

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ALESSANDRA HELENA KIMURA  
PALMEIRA

**ESTABILIDADE DE SISTEMAS  
AMOSTRADOS COM ATUADORES  
SATURANTES EM MAGNITUDE E  
TAXA DE VARIAÇÃO**

Porto Alegre  
2015



**ALESSANDRA HELENA KIMURA  
PALMEIRA**

**ESTABILIDADE DE SISTEMAS  
AMOSTRADOS COM ATUADORES  
SATURANTES EM MAGNITUDE E  
TAXA DE VARIAÇÃO**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.  
Área de concentração: Controle e Automação

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. João Manoel  
Gomes da Silva Jr.

Porto Alegre  
2015



**ALESSANDRA HELENA KIMURA  
PALMEIRA**

**ESTABILIDADE DE SISTEMAS  
AMOSTRADOS COM ATUADORES  
SATURANTES EM MAGNITUDE E  
TAXA DE VARIAÇÃO**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr., UFRGS  
Doutor pela Université Paul Sabatier – Toulouse, França

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores, UFRGS  
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Prof. Dr. Diego Eckhard, UFRGS  
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Prof. Dr. Daniel Ferreira Coutinho, UFSC  
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil

Coordenador do PPGEE: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella

Porto Alegre, fevereiro de 2015.



## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho aos meus pais, pelo apoio e incentivo.



## **AGRADECIMENTOS**

A minha família pelo apoio incondicional e pelo amor.

Aos meus amigos, em especial ao Bruno, Yuli, Andrea, Oscar e Vitor, e aos meus amigos que estão distantes.

Ao meu namorado Alessandro, pela companhia, apoio e inspiração.

À Ilca pelas contribuições e amizade.

À professora Sophie Tarbouriech pelas correções e contribuições.

Ao meu orientador João Manoel, pela paciência, conhecimentos transmitidos e orientações.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UFRGS pela oportunidade.

À CAPES pela provisão da bolsa de mestrado.



## RESUMO

Neste trabalho, aborda-se o problema de estabilidade de sistemas com dados amostrados aperiodicamente, na presença de atuadores saturantes em posição e em taxa de variação. Os atuadores são modelados como sistemas de primeira ordem com saturação de entrada (saturação de magnitude) e do estado (saturação de taxa de variação).

No modelo, considera-se que o sinal de controle é mantido constante entre dois instantes de amostragem consecutivos, enquanto as dinâmicas da planta linear e do atuador saturante são em tempo contínuo, i.e., não é feita discretização do sistema. O efeito da amostragem aperiódica é considerado através de um *looped*-funcional, derivado do funcional de Lyapunov-Krasovskii. O método desenvolvido relaciona uma função quadrática de Lyapunov e o funcional, considerando a amostragem assíncrona e o atuador saturante. Assim, se a derivada temporal do funcional ao longo das trajetórias do sistema for definida negativa, verifica-se que a função de Lyapunov é estritamente decrescente nos instantes de amostragem. Os efeitos das saturações são considerados por meio do uso da condição de setor generalizada.

A partir do *looped*-funcional, da função de Lyapunov e das relações de setor generalizadas, são formuladas condições que permitem caracterizar a estabilidade e projetar ganhos estabilizantes da origem do sistema amostrado, em contexto local e global, através de algoritmos baseados na solução de LMIs. São propostas condições para maximização da estimativa da região de atração da origem ou, dado um conjunto de condições iniciais, para maximização do limite superior do intervalo de amostragem. As condições estabelecidas são válidas para o sistema com acesso a todos os estados, como também, no caso dos estados do atuador não estarem disponíveis à medição.

**Palavras-chave:** Sistemas amostrados, estabilidade, *looped*-funcional, funcional de Lyapunov, saturação de magnitude, saturação de taxa de variação, saturação, *Linear Matrix Inequality* (LMI).



## ABSTRACT

This work addresses the problems of stability and stabilization of sampled-data systems taking into account aperiodic sampling and magnitude and rate saturating actuators. The actuators are represented by a first-order system subject to input (magnitude saturation) and state (rate) saturation.

In the considered model, the control signal is assumed to be constant between two successive sampling instants, while the dynamics of the linear plant and the saturating actuator are in continuous-time, i.e., no discretization is performed. The aperiodic sampling is taken into account from the method based on the input delay approach via looped-functional, derived from a time-dependent Lyapunov-Krasovskii functional. The developed method is based on a particular functional, that is related to a Lyapunov function. It is shown that if the time derivative of the looped-functional along the trajectories of the continuous-time system is strictly negative, then the Lyapunov function is strictly decreasing at sampling instants. The actuator saturations are taken into account from the use of a generalized sector condition.

From the looped-functional, the Lyapunov function and the generalized sector conditions, the developed results lead to conditions that can be solved as LMI problems for asymptotic stability assessment and stabilization local or global of the origin of the sampled-data system. Convex optimization problems are developed to compute an estimate of the region of attraction or, given a set of admissible initial conditions, compute the maximal admissible inter-sampling time for which the convergence of the trajectories to the origin is ensured. Theoretical results are valid for systems with access to all the states, and also for the case that actuator states are not available to the measurement.

**Keywords:** Sampled-data systems, stability, looped-functional, Lyapunov-Krasovskii functional, magnitude/position saturation, rate saturation, saturation, Linear Matrix Inequality (LMI).



# SUMÁRIO

<b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES</b>	15
<b>LISTA DE TABELAS</b>	17
<b>LISTA DE ABREVIATURAS</b>	19
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b>	21
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	23
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA: SISTEMAS AMOSTRADOS SUJEITOS À ATUADORES SATURANTES EM POSIÇÃO E EM TAXA DE VARIAÇÃO</b>	27
2.1 Introdução	27
2.2 Sistemas Lineares Sujeitos à Atuadores Saturantes em Magnitude e em Taxa de Variação	27
2.3 Sistemas Amostrados	30
2.4 Sistemas Amostrados com Saturações no Atuador	33
2.5 Considerações Finais	34
<b>3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E PRELIMINARES</b>	35
3.1 Introdução	35
3.2 Formulação do Problema	35
3.3 Modelo do Sistema Amostrado em Malha Fechada	39
3.4 Resultados de Base	39
3.4.1 Tratamento da Saturação	40
3.4.2 Estabilidade do Sistema Amostrado	40
3.5 Considerações Finais	43
<b>4 ANÁLISE DE ESTABILIDADE</b>	45
4.1 Introdução	45
4.2 Estabilidade Regional (Local)	45
4.3 Estabilidade Global	50
4.4 Problemas de Otimização	51
4.4.1 Maximização da Estimativa da Região de Atração	51
4.4.2 Maximização do Intervalo de Amostragem	51
4.5 Exemplos Numéricos	52
4.5.1 Exemplo 1: Maximização da $\mathcal{E}(P)$ para Planta Instável com $C = [K_p \ K_a]$	52

4.5.2	Exemplo 2: Maximização de $\mathcal{E}(P)$ para Planta Instável com $C = [K_p \ 0]$	56
4.5.3	Exemplo 3 - Estabilidade em Contexto Global	58
4.6	<b>Comentários Finais</b>	60
<b>5</b>	<b>ESTABILIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS</b>	61
5.1	Introdução	61
5.2	<b>Estabilização de Sistemas Amostrados Sujeitos a Atuadores Saturantes em Magnitude e em Taxa de Variação</b>	62
5.2.1	Caso 1: Estados do Atuador e da Planta Mensuráveis	62
5.2.2	Caso 2: Somente Estados da Planta são Mensuráveis	64
5.3	<b>Problemas de Otimização</b>	65
5.3.1	Maximização da Estimativa da Região de Atração	65
5.3.2	Maximização do Intervalo de Amostragem	66
5.3.3	Estabilização Assintótica Global com Taxa de Decaimento	66
5.4	<b>Exemplos Numéricos</b>	67
5.4.1	Exemplo 1: Maximização de $\mathcal{E}(P)$ para Planta Instável com $C = [K_p \ K_a]$	67
5.4.2	Exemplo 2: Comparação entre $C = [K_p \ 0]$ e $C = [K_p \ K_a]$	70
5.4.3	Exemplo 3 - Caso Multivariável	73
5.5	<b>Comentários Finais</b>	75
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	79
6.1	Trabalhos Futuros	80
	<b>REFERÊNCIAS</b>	83
	<b>APÊNDICE A CONCEITOS BÁSICOS</b>	87
A.1	<b>Estabilidade no Sentido de Lyapunov</b>	87
A.1.1	Teorema de Lyapunov-Krasovskii	88
A.2	<b>Região de Atração</b>	89
A.3	<b>Condições de Setor Generalizada</b>	89
A.4	<b>Complemento de Schur</b>	90

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1:	Sistema amostrado com atuadores sujeitos a saturação em magnitude e em taxa de variação. . . . .	29
Figura 2:	Sistema amostrado com atuadores sujeitos a saturação em magnitude e em taxa de variação (modelo com saturações encadeadas). . . . .	30
Figura 3:	Ilustração da relação do <i>looped</i> -funcional $W(t - t_k, \chi_k(\tau))$ e da função quadrática de Lyapunov $V(\chi_k)$ para sistemas amostrados (SEURET, 2011) . . . . .	33
Figura 4:	Sistema amostrado com atuadores sujeitos a saturação em magnitude e em taxa de variação com $u(t) = K_p x_p(t_k) + K_a x_a(t_k)$ , para $t_k \leq t < t_{k+1}$ . . . . .	37
Figura 5:	Sistema linear amostrado sujeito a atuadores saturantes em magnitude e em taxa de variação com $u(t) = K_p x_p(t_k)$ , para $t_k \leq t < t_{k+1}$ . . . . .	39
Figura 6:	Trajetórias dos estados no plano definido pelos estados da planta para $x_a(0) = 0$ e para condições iniciais pertencentes (em azul) e não (em vermelho) ao elipsoide $\mathcal{E}(P)$ e um corte de $\mathcal{E}(P)$ neste plano (em preto). . . . .	53
Figura 7:	Valores de $\chi_k^T P \chi_k$ para condições iniciais na fronteira do corte do elipsoide $\mathcal{E}(P)$ . . . . .	53
Figura 8:	Sinais de $sat_p(u)$ (em vermelho) e de $\dot{x}_a$ (em azul), para $x(0) = [0.01 \ -0.24 \ 1.2]^T$ . . . . .	54
Figura 9:	Estados da planta (em preto), estado do atuador (em azul) e $sat_p(u)$ (em vermelho), para $x(0) = [0.01 \ -0.24 \ 1.2]^T$ . . . . .	54
Figura 10:	Evolução de $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ no tempo (em azul) para $T_k \in [0.01, 0.07]$ , considerando $x(0) = [0.01 \ -0.24 \ 1.2]^T$ . . . . .	55
Figura 11:	Estados da planta para $T_k \in [0.01, 0.07]$ (em preto) e para $\tau_1 = \tau_2 = 0.01$ (em vermelho), considerando $x(0) = [0.01 \ -0.24 \ 1.2]^T$ . . . . .	55
Figura 12:	Trajetórias dos estados no plano definido pelos estados da planta para $x_a(0) = 0$ e para condições iniciais pertencentes (em azul) e não pertencente (em vermelho) ao elipsoide $\mathcal{E}(P)$ e um corte de $\mathcal{E}(P)$ neste plano (em preto) e corte de $\mathcal{E}(P_{CON})$ (em magenta), com $C = [0 \ 3 \ 0]$ . . . . .	57
Figura 13:	Sinais de $sat_p(u)$ (em vermelho) e de $\dot{x}_a$ (em azul), considerando $x(0) = [0.01 \ -0.08 \ 1]^T$ . . . . .	58
Figura 14:	Estados da planta (em preto), estado do atuador (em azul) e $sat_p(u)$ (em vermelho), para $x(0) = [0.01 \ -0.08 \ 1]^T$ . . . . .	59

Figura 15:	Estados do sistema, considerando $x(0) = [100 \ 50]^T$ , para $T_k \in [0.01, 2.81]$ . . . . .	59
Figura 16:	Sinais de $sat_1$ (em vermelho) e $sat_2$ (em azul), considerando $x(0) = [100 \ 50]^T$ , para $T_k \in [0.01, 2.81]$ . . . . .	60
Figura 17:	Trajeto�rias dos estados no plano definido pelos estados da planta para $x_a(0) = 0$ e para condi�es iniciais pertencentes (em azul) e n�o pertencentes (em vermelho) ao elipsoide $\mathcal{E}(P)$ e um corte de $\mathcal{E}(P)$ no plano (em preto). . . . .	68
Figura 18:	Trajeto�rias (em azul) do sistema (89), no plano definido pelos estados da planta, para condi�es iniciais pertencentes a fronteira do elipsoide $\mathcal{E}(P_1)$ e um corte de $\mathcal{E}(P_1)$ no plano (em preto) com os ganhos projetados pelo Teorema 2 de (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012), com $T_k \in [0.01, 0.07]$ . . . . .	69
Figura 19:	Estados da planta (em preto) e do atuador (em azul), sinal de controle saturado $sat_p(u(t))$ (em vermelho), com $C = [-28.54 \ -8.88 \ -0.38]$ , para $x(0) = [-0.32 \ 1 \ -1.7]^T$ . . . . .	70
Figura 20:	Sinais de $sat_p(u)$ (em vermelho) e de satura�o de taxa de varia�o $sat_r$ (em azul), com $C = [-28.54 \ -8.88 \ -0.38]$ , para $x(0) = [-0.32 \ 1 \ -1.7]^T$ . . . . .	71
Figura 21:	Corte da estimativa de $\mathcal{R}_a$ da origem do sistema (92), para $T_k \in [0.01, 0.13]$ , no plano definido pelos estados da planta para $x_a(0) = 0$ , com $C_1 = [-0.0011 \ 2.7232 \ 0]$ ( $\mathcal{E}(P_1)$ em vermelho) e $C_2 = [0.5462 \ 1.6353 \ 0.0802]$ ( $\mathcal{E}(P_2)$ em preto). . . . .	72
Figura 22:	Trajeto�rias (em azul) do sistema (92), no plano definido pelos estados da planta para $x_a(0) = 0$ , para condi�es iniciais pertencentes a fronteira do elipsoide $\mathcal{E}(P_1)$ e um corte de $\mathcal{E}(P_1)$ no plano (em preto), para $C_1 = [-0.0011 \ 2.7232 \ 0]$ . . . . .	73
Figura 23:	Trajeto�rias (em azul) do sistema (92), no plano definido pelos estados da planta para $x_a(0) = 0$ , para condi�es iniciais pertencentes a fronteira do elipsoide $\mathcal{E}(P_2)$ e um corte de $\mathcal{E}(P_2)$ no plano (em preto), para $C_2 = [0.5462 \ 1.6353 \ 0.0802]$ . . . . .	73
Figura 24:	Estados do atuador $x_a(t)$ (em vermelho) e da planta $x_p(t)$ (em azul), com $x(0) = [2 \ -4 \ -3 \ 4 \ 1.8 \ -2]^T$ , para $T_k \in [0.01, 0.08]$ . . . . .	75
Figura 25:	Valores de $x^T(t)Px(t)$ , com $x(0) = [2 \ -4 \ -3 \ 4 \ 1.8 \ -2]^T$ , para $T_k \in [0.01, 0.08]$ , $\bar{u}_2 = [2 \ 5]^T$ . . . . .	75
Figura 26:	Sinais de $sat_p(u(t))$ dos atuadores com din�mica $\lambda_1 = 20$ (em azul) e $\lambda_2 = 15$ (em vermelho), com $x(0) = [2 \ -4 \ -3 \ 4 \ 1.8 \ -2]^T$ , para $T_k \in [0.01, 0.08]$ , $\bar{u}_1 = [2 \ 5]^T$ . . . . .	76
Figura 27:	Sinais de $sat_r$ dos atuadores com din�mica $\lambda_1 = 20$ (em azul) e $\lambda_2 = 15$ (em vermelho), com $x(0) = [2 \ -4 \ -3 \ 4 \ 1.8 \ -2]^T$ , para $T_k \in [0.01, 0.08]$ , $\bar{u}_2 = [5 \ 2]^T$ . . . . .	76

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Valores de $\delta$ e do traço ( $\gamma$ ) de $P$ , com $\tau_1 = 0.01$ fixo para diferentes valores de $\tau_2$ . . . . .	56
Tabela 2:	Valores de $\varepsilon$ e do traço ( $\gamma$ ) de $P$ , com $\tau_1 = 0.01$ fixo para diferentes valores de $\tau_2$ , com $C = [K_p \ 0]$ . . . . .	56
Tabela 3:	Valores do traço ( $\gamma$ ) de $P$ , com $\tau_1 = 0.01$ fixo para diferentes valores de $\tau_2$ . . . . .	67
Tabela 4:	Valores do traço ( $\gamma$ ) de $P$ , com $\tau_1 = 0.01$ fixo para diferentes valores de $\tau_2$ , com $C = [K_p \ 0]$ . . . . .	71
Tabela 5:	Valores do traço ( $\gamma$ ) de $P$ , com $\tau_1 = 0.01$ fixo para diferentes valores de $\tau_2$ , com $C = [K_p \ K_a]$ e $\varepsilon = 2$ . . . . .	72
Tabela 6:	Valores do traço ( $\gamma$ ) de $P$ , com $\tau_1 = 0.01$ fixo para diferentes valores de $\tau_2$ , com $C = [K_p \ K_a]$ e $\varepsilon = 2$ . . . . .	74



## LISTA DE ABREVIATURAS

ATM	Protocolo <i>Assynchronous Transfer Mode</i>
CSMA	<i>Carrier Sense Multiple Access</i>
DDE	<i>Delay Differential Equation</i> ou Equação Diferencial com Atraso
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> ou Desigualdade Matricial Linear
MIMO	<i>Multiples-Input Multiples-Output</i>
MPC	<i>Model Predictive Control</i> ou Controle Preditivo baseado em Modelo
NCS	<i>Networked Control Systems</i> ou Sistemas de Controle em Rede
PI	Controlador Proporcional-Integral
PID	Controlador Proporcional-Integral-Derivativo
PIO	<i>Pilot-induced oscillations</i>
RHOC	<i>Receding Horizon Optimal Control</i>
SISO	<i>Single-Input Single-Output</i>
ZOH	<i>Zero-Order Hold</i> ou Retentor de Ordem Zero



## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}^{n \times m}$	espaço das matriz de números reais de dimensão $n \times m$
$\mathbb{R}^n$	conjunto de vetores reais de dimensão $n$
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{K}$	conjunto de funções contínuas de um intervalo $[0, T]$ para $\mathbb{R}^n$ , com $T$ sendo menor que um escalar positivo $\tau_2$
$\mathcal{R}_a$	região de atração do ponto de equilíbrio
$\mathcal{D}$	domínio da função de Lyapunov $V(x)$ e/ou conjunto de condições iniciais admissíveis
$\mathcal{E}(P)$	elipsoide definido por $\mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n; x^T P x \leq 1\}$
$I$	matriz identidade de dimensão apropriada
$0$	matriz de dimensão apropriada com todos os elementos nulos
$A > 0$	matriz definida positiva
$A^T$	transposta da matriz $A$
$A^{-1}$	inversa da matriz $A$
$\gamma(A)$	traço da matriz $A$
$A = A^T$	matriz simétrica
$A_{(j)}$	$j$ -ésima linha da matriz $A$
$He\{A\}$	representa $A + A^T$
$diag\{A, B\}$	matriz bloco diagonal formada pelas matrizes $A$ e $B$
$\star$	bloco simétrico na matriz
$K_p$	matriz de ganhos de realimentação dos estados da planta
$K_a$	matriz de ganhos de realimentação dos estados do atuador
$t_k$	instante de tempo da $k$ -ésima amostragem
$T_k$	intervalo de tempo entre duas amostragens consecutivas, $T_k = t_{k+1} - t_k$
$\chi_k(\tau)$	função equivalente à $x(t_k + \tau)$ , para $\tau \in [0, T_k]$ , no intervalo de $t \in [0, T_k]$
$sat_p$	saturação de magnitude/posição do atuador ( <i>magnitude/position saturation</i> )

$sat_r$	saturação de taxa de variação do atuador ( <i>rate saturation</i> )
$\nu_{(j)}$	$j$ -ésimo componente do vetor $\nu$
$sign(u)$	função que fornece $-1$ caso $u < 0$ e $+1$ caso $u \geq 0$
$sat_i(\omega)$	saturação com limites simétricos com valores $\pm \bar{u}_i$ aplicada ao vetor ( $\omega$ )
$\psi_{k_i}(\omega)$	função equivalente à $sat_i(\omega(t)) - \omega(t)$ , para $t_k \leq t < t_{k+1}$
$\forall$	para todo
$\in$	pertence ao
$\subset$	subconjunto de
$\longrightarrow$	tende para
$ \cdot $	valor absoluto
$\ \cdot\ $	norma vetorial Euclidiana

# 1 INTRODUÇÃO

Sistemas de controle são largamente utilizados em processos industriais, nos campos aeronáutico, robótico, militar e automobilístico, entre outros, com objetivo de possibilitar maior produtividade, eficiência, atender à requisitos de segurança ou de desempenho. Um sistema em malha fechada é composto basicamente pela planta, por sensores e atuadores e pelo controlador. Estes componentes apresentam não-linearidades que muitas vezes podem ser desprezadas ou linearizadas. Nestes casos, as teorias de controle de sistemas lineares podem ser aplicadas.

Alguns elementos não-lineares, como a saturação, são mais complexos, não podem ser linearizados, nem desprezados e suas características devem ser consideradas na dinâmica do sistema. A função saturação é uma forma de modelar as limitações físicas, tecnológicas ou de segurança, existentes nos elementos do sistema de controle, comum em sensores e atuadores, que não fornecem ou recebem sinais de amplitude ilimitada.

As saturações presentes no sistema degradam o desempenho, sendo fontes de múltiplos pontos de equilíbrio, ciclo-limites e de instabilidade (TARBOURIECH et al., 2011). Citam-se como exemplos de elementos com saturação: válvulas proporcionais, atuadores hidráulicos e pneumáticos, motores, atuadores de aquecimento ou resfriamento, sensores, amplificadores. Enfim, os equipamentos possuem alguma limitação de quanta energia pode ser transmitida ao componente, esta limitação é modelada matematicamente pela função saturação.

Como a saturação é inerente a vários componentes do sistema em malha fechada, o estudo de estabilização de sistemas sujeitos à saturação é uma área de interesse de vários pesquisadores. Em muitos casos somente é considerado a saturação de magnitude do sinal de entrada, como visto em (HU; LIN, 2001), (TARBOURIECH et al., 2011), (ZACCARIAN; TEEL, 2011) e em referências lá citadas. Por outro lado, em alguns sistemas críticos e que exigem alta performance dos atuadores, como na aeronáutica, é fundamental considerar a saturação não só de magnitude como também de taxa de variação inerente ao atuador, i.e., o atuador não responde de forma satisfatória a mudança do sinal de controle ou não apresenta velocidade ilimitada de resposta. É sabido que, quando desconsiderada, a saturação de taxa de variação é fonte de desastres na área aeronáutica, como exposto em (MILLER; PACHTER, 1997) e em (RUNDQWIST; HILLGREN, 1996), pois, há um atraso de fase associado a esta saturação que tem efeito desestabilizante (BERG; HAMMET; BANDA, 1996) e causa oscilações (*pilot-induced-oscillations* - PIO).

Em malha fechada, os sensores medem os estados ou saídas do sistema, fornecendo sinais, em tempo contínuo ou discreto, para o controlador. O controlador é em geral um dispositivo digital, logo, em tempo discreto, enquanto a planta e o atuador

evoluem continuamente no tempo. A transmissão de dados entre os componentes pode ocorrer de forma discreta em intervalos de tempo periódicos (i.e., o intervalo entre duas amostragens consecutivas é constante) ou aperiódicas.

Ao considerar o sistema híbrido, i.e., com componentes em tempo contínuo e discreto, e amostragem em intervalos periódicos, é possível discretizar os elementos em tempo contínuo, e as teorias existentes para controle de sistemas discretos podem ser aplicados. Contudo, em sistemas reais existem elementos não-lineares. Neste caso, a teoria de controle de sistemas discretos clássica não pode ser aplicada. Como ocorre em sistemas com atuadores saturantes em taxa de variação, que faz com que o sistema apresente características não-lineares, mesmo que a planta seja considerada linear. Neste caso, não se aplica o método clássico de discretização que garante que os valores dos estados do modelo discreto e do sistema em tempo contínuo são iguais nos instantes de amostragem. Para este problema, (BATEMAN; LIN, 2002a) e (GOMES DA SILVA JR. et al., 2008) propõem condições para estabilização de sistemas saturantes em tempo discreto. No primeiro, estuda-se a estabilidade de sistemas discretos com saturações encadeadas, não sendo possível aplicar a plantas em tempo contínuo. Diferentemente de (BATEMAN; LIN, 2002a), em (GOMES DA SILVA JR. et al., 2008), as saturações de magnitude e de taxa de variação do atuador são consideradas no projeto do controlador (não-linear), i.e., o sinal de controle em tempo discreto respeita os limites do atuador, e o modelo discreto da planta linear é utilizado para validação do controlador, e assim, pode ser utilizado para plantas em tempo contínuo.

Por outro lado, os componentes do sistema podem estar distribuídos e conectados em rede, como é o caso de *Networked Control Systems* (NCSs) ou Sistemas de Controle em Rede. Neste caso, podem ocorrer atrasos na transmissão dos pacotes ou variações nos intervalos de amostragem, devido a perda dos pacotes de dados, problemas com canal ocupado, ou pelo processamento de dados de cada componente. Isto resulta em intervalos de amostragem aperiódicos, comum em redes sem fio, ou protocolos de rede de comunicação que não garantem tempo periódico de acesso ao canal de comunicação. Alguns exemplos de protocolos que possuem estas características são o *Asynchronous Transfer Mode* (ATM), o Ethernet, ou algumas redes baseadas no protocolo *Carrier Sense Multiple Access* (CSMA) e redes com meio físico *wireless*. Na prática, até mesmo sistemas com amostragem periódica estão sujeitos a perda de pacotes de dados.

A variação do intervalo de amostragem influencia na dinâmica e na estabilidade do sistema e, mesmo em sistemas lineares, a abordagem de discretização clássica passa também a ser inválida, tornando complexo a caracterização da estabilidade (ZHANG; BRANICKY; PHILLIPS, 2001). Basicamente, há três principais abordagens para caracterização da estabilidade de sistemas amostrados, a primeira considera o modelo discreto com incertezas (CLOOSTERMAN et al., 2009), (CLOOSTERMAN et al., 2010), (OISHI; FUJIOKA, 2009). A segunda, considera o sistema a reset, que é uma classe particular de sistemas híbridos (BEKER et al., 2004), (NESIC; ZACCARIAN; TEEL, 2008). A terceira, proposta em (FRIDMAN; SEURET; RICHARD, 2004), consiste em considerar o dado amostrado como um sinal atrasado, e assim, aplicar teorias de controle para DDEs (*delay differential equation* ou equação diferencial com atraso).

Assim, para modelar o sistema com componentes conectados em rede, deve-se considerar tanto a variação no intervalo de amostragem, como também, saturações de

magnitude e de taxa de variação inerentes a atuadores. Estas duas características degradam o desempenho e podem instabilizar o sistema. Observa-se, entretanto, uma lacuna de trabalhos publicados nesta área.

Sendo assim, neste trabalho, propõem-se a formulação de um modelo do sistema amostrado aperiódicamente com atuadores saturantes em magnitude e em taxa de variação um modelo. A partir deste modelo, propõem-se condições para a análise da estabilidade e estabilização da origem do sistema estudado. A lei de controle é uma realimentação estática dos estados amostrados. Consideram-se dois casos: uma em que todos os estados do sistema são mensuráveis, e outra em que os estados do atuador não estão disponíveis para medição.

Os resultados desenvolvidos neste trabalho baseiam-se na abordagem inicialmente proposta em (FRIDMAN; SEURET; RICHARD, 2004), e modificada em (SEURET, 2011), que estabelecem um *looped*-funcional para sistemas amostrados aperiódicamente. Porém, para o sistema estudado, algumas alterações são necessárias no *looped*-funcional, pois ao contrário de (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012), que estuda a estabilidade de sistemas amostrados com saturação do sinal de controle, no presente trabalho é considerada a saturação de taxa de variação do atuador, que depende tanto dos estados amostrados como dos mesmos em tempo contínuo.

O presente documento é dividido nos seguintes capítulos:

- No Capítulo 2, apresenta-se uma breve revisão sobre os métodos existentes para estabilidade e estabilização de sistemas amostrados e de sistemas lineares sujeitos a saturação tanto em amplitude quanto em taxa de variação. No caso da amostragem periódica e sistemas lineares, existem teorias de controle em tempo discreto consolidadas, porém nem sempre garante-se que a amostragem é realizada em intervalos fixos e a influência da amostragem aperiódica deve ser considerada na análise de estabilidade. Outra característica que deve ser considerada são as saturações, pois mesmo em sistemas com amostragem periódica, na presença de atuadores saturantes, os métodos de discretização clássicos não são válidos, tornando a análise complexa.
- O objetivo do Capítulo 3 é apresentar uma formulação para o sistema estudado, propondo problemas para análise de estabilidade e de síntese de ganhos estabilizantes da origem do sistema amostrado. Considera-se a lei de controle como sendo uma realimentação estática dos estados amostrados do sistema, com intervalo de amostragem aperiódico e limitado. A partir da formulação do sistema, do *looped*-funcional de (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012) e das condições de setor generalizadas de (TARBOURIECH et al., 2011), são estabelecidas condições que permitem analisar a estabilidade de sistemas amostrados com atuadores saturantes, este método relaciona uma função candidata de Lyapunov e um funcional em tempo contínuo. Estas condições são base para o desenvolvimento dos resultados teóricos obtidos nos Capítulos 4 e 5.
- No Capítulo 4, são apresentadas condições para a análise de estabilidade assintótica local e global da origem do sistema amostrado, com atuadores saturantes em magnitude e em taxa de variação, modelado como proposto no Capítulo 3. São propostas condições que permitem a formulação de problemas de otimização com restrições LMI para maximização da estimativa da região de atração

da origem ou, dado um conjunto de condições iniciais, para maximização do limite superior do intervalo de amostragem. Também são fornecidas condições para maximização do limite superior do intervalo de amostragem para o caso global, i.e., para todas as condições iniciais do espaço de estados as respectivas trajetórias do sistema amostrado convergem assintoticamente para a origem. Para ilustrar algumas características do sistema abordado e do método proposto, são apresentados alguns exemplos numéricos.

- No Capítulo 5, são apresentadas condições para síntese de ganhos de realimentação para estabilização assintótica local e global da origem do sistema amostrado, com atuadores saturantes em magnitude e em taxa de variação, modelado como proposto no Capítulo 3. Dois casos são considerados: um com acesso para medição de todos os estados do sistema, e o outro em que os estados do atuador não são mensuráveis. São formuladas condições que permitem o cálculo da lei de controle, através de algoritmos baseados na solução de LMIs, com intuito de maximizar a estimativa da região de atração ou, dado um conjunto de condições iniciais, de maximizar o limite superior do intervalo de amostragem. Também são fornecidas condições para projeto de ganhos de realimentação e maximização do limite superior do intervalo de amostragem para o caso global, i.e., para todas as condições iniciais do espaço de estados as respectivas trajetórias do sistema amostrado convergem assintoticamente para a origem. Alguns exemplos numéricos são apresentados para ilustrar algumas características do sistema abordado e das condições desenvolvidas para projeto de ganhos estabilizantes.
- No último capítulo, são apresentados conclusões e propostas de trabalhos futuros.
- No Apêndice A, estão disponíveis alguns conceitos básicos de teoria de sistemas não-lineares, que servem de base para este trabalho, tais como: estabilidade no sentido de Lyapunov, segundo método de Lyapunov, conceito de região de atração e condições de setor utilizadas para considerar os efeitos da saturação.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA: SISTEMAS AMOSTRADOS SUJEITOS À ATUADORES SATURANTES EM POSIÇÃO E EM TAXA DE VARIAÇÃO

### 2.1 Introdução

Saturação em atuadores é uma característica presente em sistemas de controle. Devido a limitações físicas, tecnológicas ou de segurança, os atuadores não fornecem sinais de magnitude ilimitada nem são capazes de responder a variações bruscas do sinal de entrada, estas limitações são caracterizadas como saturação de magnitude (ou posição) e de taxa de variação (ou velocidade), respectivamente. Assim, o efetivo sinal de controle da planta apresenta influência dos efeitos da saturação de magnitude ou de taxa de variação do atuador. Estas não-linearidades podem ser fontes de degradação do desempenho e de instabilidade (KHALIL, 1996), (HU; LIN, 2001), (TARBOURIECH et al., 2011), (ZACCARIAN; TEEL, 2011).

Em sistemas de controle modernos, o sistema (planta e atuador) apresenta em geral dinâmica em tempo contínuo, enquanto o controlador digital recebe dados amostrados da planta (saída do sensor). Este é o caso, por exemplo, de sistemas de controle em rede (NCSs), que é um controle distribuído, onde os elementos do sistema (atuadores, sensores, planta, controlador) estão conectados por uma rede industrial. Em NCS, o intervalo entre duas transmissões consecutivas de pacotes de dados entre os elementos esta sujeito a variações, devido a perda de pacotes ou ao protocolo de comunicação não garantir tempo de acesso a rede.

Portanto, no estudo da estabilidade de sistemas lineares amostrados com atuadores saturantes em magnitude e em taxa de variação, deve-se conhecer métodos existentes para considerar os efeitos da saturações, bem como a influência da amostragem aperiódica na dinâmica e estabilidade do sistema com dados amostrados. Assim, a seguir apresentam-se alguns trabalhos nestas duas linhas de pesquisa e resultados recentes na junção destas.

### 2.2 Sistemas Lineares Sujeitos à Atuadores Saturantes em Magnitude e em Taxa de Variação

A não-linearidade do tipo saturação é presente nos componentes do sistema de controle, sendo definida por

$$\text{sat}(u(t)) = \begin{cases} \bar{u}_{max}, & \text{se } u(t) \geq \bar{u}_{max}, \\ u(t), & \text{se } \bar{u}_{min} < u(t) < \bar{u}_{max}, \\ \bar{u}_{min}, & \text{se } u(t) \leq \bar{u}_{min}, \end{cases} \quad (1)$$

i.e., para  $\bar{u}_{min} \leq u(t) \leq \bar{u}_{max}$ , o sinal varia linearmente dentro dos limites da saturação ( $\bar{u}_{min}$  e  $\bar{u}_{max}$ ), correspondendo a região linear, porém ao ultrapassá-los, o sinal é mantido em um valor máximo/mínimo. A função saturação (1) representa as limitações existentes nos elementos do sistema, mais comum nos sensores e nos atuadores, que por questões físicas (construtivas) ou de segurança, não fornecem sinais de amplitude ilimitadas.

A saturação degrada o desempenho, é fonte de múltiplos pontos de equilíbrio, ciclo-limites e de instabilidade (KHALIL, 1996), (TARBOURIECH et al., 2011). A maioria das pesquisas nesta área trabalha somente com o problema de saturação da magnitude do sinal e modelos lineares, como em (HU; LIN, 2001), (TARBOURIECH et al., 2011), (ZACCARIAN; TEEL, 2011) e suas referências.

Neste caso, supondo uma planta linear e a saturação de magnitude do sinal de controle, a dinâmica do sistema pode ser descrita como

$$\dot{x}_p(t) = Ax_p(t) + Bsat(u(t)), \quad (2)$$

sendo,  $x_p(t)$  o vetor de estados,  $A$  e  $B$  matrizes que descrevem o sistema e  $u(t)$  a entrada de controle.

Há três abordagens principais para lidar com os efeitos da saturação do sinal de controle. A primeira é projetar o controlador considerando explicitamente os limites existentes do sinal de controle. A segunda abordagem consiste em utilizar compensadores *anti-windup*, para lidar com o efeito da saturação, introduzindo realimentações adicionais, de tal forma que, se minimize a degradação de desempenho e se aumente a estimativa da região de atração. Estas duas primeiras abordagens são exploradas em (TARBOURIECH et al., 2011). A terceira consiste no controle preditivo baseado em modelo ou *model predictive control* (MPC) ou *receding horizon optimal control* (RHOC). Neste caso, a partir de um modelo do processo, computa-se a saída do sistema em instantes futuros e a lei de controle com base em um problema de otimização a cada instante (CAMACHO; BORDONS, 1997). Isto requer relativo esforço computacional *on-line* e assume-se que a amostragem seja periódica.

Por outro lado, a saturação de taxa de variação do sinal de controle também é crítica, sendo necessário considerar sua influência em muitas aplicações, como nos atuadores eletromecânicos (e.g., válvulas proporcionais), pneumáticos e hidráulicos, podendo também ser fonte de ciclo-limites, múltiplos pontos de equilíbrio. Neste caso, existe um atraso de fase associado a esta saturação que possui efeito desestabilizante (BERG; HAMMET; BANDA, 1996). Este tipo de saturação recebeu atenção especial primeiramente na área da aeronáutica, que requer alta performance dos atuadores que, em contrapartida, apresentam limitações em dinâmica. Por exemplo, atuadores hidráulicos que apresentam saturação de taxa de variação podem causar *pilot-induced-oscillations* (PIO) ou *pilot-in-the-loop oscillation*, sendo fonte de desastres, como reportado em (MILLER; PACHTER, 1997) e em (RUNDQWIST; HILLGREN, 1996).

Basicamente, duas abordagens são utilizadas para tratar sistemas com atuadores saturantes em magnitude e em velocidade. A primeira considera o projeto de um controlador não-linear, i.e., contendo saturações no controlador em estados, entradas, saídas, a fim de gerar um sinal de controle respeitando as limitações de magnitude e de taxa de variação do atuador, como em (KAPILA; HADDAD, 1998), (KAPILA; PAN; DE QUEIROZ, 1999), (GOMES DA SILVA JR. et al., 2008). A segunda, utilizada neste trabalho, considera o modelo do atuador saturante no comportamento

do sistema e projeta a lei de controle estabilizante para o sistema aumentado com atuador e planta.

Neste caso, o atuador é modelado como um sistema de primeira ordem com saturação do sinal de entrada (saturação em magnitude) e do estado (saturação de taxa de variação) do atuador, chamado de *position-feedback-type model with speed limitation*, como apresentados nos trabalhos de (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2003), (BATEMAN; LIN, 2002b), (LIN, 1997), (NGUYEN; JABBARY, 1999).

Em (LIN, 1997) e (WADA; SAEKI, 2000), o atuador saturante é descrito pelo modelo de primeira ordem, neste caso, a saturação de magnitude esta na saída do atuador (entrada da planta). Assim, o sistema pode ser descrito como

$$\begin{aligned}\dot{x}_a(t) &= \text{sat}_r(-\lambda x_a(t) + \lambda u(t)), \\ \nu(t) &= \text{sat}_p(x_a(t)),\end{aligned}\quad (3)$$

com  $x_a$  sendo o vetor de estados do atuador,  $-\lambda$  representa o polo do atuador desconsiderando as saturações,  $\text{sat}_r$  representa a saturação de taxa de variação do atuador,  $\nu(t)$  é a saída do atuador e efetivo sinal de entrada da planta que apresenta limitação em magnitude ( $\text{sat}_p$ ), como ilustrado na Figura 1. Note que em (3) as saturações estão desencadeadas. A partir deste modelo, é proposto, em (WADA; SAEKI, 2000), um método para síntese de um compensador *anti-windup*.

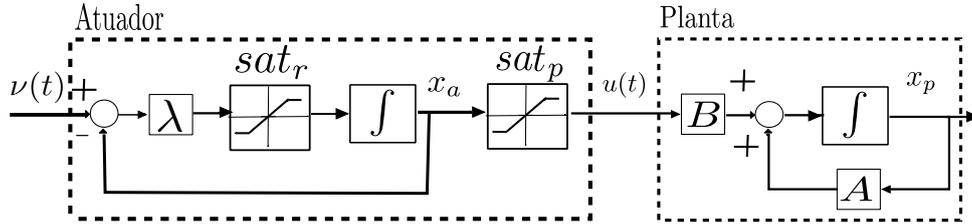


Figura 1: Sistema amostrado com atuadores sujeitos a saturação em magnitude e em taxa de variação.

No modelo de primeira ordem do atuador, se o módulo do polo  $\lambda \rightarrow \infty$ , então sua dinâmica se assemelha ao bloco *rate limiter* do Simulink (STOORVOGEL; SABERI, 1999).

Considerando uma outra abordagem para a dinâmica do atuador saturante, pode-se reescrever o sistema como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= Ax_p(t) + B\nu(t), \\ \dot{x}_a(t) &= \text{sat}_r(-\lambda x_a(t) + \lambda \text{sat}_p(u(t))), \\ \nu(t) &= x_a(t).\end{aligned}\quad (4)$$

Neste caso as saturações estão encadeadas. A saturação de magnitude representa uma limitação do sinal que o controlador é capaz de fornecer e/ou do sinal de entrada do atuador. A Figura 2 ilustra o sistema (4). O sistema com atuador saturante modelado como *position-feedback-type model with speed limitation* dado em (4), pode ser considerado como um caso particular de sistemas lineares com saturações encadeadas, como visto em (BATEMAN; LIN, 2002a), (BATEMAN; LIN, 2002b), (TARBOURIECH; PRIEUR; GOMES DA SILVA JR., 2006) e (ZHOU; ZHENG; DUAN, 2011). Neste caso, há duas saturações encadeadas.

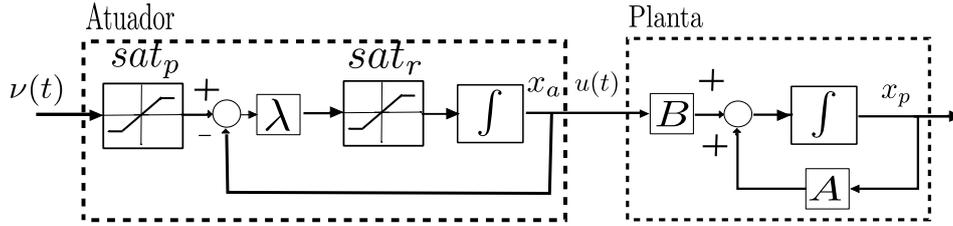


Figura 2: Sistema amostrado com atuadores sujeitos a saturação em magnitude e em taxa de variação (modelo com saturações encadeadas).

Considerando o atuador modelado como um sistema de primeira ordem descrito como (4), várias pesquisas para estudo da estabilidade global foram desenvolvidas (STOORVOGEL; SABERI, 1999), i.e., há uma lei de controle, tal que, para qualquer condição inicial a trajetória do sistema sempre convirja assintoticamente ao ponto de equilíbrio desejado, e um dos requisitos é o sistema não ser exponencialmente instável em malha aberta (SONTAG; SUSSMAN, 1990). Porém, na maioria das vezes esta região de condições iniciais admissíveis é limitada. Neste caso, (LIN, 1997) propõe o estudo em contexto semi-global. No caso em que o sistema é exponencialmente instável em malha aberta apenas é possível a estabilidade local ou regional do ponto de equilíbrio, como estudado em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2003).

Usando um modelo politópico para modelar as saturações, em (BATEMAN; LIN, 2002b) e (BATEMAN; LIN, 2002a), são propostas condições para caracterização da estabilidade ou estabilização assintótica local da origem do sistema com saturações encadeadas, em tempo contínuo e discreto, respectivamente. Neste caso, considera-se a lei de controle como uma realimentação de todos os estados do sistema ou somente dos estados da planta, i.e., não há acesso para medição dos estados do atuador. Em (TARBOURIECH; PRIEUR; GOMES DA SILVA JR., 2006), apresentam resultados para caracterização da estabilidade ou estabilização da origem do sistema com saturações encadeadas, em contexto local e global, os efeitos das saturações encadeadas são consideradas por meio das condições generalizadas de setor (Apêndice A.3).

## 2.3 Sistemas Amostrados

Nas últimas décadas, com a implementação de controladores digitais, voltou-se a atenção a sistemas em malha fechada com dados amostrados, chamados de *sampled-data systems* ou sistemas amostrados. Neste caso, a planta e o atuador evoluem continuamente no tempo, enquanto o sinal de controle é mantido constante entre dois instantes de amostragem consecutivos, i.e., o controlador é em tempo discreto, enquanto a planta e os atuadores são em tempo contínuo.

Quando a amostragem é periódica, i.e., os intervalos entre duas amostragens consecutivas não variam, há teorias de controle já consolidadas que utilizam o modelo discreto para sistemas lineares, como a análise do sistema discreto no plano-z.

Por outro lado, nem sempre pode-se assegurar que a amostragem seja em intervalos periódicos, e.g. em NCSs e em *event trigger control*. Esta variação do intervalo de amostragem afeta o desempenho e as propriedades de estabilidade do sistema. A amostragem aperiódica pode ser resultado de perdas de pacotes (comum em sistema

sem fio), canal de comunicação ocupado, tempo computacional nos componentes da rede, diminuição da transmissão de pacotes para reduzir gastos energéticos ou não garantia de tempo de acesso ao canal, característica comum em protocolos de comunicação sem fio, ATM (Asynchronous Transfer Mode), Ethernet.

Em (ZHANG; BRANICKY; PHILLIPS, 2001), explora-se a influência dos atrasos introduzidos pela transmissão e pelo processamento de dados entre os componentes do sistema, neste caso, o *delay* induzido pela rede pode ser menor ou maior que o intervalo de amostragem (ÅSTROM; WITTENMARK, 1997). Outro efeito encontrado em NCS é a amostragem aperiódica, resultado da perda de pacotes, comum nas redes sem fio, onde a transmissão dos dados nem sempre é garantida, ou nas redes de comunicação que não garantem tempo de acesso a rede. Em (ZHANG; BRANICKY; PHILLIPS, 2001), demonstram-se os efeitos da amostragem aperiódica em sistemas amostrados, apresentando a degradação do desempenho, quando comparado ao sistema em tempo contínuo ou amostrado periodicamente, e até mesmo a instabilização do sistema em malha fechada. O efeito instabilizante da perda de pacotes é mostrado em (BRANICKY; PHILLIPS; ZHANG, 2000), (HESPANHA; NAGHSHATABRIZZI; XU, 2007), (HALEVI; RAY, 1988). Em (BRANICKY; PHILLIPS; ZHANG, 2000), caracteriza-se se o NCS é estável com uma dada taxa de perda de pacotes, e também determina a maior taxa de perda de dados para o qual sistema continua estável.

Outra ocorrência de dados transmitidos em intervalos aperiódicos é em *event trigger control*, pois a amostragem é realizada apenas quando há uma violação de uma condição ou de uma *event condition*. Esta é normalmente relacionada aos estados ou saída da planta. Este tipo de controle é usualmente utilizado em sistemas embarcados e com energia limitada, e.g., sistemas multi-robóticos e rede de sensores. As principais vantagens deste tipo de controle estão ligadas ao menor consumo energético e menor transferência de dados na rede, reduzindo o custo computacional, além do tempo de ocupação do canal de comunicação. Isto resulta em intervalos aperiódicos entre envios de dados consecutivos que podem causar degradação do desempenho, influenciando na estabilidade.

Um dos métodos para estudo da estabilidade em *event trigger control* é a abordagem por sistema de dados amostrados aperiódicos, discutido em (HEEMELS; JOHANSSON; TABUADA, 2012), onde se garante a estabilidade para um intervalo máximo de amostragem e os dados são transmitidos quando ocorre uma violação da *event condition*. Já em (LEHMANN; KIENER; JOHANSSON, 2012), os autores consideram a saturação do sinal de controle em um sistema com *event-trigger control*, utilizando abordagem com dados amostrados. Determinam limites máximos e mínimos de intervalo de amostragem, para síntese de um controlador PI (proporcional-integral), e utilizam a condição de setor generalizada de (TARBOURIECH et al., 2011) para considerar o efeito da saturação no sistema.

Há duas abordagens principais para modelar os efeitos da amostragem aperiódica. O primeiro é baseado em modelos discretos com incertezas, como em (CLOOSTERMAN et al., 2009), (CLOOSTERMAN et al., 2010) e (OISHI; FUJIOKA, 2009). A segunda abordagem considera o sistema em tempo contínuo com entrada de controle com atraso variante no tempo. Neste caso, o sistema em malha fechada torna-se um *delay differential equation* (DDE) e pode-se caracterizar a estabilidade por meio dos teoremas de Lyapunov-Razumikin ou Lyapunov-Krasovskii, este amplamente utilizado em sistemas com atraso. Esta abordagem foi inicialmente proposta em

(FRIDMAN; SEURET; RICHARD, 2004) e adaptado em (NAGHSHATABRIZZI; HESPANHA; TEEL, 2008) e em (FRIDMAN, 2010). São propostos métodos baseados no funcional de Lyapunov-Krasovskii, que é uma aplicação do segundo método de Lyapunov para estudo da estabilidade de sistemas com atrasos, interpretando a evolução das soluções no espaço das funções, descrito no Apêndice, na Seção A.1.1.

Em (FRIDMAN; SEURET; RICHARD, 2004), a entrada de controle  $u(t)$  com dados amostrados aperiodicamente é considerada como um sinal atrasado, descrito como

$$u(t) = u(t_k) = u(t - \tau(t)), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad \tau(t) = t - t_k,$$

com  $t_k$  sendo o instante em que ocorre a  $k$ -ésima amostragem, e o atraso variante no tempo  $\tau(t)$  com a derivada  $\dot{\tau} = 1$ , para  $t \neq t_k$  e  $\tau = 0$  para  $t = t_k$ . O sinal de controle é mantido constante entre dois instantes de amostragem consecutivos, enquanto o atuador e a planta evoluem em tempo contínuo, assim, para estabilização por realimentação dos estados amostrados do sistema em malha fechada, utiliza-se a abordagem de Lyapunov-Krasovskii. Um termo do funcional de (FRIDMAN; SEURET; RICHARD, 2004), e comum na literatura de DDE e de NCS, é

$$V_2 = \int_{\tau_{MATI}}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds d\theta,$$

com  $\tau_{MATI}$  representando o máximo limite de tempo entre duas amostragens consecutivas.

Em (NAGHSHATABRIZZI; HESPANHA; TEEL, 2008), sendo  $\rho$  a diferença entre o instante atual e da última amostragem, adiciona-se termos ao funcional e o termo  $V_2$  é modificado por

$$\tilde{V}_2 = \int_{t-\rho}^t (\tau_{MATI} - t + s) \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds. \quad (5)$$

Assim como em (FRIDMAN; SEURET; RICHARD, 2004), o funcional definido em (NAGHSHATABRIZZI; HESPANHA; TEEL, 2008) limita superiormente a função de Lyapunov (análoga a função energia do sistema), e, se a derivada temporal deste funcional for definida negativa, conclui-se que o sistema é assintoticamente estável.

Uma alternativa ao uso convencional do funcional de Lyapunov-Krasovskii em sistemas amostrados foi proposto em (SEURET, 2011), chamado de *looped*-funcional, representado por  $W(\tau, \chi_k(\tau))$ , com  $\chi_k(\tau) = x(t_k + \tau)$ , para  $\tau \in [0, \tau_{MATI}]$ , sendo  $x$  o vetor de estados do sistema. Esta abordagem mostrou-se menos conservativa que o método convencional, pois, o funcional de Lyapunov-Krasovskii modificado não precisa limitar superiormente a função de Lyapunov  $V(\chi_k)$ , porém, deve ser igual a função de Lyapunov nos instantes de amostragem  $t_k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , como ilustrado na Figura 3, i.e., como o sistema é amostrado, será analisado a evolução da função  $V(\chi_k)$  somente nos instantes de amostragem aperiódicos. Assim, se a derivada temporal do funcional ao longo das trajetórias do modelo contínuo for estritamente negativo, então prova-se que a função de Lyapunov é estritamente decrescente nos instantes de amostragem aperiódicos e, portanto, permite caracterizar a estabilidade da origem do sistema em tempo contínuo sem utilizar métodos de discretização.

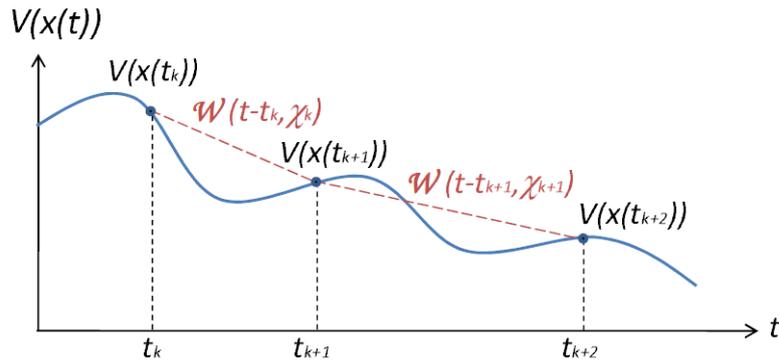


Figura 3: Ilustração da relação do *looped*-funcional  $W(t - t_k, \chi_k(\tau))$  e da função quadrática de Lyapunov  $V(\chi_k)$  para sistemas amostrados (SEURET, 2011)

## 2.4 Sistemas Amostrados com Saturações no Atuador

Em sistemas amostrados com intervalos constantes, i.e., amostragem periódica, já existem alguns resultados obtidos considerando o modelo da planta e do atuador com saturações encadeadas em tempo discreto, sendo uma aproximação discreta do sistema não-linear, como em (BATEMAN; LIN, 2002a). Contudo, a planta e o atuador geralmente apresentam dinâmica em tempo contínuo, e na presença das saturações, os resultados de (BATEMAN; LIN, 2002a) com o modelo discreto não podem ser aplicados.

Em (GOMES DA SILVA JR. et al., 2008), propõem-se métodos de estudo da estabilidade e da estabilização de sistemas discretos na presença de atuadores com saturação de magnitude e de dinâmica. Para isso, consideram a planta linear em tempo contínuo, enquanto o controlador é um componente digital e, portanto, em tempo discreto. Neste caso, as saturações de magnitude e de taxa de variação são consideradas no controlador e o sinal de controle fornecido para a planta respeita os limites existentes.

Por outro lado, na prática, nem sempre a entrega do pacote de dados ou periodicidade de transmissão de dados são assegurados. Isto resulta na amostragem em intervalos aperiódicos, tornando a análise de estabilidade e a estabilização processos mais complexos. A partir do método inicialmente proposto em (FRIDMAN; SEURET; RICHARD, 2004) para sistemas amostrados, em (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012), os autores utilizam o *looped*-funcional modificado de (SEURET, 2011), para um sistema linear com saturação de magnitude do sinal de controle, e consideram as variações no intervalo entre duas amostragens consecutivas. A saturação é tratada utilizando a condição de setor generalizada (apresentada no Apêndice A.3), que permite a formulação de condições em forma de LMI, sendo menos conservadora que a condição clássica. Esta formulação permite trabalhar com problemas de otimização da estimativa da região de atração dos sistema em malha fechada ou, dado um conjunto de condições iniciais, maximizar os limites de variação do intervalo de amostragem, para o qual a estabilidade é mantida.

Em (GOMES DA SILVA JR. et al., 2014), é proposto um método de análise de estabilidade global da origem de sistemas amostrados aperiodicamente com controlador dinâmico em tempo discreto sujeito a saturação de magnitude do sinal de controle. Para considerar os efeitos da amostragem aperiódica utiliza-se também a

ideia do *looped*-funcional modificado em (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012) para sistemas com saturação.

## 2.5 Considerações Finais

Os atuadores, presentes em qualquer sistema de controle, apresentam não linearidades do tipo saturação, que representam a limitação de quanta energia pode ser transmitida para o componente. Esta não-linearidade não pode ser desprezada nem linearizada, degradando o desempenho e sendo fonte de múltiplos pontos de equilíbrio, ciclo-limites e instabilidade (KHALIL, 1996). Este é escopo de estudo de diversos pesquisadores, como em (TARBOURIECH et al., 2011), (HU; LIN, 2001), (ZACCARIAN; TEEL, 2011) e referências lá citadas, que consideram a saturação em magnitude do sinal de controle e a planta linear, tornando o sistema em malha fechada não-linear.

Contudo, grande parte dos estudos são desenvolvidos para sistemas em tempo contínuo, como os acima citados. Na presença da saturação em sistemas amostrados, mesmo com amostragem periódica, as técnicas de controle clássicas em tempo discreto não podem ser aplicadas a sistemas não-lineares. Em (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012) e (GOMES DA SILVA JR. et al., 2014), os autores consideram o sistema amostrado aperiodicamente com saturação de magnitude do sinal de controle. Para considerar o sinal de controle em função de dados amostrados aperiodicamente, utilizam a abordagem proposta em (FRIDMAN; SEURET; RICHARD, 2004), que considera o dado amostrado como um sinal atrasado e aplicam técnicas de controle baseadas no funcional de Lyapunov-Krasovskii para caracterizar a estabilidade da origem do sistema, não necessitando realizar discretização do sistema.

Outra característica relevante presente nos sistemas é a limitação em taxa de variação que o atuador apresenta, já que não é capaz de responder instantaneamente a variação do sinal de controle. Há um atraso de fase associado a esta saturação que tem efeito desestabilizante (BERG; HAMMET; BANDA, 1996). Além de ser fonte de desastres na área da aeronáutica, como reportado em (RUNDQWIST; HILLGREN, 1996) e (MILLER; PACHTER, 1997). (GOMES DA SILVA JR. et al., 2008) apresentam métodos que consideram a planta linear e em tempo contínuo, com atuador saturante em magnitude e em taxa de variação. Neste último, a amostragem é considerada periódica.

Não se tem conhecimento de trabalhos publicados que considerem a amostragem aperiódica e o atuador saturante em magnitude e em taxa de variação. A partir desta lacuna e do fato destas limitações serem inerentes a atuadores, como também, das vantagens da implementação de sistemas em rede, este trabalho propõe condições para a análise de estabilidade e estabilização da origem do sistema considerado.

## 3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E PRELIMINARES

### 3.1 Introdução

Neste capítulo, apresenta-se a formulação básica do problema estudado. Este é composto por uma planta linear e em tempo contínuo, sujeita a atuadores saturantes em magnitude e em taxa de variação, com realimentação de estados amostrados aperiodicamente.

O atuador é modelado como um sistema de primeira ordem com saturação de magnitude do sinal de entrada (controle). Neste caso, a saturação de taxa de variação é modelada como uma limitação no estado do atuador, como em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2003). As saturações são reescritas como funções zona-morta e seus efeitos são considerados por meio de condições de setor generalizadas, apresentadas no Apêndice A.3.

O sinal de controle é uma realimentação dos estados do sistema amostrados aperiodicamente. Assim, são considerados limites para a variação do intervalo de tempo entre duas amostragens.

O principal problema estudado em sistemas de controle é caracterizar a estabilidade e/ou projetar ganhos de realimentação que garantam a estabilidade assintótica local ou global da origem. No presente caso, duas características principais devem ser consideradas: a amostragem aperiódica e as saturações presentes no atuador, que influenciam na dinâmica e podem instabilizar o sistema em malha fechada. Assim, é interessante determinar qual o limite máximo para variação do intervalo de tempo entre duas amostragens consecutivas para o qual a estabilidade assintótica local ou global da origem é assegurada, e no caso local, determinar uma estimativa da região de atração da origem do sistema em malha fechada.

Para isso, neste capítulo, são expostas condições obtidas para o estudo da estabilidade assintótica local e global da origem do sistema amostrado, a partir do *looped*-funcional de (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012), derivado do funcional de Lyapunov-Krasovskii, comumente utilizado em DDEs e em NCSs. Os resultados teóricos obtidos são base para o desenvolvimento deste trabalho.

### 3.2 Formulação do Problema

Nesta seção, apresenta-se uma formulação básica do sistema estudado. Trata-se de um sistema com dados amostrados, composto por uma planta linear sujeita a atuadores saturantes em magnitude e em taxa de variação com realimentação estática de estados.

Considera-se uma planta linear, em tempo contínuo, invariante no tempo e des-

crita no espaço de estados como:

$$\dot{x}_p(t) = Ax_p(t) + B\nu(t), \quad (6)$$

onde,  $x_p \in \mathbb{R}^{n_p}$  representa o vetor de estado da planta e  $\nu \in \mathbb{R}^m$  é a entrada,  $A$  e  $B$  são matrizes constantes e de dimensão apropriada.

Para modelar o  $i$ -ésimo atuador com limitações, utiliza-se um modelo de primeira ordem como exposto em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2003), com saturação de magnitude ( $sat_p$ ) como uma saturação na entrada do atuador e de taxa de variação ( $sat_r$ ) como sendo uma limitação na dinâmica (estado) do mesmo. Assim, para  $i = 1, \dots, m$ , o  $i$ -ésimo atuador é descrito por

$$\dot{x}_{a(i)}(t) = sat_{r(i)}(-\lambda_{(i)}x_{a(i)}(t) + \lambda_{(i)}sat_{p(i)}(u_{(i)}(t))), \quad (7)$$

onde  $-\lambda_{(i)}$  corresponde ao polo do  $i$ -ésimo atuador desconsiderando as saturações.  $u \in \mathbb{R}^m$  e  $x_a \in \mathbb{R}^m$  representam os vetores de entrada e de estado do atuador, respectivamente. Note que para  $\lambda \rightarrow \infty$ , a dinâmica do atuador se assemelha ao bloco *rate limiter* do Simulink.

As funções de saturação modelam as limitações que os atuadores demonstram na prática: não são capazes de responder instantaneamente a mudança de sinal e nem de fornecer uma saída correspondente a uma entrada de magnitude ilimitada. Estes elementos não-lineares são definidos como:

$$\begin{aligned} sat_{p(i)}(\omega_{1(i)}) &= sign(\omega_{1(i)})min\{|\omega_{1(i)}|, \bar{u}_{p(i)}\}, \\ sat_{r(i)}(\omega_{2(i)}) &= sign(\omega_{2(i)})min\{|\omega_{2(i)}|, \bar{u}_{r(i)}\}, \end{aligned} \quad (8)$$

onde  $\bar{u}_{p(i)}$  e  $\bar{u}_{r(i)}$  são os limites simétricos das saturações de magnitude e de taxa de variação do atuador, respectivamente, i.e., existem limites superiores e inferiores dentro dos quais o sinal pode variar, porém ao violá-los o sinal satura, ou seja, permanece com um valor máximo/mínimo. Assim, não é possível aplicar qualquer magnitude de sinal de controle nem exigir que o atuador responda de forma extremamente rápida. Note que estas saturações são inerentes a qualquer atuador real em razão das limitações físicas, tecnológicas ou de segurança.

Considere que a lei de controle é uma realimentação de estados com dados amostrados da planta e do atuador. Os estados são amostrados no instante  $t = t_k$  e o valor do sinal de controle  $u(t)$  é mantido constante até o próximo instante de amostragem  $t = t_{k+1}$ . Este comportamento é representado na Figura 4 por um amostrador e um segurador de ordem zero (ZOH), i.e.,

$$u(t) = u(t_k) = [K_p \quad K_a] \begin{bmatrix} x_p(t_k) \\ x_a(t_k) \end{bmatrix}, \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad (9)$$

onde  $t_k$  é o instante em que ocorre a  $k$ -ésima amostragem. Os instantes de amostragem formam uma sequência crescente de escalares positivos, com  $k \in \mathbb{N}$ , tal que,  $\bigcup [t_k, t_{k+1}[ = [0, +\infty[$ .  $K_p$  e  $K_a$  são os ganhos de realimentação dos estados da planta e do atuador, respectivamente. Considera-se que a diferença entre dois instantes de amostragem sucessivos, definido por  $T_k = t_{k+1} - t_k$ , está sujeito a variações, e.g., devido a perda de pacotes. São supostos os seguintes limites para  $T_k$

$$0 \leq \tau_1 \leq T_k \leq \tau_2 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

A partir da conexão entre (6) e (7), com  $\nu(t) = x_a(t)$ , o sistema em malha fechada pode ser descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= Ax_p(t) + Bx_a(t), \\ \dot{x}_a(t) &= \text{sat}_r(-\Lambda x_a(t) + \Lambda \text{sat}_p(K_p x_p(t_k) + K_a x_a(t_k))), \\ &\text{para } t_k \leq t < t_{k+1},\end{aligned}\quad (11)$$

onde  $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é uma matriz diagonal composta pelos polos do atuador, i.e.,  $\Lambda_{(i,i)} = \lambda_{(i)}$ . O sistema (11) é ilustrado na Figura 4

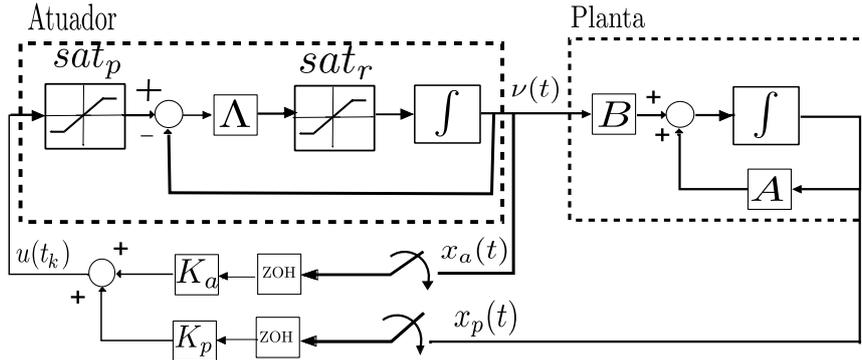


Figura 4: Sistema amostrado com atuadores sujeitos a saturação em magnitude e em taxa de variação com  $u(t) = K_p x_p(t_k) + K_a x_a(t_k)$ , para  $t_k \leq t < t_{k+1}$ .

O modelo descrito por (11) pode ser reescrito utilizando o modelo genérico de sistemas com saturações encadeadas de (TARBOURIECH; PRIEUR; GOMES DA SILVA JR., 2006) e de (BATEMAN; LIN, 2002b), resultando em

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_2 x(t) + B_2 \text{sat}_2(A_1 x(t) + B_1 \text{sat}_1(u(t))), \\ u(t) &= u(t_k) = Cx(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1},\end{aligned}\quad (12)$$

com os estados da planta e do atuador representados pelo vetor de estados aumentado  $x(t) = [x_p(t)^T \ x_a(t)^T]^T$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , com  $n = n_p + m$ ,  $\text{sat}_1(\cdot) = \text{sat}_p(\cdot)$ ,  $\text{sat}_2(\cdot) = \text{sat}_r(\cdot)$  e as matrizes

$$A_2 = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad A_1 = [0 \quad -\Lambda], \quad B_1 = \Lambda, \quad C = [K_p \quad K_a]. \quad (13)$$

Assume-se que o ponto de equilíbrio do sistema em malha fechada (12) seja a origem. O conjunto de todas as condições iniciais,  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ , tal que, as respectivas trajetórias convergem assintoticamente para a origem corresponde a região de atração ( $\mathcal{R}_a$ ) da origem, como descrito no Apêndice A.2, e na Definição 1 de (KHALIL, 1996). Dada a dificuldade de determinar de forma analítica  $\mathcal{R}_a$ , um problema de interesse é estabelecer uma estimativa  $\mathcal{D}$  desta região, tal que,  $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}_a \subseteq \mathbb{R}^n$ , considerando-se as limitações do atuador e o fato de que o intervalo entre duas amostragem consecutivas possa ser variável.

Há duas características principais no sistema ilustrado na Figura 4 que necessitam de atenção no estudo da estabilidade assintótica da origem: as saturações do atuador e a amostragem aperiódica. Como descrito e exemplificado em (ZHANG; BRANICKY; PHILLIPS, 2001), é conhecido que quanto maior for a perda de pacotes na transmissão de dados de sistemas em NCSs, i.e., maior variação do intervalo

de tempo entre duas amostragens sucessivas, maior será a diferença de dinâmica entre o sistema amostrado aperiodicamente e aquele em tempo contínuo ou discreto. Isto causa efeitos que inclusive podem instabilizar o sistema para certas variações do intervalo de amostragem. Por outro lado, a presença de atuadores saturantes é fonte de múltiplos pontos de equilíbrio, de ciclo-limites e de instabilidade, como apresentado em (MILLER; PACHTER, 1997), que cita a saturação de taxa de variação do atuador como a fonte de desastres na área da aeronáutica.

Portanto, existe uma relação entre a estabilidade e os valores dos limites do intervalo de amostragem e as saturações do atuador. Pode-se avaliar esta relação através do tamanho de um conjunto de condições iniciais admissíveis  $\mathcal{D}$ , que pode ser visto como uma estimativa de  $\mathcal{R}_a$  da origem do sistema (12). Ou também através de  $\tau_2$ , i.e, dado um conjunto de condições iniciais, determinar qual o máximo limite superior de  $T_k$ , tal que, a estabilidade da origem do sistema amostrado seja assegurada. Assim, os seguintes problemas de interesse podem ser formulados.

- P1. Dados os ganhos de realimentação de estados,  $K_p$ ,  $K_a$ , e os limites  $\tau_1$  e  $\tau_2$  do intervalo entre duas amostragem consecutivas, i.e.,  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ , determinar uma estimativa  $\mathcal{D}$  da região de atração da origem.
- P2. Dados os ganhos de realimentação de estados,  $K_p$ ,  $K_a$ , e um conjunto de condições iniciais admissíveis ( $\mathcal{D}$ ), maximizar o limite superior da variação do intervalo de amostragem,  $\tau_2$ , tal que, as respectivas trajetórias do sistema convirjam assintoticamente para a origem  $\forall x(0) \in \mathcal{D}$ .
- P3. Dados os limites  $\tau_1$  e  $\tau_2$  do intervalo entre duas amostragem consecutivas, i.e.,  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ , projetar os ganhos de realimentação de estados,  $K_p$ ,  $K_a$ , de forma a maximizar a estimativa da região de atração da origem.
- P4. Dado um conjunto de condições iniciais admissíveis ( $\mathcal{D}$ ), projetar os ganhos de realimentação de estados,  $K_p$ ,  $K_a$ , de forma a maximizar o limite superior da variação do intervalo de amostragem,  $\tau_2$ , tal que, as respectivas trajetórias do sistema convirjam assintoticamente para a origem  $\forall x(0) \in \mathcal{D}$ .

Como apresentado em (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012), P1 pode ser visto como um problema de análise de estabilidade com restrições de um sistema em rede, e P2 como um problema de caracterização de estabilidade de sistemas em rede. Neste caso, na análise do sistema em rede, é considerado o maior limite superior admissível do intervalo de amostragem para o qual a estabilidade seja assegurada como uma restrição de rede. Os problemas P1 e P3 são complementares, como também, P2 e P4, sendo P1 e P2 problemas de análise de estabilidade e P3 e P4 de estabilização.

Estes problemas também são considerados para o caso do sistema amostrado com realimentação apenas dos estados da planta, como ilustrado na Figura 5. Neste caso, é suficiente considerar  $C = [K_p \ 0]$  no sistema amostrado em malha fechada modelado por (12), i.e.,  $K_a = 0$ , sendo que nesta abordagem, não há acesso aos estados do atuador e a lei de controle é definida como

$$u(t) = u(t_k) = K_p x_p(t_k) \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (14)$$

Para o sistema (12), o ideal seria que para todas as condições iniciais existentes, as respectivas trajetórias do sistema convergissem para a origem ao longo do tempo,

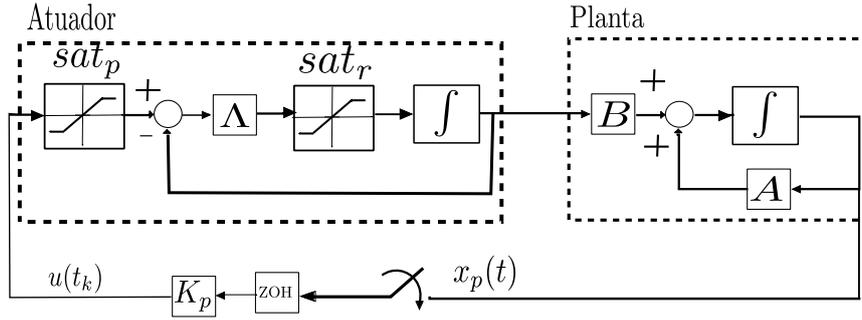


Figura 5: Sistema linear amostrado sujeito a atuadores saturantes em magnitude e em taxa de variação com  $u(t) = K_p x_p(t_k)$ , para  $t_k \leq t < t_{k+1}$ .

porém, em sistemas em malha fechada com atuadores saturantes, a realimentação linear em muitos casos não é suficiente para estabilizar globalmente a origem. Além disto, um dos requisitos necessários é o sistema não ser exponencialmente instável em malha aberta (SONTAG; SUSSMAN, 1990). Por isso, em muitos casos estuda-se a estabilidade assintótica local ou regional da origem. Quando possível serão também discutidos os problemas referente ao sistema (12) em contexto global, neste caso, a região de atração é todo o espaço de estados.

### 3.3 Modelo do Sistema Amostrado em Malha Fechada

Para qualquer intervalo de amostragem  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ , define-se  $\chi_k(\tau)$  conforme em (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012):

$$\chi_k(\tau) = x(t_k + \tau), \tau \in [0, T_k].$$

A partir do modelo (12), a dinâmica em malha fechada durante o intervalo de amostragem, para  $\tau \in [0, T_k]$ , pode assim ser representado por

$$\dot{\chi}_k(\tau) = A_2 \chi_k(\tau) + B_2 \text{sat}_2(A_1 \chi_k(\tau) + B_1 \text{sat}_1(C \chi_k(0))). \quad (15)$$

Por outro lado, os seguintes vetores de funções de zona-morta podem ser definidos a partir das saturações de magnitude e de taxa de variação como

$$\begin{aligned} \psi_1(\chi_k) &= \psi_{k_1} = \text{sat}_1(C \chi_k(0)) - C \chi_k(0), \\ \psi_2(\chi_k, \psi_{k_1}) &= \psi_{k_2} = \text{sat}_2(A_1 \chi_k(\tau) + B_1 \text{sat}_1(C \chi_k(0))) \\ &\quad - (A_1 \chi_k(\tau) + B_1(\psi_{k_1} + C \chi_k(0))). \end{aligned} \quad (16)$$

Então, a partir de (15) e de (16),  $\forall \tau \in [0, T_k]$  e  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ , o sistema em malha fechada (12) pode ser reescrito como:

$$\dot{\chi}_k(\tau) = (A_2 + B_2 A_1) \chi_k(\tau) + B_2 B_1 C \chi_k(0) + B_2 B_1 \psi_{k_1} + B_2 \psi_{k_2}. \quad (17)$$

### 3.4 Resultados de Base

Nesta seção, são expostos resultados preliminares utilizados como base para o desenvolvimento deste trabalho. Para caracterizar a estabilidade da origem do sistema (12), são fornecidas condições que relacionam uma função candidata de Lyapunov

$V(\chi_k)$  analisado nos instantes de amostragem e um funcional  $W(\tau, \chi_k)$  em tempo contínuo. Pela satisfação destas condições, pode-se verificar que  $V(\chi_k)$  é estritamente decrescente nos instantes de amostragem, se a derivada temporal do funcional ao longo das trajetórias do sistema amostrado for definida negativa. Assegura-se assim a estabilidade assintótica local da origem do sistema (12). Para considerar os efeitos das saturações utiliza-se a condição de setor generalizada descrita no Lema 2 (Apêndice A.3). No caso do sistema em malha aberta não ser exponencialmente instável, estas condições também são estabelecidas em contexto global.

### 3.4.1 Tratamento da Saturação

Neste trabalho, a saturação é reescrita por meio da função zona-morta como definido em (16). Com relação a esta não linearidade, para lidar com os efeitos da saturação, utiliza-se como base o Lema 2 (Apêndice A.3) que apresenta a condição de setor generalizada. Utiliza-se a condição de setor generalizada de (TARBOURIECH et al., 2011) por ser menos conservadora em relação a abordagem clássica, como discutido em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH, 2005). Para tanto, sejam as matrizes  $G_1, G_{21}$  e  $G_{22} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $G_{23} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , e os conjuntos

$$\mathcal{S}(\bar{u}_1) = \{\chi_k(0) \in \mathbb{R}^n; |(C - G_1)_{(i)}\chi_k(0)| \leq \bar{u}_{1(i)}, \text{ para } i = 1, \dots, m\}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\bar{u}_2) = & \{(\chi_k(0), \chi_k(\tau), \psi_{k_1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; |(A_1 - G_{21})_{(i)}\chi_k(\tau) \\ & + (B_1 C - G_{22})_{(i)}\chi_k(0) + (B_1 - G_{23})_{(i)}\psi_{k_1}| \leq \bar{u}_{2(i)}, \\ & \text{para } i = 1, \dots, m\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Aplicando o Lema 2 nas funções de zona-morta  $\psi_{k_1}$  e  $\psi_{k_2}$  de (16), se  $\chi_k(0) \in \mathcal{S}(\bar{u}_1)$ , e  $(\chi_k(0), \chi_k(\tau), \psi_{k_1}) \in \mathcal{S}(\bar{u}_2)$ , então as seguintes inequações são satisfeitas para quaisquer matrizes diagonais e definidas positivas  $U_1$  e  $U_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ :

$$\psi_{k_1}^T U_1 (\psi_{k_1} + G_1 \chi_k(0)) \leq 0, \quad (20)$$

$$\psi_{k_2}^T U_2 (\psi_{k_2} + G_{21} \chi_k(\tau) + G_{22} \chi_k(0) + G_{23} \psi_{k_1}) \leq 0. \quad (21)$$

No caso do estudo da estabilidade global, as condições de setor generalizadas são substituídas pela condição de setor clássica, verificada globalmente pela não-linearidade zona-morta, considerando as matrizes  $G_1 = C$ ,  $G_{21} = A_1$  e  $G_{22} = B_1 C$  e  $G_{23} = B_1$ . Assim, as seguintes inequações são satisfeitas para quaisquer matrizes diagonais e definidas positivas  $U_1$  e  $U_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\forall \chi_k(0), \chi_k(\tau) \in \mathbb{R}^n$ :

$$\psi_{k_1}^T U_1 (\psi_{k_1} + C \chi_k(0)) \leq 0, \quad (22)$$

$$\psi_{k_2}^T U_2 (\psi_{k_2} + A_1 \chi_k(\tau) + B_1 C \chi_k(0) + B_1 \psi_{k_1}) \leq 0. \quad (23)$$

### 3.4.2 Estabilidade do Sistema Amostrado

Os resultados teóricos desta subseção são baseados em (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012). Este artigo apresenta condições que relacionam uma função de Lyapunov  $V(\chi_k)$  e um *looped*-funcional em tempo contínuo  $W(\tau, \chi_k)$  para um sistema linear com saturação do sinal de controle amostrado (realimentação estática dos estados). Visto que a presença da saturação impede que se obtenha um modelo do sistema em tempo discreto equivalente, o *looped*-funcional permite considerar o sistema em tempo contínuo e, assim, pode-se analisar a estabilidade de sistemas

amostrados com atuadores saturantes, enquanto a entrada é mantida constante entre os intervalos de amostragem.

Porém, diferentemente de (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012), neste trabalho, o sistema apresenta tanto saturação de posição como de dinâmica nos atuadores e a função de saturação de taxa de variação depende não só do estado amostrado como também da evolução do estado do atuador em tempo contínuo. Assim, considera-se o funcional  $W(\tau, \chi_k)$  superior à função  $V(\chi_k)$  entre os instantes de amostragem e igual nos instantes de amostragem, e garante-se que  $\chi_k(\tau)$  permaneça na região em que a condição de setor (21) é válida. A partir destas ideias, enuncia-se então o seguinte teorema.

**Teorema 1.** *Sejam uma função  $V(\chi_k) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que,*

$$V(\chi_k) > 0, \forall \chi_k \neq 0, \quad (24)$$

*e um funcional em tempo contínuo  $V_0 : [0, \tau_2] \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ , que satisfaz para todo  $\chi_k \in \mathbb{K}$*

$$\begin{aligned} V_0(T_k, \chi_k) &= V_0(0, \chi_k) = 0, \\ V_0(\tau, \chi_k) &> 0, \quad \forall \tau \in (0, T_k) \quad \text{e} \quad \forall T_k \in [\tau_1, \tau_2]. \end{aligned} \quad (25)$$

*Seja  $W(\tau, \chi_k) = V(\chi_k) + V_0(\tau, \chi_k)$ , com  $\dot{W}(\tau, \chi_k)$  sendo a derivada temporal de  $W(\tau, \chi_k)$  em relação a  $\tau$ , com  $\tau \in [0, T_k]$ , ao longo das trajetórias do sistema (12).*

*Se existirem matrizes  $G_1, G_{21}, G_{22} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $G_{23} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , matrizes diagonais e definidas positivas  $U_1$  e  $U_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , tais que as seguintes inequações são satisfeitas:*

$$\chi_k(0)^T (C_{(i)} - G_{1(i)})^T (C_{(i)} - G_{1(i)}) \chi_k(0) \leq \bar{u}_{1(i)}^2 V(\chi_k(0)), \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} \chi_k(\tau) \\ \chi_k(0) \\ \psi_{k_1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Theta_{1(i)}^T \\ \Theta_{2(i)}^T \\ \Theta_{3(i)}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_{1(i)} & \Theta_{2(i)} & \Theta_{3(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_k(\tau) \\ \chi_k(0) \\ \psi_{k_1} \end{bmatrix} \leq \bar{u}_{2(i)}^2 V(\chi_k(\tau)), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \dot{W}(\tau, \chi_k) - 2\psi_{k_2}^T U_2 [\psi_{k_2} + G_{21}\chi_k(\tau) + G_{22}\chi_k(0) + G_{23}\psi_{k_1}] \\ - 2\psi_{k_1}^T U_1 [\psi_{k_1} + G_1\chi_k(0)] < 0, \end{aligned} \quad (28)$$

*com  $\Theta_1 = A_1 - G_{21}$ ,  $\Theta_2 = B_1 C - G_{22}$  e  $\Theta_3 = B_1 - G_{23}$ , então para qualquer condição inicial  $x(0) = \chi_0(0)$  pertencente ao conjunto*

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq 1\}, \quad (29)$$

*resulta que:*

$$a) \Delta V(\chi_k) = V(\chi_{k+1}) - V(\chi_k) < 0,$$

*b) as respectivas trajetórias do sistema (12) com intervalo de amostragem satisfazendo (10) convergem assintoticamente para a origem.*

*Demonstração.* Supondo que  $\chi_0(0) \in \mathcal{D}$ , então a partir de (26) e de (27), para  $i = 1, \dots, m$ , resulta que,

$$\chi_0(0)^T (C_{(i)} - G_{1(i)})^T (C_{(i)} - G_{1(i)}) \chi_0(0) \leq \bar{u}_{1(i)}^2$$

$$\begin{bmatrix} \chi_0(0) \\ \chi_0(0) \\ \psi_{0_1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Theta_{1(i)}^T \\ \Theta_{2(i)}^T \\ \Theta_{3(i)}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_{1(i)} & \Theta_{2(i)} & \Theta_{3(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_0(0) \\ \chi_0(0) \\ \psi_{0_1} \end{bmatrix} \leq \bar{u}_{2(i)}^2.$$

Isso significa que  $\chi_0(0) \in \mathcal{S}(\bar{u}_1)$  e  $(\chi_0(0), \chi_0(0), \psi_{0_1}) \in \mathcal{S}(\bar{u}_2)$ . Conseqüentemente, conclui-se, a partir de (20), de (21) e de (28), que

$$\dot{W}(0, \chi_0(0)) < 0. \quad (30)$$

Como  $V_0(\tau, \chi_k) \geq 0$ , para  $\tau \in [0, T_k]$ , conclui-se que  $V(\chi_k) \leq W(\tau, \chi_k(\tau))$ ,  $\forall \tau \in [0, T_k]$ . Assim, considerando  $\rho \rightarrow 0$ , (30) implica que

$$\begin{aligned} W(\rho, \chi_0(\rho)) &< W(0, \chi_0(0)) \\ V(\chi_0(\rho)) &\leq W(\rho, \chi_0(\rho)) < W(0, \chi_0(0)) = V(\chi_0(0)) + V_0(0, \chi_0(0)). \end{aligned} \quad (31)$$

A partir de (25), tem-se  $V_0(0, \chi_0(0)) = 0$ . Conclui-se então de (31) que

$$V(\chi_0(\rho)) < V(\chi_0(0)),$$

i.e.,  $\chi_0(\rho) \in \mathcal{D}$ . Repetindo o raciocínio, pode-se concluir que

$$V(\chi_0(\tau)) < V(\chi_0(0)), \forall \tau \in [0, T_k],$$

i.e.,  $(\chi_0(0), \chi_0(\tau), \psi_{0_1}) \in \mathcal{S}(\bar{u}_2)$ ,  $\forall \tau \in [0, T_k]$ , e conclui-se que

$$\dot{W}(\tau, \chi_0(\tau)) < 0, \forall \tau \in [0, T_k].$$

Assim, integrando  $\dot{W}(\tau, \chi_0(\tau)) = \frac{d}{d\tau}(V(\chi_0(\tau)) + V_0(\tau, \chi_0(\tau))) < 0$  no intervalo  $[0, T_k]$ , como  $V_0(T_k, \chi_0(T_k)) = V_0(0, \chi_0(0)) = 0$ , tem-se que

$$V(\chi_0(T_k)) - V(\chi_0(0)) < 0.$$

Uma vez que  $\chi_{k+1}(0) = \chi_k(T_k)$ , este procedimento pode ser repetido e conclui-se que  $V(\chi_k)$  é decrescente nos instantes de amostragem, ou seja, prova-se que  $\Delta V(\chi_k) < 0$  por meio do funcional  $W(\tau, \chi_k)$  que satisfaz (28) e assim, para as condições iniciais pertencentes à  $\mathcal{D}$ , as respectivas trajetórias do sistema (12) tendem assintoticamente para a origem. □

**Observação 1.** *Diferentemente de (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012), no Teorema 1, o funcional  $V_0(\tau, \chi_k)$  é positivo definido. Isto resulta que o funcional em tempo contínuo  $W(\tau, \chi_k)$  limita superiormente a função  $V(\chi_k)$ . Esta restrição adicional é devido à saturação de taxa de variação do atuador depender tanto dos estados amostrados como do estado do atuador em tempo contínuo.*

*Note que para que a condição (21) possa ser efetivamente utilizada, deve-se ter  $(\chi_k(0), \chi_k(\tau), \psi_{k_1}) \in \mathcal{S}(\bar{u}_2)$  e deve-se garantir que as respectivas trajetórias não deixem o conjunto  $\mathcal{S}(\bar{u}_2)$ . As inequações (28) e  $V(\chi_k(\tau)) \leq W(\tau, \chi_k(\tau))$  asseguram que as trajetórias para as condições iniciais  $x(0) = \chi_0(0)$  nunca deixem o conjunto  $\mathcal{D}$  o que assegura a partir de (26) e de (27), a validade de ambas condições de setor (20) e (21).*

**Observação 2.** Note que não é necessário que a derivada temporal da função  $V(\chi_k)$  seja definida negativa ao longo das trajetórias, apenas que seja estritamente decrescente nos instantes de amostragem, i.e.,  $\Delta V(\chi_k) = V(\chi_{k+1}) - V(\chi_k) < 0$ . A não necessidade da condição  $\dot{V}(\chi_k) < 0$  é importante em sistema amostrados, já que  $\dot{V}(\chi_k)$  pode assumir valores positivos entre os instantes de amostragem.

Caso o sistema em malha aberta (17) seja assintoticamente estável, pode-se verificar se a origem é globalmente estável. Para isso o seguinte Corolário fornece condições para analisar a estabilidade assintótica global da origem do sistema (12).

**Corolário 1.** *Sejam uma função  $V(\chi_k) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que,*

$$V(\chi_k) > 0, \forall \chi_k \neq 0 \quad e \quad \lim_{\chi_k \rightarrow \infty} V(\chi_k) = \infty, \quad (32)$$

*e um funcional em tempo contínuo  $V_0 : [0, \tau_2] \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ , que satisfaz para todo  $\chi_k \in \mathbb{K}$*

$$V_0(T_k, \chi_k) = V_0(0, \chi_k) = 0, \quad V_0(\tau, \chi_k) > 0, \quad \forall \tau \in [0, T_k] \quad e \quad \forall T_k \in [\tau_1, \tau_2]. \quad (33)$$

*Seja  $W(\tau, \chi_k) = V(\chi_k) + V_0(\tau, \chi_k)$ , com  $\dot{W}(\tau, \chi_k)$  sendo a derivada temporal de  $W(\tau, \chi_k)$  em relação a  $\tau$ , com  $\tau \in [0, T_k]$ , ao longo das trajetórias do sistema (12).*

*Se existirem matrizes diagonais e definidas positivas  $U_1$  e  $U_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , tais que a seguinte inequação seja satisfeita*

$$\begin{aligned} \dot{W}(\tau, \chi_k) - 2\psi_{k_2}^T U_2 [\psi_{k_2} + A_1 \chi_k(\tau) + B_1 C \chi_k(0) + B_1 \psi_{k_1}] \\ - 2\psi_{k_1}^T U_1 [\psi_{k_1} + C \chi_k(0)] < 0. \end{aligned} \quad (34)$$

*Então,  $\Delta V(\chi_k) < 0$ , e a origem do sistema (12) é globalmente assintoticamente estável.*

*Demonstração.* A prova é similar ao do Teorema 1, porém, neste caso, considera-se as relações  $\psi_{k_1}^T U_1 (\psi_{k_1} + C \chi_k(0)) \leq 0$  e  $\psi_{k_2}^T U_2 (\psi_{k_2} + A_1 \chi_k(\tau) + B_1 (\psi_{k_1} + C \chi_k(0))) \leq 0$ , ao invés de (20) e (21). Isso significa que as condições de setor são globalmente satisfeitas, i.e.,  $\forall x(0) = \chi_0(0) \in \mathbb{R}^n$  e  $\forall \chi_k(\tau) \in \mathbb{R}^n$ . Assim, se (34) é satisfeita, conclui-se que  $\dot{W}(\tau, \chi_k) < 0$  e portanto,  $\Delta V(\chi_k) < 0$ , i.e., assegura-se que a função  $V(\chi_k)$  é decrescente nos instantes de amostragem,  $\forall \chi_k(0) \in \mathbb{R}^n$ . Como, de (32),  $V(\chi_k)$  é radialmente ilimitada a estabilidade global assintótica da origem do sistema (12) segue.  $\square$

### 3.5 Considerações Finais

Neste capítulo, foi apresentado o sistema amostrado sujeito a atuadores saturantes em magnitude e em taxa de variação a ser considerado neste trabalho, bem como foram formulados os problemas de análise de estabilidade e estabilização a serem tratados. Sendo a lei de controle uma realimentação dos estados amostrados do sistema, consideram-se duas situações: uma com acesso a todos os estados e, na outra, com os estados do atuador não acessíveis a medição.

Na formulação dos problemas, são considerados como objetivos a maximização de uma estimativa da região de atração da origem ou, dado um conjunto de condições iniciais  $\mathcal{D}$ , maximizar  $\tau_2$  para o qual a estabilidade assintótica da origem do sistema amostrado seja assegurada.

O Teorema 1 e o Corolário 1 formulados são a base para o desenvolvimento deste trabalho, apresentando condições que relacionam uma função de Lyapunov  $V(\chi_k)$  e um funcional  $W(\tau, \chi_k)$  em tempo contínuo, permitindo analisar se a origem do sistema é assintoticamente estável localmente ou globalmente. O uso do looped-funcional permite considerar os efeitos da variação do intervalo de amostragem, sendo  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ . Os efeitos das saturações são considerados por meio do uso das condições de setor generalizadas.

## 4 ANÁLISE DE ESTABILIDADE

### 4.1 Introdução

A partir do sistema modelado e dos resultados teóricos do Teorema 1 e do Corolário 1, expostos no Capítulo 3, são apresentados os resultados obtidos em relação a caracterização da estabilidade assintótica local e global da origem de sistemas amostrados aperiodicamente com atuadores saturantes.

Para obtenção das condições de análise de estabilidade, utiliza-se uma classe de funcional de Lyapunov, introduzida em (NAGHSHATABRIZZI; HESPANHA; TEEL, 2008) para sistemas amostrados e modificado em (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012) para sistemas amostrados com saturação da entrada de controle. Em (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012), este *looped*-funcional é utilizado para lidar com os efeitos introduzidos pela amostragem aperiódica, sendo não necessário o funcional ser positivo definido, apenas que seja igual a função quadrática de Lyapunov nos instantes de amostragem. Este funcional permitir caracterizar a estabilidade da origem do sistema em tempo contínuo com entrada amostrada, sem necessidade de discretizar o sistema. Por outro lado, no sistema amostrado formulado no Capítulo 3, modela-se o atuador como um sistema de primeira ordem com saturação de magnitude e de taxa de variação. Esta última dependente não só dos dados amostrados como também da evolução em tempo contínuo dos estados. Assim, necessita-se adaptar o *looped*-funcional de (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012) para este caso.

Os efeitos das saturações presentes no atuador são considerados por meio do Lema 2 (Apêndice A.3), isto é, das condições de setor generalizadas (20) e (21), apresentadas no Capítulo 3, que permitem a obtenção de condições menos conservadoras quando comparado a condição clássica de setor, como discutido em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH, 2005).

### 4.2 Estabilidade Regional (Local)

Conforme o modelo definido na Seção 3.3, seja o sistema em malha fechada, para  $\tau \in [0, T_k]$ , descrito por

$$\dot{\chi}_k(\tau) = (A_2 + B_2 A_1)\chi_k(\tau) + B_2 B_1 C \chi_k(0) + B_2 B_1 \psi_{k_1} + B_2 \psi_{k_2}, \quad (35)$$

com  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$  e a entrada de controle

$$u(t) = u(t_k) = C \chi_k(0) = [K_p \quad K_a] \begin{bmatrix} x_p(t_k) \\ x_a(t_k) \end{bmatrix}, \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (36)$$

Seja  $V(\chi_k)$  uma função candidata de Lyapunov quadrática e  $V_0(0, \chi_k)$  um funcional que satisfazem

- a)  $V(\chi_k) = \chi_k(\tau)^T P \chi_k(\tau)$ , com  $P = P^T > 0$ ;
- b)  $V_0(0, \chi_k) = V_0(T_k, \chi_k) = 0$  e
- c)  $V_0(\tau, \chi_k) > 0, \forall \tau \in (0, T_k)$ .

Considere um candidato a funcional em tempo contínuo  $V_0(\tau, \chi_k)$  definido para todo  $\tau \in [0, T_k]$ , baseado em (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012), como

$$V_0(\tau, \chi_k) = (T_k - \tau) \{[\chi_k(\tau) - \chi_k(0)]^T S_1 [\chi_k(\tau) - \chi_k(0)] + \tau \begin{bmatrix} \chi_k(0) \\ \psi_{k_1} \end{bmatrix}^T X_1 \begin{bmatrix} \chi_k(0) \\ \psi_{k_1} \end{bmatrix} + \int_0^\tau \dot{\chi}_k^T(\theta) R \dot{\chi}_k(\theta) d\theta\}, \quad (37)$$

com matrizes simétricas e definidas positivas  $X_1 \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n)}$ ,  $S_1$  e  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Observe que  $V_0(\tau, \chi_k)$  satisfaz as condições do Teorema 1, i.e.,  $V_0(\tau, \chi_k) > 0$ , para  $\tau \in (0, T_k)$ , e  $V_0(0, \chi_k) = V_0(T_k, \chi_k) = 0$  nos instantes de amostragem, pois, se  $\tau = 0$ , tem-se  $[\chi_k(\tau) - \chi_k(0)] = 0$ , e o termo integral é igual a zero, e para  $\tau = T_k$ ,  $(T_k - \tau) = 0$ .

A partir dos resultados teóricos do Teorema 1, da função quadrática de Lyapunov  $V(\chi_k)$  e do funcional  $W(\tau, \chi_k) = V(\chi_k) + V_0(\tau, \chi_k)$ , o seguinte Teorema é estabelecido para análise de estabilidade local da origem do sistema (35), considerando os limites simétricos das saturações de magnitude ( $\bar{u}_1$ ) e de taxa de variação ( $\bar{u}_2$ ) do atuador e a amostragem aperiódica com  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ .

**Teorema 2.** *Seja o sistema (35) com os ganhos de realimentação  $C = [K_p \ K_a]$ , com  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ ,  $0 < \tau_1 \leq \tau_2$ . Se existem matrizes simétricas e definidas positivas  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{S}_1$  e  $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\tilde{X}_1 \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n)}$ , matrizes diagonais e definidas positivas  $\tilde{U}_1$  e  $\tilde{U}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , matrizes  $\tilde{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\tilde{G}_1$  e  $\tilde{G}_{21} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\tilde{N} \in \mathbb{R}^{(3n+2m) \times n}$  e um escalar positivo  $\varepsilon$ , satisfazendo as seguintes inequações matriciais, para  $j = 1, 2$  e  $i = 1, \dots, m$ :*

$$\tilde{\Pi}_1 + \tau_j \tilde{\Pi}_2 + \tau_j \tilde{\Pi}_3 < 0, \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1 - \tau_j \tilde{\Pi}_3 & \tau_j \tilde{N} \\ \star & -\tau_j \tilde{R} \end{bmatrix} < 0, \quad (39)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & (C\tilde{Y} - \tilde{G}_1)^T_{(i)} \\ \star & \bar{u}_{1(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & (A_1\tilde{Y} - \tilde{G}_{21})^T_{(i)} \\ \star & \bar{u}_{2(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (41)$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_1 &= He\{M_1^T \tilde{P} M_3 - M_4^T \tilde{G}_1 M_2 - M_5^T \tilde{G}_{21} M_1 - M_5^T B_1 C \tilde{Y} M_2 \\ &\quad - M_5^T B_1 \tilde{U}_1 M_4 - \tilde{N} M_{12} + (\varepsilon M_1^T + M_3^T)((A_2 + B_2 A_1) \tilde{Y} M_1 \\ &\quad + B_2 B_1 C \tilde{Y} M_2 - \tilde{Y} M_3 + B_2 B_1 \tilde{U}_1 M_4 + B_2 \tilde{U}_2 M_5)\} \\ &\quad - 2M_4^T \tilde{U}_1 M_4 - 2M_5^T \tilde{U}_2 M_5 - M_{12}^T \tilde{S}_1 M_{12}, \\ \tilde{\Pi}_2 &= He\{M_3^T \tilde{S}_1 M_{12}\} + M_3^T \tilde{R} M_3, \\ \tilde{\Pi}_3 &= M_{24}^T \tilde{X}_1 M_{24}, \end{aligned} \quad (42)$$

e as matrizes auxiliares de dimensões apropriadas

$$\begin{aligned} M_1 &= [I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], & M_2 &= [0 \ I \ 0 \ 0 \ 0], \\ M_3 &= [0 \ 0 \ I \ 0 \ 0], & M_4 &= [0 \ 0 \ 0 \ I \ 0], \\ M_5 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ I], & M_{12} &= M_1 - M_2, \\ M_{24} &= [M_2^T \ M_4^T]^T. \end{aligned} \quad (43)$$

Então, tem-se que para qualquer condição inicial  $x(0) = \chi_0(0)$  pertencente ao conjunto

$$\mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n, x^T P x \leq 1\}, \quad (44)$$

onde  $P = \tilde{Y}^{-T} \tilde{P} \tilde{Y}^{-1}$ , as respectivas trajetórias do sistema (35) convergem assintoticamente para a origem.

*Demonstração.* A partir da função quadrática de Lyapunov  $V(\chi_k)$  e do funcional  $V_0(\tau, \chi_k)$  em (37), define-se um funcional  $W(\tau, \chi_k) = V(\chi_k(\tau)) + V_0(\tau, \chi_k)$  como segue:

$$\begin{aligned} W(\tau, \chi_k) &= \chi_k^T(\tau) P \chi_k(\tau) + (T_k - \tau) \{[\chi_k(\tau) - \chi_k(0)]^T S_1 [\chi_k(\tau) - \chi_k(0)] \\ &\quad + \tau \begin{bmatrix} \chi_k(0) \\ \psi_{k_1} \end{bmatrix}^T X_1 \begin{bmatrix} \chi_k(0) \\ \psi_{k_1} \end{bmatrix} + \int_0^\tau \dot{\chi}_k^T(\theta) R \dot{\chi}_k(\theta) d\theta\}. \end{aligned} \quad (45)$$

Observe que a função  $V(\chi_k)$  e o funcional  $V_0(\tau, \chi_k)$  satisfazem as hipóteses do Teorema 1.

Dado que  $X_1, S_1, R > 0$ ,  $V_0(\tau, \chi_k) > 0$  para qualquer  $\tau \in [0, T_k]$ , então,  $W(\tau, \chi_k) \geq V(\chi_k)$ . Como visto anteriormente, esta restrição é devido à saturação de taxa de variação do atuador depender tanto dos estados amostrados como dos mesmos em tempo contínuo. Pode-se assim, a partir do Teorema 1, provar que  $V(\chi_k(T_k)) - V(\chi_k(0)) < 0$ , se (30) for satisfeita e o estado ficar confinado em uma região na qual as condições de setor são válidas.

Assim, a partir do funcional  $W(\tau, \chi_k) \geq V(\chi_k)$  e das condições de setor generalizadas (20) e (21), define-se o funcional  $\Gamma(\tau, \chi_k)$  formado pelos elementos da inequação (28) do Teorema 1, como segue:

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau, \chi_k) &= \dot{W}(\tau, \chi_k) - 2\psi_{k_1}^T U_1 [\psi_{k_1} + G_1 \chi_k(0)] \\ &\quad - 2\psi_{k_2}^T U_2 [\psi_{k_2} + G_{21} \chi_k(\tau) + G_{22} \chi_k(0) + G_{23} \psi_{k_1}], \end{aligned} \quad (46)$$

com  $G_{22} = B_1 C$  e  $G_{23} = B_1$ . Calculando  $\dot{W}(\tau, \chi_k)$  ao longo das trajetórias do sistema obtém-se

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau, \chi_k) &= 2\dot{\chi}_k^T(\tau) P \dot{\chi}_k(\tau) - 2\psi_{k_1}^T U_1 [\psi_{k_1} + G_1 \chi_k(0)] \\ &\quad - 2\psi_{k_2}^T U_2 [\psi_{k_2} + G_{21} \chi_k(\tau) + B_1 C \chi_k(0) + B_1 \psi_{k_1}] \\ &\quad + (T_k - \tau) \{ \dot{\chi}_k(\tau)^T [R \dot{\chi}_k(\tau) + 2S_1 (\chi_k(\tau) - \chi_k(0))] \\ &\quad - [\chi_k(\tau) - \chi_k(0)]^T S_1 [\chi_k(\tau) - \chi_k(0)] \} \\ &\quad + (T_k - 2\tau) \begin{bmatrix} \chi_k(0) \\ \psi_{k_1} \end{bmatrix}^T X_1 \begin{bmatrix} \chi_k(0) \\ \psi_{k_1} \end{bmatrix} - \int_0^\tau \dot{\chi}_k^T(\theta) R \dot{\chi}_k(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (47)$$

Note que os valores das derivadas temporais de  $\chi_k(0)$  e  $\psi_{k_1}$  são zero entre os instantes de amostragem, pois permanecem com valores constantes (dados amostrados).

Agora prova-se que se as inequações (38) e (39) forem satisfeitas implica que  $\Gamma(\tau, \chi_k) < 0$ . Para tanto, seja o seguinte vetor:

$$\xi_k(\tau) = \xi_k = [\chi_k(\tau)^T \quad \chi_k(0)^T \quad \dot{\chi}_k(\tau)^T \quad \psi_{k_1}^T \quad \psi_{k_2}^T]^T. \quad (48)$$

Considerando matrizes definidas positivas  $N \in \mathbb{R}^{(3n+2m) \times n}$  e  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e o termo integral presente em (47), tem-se a seguinte inequação (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012)

$$\int_0^\tau \dot{\chi}_k^T(\theta) R \dot{\chi}_k(\theta) d\theta - 2\xi_k^T(\tau) N [\chi_k(\tau) - \chi_k(0)] + \tau \xi_k^T(\tau) N R^{-1} N^T \xi_k(\tau) \geq 0. \quad (49)$$

Por outro lado, a partir do sistema (35), segue que

$$\begin{aligned} & 2(\chi_k^T(\tau) Y_1^T + \dot{\chi}_k^T(\tau) Y_2^T) \{-\dot{\chi}_k(\tau) + (A_2 + A_1 B_2) \chi_k(\tau) \\ & + B_2 B_1 C \chi_k(0) + B_2 B_1 \psi_{k_1} + B_2 \psi_{k_2}\} = 0, \end{aligned} \quad (50)$$

para quaisquer matrizes  $Y_1$  e  $Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Esta equação pode ser interpretada como o uso da abordagem de sistema descritor introduzida em (FRIDMAN; SHAKED, 2002) e por ser um termo nulo, será adicionado a inequação (47) sem alterá-la. Utilizando  $\xi_k$  e as matrizes auxiliares (43), reescreve-se (50) como

$$\xi_k^T \{2(M_1^T Y_1^T + M_3^T Y_2^T) M_0\} \xi_k = 0, \quad (51)$$

com  $M_0 = [A_2 + B_2 A_1 \quad B_2 B_1 C \quad -I \quad B_2 B_1 \quad B_2]$ .

Utilizando (49), (51) e as matrizes auxiliares definidas em (43), segue que

$$\Gamma(\tau, \chi_k) \leq \xi_k^T [\Pi_1 + (T_k - \tau) \Pi_2 + (T_k - 2\tau) \Pi_3] \xi_k + \tau \xi_k^T N R^{-1} N^T \xi_k, \quad (52)$$

com

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= He\{M_1^T P M_3 - M_4^T U_1 M_4 - M_4^T U_1 G_1 M_2 - M_5^T U_2 M_5 \\ &\quad - M_5^T U_2 G_{21} M_1 - M_5^T U_2 B_1 C M_2 - M_5^T U_2 B_1 M_4 \\ &\quad + (M_1^T Y_1^T + M_3^T Y_2^T) M_0 - N M_{12}\} - M_{12}^T S_1 M_{12}, \\ \Pi_2 &= M_3^T R M_3 + He\{M_3^T S_1 M_{12}\}, \\ \Pi_3 &= M_{24}^T X_1 M_{24}. \end{aligned} \quad (53)$$

Considere a contribuição correspondente aos termos  $\dot{\chi}_k^T(\tau)(\cdot)\dot{\chi}_k(\tau)$  no lado direito de (52), dada por

$$\begin{aligned} & M_3 [\Pi_1 + (T_k - \tau) \Pi_2 + (T_k - 2\tau) \Pi_3 + \tau N R^{-1} N^T] M_3^T \\ & = -Y_2 - Y_2^T + (T_k - \tau) R + \tau N_3 R^{-1} N_3^T, \end{aligned} \quad (54)$$

onde  $N_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma componente de  $N$ . Para um contribuição negativa de termo  $\dot{\chi}_k^T(\tau)(\cdot)\dot{\chi}_k(\tau)$ ,  $Y_2$  deve ser uma matriz não-singular. Então, pode-se definir as matrizes  $\tilde{Y} = Y_2^{-1}$ ,  $\tilde{U}_1 = U_1^{-1}$ ,  $\tilde{U}_2 = U_2^{-1}$  e  $\Xi = \text{diag}\{\tilde{Y}, \tilde{Y}, \tilde{Y}, \tilde{U}_1, \tilde{U}_2\}$  e a relação  $Y_1 = \varepsilon Y_2$ , para um escalar positivo  $\varepsilon$ . Assim, considerando  $\tilde{\xi}_k = \Xi^{-1} \xi_k$ , a inequação (52) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau, \chi_k) &\leq \tilde{\xi}_k^T [\Xi^T \Pi_1 \Xi + (T_k - \tau) \Xi^T \Pi_2 \Xi \\ &\quad + (T_k - 2\tau) \Xi^T \Pi_3 \Xi + \tau \Xi^T N R^{-1} N^T \Xi] \tilde{\xi}_k. \end{aligned} \quad (55)$$

Com as matrizes auxiliares definidas em (43), tem-se

$$\begin{aligned} M_1\Xi &= \tilde{Y}M_1 & M_2\Xi &= \tilde{Y}M_2 & M_{12}\Xi &= \tilde{Y}M_{12} & M_{24}\Xi &= \begin{bmatrix} \tilde{Y} & 0 \\ 0 & \tilde{U}_1 \end{bmatrix} M_{24} \\ M_3\Xi &= \tilde{Y}M_3 & M_4\Xi &= \tilde{U}_1M_4 & M_5\Xi &= \tilde{U}_2M_5 \\ M_0\Xi &= (A_2 + B_2A_1)\tilde{Y}M_1 + B_2B_1C\tilde{Y}M_2 - \tilde{Y}M_3 \\ &+ B_2B_1\tilde{U}_1M_4 + B_2\tilde{U}_2M_5. \end{aligned}$$

Considerando agora as seguintes mudanças de variáveis

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \tilde{Y}^T P \tilde{Y}, & \tilde{S}_1 &= \tilde{Y}^T S_1 \tilde{Y}, & \tilde{R} &= \tilde{Y}^T R \tilde{Y}, \\ \tilde{G}_{21} &= G_{21} \tilde{Y}, & \tilde{N} &= \Xi^T N \tilde{Y}, & \tilde{G}_1 &= G_1 \tilde{Y}, \\ \tilde{X}_1 &= \begin{bmatrix} \tilde{Y} & 0 \\ 0 & \tilde{U}_1 \end{bmatrix}^T X_1 \begin{bmatrix} \tilde{Y} & 0 \\ 0 & \tilde{U}_1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e aplicando em (55), segue que:

$$\Gamma(\tau, \chi_k) \leq \tilde{\xi}_k^T [\tilde{\Pi}_1 + (T_k - \tau)\tilde{\Pi}_2 + (T_k - 2\tau)\tilde{\Pi}_3 + \tau\tilde{N}\tilde{R}^{-1}\tilde{N}^T] \tilde{\xi}_k.$$

Portanto, se

$$\tilde{\Pi}_1 + (T_k - \tau)\tilde{\Pi}_2 + (T_k - 2\tau)\tilde{\Pi}_3 + \tau\tilde{N}\tilde{R}^{-1}\tilde{N}^T \leq 0, \quad (56)$$

com  $\tilde{\Pi}_1$ ,  $\tilde{\Pi}_2$  e  $\tilde{\Pi}_3$  definido como em (42),  $\forall \tau \in [0, T_k]$ , conclui-se que  $\Gamma(\tau, \chi_k) < 0$  e, portanto,  $\dot{W}(\tau, \chi_k) < 0$  e, de acordo com Teorema 1,  $V(\chi_k)$  é decrescente nos instantes de amostragem, contanto que as condições de setor sejam válidas.

Por convexidade, (56) é satisfeito  $\forall \tau \in [0, T_k]$ , com  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ , se as seguintes inequações forem satisfeitas

$$\tilde{\Pi}_1 + \tau_j \tilde{\Pi}_2 + \tau_j \tilde{\Pi}_3 < 0, \quad (57)$$

$$\tilde{\Pi}_1 - \tau_j \tilde{\Pi}_3 + \tau_j \tilde{N}\tilde{R}^{-1}\tilde{N}^T < 0, \quad (58)$$

para  $j = 1, 2$ . Note que (38) é diretamente (57) e, aplicando o complemento de Schur, (39) é equivalente a (58). Portanto, conclui-se que (38) e (39) certifica que  $\Gamma(\tau, \chi_k) < 0$ ,

Do Teorema 1, para provar que as trajetórias correspondentes as condições iniciais  $x(0) \in \mathcal{E}(P)$  convergem assintoticamente para a origem, é necessário garantir que as relações (26) e (27) são satisfeitas. Pré e pós multiplicando (40) e (41) por  $\text{diag}\{\tilde{Y}^{-1}, I\}$ , segue que

$$\chi_k(0)^T \left\{ P - \frac{1}{\bar{u}_{1(i)}^2} (C_{(i)} - G_{1(i)})^T (C_{(i)} - G_{1(i)}) \right\} \chi_k(0) \geq 0, \quad (59)$$

i.e.  $\chi_k(0)^T (C_{(i)} - G_{1(i)})^T (C_{(i)} - G_{1(i)}) \chi_k(0) \leq V(\chi_k(0)) \bar{u}_{1(i)}^2$ , e

$$\chi_k(\tau)^T \left\{ P - \frac{1}{\bar{u}_{2(i)}^2} (A_{1(i)} - G_{21(i)})^T (A_{1(i)} - G_{21(i)}) \right\} \chi_k(\tau) \geq 0, \quad (60)$$

i.e.  $\chi_k(\tau)^T (A_{1(i)} - G_{21(i)})^T (A_{1(i)} - G_{21(i)}) \chi_k(\tau) \leq V(\chi_k(\tau)) \bar{u}_{2(i)}^2$ , onde, em particular, considerou-se  $G_{22} = B_1 C$  e  $G_{23} = B_1$  na inequação (21). As inequações (40) e (41) garantem então que as condições de setor sejam localmente satisfeitas, i.e.,  $\chi_k(0) \in S(\bar{u}_1)$  e  $(\chi_k(0), \chi_k(\tau), \psi_{k1}) \in S(\bar{u}_2)$ .  $\square$

Note que o Teorema 2 é baseado nas condições estabelecidas no Teorema 1. Assim, neste teorema, bem como no Teorema 1, o funcional  $V_0(\tau, \chi_k)$  é positivo definido. Esta restrição é devida à saturação de taxa de variação no atuador depender tanto dos estados amostrados, como do estado do atuador em tempo contínuo. Assim, deve-se assegurar que nos instantes de amostragem  $(\chi_k(0), \psi_{k_1}) \in \mathcal{S}(\bar{u}_2)$  e  $\chi_k(0) \in \mathcal{S}(\bar{u}_1)$ , como também que em tempo contínuo  $(\chi_k(0), \chi_k(\tau), \psi_{k_1}) \in \mathcal{S}(\bar{u}_2)$ . Como, para  $t_k < t < t_{k+1}$ , tem-se  $W(\tau, \chi_k) > V(\chi_k)$ , e para  $t = t_k, t_{k+1}, \dots$ ,  $W(\tau, \chi_k) = V(\chi_k)$  e a partir das inequações (40) e (41), garante-se que, mesmo entre os instantes de amostragem, as trajetórias do sistema pertençam à região  $\mathcal{S}(\bar{u}_2)$  e  $\chi_k(0) \in \mathcal{S}(\bar{u}_1)$  e as condições de setor são válidas.

Pela satisfação das inequações (38) e (39) no Teorema 2, a derivada temporal do funcional  $W(\tau, \chi_k)$  ao longo das trajetórias do sistema (17) é definida negativa. Como  $W(\tau, \chi_k) \geq V(\chi_k)$ , conclui-se que a função quadrática de Lyapunov  $V(\chi_k)$  é estritamente decrescente nos instantes de amostragem e, segue-se que a origem do sistema é localmente assintoticamente estável. Estas inequações também asseguram que as trajetórias do sistema para as condições iniciais  $x(0) \in \mathcal{E}(P)$  nunca deixem o conjunto  $\mathcal{E}(P)$  e convirjam assintoticamente para a origem.

Assim como no Teorema 1, não é necessário que a derivada temporal da função  $V(\chi_k)$  seja definida negativa ao longo das trajetórias, apenas que seja decrescente nos instantes de amostragem e que  $\chi_k(0) \in \mathcal{S}(\bar{u}_1)$  e  $(\chi_k(0), \chi_k(\tau)\psi_{k_1}) \in \mathcal{S}(\bar{u}_2)$ ,  $\forall \tau \in [0, T_k]$ , assegurado pelas inequações (40) e (41), respectivamente.

**Observação 3.** *No caso do sistema (35) ser amostrado periodicamente, as condições desenvolvidas também são válidas, assim, considera-se  $T_k = \tau_1 = \tau_2$ .*

### 4.3 Estabilidade Global

Caso o sistema em malha aberta (35) não seja exponencialmente instável, pode-se verificar se a origem é globalmente estável, i.e.,  $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n$  as respectivas trajetórias do sistema (35) tendem assintoticamente para a origem. A partir dos resultados obtidos no Corolário 1, o seguinte Corolário fornece condições suficientes para a garantia da estabilidade assintótica global da origem do sistema (35).

**Corolário 2.** *Seja o sistema (35) com  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ ,  $0 < \tau_1 \leq \tau_2$ . Se existirem matrizes simétricas e definidas positivas  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{S}_1$  e  $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\tilde{X}_1 \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n)}$ , matrizes diagonais e definidas positivas  $\tilde{U}_1$  e  $\tilde{U}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , matrizes  $\tilde{N} \in \mathbb{R}^{(3n+2m) \times n}$  e  $\tilde{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e um escalar positivo  $\varepsilon$ , tal que, as desigualdades matriciais (38), (39) são satisfeitas, com  $\tilde{G}_1 = C\tilde{Y}$  e  $\tilde{G}_{21} = A_1\tilde{Y}$ , então, a origem do sistema (35) é globalmente assintoticamente estável.*

*Demonstração.* A prova deste Corolário é similar a do Teorema 2. Sendo suficiente considerar as matrizes  $G_1 = C$ ,  $G_{21} = A_1$ ,  $G_{22} = B_1C$  e  $G_{23} = B_1$ , i.e., neste caso, as relações  $\psi_{k_1}^T U_1(\psi_{k_1} + C\chi_k(0)) \leq 0$  e  $\psi_{k_2}^T U_2(\psi_{k_2} + A_1\chi_k(\tau) + B_1(\psi_{k_1} + C\chi_k(0))) \leq 0$  da condição de setor generalizada são verificadas globalmente, i.e.  $\forall \chi_k(0)$  e  $\chi_k(\tau) \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

Assim, se as condições do Corolário 2 forem satisfeitas,  $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n$ , verifica-se que a função  $V(\chi_k)$  é decrescente nos instantes de amostragem, através da derivada temporal do funcional  $W(\tau, \chi_k)$  ao longo das trajetórias do sistema (17) for definida negativa, para todo  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ . Estas condições asseguram que as trajetórias do

sistema amostrado (17) para todas condições iniciais  $x(0) = \chi_0(0) \in \mathbb{R}^n$  convirjam assintoticamente para a origem.

**Observação 4.** *No caso específico de estarem disponíveis para medição apenas os estados da planta, como ilustrado na Figura 5, i.e. a lei de controle é definida como*

$$u(t) = u(t_k) = K_p x_p(t_k) \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad (61)$$

é suficiente considerar  $C = [K_p \ 0]$ , tanto no Teorema 2 como no Corolário 2.

## 4.4 Problemas de Otimização

Baseado nas condições dadas no Teorema 2 e no Corolário 2, são propostos problemas de otimização baseados em LMIs para resolver os Problemas P1 e P2 estabelecidos na Seção 3.2. Para tanto, considera-se o seguinte Lema.

**Lema 1.** (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012) *Sejam  $P$  e  $P_0$  matrizes definidas positivas e  $\tilde{P} = M^T P M$ , com  $M$  sendo uma matriz não-singular e uma matriz  $P_0$ . Então se*

$$\begin{bmatrix} P_0 & I \\ I & M + M^T - \tilde{P} \end{bmatrix} > 0, \quad (62)$$

segue que  $P < P_0$ .

### 4.4.1 Maximização da Estimativa da Região de Atração

Note que o conjunto  $\mathcal{E}(P)$  obtido pela satisfação das condições do Teorema 2 é por definição incluso em  $\mathcal{R}_a$  e pode ser usado como uma estimativa da região de atração da origem. A partir do Problema P1, dado  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$  e considerando algum critério de tamanho, o objetivo é maximizar o conjunto  $\mathcal{E}(P)$ . Com este objetivo, pode-se, por exemplo, maximizar o menor eixo de  $\mathcal{E}(P)$  a partir do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \min \delta \\ & \text{sujeito à} \\ & (38), (39), (40), (41), \\ & \begin{bmatrix} \delta I & I \\ I & \tilde{Y} + \tilde{Y}^T - \tilde{P} \end{bmatrix} > 0. \end{aligned} \quad (63)$$

A partir do Lema 1 é visto que se  $P = \tilde{Y}^{-T} \tilde{P} \tilde{Y}^{-1}$ , a última inequação de (63) implica que  $P < \delta I$ . Então, o máximo autovalor de  $P$  é menor que  $\delta$ . Por isso, a minimização de  $\delta$  garante que o menor eixo de  $\mathcal{E}(P)$  seja maximizado. Observe que, as restrições de (63) são LMIs para um valor fixado de  $\varepsilon$ . Então, a solução ótima de (63) pode ser obtida resolvendo problemas LMIs para um *grid* em  $\varepsilon$ .

### 4.4.2 Maximização do Intervalo de Amostragem

A partir do Problema P2, considere uma região de condições iniciais admissíveis para o sistema (35) descrito como segue

$$\mathcal{E}(P_0) = \{x \in \mathbb{R}^n, x^T P_0 x \leq 1\}. \quad (64)$$

Então, para  $\tau_1$  dado, o objetivo é encontrar o máximo valor de  $\tau_2$  para o qual a estabilidade é garantida para todo  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ . Isto pode ser obtido através do

seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \max \tau_2 \\ & \text{sujeito à} \\ & (38), (39), (40), (41), \\ & \begin{bmatrix} P_0 & I \\ I & \tilde{Y} + \tilde{Y}^T - \tilde{P} \end{bmatrix} > 0. \end{aligned} \tag{65}$$

Note que, do Lema 1, a última inequação de (65) implica que  $P < P_0$  e  $\mathcal{E}(P_0) \subseteq \mathcal{E}(P)$ . Assim, considerando  $\tau_1$  dado, e um valor fixo de  $\varepsilon$ , o problema de otimização (65) pode ser resolvido de forma iterativa como um problema LMI para valores crescentes de  $\tau_2$  e testando a factibilidade destas LMIs.

Por outro lado, se o sistema em malha aberta for assintoticamente estável, pode-se tentar encontrar o máximo limite  $\tau_2$  do intervalo de amostragem para o qual a estabilidade assintótica global da origem do sistema (35) seja assegurada. O seguinte problema de otimização pode ser utilizado neste caso:

$$\begin{aligned} & \max \tau_2 \\ & \text{sujeito à} \\ & (38), (39) \end{aligned} \tag{66}$$

com  $\tilde{G}_1 = C\tilde{Y}$  e  $\tilde{G}_{21} = A_1\tilde{Y}$ .

## 4.5 Exemplos Numéricos

Nesta seção são apresentados exemplos para validar as condições estabelecidas para análise de estabilidade e para ilustrar algumas propriedades de sistemas amostrados com atuadores saturantes.

### 4.5.1 Exemplo 1: Maximização da $\mathcal{E}(P)$ para Planta Instável com $C = [K_p \ K_a]$

Seja o exemplo considerado em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2003), onde o sistema modelado por (11) é descrito pelas matrizes

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = 20, \\ C &= [-6.318 \quad -1.966 \quad 0.502], \end{aligned}$$

note que a planta é instável e o atuador apresenta limites de saturação de posição e de dinâmica com  $\bar{u}_1 = 1$  e em  $\bar{u}_2 = 10$ , respectivamente. Para o intervalo de amostragem aperiódico definido por  $T_k \in [0.01, 0.07]$ , com o objetivo de determinar um conjunto de condições iniciais admissíveis, utiliza-se o problema de otimização (63), com  $\varepsilon = 3.6$  obtido como valor ótimo em um *grid*, e obtém-se uma estimativa da região de atração  $\mathcal{E}(P)$  definida pela matriz

$$P = \begin{bmatrix} 558.74 & 173.91 & 29.40 \\ 173.91 & 54.13 & 9.15 \\ 29.40 & 9.15 & 2.23 \end{bmatrix}.$$

Considerando  $T_k$  variando randomicamente no tempo e  $T_k \in [0.01, 0.07]$ , a Figura 6 apresenta a projeção dos estados para algumas trajetórias com  $x_a(0) = 0$  no plano

definido pelos estados da planta e um corte do conjunto  $\mathcal{E}(P)$  neste plano. Mostra-se que as trajetórias (em azul) correspondentes às condições iniciais na fronteira do corte de  $\mathcal{E}(P)$  (em preto) convergem assintoticamente para a origem como esperado. Embora as projeções das trajetórias deixem o corte de  $\mathcal{E}(P)$ , pode ser checado que as mesmas não saem de  $\mathcal{E}(P)$ , como ilustrado na Figura 7. Por outro lado, para algumas condições iniciais não pertencentes, porém próximas da fronteira de  $\mathcal{E}(P)$ , as trajetórias correspondentes são divergentes (em vermelho), demonstrando que os resultados obtidos não são tão conservadores.

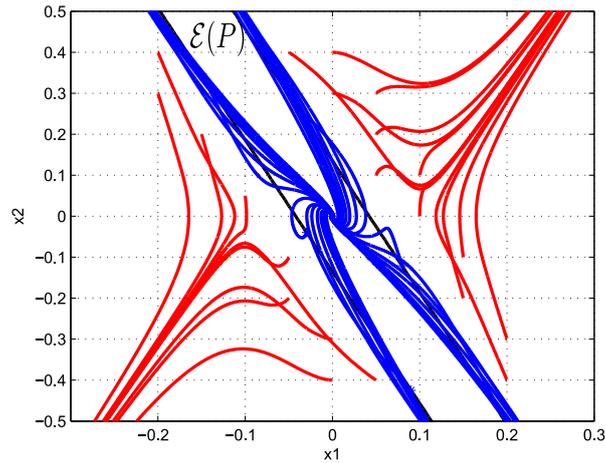


Figura 6: Trajetórias dos estados no plano definido pelos estados da planta para  $x_a(0) = 0$  e para condições iniciais pertencentes (em azul) e não (em vermelho) ao elipsoide  $\mathcal{E}(P)$  e um corte de  $\mathcal{E}(P)$  neste plano (em preto).

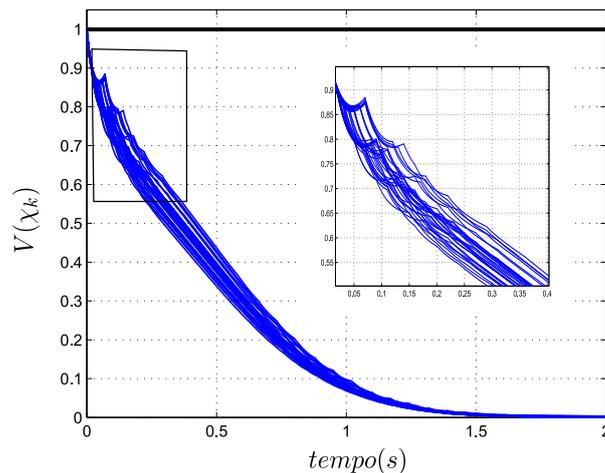


Figura 7: Valores de  $\chi_k^T P \chi_k$  para condições iniciais na fronteira do corte do elipsoide  $\mathcal{E}(P)$ .

Para a condição inicial  $x(0) = [0.01 \ -0.24 \ 1.2]^T$  (pertencente a  $\mathcal{E}(P)$ ) com intervalos de amostragem aperiódicos satisfazendo  $T_k \in [0.01, 0.07]$ , os resultados da simulação do sistema são apresentados nas Figuras 8 e 9. Na Figura 8, mostra-se os sinais de  $sat_p(u)$  e de  $\dot{x}_a$  (saída de saturação de taxa de variação). Note que a entrada

amostrada faz  $\dot{x}_a$  variar bruscamente nos instantes de amostragem. Na Figura 9, apresentam-se os sinais dos estados da planta ( $x_p$ ), do atuador ( $x_a$ ) e de  $sat_p(u)$ . Observe que, mesmo sujeito a limitações, a saída do atuador (em tempo contínuo) acompanha o sinal de controle (entrada do atuador) que satura nos instantes iniciais ( $sat_p(u)$ ) e o efetivo sinal de entrada da planta (em azul) é similar ao de controle (em vermelho). Isto demonstra que  $\mathcal{E}(P)$  não é restrito à região linear, permitindo saturação de magnitude ou de taxa de variação do sinal.

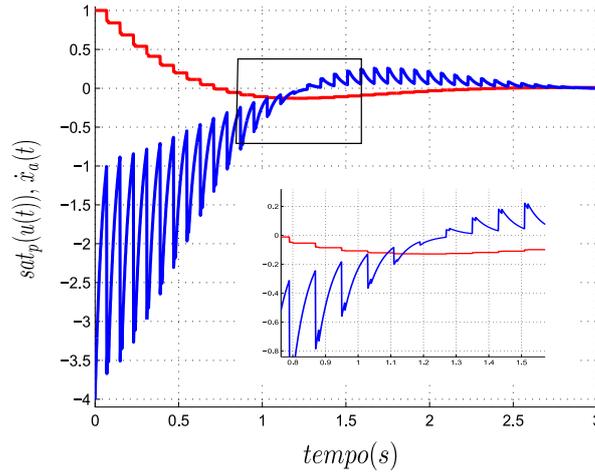


Figura 8: Sinais de  $sat_p(u)$  (em vermelho) e de  $\dot{x}_a$  (em azul), para  $x(0) = [0.01 \quad -0.24 \quad 1.2]^T$ .

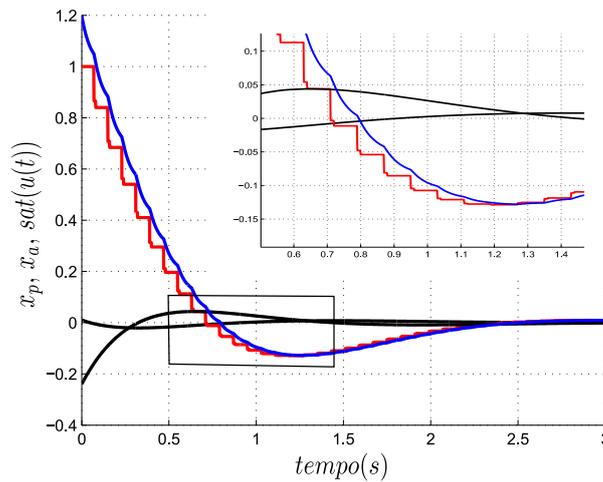


Figura 9: Estados da planta (em preto), estado do atuador (em azul) e  $sat_p(u)$  (em vermelho), para  $x(0) = [0.01 \quad -0.24 \quad 1.2]^T$ .

Para as condições iniciais  $x(0) = [0.01 \quad -0.24 \quad 1.2]^T$ , a Figura 10 apresenta a função  $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$  no tempo (em azul) para  $T_k = [0.01, 0.07]$ . Note que  $V(x(t))$  é decrescente nos instantes de amostragem e diferentemente, das restrições estabelecidas em (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012), entre os intervalos de amostragem  $V(x(t))$  deve ser limitado por  $W(\tau, \chi_k)$ . Além disso, não é necessário

que  $\dot{V}(x(t))$  seja negativo definido. A origem é assintoticamente estável apesar de sua derivada temporal ao longo das trajetórias do sistema não ser definida negativa.

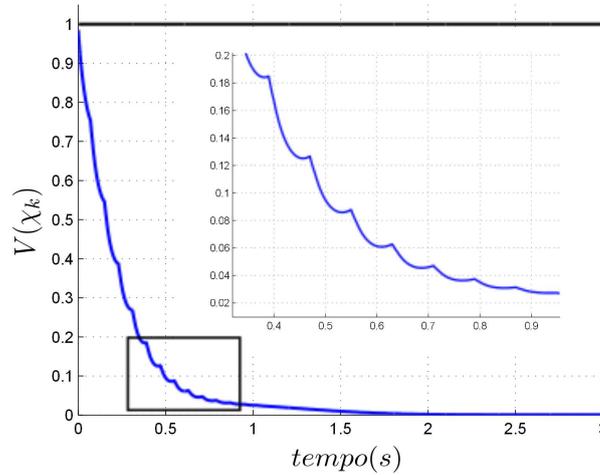


Figura 10: Evolução de  $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$  no tempo (em azul) para  $T_k \in [0.01, 0.07]$ , considerando  $x(0) = [0.01 \quad -0.24 \quad 1.2]^T$ .

Para demonstrar a influência da variação de  $T_k$ , a Figura 11 apresenta os estados da planta para  $T_k = [0.01, 0.07]$  (em preto) ao longo do tempo e para  $\tau_1 = \tau_2 = 0.01$  (em vermelho), i.e., um sistema com amostragem em intervalos periódicos, para  $x(0) = [0.01 \quad -0.24 \quad 1.2]^T$ , tal que  $x_0 \in \mathcal{E}(P)$ . Note que há diferenças na evolução dos sinais e que a variação de  $T_k$  influencia na dinâmica do sistema.

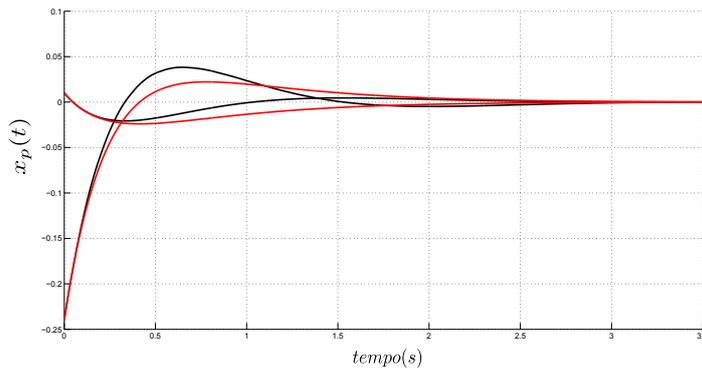


Figura 11: Estados da planta para  $T_k \in [0.01, 0.07]$  (em preto) e para  $\tau_1 = \tau_2 = 0.01$  (em vermelho), considerando  $x(0) = [0.01 \quad -0.24 \quad 1.2]^T$ .

Considerando um valor fixo de  $\tau_1$  ( $\tau_1 = 0.01$ ) e diferentes valores de  $\tau_2$ , a Tabela 1 mostra a relação entre o tamanho da estimativa da região de atração  $\mathcal{E}(P)$ , por meio do traço da matriz  $P$  obtidos a partir do problema de otimização (63). Ao incrementar o valor de  $\tau_2$ , i.e., aumentando o intervalo  $[\tau_1, \tau_2]$ , maiores valores de  $\delta$  são obtidos, e portanto, menor é a estimativa da região de atração  $\mathcal{E}(P)$ . Note que no caso do período de amostragem ser constante ( $\tau_1 = \tau_2$ ) obtém-se a maior região quando comparado com casos de amostragem aperiódica.

Tabela 1: Valores de  $\delta$  e do traço ( $\gamma$ ) de  $P$ , com  $\tau_1 = 0.01$  fixo para diferentes valores de  $\tau_2$ .

$\varepsilon$	$\tau_2$	$\delta \times (10^2)$	$\gamma \times (10^2)$
3	$1 \times \tau_1$	4.81	4.80
3	$2 \times \tau_1$	4.91	4.90
3	$3 \times \tau_1$	5.04	5.02
3.2	$4 \times \tau_1$	5.22	5.19
3.2	$5 \times \tau_1$	6.10	5.72
3.2	$6 \times \tau_1$	6.85	6.00
3.6	$7 \times \tau_1$	11.95	6.15

#### 4.5.2 Exemplo 2: Maximização de $\mathcal{E}(P)$ para Planta Instável com $C = [K_p \ 0]$

Utilizando o exemplo de (BATEMAN; LIN, 2002b), onde o sistema é descrito conforme o modelo (35), com as matrizes

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 1 & 1.5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \\
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & B_1 &= \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

e os limites das saturações são  $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 1$ . Observe que o sistema em malha aberta é instável e a dinâmica do atuador é descrita por  $\Lambda = 1$  e a matriz de ganhos de realimentação é dada na forma  $C = [K_p \ 0]$ , i.e., não há acesso para medição do estado do atuador.

Com o objetivo de maximizar a estimativa da região de atração  $\mathcal{E}(P)$ , a partir do Problema P1. Para o intervalo de amostragem aperiódico  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ , com  $\tau_1 = 0.01$  fixo e diferentes valores de  $\tau_2$ , por meio das condições (63) e para diferentes valores de  $\varepsilon$ , foram obtidas estimativas da região de atração definidas pela matriz  $P$ . Assim, para relacionar  $T_k$  e  $\mathcal{E}(P)$ , apresenta-se na Tabela 2 o traço de  $P$  e os valores de  $\tau_2$ .

Tabela 2: Valores de  $\varepsilon$  e do traço ( $\gamma$ ) de  $P$ , com  $\tau_1 = 0.01$  fixo para diferentes valores de  $\tau_2$ , com  $C = [K_p \ 0]$ .

$\varepsilon$	$\tau_2$	$\gamma$	$\varepsilon$	$\tau_2$	$\gamma$
2.4	$1 \times \tau_1$	9.09	2.5	$8 \times \tau_1$	10.55
2.4	$2 \times \tau_1$	9.26	2.5	$9 \times \tau_1$	10.84
2.5	$3 \times \tau_1$	9.44	2.6	$10 \times \tau_1$	11.14
2.5	$4 \times \tau_1$	9.62	2.7	$11 \times \tau_1$	11.56
2.5	$5 \times \tau_1$	9.82	2.6	$12 \times \tau_1$	11.87
2.5	$6 \times \tau_1$	10.04	2.6	$13 \times \tau_1$	12.36
2.5	$7 \times \tau_1$	10.28	2.6	$14 \times \tau_1$	12.78

Pelos dados obtidos e mostrados na Tabela 2, como esperado, nota-se que ao aumentar os limites do intervalo de amostragem, menor é a região de condições iniciais

admissíveis (maior traço da matriz  $P$ ) e para o sistema com amostragem periódica obtém-se o maior conjunto de condições iniciais admissíveis quando comparado com a amostragem assíncrona.

Para  $T_k \in [0.01, 0.2]$ , com o problema de otimização (63) obtém-se a estimativa da região de atração  $\mathcal{E}(P)$  definida pela matriz

$$P = \begin{bmatrix} 9.47 & -4.26 & 0.25 \\ -4.26 & 14.81 & -2.07 \\ 0.25 & -2.07 & 0.55 \end{bmatrix}.$$

Para um intervalo de amostragem aperiódico variando randomicamente, tal que  $T_k \in [0.01, 0.2]$ , a Figura 12 apresenta a projeção dos estados para algumas trajetórias com  $x_a(0) = 0$  no plano definido pelos estados da planta e um corte do conjunto  $\mathcal{E}(P)$  neste plano. Mostra-se que as trajetórias (em azul) correspondente as condições iniciais na fronteira do corte de  $\mathcal{E}(P)$  (em preto) convergem para a origem como esperado. Embora estas projeções das trajetórias deixem o corte de  $\mathcal{E}(P)$ ,  $\forall t > 0$ , pode ser checado que as mesmas não saem do conjunto  $\mathcal{E}(P)$ .

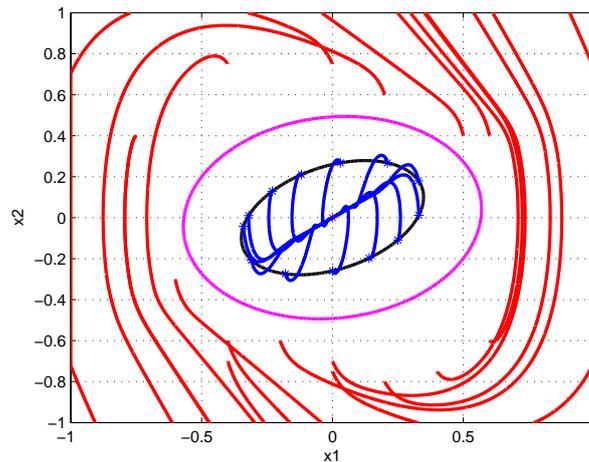


Figura 12: Trajetórias dos estados no plano definido pelos estados da planta para  $x_a(0) = 0$  e para condições iniciais pertencentes (em azul) e não pertencente (em vermelho) ao elipsoide  $\mathcal{E}(P)$  e um corte de  $\mathcal{E}(P)$  neste plano (em preto) e corte de  $\mathcal{E}(P_{CON})$  (em magenta), com  $C = [0 \ 3 \ 0]$ .

Por outro lado, para algumas condições iniciais não pertencentes a  $\mathcal{E}(P)$ , as trajetórias correspondentes são divergentes (em vermelho). Estas condições iniciais indesejadas não são tão próximas à fronteira de  $\mathcal{E}(P)$ , como aquelas no Exemplo 1 da seção 4.5.1. Isto se deve ao fato das inequações do Teorema 2 determinarem que  $\forall t \geq 0$ , tem-se que  $x(t) \in \mathcal{E}(P)$ , e para  $t \rightarrow \infty$ ,  $x(t) \rightarrow 0$ , ou seja, as trajetórias não devem sair do conjunto  $\mathcal{E}(P)$ .

Esta condição pode ser verificado por meio da estimativa da  $\mathcal{R}_a$  da origem de (BATEMAN; LIN, 2002b), obtida para o sistema em tempo contínuo (sem amostragem) com a fronteira bem próxima as condições iniciais indesejáveis. Este conjunto de de (BATEMAN; LIN, 2002b) é definido pelo elipsoide  $\mathcal{E}(P_{CON}) = \{x \in$

$\mathbb{R}^n; x^T P_{CON} x \leq 1$ }, ilustrado na Figura 12 (em magenta), definido pela matriz

$$P_{CON} = \begin{bmatrix} 3.1042 & -0.3063 & 0.0345 \\ -0.3063 & 4.1286 & -0.527 \\ 0.0345 & -0.527 & 0.152 \end{bmatrix}.$$

Verifica-se que as condições iniciais pertencentes a  $\mathcal{E}(P_{CON})$  convergem para a origem com  $T_k \in [0.01, 0.2]$ . Contudo suas respectivas trajetórias não ficam confinadas ao conjunto, o que não ocorre com  $\mathcal{E}(P)$ . Pelo Teorema 2,  $\forall x(0) \in \mathcal{E}(P)$  é garantido que  $x(t) \in \mathcal{E}(P)$ ,  $\forall t \geq 0$  e para  $t \rightarrow \infty$ ,  $x(t) \rightarrow 0$ .

Para a condição inicial  $x(0) = [0.01 \ -0.08 \ 1]^T$  pertencente ao conjunto  $\mathcal{E}(P)$ , e uma amostragem aperiódica com  $T_k \in [0.01, 0.2]$ , os sinais resultantes da simulação são ilustrados nas Figuras 13 e 14. Na Figura 13, são mostrados os sinais de  $sat_p(u)$  e de  $\dot{x}_a$ . Já na Figura 14, são apresentados os estados da planta ( $x_p$ ), do atuador ( $x_a$ ) e  $sat_p(u)$ . Note que, apesar de ocorrer saturação de taxa de variação no atuador, a estabilidade é mantida para  $T_k \in [0.01, 0.2]$ , demonstrando que a estimativa obtida pelas condições do Teorema 2 não evita a região não-linear, i.e., o atuador pode saturar em magnitude ou em taxa de variação. Portanto, mesmo sujeito a limitações, a saída do atuador (em azul) (em tempo contínuo) é similar ao sinal de controle (entrada do atuador) (em vermelho), que satura nos instantes iniciais em taxa de variação ( $sat_r(u)$ ) e o efetivo sinal de entrada da planta é similar ao de controle, porém com a presença da dinâmica do atuador no sinal.

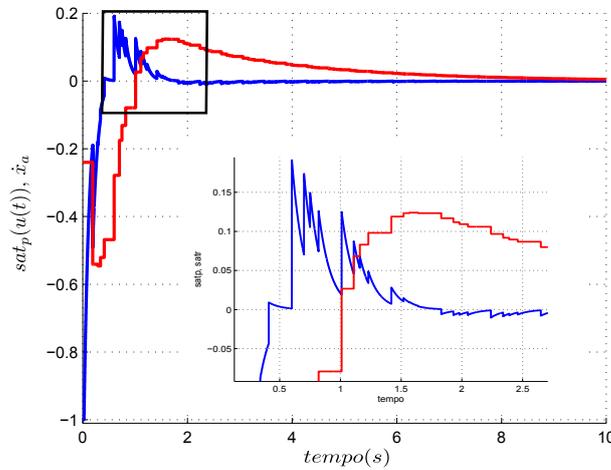


Figura 13: Sinais de  $sat_p(u)$  (em vermelho) e de  $\dot{x}_a$  (em azul), considerando  $x(0) = [0.01 \ -0.08 \ 1]^T$ .

#### 4.5.3 Exemplo 3 - Estabilidade em Contexto Global

Seja o sistema com duas saturações encadeadas de (TARBOURIECH; PRIEUR; GOMES DA SILVA JR., 2006), como o modelo (35), definido pelas matrizes

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ A_1 &= \begin{bmatrix} -0.0264 & -0.3423 \end{bmatrix} & B_1 &= \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} -0.1422 & -0.5441 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (67)$$

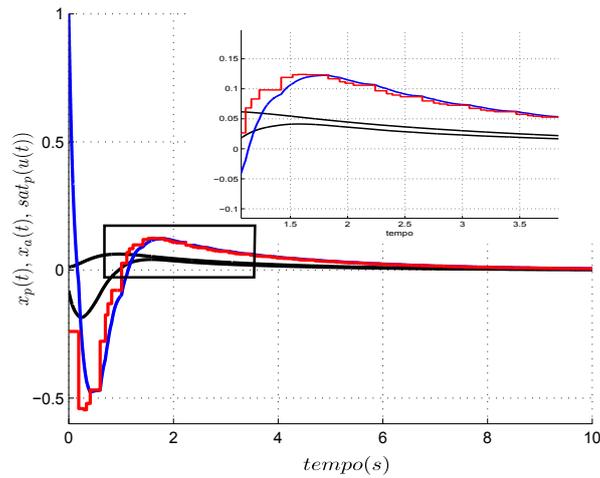


Figura 14: Estados da planta (em preto), estado do atuador (em azul) e  $sat_p(u)$  (em vermelho), para  $x(0) = [0.01 \quad -0.08 \quad 1]^T$ .

e os limites das saturações são  $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 1$ . Note que o sistema em malha aberta é estável. Assim, a partir do problema de otimização P2 em contexto global, i.e. dados os ganhos de realimentação, deseja-se maximizar do limite superior do intervalo de amostragem para o qual a estabilidade assintótica global da origem do sistema (67) é assegurada. Para isso, são utilizadas as inequações de (66), para  $\tau_1 = 0.01$ , em um *grid* em  $\varepsilon$  e incrementando  $\tau_2$ . Assim, para qualquer intervalo de amostragem  $T_k \in [0.01, 2.81]$ , a origem do sistema em malha fechada com realimentação de estados é globalmente assintoticamente estável.

Visto que a origem deste sistema é globalmente assintoticamente estável para qualquer intervalo de amostragem aperiódico, variando randomicamente no intervalo  $T_k \in [0.01, 2.81]$ , para condições iniciais  $x(0) = [100 \quad 50]^T$ , as Figuras 15 e 16 ilustram alguns sinais do sistema ao longo do tempo. Na Figura 16, é mostrado que mesmo com o atuador saturando por bastante tempo, a convergência dos estados para a origem é garantida.

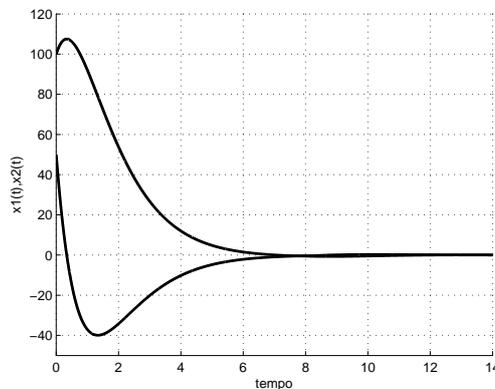


Figura 15: Estados do sistema, considerando  $x(0) = [100 \quad 50]^T$ , para  $T_k \in [0.01, 2.81]$ .

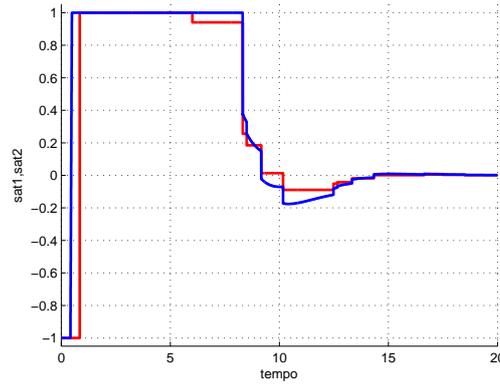


Figura 16: Sinais de  $sat_1$  (em vermelho) e  $sat_2$  (em azul), considerando  $x(0) = [100 \ 50]^T$ , para  $T_k \in [0.01, 2.81]$ .

## 4.6 Comentários Finais

Conforme visto neste capítulo, foram estabelecidos inequações matriciais que permitem analisar a estabilidade tanto regional como global de sistemas sujeitos à amostragem aperiódica e à saturação de magnitude e de taxa de variação no atuador. Note que as condições desenvolvidas são válidas tanto quando é possível medir todos os estados do sistema como no caso em que não há acesso à medição dos estados do atuador. Além disso, estas condições são válidas para sistemas com múltiplas entradas ( $m > 1$ ).

As quasi-LMIs <sup>1</sup> do Teorema 2 e do Corolário 2 utilizadas para resolver os problemas de otimização podem ser resolvidas como condições LMIs em um *grid* em  $\varepsilon$  e  $\tau_j$ , para  $j = 1, 2$ .

A partir dos exemplos numéricos, pode-se perceber que as condições encontradas não são tão conservadoras, e que há uma relação entre os limites em que o intervalo de amostragem pode variar e a estimativa da região de atração. Isto demonstra que quanto maior for a flexibilidade na aquisição de dados, i.e., maior a possibilidade de perda de pacotes ou diferenças no intervalo de amostragem e, portanto, maior  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ , menor será a estimativa da região de atração da origem. Assim, observa-se que sistemas com amostragem periódica apresentam maior região quando comparadas com aqueles com amostragem aperiódica. Ou seja, a variação do intervalo de amostragem impacta diretamente na estabilidade do sistema, mostrando-se um problema complexo e que deve ser considerado. Pelo exemplo 3, verifica-se que estas condições também são suficientes para análise da estabilidade global da origem do sistema (17).

<sup>1</sup>Inequações que são LMIs, somente quando é fixado um valor para o parâmetro desconhecido.

## 5 ESTABILIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

### 5.1 Introdução

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos em relação ao problema de síntese de ganhos de realimentação para estabilização regional ou global da origem de sistemas amostrados, modelados conforme proposto no Capítulo 3. O sistema é composto por uma planta linear com atuadores saturantes em magnitude e em taxa de variação, sendo a lei de controle definida por uma realimentação estática dos estados amostrados em intervalos aperiódicos.

Os resultados obtidos anteriormente são utilizados como base para o desenvolvimento de condições para o projeto de ganhos de realimentação. Para o sistema considerado, o Teorema 1 e o Corolário 1 apresentam condições que relacionam uma função de Lyapunov (neste caso, é uma função quadrática candidata de Lyapunov) e um funcional em tempo contínuo. Assim, se a derivada temporal do funcional for definida negativa, então, a função de Lyapunov é estritamente decrescente nos instantes de amostragem, e a origem do sistema é assintoticamente estável.

Uma abordagem semelhante a do Capítulo 4 é utilizada no problema de síntese dos ganhos de realimentação. Neste caso, a matriz de ganhos de realimentação é desconhecida. Assim, uma mudança de variável é proposta de forma que o problema de síntese possa ser resolvido através de problemas de otimização baseados em LMIs.

Uma questão complexa e interessante consiste na estabilização do sistema amostrado quando a lei de controle depende apenas dos estados da planta, i.e. os dados do atuador não estão disponíveis para medição. Ao contrário dos resultados obtidos para análise de estabilidade no Capítulo 4, que são válidos tanto para  $C = [K_p \ K_a]$  como  $C = [K_p \ 0]$ , é necessário uma abordagem diferente para projetar a matriz de ganhos de realimentação somente dos estados da planta. Neste caso, a matriz de ganhos não é cheia e não se pode aplicar os resultados obtidos para o sistema com realimentação de todos os estados. O método proposto para síntese de ganhos de realimentação estabilizantes para o sistema com  $C = [K_p \ 0]$ , sem acesso aos estados do atuador, também está descrito e exemplificado neste capítulo.

## 5.2 Estabilização de Sistemas Amostrados Sujeitos a Atuadores Saturantes em Magnitude e em Taxa de Variação

Conforme o modelo definido na Seção 3.3, seja o sistema em malha fechada, para  $\tau \in [0, T_k]$ , descrito por

$$\dot{\chi}_k(\tau) = (A_2 + B_2 A_1)\chi_k(\tau) + B_2 B_1 C \chi_k(0) + B_2 B_1 \psi_{k_1} + B_2 \psi_{k_2}, \quad (68)$$

com  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$  e a entrada de controle

$$u(t) = u(t_k) = C \chi_k(0) = [K_p \quad K_a] \begin{bmatrix} x_p(t_k) \\ x_a(t_k) \end{bmatrix}, \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (69)$$

A partir dos Problemas de estabilização P3 e P4, definidos na Seção 3.2, formulam-se condições para projeto de ganhos de realimentação para estabilidade local ou global da origem do sistema (68).

Seja  $V(\chi_k)$  uma função candidata de Lyapunov quadrática e  $V_0(0, \chi_k)$  um funcional que satisfazem

- a)  $V(\chi_k) = \chi_k(\tau)^T P \chi_k(\tau)$ , com  $P = P^T > 0$ ;
- b)  $V_0(0, \chi_k) = V_0(T_k, \chi_k) = 0$  e
- c)  $V_0(\tau, \chi_k) > 0, \quad \forall \tau \in (0, T_k)$ .

Da mesma forma que no Capítulo 4, considere um candidato a funcional em tempo contínuo  $V_0(\tau, \chi_k)$ , definido para todo  $\tau \in [0, T_k]$ , baseado em (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012), como

$$V_0(\tau, \chi_k) = (T_k - \tau) \{ [\chi_k(\tau) - \chi_k(0)]^T S_1 [\chi_k(\tau) - \chi_k(0)] + \tau \begin{bmatrix} \chi_k(0) \\ \psi_{k_1} \end{bmatrix}^T X_1 \begin{bmatrix} \chi_k(0) \\ \psi_{k_1} \end{bmatrix} + \int_0^\tau \dot{\chi}_k^T(\theta) R \dot{\chi}_k(\theta) d\theta \}, \quad (70)$$

com matrizes simétricas e definidas positivas  $X_1 \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n)}$ ,  $S_1$  e  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

A partir dos resultados teóricos do Teorema 1, da função quadrática de Lyapunov  $V(\chi_k)$ , do funcional  $W(\tau, \chi_k) = V(\chi_k) + V_0(\tau, \chi_k)$  e das condições de setor (20) e (21), serão a seguir desenvolvidos métodos para síntese de ganhos de realimentação para estabilização local e global do sistema (68). Para isso consideram-se os limites das saturações de magnitude ( $\bar{u}_1$ ) e de taxa de variação ( $\bar{u}_2$ ) do atuador e a amostragem aperiódica variante no tempo e limitada no intervalo  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ . Estas condições são estabelecidas para o caso dos estados da planta e do atuador serem mensuráveis, como também quando não há acesso à medição dos estados do atuador.

### 5.2.1 Caso 1: Estados do Atuador e da Planta Mensuráveis

O seguinte teorema, estabelece condições para síntese de ganhos de realimentação na forma  $C = [K_p \quad K_a]$ , para estabilização regional da origem do sistema (68).

**Teorema 3.** *Seja o sistema (68) com  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ ,  $0 < \tau_1 \leq \tau_2$ . Se existem matrizes simétricas e definidas positivas  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{S}_1$  e  $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\tilde{X}_1 \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n)}$ , matrizes diagonais e definidas positivas  $\tilde{U}_1$  e  $\tilde{U}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , matrizes  $\tilde{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\tilde{C}$ ,*

$\tilde{G}_1$  e  $\tilde{G}_{21} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\tilde{N} \in \mathbb{R}^{(3n+2m) \times n}$  e um escalar positivo  $\varepsilon$ , satisfazendo as seguintes inequações, para  $j = 1, 2$  e  $i = 1, \dots, m$ :

$$\tilde{\Pi}_1 + \tau_j \tilde{\Pi}_2 + \tau_j \tilde{\Pi}_3 < 0, \quad (71)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1 - \tau_j \tilde{\Pi}_3 & \tau_j \tilde{N} \\ \star & -\tau_j \tilde{R} \end{bmatrix} < 0, \quad (72)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & (\tilde{C} - \tilde{G}_1)_{(i)}^T \\ \star & \tilde{u}_{1(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (73)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & (A_1 \tilde{Y} - \tilde{G}_{21})_{(i)}^T \\ \star & \tilde{u}_{2(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (74)$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_1 &= He\{M_1^T \tilde{P} M_3 - M_4^T \tilde{G}_1 M_2 - M_5^T \tilde{G}_{21} M_1 - M_5^T B_1 \tilde{C} M_2 \\ &\quad - M_5^T B_1 \tilde{U}_1 M_4 - \tilde{N} M_{12} + (\varepsilon M_1^T + M_3^T)((A_2 + B_2 A_1) \tilde{Y} M_1 \\ &\quad + B_2 B_1 \tilde{C} M_2 - \tilde{Y} M_3 + B_2 B_1 \tilde{U}_1 M_4 + B_2 \tilde{U}_2 M_5)\} \\ &\quad - 2M_4^T \tilde{U}_1 M_4 - 2M_5^T \tilde{U}_2 M_5 - M_{12}^T \tilde{S}_1 M_{12}, \\ \tilde{\Pi}_2 &= He\{M_3^T \tilde{S}_1 M_{12}\} + M_3^T \tilde{R} M_3, \\ \tilde{\Pi}_3 &= M_{24}^T \tilde{X}_1 M_{24}, \end{aligned} \quad (75)$$

e as matrizes auxiliares de dimensões apropriadas como descritas em (43), então, para o ganho de realimentação  $C = \tilde{C} \tilde{Y}^{-1}$ , tem-se que para qualquer condição inicial  $x(0) = \chi_0(0)$  pertencente ao conjunto

$$\mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n, x^T P x \leq 1\}, \quad (76)$$

onde  $P = \tilde{Y}^{-T} \tilde{P} \tilde{Y}^{-1}$ , as respectivas trajetórias do sistema (68) convergem assintoticamente para a origem.

*Demonstração.* A prova é semelhante ao do Teorema 2 que trata do problema de análise de estabilidade, assim, deve-se considerar  $C$  como uma matriz de valores de ganhos de realimentação desconhecidos e, portanto, a mudança de variável  $\tilde{C} = C \tilde{Y}$ , assim, o ganho de realimentação de estados pode ser obtido a partir de  $C = \tilde{C} \tilde{Y}^{-1}$ .  $\square$

Caso o sistema em malha aberta seja assintoticamente estável, é interessante verificar a possibilidade de projeto de um ganho de realimentação que assegure a estabilidade assintótica global da origem. Assim, baseado nos resultados obtidos no Corolário 1, o seguinte Corolário fornece condições para determinar a matriz de ganhos de realimentação  $C = [K_p \ K_a]$  que garanta a estabilidade assintótica global da origem do sistema (68), para  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ .

**Corolário 3.** *Seja o sistema (68) com  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ ,  $0 < \tau_1 \leq \tau_2$ . Se existirem matrizes simétricas e definidas positivas  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{S}_1$  e  $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\tilde{X}_1 \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n)}$ , matrizes diagonais e definidas positivas  $\tilde{U}_1$  e  $\tilde{U}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , matrizes  $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\tilde{N} \in \mathbb{R}^{(3n+2m) \times n}$  e  $\tilde{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e um escalar positivo  $\varepsilon$ , tais que, as desigualdades matriciais (71), (72) são satisfeitas, com  $\tilde{G}_1 = \tilde{C}$  e  $\tilde{G}_{21} = A_1 \tilde{Y}$ , então, a origem do sistema é globalmente assintoticamente estável para qualquer  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$  com o ganho de realimentação  $C = \tilde{C} \tilde{Y}^{-1}$ .*

*Demonstração.* A prova deste Corolário é similar ao do Teorema 3. Sendo suficiente considerar as matrizes  $G_1 = C$ ,  $G_{21} = A_1$ ,  $G_{22} = B_1C$  e  $G_{23} = B_1$ , i.e. neste caso as condição de setor generalizadas  $\psi_{k_1}^T U_1(\psi_{k_1} + C\chi_k(0)) \leq 0$  e  $\psi_{k_2}^T U_2(\psi_{k_2} + A_1\chi_k(\tau) + B_1(\psi_{k_1} + C\chi_k(0))) \leq 0$  são verificadas globalmente.  $\square$

### 5.2.2 Caso 2: Somente Estados da Planta são Mensuráveis

Seja o sistema (68), no caso específico de estarem disponíveis apenas os estados da planta para medição, i.e., a entrada de controle é definida por

$$u(t) = u(t_k) = C\chi_k(0) = K_p x_p(t_k) \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad (77)$$

e a matriz de ganhos de realimentação é na forma  $C = [K_p \ 0]$ .

Note que os resultados obtidos para síntese de ganhos estabilizantes no Teorema 3, não podem ser aplicados a este caso, com entrada descrita por (77), pois a mudança de variável  $\tilde{C} = C\tilde{Y}$  não é válida e resulta em uma matriz de ganhos cheia, diferente do desejado.

O mesmo problema é encontrado em (BATEMAN; LIN, 2002a), onde as condições para análise de estabilidade podem ser aplicadas ao sistema com entrada descrita em (77). Contudo, as condições para projeto de ganhos estabilizantes não são válidas. Pois, a matriz de ganhos de realimentação é definida como  $F_2 = [K \ 0]$ , visto que só são mensuráveis os estados da planta. Como realiza-se uma mudança de variável para estabelecer as condições:  $Y_2 = F_2Q$ , sendo  $Q$  uma matriz simétrica e definida positiva, logo  $F_2 \neq Y_2Q^{-1}$  e o método para síntese não pode ser aplicado, semelhante ao que ocorre em relação ao Teorema 3 deste trabalho.

Assim, o seguinte teorema propõe condições para projeto da matriz de ganhos na forma  $C = [K_p \ 0]$ , para estabilidade local da origem do sistema (68) e com lei de controle na forma definida por (77), com base nos Teoremas 3.

**Teorema 4.** *Seja o sistema (68), com  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ ,  $0 < \tau_1 \leq \tau_2$ . Se existem matrizes simétricas e definidas positivas  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{S}_1$  e  $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\tilde{X}_1 \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n)}$ , matrizes diagonais e definidas positivas  $\tilde{U}_1$  e  $\tilde{U}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , uma matriz  $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  na forma*

$$\tilde{C} = [\tilde{K}_p \ 0],$$

*matrizes  $\tilde{G}_1$  e  $\tilde{G}_{21} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\tilde{N} \in \mathbb{R}^{(3n+2m) \times n}$ , uma matriz bloco triangular  $\tilde{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , na forma:*

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_1 & 0 \\ \tilde{Y}_2 & \tilde{Y}_3 \end{bmatrix}, \quad (78)$$

*e um escalar positivo  $\varepsilon$  satisfazendo as seguintes inequações, para  $j = 1, 2$  e  $i = 1, \dots, m$ :*

$$\tilde{\Pi}_1 + \tau_j \tilde{\Pi}_2 + \tau_j \tilde{\Pi}_3 < 0, \quad (79)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1 - \tau_j \tilde{\Pi}_3 & \tau_j \tilde{N} \\ \star & -\tau_j \tilde{R} \end{bmatrix} < 0, \quad (80)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & (\tilde{C} - \tilde{G}_1)_{(i)}^T \\ \star & \bar{u}_{1(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (81)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & (A_1 \tilde{Y} - \tilde{G}_{21})_{(i)}^T \\ \star & \bar{u}_{2(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (82)$$

com

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}_1 &= He\{M_1^T \tilde{P} M_3 - M_4^T \tilde{G}_1 M_2 - M_5^T \tilde{G}_{21} M_1 - M_5^T B_1 \tilde{C} M_2 \\
&\quad - M_5^T B_1 \tilde{U}_1 M_4 - \tilde{N} M_{12} + (\varepsilon M_1^T + M_3^T)((A_2 + B_2 A_1) \tilde{Y} M_1 \\
&\quad + B_2 B_1 \tilde{C} M_2 - \tilde{Y} M_3 + B_2 B_1 \tilde{U}_1 M_4 + B_2 \tilde{U}_2 M_5)\} \\
&\quad - 2M_4^T \tilde{U}_1 M_4 - 2M_5^T \tilde{U}_2 M_5 - M_{12}^T \tilde{S}_1 M_{12}, \\
\tilde{\Pi}_2 &= He\{M_3^T \tilde{S}_1 M_{12}\} + M_3^T \tilde{R} M_3, \\
\tilde{\Pi}_3 &= M_{24}^T \tilde{X}_1 M_{24},
\end{aligned} \tag{83}$$

e as matrizes auxiliares de dimensões apropriadas descritas em (43), então, para o ganho de realimentação  $C = [K_p \ 0]$ , com  $K_p = \tilde{K}_p \tilde{Y}_1^{-1}$ , tem-se que para qualquer condição inicial  $x(0) = \chi_0(0)$  pertencente ao conjunto

$$\mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n, x^T P x \leq 1\},$$

onde  $P = \tilde{Y}^{-T} \tilde{P} \tilde{Y}^{-1}$ , as respectivas trajetórias do sistema (68) convergem assintoticamente para a origem.

*Demonstração.* A prova é semelhante ao do Teorema 2 que trata do problema de análise de estabilidade do sistema (68). No Teorema 4,  $C$  é uma matriz de ganhos de realimentação desconhecida, na forma  $C = [K_p \ 0]$ , sendo  $K_p$  os ganhos de realimentação dos estados da planta. Para a mudança de variável  $\tilde{C} = C \tilde{Y}$  ser válida, defini-se  $\tilde{Y}$  como uma matriz bloco triangular, conforme (78), e  $\tilde{C} = [\tilde{K}_p \ 0]$ , com  $\tilde{K}_p = K_p \tilde{Y}_1$ . A matriz de ganhos de realimentação pode ser obtido a partir de  $C = \tilde{C} \tilde{Y}^{-1}$  ou  $K_p = \tilde{K}_p \tilde{Y}_1^{-1}$ .  $\square$

### 5.3 Problemas de Otimização

Baseado nas condições dadas no Teorema 3 e no Corolário 3, são propostas a seguir condições para resolver os Problemas de otimização P3 e P4 estabelecidos na Seção 3.2.

#### 5.3.1 Maximização da Estimativa da Região de Atração

Note que o conjunto  $\mathcal{E}(P)$  obtido pela satisfação das condições do Teorema 3 é por definição incluso na região de atração da origem,  $\mathcal{R}_a$ , e pode ser usado como uma estimativa desta. A partir do Problema P3, dado  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ , o objetivo é projetar um ganho de realimentação maximizando o conjunto de condições iniciais admissíveis  $\mathcal{E}(P)$ , considerando algum critério de tamanho. Com este objetivo, por exemplo, pode-se maximizar o menor eixo de  $\mathcal{E}(P)$ , a partir do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned}
&\min \delta \\
&\text{sujeito à} \\
&(71), (72), (73), (74), \\
&\begin{bmatrix} \delta I & I \\ I & \tilde{Y} + \tilde{Y}^T - \tilde{P} \end{bmatrix} > 0.
\end{aligned} \tag{84}$$

Como visto na Seção 4.4, a partir do Lema 1, e dado que  $P = \tilde{Y}^{-T} \tilde{P} \tilde{Y}^{-1}$ , a última inequação de (84) implica que  $P < \delta I$ . Então, o máximo autovalor de  $P$  é menor que  $\delta$ . Por isso, a minimização de  $\delta$  garante que o menor eixo de  $\mathcal{E}(P)$  seja maximizado. Observe que, as restrições de (84) são LMIs para um valor fixado de  $\varepsilon$  e para valores conhecidos de  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ . Então, a solução ótima de (84) pode ser obtida resolvendo problemas LMIs em um *grid* de  $\varepsilon$ .

### 5.3.2 Maximização do Intervalo de Amostragem

A partir do Problema P4, considere uma região de condições iniciais admissíveis para o sistema (68) descrito como segue

$$\mathcal{E}(P_0) = \{x \in \mathbb{R}^n, x^T P_0 x \leq 1\}. \quad (85)$$

Então para  $\tau_1$  dado, o objetivo é determinar um ganho de realimentação que maximize  $\tau_2$  e para o qual a estabilidade assintótica da origem do sistema em malha fechada seja garantida para todo  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$  e  $\forall x(0) \in \mathcal{E}(P_0)$ . Isto pode ser obtido através do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \max \tau_2 \\ & \text{sujeito à} \\ & (71), (72), (73), (74), \\ & \begin{bmatrix} P_0 & I \\ I & \tilde{Y} + \tilde{Y}^T - \tilde{P} \end{bmatrix} > 0. \end{aligned} \quad (86)$$

A partir do Lema 1, a última inequação de (86) implica que  $P < P_0$  e  $\mathcal{E}(P_0) \subseteq \mathcal{E}(P)$ . Então ao se garantir a estabilidade para  $\mathcal{E}(P)$ , assegura-se que as respectivas trajetórias do sistema (68), para condições iniciais pertencentes a  $\mathcal{E}(P_0)$ , convergem assintoticamente para a origem. Assim, considerando  $\tau_1$  dado, e um valor fixo de  $\varepsilon$ , o problema de otimização (86) pode ser resolvido de forma iterativa como um problema LMI para valores crescentes de  $\tau_2$  e testando a factibilidade destas LMIs.

Por outro lado, se o sistema em malha aberta for assintoticamente estável, pode-se sintetizar uma matriz de ganhos de realimentação de estados globalmente estabilizante que maximize o  $\tau_2$  admissível para o qual a estabilidade assintótica global da origem do sistema (68) seja assegurada  $\forall T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ . O seguinte problema de otimização pode ser utilizado neste caso:

$$\begin{aligned} & \max \tau_2 \\ & \text{sujeito à} \\ & (71), (72) \end{aligned} \quad (87)$$

com  $\tilde{G}_1 = \tilde{C}$  e  $\tilde{G}_{21} = A_1 \tilde{Y}$ .

**Observação 5.** Os resultados (84) e (86) obtidos são suficientes para a solução dos problemas de otimização P3 e P4, para o caso da lei de controle  $u(t_k) = [K_p \ K_a] \chi_k(0)$ , respectivamente. Note que estes resultados podem ser aplicados ao Caso 2, apresentado na Seção 5.2.2, i.e., quando a matriz de ganhos de realimentação é na forma  $C = [K_p \ 0]$ . Para isso, deve-se considerar as condições apresentadas pelo Teorema 4 em (84) e (86).

### 5.3.3 Estabilização Assintótica Global com Taxa de Decaimento

Considerando a seguinte inequação

$$\dot{W}(\tau, \chi_k) + \mu V(\chi_k(0)) < 0, \quad (88)$$

com  $\mu \in [0; 1/T_k]$  e integrando no intervalo de  $[0, T_k]$ , tem-se

$$\begin{aligned} \Delta V(\chi_k) + (T_k \mu) V(\chi_k(0)) &< 0, & 0 \leq T_k \mu < 1 \\ V(\chi_k(T_k)) &< (1 - T_k \mu) V(\chi_k(0)), \\ V(\chi_k(T_k)) &< \alpha V(\chi_k(0)), & \alpha \in (0, 1], \end{aligned}$$

i.e. a função de Lyapunov  $V(\chi_k)$  decai nos instantes de amostragem com uma taxa  $\alpha = 1 - T_k\mu$ .

Assim, se as condições do Corolário 3 e a inequação (88) são satisfeitas, então a origem do sistema é globalmente assintoticamente estável e garante-se uma convergência exponencial considerando-se os instantes de amostragem.

**Observação 6.** Para  $\mu = 0$ , se as condições do Corolário 3 e (88) são satisfeitas, então o sistema (68) é globalmente exponencialmente estável com uma taxa de decaimento suficientemente pequena.

## 5.4 Exemplos Numéricos

Nesta seção, são apresentados exemplos para validar as condições estabelecidas neste capítulo para síntese de ganhos de realimentação estabilizante. As simulações são realizadas com o intervalo de amostragem aperiódico, variando randomicamente no intervalo  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ .

### 5.4.1 Exemplo 1: Maximização de $\mathcal{E}(P)$ para Planta Instável com $C = [K_p \ K_a]$

Seja o mesmo exemplo da Seção 4.5.1, considerado em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2003), com o sistema descrito por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -0.1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Lambda = 20 \quad , \quad (89)$$

com as limitações do atuador em  $\bar{u}_1 = 1$  e  $\bar{u}_2 = 10$ . Observe que o sistema em malha aberta é instável. Aplicando as condições do problema de otimização (84) para síntese de ganhos de realimentação,  $C = [K_p \ K_a]$ , tal que seja maximizada a estimativa da região de atração, foram obtidos os dados da Tabela 3, para valores de  $\tau_1 = 0.01$  e diversos valores de  $\tau_2$ .

Tabela 3: Valores do traço ( $\gamma$ ) de  $P$ , com  $\tau_1 = 0.01$  fixo para diferentes valores de  $\tau_2$ .

$\varepsilon$	$\tau_2$	$\gamma \times (10^2)$	$C = [K_p \ K_a]$
3	$1 \times \tau_1$	4.80	$[-5.9853 \quad -1.8630 \quad 0.5112]$
3	$2 \times \tau_1$	4.90	$[-6.0691 \quad -1.8891 \quad 0.4962]$
3	$3 \times \tau_1$	5.02	$[-6.1312 \quad -1.9084 \quad 0.4839]$
3	$4 \times \tau_1$	5.18	$[-6.1634 \quad -1.9184 \quad 0.4753]$
3	$5 \times \tau_1$	5.59	$[-6.1585 \quad -1.9169 \quad 0.4805]$
3.5	$6 \times \tau_1$	5.94	$[-6.8845 \quad -2.1429 \quad 0.4342]$
3.9	$7 \times \tau_1$	6.21	$[-7.3264 \quad -2.2804 \quad 0.4082]$

Note que, ao aumentar os limites do intervalo de amostragem  $T_k$ , menor é a região de condições iniciais admissíveis  $\mathcal{E}(P)$  (maior traço da matriz  $P$  obtida). Para  $\tau_1 = \tau_2$ , i.e., intervalos de amostragem periódicos, encontra-se a maior estimativa da região de atração quando comparado aos casos de amostragem aperiódica.

Para os limites do intervalo de amostragem  $T_k \in [0.01, 0.07]$ , obteve-se a matriz de ganhos de realimentação

$$C = [-7.3264 \quad -2.2804 \quad 0.4082], \quad (90)$$

e com isso, uma estimativa da região de atração  $\mathcal{E}(P)$  definida pela matriz

$$P = \begin{bmatrix} 565.3512 & 175.9752 & 26.3027 \\ 175.9752 & 54.7758 & 8.1872 \\ 26.3027 & 8.1872 & 1.8455 \end{bmatrix}.$$

A partir do ganho de realimentação projetado e da estimativa de  $\mathcal{R}_a$ , na Figura 17, são apresentados as projeções dos estados para algumas trajetórias com  $x_a(0) = 0$  no plano definido pelos estados da planta e um corte do conjunto  $\mathcal{E}(P)$  no plano. Mostra-se que as trajetórias (em azul) correspondente as condições iniciais na fronteira do corte de  $\mathcal{E}(P)$  convergem para a origem como esperado. Embora estas projeções das trajetórias deixem o corte de  $\mathcal{E}(P)$ ,  $\forall t > 0$ , pode ser checado que as mesmas não saem do conjunto  $\mathcal{E}(P)$ . Por outro lado, para algumas condições iniciais não pertencentes, porém próximas da fronteira de  $\mathcal{E}(P)$ , as trajetórias correspondentes são divergentes (em vermelho). Isto demonstra que os resultados obtidos não são tão conservadores.

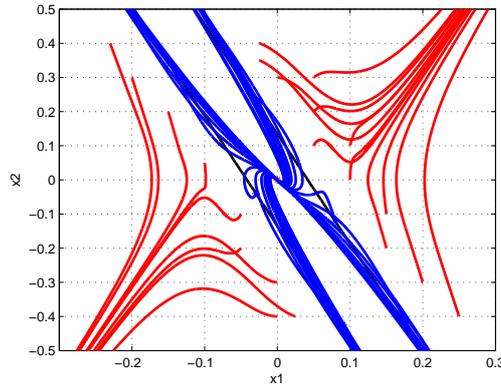


Figura 17: Trajetórias dos estados no plano definido pelos estados da planta para  $x_a(0) = 0$  e para condições iniciais pertencentes (em azul) e não pertencentes (em vermelho) ao elipsoide  $\mathcal{E}(P)$  e um corte de  $\mathcal{E}(P)$  no plano (em preto).

É sabido que a saturação em taxa de variação é fonte de ciclos limites e até mesmo de instabilidade. Atualmente, há trabalhos que consideram sistemas amostrados com saturação de magnitude do sinal de controle, i.e, modelado como

$$\dot{\chi}_k(\tau) = \bar{A}\chi_k(\tau) + \bar{B}sat(\bar{C}\chi_k(0)), \quad (91)$$

desconsiderando a saturação em dinâmica que existe nos atuadores. Este é o caso do trabalho de (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012) que considera tanto a amostragem aperiódica como a saturação apenas em magnitude do sinal de controle.

Para observar o efeito da saturação de taxa de variação do atuador, neste caso considera-se o sistema (89) composto apenas pela planta com saturação do sinal de controle, modelado como (91), com as matrizes

$$\bar{A} = A \quad \bar{B} = B.$$

A partir das condições estabelecidas no Teorema 2 de (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012), para a amostragem aperiódica  $T_k \in [0.01, 0.07]$ , obteve-se a matriz de ganhos  $\bar{C} = [-21.7079 \quad -6.7569]$  e o conjunto de condições iniciais definido pela matriz

$$P_1 = \begin{bmatrix} 132.9839 & 41.3935 \\ 41.3935 & 12.8844 \end{bmatrix},$$

A Figura 18 ilustra um corte do conjunto  $\mathcal{E}(P_1)$  obtido, no plano definido pelos estados da planta e as respectivas trajetórias do sistema amostrado (89) para condições iniciais na fronteira de  $\mathcal{E}(P_1)$ . Apesar do ganho ter sido sintetizado somente considerando a possibilidade de saturação de magnitude, o sistema foi simulado considerando a dinâmica do atuador e a saturação de taxa de variação. Note que todas as trajetórias divergem, exemplificando a importância de considerar a modelagem e a limitação em dinâmica do atuador e  $\mathcal{E}(P_1)$  não está contida na região de atração da origem do sistema (89) quando a dinâmica do atuador é considerada.

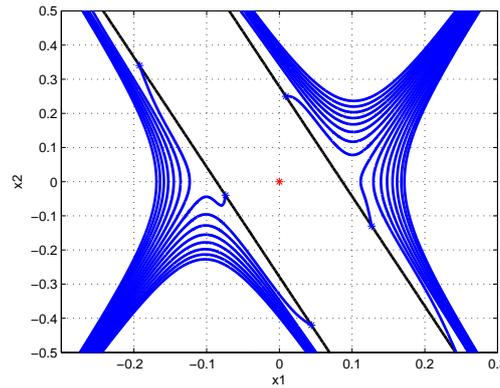


Figura 18: Trajetórias (em azul) do sistema (89), no plano definido pelos estados da planta, para condições iniciais pertencentes a fronteira do elipsoide  $\mathcal{E}(P_1)$  e um corte de  $\mathcal{E}(P_1)$  no plano (em preto) com os ganhos projetados pelo Teorema 2 de (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012), com  $T_k \in [0.01, 0.07]$ .

Outra abordagem para observar o efeito da saturação em taxa de variação no sistema amostrado (89), é considerar os estados da planta e do atuador no sistema, com apenas saturação de magnitude do sinal de controle, modelado como (91), com as matrizes

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & -\Lambda \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Lambda \end{bmatrix}.$$

A partir das condições estabelecidas no Teorema 2 de (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012), quando comparado aos resultados obtidos por (84), obtém-se maiores intervalos de amostragem aperiódica, para os quais a estabilidade assintótica da origem é assegurada.

Para amostragem aperiódica  $T_k \in [0.01, 0.07]$ , para os ganhos de realimentação projetados sem considerar a saturação de taxa de variação, i.e.  $C_2 = [-7.2232 \quad -$

2.2484 0.3549], obtém-se o conjunto de condições iniciais admissíveis definido pela matriz

$$P_2 = \begin{bmatrix} 446.4483 & 138.9650 & 22.4467 \\ 138.9650 & 43.2570 & 6.9870 \\ 22.4467 & 6.9870 & 1.7042 \end{bmatrix},$$

para  $x(0) \in \mathcal{E}(P_2)$  as respectivas trajetórias do sistema (89) considerando a saturação de  $\dot{x}_a$  convergem para a origem. Por outro lado, considerando um limite maior da amostragem aperiódica, para  $T_k \in [0.01, 0.1]$ , mas levando em conta apenas a saturação de magnitude, obteve-se a matriz de ganhos  $C_3 = [-28.54 \ -8.88 \ -0.38]$  e o conjunto definido pela matriz

$$P_3 = \begin{bmatrix} 695.01 & 216.33 & 9.36 \\ 216.33 & 67.33 & 2.91 \\ 9.36 & 2.91 & 0.12 \end{bmatrix}.$$

Porém, este conjunto  $\mathcal{E}(P_3)$  não pode ser considerado uma estimativa da região de atração quando há saturação de taxa de variação, pois nem todas as condições iniciais pertencentes a  $\mathcal{E}(P_3)$  convergem assintoticamente para a origem neste caso. Por exemplo, para a condição inicial  $x(0) = [-0.32 \ 1 \ -1.7]^T$ , pertencente a  $\mathcal{E}(P_3)$ , a respectiva trajetória do sistema (89) considerando a saturação de  $\dot{x}_a$  diverge, como pode ser visto na Figura 19. Já na Figura 20, pode ser visto que ocorre saturação de magnitude e de taxa de variação no atuador. Isto exemplifica também, que se o atuador não estivesse sujeito a saturação de taxa de variação, pelo método de (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012), o sistema seria estável para intervalos de amostragem maiores.

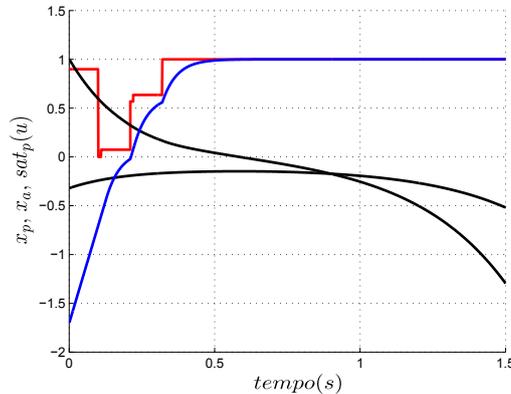


Figura 19: Estados da planta (em preto) e do atuador (em azul), sinal de controle saturado  $sat_p(u(t))$  (em vermelho), com  $C = [-28.54 \ -8.88 \ -0.38]$ , para  $x(0) = [-0.32 \ 1 \ -1.7]^T$ .

#### 5.4.2 Exemplo 2: Comparação entre $C = [K_p \ 0]$ e $C = [K_p \ K_a]$

Seja o sistema modelado por (68) de (BATEMAN; LIN, 2002b), com as matrizes

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 1 & 1.5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \\ A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & B_1 &= \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{92}$$

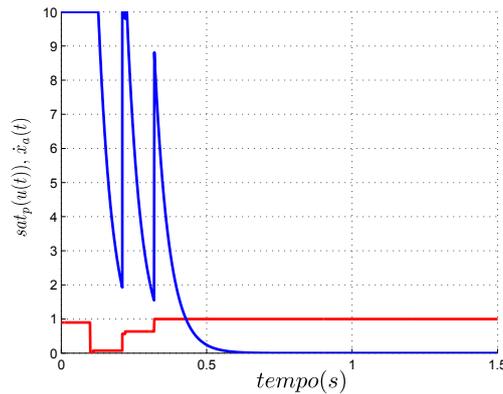


Figura 20: Sinais de  $sat_p(u)$  (em vermelho) e de saturação de taxa de variação  $sat_r$  (em azul), com  $C = [-28.54 \quad -8.88 \quad -0.38]$ , para  $x(0) = [-0.32 \quad 1 \quad -1.7]^T$ .

e os limites das saturações são  $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 1$ . Note que o sistema em malha aberta é instável, e que pode ser descrito como (11), com a matriz que descreve a dinâmica do atuador sendo  $\Lambda = 1$ .

A partir do Problema P3, que consiste na síntese de ganhos de realimentação que maximize a estimativa da região de atração  $\mathcal{E}(P)$ , considerou-se este problema com a matriz de ganhos de realimentação definida como  $C = [K_p \ 0]$  e  $C = [K_p \ K_a]$ , com  $\tau_1 = 0.01$  fixo e para diferentes valores de  $\tau_2$ . Os valores dos traços das matrizes  $P$  obtidas estão apresentados nas Tabelas 4 e 5 para estes dois casos.

Tabela 4: Valores do traço ( $\gamma$ ) de  $P$ , com  $\tau_1 = 0.01$  fixo para diferentes valores de  $\tau_2$ , com  $C = [K_p \ 0]$ .

$\tau_2$	$\gamma$	$C = [K_p \ 0]$	$\tau_2$	$\gamma$	$C = [K_p \ 0]$
$1 \times \tau_1$	48.02	[ 0.1502 2.4614 0]	$8 \times \tau_1$	59.35	[ 0.0392 2.6336 0]
$2 \times \tau_1$	48.56	[ 0.1250 2.4743 0]	$9 \times \tau_1$	61.58	[-0.0415 2.6686 0]
$3 \times \tau_1$	49.21	[ 0.1027 2.4888 0]	$10 \times \tau_1$	73.27	[-0.0381 2.6664 0]
$4 \times \tau_1$	50.00	[ 0.0813 2.5051 0]	$11 \times \tau_1$	86.45	[-0.0303 2.6557 0]
$5 \times \tau_1$	50.94	[ 0.0576 2.5237 0]	$12 \times \tau_1$	97.03	[-0.0144 2.6282 0]
$6 \times \tau_1$	52.18	[ 0.0256 2.5468 0]	$13 \times \tau_1$	109.12	[-0.0011 2.7232 0]
$7 \times \tau_1$	54.25	[-0.0322 2.5793 0]	$14 \times \tau_1$	-	-

Conforme esperado, nota-se tanto na Tabela 4 como na Tabela 5, que ao aumentar os limites do intervalo de amostragem, menor é a região de condições iniciais admissíveis. Observa-se também, que para o sistema com amostragem periódica obtém-se o maior conjunto de condições iniciais admissíveis quando comparado com a amostragem aperiódica.

Por outro lado, tem-se que a partir de ganhos de realimentação projetados na forma  $C = [K_p \ K_a]$ , pode-se obter estimativas da região de atração maiores que com  $C = [K_p \ 0]$ , que corresponde ao caso em que os estados do atuador não estão disponíveis para medição.

Assim, para o sistema com e sem acesso à medição aos estados do atuador, para  $T_k \in [0.01, 0.13]$ , obtiveram-se as estimativas da região de atração da origem,

Tabela 5: Valores do traço ( $\gamma$ ) de  $P$ , com  $\tau_1 = 0.01$  fixo para diferentes valores de  $\tau_2$ , com  $C = [K_p \ K_a]$  e  $\varepsilon = 2$ .

$\tau_2$	$\gamma$	$C = [K_p \ K_a]$	$\tau_2$	$\gamma$	$C = [K_p \ K_a]$
$1 \times \tau_1$	10.38	[0.4140 1.4531 0.2858]	$8 \times \tau_1$	11.18	[0.4874 1.5032 0.1233]
$2 \times \tau_1$	10.48	[0.4411 1.4734 0.2157]	$9 \times \tau_1$	11.33	[0.4906 1.5039 0.1246]
$3 \times \tau_1$	10.57	[0.4599 1.4876 0.1670]	$10 \times \tau_1$	11.49	[0.4932 1.5037 0.1304]
$4 \times \tau_1$	10.68	[0.4758 1.4997 0.1241]	$11 \times \tau_1$	11.68	[0.4970 1.5043 0.1328]
$5 \times \tau_1$	10.79	[0.4770 1.4995 0.1286]	$12 \times \tau_1$	11.88	[0.5010 1.5048 0.1372]
$6 \times \tau_1$	10.91	[0.4818 1.5021 0.1214]	$13 \times \tau_1$	12.11	[0.5462 1.6353 0.0802]
$7 \times \tau_1$	11.04	[0.4845 1.5027 0.1222]	$14 \times \tau_1$	12.36	[0.4757 1.4997 0.1241]

definidas pelas matrizes

$$P_1 = \begin{bmatrix} 68.636 & -19.683 & 1.273 \\ -19.683 & 38.096 & -4.820 \\ 1.273 & -4.820 & 1.072 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 4.3279 & -0.0752 & -0.2026 \\ -0.0752 & 7.0252 & -1.2610 \\ -0.2026 & -1.2610 & 0.5047 \end{bmatrix} \quad (93)$$

e as matrizes  $C_1 = [-0.0011 \ 2.7232 \ 0]$  e  $C_2 = [0.5462 \ 1.6353 \ 0.0802]$ , respectivamente. Esta comparação está ilustrada na Figura 21, que apresenta o corte do elipsoide obtido com (84), no plano definido pelos estados da planta para  $x_a(0) = 0$ , com a matriz de ganhos  $C = [K_p \ K_a]$  ( $\mathcal{E}(P_2)$  em preto) e  $C = [K_p \ 0]$  ( $\mathcal{E}(P_1)$  em vermelho), para o sistema amostrado com  $T_k \in [0.01, 0.13]$ .

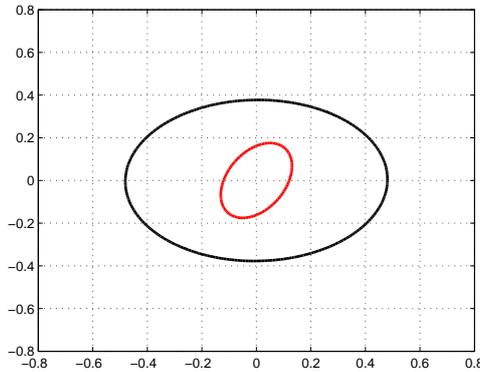


Figura 21: Corte da estimativa de  $\mathcal{R}_a$  da origem do sistema (92), para  $T_k \in [0.01, 0.13]$ , no plano definido pelos estados da planta para  $x_a(0) = 0$ , com  $C_1 = [-0.0011 \ 2.7232 \ 0]$  ( $\mathcal{E}(P_1)$  em vermelho) e  $C_2 = [0.5462 \ 1.6353 \ 0.0802]$  ( $\mathcal{E}(P_2)$  em preto).

Nas Figuras 22 e 23, é ilustrado um corte dos conjuntos  $\mathcal{E}(P_1)$  e  $\mathcal{E}(P_2)$ , respectivamente, no plano de estados da planta, para  $x_a = 0$ , e intervalo de amostragem  $T_k \in [0.01, 0.13]$ . Note que para o sistema com a matriz de ganhos na forma  $C = [K_p \ K_a]$ , para condições iniciais não pertencentes ao conjunto  $\mathcal{E}(P_2)$ , porém próximas a fronteira, as trajetórias do sistema (92) são divergentes, demonstrando que as condições estabelecidas não são conservadoras. Por outro lado, na Figura 22,

para os ganhos na forma  $C = [K_p \ 0]$ , o método mostra-se mais conservador, mas garante-se que  $x(t) \in \mathcal{E}(P_1)$ ,  $t \geq 0, \forall x(0) \in \mathcal{E}(P_1)$ .

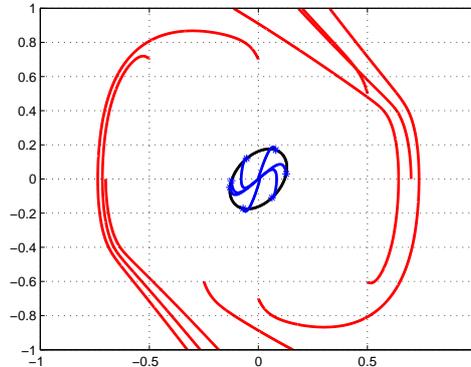


Figura 22: Trajetórias (em azul) do sistema (92), no plano definido pelos estados da planta para  $x_a(0) = 0$ , para condições iniciais pertencentes a fronteira do elipsoide  $\mathcal{E}(P_1)$  e um corte de  $\mathcal{E}(P_1)$  no plano (em preto), para  $C_1 = [-0.0011 \ 2.7232 \ 0]$ .

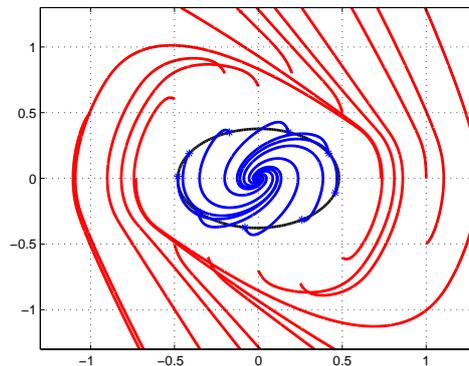


Figura 23: Trajetórias (em azul) do sistema (92), no plano definido pelos estados da planta para  $x_a(0) = 0$ , para condições iniciais pertencentes a fronteira do elipsoide  $\mathcal{E}(P_2)$  e um corte de  $\mathcal{E}(P_2)$  no plano (em preto), para  $C_2 = [0.5462 \ 1.6353 \ 0.0802]$ .

### 5.4.3 Exemplo 3 - Caso Multivariável

Seja o sistema modelado por (11) e considerado em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2003), descrito pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.2855 & -0.7070 & 1.3230 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 3.0447 & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.4900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix},$$

(94)

com os limites simétricos das saturações de magnitude e de taxa de variação do atuador em  $\bar{u}_1 = [2 \ 5]^T$  e  $\bar{u}_2 = [5 \ 2]^T$ , respectivamente. Note que a planta é instável.

A partir de (84), os dados presentes na Tabela 6 são os ganhos estabilizantes, projetados de forma a maximizar  $\mathcal{E}(P)$  e o traço da matriz  $P$ , para os respectivos limites  $[0.01, \tau_2]$  de  $T_k$ . Nota-se que ao aumentar os limites do intervalo de amostragem, obtém-se uma estimativa da região de atração da origem do sistema multivariável (94) menor, conforme esperado. Este fato mostra também que o método permite obter um conjunto de condições iniciais admissíveis maior para sistemas amostrados periodicamente quando comparado aos com amostragem aperiódica.

Tabela 6: Valores do traço ( $\gamma$ ) de  $P$ , com  $\tau_1 = 0.01$  fixo para diferentes valores de  $\tau_2$ , com  $C = [K_p \ K_a]$  e  $\varepsilon = 2$ .

$\tau_2$	$\gamma \times 10^{-1}$	$C = [K_p \ K_a]$					
$1 \times \tau_1$	2.410	0.0003	0.0014	0.0082	0.0103	0.7068	0.0180
		-0.0083	-0.0113	-0.0584	-0.0676	-0.0121	0.6367
$2 \times \tau_1$	2.465	0.0003	0.0014	0.0081	0.0102	0.7058	0.0171
		-0.0076	-0.0104	-0.0542	-0.0628	-0.0130	0.6649
$3 \times \tau_1$	2.525	0.0003	0.0014	0.0080	0.0101	0.7084	0.0163
		-0.0069	-0.0096	-0.0500	-0.0580	-0.0146	0.6929
$4 \times \tau_1$	2.591	0.0003	0.0014	0.0080	0.0100	0.7136	0.0156
		-0.0064	-0.0089	-0.0465	-0.0540	-0.0171	0.7167
$5 \times \tau_1$	2.663	0.0003	0.0014	0.0079	0.0099	0.7179	0.0144
		-0.0060	-0.0085	-0.0442	-0.0513	-0.0203	0.7325
$6 \times \tau_1$	2.742	0.0003	0.0013	0.0078	0.0098	0.7249	0.0128
		-0.0059	-0.0083	-0.0431	-0.0500	-0.0225	0.7393
$7 \times \tau_1$	2.825	0.0003	0.0013	0.0077	0.0097	0.7336	0.0107
		-0.0060	-0.0083	-0.0430	-0.0498	-0.0221	0.7380
$8 \times \tau_1$	2.909	0.0002	0.0013	0.0077	0.0097	0.7445	0.0086
		-0.0062	-0.0083	-0.0431	-0.0498	-0.0178	0.7334

Para  $T_k \in [0.01, 0.08]$ , a partir de (84), obtém-se a matriz de ganhos de realimentação

$$C = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0.0013 & 0.0077 & 0.0097 & 0.7445 & 0.0086 \\ -0.0062 & -0.0083 & -0.0431 & -0.0498 & -0.0178 & 0.7334 \end{bmatrix},$$

e uma estimativa da região de atração da origem, definida pela matriz

$$P = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0.0001 & 0.0004 & 0.0004 & -0.0002 & 0.0029 \\ 0.0001 & 0.0002 & 0.0010 & 0.0012 & -0.0011 & 0.0039 \\ 0.0004 & 0.0010 & 0.0054 & 0.0066 & -0.0063 & 0.0203 \\ 0.0004 & 0.0012 & 0.0066 & 0.0082 & -0.0079 & 0.0234 \\ -0.0002 & -0.0011 & -0.0063 & -0.0079 & 0.1553 & -0.0107 \\ 0.0029 & 0.0039 & 0.0203 & 0.0234 & -0.0107 & 0.1217 \end{bmatrix}$$

Considerando  $x(0) = [2 \ -4 \ -3 \ 4 \ 1.8 \ -2]^T$ , pertencente à  $\mathcal{E}(P)$  e  $T_k \in [0.01, 0.08]$ , as Figuras 24 a 27 ilustram a dinâmica do sistema ao longo do tempo.

A Figura 24 ilustra os valores dos estados da planta e do atuador, demonstrando que a trajetória do sistema converge assintoticamente para a origem, e não deixa o elipsoide  $\mathcal{E}(P)$ , como verificado na Figura 25, i.e. para  $t \geq 0$ ,  $x(t) \in \mathcal{E}(P)$ .

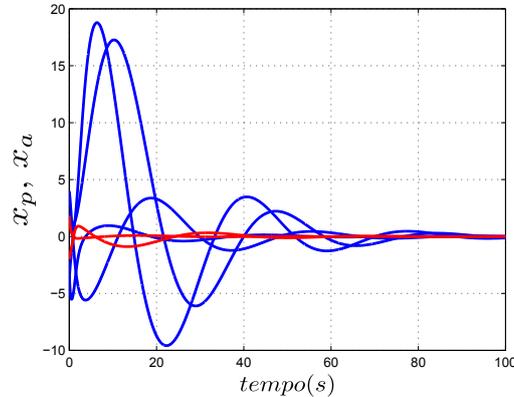


Figura 24: Estados do atuador  $x_a(t)$  (em vermelho) e da planta  $x_p(t)$  (em azul), com  $x(0) = [2 \ -4 \ -3 \ 4 \ 1.8 \ -2]^T$ , para  $T_k \in [0.01, 0.08]$ .

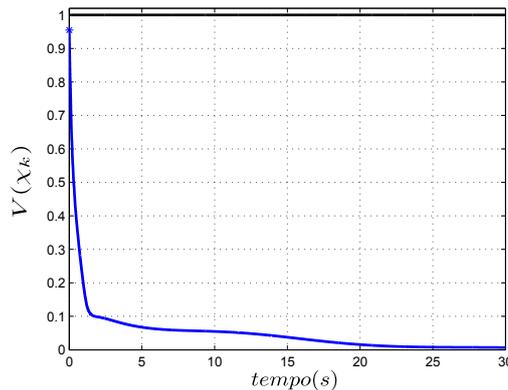


Figura 25: Valores de  $x^T(t)Px(t)$ , com  $x(0) = [2 \ -4 \ -3 \ 4 \ 1.8 \ -2]^T$ , para  $T_k \in [0.01, 0.08]$ ,  $\bar{u}_2 = [2 \ 5]^T$ .

As Figuras 26 e 27 mostram os sinais de  $sat_p$  e  $sat_r$ , respectivamente. Note que há dois atuadores neste sistema, um com dinâmica  $\lambda_1 = 20$  e limitação  $\bar{u}_1 = 2$  e  $\bar{u}_2 = 5$ , e seus respectivos sinais em azul, e outro com dinâmica  $\lambda_2 = 15$  e limitação  $\bar{u}_1 = 5$  e  $\bar{u}_2 = 2$ , com sinais em vermelho. Observe que, para  $x(0) = [2 \ -4 \ -3 \ 4 \ 1.8 \ -2]^T$ , os atuadores saturam em taxa de variação, demonstrando que as condições propostas não evitam a região não-linear, isto contribui para que o método seja menos conservador.

## 5.5 Comentários Finais

Neste capítulo, foram estabelecidos condições na forma de inequações matriciais que permitem projetar ganhos de realimentação de estados, tais que seja assegurado a estabilidade regional ou global de sistemas sujeitos à amostragem aperiódica e à saturação em magnitude e em taxa de variação no atuador, modelados por (68).

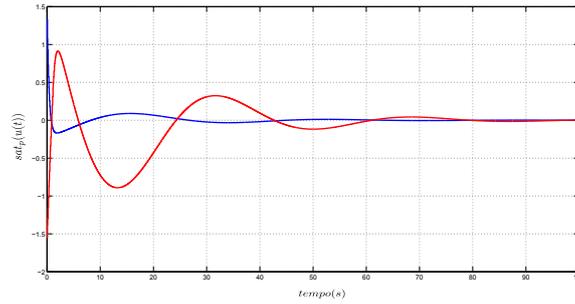


Figura 26: Sinais de  $sat_p(u(t))$  dos atuadores com dinâmica  $\lambda_1 = 20$  (em azul) e  $\lambda_2 = 15$  (em vermelho), com  $x(0) = [2 \ -4 \ -3 \ 4 \ 1.8 \ -2]^T$ , para  $T_k \in [0.01, 0.08]$ ,  $\bar{u}_1 = [2 \ 5]^T$ .

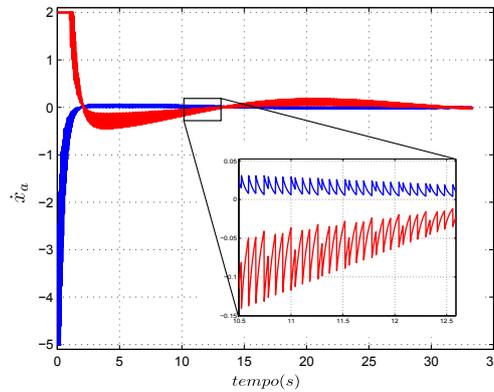


Figura 27: Sinais de  $sat_r$  dos atuadores com dinâmica  $\lambda_1 = 20$  (em azul) e  $\lambda_2 = 15$  (em vermelho), com  $x(0) = [2 \ -4 \ -3 \ 4 \ 1.8 \ -2]^T$ , para  $T_k \in [0.01, 0.08]$ ,  $\bar{u}_2 = [5 \ 2]^T$ .

Estas condições permitem estabilizar sistemas com realimentação de estados do atuador e da planta. Uma particularização destes resultados considera a lei de controle dependente somente dos estados da planta. Neste caso, a fim de se obter condições em uma forma quasi-LMI, as matrizes  $\tilde{C}$  e  $\tilde{Y}$  devem apresentar estruturas particulares, o que de certa forma, introduz um maior conservadorismo nas condições. Para derivar estas condições, são utilizadas algumas mudanças de variáveis linearizantes.

As quasi-LMIs do Teorema 3 e do Corolário 3 utilizadas para resolver os problemas de otimização podem ser resolvidas como condições LMIs em um *grid* de  $\varepsilon$  e  $\tau_j$ . Estas condições são válidas para sistemas com múltiplas entradas (atuadores), assim, basta considerar  $m > 1$ .

De forma similar aos resultados obtidos no Capítulo 4, por meio dos exemplos, pode-se perceber que as condições encontradas não são tão conservadoras, i.e., foi verificado que para todas as condições iniciais pertencentes a estimativa da região de atração da origem é assegurado a estabilidade assintótica da origem, para  $T_k \in [\tau_1, \tau_2]$ . Além disso, trajetórias de condições iniciais não pertencentes ao elipsoide e não distantes a fronteira da estimativa divergem.

Foi mostrado também a relação entre os limites em que o intervalo de amostragem pode variar e a estimativa da região de atração. Quanto maior for o intervalo  $[\tau_1, \tau_2]$ ,

menor é o conjunto de condições iniciais admissíveis. Mostra-se que sistema com amostragem periódica apresentam maior estimativa da região de atração quando comparada com aquele com amostragem aperiódica. Ou seja, a variação do intervalo de amostragem impacta diretamente na estabilidade do sistema, mostrando-se um problema complexo e que deve ser considerado.



## 6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram propostas condições para a análise de estabilidade e para a estabilização da origem de sistemas com dados amostrados aperiodicamente, com atuadores saturantes em posição e em taxa de variação. Considera-se no modelo que o sinal de controle é mantido constante entre dois instantes de amostragem consecutivos, enquanto as dinâmicas da planta linear e do atuador saturante são em tempo contínuo, i.e., não é feita discretização do sistema.

No Capítulo 3, a partir do *looped*-funcional definido em (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012), foi enunciado o Teorema 1 que relaciona uma função candidata de Lyapunov discreta e um funcional em tempo contínuo, como condições base para determinar a estabilidade assintótica local da origem do sistema amostrado. As saturações são consideradas por meio da condição de setor generalizada de (TARBOURIECH et al., 2011). Diferentemente do proposto em (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012), o funcional considerado limita superiormente a função discreta entre os instantes de amostragem. Esta restrição é devido a saturação de taxa de variação depender não só dos estados amostrados como também dos estados em tempo contínuo. Assim, deve-se garantir que as trajetórias contínuas sejam confinadas ao elipsoide que define a região de estabilidade, i.e., diferentemente do caso em (SEURET; GOMES DA SILVA JR., 2012), o elipsoide deve ser invariante com relação as trajetórias contínuas.

Caso o sistema em malha aberta não seja exponencialmente instável, o Capítulo 3 também apresenta o Corolário 1 para análise da estabilidade assintótica de sistemas amostrados na presença de atuadores saturantes em contexto global. O Corolário 1 relaciona uma função candidata de Lyapunov em tempo discreto e um funcional em tempo contínuo, e se as condições são satisfeitas, então para qualquer condição inicial pertencente ao espaço de estados, as respectivas trajetórias do sistema amostrado convergem assintoticamente para a origem e as condições generalizadas de setor (22) e (23) são satisfeitas globalmente.

No Capítulo 4, foram estabelecidas condições para análise da estabilidade local e global da origem do sistema amostrado (17), modelado conforme exposto no Capítulo 3. Estas condições são válidas tanto para o sistema com acesso a todos os estados, como no caso dos estados do atuador não estarem disponíveis a medição.

No Capítulo 5, foram estabelecidas condições para projeto de ganhos de realimentação para estabilização da origem do sistema amostrado, os atuadores são modelados com saturação de magnitude e de taxa de variação. Caso os estados do atuador não sejam mensuráveis, é necessário uma atenção especial para a mudança de variável correspondente a matriz de ganhos de realimentação  $C = [K_p \ 0]$ . Assim, propõe-se um método para a síntese dos ganhos de realimentação estabilizantes com

somente medição dos estados da planta.

Para o caso em que o sistema em malha aberta não for exponencialmente instável, os Capítulos 4 e 5 fornecem também condições para análise de estabilidade e estabilização em contexto global.

As inequações matriciais desenvolvidas neste trabalho são em quasi-LMI forma. Estas podem ser testadas como LMIs em um *grid* em duas variáveis escalares,  $\tau_2$  e  $\varepsilon$ , verificando-se a factibilidade por meio de algoritmos baseados em otimização convexa para resolver os problemas propostos: maximizar a estimativa da região de atração da origem ou, dado um conjunto de condições iniciais, maximizar o limite superior do intervalo de entre duas amostragens sucessivas, dado por  $\tau_2$ . Quando possível, também são fornecidas condições para maximizar  $\tau_2$  em contexto de estabilidade global. Neste caso, o conjunto de condições iniciais é todo o espaço de estados. Os métodos desenvolvidos são válidos tanto para plantas SISO (*single-input single-output*) quanto MIMO (*multiples-input multiples-output*), i.e., um ou mais atuadores.

A partir dos exemplos numéricos, é mostrada a relação entre a amostragem aperiódica e a estimativa da região de atração. Quanto maior for o intervalo admissível entre duas amostragens consecutivas  $T_k$ , menor tende a ser o tamanho do conjunto de condições iniciais admissíveis. É efetivamente verificado que as condições estabelecidas determinam que para condições iniciais  $x(0)$  pertencentes ao conjunto elipsoidal  $\mathcal{E}(P)$ , que as respectivas trajetórias do sistema (17) não deixam o conjunto e tendem assintoticamente para a origem, i.e., para todo  $x(0) \in \mathcal{E}(P)$ , tem-se que  $x(t) \in \mathcal{E}(P)$ ,  $t \geq 0$ , e  $x(t) \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . Observou-se também, a partir dos exemplos numéricos, para condições iniciais não muito distantes a fronteira de  $\mathcal{E}(P)$ , as respectivas trajetórias do sistema amostrado divergem, demonstrando que os resultados obtidos não são tão conservadores.

Por outro lado, conforme esperado, pode-se observar que as condições estabelecidas para síntese de ganhos de realimentação na forma  $C = [K_p \ K_a]$ , i.e., assumindo tanto os estados da planta como do atuador mensuráveis, resultam em uma estimativa da região de atração da origem maior quando comparado ao caso dos estados do atuador não serem mensuráveis.

## 6.1 Trabalhos Futuros

A partir dos resultados teóricos obtidos para sistemas amostrados, modelados conforme descrito no Capítulo 3, é necessário investigar alguns pontos para aprofundar o estudo nesta linha de pesquisa. Levando em conta que o sistema é amostrado aperiodicamente, com atuadores saturantes em magnitude e em taxa de variação, propõem-se os seguintes tópicos para trabalhos futuros.

- *Investigação de novos funcionais*

O funcional estabelecido na forma  $W(\tau, \chi_k) = V_0(\tau, \chi_k) + V(\chi_k)$ , descrito nos Capítulos 4 e 5, é apenas uma possibilidade de *looped*-funcional. Assim, propõem-se estudar e desenvolver novos métodos e funcionais menos conservadores para análise de estabilidade e de projeto de ganhos estabilizantes. Principalmente para o caso em que os estados do atuador não estão disponíveis à medição.

- *Modelagem de incertezas*

As condições propostas são satisfatórias na análise de estabilidade e na estabilização do sistema estudado, porém, não são consideradas incertezas no modelo do sistema. Estas alterariam a dinâmica do sistema e os métodos desenvolvidos não garantiriam a estabilidade. Assim, é interessante o desenvolvimento de condições para análise de estabilidade e estabilização do sistema estudado, considerando incertezas, que podem ser modeladas, por exemplo, de forma politópica.

- *Projeto de laços anti-windup*

Considerar o projeto de um controlador estabilizante com laço *anti-windup* na malha de realimentação, como em (GOMES DA SILVA JR. et al., 2014), que estabelecem condições para a análise de estabilidade da origem de sistemas amostrados aperiodicamente, com saturação de magnitude, e um controlador *anti-windup*.

- *Projeto de controladores*

Projetar outros controladores dinâmicos, como o PID (proporcional-integral-derivativo), comum em NCSs.

- *Aplicação e testes em experimentos físicos*

Aplicar os métodos desenvolvidos a plantas reais, como sistemas robóticos e processos em rede com amostragem aperiódica.



## REFERÊNCIAS

BATEMAN, A.; LIN, Z. An analysis and design method for discrete-time linear systems under nested saturation. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.47, n.8, p.1305–1310, 2002.

BATEMAN, A.; LIN, Z. An analysis and design method for linear systems under nested saturation. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.48, n.1, p.41–52, 2002.

BEKER, O.; HOLLOT, C. V.; CHAIT, Y.; HAN, H. Fundamental properties of reset control systems. **Automatica**, [S.l.], v.40, n.6, p.905–915, 2004.

BERG, J. M.; HAMMET, K. D.; BANDA, S. S. An analysis of the destabilizing effect of daisy chained rate-limited actuators. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, Piscataway, v.4, p.171–176, 1996.

BRANICKY, M. S.; PHILLIPS, S. M.; ZHANG, W. Stability of networked control systems explicit analysis of delay. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2000, Chicago. **Proceedings...** New York: IEEE, 2000. v.4, n.1, p.2352–2357.

CAMACHO, E. F.; BORDONS, C. **Model Predictive Control**. 2. ed. New York: Springer, 1997.

CLOOSTERMAN, M. B. G.; HETEL, L.; VAN DE WOUW, N.; HEEMELS, W. P. M. H.; DAAFOUZ, J.; NIJMEIJER, H. Controller synthesis for networked control systems. **Automatica**, [S.l.], v.40, n.10, p.1584–1594, 2010.

CLOOSTERMAN, M. B. G.; HETEL, L.; VAN DE WOUW, N.; HEEMELS, W. P. M. H.; NIJMEIJER, H. Stability of networked control systems with uncertain time-varying delays. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.54, n.7, p.1575–1580, 2009.

FRIDMAN, E. A refined input delay approach to sampled-data control. **Automatica**, [S.l.], v.46, p.421–427, 2010.

FRIDMAN, E.; SEURET, A.; RICHARD, J.-P. Robust sampled-data stabilization of linear systems: an input delay approach. **Automatica**, [S.l.], v.40, p.1441–1446, 2004.

FRIDMAN, E.; SHAKED, U. A descriptor system approach to Hinf control of linear time-delay systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.47, n.2, p.253–270, 2002.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; LIMON, D.; ALAMO, T.; CAMACHO, E. F. Dynamic output feedback for discrete-time systems under amplitude and rate actuator constraints. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.50, n.10, p.2367–2372, 2008.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; QUEINNEC, I.; Seuret, A.; TARBOURIECH, S. Stability analysis of dynamic output controllers under aperiodic sampling and input saturation. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL THEORY OF NETWORKS AND SYSTEMS, 21., 2014, Groningen. **Proceedings...** Netherlands: MTNS, 2014. p.6.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; TARBOURIECH, S. Anti-Windup design with guaranteed regions of stability: an lmi approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.50, n.1, p.106–111, 2005.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; TARBOURIECH, S.; GARCIA, G. Local Stabilization of Linear Systems Under Amplitude and Rate Saturation Actuators. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.48, n.5, p.842–847, 2003.

HALEVI, Y.; RAY, A. Integrated communication and control systems Part I Analysis. **Dynamic Systems, Measure Control**, [S.l.], v.110, p.367–373, 1988.

HEEMELS, W. P. M. H.; JOHANSSON, K. H.; TABUADA, P. An Introduction to Event-triggered and Self-triggered Control. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 51., 2012, Hawaii. **Proceedings...** New York: IEEE, 2012. p.3270–3285.

HESPANHA, J.; NAGHSHATABRIZZI, P.; XU, Y. A survey of recent results in networked control systems. **Proceedings of the IEEE**, [S.l.], v.95, n.1, p.138–162, 2007.

HU, T.; LIN, Z. **Control systems with actuator saturation: analysis and design**. 1st. ed. Boston: Birkhauser, 2001.

KAPILA, V.; HADDAD, W. Fixed structure controller design for systems with actuator amplitude and rate nonlinearities. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 37., 1998, Tampa. **Proceedings...** New York: IEEE, 1998. v.1, p.3920–3921.

KAPILA, V.; PAN, H.; DE QUEIROZ, M. S. LMI-based control of linear systems with actuator amplitude and rate nonlinearities. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 38., 1999, Arizona. **Proceedings...** New York: IEEE, 1999. v.2, n.1, p.1413–1418.

KHALIL, H. **Nonlinear systems**. 3. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.

LEHMANN, D.; KIENER, G. A.; JOHANSSON, K. H. Event-triggered PI control: saturating actuators and anti-windup compensation. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 51., 2012, Hawaii. **Proceedings...** New York: IEEE, 2012. p.6566–6571.

- LIN, Z. Semi-global stabilization of linear systems with position and rate actuators. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.30, n.1, p.1–11, 1997.
- MILLER, R. B.; PACHTER, M. Maneuvering Flight Control with Actuator Constraints. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, [S.l.], v.20, n.4, p.22–23, July 1997.
- NAGHSHATABRIZZI, P.; HESPANHA, J. P.; TEEL, A. R. Exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data systems. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.57, n.1, p.378–385, 2008.
- NESIC, D.; ZACCARIAN, L.; TEEL, A. Stability properties of reset systems. **Automatica**, [S.l.], v.44, n.8, p.2019–2026, 2008.
- NGUYEN, T.; JABBARY, F. Output feedback controllers for disturbance attenuation with actuator amplitude and rate saturation. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1999., 1999, San Diego. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1999. p.1997–2001.
- OISHI, Y.; FUJIOKA, H. Stability and stabilization of aperiodic sampled-data: an approach using robust linear matrix inequalities. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL AND 28TH CHINESE CONTROL CONFERENCE, 48., 2009, Shanghai. **Proceedings...** New York: IEEE, 2009. p.8142–8147.
- RUNDQWIST, L.; HILLGREN, R. Phase Compensation of Rate Limiters in JAS 39 Gripen. In: AIAA ATMOSPHERIC FLIGHT MECHANICS CONFERENCE, 1996, San Diego. **Anais...** [S.l.]: AIAA, 1996. p.69–79.
- SEURET, A. A novel stability analysis of linear systems under asynchronous samplings. **Automatica**, [S.l.], v.48, n.1, p.177–182, 2011.
- SEURET, A.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Taking into account period variations and actuator saturation in sampled-data systems. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.61, p.1286–1293, 2012.
- SONTAG, E. D.; SUSSMAN, H. J. Nonlinear output feedback design for linear systems with saturating controls. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 29., 1990, Honolulu. **Proceedings...** New York: IEEE, 1990. p.3414–3416.
- STOORVOGEL, A.; SABERI, A. Output Regulation for linear systems to amplitude plus rate saturating actuators. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, [S.l.], v.9, n.10, p.631–657, 1999.
- ÅSTROM, K. J.; WITTENMARK, B. **Computer-Controlled Systems: theory and design**. 3. ed. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1997.
- TARBOURIECH, S.; GARCIA, G.; GOMES DA SILVA JR., J. M.; QUEINNEC, I. **Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators**. 1. ed. London: Springer, 2011.

TARBOURIECH, S.; PRIEUR, C.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Stability Analysis and Stabilization of Systems Presenting Nested Saturations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.51, n.8, p.1364–1371, 2006.

WADA, N.; SAEKI, M. Synthesis of a static anti-windup compensator for systems with magnitude and rate limited actuators. In: IFAC SYMPOSIUM ON ROBUST CONTROL DESIGN (ROCOND), 2000, Praga. **Anais. . .** [S.l.]: IFAC, 2000. p.131–137.

ZACCARIAN, L.; TEEL, A. R. **Modern anti-windup synthesis**. New Jersey: Princeton University Press, 2011.

ZHANG, W.; BRANICKY, M. S.; PHILLIPS, S. M. Stability of Networked Control Systems. **IEEE Control Systems**, New York, v.21, n.1, p.84–99, 2001.

ZHOU, B.; ZHENG, W. X.; DUAN, G. R. An improved treatment of saturation nonlinearity with its application to control of systems subject to nested saturation. **Automatica**, [S.l.], v.47, n.2, p.306–315, 2011.

## APÊNDICE A CONCEITOS BÁSICOS

Sistemas não-lineares é uma linha de pesquisa complexa e relevante na área de sistemas de controle, visto que todos os sistemas na realidade apresentam alguma não-linearidade. Muitas vezes estes elementos são desprezados ou aproximados para um modelo linear, porém, em alguns casos, os efeitos das não-linearidades são relevantes, e o uso de teorias de controle linear são inválidas ou imprecisas.

Nesta seção, são apresentados alguns conceitos básicos sobre sistemas não-lineares, como a estabilidade no sentido de Lyapunov e o segundo método de Lyapunov, utilizados como bases para o desenvolvimento de métodos para caracterização da estabilidade de sistemas lineares sujeitos a atuadores saturantes e amostragens aperiódicas. Além disso, conceitos como a região de atração e condições de setor das não-linearidades são apresentados.

### A.1 Estabilidade no Sentido de Lyapunov

As não-linearidades inerentes a qualquer sistema real provocam efeitos que degradam o desempenho ou mesmo são fontes de instabilidade. Muitas vezes a análise de estabilidade por meio de aproximações para sistemas lineares são inválidas ou imprecisas, assim, há diferentes métodos e problemas estudados em sistemas não-lineares, e.g., caracterizar a estabilidade entrada-saída, entrada-estados ou do ponto de equilíbrio.

A estabilidade do ponto de equilíbrio é comumente caracterizada no sentido de Lyapunov. Assim, um ponto de equilíbrio é considerado estável se todas as trajetórias de condições iniciais próximas ao ponto não divergem, caso contrário, é instável. É assintoticamente estável, se as trajetórias das condições iniciais próximas, não só não divergem como tendem assintoticamente ao ponto de equilíbrio.

A seguir, é apresentado o segundo método de Lyapunov que é baseado no conceito análogo ao da energia e apresenta condições suficientes para caracterizar a estabilidade do ponto de equilíbrio, comumente utilizado no estudo da estabilidade em sistemas não-lineares.

**Teorema 5** (Segundo Método de Lyapunov). (*KHALIL, 1996*) *Seja  $x = 0$  um ponto de equilíbrio para o sistema  $\dot{x} = f(x)$ , onde  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio contendo  $x = 0$ . Seja  $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável tal que*

$$V(0) = 0 \quad e \quad V(x) > 0 \quad em \quad \mathcal{D} - \{0\}$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad em \quad \mathcal{D},$$

*então  $x = 0$  é estável. E se*

$$\dot{V}(x) < 0 \quad em \quad \mathcal{D},$$

então,  $x = 0$  é assintoticamente estável.

A partir do Teorema 5, se há uma função de Lyapunov  $V(x)$  que seja definida positiva e, se sua derivada temporal for definida negativa em  $\mathcal{D}$ , o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável no conjunto  $\mathcal{D}$ .

**Observação 7.** *Se a função candidata de Lyapunov for radialmente ilimitada para  $x \rightarrow \infty$  e satisfaz o Teorema 5 para o domínio sendo todo o espaço de estados, então é caracterizado a estabilidade (assintótica) global da origem do sistema  $\dot{x} = f(x)$ .*

Por outro lado, se o sistema em malha fechada for realimentado com dados amostrados em intervalos periódicos, i.e., o sistema pode ser descrito por um modelo em tempo discreto, pode-se caracterizar a estabilidade por meio de uma função discreta candidata de Lyapunov que satisfaça o seguinte teorema.

**Teorema 6.** *Seja  $x = 0$  um ponto de equilíbrio para o sistema  $x(k+1) = f(x(k))$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , onde  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio contendo  $x = 0$ . Seja  $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função discreta, tal que,*

$$\begin{aligned} V(0) = 0 \quad e \quad V(x(k)) > 0 \quad em \quad \mathcal{D} - \{0\}, \quad \forall k > 0 \\ \Delta V(x) \leq 0 \quad em \quad \mathcal{D}, \\ com \quad \Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k)) \end{aligned}$$

então  $x = 0$  é estável. E se

$$\Delta V(x) < 0 \quad em \quad \mathcal{D}.$$

então,  $x = 0$  é assintoticamente estável.

Assim, em sistemas discretos é suficiente caracterizar a estabilidade a partir do Teorema 6, se há uma função discreta de Lyapunov  $V(x)$  que seja definida positiva, e estritamente decrescente nos instantes de amostragem, i.e.,  $\Delta V(x) < 0$ , então, o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável no conjunto  $\mathcal{D}$ .

### A.1.1 Teorema de Lyapunov-Krasovskii

Um método para estudo de sistemas amostrados consiste em considerar a dinâmica do sistema em tempo contínuo e a entrada de controle com dados amostrados como sendo um sinal de controle com atraso. Este método foi introduzido por (FRIDMAN; SEURET; RICHARD, 2004), que obtém condições de análise de estabilidade da origem do sistema amostrado, por meio de funcionais de Lyapunov-Krasovskii que interpreta a evolução das soluções no espaço das funções, sendo uma forma de aplicação do segundo método de Lyapunov em sistemas com atraso.

**Teorema 7** (Lyapunov-Krasovskii). *Sejam o sistema  $\dot{x}(t) = f(t, x(t+\theta))$ , para  $t \geq t_0$ , com ponto de equilíbrio em  $x = 0$ , condição inicial  $x_{t_0} = x(t_0 + \theta)$  definida sobre o intervalo  $\theta = [-\tau, 0]$ , e as funções  $V_1, V_2$  e  $V_3 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tais que,  $V_1(r) > 0, V_2(r) > 0$  e  $V_3(r) > 0, \forall r > 0$ . Se existir um funcional contínuo  $W : \mathbb{R} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que*

$$\begin{aligned} V_1(\|x_{t_0}(0)\|) \leq W(t, x_{t_0}(\theta)) \leq V_2(\|x_{t_0}(\theta)\|_c), \\ \dot{W}(t, x_t) \leq -V_3(\|x(t)\|). \end{aligned}$$

com  $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ . Então a origem do sistema é uniformemente assintoticamente estável.

Note que  $W : \mathbb{R} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida sobre o espaço das funções  $x_t(\theta) = x(t+\theta)$  definidas no intervalo  $[t-\tau, t]$  e comumente chamado de funcional de Lyapunov.

## A.2 Região de Atração

Considere o sistema descrito por  $\dot{x} = f(x)$  com ponto de equilíbrio na origem. Se o ponto de equilíbrio for assintoticamente estável, então, existe um conjunto de condições iniciais admissíveis, tal que, as respectivas trajetórias tendem assintoticamente ao ponto de equilíbrio, o conjunto que contém todas estas condições iniciais é denominado região de atração e definido a seguir.

**Definição 1.** *A região de atração ( $\mathcal{R}_a$ ) da origem do sistema  $\dot{x} = f(x)$  é definida como o conjunto de todas as condições iniciais  $x(0)$  para os quais as trajetórias do sistema convergem assintoticamente para a origem, i.e.,  $\forall x(0) \in \mathcal{R}_a$ , então  $x(t) \rightarrow 0$  com  $t \rightarrow \infty$ .*

Se a região de atração não for todo o espaço de estados, então é dito que a origem é localmente ou regionalmente assintoticamente estável. Se  $\mathcal{R}_a$  for todo o espaço de estados, i.e.  $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n, x(t) \rightarrow 0$  com  $t \rightarrow \infty$ , a origem é globalmente assintoticamente estável.

A determinação analítica da região de atração não é simples, pois, este conjunto pode ser não-convexo, ilimitado ou aberto (KHALIL, 1996). Assim, é interessante determinar uma região de condições iniciais admissíveis  $\mathcal{X}_0$ , tal que, as respectivas trajetórias tendem assintoticamente para a origem, que possa ser calculado analiticamente em forma de elipse ou poliedro, i.e.  $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{R}_a \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Um método de cálculo analítico do conjunto  $\mathcal{X}_0$  é associá-los a níveis do domínio  $\mathcal{D}$  da função de Lyapunov  $V(x)$  do sistema, i.e.,  $\mathcal{X}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq c\}$ . Portanto, se a função de Lyapunov satisfaz as condições do Teorema 5 e garante a estabilidade assintótica no domínio  $\mathcal{D}$ , se  $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{D}$ , então as trajetórias iniciadas em  $\mathcal{X}_0$  permanecem nesta região e tendem assintoticamente para a origem. Assim, este conjunto pode ser chamado de estimativa da região de atração.

## A.3 Condições de Setor Generalizada

A condição de setor generalizada ou modificada de (TARBOURIECH et al., 2011) é aplicada a não-linearidades do tipo zona-morta, definida como

$$\psi(\omega(t)) = \begin{cases} \bar{u}_{max} - \omega(t), & \text{se } \omega(t) \geq \bar{u}_{max}, \\ 0, & \text{se } \bar{u}_{min} < \omega(t) < \bar{u}_{max}, \\ \bar{u}_{min} - \omega(t), & \text{se } \omega(t) \leq \bar{u}_{min}, \end{cases}$$

com  $\bar{u}_{max} > 0$  e  $\bar{u}_{min} < 0$ .

Seja a não-linearidade simétrica, com  $\bar{u}_{min} = -\bar{u}_{max} = \bar{u}$  e o conjunto

$$\mathcal{S}(\bar{u}) = \{\omega \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^m; |\omega_{(i)} - v_{(i)}| \leq \bar{u}_{(i)}, \text{ para } i = 1, \dots, m\},$$

o seguinte Lema fornece a condição de setor generalizada.

**Lema 2** (Condição de Setor Generalizada ou Modificada). *(TARBOURIECH et al., 2011) Se  $\omega$  e  $v$  são elementos do conjunto  $\mathcal{S}(\bar{u})$ , então a não-linearidade do tipo zona-morta  $\psi(\omega)$ , definido como  $\psi(\omega) = \text{sat}(\omega) - \omega$ , satisfaz*

$$\psi(\omega)^T U (\psi(\omega) + v) \leq 0, \quad (95)$$

para qualquer matriz definida positiva e diagonal  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

*Demonstração.* (TARBOURIECH et al., 2011) Assumindo que  $\omega$  e  $v$  são elementos de  $\mathcal{S}(\bar{u})$ . Neste caso, segue-se que  $\bar{u}_{(i)} - \omega_{(i)} + v_{(i)} \geq 0$  e  $-\bar{u}_{(i)} - \omega_{(i)} + v_{(i)} \leq 0$ . Considerando três casos:

- Caso 1: se  $\omega_{(i)} > \bar{u}_{(i)}$ , segue-se que  $\psi(\omega_{(i)}) = \bar{u}_{(i)} - \omega_{(i)} < 0$  e  $\psi(\omega_{(i)})U_{(i,i)}(\psi(\omega_{(i)}) + v_{(i)}) = \psi(\omega_{(i)})U_{(i,i)}(\bar{u}_{(i)} - \omega_{(i)} + v_{(i)}) \leq 0$  desde que  $U_{(i,i)} > 0$ .
- Caso 2: se  $-\bar{u}_{(i)} < \omega_{(i)} < \bar{u}_{(i)}$ , segue-se que  $\psi(\omega_{(i)}) = 0$  e  $\psi(\omega_{(i)})U_{(i,i)}(\psi(\omega_{(i)}) + v_{(i)}) = 0, \forall U_{(i,i)} > 0$ .
- Caso 3: se  $\omega_{(i)} < -\bar{u}_{(i)}$ , segue-se que  $\psi(\omega_{(i)}) = -\bar{u}_{(i)} - \omega_{(i)} > 0$  e  $\psi(\omega_{(i)})U_{(i,i)}(\psi(\omega_{(i)}) + v_{(i)}) = \psi(\omega_{(i)})U_{(i,i)}(-\bar{u}_{(i)} - \omega_{(i)} + v_{(i)}) \leq 0$  desde que  $U_{(i,i)} > 0$ .

Portanto, se  $\omega$  e  $v$  são elementos de  $\mathcal{S}(\bar{u})$ , pode-se concluir que  $\psi(\omega_{(i)})U_{(i,i)}(\omega_{(i)} + v_{(i)})$ ,  $\forall U_{(i,i)} > 0$  e  $\forall i = 1, \dots, m$ .  $\square$

Assim, pelo Lema 2, se a inequação (95) for satisfeita, pode-se verificar se a não-linearidade  $\psi(\omega)$  esta contida no setor  $\mathcal{S}(\bar{u})$ , já no caso global, considera-se que seja satisfeita a condição

$$\psi(\omega)^T U (\psi(\omega) + \omega) \leq 0, \quad (96)$$

para qualquer matriz diagonal e definida positiva  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $\mathcal{S}(\bar{u}) = \mathbb{R}^m$ .

**Observação 8.** Para não-linearidade do tipo zona-morta, a condição de setor clássica (KHALIL, 1996) é um caso particular da condição generalizada, e a utilização da condição de setor modificada permite que se obtenha condições menos conservadoras quando comparada a clássica e em forma de LMIs, como discutido em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH, 2005).

## A.4 Complemento de Schur

Pode-se converter um problema não-linear convexo em LMIs usando o complemento de Schur. Dada a LMI

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > 0,$$

sendo  $A = A^T$  e  $C = C^T$ , se  $A$  é uma matriz não-singular, tem-se

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ B^T A^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C - B^T A^{-1} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1} B \\ 0 & I \end{bmatrix} > 0,$$

se  $C$  é uma matriz não-singular, tem-se

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & BC^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BC^{-1} B^T & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ C^{-1} B^T & I \end{bmatrix} > 0.$$

A partir destas equações, pode-se deduzir que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} A > 0, & C - B^T A^{-1} B > 0 \\ C > 0, & A - BC^{-1} B^T > 0 \end{matrix}.$$