme o enunciado, na realidade era o valor da distância de A até F ao longo dos lados do retângulo. Eles também não sabiam qual era a altura do mesmo, nem como calculá-la, quem era a base, ou até mesmo a fórmula para calcular a área de um triângulo. Foram com essas dúvidas que terminamos nosso primeiro período de atividades.

A conclusão desta primeira etapa do trabalho foi que nenhum grupo soube identificar as variáveis do problema, sendo que este é o principal fator para o ensino de funções. A maior parte dos alunos fizeram exemplos corretos na pergunta 2: desenharam em cima da imagem do trabalho (como será mostrado adiante) o triângulo no qual era para ser calculado a área, porém nenhum conseguiu efetuar o cálculo. Nenhum grupo: conseguiu entender o problema por completo; encontrou as incógnitas do problema; separou os dados; entendeu as condições; ou introduziu notação adequada; passou do primeiro passo de Polya (1995) “*entenda o problema*” e, por consequência, não conseguiu ir adiante no trabalho, sendo estes considerados insuficientes.

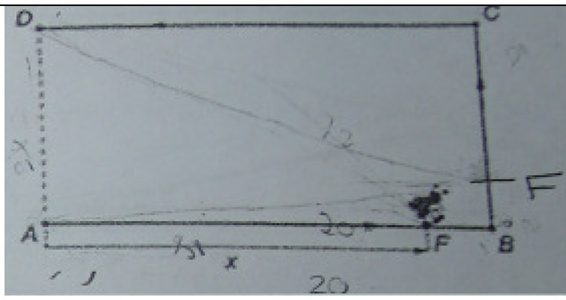
De todos os grupos orientados, sete encontraram dificuldades em conteúdos de Matemática antecedentes ao Ensino Médio. Por exemplo: realizar o cálculo da distância entre dois pontos (de acordo com as especificações do enunciado) ou calcular parte do perímetro do retângulo (sem contar um dos lados), não lembravam qual a área do triângulo, como achar a base do triângulo e principalmente sua altura, entre outras coisas.

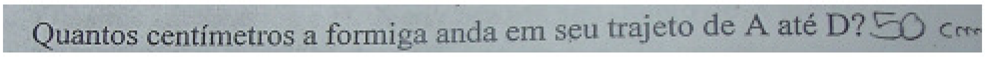
Após este período de atividades, todos os grupos tiveram mais um período no qual foi explicada a situação-problema (já que, como consta anteriormente, nenhum o havia entendido por completo) e devolvido seus trabalhos para que os mesmos continuassem esta resolução. Ao término deste segundo período de atividades, o trabalho foi corrigido, deixando mensagens e perguntas sugestivas para os grupos em cor rosa, requisito que, segundo Polya (1995), é fundamental para nortear os alunos em seus pensamentos. Após esta correção, entreguei o trabalho novamente aos grupos (com as perguntas sugestivas no trabalho) para que o finalizassem em mais dois períodos, totalizando um total de quatro períodos para a realização do trabalho.

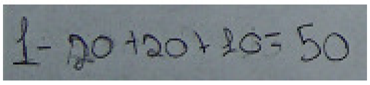
Segue abaixo as últimas análises dos trabalhos dos alunos, que serão fornecidas por imagens que mostram a evolução dos grupos em cada uma das situações anteriormente citadas e, logo abaixo de cada imagem de cada grupo, há um breve relato do andamento das aulas e do trabalho. É importante ressaltar que as imagens foram editadas para que ficasse a mostra apenas o necessário, ocupando o mínimo de espaço possível neste trabalho.

Tabela 5: Grupo 1

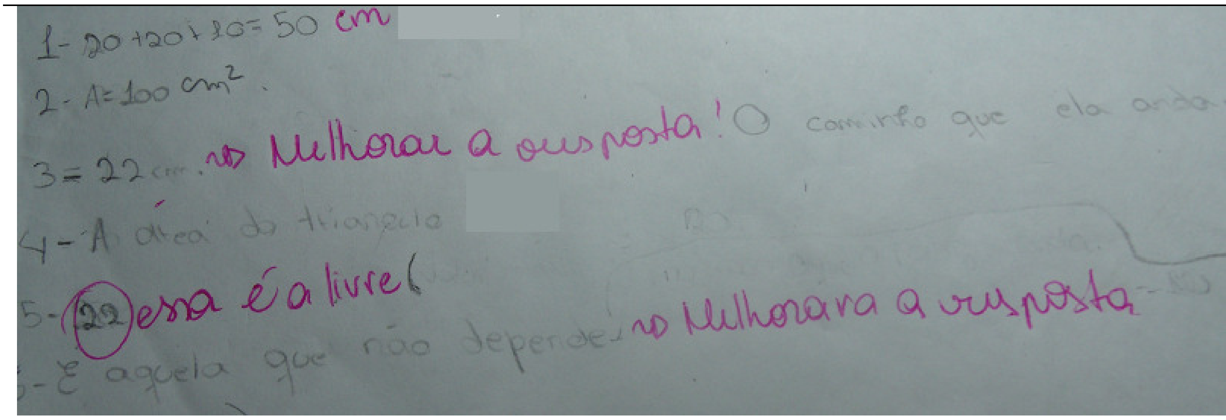
Primeira Análise



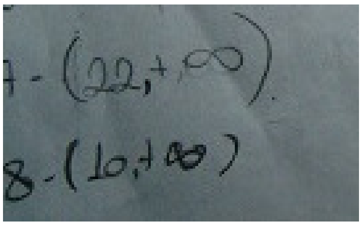




Segunda Análise – Parte 1



Segunda Análise – Parte 2

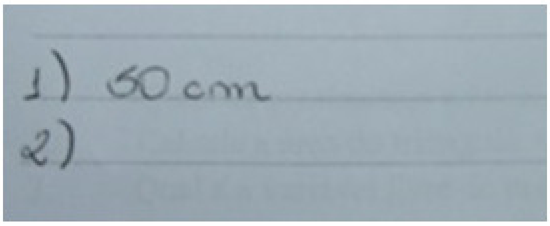


Fonte: Acervo Pessoal

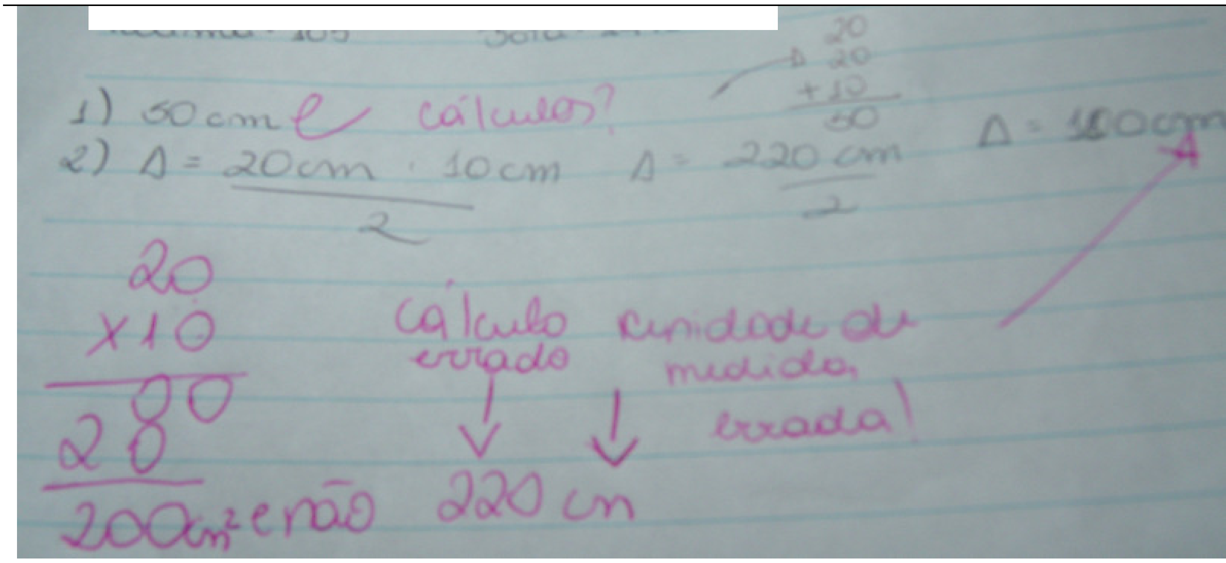
O grupo 1 era composto por três alunos. Como podemos notar nas imagens, o grupo realizou 8 de 9 questões, estando 4 destas corretas (de 1 até a 4). Não souberam responder a questão 5 de modo correto, e por isso foi deduzido que entenderam parcialmente qual era a variável independente (pois acertaram a pergunta 2), mas entenderam qual era a variável dependente. Não conseguiram criar os conjuntos Imagem e Domínio, como podemos observar das respostas das perguntas 7 e 8 na “segunda análise – parte 2”. Notamos que os alunos, após compreenderem o problema – primeiro passo de Polya (1995) – (observamos este fato na passagem da primeira análise para a segunda análise parte 1, da tabela), conseguiram avançar em sua resolução. Porém, não conseguiram, mesmo com as perguntas da professora, que ajudariam em sua estratégia de resolução, aperfeiçoar e acertar suas respostas.

Tabela 6: Grupo 2

Primeira Análise



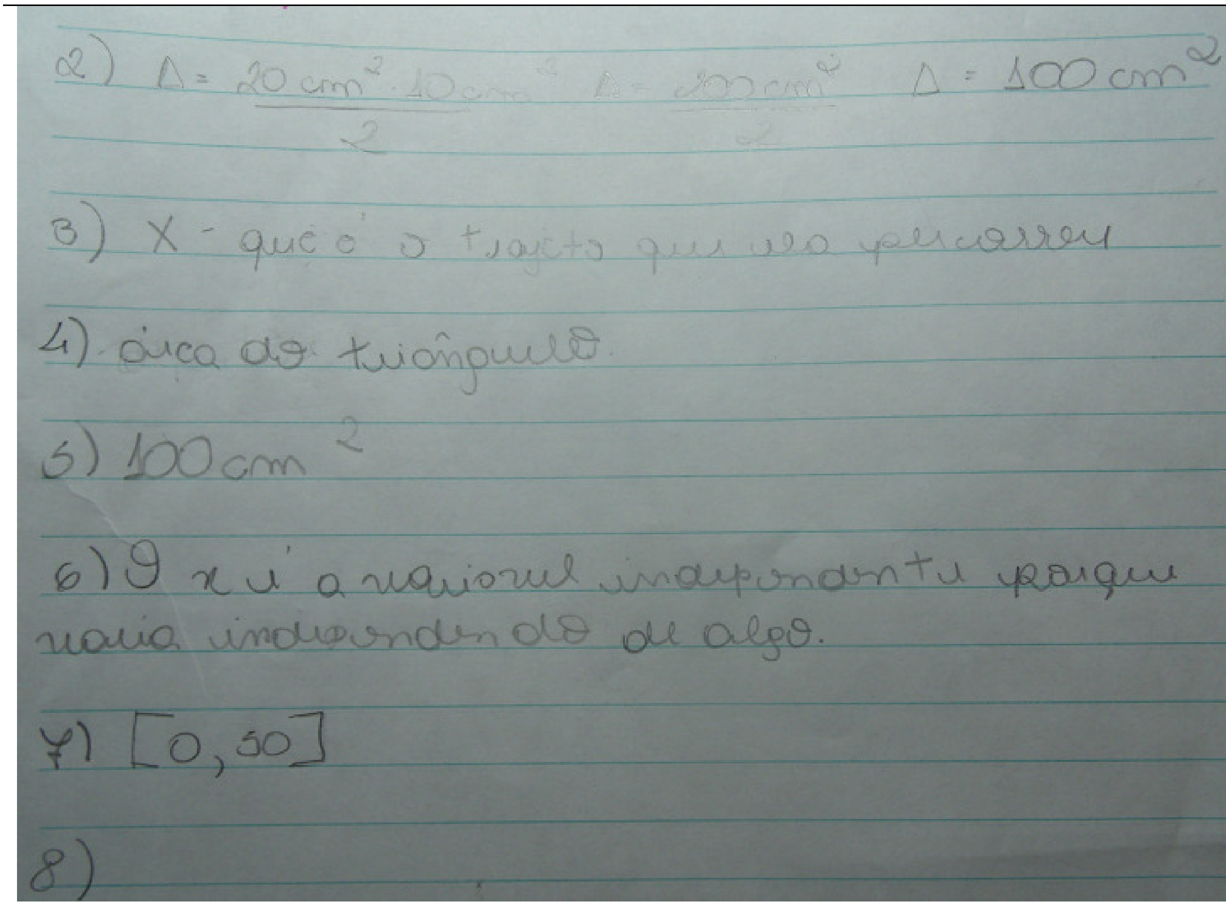
Segunda Análise – Parte 1



Fonte: Acervo Pessoal

Tabela 7: Continuação Grupo 2 - Segunda Análise

Segunda Análise – Parte 2


2) $A = \frac{20\,cm^2 \cdot 10\,cm^2}{2}$ $A = \frac{200\,cm^2}{2}$ $A = 100\,cm^2$

3) X - que é o trajeto que ele percorreu

4) área do triângulo.

5) $100\,cm^2$

6) O x é a variável independente porque varia independendo de algo.

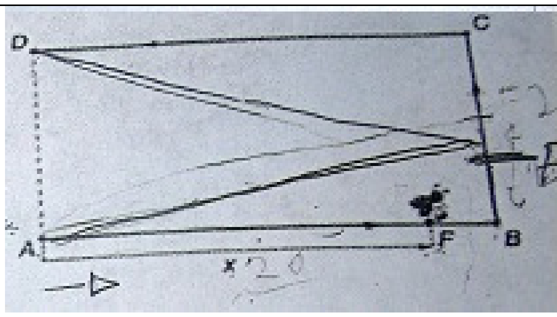
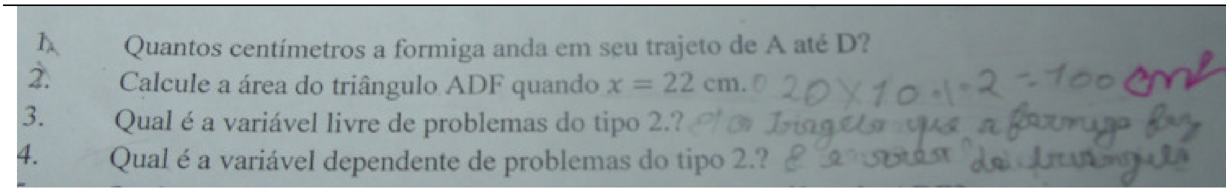
7) [0, 50]

8)

Fonte: Acervo Pessoal

O grupo 2 era composto por três alunos, que apresentaram grande desempenho desde a primeira correção do trabalho, realizando diversas perguntas à professora e chegando em conclusões excelentes. Como podemos notar nas imagens eles evoluíram sua resolução, realizando 7 questões de 9, nos quais as 7 estavam corretas. Eles entenderam quais eram as variáveis dependentes e independentes, criaram o Domínio do problema, porém não realizaram o restante do trabalho por falta de tempo. Notamos que os alunos, após compreenderem o problema e realizarem perguntas à professora, conseguiram criar e executar uma estratégia de resolução adequada, chegando próximos ao término do trabalho.

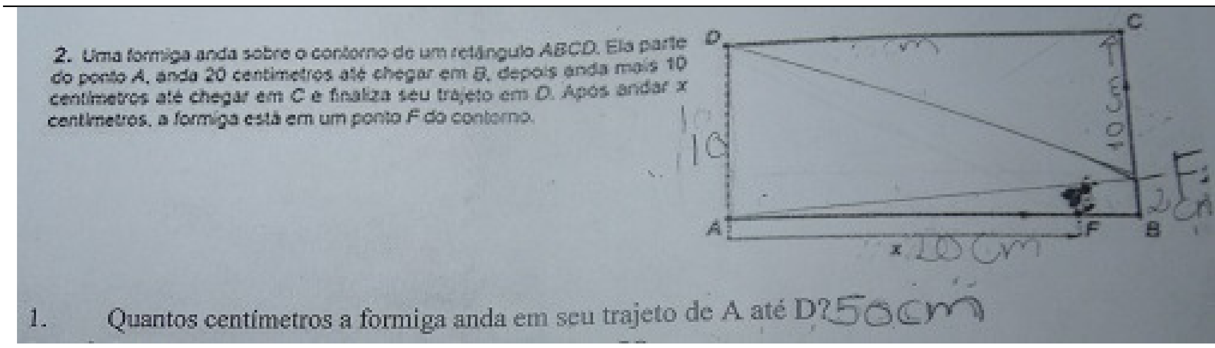
Tabela 8: Grupo 3

Primeira Análise

Segunda Análise – Parte 1
 1. Quantos centímetros a formiga anda em seu trajeto de A até D? 2. Calcule a área do triângulo ADF quando $x = 22$ cm. 20x10÷2 = 100 cm 3. Qual é a variável livre de problemas do tipo 2.? o triangulo que a formiga faz 4. Qual é a variável dependente de problemas do tipo 2.? é a area do triangulo
Segunda Análise – Parte 2
Grupo não evoluiu

Fonte: Acervo Pessoal

O grupo 3 era composto por dois alunos que apresentaram muita dificuldade em Matemática (demonstrado já no primeiro trabalho realizado) e outro aluno que faltou a maior parte das aulas. Apesar de estarem realmente tentando resolver os problemas, eles não evoluíram a resolução de seu trabalho, realizando apenas 4 questões de 9, sendo que destas, 3 estavam corretas. Não conseguiram compreender qual era a variável dependente e entenderam parcialmente qual era a variável independente. Os alunos não seguiram os passos de Polya (1995), e não conseguiram sair do primeiro tópico que era entender o problema. Devido a este fato, não conseguiram responder o restante do trabalho.

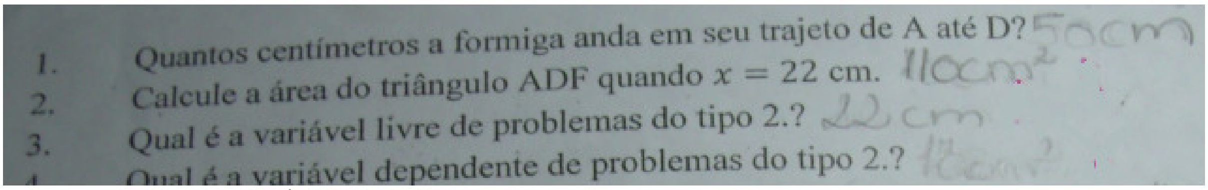
Tabela 9: Grupo 4

Primeira Análise
 2. Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo *ABCD*. Ela parte do ponto *A*, anda 20 centímetros até chegar em *B*, depois anda mais 10 centímetros até chegar em *C* e finaliza seu trajeto em *D*. Após andar *x* centímetros, a formiga está em um ponto *F* do contorno. 1. Quantos centímetros a formiga anda em seu trajeto de A até D? 50cm

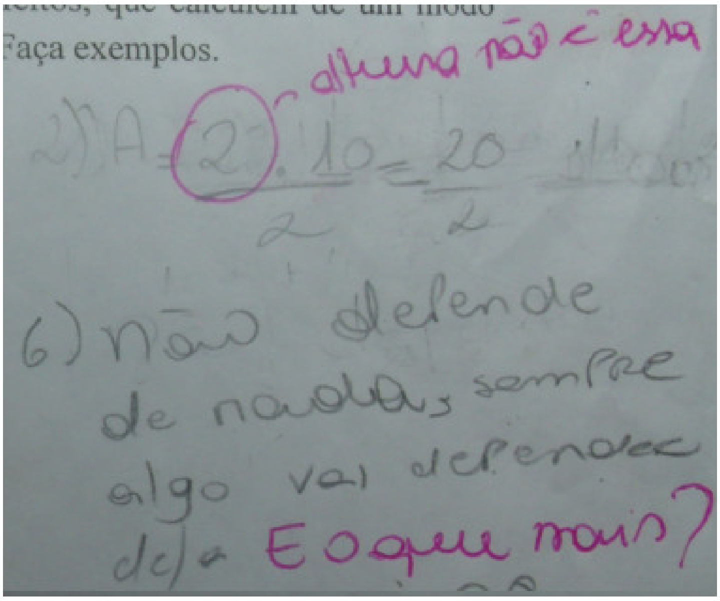
Fonte: Acervo Pessoal

Tabela 10: Continuação Grupo 4 - Segunda Análise

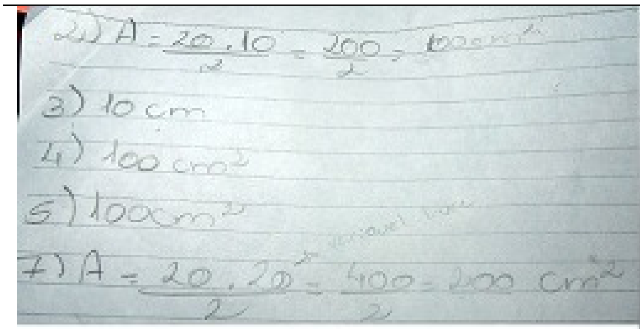
Segunda Análise – Parte 1

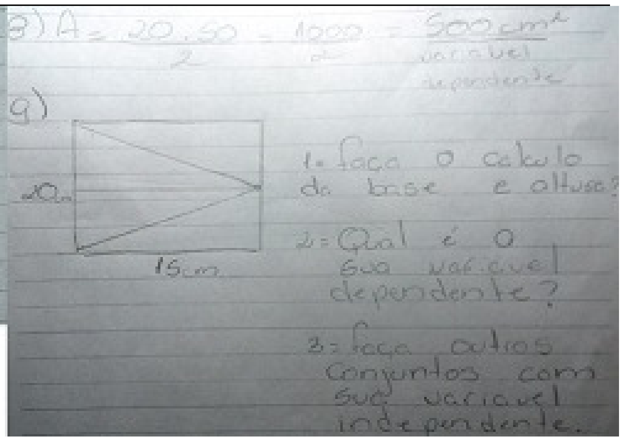

1. Quantos centímetros a formiga anda em seu trajeto de A até D? 50cm
2. Calcule a área do triângulo ADF quando $x = 22$ cm. 110cm²
3. Qual é a variável livre de problemas do tipo 2.? 22 cm

Qual é a variável dependente de problemas do tipo 2.?



Segunda Análise – Parte 2



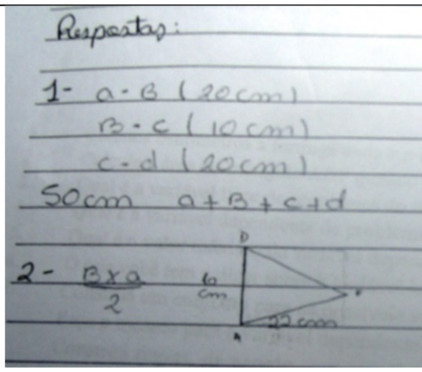


Fonte: Acervo Pessoal

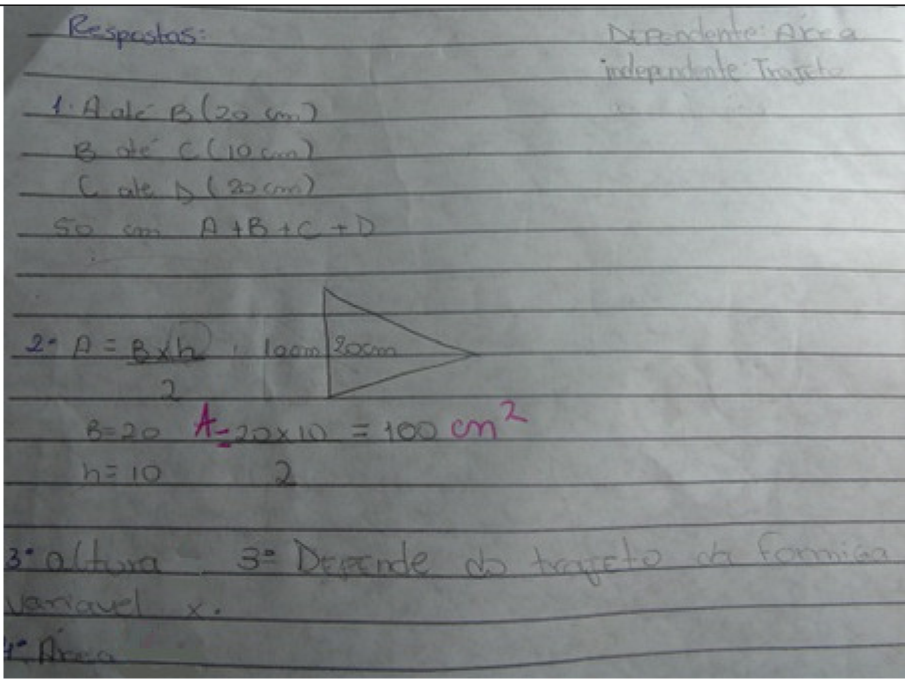
O grupo 4 era composto por três alunos. Como podemos notar nas imagens eles evoluíram a resolução de seu trabalho, realizando todas as questões, sendo 5 corretas. O grupo não conseguiu entender quais eram as variáveis independente e dependente, porém mesmo ao encontrar essa dificuldade não foi solicitado o auxílio da professora para tentar resolver suas dúvidas. Podemos concluir que eles não desejavam resolver o problema, requisito necessário para o bom andamento da resolução, segundo Polya (1995, p. 5) e Vianna (2002). Chamamos atenção a questão 9), no qual o grupo realizou perguntas na própria folha, para tentar resolver a questão, porém, não avançaram em seu raciocínio ou, como já mencionado, pediu a orientação da professora.

Tabela 11: Grupo 5

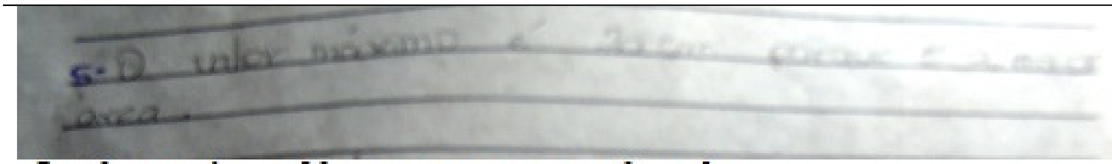
Primeira Análise



Segunda Análise – Parte 1



Segunda Análise – Parte 2



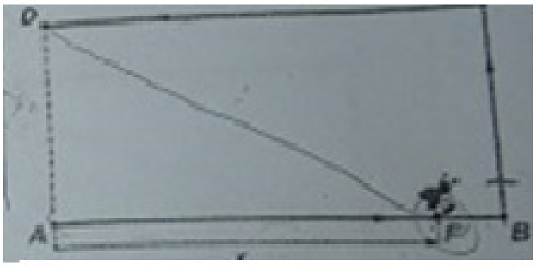
O valor máximo é 20cm porque é o que ela anda

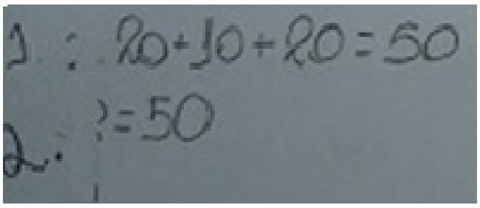
Fonte: Acervo Pessoal

O grupo 5 era composto por dois alunos. Eles evoluíram a resolução de seu trabalho somente após ter passado, parcialmente, pelo primeiro passo de Polya (1995) (entender o problema), apesar de terem respondido apenas mais duas questões ao final da análise, assim como podemos notar nas imagens acima. Realizaram 6 questões de 9, estando 5 destas corretas. Eles entenderam parcialmente quais eram as variáveis dependente e independente. É importante ressaltar que os dois componentes do grupo conversaram demasiadamente nas aulas anteriores e apresentaram imensa dificuldade na leitura e interpretação deste problema.

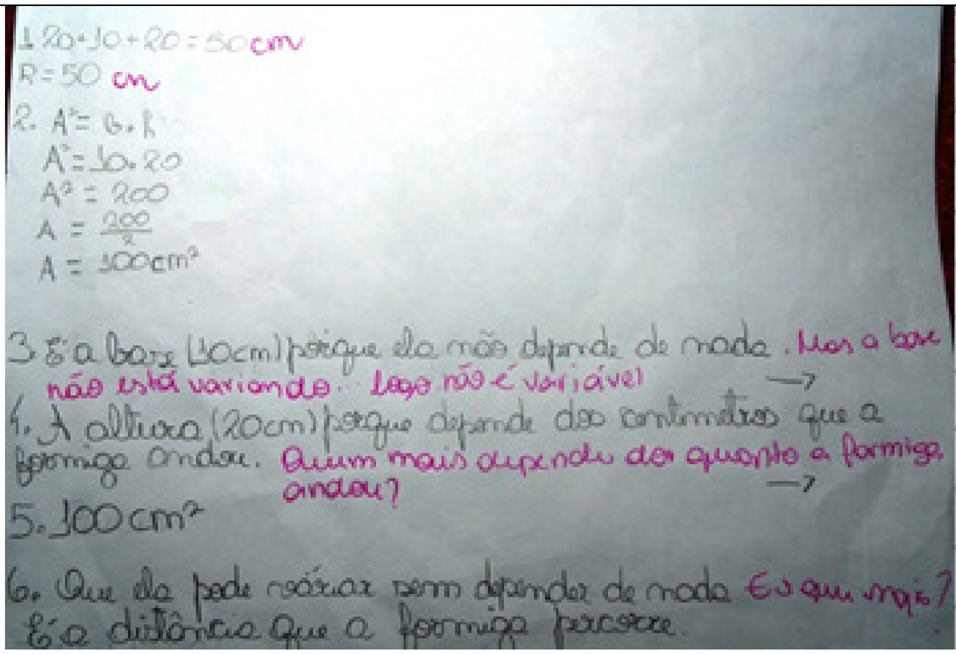
Tabela 12: Grupo 6

Primeira Análise





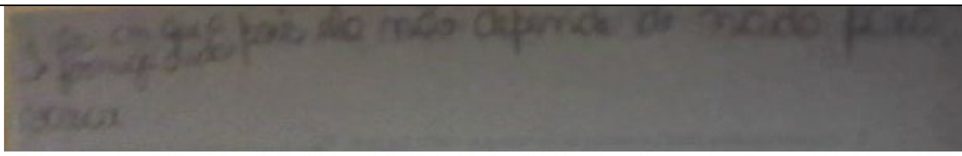
Segunda Análise – Parte 1



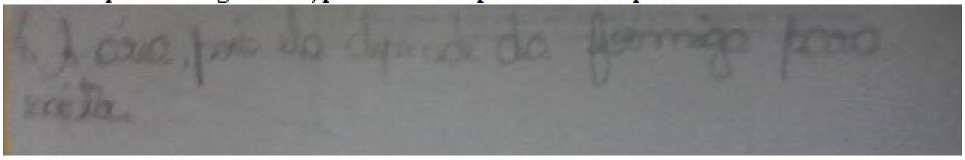
Fonte: Acervo Pessoal

Tabela 13 Continuação Grupo 6 - Segunda Análise parte 2

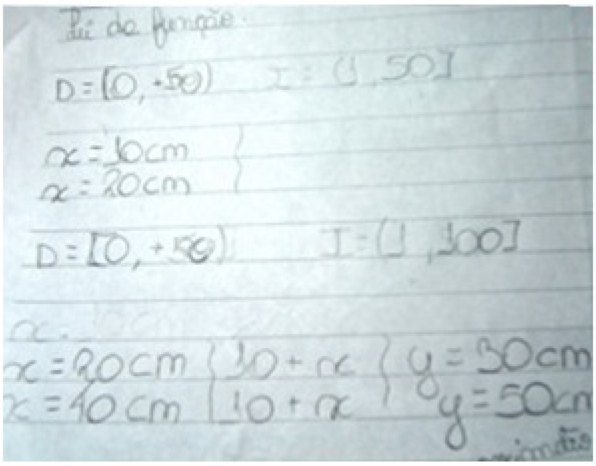
Segunda Análise – Parte 2

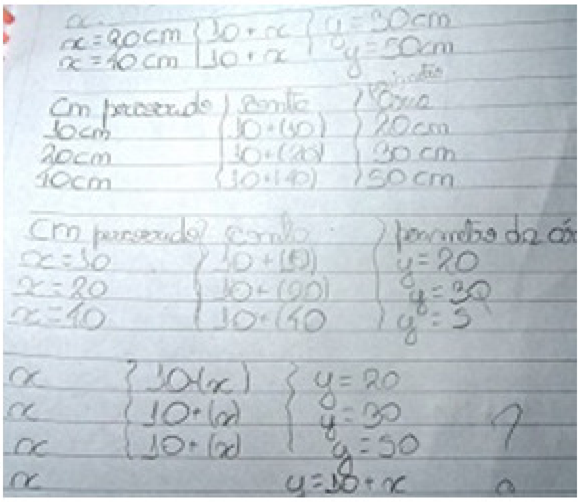


3. Os cm que a formiga andou, pois ela não depende de nada para variar



4. A área, pois ela depende da formiga para existir.



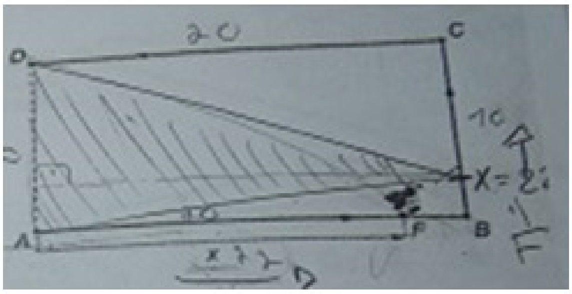


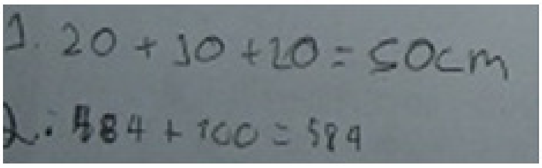
Fonte: Acervo Pessoal

O grupo 6 era comporto por três alunos, que se dedicaram ao trabalho, recorrendo a professora sempre que necessário. Conforme podemos notar nas imagens acima, eles evoluíram a resolução de seu trabalho, realizando 9 questões e acertando 8. Eles apenas não conseguiram responder a última questão, sendo que estavam tentando resolvê-la a partir de exemplos, isto é, de acordo com Polya (1995), usando elementos "auxiliares" para ajudá-los no raciocínio. Este grupo passou por todos os passos descritos por Polya (1995)

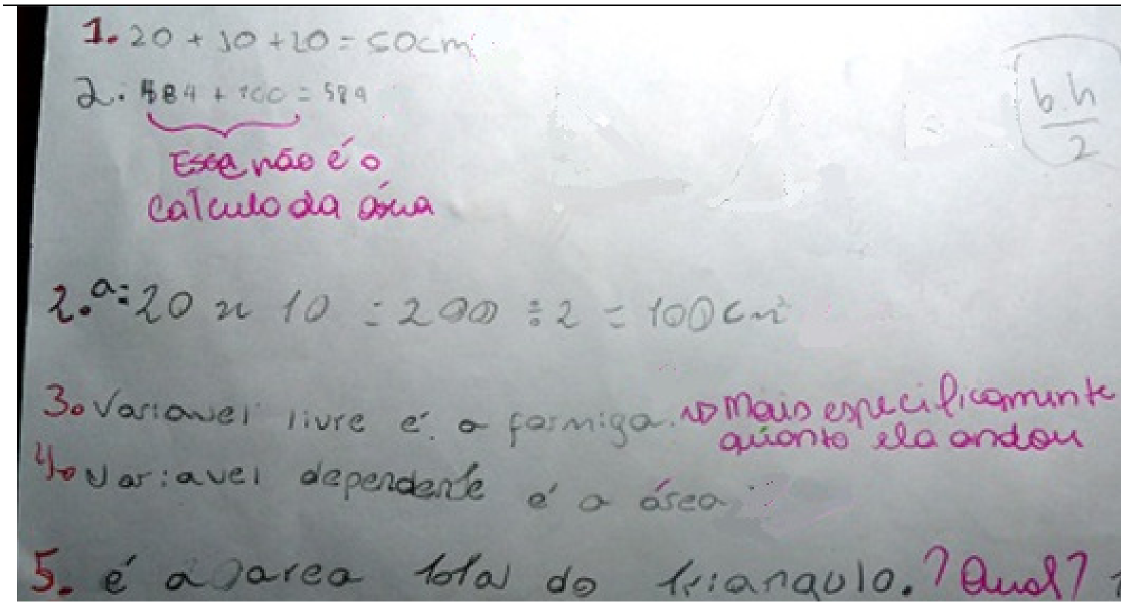
Tabela 14: Grupo 7

Primeira Análise

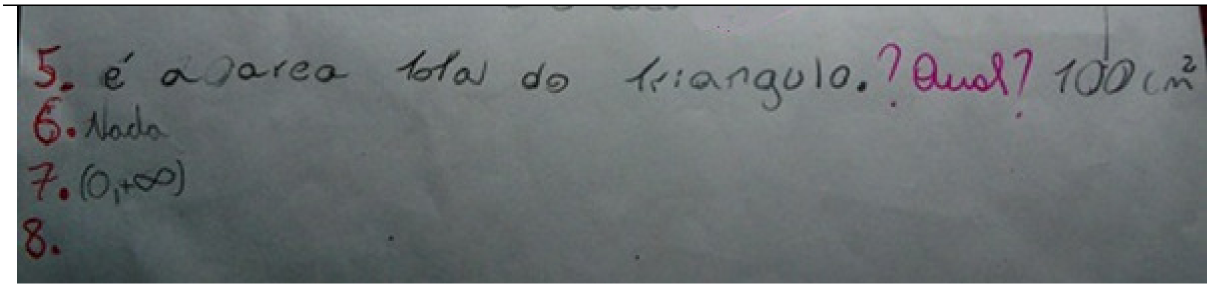




Segunda Análise – Parte 1



Segunda Análise – Parte 2

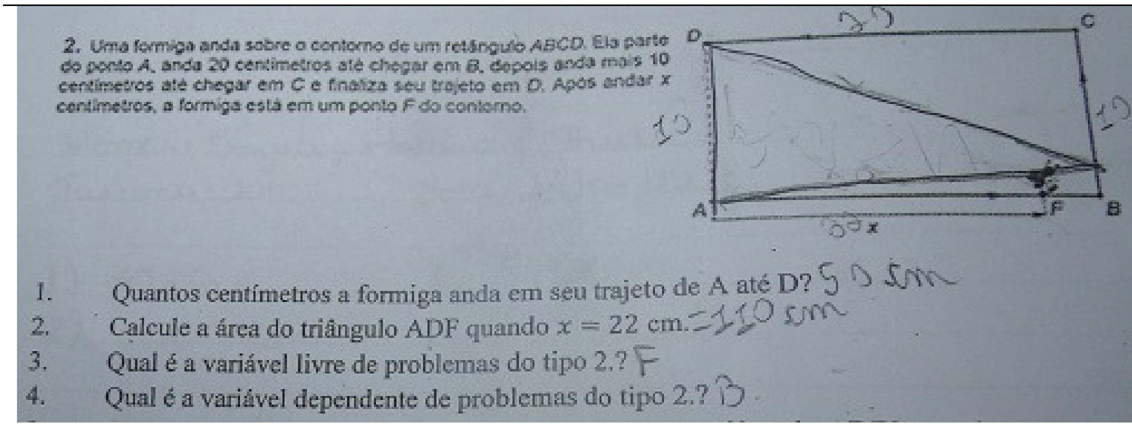


Fonte: Acervo Pessoal

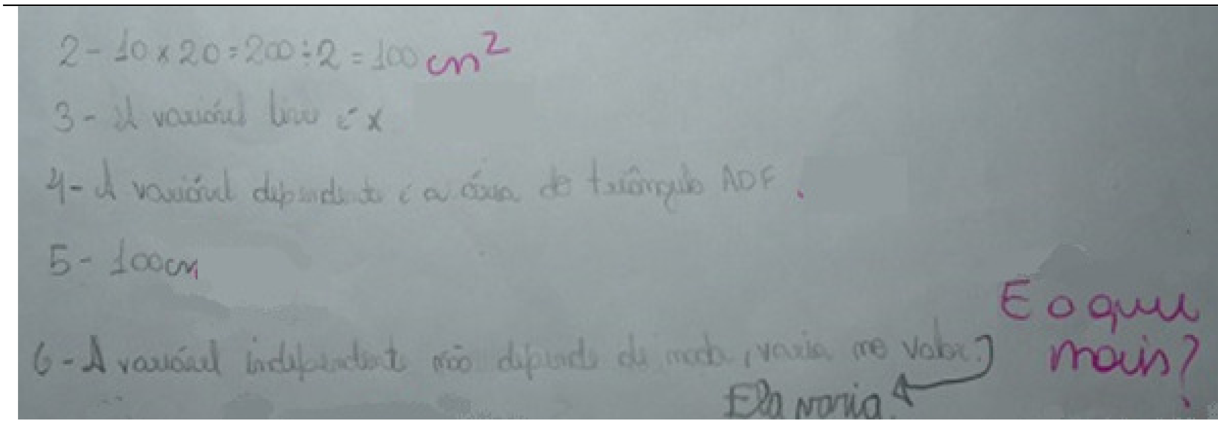
O grupo 7 era composto por três alunos. Eles evoluíram parcialmente a resolução deste trabalho e fizeram 7 questões de 9, acertando 5. Destas cinco questões podemos concluir que grupo entendeu quais eram as variáveis dependentes e independentes, porém não conseguiram construir os conjuntos Imagem e Domínio que modelavam o problema e não solicitaram a orientação da professora para guiá-los, o que mostra que eles não desejavam, ao menos na última análise (parte 2), resolver o problema proposto, requisito necessário para resolução correta dos problemas, segundo Polya (1995, p. 5) e Vianna (2002).

Tabela 15: Grupo 8

Primeira Análise



Segunda Análise – Parte 1



Segunda Análise – Parte 2

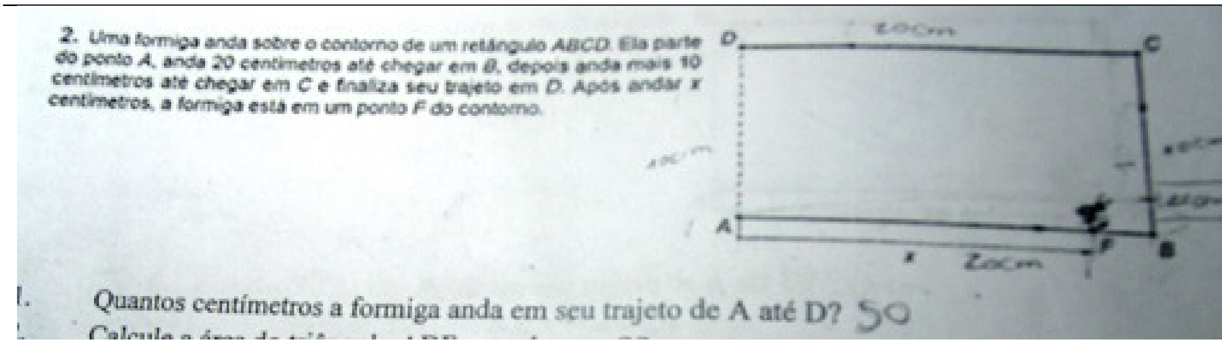
Não houve evolução

Fonte: Acervo Pessoal

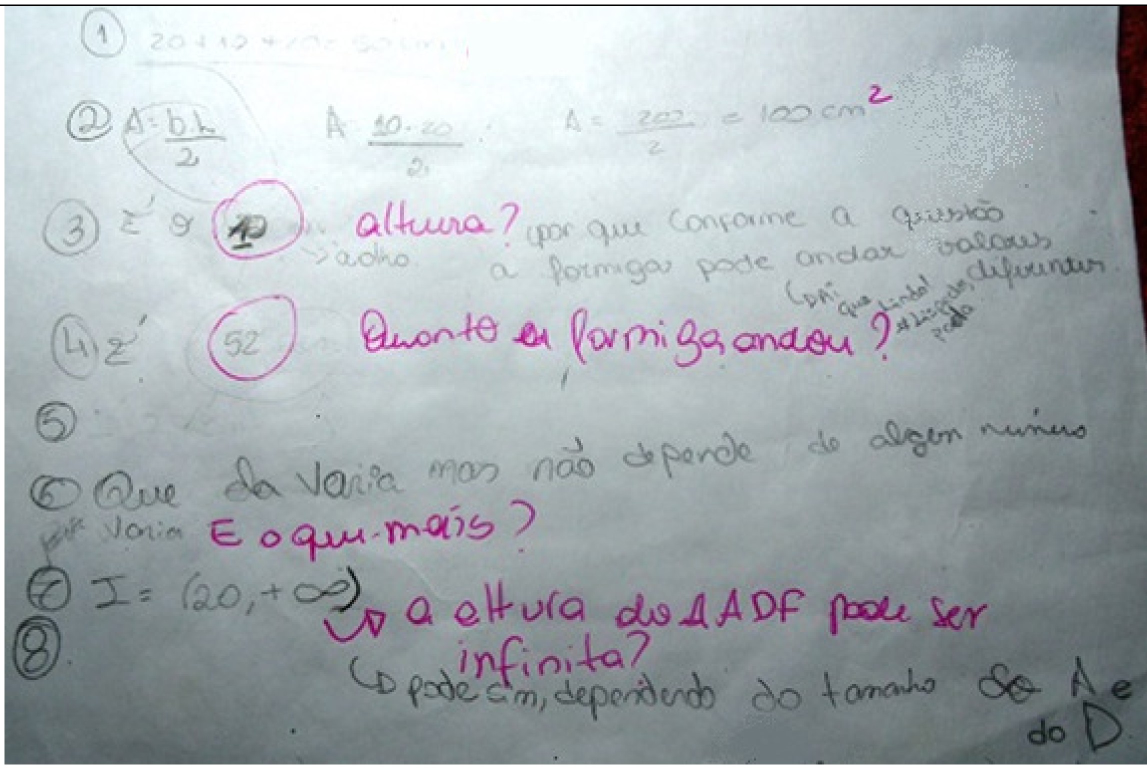
O grupo 8 era composto por quatro alunos. Como podemos notar nas imagens acima eles não evoluíram seu trabalho, realizando 6 questões de 9 e acertando 6. O grupo entendeu quais eram as variáveis dependentes e independentes, porém não conseguiram construir os conjuntos Imagem e Domínio que modelavam o problema e não solicitaram a orientação da professora para guiá-los, o que mostra que eles não desejavam, ao menos na última análise (parte 2), resolver o problema, requisito necessário para resolução correta dos problemas, segundo Polya (1995, p. 5) e Vianna (2002). Porém, pelo fato de eles terem conseguido entender o problema, conseguiram avançar em sua resolução (passagem da primeira análise para a segunda análise – parte 1).

Tabela 16: Grupo 9

Primeira Análise



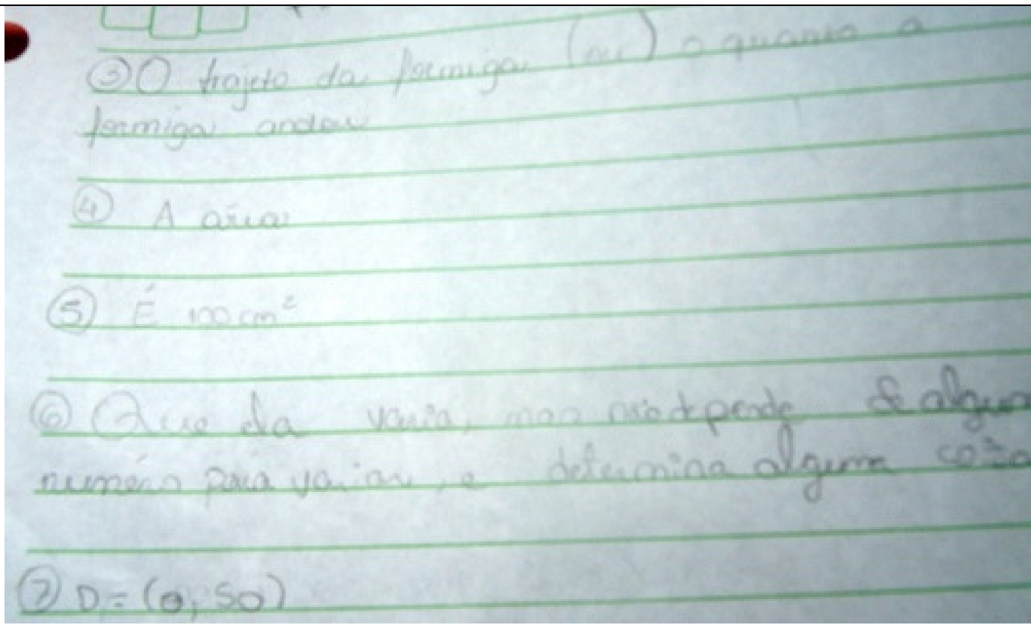
Segunda Análise – Parte 1

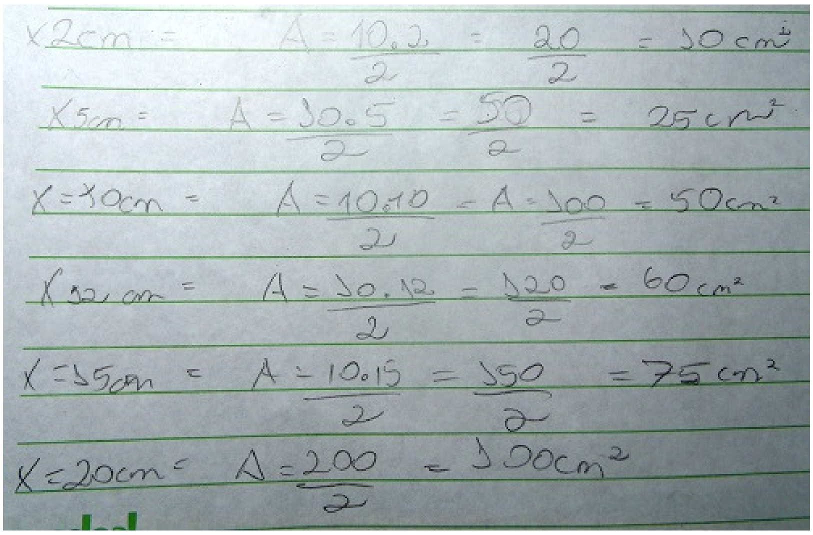


Fonte: Acervo Pessoal

Tabela 17: Continuação Grupo 9 - Segunda Análise Parte 2

Segunda Análise – Parte 2



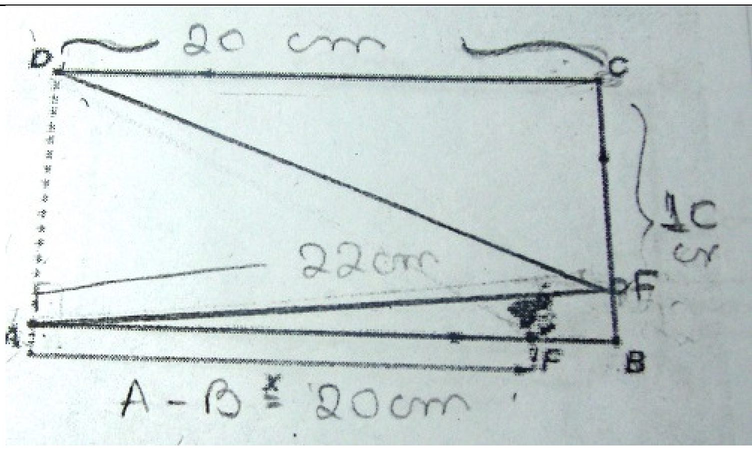


Fonte: Acervo Pessoal

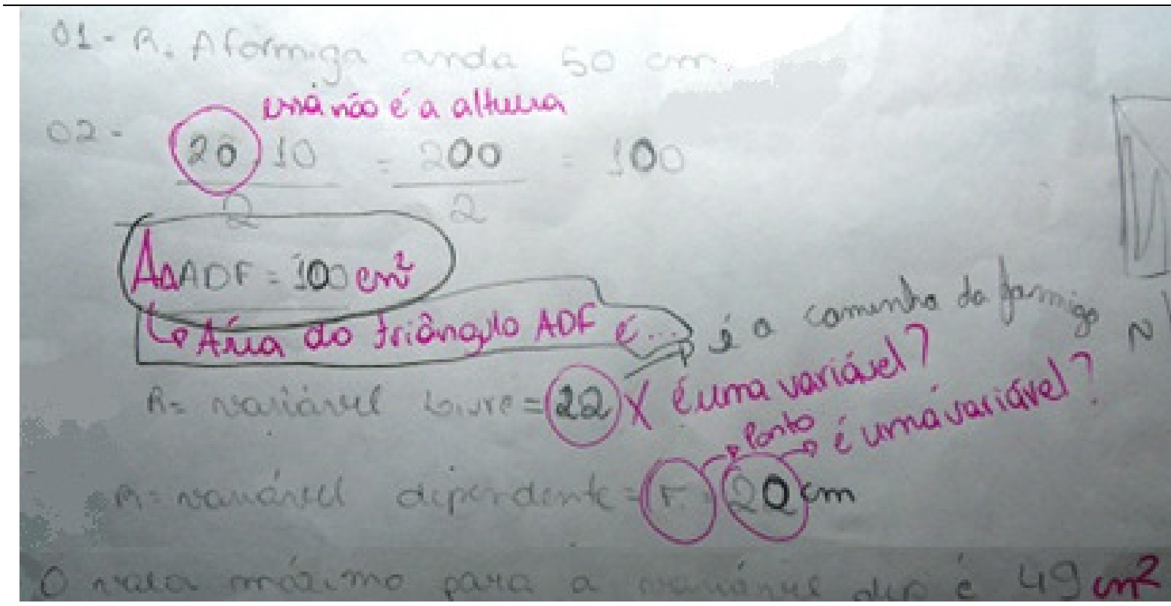
O grupo 9 era composto por três alunos, que mesmo com a dificuldade que apresentaram no primeiro trabalho, se esforçaram para realizar este e solicitaram a orientação da professora sempre que necessário, vencendo os obstáculos anteriormente encontrados. Como podemos notar nas imagens acima eles evoluíram na resolução do trabalho, realizando 9 questões e acertando 7. Destas 7 questões eles conseguiram entender quais eram as variáveis dependente e independente, conseguiram também construir o Domínio para o problema, porém não conseguiram construir a Imagem. Tentaram responder a questão 9 realizando exemplos, isto é, objetos auxiliares, na ajuda de seus raciocínios. Os alunos seguiram todos os passos de Polya (1995) e, devido à orientação constante da professora, assim como sugere Polya (1995, p. 5), evoluíram sua resolução.

Tabela 18: Grupo 10

Primeira Análise

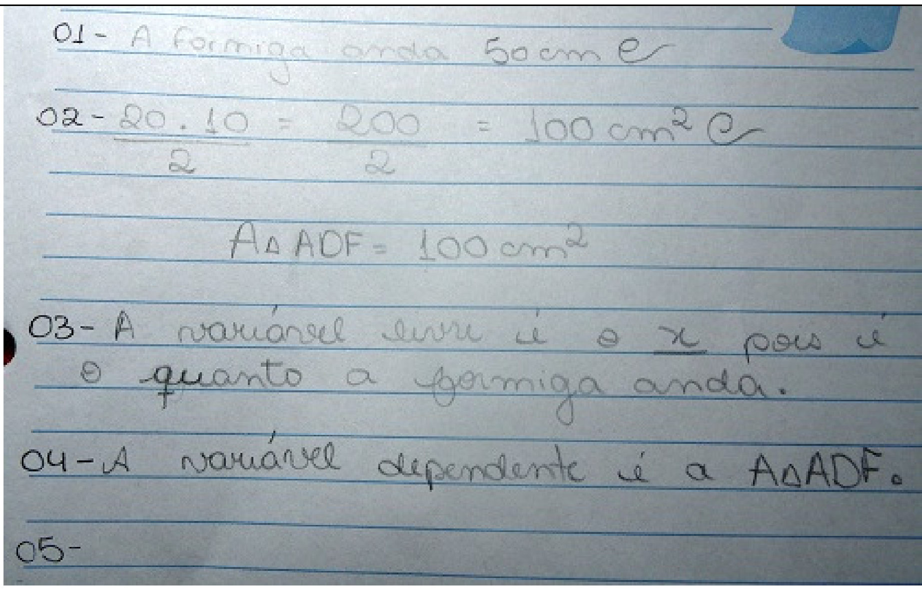


Segunda Análise – Parte 1



Fonte: Acervo Pessoal

Tabela 19: Continuação Grupo 10 - Segunda Análise Parte 2

Segunda Análise – Parte 2


01- A formiga anda 50 cm e

02- $\frac{20 \cdot 10}{2} = \frac{200}{2} = 100\ cm^2$ e

$A_{\Delta ADF} = 100\ cm^2$

03- A variável livre é o x pois é o quanto a formiga anda.

04- A variável dependente é a $A_{\Delta ADF}$.

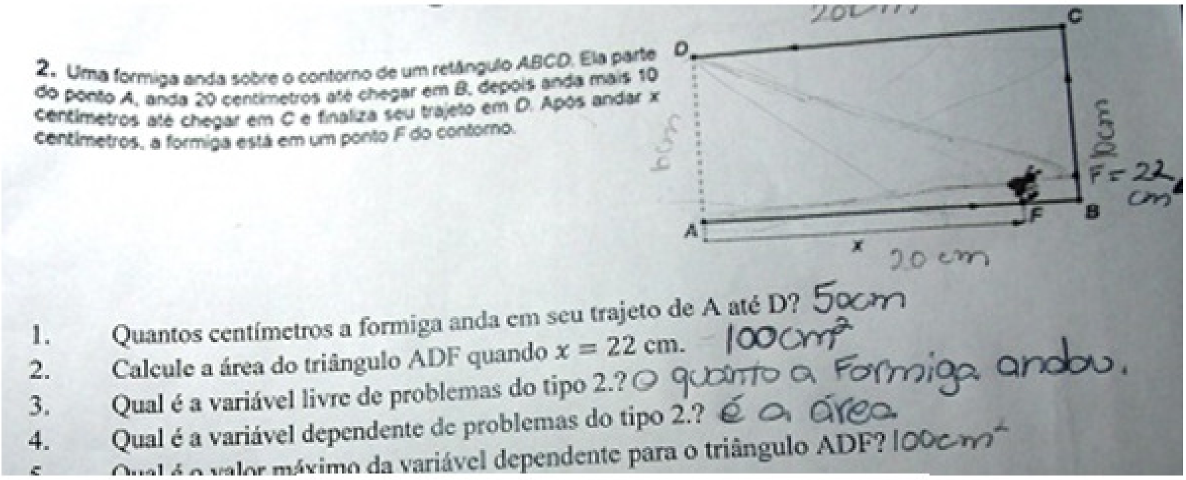
05-

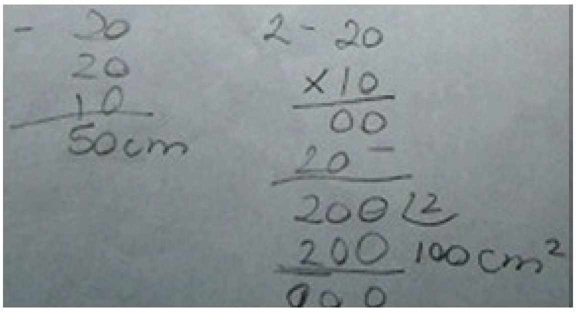
Fonte: Acervo Pessoal

O grupo 10 era composto por três alunos. Como podemos notar nas imagens acima eles evoluíram na resolução do trabalho, realizando 5 questões de 9 e acertando 4. Eles entenderam quais eram as variáveis dependente e independente, porém, mesmo tendo tempo de tentar concluir o trabalho, não se esforçaram para tal, pois o grupo requisitou a orientação da professora uma única vez, antes do fim do primeiro período de aula, para verificar se suas "novas" respostas estavam corretas. Depois de verificar isso, podemos notar que eles deixaram de lado a resolução do trabalho, ficando satisfeitos com o número de questões realizadas. Visto que ter a orientação da professora e desejar resolver o problema são requisitos fundamentais para a resolução do problema segundo Polya (1995), o grupo não obteve uma resolução de trabalho apropriada.

Tabela 20: Grupo 11

Primeira Análise





Fonte: Acervo Pessoal

O grupo 11 era composto por apenas um aluno, que faltou demasiadamente às aulas e inclusive às duas primeiras, aulas estas que foram solicitadas este trabalho para ser realizado. Em dois períodos, e sendo solicitada a orientação da professora sempre que necessário, o aluno resolveu o trabalho de modo correto até a questão 5.

Para finalizar as análises segundo os passos descritos por Polya (1995), notamos que, no tópico um: todos os grupos entenderam o problema; 9 encontraram as incógnitas, ou seja, variáveis independente e dependente; todos conseguiram separar os dados do problema de forma precisa; todos entenderam as condições propostas; 7 introduziu notação adequada para as variáveis, altura do triângulo, e/ou área do triangulo. Do tópico 2: todos fizeram conexões deste exercício com da corrida de táxi; todos introduziram elementos auxiliares para resolver o problema, seja fazendo tabelas de valores da função, seja calculando elementos no decorrer do trabalho; 9 acharam conexões entre os dados e as incógnitas, isto é, entendeu a relação entre as variáveis. No tópico três nenhum conseguir visualizar que sua estratégia estava correta e por fim nenhum grupo revisou seu raciocínio. O seguimento destes passos por parte dos grupos ocasionou na resolução correta dos exercícios, visto que quem não os seguiu não acertou a resolução.

Para concluir o tópico da análise desta atividade, gostaria de ressaltar que a dificuldade inicial dos alunos em resolver estas questões não foram dificuldades referentes ao conteúdo de funções, mas sim outros, tais como: cálculo de distâncias, como determinar a altura e os lados de um triângulo, cálculo da área de um triângulo, como formar um triângulo, interpretação de texto, fazer conexões entre o enunciado da questão e a figura, interpretar a figura matemática, fazer a passagem entre o pensamento e a escrita matemática, desejar resolver o problema.

Porém, ao conseguir ultrapassar tais dificuldades, boa parte da turma mostrou entender como encontrar a variável independente, mas quase nenhum grupo entendeu quem era a dependente. Destes, os que conseguiram chegar às questões para construir os conjuntos, quase todos conseguiram criar (com ou sem o auxílio da professora), somente os grupos que não fizeram questão de terminar o trabalho, deixaram esta questão errada ou em branco.

Nenhum grupo conseguiu concluir a atividade e construir a expressão da função, porém a maior parte dos passos descritos por Polya (1995) foram seguidos após a explicação do enunciado da situação-problema para os alunos, assim como relatado anteriormente.

Notemos que esta atividade estava prevista para dois períodos e se estendeu para quatro e, portanto, não foi possível realizar a entrega e avaliação do segundo problema previsto para o segundo trabalho. Por outro lado, este plano de aula que estava previsto para, no máximo, seis períodos, terminou nestes quatro, sem a apresentação dos grupos, visto que estes dois períodos restantes foram alterados para um, em vista do feriado de 21/4 e mudanças de período na escola por conta da contração de professores. As mudanças de períodos fizeram com que, ao invés de a turma ter dois períodos de Matemática nas terças-feiras, passasse a ter: um período nas terças-feiras, um período nas quintas-feiras e dois períodos nas sextas-feiras. Devido a esta contratação de professores e os períodos que tiveram que ser ocupados para ajeitar os horários dos alunos, tivemos que aperfeiçoar o plano deste trabalho e aplicar somente um dos previstos.

3.1.4 Descrição e Análise do Terceiro Trabalho

De um total de 33 alunos 29 destes compareceram em aula para realização do trabalho, dos quais não tive problemas com alguém copiando de outro colega ou quaisquer outros assuntos desagradáveis. Segue abaixo a tabela de registro de desempenho dos alunos relativa às questões do terceiro trabalho:

Tabela 21: Registro de Desempenho 2

Questões analisadas		Quantidade de alunos	% da turma
1.	Acertaram a questão 1	5	17,24%
2.	Acertaram parcialmente a questão 1	23	79,31%
3.	Não acertaram a questão 1	1	3,44%
4.	Acertaram a questão 2	17	58,62%
5.	Acertaram parcialmente a questão 2	12	41,38%
6.	Não acertaram a questão 2	0	0%
7.	Acertaram a questão 3	1	3,45%
8.	Acertaram parcialmente a questão 3	20	68,97%
9.	Alunos que não acertaram a questão 3	8	27,58%
10.	Tentaram realizar a questão Bônus	14	48,28%
11.	Acertaram a questão Bônus	2	14,29%

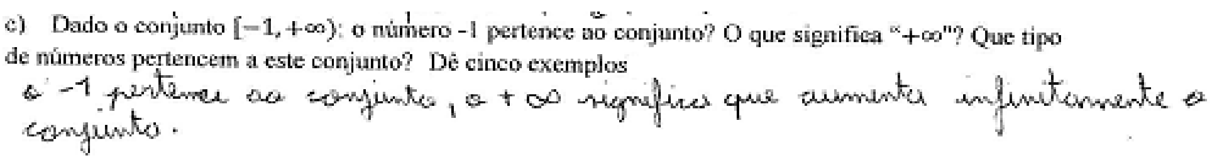
Fonte: Acervo Pessoal

Segue a análise destas questões:

Questão 1

Na primeira questão, percebemos que aproximadamente 79% da turma a acertou parcialmente. Vejamos quais alunos compõe o tópico 2 da tabela de registro de desempenho acima.

Figura 21: Resposta do Aluno 1


c) Dado o conjunto $[-1, +\infty)$: o número -1 pertence ao conjunto? O que significa "$+\infty$"? Que tipo de números pertencem a este conjunto? Dê cinco exemplos

o -1 pertence ao conjunto, o $+\infty$ significa que aumenta infinitamente o conjunto.

Fonte: Acervo Pessoal

O único erro deste aluno foi não ter dado os exemplos que a questão pedia. Mas, por ter acertado as questões a) e b) deste mesmo exercício, podemos imaginar que o motivo pelo qual ele não escreveu os exemplos foi por mera distração.

Figura 22: Resposta do Aluno 3

b) Dado o conjunto (1,2): o número 1 pertence ao conjunto? E o número 2? Que tipo de números pertence a este conjunto? Dê um exemplo

1 pertence 2 pertence

c) Dado o conjunto $[-1, +\infty)$: o número -1 pertence ao conjunto? O que significa "$+\infty$"? Que tipos de números pertencem a este conjunto? Dê cinco exemplos Sim pertence "$+\infty$" é um símbolo representando os números infinitos {-1,4,5,7,2,-3,+∞}.

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno errou completamente a questão b), pois não soube identificar se os números pertencem ou não ao conjunto. Na questão c), ele não soube explicar o que o "mais infinito" estaria representando naquele conjunto, e colocou os exemplos em forma de "conjunto".

Figura 23: Resposta do Aluno 4

Dê um exemplo junto (1,2): o número 1 pertence ao conjunto? E o número 2? Que tipo de números pertence a este conjunto? Dê um exemplo Não, também não. Ex: [1,3]

c) Dado o conjunto $[-1, +\infty)$: o número -1 pertence ao conjunto? O que significa "$+\infty$"? Que tipo de números pertencem a este conjunto? Dê cinco exemplos Sim, que existem mais números infinitos Ex: -2, -3, -1, 5, -6

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno também errou o exemplo na questão b), dando o exemplo em forma de conjunto. Ele não fez isso na questão c), porém errou os exemplos, pois não soube identificar se os números do conjunto eram de -1 para o lado positivo da reta real ou para o lado negativo.

Figura 24: Resposta do Aluno 5

a) Crie um conjunto utilizando { }; Quais números pertencem a esse conjunto?

{100 a 105} 100, 101, 102, 103, 104, 105 ∈

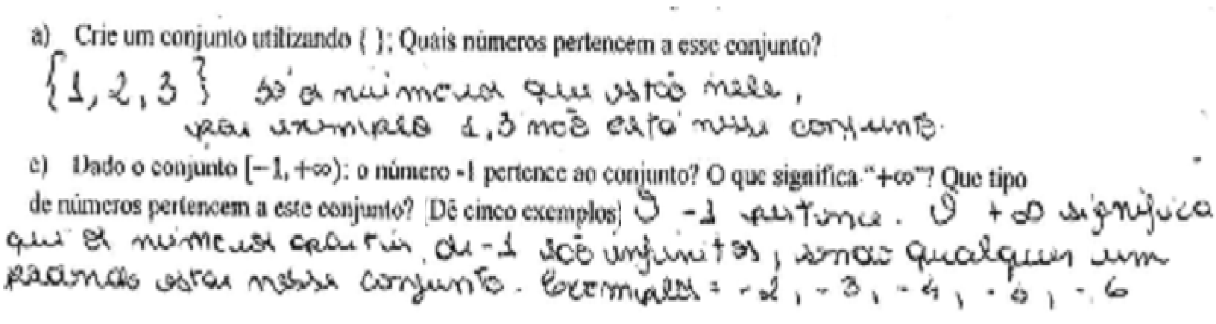
b) Dado o conjunto (1,2): o número 1 pertence ao conjunto? E o número 2? Que tipo de números pertence a este conjunto? Dê um exemplo

O número 1 ∉ ; O número 2 ∉ (1,1; 1,2; 1,3; 1...)

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno errou a escrita do conjunto na questão a), porém, se a escrita fosse essa, os números que pertencem a este conjunto estão corretos. Na questão b), ele errou o modo de dar exemplos do conjunto, colocando os números entre "parênteses", como se fosse uma indicação de outro conjunto. Porém, não levando em consideração a "escrita estranha" que ele adotou, seus exemplos também estão corretos.

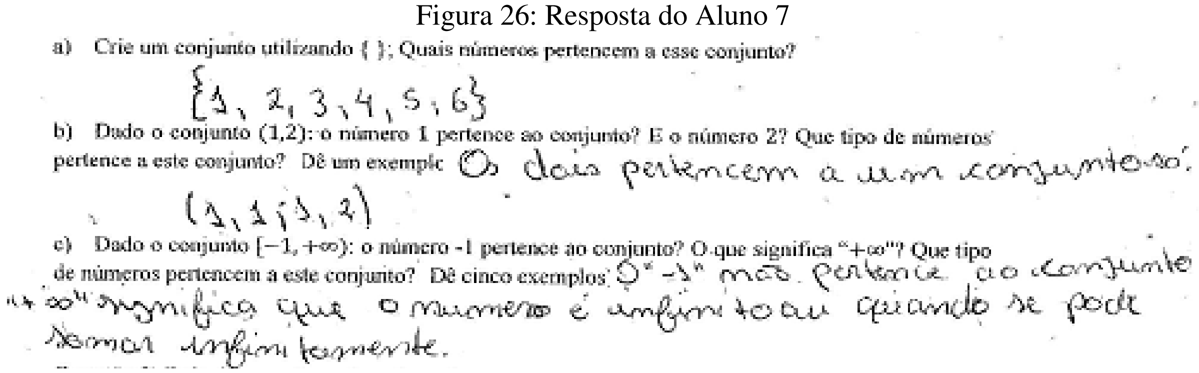
Figura 25: Resposta do Aluno 6


a) Crie um conjunto utilizando { }; Quais números pertencem a esse conjunto?
{1, 2, 3} só os números que estão nele, pois números 1,3 não estão nesse conjunto.
c) Dado o conjunto $[-1, +\infty)$: o número -1 pertence ao conjunto? O que significa "+∞"? Que tipo de números pertencem a este conjunto? [Dê cinco exemplos] O -1 pertence. O +∞ significa que os números abaixo de -1 são infinitos, então qualquer um número estar nesse conjunto. Exemplos = -2, -3, -4, -5, -6

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno não soube explicitar os componentes do conjunto que criou, pois relatou que “1” e “3” não estão no conjunto. Na letra c), apesar de ter explicado relativamente bem o que significa o “mais infinito”, não soube dizer se o conjunto “estava indo” para o lado negativo ou positivo da reta real.

Figura 26: Resposta do Aluno 7


a) Crie um conjunto utilizando { }; Quais números pertencem a esse conjunto?
{1, 2, 3, 4, 5, 6}
b) Dado o conjunto (1,2): o número 1 pertence ao conjunto? E o número 2? Que tipo de números pertence a este conjunto? Dê um exemplo Os dois pertencem a um conjunto só.
(1,1;1,2)
c) Dado o conjunto $[-1, +\infty)$: o número -1 pertence ao conjunto? O que significa "+∞"? Que tipo de números pertencem a este conjunto? Dê cinco exemplos O "-1" não pertence ao conjunto "+∞" significa que o número é infinito ou quando se pode somar infinitamente.

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno cometeu erros nos três tópicos da questão 1. Na letra a), ele esqueceu de explicitar os números que pertencem ao conjunto que ele criou. Na letra b), escreveu que os números 1 e 2 pertencem ao conjunto, afirmando que “ele pertence a um conjunto só”. O aluno também errou o modo de exibir os exemplos, colocando os números entre parênteses, como se fosse criar um conjunto novo para os exemplos. Porém, se ele não tivesse colocado parênteses, os exemplos estariam corretos. Na questão c), ele escreve que o número 1 não pertence ao conjunto (podemos observar claramente que o aluno confundiu o significado de um conjunto aberto com o de conjunto fechado), e também se equivocou na explicação do “mais infinito”.

Figura 27: Resposta do Aluno 8

a) Crie um conjunto utilizando { }; Quais números pertencem a esse conjunto?

{1,2,3,4,5..}

c) Dado o conjunto [−1, +∞): o número -1 pertence ao conjunto? O que significa "+∞"? Que tipo de números pertencem a este conjunto? Dê cinco exemplos

O -1 pertence ao conjunto

e o +∞ significa que tem numeros infinitamentes

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno não explicitou os elementos do conjunto que criou em a), e não deu exemplos na letra c).

Figura 28: Resposta do Aluno 11

a) Crie um conjunto utilizando { }; Quais números pertencem a esse conjunto? {1,2,3,}

b) Dado o conjunto (1,2): o número 1 pertence ao conjunto? E o número 2? Que tipo de números pertence a este conjunto? Dê um exemplo R: Sim o numero 1 e 2 pertencem ao conjunto, ex: 1,2, 1,2,2

c) Dado o conjunto [−1, +∞): o número -1 pertence ao conjunto? O que significa "+∞"? Que tipo de números pertencem a este conjunto? Dê cinco exemplos R: Sim ele pertence ao conjunto 1 "+∞" significa que não tem fim que não acaba ... numeros etc

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno, na letra a), não explicitou os componentes de seu conjunto. Na letra b), não soube responder que os números 1 e 2 não pertenciam ao conjunto, errando assim os exemplos solicitados, pois afirmou que um exemplo seria o número 1 e o outro exemplo o número 2. Na letra c), não deu exemplos dos componentes do conjunto.

Obs.: A imagem está relativamente ruim pelo fato de que o aluno não apagava completamente o que havia errado e escrevia em cima.

Figura 29: Resposta do Aluno 12

a) Crie um conjunto utilizando { }; Quais números pertencem a esse conjunto?

{1,2,3}. Apenas os números das chaves

c) Dado o conjunto [−1, +∞): o número -1 pertence ao conjunto? O que significa "+∞"? Que tipo de números pertencem a este conjunto? Dê cinco exemplos O -1 NÃO PERTENCE.

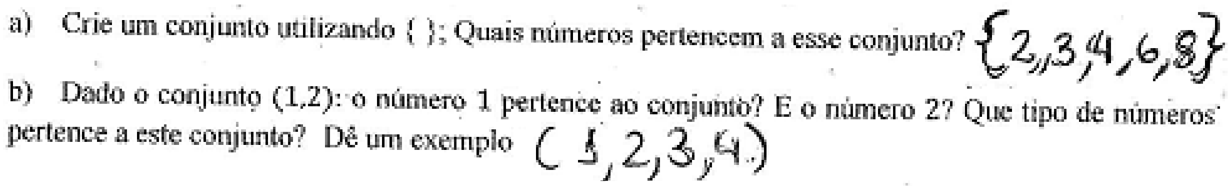
POSITIVOS INFINITOS. 6,465 ∈ [-1+∞)

4,24 ∈ [-1+∞) 4,44 ∈ [-1+∞) 0,004 ∈ [-1+∞)

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno, na letra a), não explicitou quem eram os números de seu conjunto. Na letra c), acertou parcialmente a explicação do "mais infinito", porém esqueceu que existem infinitos números negativos entre [-1.0).

Figura 30: Resposta do Aluno 13

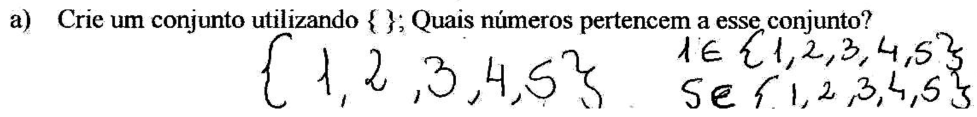

a) Crie um conjunto utilizando { }; Quais números pertencem a esse conjunto? {2,3,4,6,8}

b) Dado o conjunto (1,2): o número 1 pertence ao conjunto? E o número 2? Que tipo de números pertence a este conjunto? Dê um exemplo (1,2,3,4)

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno, não explicitou os elementos do conjunto que criou. Na letra b), errou os exemplos que escreveu sobre o conjunto (1,2) e não respondeu as outras perguntas da questão. Ele não escreveu nada na letra c).

Figura 31: Resposta do Aluno 14

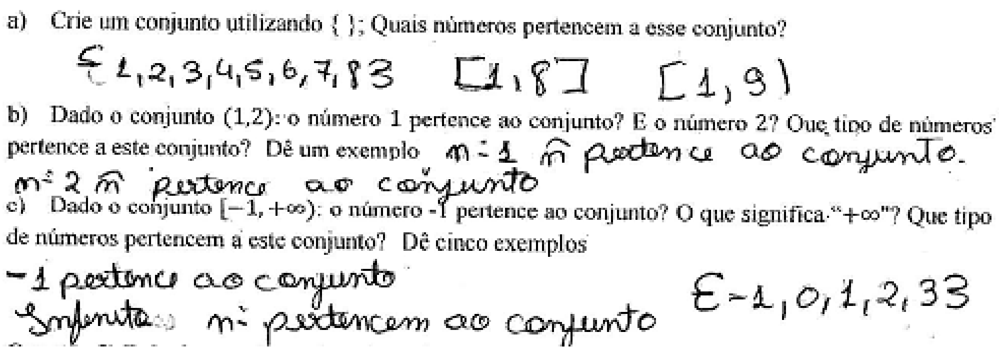

a) Crie um conjunto utilizando { }; Quais números pertencem a esse conjunto?

{1,2,3,4,5} 1∈{1,2,3,4,5}
5∈{1,2,3,4,5}

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno não explicitou todos os elementos do conjunto que criou, só escrevendo dois exemplos.

Figura 32: Resposta do Aluno 16


a) Crie um conjunto utilizando { }; Quais números pertencem a esse conjunto?

{1,2,3,4,5,6,7,8} [1,8] [1,9)

b) Dado o conjunto (1,2): o número 1 pertence ao conjunto? E o número 2? Que tipo de números pertence a este conjunto? Dê um exemplo n: 1 ñ pertence ao conjunto.
n: 2 ñ pertence ao conjunto

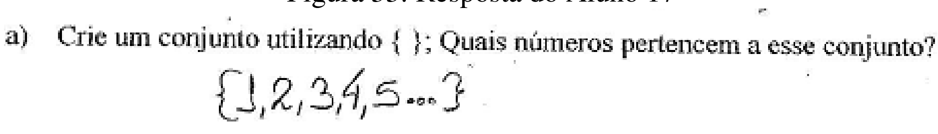
c) Dado o conjunto [−1, +∞): o número -1 pertence ao conjunto? O que significa "+∞"? Que tipo de números pertencem a este conjunto? Dê cinco exemplos

-1 pertence ao conjunto
Infinito n: pertencem ao conjunto {-1,0,1,2,3}

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno, na letra a), não soube escrever quais os números que pertencem ao conjunto que criou. Na letra b) não deu exemplos de quais números estão no conjunto (1,2). Na letra c), não soube explicar o significado de "mais infinito" e escreveu os exemplos de números que estão no conjunto de maneira errada, porém, se não levássemos em consideração isto, ela teria acertado os exemplos.

Figura 33: Resposta do Aluno 17

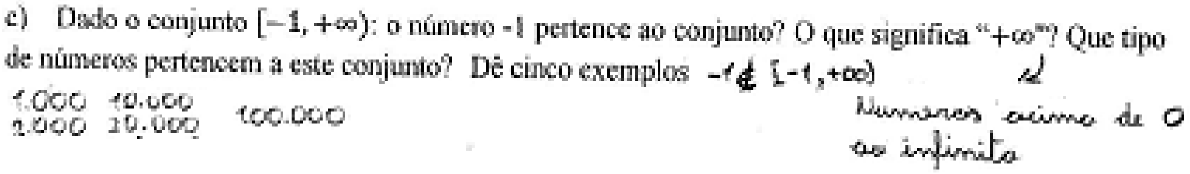

a) Crie um conjunto utilizando { }; Quais números pertencem a esse conjunto?

{1,2,3,4,5...}

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno não explicitou quais elementos pertencem ao conjunto que criou.

Figura 34: Resposta do Aluno 18



c) Dado o conjunto $[-1, +\infty)$: o número -1 pertence ao conjunto? O que significa "+∞"? Que tipo de números pertencem a este conjunto? Dê cinco exemplos $-1 \notin [-1, +\infty)$

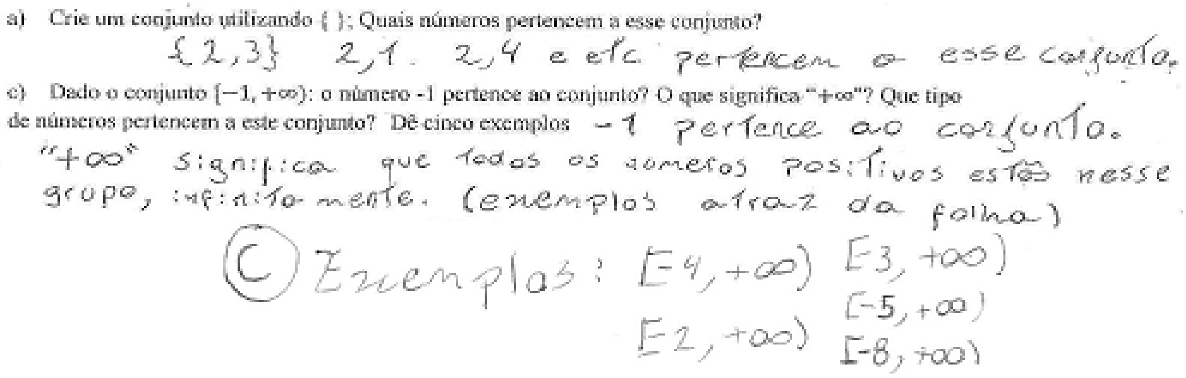
1.000 10.000
2.000 20.000 100.000

Numeros acima de 0 ao infinito

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno não soube explicar o que significa o "mais infinito", pois alega que os componentes dos conjuntos são todos os números acima de 0, esquecendo que existem infinitos números negativos em [-1,0).

Figura 35: Resposta do Aluno 20



a) Crie um conjunto utilizando { }; Quais números pertencem a esse conjunto?

{2,3} 2,1. 2,4 e etc. pertencem a esse conjunto.

c) Dado o conjunto $[-1, +\infty)$: o número -1 pertence ao conjunto? O que significa "+∞"? Que tipo de números pertencem a este conjunto? Dê cinco exemplos -1 pertence ao conjunto.

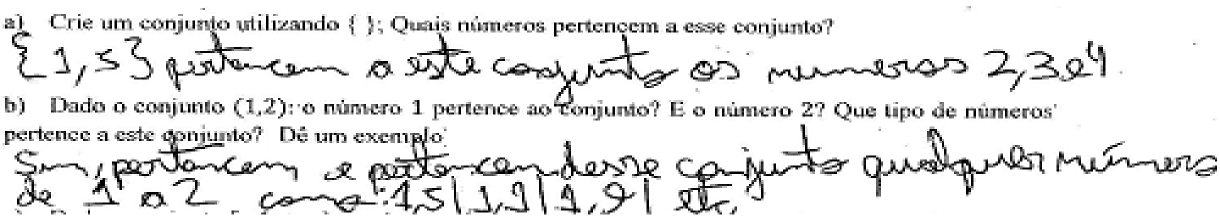
"+00" significa que todos os numeros positivos estão nesse grupo, infinitamente. (exemplos atraz da folha)

C) Exemplos: [-4,+00) [-3,+00) [-5,+00) [-2,+00) [-8,+00)

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno, na letra a), errou os componentes do conjunto que criou. Na letra "b" ele acertou parcialmente o significado do "mais infinito", mas se esqueceu de que existem infinitos números negativos entre [-1,0), e errou completamente os exemplos solicitados, tanto na maneira de escrever os exemplos quanto nos números dos exemplos.

Figura 36: Resposta do Aluno 21



a) Crie um conjunto utilizando { }; Quais números pertencem a esse conjunto?

{1,5} pertencem a este conjunto os numeros 2,3 e 4

b) Dado o conjunto (1,2): o número 1 pertence ao conjunto? E o número 2? Que tipo de números pertence a este conjunto? Dê um exemplo

Sim, pertencem e pertencem desse conjunto qualquer números de 1 a 2, como 1,5 | 1,1 | 1,9 | etc.

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno, na letra a), errou os componentes do conjunto que criou e na letra b) errou os números que pertencem ao conjunto, porém acertou os exemplos.

Figura 37: Resposta do Aluno 25

b) Dado o conjunto (1,2): o número 1 pertence ao conjunto? E o número 2? Que tipo de números pertence a este conjunto? Dê um exemplo Sim o 1,2 pertencem os números que pertence são (1,1 ; 1,2 , 1,3 ... 1,9

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno não soube criar o conjunto da letra a). Na letra b), apesar de acertar os exemplos solicitados, equivocou-se ao escrever que o 1 e 2 pertenciam ao conjunto.

Figura 38: Resposta do Aluno 26

a) Crie um conjunto utilizando { }; Quais números pertencem a esse conjunto?

{1,2,3,4,5,6} todos os números dentro da chaves.

b) Dado o conjunto (1,2): o número 1 pertence ao conjunto? E o número 2? Que tipo de números pertence a este conjunto? Dê um exemplo 1. Não 2. Não (1, 1,15 , 1,5 , 1,8+9 , 2)

c) Dado o conjunto $[-1,+\infty)$: o número -1 pertence ao conjunto? O que significa "$+\infty$"? Que tipo de números pertencem a este conjunto? Dê cinco exemplos 1. pertence , $+\infty$ significa que o número é infinito e nunca acaba.

[-1, -2,001 , 3,9679 , 9,511 , 15,55 , 25,1 $+\infty$)

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno, na letra a), não explicitou os componentes do conjunto que criou. Na letra b), apesar de ter acertado os números que estão no conjunto, ele não soube escrever isso. Na letra c), apesar de também não ter explicado completamente o que significa o "mais infinito", escreveu os exemplos errados.

Figura 39: Resposta do Aluno 27

a) Crie um conjunto utilizando { }; Quais números pertencem a esse conjunto?

{1,2,3} todos aqueles que estão dentro da { }.

b) Dado o conjunto (1,2): o número 1 pertence ao conjunto? E o número 2? Que tipo de números pertence a este conjunto? Dê um exemplo 1 ∉ 2 ∉ [1,99] ∈

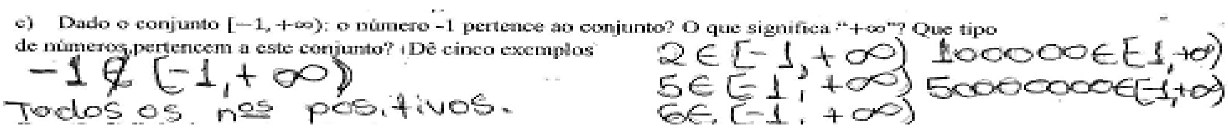
c) Dado o conjunto $[-1,+\infty)$: o número -1 pertence ao conjunto? O que significa "$+\infty$"? Que tipo de números pertencem a este conjunto? Dê cinco exemplos

-1 ∈ , 0 $+\infty$ significa que existe infinitos números nesse conjunto [1,2] [1,10] [1,98] [1,99] . [1,999]

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno, na letra a), não explicitou os elementos dos conjuntos que criou. Na letra b), não soube escrever o exemplo, apesar do número entre os colchetes estar correto. E na letra c), este aluno também não soube escrever os exemplos.

Figura 40: Resposta do Aluno 28


c) Dado o conjunto $[-1,+\infty)$: o número -1 pertence ao conjunto? O que significa "$+\infty$"? Que tipo de números pertencem a este conjunto? Dê cinco exemplos

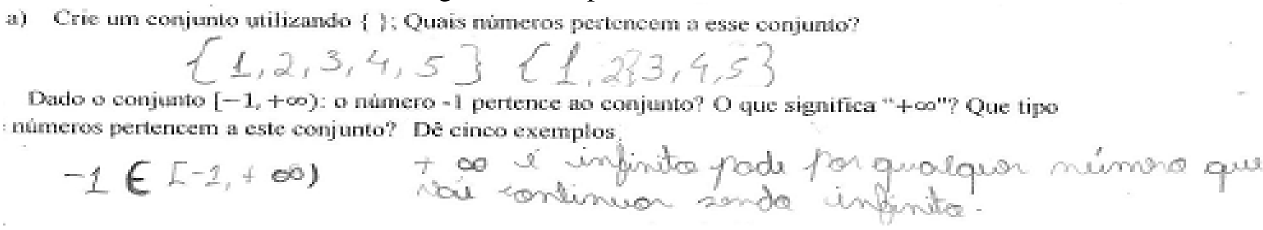
$-1 \notin [-1,+\infty)$
Todos os nºs positivos.

$2 \in [-1,+\infty)$ $1000000 \in [1,+\infty)$
$5 \in [-1,+\infty)$ $500000000 \in [-1,+\infty)$
$6 \in [-1,+\infty)$

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno não soube explicar o que significa o "mais infinito", pois se esqueceu de que existem infinitos números em [-1,0).

Figura 41: Resposta do Aluno 29


a) Crie um conjunto utilizando { }: Quais números pertencem a esse conjunto?

$\{1,2,3,4,5\}$ $\{1,2,3,4,5\}$

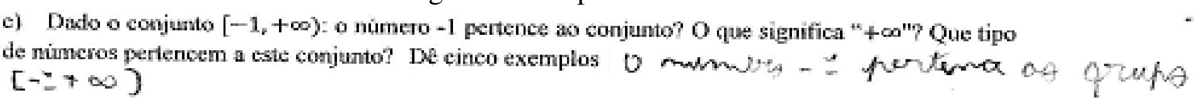
Dado o conjunto $[-1,+\infty)$: o número -1 pertence ao conjunto? O que significa "$+\infty$"? Que tipo números pertencem a este conjunto? Dê cinco exemplos

$-1 \in [-1,+\infty)$ $+\infty$ é infinito pode por qualquer número que vai continuar sendo infinito.

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno, na letra a), não soube explicitar os elementos do conjunto que criou, repetindo o conjunto ao lado, como se fosse a resposta para a segunda questão. Na letra c), ele não criou exemplos.

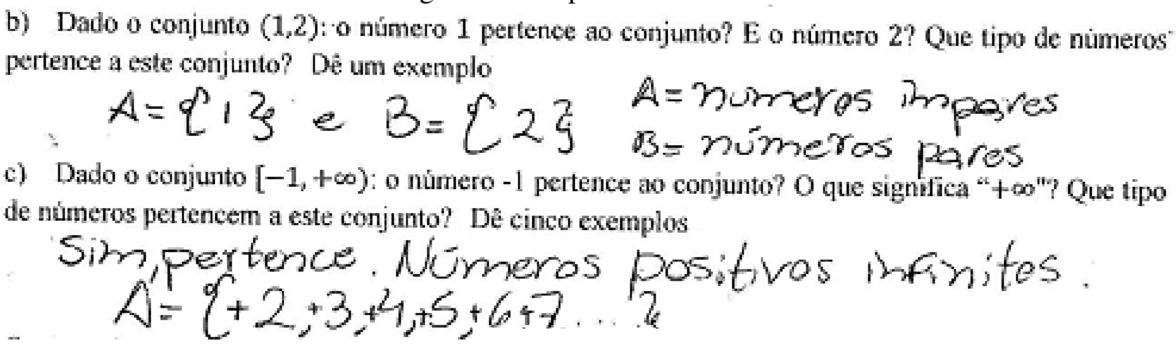
Figura 42: Resposta do Aluno 30


c) Dado o conjunto $[-1,+\infty)$: o número -1 pertence ao conjunto? O que significa "$+\infty$"? Que tipo de números pertencem a este conjunto? Dê cinco exemplos O número -1 pertence ao grupo $[-1+\infty)$

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno, apesar de usar a linguagem "grupo" para se referir ao conjunto dado, ele não escreveu os exemplos solicitados na questão e não explicou o significado de "mais infinito".

Figura 43: Resposta do Aluno 31


b) Dado o conjunto (1,2): o número 1 pertence ao conjunto? E o número 2? Que tipo de números pertence a este conjunto? Dê um exemplo

$A=\{1\}$ e $B=\{2\}$ A= números ímpares
B= números pares

c) Dado o conjunto $[-1,+\infty)$: o número -1 pertence ao conjunto? O que significa "$+\infty$"? Que tipo de números pertencem a este conjunto? Dê cinco exemplos

Sim, pertence. Números positivos infinitos.
$A=\{+2,+3,+4,+5,+6,+7\ldots\}$

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno, na letra b), não escreveu se os números pertenciam ao conjunto e escreveu os exemplos solicitados de forma errada. Na letra c), acertou parcialmente a explicação do "mais infinito", porém se esqueceu de que existem infinitos números negativos em [-1,0), e também escreveu os exemplos em um conjunto, sendo que não foi esse o solicitado.

Conclusão sobre os alunos que acertaram parcialmente a questão 1:

Observamos, de uma maneira geral, os seguintes tópicos:

a) Praticamente todos os alunos não souberam ou não escreveram os exemplos dos conjuntos que criaram na letra a);

b) A maioria dos alunos não soube explicar totalmente o que significava o "mais infinito", se esquecendo dos números que existem entre -1 e 0, alegando que há, somente, infinitos números positivos no conjunto.

c) A maioria errou o modo de escrever os exemplos dados, mesmo acertando os números que faziam parte do conjunto.

d) Alguns alunos erraram os exemplos da letra c), dando exemplos de números negativos menores que -1, ou seja, errando a representação do conjunto na reta real.

Questão 2

Na questão 2, podemos observar na tabela de registro de desempenho, que 41,38% da turma a acertou parcialmente e que ninguém a errou completamente.

Vejamos quantos alunos, dentre os 41,38%, (13 alunos), erraram cada alternativa:

Tabela 22: Erro dos alunos em cada alternativa

Coluna B com sua resposta correta	Quantidade de alunos que erraram
1. (100.000) É um número	2
2. (Variável) Pode assumir qualquer um dos valores em um conjunto de valores	6
3. (Variável independente) É a variável que não depende de outra variável para variar	4
4. (Variável dependente) É a variável que depende de outra para variar	4
5. (Imagem) É o conjunto que contém os números para a variável dependente	12
6. (Domínio) É o conjunto que contém os números para a variável independente	12

Fonte: Acervo Pessoal

Todos os alunos que erraram o tópico 5 da tabela acima, por consequência, erraram também o tópico 6 (houve uma troca de conceitos).

Ao analisar a tabela, concluímos que menos que 50% dos 13 alunos não sabem ainda os significados das palavras variável, variável dependente e variável independente, e mais que 90% dos alunos não sabem os significados matemáticos das palavras domínio e imagem. Porém, cabe ressaltar que o fato de os alunos terem errado essas alternativas, não significa que não entenderam o que são cada um dos tópicos separadamente.

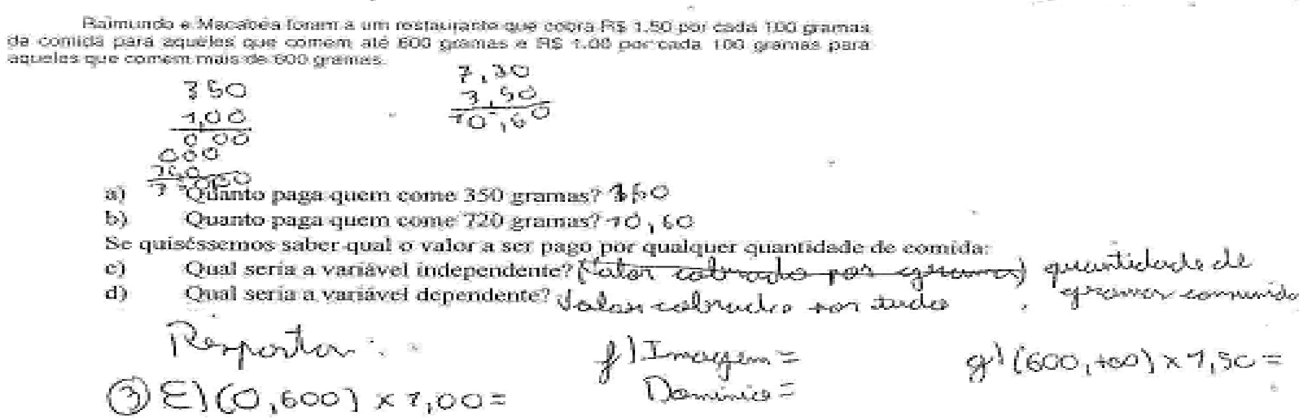
É importante ressaltar que, de acordo com o significado de *problema*, abordada neste trabalho, estes dois *exercícios* não são considerados *problemas* e, por essa razão, não iremos analisar as respostas dos alunos de acordo com Polya (1995), tendo em vista que o autor fornece passos para resolver um *problema* e não um *exercício*.

Questão 3

Para analisar a questão 3, seguiremos a mesma ideia da análise realizada para a questão 1, ou seja, iremos analisar cada aluno dentre os 68,97% que acertaram parcialmente a questão e os 27,58% que erraram completamente a questão.

Segue abaixo a análise dos que acertaram parcialmente a questão 3, isto é, 68,97% da turma, o equivalente a 20 alunos. As alternativas que não aparecerem nas imagens nas tabelas é pelo fato de que eles não a responderam ao lado do item solicitado, ou simplesmente não responderam, mas isto estará claro em cada imagem. É importante ressaltar que a análise segundo Polya (1995) consta no plano desta aula, não se fazendo necessário analisar individualmente os alunos, assim como já feito anteriormente.

Figura 44: Resposta do Aluno 1


Raimundo e Macabéa foram a um restaurante que cobra R$ 1,50 por cada 100 gramas da comida para aqueles que comem até 600 gramas e R$ 1,00 por cada 100 gramas para aqueles que comem mais de 600 gramas.

a) Quanto paga quem come 350 gramas?
b) Quanto paga quem come 720 gramas? 10,60
Se quiséssemos saber qual o valor a ser pago por qualquer quantidade de comida:
c) Qual seria a variável independente? quantidade de gramas comido
d) Qual seria a variável dependente? Valor cobrado por tudo

Resposta:

③ E) (0,600) x 1,00 =

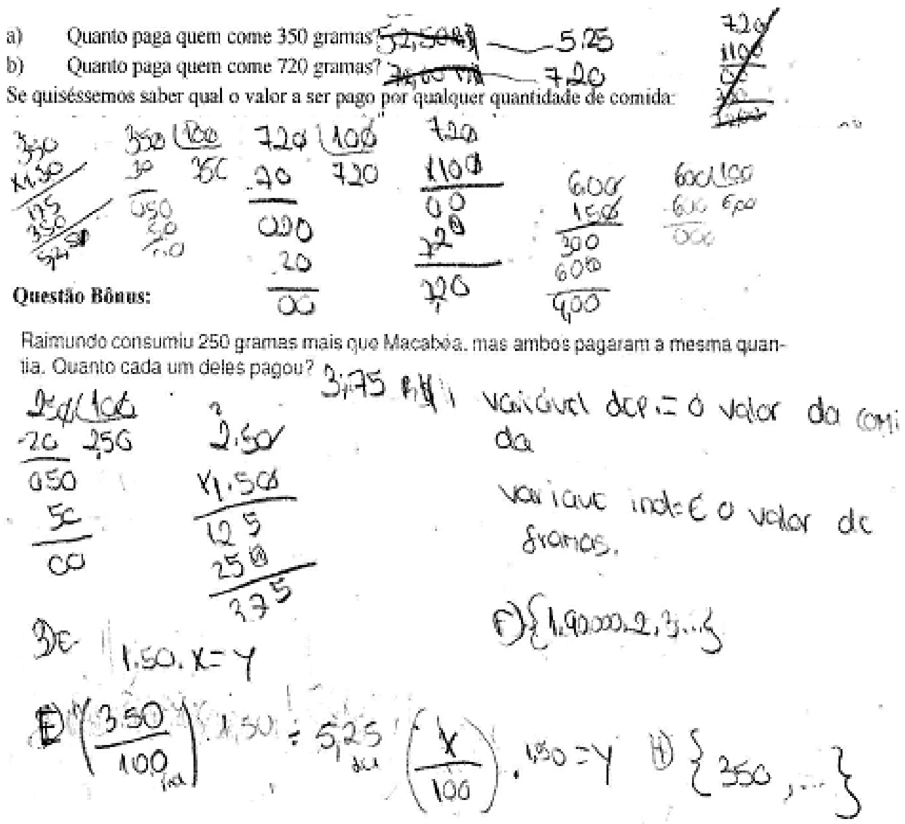
f) Imagem =
Domínio =

g) (600,100) x 1,50 =

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno acertou parcialmente a letra a), pois ele se equivocou ao multiplicar $3{,}50\ x\ 1{,}00$ ao invés de $3{,}50\ x\ 1{,}50$. Na letra b), ele fez um primeiro cálculo certo, porém somou os 3,50 da letra a). Ele errou as expressões pedidas e os conjuntos. Porém podemos perceber que ao tentar escrever a expressão nas letras e) e g), ele escreve o Domínio de cada expressão de modo correto (apenas faltando fechar o intervalo que define o domínio da expressão e), isto é, escrever (0,600]).

Figura 45: Resposta do Aluno 3



Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno acertou quase todas as questões que respondeu, porém foi incoerente nas questões e) e g), pois em uma ele dividiu por 100 e na outra não. Ele errou a criação dos conjuntos imagem e domínio. Apesar de ter feito a questão bônus, a errou também.

Figura 46: Resposta do Aluno 4

a) Quanto paga quem come 350 gramas? 52,50

b) Quanto paga quem come 720 gramas? 72,00

Se quiséssemos saber qual o valor a ser pago por qualquer quantidade de comida: 200g = 30,00

c) Qual seria a variável independente? é o 600

d) Qual seria a variável dependente? São 1,50 e 1,00

Questão Bônus:

Raimundo consumiu 250 gramas mais que Macabéa, mas ambos pagaram a mesma quantia. Quanto cada um deles pagou? 63,75

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno, apesar de ter errado todas as questões que fez, inclusive a bônus, considerei parcialmente correto as questões a) e b), por ter realizado a multiplicação errada.

Figura 47: Resposta do Aluno 5

a) Quanto paga quem come 350 gramas? 3,50 R$

b) Quanto paga quem come 720 gramas? 7,20 R$.

Se quiséssemos saber qual o valor a ser pago por qualquer quantidade de comida:

c) Qual seria a variável independente? Seria o valor de quanto o restaurante cobra por Grama e

d) Qual seria a variável dependente? Seria o valor a ser pago. Por exemplo os 3,50 R$.

1,50 | 100 G

(1,5 + 100.(2)) = 200 + 1,5 = 3,15

400 − 650

1,50 + 1,50 + 50 = 3,50

1,00 | 100 G

(X + 100.(Y))

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno errou a questão a) por ter uma soma, como podemos ver na última conta ao lado direito da imagem na tabela, porém acertou a letra b). E não respondeu o resto das questões, apesar de que, pelos cálculos feitos, podemos ver indícios de ele tentando criar as expressões solicitadas.

Figura 48: Resposta do Aluno 8

1,50 × 1 35 = 750 + 450 = 5,150

1,00 × 72 = 200 + 700 = 7200

a) Quanto paga quem come 350 gramas? 5,150

b) Quanto paga quem come 720 gramas? 7,20

Se quiséssemos saber qual o valor a ser pago por qualquer quantidade de comida:

c) Qual seria a variável independente? As Gramas

d) Qual seria a variável dependente? O Preço

h) Construa a Imagem e o Domínio para essa expressão.

Imagem	Domínio
1,50	100 gramas
1,00	600 gramas

Questão Bônus:

Raimundo consumiu 250 gramas mais que Macabéa, mas ambos pagaram a mesma quantia. Quanto cada um deles pagou? R$ 6,00

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno errou a multiplicação que fez na letra a) e não soube criar o domínio e imagem da letra h). Apesar de ter feito a questão bônus, a errou.

Figura 49: Resposta do Aluno 11

a) Quanto paga quem come 350 gramas? 4,50 R$

b) Quanto paga quem come 720 gramas? 7,0,50

Se quiséssemos saber qual o valor a ser pago por qualquer quantidade de comida:

c) Qual seria a variável independente? Os gramas de comida

d) Qual seria a variável dependente? O preço que se vai pagar.

e) Construa uma expressão que calcule o preço da comida para quem come até 600 gramas. é 8,50

Questão Bônus:

Raimundo consumiu 250 gramas mais que Macabéa, mas ambos pagaram a mesma quantia. Quanto cada um deles pagou?

A) 350
1 -> 1,50
2 -> 1,50
3 -> 1,50
4,50

B) 720
1 -> 1,00
2 -> 1,00
3 -> 1,56
4 -> 1,00
5 -> 1,56
6 -> 1,00
7 -> 1,00

Raimundo
4,50

Macabéa
1,50

E)
1 -> 1,50
2 -> 1,50
3 -> 1,56
4 -> 1,56
5 -> 1,50
6 -> 1,56
8,50

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno só acertou as questões c) e d), e apesar disso, calculou errado as questões da letra a) e b). E não sabe o que é uma expressão pelo que escreveu a letra e).

Figura 50: Resposta do Aluno 12

a) Quanto paga quem come 350 gramas? 3,45.

b) Quanto paga quem come 720 gramas? 4,20

Se quiséssemos saber qual o valor a ser pago por qualquer quantidade de comida:

c) Qual seria a variável independente? ~~os gramas~~ o valor dos gramas

d) Qual seria a variável dependente? os 100 gramas

Questão Bônus:

Raimundo consumiu 250 gramas mais que Macabéa, mas ambos pagaram a mesma quantia. Quanto cada um deles pagou? Ambos pagaram R$6,00.

3,00 = 200 gramas

3,00 = 300 gramas

6,00 = 400 gramas

6,00 = 600 gramas

R$ 4,50

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno acertou somente as questões b) e c). Não soube identificar qual era a variável dependente, respondendo algo na letra d) que não era uma variável. E apesar de ter feito a questão bônus, a errou.

Figura 51: Resposta do Aluno 15

c) Qual seria a variável independente? São as gramas

d) Qual seria a variável dependente? o Preço.

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno respondeu apenas essas duas alternativas, e as acertou.

Figura 52: Resposta do Aluno 16

100gm – 1,50 até 600gm

100gm – 1,00 + de 600gm

$1,50 \times 3 = 4,50$ $\quad 1,50 \div 2 = 0,75$ $\quad 5,25$

a) Quanto paga quem come 350 gramas? 5,25

b) Quanto paga quem come 720 gramas? 7,20

Se quiséssemos saber qual o valor a ser pago por qualquer quantidade de comida: 6,00

c) Qual seria a variável independente? gm

d) Qual seria a variável dependente? valor. | y = gramas x = valor

Resposta 3

e) 100 gm – 1,50
200 gm – 3,0
300 gm – 4,50
400 gm – 6,00
500 gm 7,50
600 gm – 8,00

f)

g) 1,50 (y) = x

h) gm – valor

Bonus
400 gm – 1,50 = 6,00
600 gm – 1,00 = 6,00

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno acertou todas as questões que respondeu (menos a bônus). Porém não respondeu todas, além do que, a letra e) ficou incompleta.

Figura 53: Resposta do Aluno 18

a- 1,50 ÷ 2 = 0,75 + 1.50.3 = 4,50 = 5,25

b- 1,50.6 = 9,00 + 1,20 = 10,20

c- gramas

d- preço

e- Y=1,5+600(x)

f- Imagem- {1,50, 9,00}
Domínio- {0,1,600}

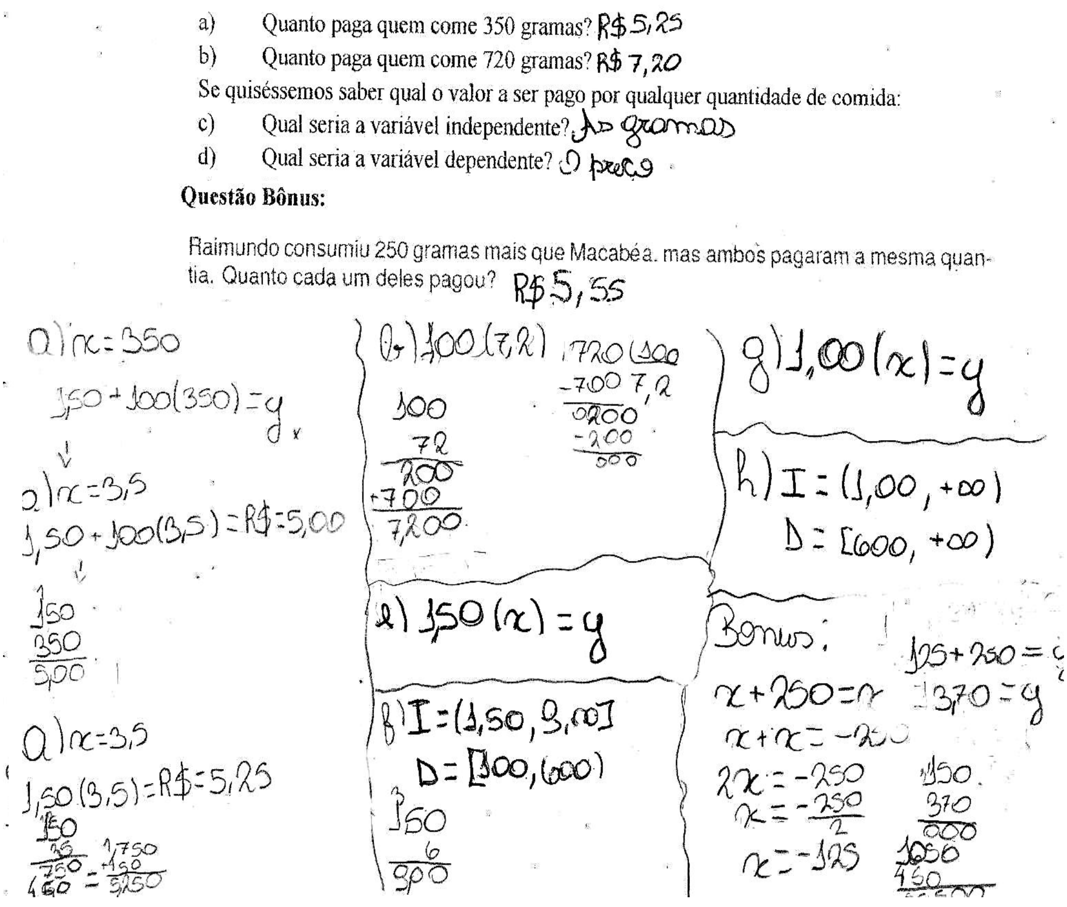
g- Y = 1+700.(x)

h- Imagem- [1,00, +∞)
Domínio- [700, +∞)

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno errou, provavelmente por falta de atenção, o valor que multiplicava o 600, visto que era para ser multiplicado por 1,00 e não 1,50. Errou também o modo de escrever as expressões de acordo com os exemplos que fez em a) e b), isto é, não soube relacionar o seu raciocínio com a criação de uma expressão. Por último, errou a nomenclatura dos conjuntos da questão f) (ao colocar chaves) e o valor do extremo inferior do intervalo. Também errou os extremos da imagem e do domínio da questão h).

Figura 54: Resposta do Aluno 17



a) Quanto paga quem come 350 gramas? R$ 5,25

b) Quanto paga quem come 720 gramas? R$ 7,20

Se quiséssemos saber qual o valor a ser pago por qualquer quantidade de comida:

c) Qual seria a variável independente? As gramas

d) Qual seria a variável dependente? O preço

Questão Bônus:

Raimundo consumiu 250 gramas mais que Macabéa, mas ambos pagaram a mesma quantia. Quanto cada um deles pagou? R$ 5,55

a) x = 350

1,50 + 1,00(350) = y

a) x = 3,5

1,50 + 1,00(3,5) = R$ = 5,00

a) x = 3,5

1,50(3,5) = R$ = 5,25

b) 1,00(7,2)

e) 1,50(x) = y

f) I = {1,50, 9,00]

D = [100, 600)

g) 1,00(x) = y

h) I = (1,00, +∞)

D = [600, +∞)

Bonus:

x + 250 = x

x + x = −250

2x = −250

x = −250/2

x = −125

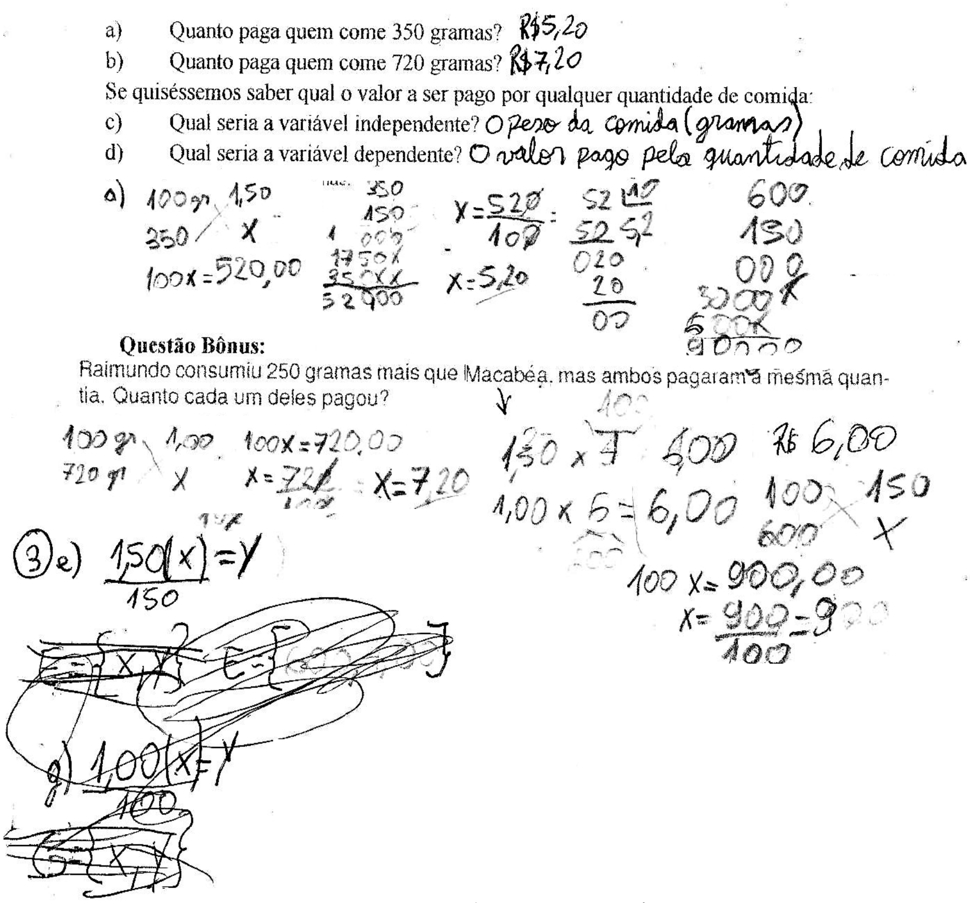
1,25 + 2,50 = y

3,70 = y

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno respondeu todas as questões e acertou, praticamente, todas elas, com exceção dos conjuntos imagem e domínio, pois não foi coerente ao “abrir” e “fechar” os conjuntos: na imagem da letra f, o conjunto é fechado em 1,50, e se, como ela escreveu, fechado em 9,00 reais, será fechado em 600 gramas no domínio. O mesmo aconteceu na letra h), quando escreveu que é aberto em 1,00 real (o que está correto, pois é quem “come mais que 600 g" e não exatamente 600 g), e fechado em 600 gramas. Finalmente, ele errou a questão bônus.

Figura 55: Resposta do Aluno 19


a) Quanto paga quem come 350 gramas? R$5,20
b) Quanto paga quem come 720 gramas? R$7,20
Se quiséssemos saber qual o valor a ser pago por qualquer quantidade de comida:
c) Qual seria a variável independente? O peso da comida (gramas)
d) Qual seria a variável dependente? O valor pago pela quantidade de comida

a) 100 gr 1,50
350 x
100x = 520,00
x = 520/100
x = 5,20

Questão Bônus:
Raimundo consumiu 250 gramas mais que Macabéa, mas ambos pagaram a mesma quantia. Quanto cada um deles pagou?

100 gr 1,00 100x = 720,00
720 gr x x = 720/100 x = 7,20

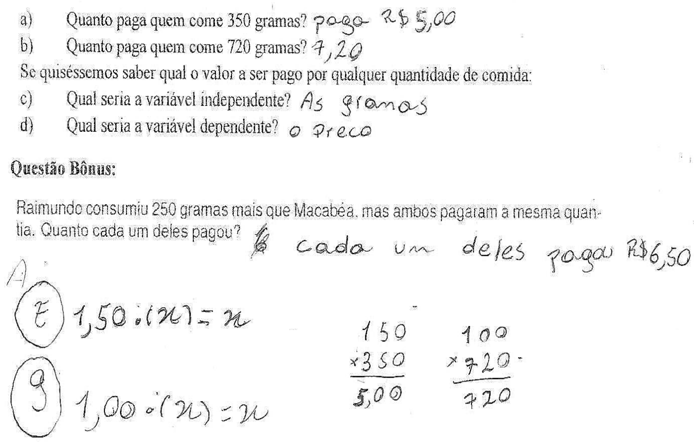
1,50 x 4 400 R$ 6,00
1,00 x 6 = 6,00
100 150
600 x
100 x = 900,00
x = 900/100 = 9

3 e) 1,50(x) = Y
g) 1,00(x) = Y

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno acertou todas as questões que respondeu, com exceção da letra e) e da bônus. Podemos observar que na letra g) ele acertou a expressão, porém a riscou.

Figura 56: Resposta do Aluno 20


a) Quanto paga quem come 350 gramas? pago R$ 5,00
b) Quanto paga quem come 720 gramas? 7,20
Se quiséssemos saber qual o valor a ser pago por qualquer quantidade de comida:
c) Qual seria a variável independente? As gramas
d) Qual seria a variável dependente? o preço

Questão Bônus:

Raimundo consumiu 250 gramas mais que Macabéa, mas ambos pagaram a mesma quantia. Quanto cada um deles pagou? cada um deles pagou R$6,50

E 1,50 . (x) = x
g 1,00 . (x) = x

150 × 350 = 5,00
100 × 720 = 720

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno acertou todas as questões que respondeu, com exceção da Bônus. Podemos observar que na letra a) ele errou a multiplicação de 1,50x3,50.

Figura 57: Resposta do Aluno 21

a) Quanto paga quem come 350 gramas? R$ 5,25
b) Quanto paga quem come 720 gramas? R$ 7,20
Se quiséssemos saber qual o valor a ser pago por qualquer quantidade de comida?
c) Qual seria a variável independente? A quantidade de comida
d) Qual seria a variável dependente? O Preço
e) Construa uma expressão que calcule o preço da comida para quem come até 600 gramas.
f) Construa a Imagem e o Domínio para essa expressão. I=(0,+∞) D=(R$1,50+∞)
g) Construa uma expressão que calcule o preço da comida para quem come mais que 600 gramas R$1,50+100(x)=Y
h) Construa a Imagem e o Domínio para essa expressão.
I=(0,+∞) D=(R$1,00,+∞)
e) R$1,00+100(x)=V

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno errou tanto as expressões quanto a Imagem e Domínio de cada uma delas, apesar de ter acertado os números que cada conjunto "começava".

Figura 58: Resposta do Aluno 23

a) Quanto paga quem come 350 gramas? ~~[illegible]~~ R$ 5,25
b) Quanto paga quem come 720 gramas? R$ 10,20
Se quiséssemos saber qual o valor a ser pago por qualquer quantidade de comida:
c) Qual seria a variável independente? O preço R$ 1,50 e R$ 1,00
d) Qual seria a variável dependente? O Preço

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno errou a questão b), porém como não havia cálculos na trabalho, não tem como saber onde. E errou também a variável independente, respondendo coisas que não são variáveis.

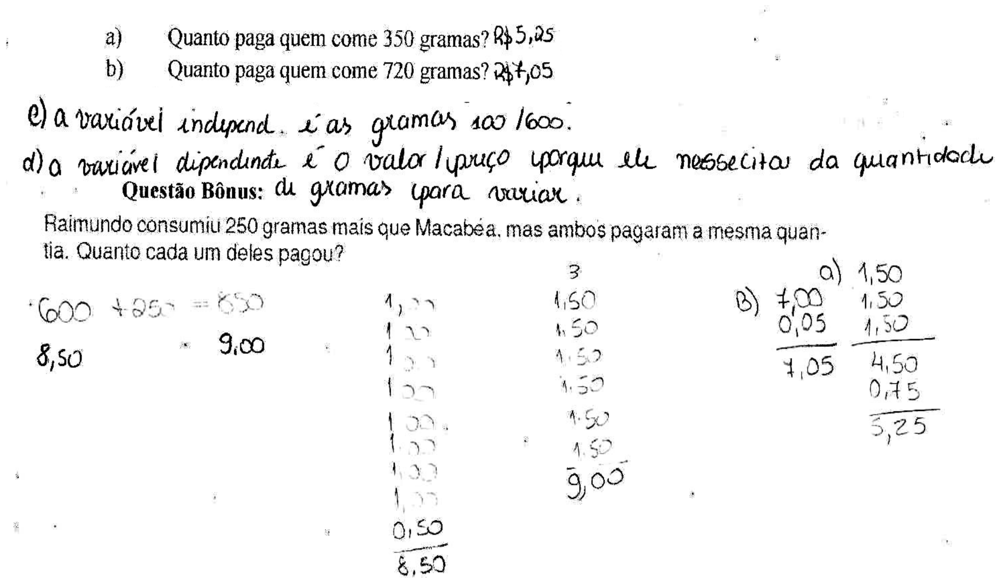
Figura 59: Resposta do Aluno 25

a) Quanto paga quem come 350 gramas? R$5,25
b) Quanto paga quem come 720 gramas? R$7,20
Se quiséssemos saber qual o valor a ser pago por qualquer quantidade de comida:
c) Qual seria a variável independente? 100 (100G)
d) Qual seria a variável dependente? 1,50 (R$ 1,50)

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno errou as variáveis, respondendo coisas que não são variáveis.

Figura 60: Resposta do Aluno 26



a) Quanto paga quem come 350 gramas? R$ 5,25
b) Quanto paga quem come 720 gramas? R$ 7,05

c) a variável independ. é as gramas 100 /600.
d) a variável dependente é o valor / preço porque ele nessecita da quantidade de gramas para variar.

Questão Bônus:

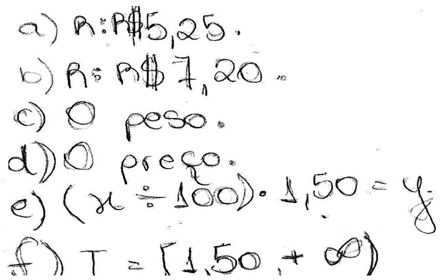
Raimundo consumiu 250 gramas mais que Macabéa, mas ambos pagaram a mesma quantia. Quanto cada um deles pagou?

600 + 250 = 850
8,50 9,00

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno errou o cálculo da letra b) e errou a letra e), escrevendo coisas que não são variáveis.

Figura 61: Resposta do Aluno 28

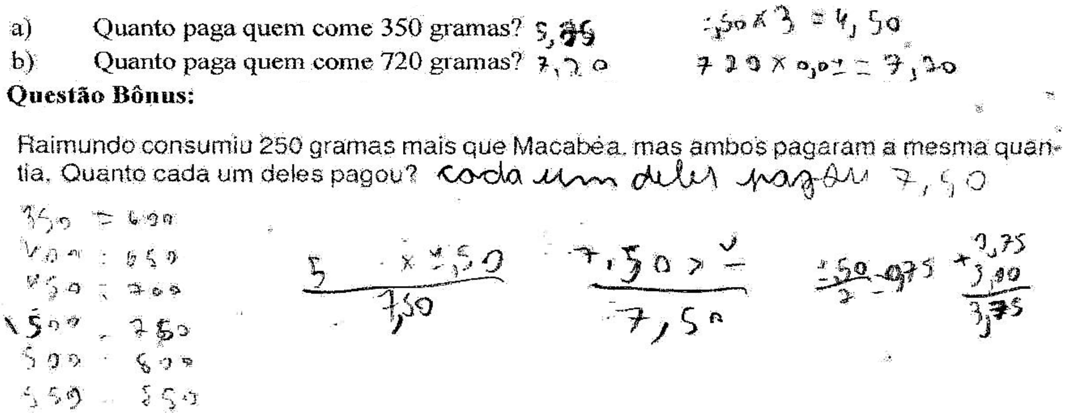


a) R: R$ 5,25.
b) R: R$ 7,20.
c) O peso.
d) O preço.
e) $(x \div 100) \cdot 1{,}50 = y$
f) $T = [1{,}50 , +\infty)$

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno chegou apenas no segundo período do trabalho, logo ele só teve um período para realiza-la e não teve tempo de terminar. Destas questões a única que errou foi a Imagem da letra f), quando colocou que a imagem iria até o “mais infinito”.

Figura 62: Resposta do Aluno 30


a) Quanto paga quem come 350 gramas? 5,25 250 x 3 = 4,50

b) Quanto paga quem come 720 gramas? 7,20 720 x 0,01 = 7,20

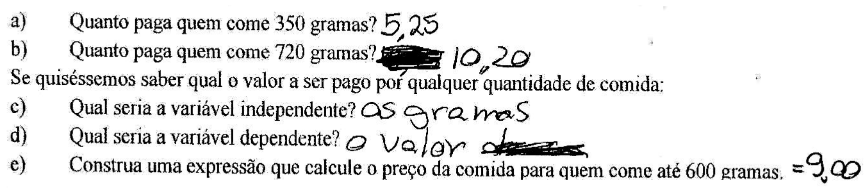
Questão Bônus:

Raimundo consumiu 250 gramas mais que Macabéa, mas ambos pagaram a mesma quantia. Quanto cada um deles pagou? cada um deles pagou 7,50

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno acertou todas as questões que respondeu. Inclusive a questão Bônus, ele escreveu a resposta correta, porém não explicitou o cálculo realizado.

Figura 63: Resposta do Aluno 31


a) Quanto paga quem come 350 gramas? 5,25

b) Quanto paga quem come 720 gramas? 10,20

Se quiséssemos saber qual o valor a ser pago por qualquer quantidade de comida:

c) Qual seria a variável independente? os gramas

d) Qual seria a variável dependente? o valor

e) Construa uma expressão que calcule o preço da comida para quem come até 600 gramas. =9,00

Fonte: Acervo Pessoal

Este aluno errou o cálculo na questão b), porém como não há contas na trabalho, não pude identificar qual foi o seu erro. Além disso, ele errou a letra e).

Conclusão da questão 3 – alunos que acertaram parcialmente a questão 3:

Podemos observar na tabela a seguir o que os alunos mais erraram nas questões realizadas:

Tabela 23: Quantidade de alunos que errou cada alternativa

Alternativa	Quantidade de alunos (dentre 20 analisados)
Letra a)	7
Letra b), letra g)	4 cada
Letra c)	2
Letra d)	3
Letra e), f), h), Questão Bônus	9 cada
Não respondeu alguma alternativa	17

Fonte: Acervo Pessoal

Dos alunos que erraram completamente a questão 3, isto é, 27,58% dos 29 alunos, o equivalente a 8 alunos, apenas 2 deixaram a questão completamente em branco. Todos os outros tentaram realizar algumas alternativas e erraram. A conclusão completa da questão 3 é que, como podemos observar, apenas um aluno a acertou completamente, e mais 50% da turma acertou parcialmente a questão.

Conclusão da Análise do Terceiro Trabalho

Podemos observar na análise das respostas da primeira questão do trabalho, que as dificuldades encontradas na primeira aula acerca de construir conjuntos e entender quais os números que pertencem a ele, foram sanadas pela maior parte da turma, visto que a maioria soube criar exemplos corretos de números racionais e irracionais nos intervalos propostos, fazendo valer os períodos excedentes que foram necessários para a explicação do conteúdo. O mesmo aconteceu com o conceito de variável dependente e independente, pois a maior parte da turma soube identificá-las no problema proposto na questão 3 e sua definição na questão 2. Porém, eles ainda encontram dificuldades em criar os conjuntos Imagem e Domínio, pois, de um modo geral, eles não determinam todos os valores que as variáveis podem assumir.

Segundo os Procedimentos Metodológicos deste trabalho, tínhamos três tópicos para abranger. Sobre o tópico a1 e a2 podemos afirmar que, pela conclusão da questão 1 da trabalho e pela Tabela 22, eles foram abrangidos de modo satisfatório, visto que os alunos demonstraram ter aprendido mais que 50% do conteúdo ensinado. Com relação ao tópico a3, segundo a análise da resposta de cada aluno e pela Tabela 23, nenhum conteúdo exigido ultrapassou 50% de erro cometido pelos vinte alunos. Então, este tópico também foi abrangido de modo satisfatório.

É importante ressaltar que os alunos que conseguiram acertar mais de 50% da questão 3, seguiram os passos de Polya (1995), pois, assim como descrito no plano de aula da trabalho, este problema foi proposto para que os alunos passassem por cada um dos tópicos do autor. Apesar de que, dentre 20 alunos que erraram parcialmente a questão 3 da trabalho, 17 deixaram algum tópico em branco (dos quais estão as letras: e), f), g) e h)), o fato de não terem respondido tais perguntas pode ter sido dado por vários motivos, como por exemplo: falta de tempo; não sabiam quais eram os números corretos e por isso não escreveram; etc. Logo este número não pode ser levado em consideração.

Caso fosse analisado os erros de cada questão segundo uma nova tabela “alunos que acertaram parcialmente e alunos que erraram a questão 3” teríamos as seguintes proporções para as perguntas propostas:

Tabela 24: Alunos que acertaram parcialmente ou erraram a questão 3

Alternativa	Quantidade de alunos que erraram (dentre 20 que acertaram parcialmente + 8 que erraram completamente)
Letra a)	7 + 6 = 13
Letra b)	4 + 6 = 10
Letra c)	2 + 4 = 6
Letra d)	3 + 4 = 7
Letra e)	9 + 1 = 10
Letra g)	4+1 = 5
Letra f) e h)	9 + 0 = 9
Não respondeu alguma alternativa	17 + 8 = 25
Questão Bônus	9 + 2 = 11

Fonte: Acervo Pessoal

Como podemos perceber, mesmo contando com os alunos que erram completamente cada alternativa, todos os conteúdos ainda continuam com menos que 50% de erro.

4. Resultado da Análise: Resposta da questão da Pesquisa

Com relação à resolução dos problemas propostos, observamos que todos os alunos que acertaram as situações-problemas seguiram os passos descritos por Polya (1995), assim como ressaltado em cada análise. Muitos alunos erraram os problemas por não conseguirem organizar seu raciocínio e, consequentemente, não seguiram os passos para a resolução de problemas, não chegando a um resultado final apropriado.

Em muitos momentos pudemos identificar que os problemas escolhidos da OBMEP e propostos nos trabalhos para os alunos não eram vistos por eles como *problemas,* tendo em vista que eles não queriam resolvê-los, requisito fundamental segundo Polya (1995) e Vianna (2002). O que ocasionou no atraso das atividades, e, muitas vezes, em um resultado final não apropriado para o trabalho.

Podemos perceber que o último trabalho realizado fez o fechamento desta proposta, e é a partir dele que encontramos os principais resultados obtidos após essa sequência didática. Esta conclusão foi feita anteriormente e se encontra na página 101 deste trabalho: Conclusão da análise do terceiro trabalho.

Por último, acreditamos que a proposta deste trabalho contribuiu para o aprendizado dos alunos e, portanto, respondemos positivamente a questão de pesquisa "*Ensinar funções utilizando adaptações das questões da OBMEP pode ser eficaz?*". encorajando o uso das questões da OBMEP como ferramenta de ensino.

5. Considerações Finais

Esta pesquisa teve o intuito de verificar se a presente proposta contribuiria para o aprendizado dos alunos na introdução do conteúdo de funções, se tornando uma opção viável para os professores iniciarem este conteúdo, que é um dos mais importantes e que tem maior índice de incompreensão no Ensino Médio.

Para isso, utilizamos como ponto de partida diversas pesquisas referentes a este assunto no âmbito do ensino da matemática, em nível escolar. Tais pesquisas indicam deficiências por parte do aprendizado dos alunos em temas específicos do conteúdo de funções, tais como: não compreender o conceito de variável, não compreender o conceito de função, não saber que uma função pode ser representada de diferentes maneiras, entre outros. Estes resultados indicam a necessidade de uma mudança para melhorar o Ensino de Matemática destes alunos, visto que, mesmo não entendendo o conteúdo de maneira eficaz, são aprovados para o próximo ano. Um ensino que vise uma maior participação do aluno na construção de seu conhecimento, não o tornando mero expectador; que valorize a *experiência* de cada aluno, para que o conteúdo tenha *sentido*.

Quando escolhi as questões da OBMEP para esta proposta, imaginei outras perguntas e obstáculos, encontrados por eles e por mim, diferentes do que presenciei. Não imaginei que iria encontrar problemas como os citados na seção 3.1.3. Todos estes obstáculos atrapalharam o andamento do conteúdo segundo o plano de aula, o que forçou os alunos a regredirem em seu raciocínio, uma vez que para resolver cada um dos problemas propostos, eles necessitavam de conhecimentos que já deveriam ter sido aprendidos, porém não os tinham ou não "lembravam". Tais afirmações ressaltam a deficiência citada pelos autores, nas seções anteriores.

Diniz e Smole relatam que uma das principais razões para justificar a dificuldade de interpretar e entender textos de problemas matemáticos se deve ao fato de que os alunos não apresentam domínio do contexto que estão sendo inseridos, por não ter tido contato com esse tipo de situação até então (DINIZ e SMOLE, 2001). Porém, quando tentei apresentar esse mundo a eles, os alunos se mostraram relutantes ao pensamento matemático, outro fator que influenciou na resolução dos trabalhos.

Em suma, o que presenciei foi que o par *experiência/sentido* é praticamente inexistente para a maior parte dos alunos dessa turma, sendo a experiência algo exaustivo, que eles não estão dispostos a tê-la. Também foi notado que a ansiedade de cada aluno ao ler o problema e não entendê-lo, logo na primeira leitura, é grande. A maior parte deles não parava para pensar, para ler, não davam atenção aos detalhes. Enfim, não executavam o primeiro passo sugerido por Polya (1995), a compreensão do problema, pois, não tinham a paciência que uma leitura e interpretação de problemas matemáticos requerem.

A proposta apresentada, de acordo com as análises feitas, atende, em grande parte, a necessidade de um ensino de Matemática que valorize o par *experiência/sentido* de Larrosa (2002), a originalidade de cada pensar (LARROSA, 2002) e as trocas de experiência de Magarinus (2013), podendo contribuir para o aprendizado dos alunos em geral.

6. Referências Bibliográficas

ALIARDI, Priscila S. Resolução de Problemas: Um estudo sobre Matemática Financeira no Ensino Médio. Porto Alegre: UFRGS, 2014. Trabalho de Conclusão de Curso - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2014. Disponível em < http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/101407> acesso online em 14/06/2015.

BARRETO, Marina M. Tendências Atuais sobre o Ensino de Funções no Ensino Médio. in: Matemática e Educação Sexual: Modelagem do Fenômeno da absorção/eliminação de anticoncepcionais orais diários. Dissertação de Mestrado. PPg - Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2008. Disponível em < http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/modulo_II/pdf/funcoes.pdf> acesso online em 24/5/2015.

BASSO, M. V. A.; GRAVINA, M. A. Mídias Digitais na Educação Matemática. In: GRAVINA, M. A. et al. Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática. 1ª Ed. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

BRASIL, Secretaria da Educação Média e Tecnólgica. PCNEM: Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasilia: MEC, 2000.

CORAZZA, Sandra. Para pensar, pesquisar e artistar a educação: sem ensaio não há inspiração. In: Educação, São Paulo: Segmento, v.6, p. 68-73, 2007.

DIONIZIO, Fátima Aparecida Q. (UEPG); BANDT, Célia. F. (UEPG). O Caminho Percorrido pela Semiótica e a Importância dos Registros de Representação Semiótica para a Aprendizagem da Matemática. Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul – IX ANPED SUL, 2012. Disponível em: <http://www.ucs.br/etc/conferencias/index.php/anpedsul/9anpedsul/paper/viewFile/2866/264 > acesso online em 24/5/2015.

DUVAL, Raymond. Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Acântara (org) Aprendizagem em Matemática: Registros de Rrepresentação Semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p. 11-33.

ECHEVERRÍA, Maria D. P. P.; POZO, Juan I. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender. Disponível em:

<http://boltz.ccne.ufsm.br/pub/mpeac/other/pozo_solucao_problemas_cap_01.pdf > acesso online em 14/06/2015.

LARROSA, Jorge B. Notas sobre a experiência e o saber de experiência. Revista Brasileira de Educação [online] 2002, (jan-abr): [data de referência: 24 / 5 / 2015] Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=27501903> ISSN 1413-2478.

LEÃO, A. S. G.; BISOGNIN, V. Construção do conceito de função no ensino fundamental por meio da metodologia da resolução de problemas. Educação Matemática em Revista - R. S., n. 10, v. 1, p. 27-35, 2009.

LEITE, Lucas B. Seminários Integrados: Um Estudo de Caso sobre sua Implementação. Porto Alegre: UFRGS, 2014. Trabalho de Conclusão de Curso - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2014. Disponível em < http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/101408> acesso online em 24/5/2015.

LUDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. Pesquisa em Educação Matemática: Abordagens Qualitativas. São Paulo, Editora Pedagógica e Universitária (EPU), 1986, p. 11-24.

LUTZ, Mauricio R. Uma Sequência Didática Para o Ensino de Estatística a Alunos d Ensino Médio na Modalidade PROEJA. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós – Graduação em Ensino de Matemática na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Disponível em < http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/49625/000850523.pdf?...1> acesso online em 24/5/2015.

MAGARINUS, Renata. Uma Proposta para o Ensino de Funções Através da Utilização de Objetos de Aprendizagem. Santa Maria: Universidade Federal de Santa Maria, 2013. Dissertação para Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Centro de Ciências Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, 2013. Disponivel em < http://ufsmprofmat.weebly.com/uploads/9/3/5/6/9356672/dissertao_renata_magarinus.pdf> acessado em 24/5/2015.

MILAUSKAS, George A. Problemas de Geometria criativos podem levar à resolução criativa de problemas. In: LINDQUIST, Mary M., SHULTE, Albert P. (org.): Aprendendo e ensinando Geometria. Tradução: Hygino H. Domingues. Editora Atual: São Paulo, 1994, p. 86-106.

ONUCHIC, L. de la R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M> A. V (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

POLYA, F. A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitos Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Inerciência, 1995.

POZO, J. I. (Org). A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução: Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998. p.9-65.

SOUZA, Doralice da Silva G. A Ação do Supervisor Escolar Dentro do Planejamento Participativo nas Instituições Particulares. Rio de Janeiro: Universidade Candido Mendes, 2005. Dissertação para o Programa de Pós-Gradução "Lato Sensu" – Projeto a Vez do Mestre. Rio de Janeiro 2005. Disponível em < http://www.avm.edu.br/monopdf/5/DORALICE%20DA%20SILVA%20GOMES%20DE%20SOUZA.pdf> acesso online em 24/5/2015.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. Bolema. Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso), v. 14, p. 66-91, 2000.

TODESCHINI, Isabel L. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP): uma visão sobre a avaliação na perspectiva da resolução de problemas. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012. Trabalho de Conclusão de Curso – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2012. Disponível em < http://hdl.handle.net/10183/54862> acesso online em 26/5/2015.

VALENTE, José A. Prefácio. In: PAPERT, Seymour. Logo: computadores e educação. São Paulo: Brasiliense, 1985. p. 7-10.

VIANNA, Carlos. Livro Temas em Educação I, o livro das Jornadas: Resolução de Problemas. Organizado por Futuro Congressos e Eventos, 2002. Disponível em < http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Carlos8.pdf> acesso online em 24/5/2015.

Outros:

BAKHTIN, M. M. Os gêneros do discurso. In Estética da criação verbal. São Paulo: Martins Fontes, 1992.

COSTA, A. C. Conhecimentos de estudantes universitários sobre o conceito de função. 2004. 92 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontificia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

COSTA, C. B. de J. da. O conhecimento do professor de matemática sobre o conceito de função. 2008. 96 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações. 1. ed. São Paulo: Ática, 2011. v.1.p.70-109

DELEUZE, Gilles. O abecedário de Gilles Deleuze, entrevista a Claire Parnet, em 1988, em vídeo, transcrito e traduzido por Tomás Tadeu da Silva.

DINIZ, Maria I. SMOLE, Kátia S. (Orgs.). Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

MAGARINUS, R. Estudo de funções: compreensões e aprendizagem de alunos do ensino médio. 2006. 71 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, 2006.

MARIANI, R. de C. P. O estudo de funções: uma análise através dos registros de representação semiótica. Educação Matemática em Revista - R. S., n. 6, p. 49-58, dez. 2004

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org). Escritas e Leituras na Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. p.63-76.

OLIVEIRA, M. K. de. Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento, um processo sócio-histórico. 4. ed. São Paulo:Scipione, 1999.

POLYA, George. How to Solve It, 2nd ed., Princeton University Press, 1957

VALENTE, J. A. Por quê o computador na educação. Computadores e Conhecimento: repensando a educação. Campinas: Gráfica da UNICAMP, p. 24-44, 1993.

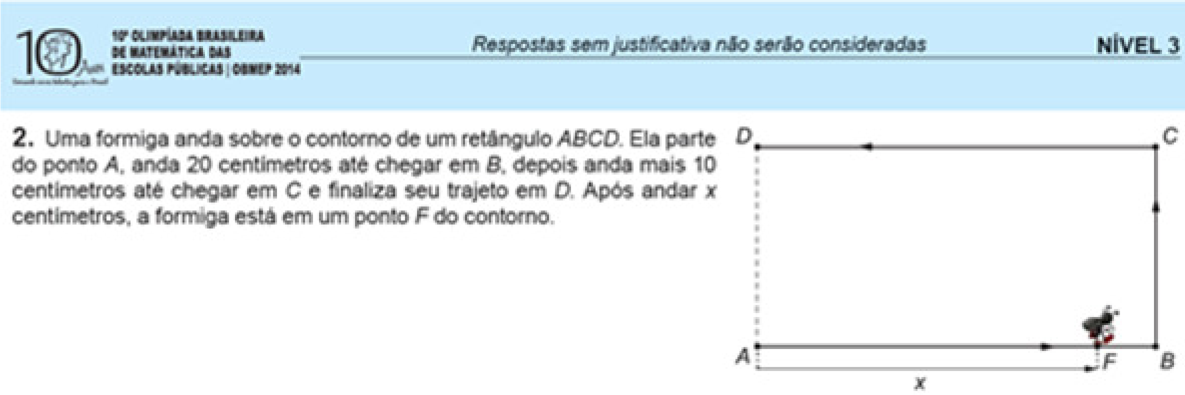
VALENTE, José Armando. Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador. O papel, 2005. Disponível em: < http://cmapspublic.ihmc.us/rid=1HXFXQKSB-23XMNVQ-M9/VALENTE_2005.pdf> acesso online em 24 Maio de 2015.

ZUFFI, E. M,; PACCA, J. L. Sobre funções e linguagem matemática de professores do ensino médio. Zeteliké, Campinas: UNICAMP, v. *, n. 14/14, p. 7-28, jan./dez/2000.

APÊNDICES

Apêndice A: Segundo Trabalho

Primeiro Problema


10ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS | OBMEP 2014

Respostas sem justificativa não serão consideradas

NÍVEL 3

2. Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo *ABCD*. Ela parte do ponto *A*, anda 20 centímetros até chegar em *B*, depois anda mais 10 centímetros até chegar em *C* e finaliza seu trajeto em *D*. Após andar *x* centímetros, a formiga está em um ponto *F* do contorno.

1. Quantos centímetros a formiga anda em seu trajeto de A até D?
2. Calcule a área do triângulo ADF quando $x = 22$ cm.
3. Qual é a variável livre de problemas parecidos ao exercício 2.?
4. Qual é a variável dependente de problemas parecidos ao exercício 2.?
5. Qual é o valor máximo da variável dependente para o triângulo ADF?
6. O que você tem a dizer sobre a variável independente?
7. Construa um conjunto para os possíveis valores da variável independente.
8. Faça o mesmo para a variável dependente. Dica: Separe em casos!
9. Construa regras, de acordo com os cálculos feitos, que calculem de um modo geral a área do triângulo ADF em função de x.

Segundo Problema

Observe a figura 1 que representa uma folha de papel no formato de um triângulo retângulo e isósceles, ou seja, é retângulo por ter um ângulo reto e é isóscele por ter dois lados iguais. Estes lados iguais medem 10cm.

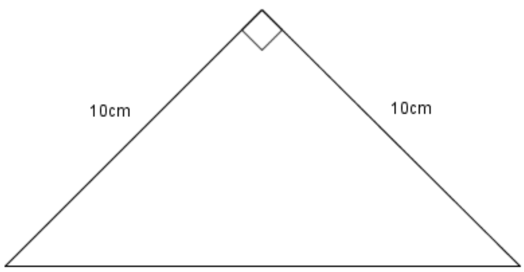


Figura 1

Imagine agora que estamos dobrando o triângulo pela ponta onde está o ângulo reto, de modo que forme um triângulo virado para baixo, como na figura 2. Nesta figura a distância do vértice do ângulo reto ao longo dos catetos até a dobra é 2cm.

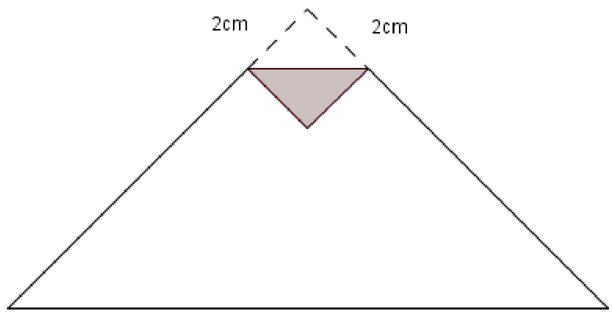


Figura 2

Observe a figura 3, na qual estamos dobrando mais ainda o nosso triângulo. na qual estamos dobrando mais ainda o nosso triângulo. Note que, agora, a parte sobreposta determina um trapézio. Nesta figura a distância do vértice do ângulo reto ao longo dos catetos até a dobra é 7cm.

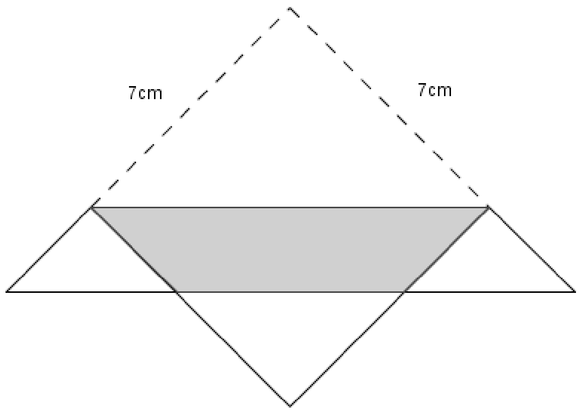


Figura 3

O objetivo desta situação-problema é calcular a área da região onde a folha se sobrepõe, para cada valor possível da distância do vértice ao longo dos catetos até a dobra.

20. Com a folha fornecida com os triângulos, represente cada situação dada e pinte qual a área que queremos calcular.

De acordo com a figura 2:

21. Dado que a distância do vértice do ângulo reto até a dobra é 2cm, calcule a área do triângulo sobreposto.
22. Qual é a variável livre do problema?
23. Qual é a variável dependente do problema?
24. Qual é o valor máximo da variável livre para que a figura sobreposta continue sendo um triângulo?
25. Qual é o valor da variável dependente para este caso?
26. Construa um conjunto para os possíveis valores da variável livre para que a figura continue sendo um triângulo.

27. Faça o mesmo para a variável dependente.

28. Construa a regra, de acordo com os cálculos feitos, que calculem de um modo geral a área do triângulo sobreposto.

De acordo com a figura 3:

29. Dado que a distância do vértice do ângulo reto ao longo dos catetos até a dobra é 7cm, calcule a área do trapézio sobreposto.

30. Faça o mesmo para $\frac{20}{3}$ cm.

31. Considerando que a área máxima é a encontrada no exercício anterior, construa um conjunto dos possíveis valores para a variável dependente.

32. Qual é a variável livre do problema?

33. Qual é a variável dependente do problema?

34. Para qual valor da variável livre a figura sobreposta deixa de existir?

35. Construa um conjunto para os possíveis valores da variável livre para que a figura continue existindo e sendo um trapézio.

36. Construa a regra, de acordo com os cálculos feitos, que calculem de um modo geral a área do trapézio sobreposto.

De acordo com todo o problema:

37. Construa o domínio;

38. Construa a imagem;

Apêndice B: Terceiro Trabalho

Questão 1) Observe as questões abaixo e faça o que se pede:

d) Crie um conjunto utilizando { }; Quais números pertencem a esse conjunto?

e) Dado o conjunto $(1,2)$: o número 1 pertence ao conjunto? E o número 2? Que tipo de números pertencem a este conjunto? Dê um exemplo

f) Dado o conjunto $[-1,+\infty)$: o número -1 pertence ao conjunto? O que significa “$+\infty$"? Que tipo de números pertencem a este conjunto? Dê cinco exemplo

Questão 2) Relacione os itens da coluna 1 com o seu respectivo significado na coluna 2:

Coluna 1	Coluna 2
g) Variável	( ) É um número.
h) Variável Dependente	( ) Pode assumir qualquer um dos valores em um conjunto de valores.
i) Variável Independente	( ) É a variável que não depende de outra variável para variar.
j) Domínio	( ) É a variável que depende de outra para variar.
k) Imagem	( ) É o conjunto que contém os números para a variável dependente.
l) 100.000	( ) É o conjunto que contém os números para a variável independente.

3) Observe o enunciado abaixo, que foi retirado da prova da OBMEP de 2006, 2ª fase do nível 3, e responda as questões a seguir:

2

Raimundo e Macabéa foram a um restaurante que cobra R$ 1,50 por cada 100 gramas de comida para aqueles que comem até 600 gramas e R$ 1,00 por cada 100 gramas para aqueles que comem mais de 600 gramas.

a) Quanto paga quem come 350 gramas?

b) Quanto paga quem come 720 gramas?

Se quiséssemos saber qual o valor a ser pago por qualquer quantidade de comida:

c) Quem seria a variável independente?

d) Quem seria a variável dependente?

e) Construa uma expressão que calcule o preço da comida para quem come até 600 gramas

f) Construa a imagem e o domínio para essa expressão

g) Construa uma expressão que calcule o preço da comida para quem come mais que 600 gramas

h) Construa imagem e o Domínio para essa expressão

Questão Bônus:

Raimundo consumiu 250 gramas mais que Macabéa, mas ambos pagaram a mesma quantia. Quanto cada um deles pagou?

Apêndice C: Termo de Consentimento Informado

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Termo de Consentimento Informado

A Escola Técnica Estadual Irmão Pedro, escola de rede pública estadual, neste ato, representada pela direção por intermédio do presente instrumento, autoriza Paola Rossato Bernardo, basileira, solteira, estudante de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a utilizar a proposta de aula: "Ensino de funções utilizando questões da OBMEP e o software Geogebra" em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio, e analisá-la em seu Trabalho de Conclusão de Curso, que é uma exigência parcial para obtenção do Título de Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

O trabalho será orientado pelo Prof. Alvino Alves Sant'Ana, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, orientador do TCC, e pela Profa. Suzana Bertoletti, professora de Matemática da Escola Técnica Estadual Irmão Pedro.

A autorizada, por sua vez, se obriga a manter em absoluto sigilo a identidade dos discentes que participarem da aplicação da proposta de aula.

Porto Alegre, 10 de março de 2015

Raquel Diner da Rocha
Escola Técnica Estadual Irmão Pedro

Diretor(a) da Escola

Paola R. B.

Paola Rossato Bernardo

De acordo:

Prof. Alvino Alves Sant'Ana

Suzana F. M. Bertoletti

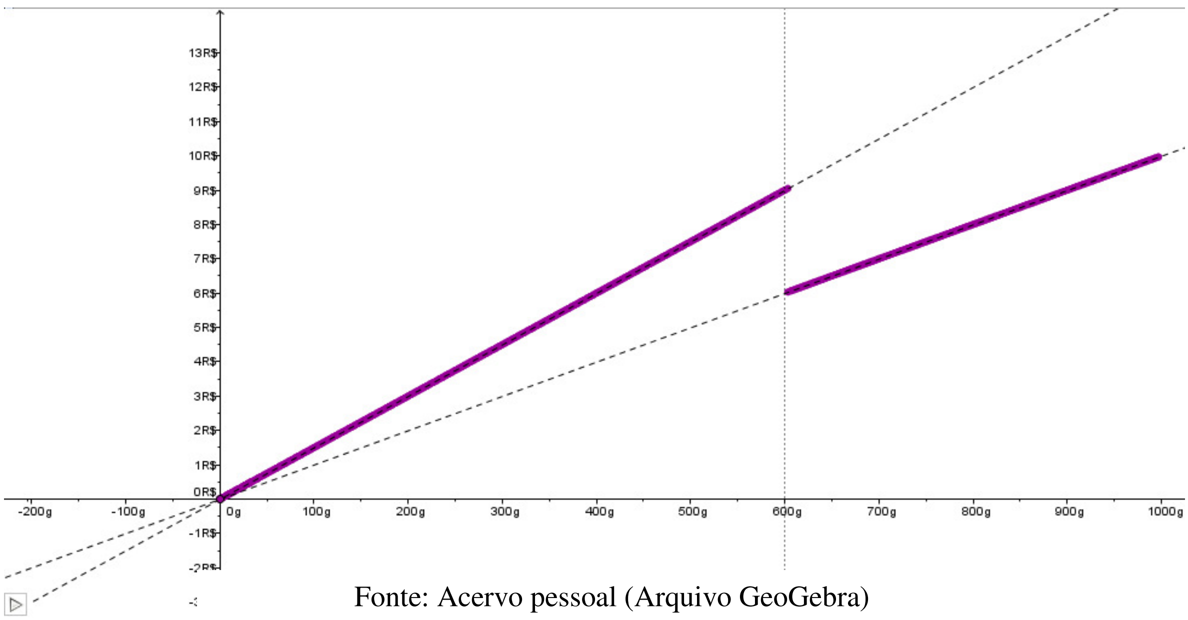
Profa. Suzana Bertoletti

Apêndice D: O uso do GeoGebra como continuidade da proposta

Encorajamos o uso do *software* GeoGebra[5], em sala de aula, para dar continuidade da proposta apresentada nesse trabalho. Em suma, sua escolha se deve ao fato de que ele é um programa no qual há potencial semiótico, principalmente pela facilidade para transitar entre a geometria plana e a álgebra, e vice-versa. Além disso, o GeoGebra é um *software* livre e acessível para todos que possuem um computador com *Java*.

Deixamos como sugestão, para a segunda parte da aula do segundo trabalho, que sejam lecionadas utilizando animações de todos os problemas propostos no *software* GeoGebra. Nesta aula, pode ser mostrado aos alunos animações das situações que os problemas propõem. Após, poderia haver debates sobre a correspondência entre os valores que obtemos como resposta nas expressões, e os pontos obtidos nos gráficos. Também pode ser realizado um debate sobre os gráficos no plano cartesiano. Os debates consistem em explicar aos alunos que, para cada valor de x pertencente ao Domínio da função, está associado um único valor de y de sua Imagem, formando os pontos (x, y) no plano cartesiano, de acordo com cada situação estudada. Explicar que, se plotássemos todos os pontos que obtemos a partir da expressão, obteríamos o gráfico desejado, exibido na tela do GeoGebra. Abaixo, seguem imagens de alguns objetos que foram construídos no GeoGebra.

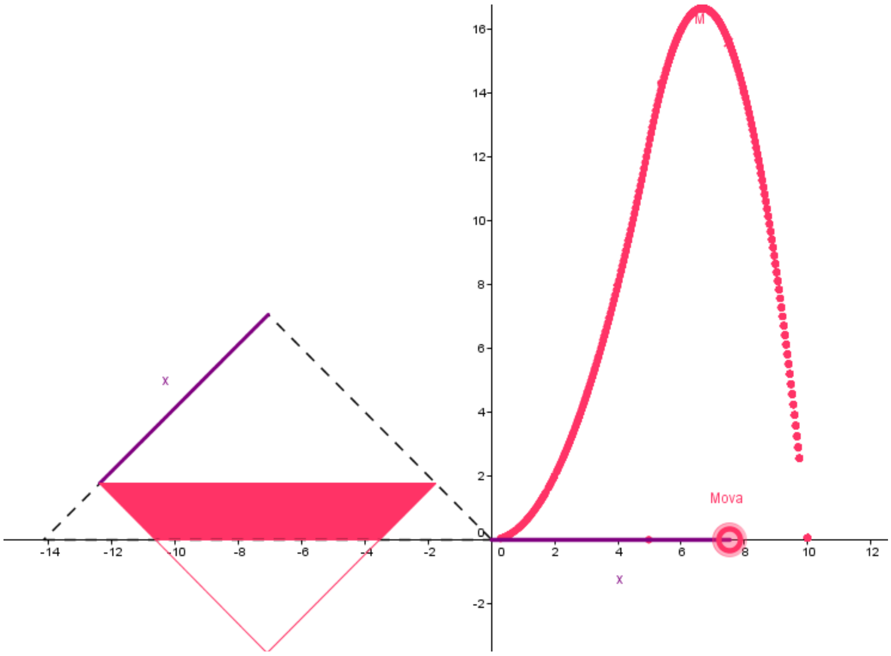
Figura 64: Resposta do item c) da Figura 3



Fonte: Acervo pessoal (Arquivo GeoGebra)

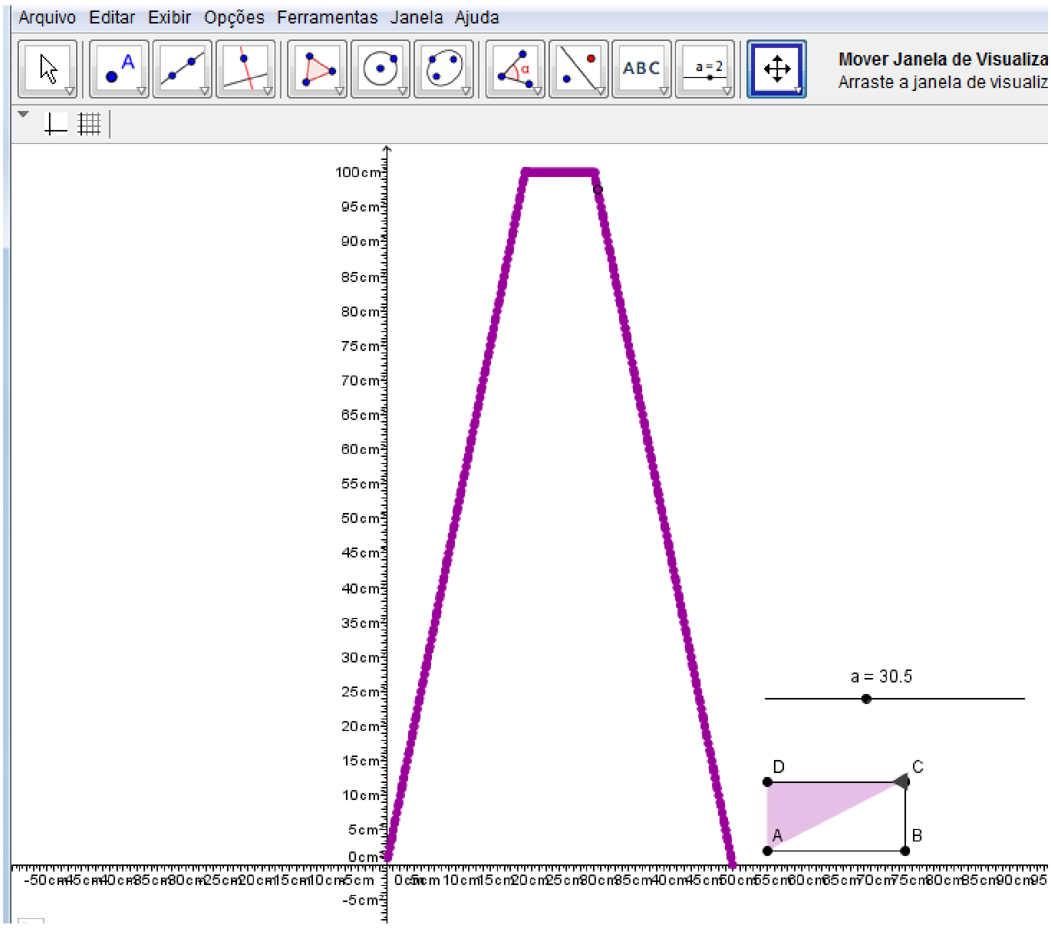
[5] Disponível para instalação em www.geogebra.org

Figura 65: Resposta da questão c) da Figura 5



Fonte: Acervo pessoal (Arquivo GeoGebra)

Figura 66: Resposta do item d) da Figura 9



Fonte: Acervo pessoal (Arquivo GeoGebra)

Gostaríamos de salientar a importância de cada arquivo criado no GeoGebra, disposto anteriormente para a resolução e explicação de cada questão, visto que não basta o professor apenas apresentar o gráfico pronto no *software*, mas é preciso também apresentar aos alunos a "animação da questão", tendo em vista o debate que haverá no decorrer da aula. Podemos reparar nas figuras 4, 8 e 10, que os arquivos referentes às imagens dispostas, têm ou o comando *seletor* do GeoGebra ou algum ponto chamado *mova,* no qual, basta clicar no *play* para o seletor iniciar a animação, ou mover o ponto para observar o que está acontecendo com o gráfico e qual situação cada ponto determina.

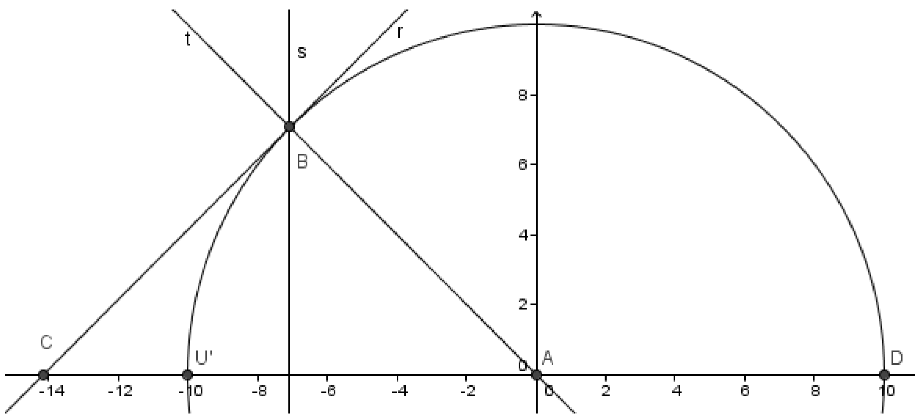
Na Figura 66 observamos que, para cada ponto determinado pela coordenada x no *mova*, obtemos ou um triângulo ou um trapézio hachurado. A figura ao lado do gráfico representa o que a questão da OBMEP propõe, de forma dinâmica.

Na figura 67, ao clicarmos o comando *play* no seletor do GeoGebra, observamos o gráfico correspondente às expressões construídas e, ao lado direito do gráfico, um retângulo que mostra o caminho percorrido pela formiga e a área hachurada correspondente ao triângulo DAF.

Segue abaixo os principais passos para a criação da Figura 65 no GeoGebra:

Primeiramente, vamos construir um círculo C_1 de centro em $(0,0)$ e raio 10 e, depois, traçamos a reta $y = -x$ que denotaremos por t. Marcando a interseção da reta t com C_1, criaremos os pontos B e U, e da intersecção de C_1 com o eixo x, criaremos os pontos D e U'. Construímos então uma reta s que é perpendicular ao eixo x pelo ponto B, e depois uma reta r que é reflexão de t por s. Esta reta interseccionada com o eixo x originará um ponto que chamaremos de C.

Figura 67: construção parcial do objeto geométrico da Figura 65



Fonte: Acervo Pessoal

Criamos então o triângulo $\triangle ABC$, que será chamado de $P1$ e marcamos o segmento $\overline{AD}$, criando um ponto E, que nomearemos por "Mova" em $\overline{AD}$. Vamos nomear o novo segmento $\overline{AE}$ de a, que será nossa variável.

Agora, criamos o círculo C_3 em B de raio a. A intersecção de C_3 com $P1$ gerará os pontos F e G e criamos então o triângulo BFG que nomearemos de $P2$.

Para $0 \leq a \leq 5$, teremos então outro triângulo $P3$ que será a $r$eflexão do $\triangle BFG$ por $\overline{FG}$, que chamaremos de $\triangle B'FG$. Então, criamos um ponto animado P de coordenadas $(a, \frac{a^2}{2})$, para $0 \leq a \leq 5$. Para $a > 5$, marcamos a intersecção de $P3$ com $\overline{CA}$ nos pontos J e K. Chamaremos de b o segmento $\overline{B'J}$ e criamos um ponto animado I de coordenadas $(a, \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2})$, para $5 < a \leq 10$.

Finalmente, após a construção, basta habilitar cores e rastros dos pontos I e P que eles desenharão a função resposta dos problemas assim como mostra a Figura 65.

Anexo 1

Figura 68: Os quatro passos de Polya

Como Resolver Um Problema

Primeiro

É preciso *compreender* o problema.

COMPREENSÃO DO PROBLEMA

Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?

É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?

Trace uma figura. Adote uma notação adequada.

Separa as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?

Segundo

Encontre a conexão entre os dados e a incógnita.

É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não poderes encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar afinal a um *plano* para a resolução

ESTABELECIMENTO DE UM PLANO

Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?

Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil?

Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.

Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu resultado? ? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?

É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.

Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si?

Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?

Terceiro

Execute o seu plano

EXECUÇÃO DO PLANO

Ao executar o seu plano de resolução, *verifique cada passo*. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto

Quarto

Examine a solução obtida

RETROSPECTO

É possível *verificar o resultado*? É possível verificar o argumento?

É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance?

É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Fonte : POLYA, G.. A Arte de Resolver Problemas. P.: XIX-XX. 1995