UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Medidas que maximizam a entropia no Deslocamento de Haydn

Dissertação de Mestrado

Fernanda Ronssani de Figueiredo

Porto Alegre, abril de 2015

Fernanda Ronssani de Figueiredo

Medidas Maximizantes no Deslocamento de Haydn

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção de Título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera

Porto Alegre
2015

Dissertação submetida por Fernanda Ronssani de Figueiredo [1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador
Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera

Banca Examinadora
Prof. Dr. Eduardo Garibaldi (UNICAMP)
Prof. Dr. Fagner Bernardini Rodrigues (UFRGS)
Prof. Dr. Paolo Giulietti (UFRGS)

Data da defesa: 15 de abril de 2015

[1] Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Aos meus pais e meu irmão,
pelo incentivo e apoio.

"Hoje os ventos do destino
Começaram a soprar
Nosso tempo de menino
Foi ficando para trás.
Com a força de um moinho
Que trabalha devagar
Vai buscar o teu caminho
Nunca olha para trás"
(Engenheiros do Hawaii)

"Ao infinito... e além!"
(Buzz Lightyear)

Resumo

Neste trabalho é abordado o exemplo proposto por Nicolai Haydn, no qual é dado um exemplo de um deslocamento onde é possível construir infinitas medidas de máxima entropia, além de infinitos estados de equilíbrio.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos; Teoria Ergódica.

Abstract

In this work, we present the example shown by Nicolai Haydn, which is given by subshift where is possible to show infinity measures of maximal entropy, besides infinitely many distinct equilibrium states.

Keywords: Dynamical Systems; Ergodic Theory.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

A palavra entropia, do grego energo + tropos significando ponto de virar, foi introduzida em 1864 em um trabalho do físico e matemática alemão Rudolph Clausius, um dos pioneiros do estudo da Termodinâmica, que definiu a mudança de entropia de um corpo como a transferência de calor dividido pela temperatura, e postulou que a entropia global não diminui (Segunda Lei da Termodinâmica).

A entropia definida na Termodinâmica desenpenha papel de destaque em diversas áreas do conhecimento, um exemplo importante é a sua aplicaçãoo na Teoria Ergódica. Entre os anos de 1955-1959 os matemáticos soviéticos Andrey Kolmogorov e Yakov Sinai propuseram uma definição de entropia de um sistema dinâmico.

A noção de entropia métrica, denotada por $h_\mu(f)$, onde μ é uma medida de probabilidade para o sistema $f : X \longrightarrow X$, é utilizada para quantificar a complexidade do sistema. A entropia topológica, denotada por $h_{top}(f)$, mede a taxa de crescimento exponencial de todas as órbitas sob iteração. Um dos fatos interessantes que relaciona as duas noções de entropia é o Princípio Variacional, que nos diz que se $f : X \longrightarrow X$ é uma função contínua e X é um espaço métrico compacto, então $h_{top}(f) = \sup h_\mu(f)$, sendo o supremo tomado sobre todas as medidas invariantes de probabilidade para f. Uma medida tal que $h_{top}(f) = \sup h_\mu(f)$ é dita medida de máxima entropia.

A noção de pressão e estados de equilíbrio, introduzida por David Ruelle, é uma generalização da entropia onde atribuímos pesos às órbitas com relação a uma função potencial. Denotamos a pressão do sistema (X, f) para um potencial $A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por $P(f, A)$ e um estado de equilíbrio é uma probabilidade invariante μ tal que $h_\mu(f) + \int A d\mu = P(f, A)$.

Neste trabalho é abordado o exemplo proposto por Nicolai Haydn em [5], no qual é dado um exemplo de um deslocamento onde é possível construir infinitas medidas de máxima entropia, além de infinitos estados de equilíbrio. Para tal, no Capítulo 2 faremos uma breve revisão dos conceitos de Teoria de Medida que são fundamentais para o entendimento do problema proposto, tais como propriedades de Espaços Mensuráveis, Espaços de Medidas e o Teorema de Recorrência de Pioncaré. No Capítulo 3, apresentamos definições e alguns resultados de Teoria Ergódica, incluindo-se o Teorema Ergódico de Birkoff. No Capítulo 4, expomos definições e resultados de entropia, dando ênfase à entropia métrica, entropia topológica, entropia de Bowen e ao Princípio Variacional. No Capítulo 5, tratamos sobre Estados de Equilíbrio e pressão, indicando suas definições e principais propriedades. Finalmente, no Capítulo 6, demonstramos o exemplo proposto por Haydn em seu artigo.

Capítulo 2

Tópicos de Teoria da Medida e Recorrência

Neste capítulo inicial recordaremos definições e alguns resultados da Teoria da Medida que serão úteis ao longo do texto. As demonstrações dos resultados apresentados neste capítulo podem ser encontradas em [3] ou [9].

2.1 Espaços mensuráveis

Dado um subconjunto $A \subset X$ denotaremos por A^c o complementar $X \setminus A$ do conjunto A em relação a X.

Definição 2.1. Uma **álgebra** de X é uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X que é fechada para as operações elementares de conjuntos e contém o conjunto vazio, ou seja,

a) $\emptyset \in \mathcal{B}$;

b) $A \in \mathcal{B}$ *implica* $A^c \in \mathcal{B}$;

c) $A, B \in \mathcal{B}$ *implica* $A \cup B \in \mathcal{B}$.

Então $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ e $A \setminus B = A \cap B^c$ também estão em $\mathcal{B}$ quaisquer que sejam $A, B \in \mathcal{B}$. Observe que, por associatividade, a união e a interseção são fechadas para qualquer número finito de elementos de $\mathcal{B}$.

Definição 2.2. Dizemos que uma álgebra é uma **σ-álgebra** de X se também for fechada para uniões enumeráveis.

$$A_j \in \mathcal{B} \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n, \ldots \text{ implica } \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{B}.$$

Observe que para σ-álgebras temos que a interseção também é fechada para qualquer quantidade enumerável de elementos de $\mathcal{B}$.

Definição 2.3. Um **espaço mensurável** é uma dupla $(X, \mathcal{B})$ onde X é um conjunto e $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra de conjuntos de X. Os elementos de $\mathcal{B}$ são ditos **conjuntos mensuráveis** do espaço.

Proposição 2.1. *Considere uma família não-vazia qualquer* $\{\ \mathcal{B}_i;\ i \in \mathcal{T}\}$ *de σ-álgebras, $\mathcal{T}$ conjunto qualquer. Então a interseção* $\mathcal{B} = \bigcap_{i \in \mathcal{T}} \mathcal{B}_i$ *é uma σ-álgebra.*

Definição 2.4. A σ-álgebra gerada por uma família $\mathcal{E}$ de subconjuntos de X é a menor σ-álgebra $\sigma(\mathcal{E})$ que contém a família $\mathcal{E}$, ou seja, é a interseção de todas as σ-álgebras que contém $\mathcal{E}$.

Quando tratamos de espaços topológicos, a escolha natural a ser feita é tomar $\mathcal{E}$ como sendo a topologia τ. Temos então:

Definição 2.5. A **σ-álgebra de Borel** (ou boreliana) de um espaço topológico é a σ-álgebra $\sigma(\mathcal{E})$ gerada pela topologia τ, ou seja, é a menor σ-álgebra que contém todos os abertos de τ. Os elementos de $\sigma(\mathcal{E})$ são ditos borelianos.

2.2 Espaços de medida

Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável.

Definição 2.6. Uma **medida** em $(X, \mathcal{B})$ é uma função $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow [0, +\infty]$ que satisfaz:

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- μ é σ-aditiva, ou seja, $\mu(\ \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ para quaisquer $A_j \in \mathcal{B}$ disjuntos dois-a-dois.

A tripla $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é chamada **espaço de medida**.

Quando vale $\mu(x) < \infty$ dizemos que μ é uma medida finita e se $\mu(x) = 1$ dizemos que μ é uma **probabilidade**. Se μ é uma probabilidade, dizemos que $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um **espaço de probabilidade**.

Definição 2.7. Dizemos que uma álgebra $\mathcal{A}$ é **compacta** se qualquer sequência decrescente $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \ldots$ de elementos não vazios de $\mathcal{A}$ tem interseção não vazia.

Definição 2.8. Um espaço de medida é dito **completo** se todo subconjunto de um conjunto mensurável com medida nula também é mensurável, ou seja,

$$\left.\begin{array}{r} A \in \mathcal{A} \\ B \subset A \\ \mu(A) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ B \in \mathcal{A}$$

Nesse caso, $\mu(B) = 0$, já que $0 \leqslant \mu(B) \leqslant \mu(A) = 0$.

2.3 Integração em espaços de medida

Nessa seção iremos considerar $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida.

Definição 2.9. Dados espaços mensuráveis $(X, \mathcal{B})$ e $(Y, \mathcal{C})$, dizemos que uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é **mensurável** se $f^{-1}(C) \in \mathcal{B}$, para todo $C \in \mathcal{C}$.

Proposição 2.2. *Sejam f_1 e f_2 funções mensuráveis e $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$. Então as seguintes funções também são mensuráveis:*

- $(c_1 f_1 + c_2 f_2)(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$
- $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$
- $\max\{f_1, f_2\}(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$

Definição 2.10. Dizemos que uma função $s : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é simples se existem constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ e conjuntos $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{B}$ disjuntos dois-a-dois tais que

$$s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathcal{X}_{A_j}$$

onde $\mathcal{X}_A$ é a função característica de A, isto é, $\mathcal{X}_A(x) = 1$, se $x \in A$, e $\mathcal{X}_A(x) = 0$ se $x \notin A$.

Definição 2.11. Seja s uma função simples. Então a integral de s em relação à medida μ é dada por

$$\int s d\mu = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(A_j)$$

Teorema 2.1. *Seja $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ uma função mensurável. Então existe uma sequência $s_1, s_2, \ldots$ de funções simples mensuráveis tal que*

$$\lim_{k \to \infty} s_k(x) = f(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Se $f \geqslant 0$ então a sequência pode ser escolhida de modo que $0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots$.

Definição 2.12. Seja $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ uma função mensurável não negativa. Então

$$\int f d\mu = \lim_{n} \int s_n d\mu,$$

onde $\{s_n\}$ é a sequência do teorema acima.

Vamos agora estender a definição da integral para qualquer função mensurável.

Observe que dada uma função $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ podemos escrever f como sendo

$$f = f^+ - f^-$$

onde

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ e } f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Temos que elas são não negativas e mensuráveis se f for mensurável.

Definição 2.13. Seja $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ uma função mensurável. Então

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu \ - \int f^- d\mu \ ,$$

desde que pelo menos uma das integrais do lado direito seja finita.

Definição 2.14. Dizemos que uma função $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ é **integrável** se for mensurável e a sua integral for finita. Denotamos o conjunto das funções integráveis por $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Dada uuma função mensurável $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ e um conjunto mensurável E definimos a integral de f sobre E por

$$\int_E f d\mu = \int f \mathcal{X}_E d\mu,$$

onde $\mathcal{X}_E$ é a função característica do conjunto E.

Definição 2.15. Dizemos que uma propriedade é válida em **μ-quase todo ponto** se é válida em todo X exceto, possivelmente, num conjunto de medida nula.

2.4 Medidas Invariantes

Definição 2.16. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação mensurável. Dizemos que a medida μ é **invariante** por f se

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$$

para todo conjunto mensurável $E \subset X$. Também podemos dizer que f preserva μ.

Intuitivamente a definição nos diz que a probabilidade de um ponto estar em um conjunto qualquer é igual à probabilidade de que a imagem desse ponto esteja nesse mesmo conjunto.

Proposição 2.3. *Sejam $f : X \longrightarrow X$ uma transformação mensurável e μ uma medida em X. Então f preserva μ se, e somente se,*

$$\int \phi \; d\mu = \int \phi \circ f \; d\mu$$

para toda função μ-integrável $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

2.5 Teorema de Recorrência de Poincaré

Teorema 2.2 (Recorrência de Poincaré - Versão Mensurável)**.** *Seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação mensurável e μ uma medida finita invariante por f.*

Seja $E \subset X$ qualquer conjunto mensurável com $\mu(E) > 0$. Então para μ-quase todo ponto $x \in E$ existem infinitos valores de n para os quais $f^n(x)$ também está em E.

Demonstração. Representaremos por E_0 o conjunto dos pontos $x \in E$ que nunca regressam a E. Iremos então provar que E_0 tem medida nula. Primeiramente, observe que as pré-imagens $f^{-n}(E_0)$ são duas-a-duas disjuntas. De fato, suponhamos por absurdo, que existem $m > n \geq 1$ tais que $f^{-m}(E_0)$ intersecta $f^{-n}(E_0)$. Seja x um ponto da interseção e seja $y = f^n(x)$. Então $y \in E_0$ e $f^{m-n}(y) = f^m(x) \in E_0$ que está contido em E. Isto quer dizer que y volta pelo menos uma vez a E, o que contradiz a definição de E_0.

Como μ é invariante para f, temos que $\mu(f^{-n}(E_0)) = \mu(E_0)$ para todo $n \geq 1$. Mais ainda,

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(E_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f^{-n}(E_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_0).$$

Por hipótese, temos que a medida é finita, portanto o lado esquerdo da expressão é finito. Por outro lado, na última expressão temos uma soma de infinitas parcelas iguais, e a única forma desta soma ser finita é que as parcelas sejam todas nulas. Logo, $\mu(E_0) = 0$.

Agora, denotamos por F o conjunto dos pontos $x \in E$ que regressam a E apenas um número finito de vezes. Pela definição, temos que todo ponto $x \in F$ tem algum iterado $f^k(x)$ em E_0. Ou seja,

$$F \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(E_0).$$

Como $\mu(E_0) = 0$ e μ é invariante, temos

$$\mu(F) \leq \mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(E_0)) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(f^{-k}(E_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_0) = 0.$$

Logo, devemos ter $\mu(F) = 0$, como queríamos provar. $\square$

Agora suponhamos que X é um espaço topológico, munido da sua σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$. Dizemos que um ponto $x \in X$ é recorrente para uma transformação $f : X \longrightarrow X$ se existe uma sequência $n_j \to \infty$ em $\mathbb{N}$ tal que $f^{n_j}(x) \to x$.

Teorema 2.3 (Recorrência de Poincaré - Versão Topológica). *Suponha que X admite uma base enumerável de abertos. Seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação mensurável e seja μ uma medida finita em X invariante por f. Então μ-quase todo ponto pertencente a X é recorrente para f.*

Observe que ambos teoremas nos dizem que dada uma transformação mensurável e uma medida finita invariante, sempre podemos revisitar a vizinhança de um ponto após um determinado número de passos e a vizinhança será revisitada infinitas vezes.

Capítulo 3

Teoria Ergódica

3.1 Ergocidade

Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação que preserva medida.

Definição 3.1. Um conjunto é dito invariante para f se

$$f^{-1}(A) = A, \ \textit{em } \mu - \textit{quase todo ponto.}$$

Ás vezes, é conveniente utilizar a condição

$$\mu(f^{-1}B \triangle B) = 0,$$

onde $\triangle$ é a diferença simétrica

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Definição 3.2. Uma medida μ que preserva a transformação f em um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é **ergódica** se, e somente se, para qualquer conjunto mensurável $A \subset \mathcal{B}$ tal que $f^{-1}(A) = A$ então $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

Ou seja, uma medida é ergódica se todos os conjuntos invariantes são triviais do ponto de vista da medida.

3.2 Teorema Ergódico de Birkhoff

Para formular matematicamente sua teoria da cinética dos gases, Boltzmann usou o que passou a ser chamado de hipótese ergódica: para sistemas que descrevem os movimentos das partículas de um gás, o tempo médio de visita a qualquer subconjunto mensurável existe e é igual à medida do conjunto, para quase todo ponto.

Anos mais tarde, Von Neumann deu uma demonstração da hipótese ergódica, afirmando que o limite existe no espaço $\mathcal{L}^2(\mu)$. E então, Birkhoff apresentou a demonstração para o que ficou conhecido como o Teorema Ergódico de Birkhoff.

Seja $x \in X$ e um conjunto mensurável $E \subset X$. Vamos analisar o conjunto dos iterados de x que visitam E, isto é,

$$\{j \geqslant 0; f^j(x) \in E\}.$$

Pelo Teorema de Recorrência de Poincaré, sabemos que esse conjunto é infinito, para quase todo ponto $x \in E$. Chamamos então, de **tempo médio de visita** de x a E o valor de

$$\tau(E, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leqslant j < n : f^j(x) \in E\}.$$

Observe que isto é o mesmo que

$$\tau(E, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_E(f^j(x)$$

onde $\mathcal{X}_E$ é a função característica do conjunto E. E ainda, note que o limite pode não existir.

Proposição 3.1. *Se $\tau(E, x)$ existe para um certo $x \in X$, então*

$$\tau(E, f(x)) = \tau(E, x). \tag{3.1}$$

Demonstração. De fato,

$$\tau(E, f(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{X}_E(f^j(x))$$

$$\tau(E,f(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_E(f^j(x)) - \frac{1}{n}\mathcal{X}_E(x) + \frac{1}{n}\mathcal{X}_E(f^n(x))$$

$$\tau(E,f(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_E(f^j(x)) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[\mathcal{X}_E(x) - \mathcal{X}_E(f^n(x))]$$

$$\tau(E,f(x)) = \tau(E,x) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[\mathcal{X}_E(x) - \mathcal{X}_E(f^n(x))]$$

E como a função característica é limitada, o limite à direita é igual a zero. Portanto,

$$\tau(E,f(x)) = \tau(E,x).$$

□

Iremos enunciar o Teorema Ergódico de Birkhoff numa versão para funções características, mas observe que qualquer função $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, d\mu)$ pode ser aproximada por funções características, pelo Teorema 2.1.

Teorema 3.1 (Teorema Ergódico de Birkhoff)**.** *Seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação mensurável e μ uma medida de probabilidade invariante por f. Dado qualquer conjunto mensurável $E \subset X$, o tempo médio de permanência $\tau(E,x)$ existe em μ-quase todo ponto $x \in X$. Além disso,*

$$\int \tau(E,x)\ d\mu(x) = \mu(E).$$

Na formulação mais geral, o teorema fica:

Teorema 3.2. *Seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação mensurável e μ uma medida de probabilidade invariante por f. Dada qualquer função integrável $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ o limite*

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

existe em μ-quase todo ponto $x \in X$. Além disso,

$$\int \tilde{\varphi}(x) d\mu(x) = \int \varphi(x) d\mu(x).$$

3.3 Sistemas Misturadores

Agora, iremos definir uma propriedade mais forte que ergocidade. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $f : X \longrightarrow X$ uma transformação que preserva medida.

Definição 3.3. O sistema (f, μ) é dito misturador se

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

para A e B conjuntos mensuráveis.

Proposição 3.2. *Todo sistema misturador é ergódico.*

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{B}$ um conjunto invariante. Aplicaremos a definição de misturador para $B = A$. Então

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^{-n}(A) \cap A) = \mu(A)\mu(A) = \mu(A)^2.$$

Como A é invariante, $T^{-n}(A) = T^{-1}(A) = A$. Daí

$$\mu(A)^2 = \lim_{n\to\infty} \mu(T^{-n}(A) \cap A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap A) = \mu(A)$$

Sabemos que a única solução real positiva para a equação $x = x^2$ é $x = 0$ ou $x = 1$.

Então devemos ter $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

Portanto, o sistema é ergódico. □

Temos uma versão topológica da noção de misturador, onde dado X espaço topológico, dizemos que um sistema dinâmico $f : X \longrightarrow X$ é **topologicamente misturador** se para um par de abertos U e V em X temos um inteiro $N = N(U, V)$ tal que

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset, \textit{ para todo } n \geq N.$$

Capítulo 4

Entropia

Na física, a entropia pode ser considerada como uma medida do grau de desordem do sistema. A seguir, iremos defini-lá de forma precisa no contexto dos sistemas dinâmicos.

4.1 Entropia Métrica

4.1.1 Entropia de uma partição

Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Uma partição é uma família finita ou enumerável $\mathcal{P}$ de subconjuntos mensuráveis de X cuja união tem medida total e $\mu(P_i \cap P_j) = 0,\ para\ todo\ i \neq j$. Denotaremos por $\mathcal{P}(x)$ o elemento da partição que contém o ponto x.

Dada qualquer família enumerável de partições $\mathcal{P}_n$, definimos o refinamento de partições como sendo a partição

$$\bigvee_n \mathcal{P}_n = \{\bigcap_n P_n : P_n \in \mathcal{P}_n para\ cada\ n\}.$$

A cada partição $\mathcal{P}$ associamos a *função de informação*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{P}} : X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \mathcal{I}_{\mathcal{P}} = -\log \mu(\mathcal{P}(x)).$$

Então chamamos de **Entropia**, ou informação média, da partição $\mathcal{P}$ ao número

$$H_\mu(\mathcal{P}) = \int \mathcal{I}_{\mathcal{P}} d\mu = \sum_{P \in \mathcal{P}} -\mu(P) \log \mu(P).$$

Dizemos que duas partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são independentes se $\mu(P \cap Q) = \mu(P)\mu(Q)$ para todo $P \in \mathcal{P}$ e $Q \in \mathcal{Q}$. Daí $\mathcal{I}_{\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}} = \mathcal{I}_{\mathcal{P}} + \mathcal{I}_{\mathcal{Q}}$ e então $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{P}) + H_\mu(\mathcal{Q})$.

Ainda dizemos que $\mathcal{P}$ é *menos fina* que $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$, se todo elemento de $\mathcal{Q}$ está contido em algum elemento de $\mathcal{P}$, em quase todo ponto.

Chamamos de entropia condicional de uma partição $\mathcal{P}$ com relação a uma partição $\mathcal{Q}$ o número

$$H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{Q}) = \sum_{P\in\mathcal{P}} \sum_{Q\in\mathcal{Q}} -\mu(P \cap Q) \log \frac{\mu(P \cap Q)}{\mu(Q)}$$

Se P e Q são independentes, temos

$$H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{P}).$$

Intuitivamente, a entropia condicional mede a informação adicional da partição $\mathcal{P}$, já conhecida a informação da partição $\mathcal{Q}$.

Seja $f : X \longrightarrow N$ uma transformação mensurável e seja μ uma probabilidade em X. Então $f_*\mu(B) = \mu(f^{-1}(B))$ é uma probabilidade em N. Além disso, se $\mathcal{P}$ é partição de N então $f^{-1}(\mathcal{P}) = \{f^{-1}(P) : P \in \mathcal{P}\}$ é partição de X. Por definição

$$\begin{aligned} H_\mu(f^{-1}(\mathcal{P}) &= \sum_{P\in\mathcal{P}} -\mu(f^{-1}(P)) \log \mu(f^{-1}(P)) \\ &= \sum_{P\in\mathcal{P}} -f_*\mu(P) \log f_*\mu(P) = H_{f_*\mu}(\mathcal{P}) \end{aligned}$$

Em particular, se $X = N$ e μ é invariante por f, ou seja, $f_*\mu = \mu$ então

$$H_\mu(f^{-1}(\mathcal{P})) = H_\mu(\mathcal{P}).$$

4.1.2 Entropia de um sistema dinâmico

Seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação que preserva uma medida de probabilidade μ. Dada $\mathcal{P}$ uma partição de X com entropia finita, denotamos

$$\mathcal{P}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P}) \textit{ para cada } n \geq 1.$$

O elemento $\mathcal{P}^n(x)$ que contém $x \in X$ é dada por

$$\mathcal{P}^n(x) = \mathcal{P}(x) \cap f^{-1}(\mathcal{P}(f(x))) \cap \ldots \cap f^{-n+1}(\mathcal{P}(f^{n-1}(x))).$$

Chamamos de **entropia** de f com respeito à medida μ e à partição $\mathcal{P}$ o limite

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) = \lim_n \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n) = \inf_n \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n).$$

E a entropia do sistema (f, μ) é definida por

$$h_\mu(f) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f, \mathcal{P}).$$

Teorema 4.1 (Kolmogorov-Sinai). *Seja $\mathcal{P}_1 \prec \ldots \prec \mathcal{P}_n \prec \ldots$ uma sequência não-decrescente de partições com entropia finita tais que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$ gera a σ-álgebra dos conjuntos mensuráveis a menos de medida nula. Então*

$$h_\mu(f) = \lim_n h_\mu(f, \mathcal{P}_n).$$

4.2 Entropia Topológica

4.2.1 Difinição via coberturas abertas

Seja X um espaço topológico. Entendemos por cobertura aberta uma família α de abertos cuja união é todo X. Dadas duas coberturas abertas α e β, dizemos que α é *menos fina* que β, $\alpha \prec \beta$, se todo elemento de β está contido em algum elemento de α.

Dadas coberturas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ denotamos por $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$ o refinamento, ou seja, a cobertura cujos elementos são as interseções $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ com $A_j \in \alpha_j$ para cada j. Note que $\alpha_j \prec \alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$, $\forall\ j$.

Seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação contínua. Se α é uma cobertura aberta, então $f^{-j}(\alpha) = \{f^{-j}(A) : A \in \alpha\}$ também é uma cobertura aberta.

Dada α uma cobertura aberta de X, por compacidade, admite uma subcobertura finita.

Chamamos de *entropia da cobertura* α o número

$$H_n(\alpha) = \log\ \#\{\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \ldots \vee f^{-n+1}(\alpha)\}$$

Observe que a sequência $\{H_n(\alpha)\}$ é subaditiva, sabemos então que o limite

$$h_{top}(f, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_n(\alpha)$$

sempre existe e é chamado de *entropia de f relativa à cobertura α.*

Então, definimos a **entropia topológica** de f como sendo

$$h_{top}(f) = \sup \{h_{top}(f, \alpha) : \alpha \textit{ cobertura aberta de } X\}.$$

Observe que se β é subcobertura de α então $h_{top}(f, \alpha) \leq h_{top}(f, \beta)$. Portanto podemos restringir a definição às coberturas abertas finitas.

Teorema 4.2. *Seja (X, d) um espaço métrico compacto e f transformação contínua. Se $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de cobertura abertas com diâmetro indo a zero, então*

$$h_{top}(f) = \lim_{n\to\infty} h_{top}(f, \alpha_n).$$

4.2.2 Entropia topológica de Bowen

Definição 4.1. Seja n um número natural, $\varepsilon > 0$ e K um subconjunto compacto de X. Um subconjunto $E \subset K$ é dito (ε, n)-separado com respeito a f se $x, y \in E,\ x \neq y$, implica $d_n(x, y) > \varepsilon$, ou seja, para $x \in E$ o conjunto $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}\bar{B}(f^i x; \varepsilon)$ não contém outro ponto de E.

Denotaremos por $|E_{\varepsilon,n}|$ a cardinalidade máxima de um conjunto (ε, n)-separado.

A entropia topológica da função f é definida por

$$h_{top}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\limsup_{n\to\infty} \frac{\log |E_{\varepsilon,n}|}{n} \right)$$

4.3 Alguns resultados

As demonstrações dos resultados apresentados a seguir podem ser encontradas em [10].

Teorema 4.3 (Princípio Variacional). *Seja X espaço métrico compacto e $f : X \longrightarrow X$ transformação contínua. Então a entropia topológica $h_{top}(f)$ coincide com o supremo das entropias $h_\mu(f)$ da transformação f relativamente a todas as probabilidade invariantes.*

Sejam $f : X \longrightarrow X$ e $g : Y \longrightarrow Y$ transformações contínuas em espaços topológicos compactos X e Y.

Se existe um homeomorfismo $h : X \longrightarrow Y$ satisfazendo $h \circ f = g \circ h$, dizemos que as duas transformações são **topologicamente conjugadas**, e chamamos h de **conjugação topológica** entre f e g.

Proposição 4.1. *Se $f : X \longrightarrow X$ e $g : Y \longrightarrow Y$ são topologicamente conjugadas então*

$$h_{top}(f) = h_{top}(g).$$

4.4 Entropia do deslocamento de Bernoulli

Considere o deslocamento $\sigma : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ em $\Sigma = \{1, \ldots, d\}^{\mathbb{Z}}$, munido de uma medida produto $\mu = \nu^{\mathbb{Z}}$, onde ν é uma medida de probabilidade no espaço Σ, que chamaremos de medida de Bernoulli. Seja $\mathcal{P}$ a partição de Σ em cilindros $[0; a]$, com $a = 1, \ldots, d$. Então $\mathcal{P}^n$ é a partição em cilindros $[0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$ de comprimento n.

Observe que μ é ergódica. De fato, tomando $A = [a_1 a_2 \ldots a_k]$ e $B = [b_1 b_2 \ldots b_l]$ cilindros, vamos mostrar que μ é misturador para σ. Para $n >> l$, temos

$$\begin{aligned}
\mu(\sigma^{-n} A \cap B) &= \mu\Big(\bigcup_{x_i \in \Sigma} [b_1 \ldots b_l x_{l+1} \ldots x_n a_1 \ldots a_k] \Big) \\
&= \sum_{x_i \in \Sigma} \mu\big([b_1 \ldots a_k]\big) \\
&= \sum_{x_{l+1}} \sum_{x_{l+2}} \cdots \sum_{x_n} p_{b_1} \ldots p_{b_l} p_{x_{l+1}} \ldots p_{x_n} p_{a_1} \ldots p_{a_k} \\
&= p_{b_1} \ldots p_{b_l} p_{a_1} \ldots p_{a_k} \left(\sum_{x_{l+1}} \cdots \sum_{x_n} p_{x_{l+1}} \ldots p_{x_n} \right) \\
&= p_{b_1} \ldots p_{b_l} p_{a_1} \ldots p_{a_k}
\end{aligned}$$

$$= \mu(B)\mu(A)$$

Como vale para $n >> l$, vale no limite. Portanto é misturadora, e consequentemente ergódica.

A entropia de $\mathcal{P}^n$ é:

$$H_\mu(\mathcal{P}^n) = \sum_{a_1,\ldots,a_n} -p_{a_1}p_{a_2}\ldots p_{a_n}\log(p_{a_1}p_{a_2}\ldots p_{a_n})$$

$$= \sum_j \sum_{a_1,\ldots,a_n} -p_{a_1}p_{a_2}\ldots p_{a_n}\log(p_{a_j})$$

$$= \sum_j \sum_{a_j} -p_{a_j}\log p_{a_j} \sum_{a_i, i\neq j} p_{a_1}\ldots p_{a_{j-1}}p_{a_{j+1}}\ldots p_{a_n}$$

A última soma é igual a 1, visto que $\sum_i p_i = 1$. Portanto,

$$H_\mu(\mathcal{P}^n) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{a_j=1}^{d} -p_{a_j}\log p_{a_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{d} -p_i \log p_i$$

$$= -n \sum_{i=1}^{d} p_i \log p_i$$

Então,

$$h_\mu(\sigma, \mathcal{P}) = \lim_n \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n) = -\sum_{i=1}^{d} p_i \log p_i$$

Pelo Teorema de Kolmogorov-Sinai,

$$h_\mu(\sigma) = -\sum_{i=1}^{d} p_i \log p_i$$

4.5 Medidas de Máxima Entropia

Definição 4.2. Seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação contínua em um espaço métrico compacto X. Uma medida μ invariante é dita **medida de máxima entropia** para f se $h_\mu(f) = h_{top}(f)$.

Teorema 4.4. *Seja $\Sigma = \{0, 1, \ldots, k-1\}^{\mathbb{Z}}$ e $f : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ deslocamento completo. Então f possui uma única medida de máxima entropia, que é a medida de Bernoulli com pesos $\left(\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}\right)$.*

A demonstração do Teorema acima pode ser encontrada em [11].

Capítulo 5

Formalismo Termodinâmico

5.1 Pressão

5.1.1 Definição via coberturas abertas

Seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação contínua num espaço compacto. Chamaremos de **potencial** qualquer função contínua $A : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $A_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como sendo $A_n = \sum_{i=0}^{n-1} A \circ f^i$. Além disso, dado qualquer conjunto não vazio $C \subset X$ denotamos

$$A_n(C) = \sup\{A_n(x) : x \in C\}.$$

Dada uma cobertura aberta α de X, definimos

$$P_n(f, A, \alpha) = \inf\left\{\sum_{U \in \gamma} e^{A_n(U)} : \gamma \ \ \textit{subcobertura finita de } \alpha^n\right\}$$

Esta sequência é subaditiva e, portanto, o limite seguinte existe.

$$P(f, A, \alpha) = \lim_n \frac{1}{n} \log P_n(f, A, \alpha)$$

Chamamos de **pressão** do potencial A relativamente a f o limite $P(f, A, \alpha)$ quando o diâmetro de α vai para zero.

$$P(f, A) = \lim_\alpha P(f, A, \alpha).$$

Teorema 5.1 (Princípio Variacional). *Seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação contínua em um espaço compacto e seja $\mathcal{M}_f(X)$ o espaço das probabilidades invariantes por f em X. Então, para toda função contínua $A : X \longrightarrow \mathbb{R}$, temos*

$$P(f, A) = \sup \left\{ h_\mu(f) + \int A d\mu : \mu \in \mathcal{M}_f(X) \right\}.$$

Observe que a pressão do potencial $A \equiv 0$ coincide com a entropia topológica.

5.2 Estados de Equilíbrio

Seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto. Uma probabilidade invariante μ é dita um **estado de equilíbrio**, ou medida de equilíbrio, para um potencial $A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se ela realiza o supremo no princípio variacional, ou seja, se

$$h_\mu(f) + \int A d\mu = P(f, A) = \sup \left\{ h_\nu(f) + \int A d\nu : \nu \in \mathcal{M}_f(X) \right\}$$

No caso particular $A \equiv 0$, dizemos que μ é uma medida de máxima entropia.

Uma função $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita de Hölder no espaço deslocamento Σ se existe $\vartheta \in (0, 1)$ e uma constante $c > 0$ tal que para todo $n > 0$ temos

$$\sup |f(x) - f(y)| \leq c\vartheta^n$$

onde o supremo é sobre todos os pares de sequências $x = \dots x_{-1}x_0x_1x_2 \dots,\ y = \dots y_{-1}y_0y_1y_2 \dots \in \Sigma$ desde que $x_i = y_i$ para todo $|i| < n$ e tivermos ou $x_{-n} \neq y_{-n}$ ou $x_n \neq y_n$.

Capítulo 6

Deslocamento de Haydn

Neste capítulo iremos construir um subdeslocamento que possui várias medidas distintas de máxima entropia.

6.1 Definição do deslocamento de Haydn

Seja $\nu \geq 2$ um inteiro positivo e $\tau > 0$. Vamos construir um subdeslocamento sobre o conjunto de símbolos $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, 2\nu\}$.

Iremos nos referir aos símbolos $\{1, 2 \ldots, \nu\}$ como sendo os símbolos azuis e iremos denotá-los por $\mathcal{A}$. Da mesma forma, chamaremos $\{\nu + 1, \ldots, 2\nu\}$ de símbolos rosas e denotaremos por $\mathcal{R}$. Então $\mathcal{S} = \{0\} \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{R}$. Além disso, denotaremos $\Sigma_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ o deslocamento bilateral sobre o alfabeto $\mathcal{A}$. Da mesma forma, chamaremos $\Sigma_{\mathcal{R}} = \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}$ o deslocamento bilateral sobre $\mathcal{R}$.

O espaço deslocamento $\Sigma \subset \mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$ será formado pela união de dois espaços deslocamento monocromáticos $\Sigma_{\mathcal{A}}$ e $\Sigma_{\mathcal{R}}$ e iremos adicionar sequências bicolores da seguinte forma: uma sequência em Σ na qual uma palavra α de uma cor (azul ou rosa) é seguida por uma palavra β de outra cor (rosa ou azul) deve conter uma cadeia de zeros γ separando as palavras α e β. O tamanho $|\gamma|$ dessa cadeia de zeros deve ser no mínimo $\tau(a + b)$ onde $a = |\alpha|$ e $b = |\beta|$ são os comprimentos das palavras α e β.

Observe que se a palavra α ou β possui comprimento infinito então ela só pode ser seguida por uma cadeia infinita de zeros, não podendo assim ser seguida por uma palavra de outra cor.

Matematicamente,

Definição 6.1. O espaço deslocamento $\Sigma \subset \mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$ é definido da seguinte forma. Teremos $x \in \Sigma$ se:

i) se $x \in \Sigma_{\mathcal{A}} \cup \Sigma_{\mathcal{R}}$, nesse caso chamaremos x um ponto monocromático;

ii) se x pertence a um bloco bicolor da forma

$$\dots 0 d_1 d_2 \dots d_{a-1} d_a 0^{\lambda} y_1 y_2 \dots y_{b-1} y_b 0 \dots$$

ou

$$\dots 0 y_1 y_2 \dots y_{a-1} y_a 0^{\lambda} d_1 d_2 \dots d_{b-1} d_b 0 \dots$$

onde $\lambda \geq \tau(a+b)$ (0^{λ} é uma cadeia de zeros de comprimento $|\lambda|$), $\tau > 0$ e $d_i \in \mathcal{A},\ y_i \in \mathcal{R}$.

Se $w = w_m w_{m+1} \dots w_{m+n-1}$ é uma palavra permittida de tamanho n em Σ, então denotamos por $U(w)$ o cilindro $\{x \in \Sigma\ : x_i = w_i, m \leq i < m+n\}$. A transformação deslocamento σ em Σ é definida do modo usual por $\sigma(x)_i = s_{i+1},\ i \in \sigma,\ x \in \Sigma$. Observe que as regras de transição são invariantes pelo deslocamento. Então Σ é de fato um subdeslocamento dotado da topologia usual induzida pelos cilindros $U(w)$, onde w percorre todas as palavras finitas em Σ.

Observe que não é um deslocamento de tipo finito, porque só saberemos qual símbolo sucede um determinado símbolo se olharmos a sequência globalmente.

6.1.1 Exemplo com 2 medidas de máxima entropia

Lema 6.1. A transformação deslocamento σ em Σ é topologicamente misturadora para todo $\tau > 0$.

Demonstração. Temos que mostrar que para quaisquer duas palavras finitas $\omega, \eta \in \Sigma$ existe um número $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^n(U(\eta)) \cap U(\omega)$ é não vazio para todo $n \geq N$.

Se ω e η são da mesma cor, podemos ver que em algum momento N esses cilindros terão os mesmos símbolos iniciais, mesmo que seja para um N muito grande. Portanto, o resultado segue.

Se ω e η são palavras bicolores, mas o último símbolo de η e o primeiro símbolo de ω são de cores diferentes, considere a palavra $\pi = \eta 0^\lambda \omega$. Observe que π é uma palavra admissível para $\lambda > \tau(|\eta| + |\omega|)$ e, além disso, temos que $U(\pi) \subset \sigma^n(U(\eta)) \cap U(\omega)$, para todo $n \geq N = (1+\tau)(|\eta| + |\omega|)$. Como $U(\pi)$ é não vazio, temos que $\sigma^n(U(\eta)) \cap U(\omega)$ é não vazio, para todo $n \geq N = (1+\tau)(|\eta| + |\omega|)$.

Agora, se o último símbolo de η e o primeiro de ω são da mesma cor, vamos considerar a palavra $\pi = \eta 0^\kappa \varepsilon 0^\lambda \omega$, onde ε é um símbolo, ou uma palavra curta, da outra cor, com $\kappa \geq \tau(|\eta| + |\varepsilon|)$ e $\lambda \geq \tau(|\varepsilon| + |\omega|)$. Analogamente, $U(\pi) \subset \sigma^n(U(\eta)) \cap U(\omega)$, para todo $n \geq N = (1+\tau)(|\eta| + 2|\varepsilon| + |\omega|)$. E como $U(\pi)$ é não vazio, $\sigma^n(U(\eta)) \cap U(\omega)$ é não vazio. $\square$

Lema 6.2. Se $\tau \geq \frac{\log 3}{\log \nu}$ então a entropia topológica do deslocamento $\sigma : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ é igual a $\log \nu$.

Demonstração. Vamos encontrar uma cota inferior para a entropia topológica h_{top} de Σ. Observe que como Σ contém dois deslocamentos bilaterais, $\Sigma_{\mathcal{A}}$ e $\Sigma_{\mathcal{R}}$, a entropia topológica de Σ deve ser pelo menos $\log \nu$.

$$h_{top}(\Sigma) \geq h_{top}(\Sigma_j) = \log \nu.$$

Agora, vamos estimar o número de palavras de tamanho n restantes. Temos dois casos para considerar:

$i)$ Palavras monocromáticas que também podem conter zeros. De acordo com a definição, palavras dessa forma devem começar ou terminar com zeros. Então obtemos palavras azuis ou rosas, de tamanho $k = 0, \ldots, n$ com pelo menos uma das pontas formada por zeros. E o número de palavras desse tipo pode ser estimado por

$$2 \sum_{k=0}^{n} (n-k)\nu^k.$$

Fazendo uma mudança simples de variáveis, obtemos

$$2\sum_{k=0}^{n}(n-k)\nu^k \leq 2n\nu^n\sum_{k=0}^{n}\nu^{-k}$$

que apresenta uma taxa de crescimento exponencial $\log\nu$.

ii) Para estimar o número de palavras de tamanho n que contém símbolos das duas cores, observe que como qualquer palavra assim deve possuir no mínimo uma transição de azul para rosa, ou vice-versa, deve então conter também no mínimo $n\frac{\tau}{\tau+1}$ zeros, ou seja, no máximo $n' = \frac{n}{\tau+1}$ inteiro símbolos coloridos.

Os símbolos coloridos vem em blocos monocromáticos de cores alternadas. Denote por $P_{k,l}$ o número de possibilidades em que podemos formar palavras com l símbolos em k blocos (separados pelo apropriado número de zeros), onde $k = 1, 2, \ldots, l$. Encontramos que

$$P_{k,l} = \begin{pmatrix} l-1 \\ k-1 \end{pmatrix} = \frac{(l-1)!}{(k-1)!\,(l-k)!}$$

que é o número de possibilidades de escolher o primeiro elemento de cada bloco, exceto o primeiro elemento da palavra.

O número de palavras de tamanho n em Σ que contém l símbolos coloridos arranjados em $k \leq l$ blocos monocromáticos de cores alternadas é $2P_{k,l}\nu^l$.

A distribuição de l símbolos coloridos em k blocos pode ser feito de $P_{k,l}$ diferentes modos, onde $1 \leq k \leq l \leq n'$. Isso nos dá $m = n - (\tau+1)l$ zeros para serem distribuídos em $k+1$ intervalos, ou seja, as $k-1$ lacunas entre os blocos de símbolos coloridos mais as duas extremidades da palavra. Existem

$$Q_{k,m} = \begin{pmatrix} m+k \\ k \end{pmatrix} = \frac{(m+k)!}{k!\;m!}$$

possibilidades. A fórmula de Stirling nos diz que

$$a! = \sqrt{2\pi a}\left(\frac{a}{e}\right)^a\left(1+\frac{c}{a}\right), onde\ c\ \ constante.$$

Então, teremos

$$\begin{pmatrix} a \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \frac{a!}{\left(\frac{a}{2}\right)!\;\left(\frac{a}{2}\right)!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2\pi a}\left(\frac{a}{e}\right)^{a}\left(1+\frac{c}{a}\right)}{\sqrt{2\pi\frac{a}{2}}\left(\frac{\frac{a}{2}}{e}\right)^{\frac{a}{2}}\left(1+\frac{c}{\frac{a}{2}}\right)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\frac{a}{2}}\cdot\frac{\left(\frac{a}{e}\right)^{a}}{\left(\frac{\frac{a}{2}}{e}\right)^{a}}\cdot\frac{\left(1+\frac{c}{a}\right)}{\left(1+\frac{c}{\frac{a}{2}}\right)^{2}} \\
&= \frac{1}{\frac{\sqrt{2\pi}}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\left(\frac{a}{e}\cdot\frac{e}{\frac{a}{2}}\right)^{a}\cdot\frac{\frac{a+c}{a}}{\left(\frac{a+2c}{a}\right)^{2}} \\
&\leq c\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot 2^{a}\cdot\frac{a}{a+c} \\
&\leq c_1\sqrt{a}\; 2^{a}
\end{aligned}
$$

Portanto, no nosso problema temos

$$
\begin{aligned}
Q_{k,m} &= \binom{n-(\tau+1)l+k}{k} \\
&\leq \binom{n-(\tau+1)l+k}{\frac{1}{2}(n-(\tau+1)l+k)} \\
&\leq c_1 2^{n-(\tau+1)l+k}\sqrt{n-(\tau+1)l+k} \\
&\leq c_1 2^{n-(\tau+1)l+k}\sqrt{n}
\end{aligned}
$$

Podemos então estimar o número total de faixas bicolores de tamanho n por

$$
\begin{aligned}
Q(n) &\leq 2\sum_{l=2}^{n'}\nu^{l}\sum_{k=2}^{l}\binom{l-1}{k-1}\binom{n-(\tau+1)l+k}{k} \\
&\leq 2\sum_{l=2}^{n'}\nu^{l}\sum_{k=2}^{l}c_1 2^{n-(\tau+1)l+k}\sqrt{n}\binom{l-1}{k-1} \\
&= 2c_1\sqrt{n}\sum_{l=2}^{n'}\nu^{l}\; 2^{n-(\tau+1)l}\sum_{k=2}^{l}2^{k}\binom{l-1}{k-1}
\end{aligned}
$$

Temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{l} 2^k \left(\begin{array}{c} l-1 \\ k-1 \end{array} \right) &= 2\sum_{k=2}^{l} 2^{k-1} \left(\begin{array}{c} l-1 \\ k-1 \end{array} \right) \\
&= 2\sum_{q=1}^{l-1} 2^q \left(\begin{array}{c} l-1 \\ q \end{array} \right) \\
&\leq 2\sum_{q=0}^{l-1} \left(\begin{array}{c} l-1 \\ q \end{array} \right) 2^q 1^{q-l+1} \\
&= 2\cdot(2+1)^{l-1} = 2\cdot 3^{l-1} \leq 3^l
\end{aligned}$$

Substituindo na expressão anterior, temos

$$\begin{aligned}
Q(n) &\leq 2c_1\sqrt{n}\sum_{l=2}^{n'} \nu^l \; 2^{n-(\tau+1)l} \; 3^l \\
&\leq 2c_1\sqrt{n}\sum_{l=2}^{n'} 2^n \big(3\nu 2^{-\tau-1}\big)^l \\
&\leq c_2\sqrt{n} \begin{cases} 2^n & se \; 3\nu 2^{-\tau-1} < 1 \\ 2^n (3\nu 2^{-\tau-1})^{\frac{n}{\tau+1}} & se \; 3\nu 2^{-\tau-1} \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Então, observe que

$$\begin{aligned}
\log Q(n) &\leq \log c_2\sqrt{n}2^n \\
&= \log c_2 + \log n^{\frac{1}{2}} + \log 2^n \\
&= \log c_2 + \frac{1}{2}\log n + n\log 2
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log Q(n) \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\log c_2 + \frac{1}{2n}\log n + \log 2 \right) = \log 2$$

e

$$\begin{aligned}
\log Q(n) &\leq \log \left(c_2\sqrt{n}\; 2^n \big(3\nu 2^{-\tau-1}\big)^{\frac{n}{\tau+1}} \right) \\
&= \log c_2 + \log n^{\frac{1}{2}} + \log 2^n + \log \big(3\nu 2^{-\tau-1}\big)^{\frac{n}{\tau+1}}
\end{aligned}$$

$$= \log c_2 + \frac{1}{2}\log n + n\log 2 + \frac{n}{\tau+1}\log 3\nu + \frac{n(-1-\tau)}{\tau+1}\log 2$$
$$= \log c_2 + \frac{1}{2}\log n + \frac{n}{\tau+1}\log 3\nu$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q(n) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log c_2 + \frac{1}{2n}\log n + \frac{\log 3\nu}{\tau+1}\right) = \frac{\log 3\nu}{\tau+1}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q(n) \leq \max\left(\log 2, \frac{\log 3\nu}{\tau+1}\right)$$

Com isso, se $\tau \geq \frac{\log 3}{\log \nu}$ temos então que

$$h_{top}(\Sigma) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q(n) \leq \log \nu$$

□

Afirmamos que se $\tau \geq \frac{\log 3}{\log \nu}$, então existem duas medidas distintas que atingem a entropia métrica máxima em Σ.

Já vimos que a entropia métrica no deslocamento bilateral $\{1,\ldots,\nu\}^{\mathbb{Z}}$ é

$$h_\mu(\sigma) = -\sum_{i=1}^{d} p_i \log p_i$$

e é atingida com a medida de Bernoulli com vetor probabilidade $(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu},\ldots,\frac{1}{\nu})$ e a entropia métrica é $\log \nu$.

Vamos definir em Σ uma medida de Bernoulli $\mu_{\mathcal{A}}$ com probabilidades $(0,\frac{1}{\nu},\ldots,\frac{1}{\nu},0,\ldots,0)$ e a medida $\mu_{\mathcal{R}}$ com probabilidade $(0,0,\ldots,0,\frac{1}{\nu},\ldots,\frac{1}{\nu})$.

As duas medidas são invariantes pelo deslocamento e possuem entropia métrica $\log \nu$, que pelo Lema 6.2 é a entropia topológica de Σ.

Então $\mu_{\mathcal{A}}$ e $\mu_{\mathcal{R}}$ (assim como suas combinações lineares) são medidas ergódicas distintas de entropia máxima para o subdeslocamento Σ.

Podemos nos perguntar se existe uma conjugação entre o deslocamento do Haydn e o deslocamento usual de ν simbolos, visto que ambas entropias topológicas são iguais a $\log \nu$ (sistemas dinâmicos conjugados possuem a mesma entropia topológica). Mas ao contar órbitas periódicas de período N temos, no caso do deslocamento de ν simbolos, ν^N possibilidades. Já no Haydn, temos no mínimo dois deslocamento de palavras monocromáticas, e para cada uma delas temos ν^N possibilidades, então no Haydn temos no mínimo $2\nu^N$ palavras distintas de comprimento N que são órbitas periódicas, o que ja é mais do que no outro caso. Portanto, não é possível conjugar os dois espaços.

6.1.2 Exemplo com $L > 2$ medidas de máxima entropia

Seja $\nu \geq 2$ inteiro e $\tau > 0$. Considere o alfabeto $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots, L\nu\}$. Denotaremos o deslocamento completo por

$$\Sigma_j = \{(j-1)\nu + 1, (j-1)\nu + 2, \dots, j\nu\}^{\mathbb{Z}},\ j = 1, 2, \dots, L.$$

A transição de uma palavra α em Σ_j para uma palavra β de "cor diferente"acontece somente se são separadas por uma faixa de zeros de tamanho no mínimo $\tau(|\alpha| + |\beta|)$ e β pertence a Σ_{j-1} ou Σ_{j+1}.

Assim como provamos no Lema 6.1 para $L = 2$, o espaço deslocamento $\Sigma \subset \{0, 1, 2, \dots, L\nu\}^{\mathbb{Z}}$ é topologicamente misturador.

Se $\nu \geq 2$ e $\tau \geq \frac{\log 5}{\log \nu}$, vamos mostrar que existe $L \geq 2$ medidas ergódicas distintas de máxima entropia em Σ.

De fato, a entropia topológica de Σ é no mínimo $\log \nu$, que é a entropia topológica do subdeslocamento Σ_j.

Para conseguir uma cota superior para a entropia topológica de Σ, vamos estimar o número $Q(n)$ de palavras de tamanho n que não são monocromáticas, isto é, não pertencem a um único Σ_j.

Iremos proceder como no Lema 6.2, obtemos então

$$Q(n) \leq L \sum_{l=2}^{n'} \nu^l \sum_{k=2}^{l} \begin{pmatrix} l-1 \\ k-1 \end{pmatrix} 2^{k-1} \begin{pmatrix} m+k \\ k \end{pmatrix}$$

onde $m = n - (\tau + 1)l$; l conta o número de símbolos coloridos; $k - 1$ é o número de trocas de cores, onde tem transição de uma palavra em algum Σ_j para $\Sigma_{j\pm 1}$ (o fator 2^{k-1} conta para o número de possíveis trocas de cores).

Assim como antes, com $n' = \frac{n}{\tau+1}$, obtemos

$$Q(n) \leq L \sum_{l=2}^{n'} \nu^l \sum_{k=2}^{l} \begin{pmatrix} l-1 \\ k-1 \end{pmatrix} 2^{k-1} \begin{pmatrix} m+k \\ k \end{pmatrix}$$

$$\leq L \sum_{l=2}^{n'} \nu^l \sum_{k=2}^{l} \begin{pmatrix} l-1 \\ k-1 \end{pmatrix} 2^{k-1} c_1 2^{n-(\tau+1)l+k} \sqrt{n}$$

$$\leq c_1 L \sqrt{n} \sum_{l=2}^{n'} \nu^l 2^{n-(\tau+1)l} \sum_{k=2}^{l} \begin{pmatrix} l-1 \\ k-1 \end{pmatrix} 2^k 2^{k-1}$$

Temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{l} \begin{pmatrix} l-1 \\ k-1 \end{pmatrix} 2^k 2^{k-1} &= \sum_{k=2}^{l} \begin{pmatrix} l-1 \\ k-1 \end{pmatrix} 2 \cdot 4^{k-1} \\ &= 2 \sum_{q=1}^{l-1} \begin{pmatrix} l-1 \\ q \end{pmatrix} 4^q \\ &\leq 2 \sum_{q=0}^{l-1} \begin{pmatrix} l-1 \\ q \end{pmatrix} 4^q \\ &= 2 \cdot (4+1)^{l-1} = 2 \cdot 5^{l-1} \leq 5^l \end{aligned}$$

Substituindo,

$$\begin{aligned} Q(n) &\leq c_2 L \sqrt{n} \sum_{l=2}^{n'} \nu^l \ 2^{n-(\tau+1)l} \ 5^l \\ &\leq c_2 L \sqrt{n} \sum_{l=2}^{n'} 2^n \left(5\nu 2^{-\tau-1}\right)^l \\ &\leq c_2 \sqrt{n} \begin{cases} 2^n & se \ 5\nu 2^{-\tau-1} < 1 \\ 2^n (5\nu 2^{-\tau-1})^{\frac{n}{\tau+1}} & se \ 5\nu 2^{-\tau-1} \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

E, portanto, obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Q(n) \leq \max\left(\log 2, \frac{\log 5\nu}{\tau+1}\right)$$

E, se $\tau \geq \frac{\log 5}{\log \nu}$, então

$$h_{top}(\Sigma) = \log \nu.$$

Agora, da mesma forma como procedemos no exemplo anterior: tomamos L medidas de Bernoulli μ_j com pesos $p_k^j = \frac{1}{\nu}$ para $k = (j-1)\nu + 1, (j-1)\nu + 2, \ldots, j\nu$ e $p_k^j = 0$, para todos os outros k ($j = 1, 2, \ldots, L$). Essas medidas (assim como suas combinações lineares) possuem entropia métrica $\log \nu$ e, portanto, pelo princípio variacional, são medidas de máxima entropia.

6.1.3 Exemplo com infinitas medidas ergódicas distintas de máxima entropia

Seja $\nu \geq 2$. Agora faremos L tender para infinito e obteremos um subdeslocamento Σ sobre o alfabeto $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Existem infinitos ν-deslocamentos completos

$$\Sigma_j = \{(j-1)\nu + 1, (j-1)\nu + 2, \ldots, j\nu\}^{\mathbb{Z}},$$

para $j = 1, 2, \ldots$. Como antes, só trocamos de uma palavra α em Σ_j pra uma palavra β em $\Sigma_{j\pm 1}$ mantendo-as separadas por uma faixa de zeros de tamanho no mínimo $\tau(|\alpha| + |\beta|)$.

Novamente, o espaço deslocamento Σ resultante é topologicamente misturador mas não é um espaço compacto. Entretanto, podemos considerar a compactificação de um ponto $\bar{\Sigma} = \Sigma \cup \{\infty\}$ e uma métrica adequada que, em particular, implica que vizinhanças de ∞ contenham os subdeslocamentos Σ_j para j grandes o sufuciente. Como vimos na seção 4.2.2, a entropia topológica pode ser definida por conjuntos (ε, n)-separados $E_{\varepsilon,n}$ e é dada por

$$h_{top}(\Sigma) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \lim_{n \to \infty} \frac{\log |E_{\varepsilon,n}|}{n}.$$

Lema 6.3. Se $\nu \geq 2$ e $\tau \geq \frac{\log 5}{\log \nu}$, então existe infinitas medidas ergódicas distintas de máxima entropia em Σ.

Demonstração. Claramente, temos $h_{top}(\Sigma) \geq \log \nu$.

Agora, se denotarmos por $R_L(n)$ o número de palavras de tamanho n em Σ cuja primeira coordenada mora em $\mathcal{S}_L = \{0, 1, \ldots, L\nu\}$ temos que

$$h_{top}(\Sigma) = \lim_{L \to \infty} \lim_{n \to \infty} \frac{\log R_L(n)}{n}.$$

Temos emtão

$$R_L(n) \leq L\nu^n + Lc_3\sqrt{n} \begin{cases} 2^n & se\ 5\nu 2^{-\tau-1} < 1 \\ 2^n (5\nu 2^{-\tau-1})^{\frac{n}{\tau+1}} & se\ 5\nu 2^{-\tau-1} \geq 1 \end{cases}$$

e, consequentemente,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log R_L(n) \leq \max \left(\log \nu, \frac{\log 5\nu}{1+\tau} \right)$$

Fazendo L tender para infinito obtemos

$$h_{top}(\Sigma) \leq \max\left(\log\nu, \frac{\log 5\nu}{1+\tau}\right)$$

que é igual a $\log\nu$ se $\tau \geq \frac{\log 5}{\log\nu}$ então $h_{top}(\Sigma) = \log\nu$.

As medidas de Bernoulli com pesos iguais, nos espaços Σ_j, $\forall\, j$ são todas as medidas de máxima entropia.

□

6.2 Estados de Equilíbrio

Vamos construir um subdeslocamento com vários estados de equilíbrio distintos para potenciais contínuos de Hölder.

6.2.1 Exemplo com dois estados de equilíbrio distintos

Seja $\tau > 0$ e $\nu \geq 3$ inteiros. Tomamos $\mathcal{S} = \{0\} \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{R} = \{0, 1, 2, \ldots, 2\nu\}$ e definimos o deslocamento $\Sigma \subset \mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$, como anteriormente. Σ contém dois deslocamentos completos Σ_*, $* = \mathcal{A}, \mathcal{R}$, e onde a transição ocorre por faixas de zeros de tamanho no mínimo $\tau(|\alpha|+|\beta|)$ com α, β palavras monocromáticas de cores diferentes.

Seja φ uma função de Hölder real no deslocamento $\Sigma_{\mathcal{A}}$ de modo que $P_{\mathcal{A}}(\varphi) > \sup\varphi + \log 2$, onde $P_{\mathcal{A}}(\varphi)$ é a pressão de φ no deslocamento completo $\Sigma_{\mathcal{A}}$.

Para $\nu \geq 3$ isso é possível, já que $P_{\mathcal{A}}(\varphi) - \sup\varphi$ é limitado superiormente por $\log\nu$ e igual a $\log\nu$ para φ constante, e a função pressão é contínua.

Vamos definir uma função Hölder g em dois passos. Vamos primeiro estender a função para $\Sigma_{\mathcal{R}}$ por identificação: ou seja, $g(y) = \varphi(x)$ para $x \in \Sigma_{\mathcal{A}}$, $y \in \Sigma_{\mathcal{R}}$ para os quais $y_i = x_i + \nu$, $\forall i$. Agora, vamos estender g para as palavras bicolores da seguinte forma: se $x_0 = 0$ então tomamos $g(x) = \sup\varphi$; se $x_0 \neq 0$ e $x \in \Sigma$ é uma sequência que contém símbolos de ambas cores, então seja $x_{-n} \ldots x_n$ a faixa monocromática mais longa (ou seja $x_{-n} \ldots x_n$ uma palavra em $\Sigma_{\mathcal{A}}$ ou $\Sigma_{\mathcal{R}}$ e $x_{-n-1} = 0$ ou $x_{n_1} = 0$). Tomamos então um ponto monocromático $y \in U(x_{-n} \dots x_n) \subset \Sigma_*$ $(* = \mathcal{A},\ \mathcal{R})$ e definimos $g(x) = \varphi(y)$. Dessa forma, g é uma função de Hölder em Σ.

Lema 6.4. Se $\tau \geq \frac{\log 3\nu}{P_{\mathcal{A}}(\varphi) - \sup \varphi} - 1$, então a pressão $P(g)$ de g em Σ é igual a $P_{\mathcal{A}}(\varphi)$.

Demonstração. Vamos denotar por W_n a coleção de palavras $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n$ de tamanho n de Σ. A pressão de g é dada pela taxa de crescimento exponencial da função partição

$$Z_n = \sum_{\alpha \in W_n} e^{g^n(x(\alpha))}$$

onde $x(\alpha)$ é um ponto arbitrário no cilindro $U(\alpha) \subset \Sigma$, e $g^n = g + g\sigma + g\sigma^2 + \dots + g\sigma^{n-1}$.

Se na soma acima, restringirmos para palavras monocromáticas α de qualquer uma das cores, obtemos a função partição azul ou rosa $Z_n^* = \sum_{\alpha \in W_n^*} e^{g^n(x(\alpha))}$ $(* = \mathcal{A}, \mathcal{R})$ cujas taxas de crescimento são exatamente $P_{\mathcal{A}}(\varphi)$. Denotamos por W_n^* o conjunto de palavras monocromáticas $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ em Σ_*.

Vamos denotar que a taxa de crescimento de $\sum_{k=1}^{n} Z_k^*$ é também $P_{\mathcal{A}}(\varphi)$. Por isso, se denotarmos por W_n' as palavras em W_n que contém símbolos de exatamente uma cor e, de outro modo, pelo menos um zero, então segue que a taxa de crescimento de $Z_n = \sum_{\alpha \in W_n'} e^{g^n(x(\alpha))}$ também é dada por $P_{\mathcal{A}}(\varphi)$.

Resta mostrar que a taxa de crescimento exponencial de $\sum_{\alpha \in W_n''} e^{g^n(x(\alpha))}$ é $\leq P_{\mathcal{A}}(\varphi)$, onde W_n'' denota as palavras bicolores em W_n.

No Lema 6.2, estimamos

$$|W_n''| = Q(n) \leq c_2\sqrt{n}2^n\big(1 + (3\nu 2^{-\tau-1})^{\frac{n}{\tau+1}}\big),$$

e como $\sup g = \sup \varphi$, pela definição da g, obtemos

$$\begin{aligned} Z_n'' = \sum_{\alpha \in W_n''} e^{g^n(x(\alpha))} &\leq \sum_{\alpha \in W_n''} e^{n \sup g} \leq |W_n''| e^{n \sup g} \\ &\leq c_2 e^{n \sup \varphi} \sqrt{n} 2^n \big(1 + (3\nu 2^{-\tau-1})^{\frac{n}{\tau+1}}\big) \end{aligned}$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Z_n'' \leq \sup \varphi + \max\left(\log 2, \frac{\log 3\nu}{\tau + 1}\right)$$

que é $\leq P_{\mathcal{A}}(\varphi)$ se $\tau + 1 \geq \frac{\log 3\nu}{P_{\mathcal{A}} - \sup \varphi}$.

$\square$

Para $\nu \geq 3$ e $\tau \geq \frac{\log 3\nu}{P_{\mathcal{A}} - \sup \varphi}$, existem inúmeros potenciais $\varphi : \Sigma_A \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $P_{\mathcal{A}}(\varphi) \geq \sup \varphi + \log 2$. Então para a extensão $g : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ existe um estado de equilíbrio em cada subdeslocamento $\Sigma_{\mathcal{A}}$ e $\Sigma_{\mathcal{R}}$ que, pelo Lema anterior, assume pressão $P(g) = P_{\mathcal{A}}(\varphi)$ no princípio variacional. Essas duas medidas são ambas invariantes e ergódicas.

6.2.2 Exemplo com $L \geq 2$ estados de equilíbrio distintos

Para $\nu \geq 3$ inteiro, construímos um subdeslocamento Σ sobre o alfabeto $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \ldots L\nu\}$ como acima, contendo os deslocamentos completos $\Sigma_j = \{(j-1)\nu + 1, \ldots, j\nu\}^{\mathbb{Z}}$, $j = 1, 2, \ldots, L$.. Novamente, somente permitiremos transições de uma palavra α em Σ_j para uma palavra β em $\Sigma_{j\pm1}$ se separadas por uma faixa de zeros de tamanho no mínimo $\tau(|\alpha| + |\beta|)$.

Seja φ um potencial Hölder real no deslocamento Σ_1 tal que $P_1(\varphi) > \sup \varphi + \log 2$, onde $P_1(\varphi)$ é a pressão de φ no deslocamento Σ.

Vamos definir um potencial Hölder g em Σ. Primeiro, estendemos a função de Σ_1 para Σ_j, $j = 2, \ldots, L$ pela identificação: se $x \in \Sigma_1$, $y \in \Sigma_j$ tal que $y_i = x_i + (j-1)\nu$ para todo i, então tomammos $g(y) = \varphi(x)$. Então estendemos g para palavras como antes: se $x_0 = 0$, tomamos $g(x) = \sup \varphi$ e se $x_0 \neq 0$ para uma palavra multicolor $x \in \Sigma$, então tomamos $g(x) = \varphi(y)$ onde y é um ponto monocromático que realiza a maior sequência monocromática simétrica de x.

Lema 6.5. Se $\tau \geq \frac{\log 5\nu}{P_{\mathcal{A}}(\varphi) - \sup \varphi} - 1$, então a pressão $P(g)$ de g em Σ é igual a $P_1(\varphi)$.

Demonstração. Temos que encontrar a taxa de crescimento exponencial $P(g)$ da função partição

$$Z_n = \sum_{\alpha \in W_n} e^{g^n(x(\alpha))}$$

onde W_n são palavras de Σ de tamanho n. Temos $P(g) \geq P_1(\varphi)$.

Para estimar a taxa de crescimento exponencial de $Z_n'' = \sum_{\alpha \in W_n''} e^{g^n(x(\alpha))}$, onde W_n'' são as palavras efetivamente multicoloridas em W_n, tomamos como anteriormente

$$|W_n''| = Q(n) \leq c_2 \sqrt{n} 2^n \big(1 + (5\nu 2^{-\tau-1})^{\frac{n}{\tau+1}}\big),$$

e então,

$$\begin{aligned} Z_n'' &= \sum_{\alpha \in W_n''} e^{g^n(x(\alpha))} \leq |W_n''| e^{n \sup g} \\ &\leq c_2 e^{n \sup \varphi} \sqrt{n} 2^n \big(1 + (5\nu 2^{-\tau-1})^{\frac{n}{\tau+1}}\big) \end{aligned}$$

e, com isso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Z_n'' \leq \sup \varphi + \max\left(\log 2, \frac{\log 5\nu}{\tau+1}\right)$$

Portanto,

$$P(g) \leq P_1(\varphi) \ se \ \tau + 1 \geq \frac{\log 5\nu}{P_1 - \sup \varphi}$$

.

□

Para $\nu \geq 3$ e $\tau \geq \frac{\log 5\nu}{P_{\mathcal{A}}(\varphi) - \sup \varphi} - 1$, existem inúmeros potenciais $\varphi : \Sigma_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $P_1(\varphi) \geq \sup \varphi + \log 2$. Então para a extensão $g : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ existe um estado de equilíbrio em cada subdeslocamento Σ_j, que assumem pressão $P(g)$ igual a $P_1(\varphi)$ no princípio variacional. Sendo que essas L medidas são todas invariantes e ergódicas.

6.2.3 Exemplo com infinitos estados de equilíbrio distintos

Seja $\nu \geq 3$ e construa o subdeslocamento $\Sigma \subset \mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}}$ como fizemos acima. Um potencial de Hölder φ em Σ_1 que satisfaz $P_1(\varphi) \geq \sup \varphi + \log 2$ é estendida, como acima, para uma função Hölder g em Σ tal que $g_{|\Sigma_j} = \varphi$ em cada subdeslocamento Σ_j, $j = 1, 2, \ldots$.

Mais ainda, podemos estender g para o espaço compacto $\bar{\Sigma}$ definindo $g(\infty) = \sup \varphi$.

Se denotarmos por μ_j o estado de equilíbrio em Σ_j para o potencial $g_{|\Sigma_j}$ então $P_j(g_{|\Sigma_j}) = P_1(\varphi) = P(g)$ para todo j.

Temos então que se $\nu \geq 3$ e $\tau \geq \frac{\log 5}{\log \nu}$ e $\tau \geq \frac{\log 5\nu}{P_1(\varphi) - \sup \varphi} - 1$ então existem infinitos estados de equilíbrio distintos μ_j em Σ para g potencial de Hölder.

Bibliografia

[1] BARAVIERA, A. T.; BRANCO, F. M. **Sistemas Dinâmicos: uma primeira visão**. SBM, 2012.
Disponível em: < http://www.sbm.org.br/docs/coloquios/SU-2.02.pdf >. Acesso em: 12/11/2013.

[2] BRIN, M.; STUCK, G. **Introduction to Dynamical Systems**. New York: Cambridge University Press, 2003.

[3] CASTRO JR, A. A. de. **Curso de Teoria da Medida**. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

[4] HASSELBLATT, B.; KATOK, A. **Handbook of Dynamical Systems: Principal Structures**. Amsterdam: Elsevier, 2002.

[5] HAYDN, N. **Phase Transition in one-dimensional subshifts**. Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A, pages 1965-1973, vol. 33, issue 5, may 2013.

[6] KATOK, A. **Fifty years of Entropy in Dynamics: 1958-2007**. Journal of Modern Dynamics, pages 545-596, vol. 1, nº 4, 2007.

[7] OLIVEIRA, K. **Um Primeiro Curso sobre Teoria Ergódica com Aplicações**. 25º Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[8] PETERSEN, K. **Ergodic Theory**. New York: Cambridge University Press, 1989.

[9] RUDIN, W. **Real and Complex Analysis**. 3º ed. New York: McGraw-Hill, 1986.

[10] VIANA, M.; OLIVEIRA, K. **Fundamentos de Teoria Ergódica**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[11] WALTERS, P. **An Introduction to Ergodic Theory**. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1982.