SOBRE A EXISTÊNCIA DE GEODÉSICAS FECHADAS EM VARIEDADES COMPACTAS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL - UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

SOBRE A EXISTÊNCIA DE GEODÉSICAS FECHADAS EM VARIEDADES COMPACTAS

Jaime Bruck Ripoll

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Porto Alegre, dezembro de 1981.

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Claus Ivo Doering e apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática, por:

JAIME BRUCK RIPOLL

Bolsista da CAPES

AGRADECIMENTO

- A todas as pessoas que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, a meu orientador, Prof. Dr. Claus Ivo Doering.

- Agradeço também aos membros do colegiado do DMPA, pelas condições de trabalho que me permitiram maior dedicação ao Curso de Mestrado.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é dar uma demonstração rigorosa e simples do seguinte resultado:

TEOREMA

Seja M uma variedade diferenciável, riemaniana e compacta. Se, para algum $k \geqslant 2$, o grupo de homotopia $\pi_k(M)$ é não trivial, então existe em M uma geodésica fechada nul-homotópica.

A questão da existência de geodésicas fechadas em variedades riemanianas tem sido objeto de investigação intensa desde os primórdios da geometria diferencial global no século passado.

Inicialmente, as variedades consideradas eram superfícies analíticas convexas. Jacobi, por exemplo, já em 1842, descrevia as três geodésicas fechadas simples dos elipsóides da revolução. Poincaré, em 1905, observava que o problema da existência de geodésicas fechadas em superfícies simplesmente conexas tem muito em comum com o problema da existência de ór bitas periódicas no problema restrito dos três corpos, e delineava uma prova da existência de pelo menos uma geodésica fechada em superfícies analíticas convexas que não diferem muito da esfera euclidiana. Mas, somente em 1929, Lusternik e Schnirelmann conseguiram demonstrar a existência de pelo menos três geodésicas fechadas sem auto-interseções em qualquer superfície compacta simplesmente conexa.

Em superfícies com o grupo fundamental não trivial, o primeiro resultado é devido a Hadamard, que, em 1898, demonstrou que qualquer curva fechada não nul-homotópica pode ser deformada continuamente em uma curva fechada com comprimento mínimo na classe livre de homotopia, que, a menos de reparametrização, representa uma geodésica fechada.

Os métodos de Hadamard de deformação minimizando o comprimento foram utilizados por Birkhoff em outras situações; Birkhoff também introduziu um outro método, o de maximização-minimização, e com isso conseguiu provar, em 1917, a existência de geodésicas fechadas em superfícies compactas de genus zero, e, em 1927, em variedades homeomorfas à esfera euclidiana n-dimensional. Utilizando também um método de maximização-minimização, mas, principalmente, conceitos de homologia, Morse, em 1935, conseguiu demonstrar a existência de infinitas geodésicas fechadas em variedades homeomorfas à esfera euclidiana n-dimensional.

Finalmente, em 1951, Lusternik e Fet, demonstraram a existência de pelo menos uma geodésica fechada em qualquer variedade riemaniana compacta, usando métodos de Birkhoff e Morse. A partir daí, a teoria desenvolveu-se consideravelmente com os trabalhos de Alber, Svarc, Fet, Gromoll, Meyer, Eliasson e Klingenberg [2].

Em 1961 [5], Olivier, usando sòmente métodos de deformação de curvas e conceitos de homotopia [6], deu uma demonstração simples do resultado de Fet-Lusternik, que é o teorema acima enunciado. Deste teorema, obtemos o seguinte corolário.

COROLÁRIO

Seja M uma variedade riemaniana compacta. Se M é simplesmente conexa, então existe em M pelo menos uma geodésica fechada, necessariamente nul-homotópica.

Prova:

Como M é simplesmente conexa, temos $H_n(M) \neq 0$, onde $n = \dim M$. Pelo Teorema do Isomorfismo de Hurewicz, segue-se que $\pi_n(M) \neq 0$.

Este trabalho está dividido em cinco capítulos, dis tribuídos da seguinte forma: no primeiro, introduzimos alguns conceitos de homotopia, estabelecendo definições e resultados básicos desta teoria. Os resultados mais importantes são a proposição 3.10 e a observação que lhe segue. Estes são utilizados diretamente na demonstração do teorema principal (teorema IV.4.1). Ainda, no final deste capítulo, introduzimos os conceitos fundamentais de deformação e K-deformação num espaço topológico.

No capítulo II trabalhamos apenas com geometria riemaniana. Aí definimos, via conexões afim, curvas geodésicas em uma variedade diferenciável, demonstrando um teorema de existência e unicidade destas curvas em uma variedade riemaniana. Estabelecemos, a seguir, as propriedades locais satisfeitas por uma curva geodésica. O resultado fundamental é o teorema 4.8.

No capítulo III obtemos resultados que relacionam os dois capítulos anteriores. Consideramos aí o espaço $\Omega^*(M)$ das curvas seccionalmente diferenciáveis em M, e introduzimos o espaço quociente $\overline{\Omega}(M)$ obtido de $\Omega^*(M)$ mediante a relação de equivalência que identifica curvas com o mesmo traço. Estudamos então a homotopia de $\overline{\Omega}(M)$ obtendo, como resultado principal, o teorema 3.3.

No capítulo IV demonstramos o teorema principal desta dissertação. Para isso, utilizamos alguns resultados adicionais que, por serem essencialmente técnicos, são apenas enunciados neste capítulo, tendo sua demonstração feita no capítulo V.

CAPÍTULO I

ALGUNS CONCEITOS DE HOMOTOPIA

1 - INTRODUÇÃO

Os primeiros itens deste capítulo (até o 3.9), têm por objetivo fixar notações e estabelecer definições de alguns conceitos básicos da teoria da homotopia, a serem utilizados posteriormente. Para a proposição 3.10, que é um resultado conhecido em homotopia, é dada uma demonstração detalhada, pois esta tem uma participação direta na demonstração do resultado principal desta dissertação.

Nos itens que se seguem, definimos o conceito de deformação num espaço topológico, e estabelecemos algumas de suas propriedades básicas. Para encerrar, introduzimos o conceito de K - deformação num espaço topológico, que, como será visto, desempenha um papel fundamental para consecução de nossos propósitos.

2 - ALGUMAS DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES PRELIMINARES

Dados espaços topológicos X e Y, denotamos por C(Y,X) o conjunto das aplicações contínuas de Y em X.

Uma curva em X é uma aplicação contínua $c:[a,b]\to X$. Em geral, usamos o intervalo real $[0,1]$ como domínio das curvas, e o denotamos por I. Uma curva constante em X é dita uma curva pontual; neste caso, se $x_0 \in X$ é tal que $c(t)=x_0, \forall t$, denotamos $c=\bar{x}_0$; uma curva é fechada se $c(0)=c(1)$. Finalmente , $c^{-1}(t) = c(1-t)$ define a curva inversa $c^{-1} : I\to X$.

Usamos ainda as seguintes notações:

$$\Omega(X) = C(I,X)$$

$$\Omega_{x_0}(X) = \{ c\in\Omega(X) \mid c(0) = c(1) = x_0 \} ,\ x_0\in X$$

$$\tilde{\Omega}(X) = \bigcup_{x_0\in X} \Omega_{x_0}(X)$$

Em C(Y,X), usamos a topologia compacto-aberta, que tem uma sub-base dada pelos conjuntos: $U_K =\{ h\in C(Y,X) \mid h(K)\subset U\}$, onde $K\subset Y$ é compacto e $U\subset X$ é aberto. Assim, um aberto em C(Y,X) é uma união arbitrária de interseções finitas de U_K's.

Se X é métrico e Y compacto, $\rho(h,h') = \max_{y\in Y} d(h(y),h'(y))$, onde d é a métrica de X, define uma métrica em C(Y,X). É fácil de verificar que a topologia induzida por ρ em C(Y,X) coincide com a topologia compacto-aberta de C(Y,X).

No que segue, X é sempre um espaço topológico.

3 - HOMOTOPIA DE CURVAS: O GRUPO FUNDAMENTAL $\pi_1(X)$ HOMOTOPIA DE APLICAÇÕES: OS GRUPOS $\pi_n(X)$, $n>1$

3.1 - COMENTÁRIOS

Poderíamos definir diretamente o conceito de homotopia de aplicações e obter daí, como caso particular, a homotopia de curvas e o grupo fundamental $\pi_1(X)$. Preferimos, entretanto, por razões de facilidade na exposição do assunto, dividi-lo em duas partes, como indica o título da seção.

3.2 - HOMOTOPIA DE CURVAS, PRODUTO DE CURVAS

Dizemos que duas curvas $c_1, c_2 : I \longrightarrow X$ são homotópicas quando existe uma aplicação contínua

$$F : I \times I \longrightarrow X$$

chamada homotopia de c_1 e c_2, tal que, $\forall s \in I$,

$$\text{(a)} \quad F(0,s) = c_1(s)$$

$$\text{(b)} \quad F(1,s) = c_2(s)$$

Quando a curva c_1 é fechada, isto é, $c_1 \varepsilon \tilde{\Omega}(X)$, exigimos sempre que todas as curvas da família $F(t,.)$, $t\varepsilon I$, também sejam fechadas, isto é,

(c) $F(t,0)=F(t,1)$

para cada $t\in I$. Em particular, c_2 é também fechada.

Uma curva fechada é dita nul-homotópica se for homotópica a uma curva pontual.

Usamos a notação $c_1 \cong c_2$ para denotar curvas homotópicas. Verifica-se que $\cong$ é uma relação de equivalência em $\Omega(X)$ e podemos falar em classes de homotopia de X.

Se c_1 é uma curva de x_0 a x_1 e c_2 uma curva de x_1 a x_2, a curva produto de c_1 por c_2, denotado por c_1c_2 ou c_1*c_2, é a curva de extremos x_0 e x_2 definida por:

$$(c_1*c_2)(t)=(c_1c_2)(t) = \begin{cases} c_1(2t) & \text{se } 0 \leqslant 2t \leqslant 1 \\ c_2(2t-1) & \text{se } 1 \leqslant 2t \leqslant 2 \end{cases}$$

Verifica-se que o produto de curvas é uma operação contínua, sendo, além disso, compatível com a relação $\cong$ de homotopia, isto é: se $c_1 \simeq c_1'$ e $c_2 \simeq c_2'$, então $c_1c_2 \simeq c_1'c_2'$ (desde que, como é óbvio, o ponto final de c_1 seja igual ao ponto inicial de c_2, valendo o mesmo para c_1' e c_2').

3.3 - HOMOTOPIA DE EXTREMOS FIXOS, O GRUPO FUNDAMENTAL

Para definir o grupo fundamental de X precisamos de um conceito mais restritivo de homotopia, como segue.

Sejam $c_1, c_2 : I \to X$ duas curvas com o mesmo ponto inicial x_0 e o mesmo ponto final x_1 (i.e., $c_1(0)=c_2(0)=x_0$ e $c_1(1)=c_2(1)=x_1$). Dizemos que c_1 e c_2 são homotópicas de extremos fixos se existe uma aplicação contínua $F: I\times I \to X$, chamada de homotopia de c_1 e c_2 com extremos fixos, tal que para cada $t,s \in I$

(a) $F(0,s)=c_1(s)$; $F(1,s)=c_2(s)$

(b) $F(t,0)=x_0$; $F(t,1)=x_1$

No caso de c_1 ser fechada é claro que c_2 é também fechada no mesmo ponto e cada curva da família $F(t,.)$ é também fechada no mesmo ponto.

Usamos a notação $c_1 \cong c_2$ rel $(0,1)$ para denotar curvas homotópicas de extremos fixos; é claro que se c_1 é fechada então $c_1 \cong c_2$ rel $(0,1)$ implica $c_1 \cong c_2$.

Verifica-se que $\cong$ rel $(0,1)$ é uma relação de equivalência em $\Omega(X)$; se $c \in \Omega_{x_0}(X)$ então a classe de c na relação $\cong$ rel $(0,1)$ está contida em $\Omega_{x_0}(X)$.

Definimos $\pi_1(X,x_o)$ como o conjunto das classes de equivalência $[c]$ de curvas $c\in\Omega_{x_o}(X)$ fechadas em x_o, segundo a relação de homotopia de extremos fixos:

$$\pi_1(X,x_o) = \Omega_{x_o}(X) \quad / \quad \cong \text{ rel } (0,1)$$

Verifica-se que o produto de curvas é compatível também com a homotopia de extremos fixos e podemos definir sem ambiguidade o produto de duas classes de homotopia de extremos fixos.

Em particular podemos definir o produto de duas classes de $\pi_1(X,x_o)$. O conjunto das curvas $c\in\Omega_{x_o}(X)$ tais que $c \cong \overline{x_o}$ rel $(0,1)$, isto é, tais que são nul-homotópicas de extremos fixos, é o elemento neutro deste produto de classes de $\pi_1(X,x_o)$.

3.4 - PROPOSIÇÃO

Para cada $x_o \in X$, o conjunto $\pi_1(X,x_o)$ forma um grupo em relação ao produto de classes

$$[c_1] \cdot [c_2] = [c_1 c_2]$$

e é denominado de grupo fundamental de X com ponto base x_o.

A demonstração de 3.4 é elementar e pode ser vista em [3; cap 2, § 1].

$\rceil$

Sendo X um espaço topológico arbitrário, não existe necessariamente qualquer relação entre $\pi_1(X,x_0)$ e $\pi_1(X,x_1)$, se $x_0 \neq x_1$. Para espaços conexos por caminhos, com os quais estaremos interessados mais estreitamente, vale o seguinte resultado geral:

3.5 - PROPOSIÇÃO

Seja X conexo por caminhos. Então $\pi_1(X,x_0)$ é independente de x_0 a menos de isomorfismo de grupos.

<u>Prova</u>:

Sejam x_0, $x_1 \in X$ e c_0 uma curva de x_0 a x_1. É fácil de ver, então, que a aplicação

$$\begin{aligned} \pi_1(X,x_0) &\longrightarrow \pi_1(X,x_1) \\ [c] &\longmapsto [c_0^{-1}\, c\, c_0] \end{aligned}$$

é de fato um isomorfismo, o que demonstra 3.5.

CONVENÇÃO

Todos os espaços topológicos considerados a partir de agora serão supostos conexos por caminhos.

3.6 - DEFINIÇÃO

Por 3.5, escrevemos $\pi_1(X)$ ao invés de $\pi_1(X,x_0)$. $\pi_1(X)$ é então chamado de grupo fundamental de X.

3.7 - DEFINIÇÃO

Para cada $x_0 \in X$, definimos os grupos $\pi_n(X,x_0)$, $n \geq 2$, indutivamente, por $\pi_n(X,x_0) = \pi_{n-1}(\Omega_{x_0}(X), \overline{x}_0)$, onde $\overline{x}_0$ é a curva pontual $\overline{x}_0(t) = x_0$, $\forall t \in I$.

Os grupos $\pi_n(X,x_0)$ são chamados de grupos de homotopia de X com ponto base x_0. Gostaríamos de falar, de um modo geral, nos grupos de homotopia $\pi_n(X)$, sem nos preocupar com o ponto base. Como X é conexo por caminhos, isto é possível, e decorre da seguinte proposição:

3.8 - PROPOSIÇÃO

Se $x_0, x_1 \in X$, então $\pi_n(X,x_0)$ é isomorfo a $\pi_n(X,x_1)$, $n > 1$.

<u>Prova</u>:

Não é difícil mostrar que se $c_0: I \longrightarrow X$ é um caminho ligando x_0 a x_1, então c_0 induz um isomorfismo.

$$(\overline{c}_0)_n : \pi_n(X,x_0) \longmapsto \pi_n(X,x_1) \quad , \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Para tal, usa-se indução sobre n, seguindo argumento semelhante ao da proposição 3.5.

$\rceil$

No que se segue, daremos uma interpretação dos grupos de homotopia $\pi_n(X)$, a ser utilizada ainda neste capítulo. Para tal, precisamos do conceito mais geral de homotopia de aplicações.

Nas seções restantes Y denota sempre um espaço topológico.

3.9 - DEFINIÇÃO

Duas aplicações contínuas $f, g : Y \longrightarrow X$ são ditas homotópicas, e escrevemos $f \simeq g$, se existe uma aplicação contínua

$$F : I \times Y \longrightarrow X$$

tal que, $\forall y \in Y$

$$\text{(a)} \quad F(0,y) = f(y)$$

$$\text{(b)} \quad F(1,y) = g(y).$$

F é dita uma homotopia para f e g.

Como em 3.2, é fácil de ver que $\simeq$ é uma relação de equivalência no espaço $C(Y,X)$.

Se f é homotópica a uma aplicação constante, então f é dita nul-homotópica.

Quando f e g são tais que $f|A = g|A$, onde $A \subset Y$ é um subespaço de Y, em analogia a definição de homotopia de curvas de extremos fixos dada em 3.3, dizemos que

$$f \simeq g \text{ rel } A$$

se existe:

$F : I \times Y \longrightarrow X$ contínua, satisfazendo:

(a) $F(0,y) = f(y)$, $\forall y \in Y$

(b) $F(1,y) = g(y)$, $\forall y \in Y$, e

(c) $F(t,y) = f(y) = g(y)$, $\forall y \in A$ e $\forall t \in I$.

Dado $x_0 \in X$ arbitrário, definimos $F_n(X) = \{f \in C(I^n, X) \mid f(\partial I^n) = \{x_0\}\}$, onde ∂I^n denota o bordo do n-cubo I^n em $\mathbb{R}^n$; assim, cada classe de $\pi_n(X,x_0)$ pode ser entendida como uma classe de equivalência da relação $\simeq$ rel ∂I^n em $F_n(X)$. De fato: para $n = 2$, se $\overline{\Omega}(X) = \{\overline{c} \in C(I, \Omega_{x_0}(X)) \mid \overline{c}(0) = \overline{c}(1) = \overline{x}_0\}$, onde $\overline{x}_0$ é a curva pontual igual a x_0, definimos $\phi : \overline{\Omega}(X) \longrightarrow F_2(X)$ por $\phi(\overline{c})(s,t) = \overline{c}(s)t$. É imediato verificar que ϕ é uma bijeção e que, além disso, temos $\overline{c} \simeq \overline{d}$ rel $(0,1)$ se, e somente se, $\phi(\overline{c}) \simeq \phi(\overline{d})$ rel ∂I^2. Desta forma, obtemos a afirmação alegada para $\pi_2(X,x_0)$. Por indução, estendemos esta interpretação a todos $\pi_n(X,x_o)$, $n \geq 2$.

Por último, se nós identificarmos ∂I^n com um ponto, mediante a relação de equivalência $\sim$ em I^n dado por $\alpha \sim \beta$ se, e somente se, α e β pertencem ambos a ∂I^n, nós obtemos a esfera S^n com um ponto base s_o. Assim, $\pi_n(X,x_o)$ pode ser interpretado como as classes de homotopia rel $\{s_o\}$ das aplicações de S^n em X que aplicam s_o em x_o $(n \geq 2)$.

No que segue, usamos tanto a primeira como a segunda interpretação de $\pi_n(X)$. Além disso, a identificação de S^n com $I^n/\sim$ nos permite entender cada aplicação $h: I^n \longrightarrow Z$, tal que $h(\partial I^n)$ = constante = z_o, onde Z é um espaço topológico arbitrário e $z_o \in Z$, como uma aplicação $h: S^n \longrightarrow Z$ tal que $h(s_o) = z_o$, e reciprocamente.

$\urcorner$

3.10 - PROPOSIÇÃO

Sejam $n \geq 2$, $x_o \in X$ e $s_o \in S^{n-1}$ arbitrários. Se cada aplicação contínua $h: S^{n-1} \to \Omega_{x_o}(X)$ tal que $h(s_o) = \bar{x}_o$ é nul-homotópica rel$\{s_o\}$ então $\pi_n(X,x_o)$ é trivial.

<u>Prova</u>:

Usando a primeira interpretação de $\pi_n(X,x_o)$ dada an teriormente, seja $h:I^n \to X$ tal que $h(\partial I^n) = \{x_0\}$. Então h induz uma aplicação $\bar{h}:I^{n-1} \to \Omega_{x_0}(X)$ dada por

$\bar{h}(s_1, \ldots, s_{n-1})s = h(s_1, \ldots, s_{n-1}, s)$, e temos $\bar{h}(\partial I^{n-1}) = \{\bar{x}_0\}$, onde como antes, $\bar{x}_0$ denota a curva constante e igual a x_0. Assim, $\bar{h}$ é nul-homotópica, e, portanto, $\bar{h} \simeq \bar{h}_0$ rel ∂I^{n-1}, onde $\bar{h}_0 : I^{n-1} \to \Omega_{x_0}(X)$ é tal que $\bar{h}_0(s) = \bar{x}_0$, $\forall s \in I^{n-1}$.

Se $\bar{F}:I \times I^{n-1} \to \Omega_{x_0}(X)$ é uma homotopia para $\bar{h}$ e $\bar{h}_0$, com $\bar{F}(I \times \partial I^{n-1}) = \{\bar{x}_0\}$ então $F:I \times I^n \to X$ dada por

$F(s,s_1,\ldots,s_n) = \bar{F}(s,s_1,\ldots s_{n-1})s_n$ é uma nul-homotopia para h rel ∂I^n : a continuidade de F decorre da continuidade de $\bar{F}$ e da continuidade de cada curva em $\Omega_{x_0}(X)$. Além disso, temos $F(I \times \partial I^n) = \{x_0\}$ e para $(s_1,\ldots,s_n) \in I^n$:

(a) $F(0,s_1,\ldots,s_n) = \bar{F}(0,s_1,\ldots s_{n-1})s_n = \bar{h}(s_1,\ldots,s_{n-1})s_n =$
$= h(s_1,\ldots,s_n)$

(b) $F(1,s_1,\ldots,s_n) = \bar{F}(1,s_1,\ldots,s_{n-1})s_n = \bar{h}_0(s_1,\ldots,s_{n-1})s_n =$
$= \bar{x}_0(s_n) = x_0$

$\rceil$

3.11 - OBSERVAÇÃO

Seja $h:S^n \to \Omega_{x_0}(X)$ uma aplicação contínua: cada curva da imagem $h(S^n)$ em $\Omega_{x_o}(X)$ é uma curva nul-homotópica em X.

De fato, interpretamos a aplicação h como uma aplicação contínua $h: I^n \to \Omega_{x_o}(X)$ tal que $h(\partial I^n)=\{\bar{x}_o\}$; dada $c \in h(I^n)$, existe $(u_1, \dots, u_n) \in I^n$ tal que $h(u_1,\dots,u_n)=c$. Assim, $c(t)=h(u_1,\dots,u_n)(t)$ e definimos

$$F: I\times I \to X$$

por $F(s,t) = h((1-s)u_1,\dots,(1-s)u_n)(t)$. Segue-se que F é contínua e temos, $\forall\ s,t \in I$,

a) $F(0,t) = h(u_1,\dots,u_n)(t) = c(t)$

b) $F(1,t) = h(0,\dots,0)(t) = \bar{x}_o(t) = x_o$.

c) $F(s,0) = x_o = F(s,1)$

de modo que c é nul-homotópica , como curva fechada, em X.

4 - DEFORMAÇÕES

4.1 - DEFINIÇÕES

Uma deformação do espaço topológico X é uma aplicação contínua $D: I\times X \to X$ tal que $D(0,x) = x, \forall x \in X$. Neste caso escrevemos $D(1,A)=\{D(1,a)\,|\,a\in A\}$ para qualquer $A\subset X$.

Dizemos que $A \subset X$ é retratável em $B \subset X$ ou que B é um retrato de deformação de A (em X) se existe uma deformação D de X tal que $D(1,A)=B$ e $D(t,b)=b$ para cada $t \in I$, $b \in B$.

Deformações de um mesmo espaço topológico podem ser somadas ou justapostas, produzindo novas deformações, como mostra a proposição a seguir.

4.2 - PROPOSIÇÃO

Dadas deformações $D_1, D_2 : I \times X \to X$, a aplicação $D_1 + D_2 : I \times X \to X$ definida por

$$(D_1 + D_2)(t,x) = \begin{cases} D_1(2t,x), & \text{se } 0 \leqslant 2t \leqslant 1 \\ D_2(2t-1, D_1(1,x)), & \text{se } 1 \leqslant 2t \leqslant 2 \end{cases}$$

é uma deformação de X, dita deformação soma de D_1 com D_2.

<u>Prova</u>:

A continuidade de $D_1 + D_2$ decorre diretamente da continuidade de D_1 e D_2 e do fato que, para $t = 1/2$, temos $D_1(2t,x) = D_2(2t-1, D_1(1,x))$, $\forall x \in X$.

Além disso, $(D_1 + D_2)(0,x) = D_1(0,x) = x$, $\forall x \in X$.

Podemos definir, indutivamente, uma soma de n deformações $D_1,\dots,D_n$, $n \geq 2$, por:

$$D_1 + D_2 + \dots + D_n \quad = \quad (D_1 + \dots + D_{n-1}) + D_n \quad .$$

4.3 - DEFINIÇÃO

Dadas uma deformação D de X e uma função $K : X \to \mathbb{R}$, dizemos que D é uma K-deformação se $K(D(t,x)) \leq K(x)$, $\forall x \in X$, $\forall t \in I$.

4.4 - PROPOSIÇÃO

Se $D_1, \dots, D_n$ são K-deformações em X, então $D = D_1 + \dots + D_n$ também é uma K-deformação em X.

<u>Prova</u>:

Para $n = 2$, obtemos: se $t \in [0,1/2]$, então $K((D_1 + D_2)(t,x)) = K(D_1(2t,x)) \leq K(x)$; se $t \in [1/2,1]$, então $K((D_1 + D_2)(t,x)) = K(D_2(2t-1, D_1(1,x))) \leq K(D_1(1,x)) \leq K(x)$.

Por indução, obtemos o resultado desejado para $n \geq 2$.

$\rceil$

4.5 - DEFINIÇÃO

Dizemos que uma seqüência $\{x_n\}$ em X é encurtada pela K-deformação $D : I \times X \to X$ se

$$\lim_{n\to\infty} [K(x_n) - K(D(1,x_n))] = 0.$$

CAPÍTULO II

CURVAS GEODÉSICAS EM VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

1 - INTRODUÇÃO

Duas são as formas habituais de se conceituar curva geodésica em uma variedade diferenciável: uma delas, mais próxima à física, é feita via cálculo das variações, onde se define curva geodésica como ponto crítico da função comprimento. Outra, mais ligada à geometria diferencial, é feita através das chamadas conexões afim, onde então se define geodésica como uma curva com aceleração nula. Por razões técnicas, preferimos a segunda forma para a conceituação de geodésica. No parágrafo que segue, fazemos um breve comentário sobre este ponto de vista, tentando dar uma idéia geral do mesmo.

O conceito de aceleração de curvas em variedades diferenciáveis

Enquanto que a velocidade em $\mathbb{R}^3$ de uma curva definida em uma superfície euclideana, é um conceito da "geometria intrínseca" da superfície, tal não ocorre com a aceleração em $\mathbb{R}^3$ desta curva. Isto é conseqüência de que, em geral, o vetor aceleração em $\mathbb{R}^3$ num ponto de uma curva em uma superfície não pertence ao espaço tangente à superfície no ponto considerado. Assim, enquanto a noção de velocidade de uma curva aparece naturalmente em variedades diferenciáveis, tal não ocorre com a aceleração. Tal noção então, para variedades diferenciáveis arbitrárias, é obtida através de uma axiomatização adicional, e que usualmente é feita através das já mencionadas conexões afim. Uma conexão afim numa variedade diferenciável é uma operação entre os campos de vetores da variedade satisfazendo propriedades usuais da derivação de campos de vetores da geometria euclideana.

Em uma variedade munida de uma conexão afim podemos falar em derivada de campos de vetores ao longo de curvas, sendo tal derivada denominada de derivada covariante. Em particular, surge o conceito de aceleração de uma curva, que é a derivada (covariante, então) do campo de vetores tangentes à curva; neste contexto, um campo de vetores com derivada covariante nula é paralelo, isto é, é constituído de vetores "paralelos".

<u>Geodésicas</u>

Com o exposto, curva geodésica numa variedade diferenciável com uma conexão afim, é definida como uma curva que tem aceleração nula ao longo de sua trajetória, isto é, cujo campo de vetores tangentes é paralelo.

Geodésicas em variedades riemanianas

No caso das variedades riemanianas, exige-se a compatibilidade da conexão afim com a métrica riemaniana, expressa através da derivada covariante da seguinte forma: "dois campos de vetores paralelos ao longo de uma mesma curva, devem manter um ângulo constante durante toda trajetória".

A exigência da compatibilidade da conexão afim com a métrica riemaniana, e uma condição adicional de simetria da conexão, implicam na existência e unicidade da conexão, dita então conexão riemaniana. Tal implicação é um resultado conhecido como teorema de Levi-Civita. Uma conseqüência deste fato é que as curvas geodésicas em uma variedade riemaniana ficam univocamente determinadas pela métrica riemaniana.

No que segue, daremos uma breve exposição formal dos conceitos discutidos nesta introdução, listando os principais teoremas sem demonstrá-los. As provas dos teoremas e detalhes adicionais podem ser encontrados em [1] e [4].

2 - CONEXÕES AFIM, CONEXÕES RIEMANIANAS

No que segue, M denotará uma variedade diferenciável de classe C^∞ n- dimensional, e $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M.

A palavra diferenciável deve ser entendida como C^∞ diferenciável.

2.1 - DEFINIÇÃO

Uma conexão afim ∇ em M é uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, denotada $(X,Y) \longmapsto \nabla_X Y$, tal que

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

ii) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

III) $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y$, onde $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ e f,g são funções em M de classe C^∞.

$\rceil$

Embora uma conexão afim tenha uma definição global, é, de fato, um conceito local. Verifica-se que, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$, $\nabla_X Y(p)$ depende unicamente de $X(p)$ e dos valores de Y ao longo de qualquer curva diferenciável $c : I \longrightarrow M$ tal que $\frac{dc}{dt}(t_0) = X(p)$ e $c(t_0) = p$, para algum $t_0 \in I$. A partir deste fato, introduzimos a seguir o conceito de derivada covariante. Lembremos que um campo de vetores V de classe C^∞ ao longo de uma curva diferenciável de classe C^∞ $c : I \longrightarrow M$ é uma aplicação $V : I \longrightarrow TM$, onde TM denota o fibrado tangente de M, tal que $V(t) \in T_{c(t)}M$, $\forall t \in I$.

2.2 - DEFINIÇÃO

Seja ∇ uma curva conexão afim em M. Dado um campo de vetores V diferenciável ao longo de uma curva diferenciável $c : I \longrightarrow M$, a derivada covariante de V é um campo de vetores ao longo de c, denotado por $\frac{DV}{dt}$, e definido por:

$$\frac{DV}{dt}(t) = \nabla_{\frac{dc}{dt}(t)} V(t)$$

O campo de vetores V é dito paralelo ao longo de c se $\frac{DV}{dt} = 0$ em I.

$\rceil$

Seja agora M uma variedade diferenciável riemaniana, e denotemos por $\langle\, ,\, \rangle$ a métrica riemaniana de M. Dados, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, existe um único campo de vetores $W \in \mathfrak{X}(M)$ tal que, $\forall Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos:

$$\langle W,Z\rangle = \frac{1}{2}\{X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle Y,X\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle - \langle [X,Y],Z\rangle\},$$

onde $[X,Z] = XZ - ZX$

Não é difícil mostrar que a aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M) \quad \text{tal que} \quad (X,Y) \longmapsto \nabla_X Y = W$$

satisfaz as propriedades i, ii e iii da definição 3.1, sendo, portanto, uma conexão afim em M. É fácil de ver, além disso, que ∇ é simétrica, isto é, $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, e que ∇ é compatível com a métrica $\langle , \rangle$, no seguinte sentido: se P e P' são dois campos de vetores paralelos ao longo de uma curva $c : I \longrightarrow M$ (i.é.: $\frac{DP}{dt}(t) = \frac{DP'}{dt}(t) = 0$, $\forall t \in I$), então $\langle P(t), P'(t)\rangle =$ constante, $\forall t \in I$.

Pode-se mostrar, também, que se ∇' é uma conexão afim simétrica em M, e compatível com a métrica $\langle , \rangle$, então $\nabla' = \nabla$. Estes resultados constituem o teorema de Levi-Civita, enunciado como segue:

2.3 - TEOREMA

Existe uma única conexão simétrica em M, dita conexão riemaniana de M, compatível com a métrica de M.

A partir de agora, a menos de referência explícita em contrário, M denotará uma variedade diferenciável riemaniana de classe C^∞ e dimensão n. Tendo em vista o último resultado, em caso de omissão, estará implícita a conexão riemaniana associada à variedade riemaniana considerada.

3 - GEODÉSICAS, EXISTÊNCIA E UNICIDADE - APLICAÇÃO EXPONENCIAL

3.1 - ALGUMAS NOTAÇÕES E DEFINIÇÕES BÁSICAS

Uma curva $c : [a,b] \longrightarrow M$ é dita seccionalmente diferenciável se existe uma partição $\{t_0,\dots,t_m\}$ de $[a,b]$ tal que $c|[t_i,t_{i+1}]$, $i = 0,1,\dots,m-1$, é diferenciável. Quando c é seccionalmente diferenciável, o comprimento de c, denotado por $\ell(c) = \ell_a^b(c)$, é dado por:

$$\ell(c) = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left|\frac{dc}{dt}(t)\right| dt$$

Se $s,t \in [a,b]$, com $s \leq t$, então $\ell_s^t(c)$ denota o comprimento de $c|[s,t]$.

Uma curva seccionalmente diferenciável $c:[a,b] \longrightarrow M$ é dita uma curva regular se $\frac{dc}{dt} \neq 0$ em $[a,b]$.

<u>Reparametrização de curvas;</u>
<u>Parâmetro proporcional ao comprimento de arco</u>

Dadas duas curvas seccionalmente diferenciáveis $c:[a,b] \longrightarrow M$ e $c':[c,d] \longrightarrow M$, dizemos que c' é uma reparametrização diferenciável de c se existe um difeomorfismo $\phi:[c,d]\to[a,b]$ tal que $c' = c\circ\phi$, com $\phi(c) = a$ e $\phi(d) = b$.

É imediato verificar que o conceito acima define uma relação de equivalência no conjunto das curvas seccionalmente diferenciáveis. Além disso, todas as curvas de uma mesma classe têm a mesma imagem (traço) na variedade.

Dizemos que uma curva seccionalmente diferenciável $c: [a,b] \to M$ está parametrizada com parâmetro proporcional ao comprimento de arco se, para todo $t\in [a,b]$, temos

$$\ell_a^t(c) = \frac{t-a}{b-a}\,\ell(c).$$

Não é difícil mostrar o seguinte resultado: dada uma curva regular ou uma curva pontual $c: [a,b]\to M$, existe uma única reparametrização diferenciável $c_a:I\to M$ de c, tal que c_a está parametrizada com parâmetro proporcional ao comprimento de arco, isto é, $\ell_o^t(c_a) = t\ell(c_a)$, $\forall t\in I$.

3.2 - CURVAS GEODÉSICAS

3.2.1 - DEFINIÇÃO

Uma curva diferenciável $g: [a,b]\to M$ é dita uma curva geodésica se $\frac{D}{dt}\left(\frac{dg}{dt}\right) = 0$ em $[a,b]$.

<u>Obs</u>: É conveniente, quando possível, o uso do intervalo I como domínio das curvas. Em caso de omissão do domí-

nio, este deve ser suposto como o intervalo I.

$\urcorner$

Como o campo de vetores tangente a uma geodésica é paralelo, obtemos $< \frac{dg}{dt}, \frac{dg}{dt} >$ = constante = k^2, pela compatibilidade da conexão riemaniana com a métrica $< , >$. Segue-se que $\ell_0^t (g) = kt = \ell(g)t$, ou seja, o comprimento de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco. Excluiremos as geodésicas pontuais $(k=0)$. Assim, toda geodésica é uma curva regular.

3.2.2 - EXISTÊNCIA E UNICIDADE

No que segue, estabelecemos as equações diferenciais satisfeitas por uma geodésica em uma carta local de M. Introduzindo o fibrado tangente, obtemos neste um sistema de equações, equivalente ao anterior, que, junto com um teorema de equações diferenciais ordinárias, nos fornece um teorema de existência e unicidade de curvas geodésicas em M.

$\urcorner$

Seja g uma curva diferenciável em M e seja $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ uma carta local em M com $x(U) \cap g(I) \neq \emptyset$. Se

$x^{-1}(g(t)) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ é a expressão local de $g(t)$, e se $X_i = X_i(t) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(t)$, então

$$\frac{dg}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{dx_j}{dt} X_j .$$

Decorre então da definição de derivada covariante e das propriedades i, ii e iii da definição 2.1, que:

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{dg}{dt}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}\right)X_k,$$

onde Γ_{ij}^{k} são funções em M tais que

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} X_k, \; k = 1,2,\ldots,n$$

Assim, g é uma geodésica se, e somente se,

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0 \qquad k=1,2,\ldots,n$$

Como qualquer curva diferenciável g em M determina uma curva $t \to (g(t), \frac{dg}{dt}(t))$ no fibrado tangente TM, decorre que g é geodésica se, e somente se, a curva

$$t \mapsto (x_1(t),\ldots, x_n(t), \frac{dx_1}{dt}(t),\ldots, \frac{dx_n}{dt}(t)),$$

satisfaz o sistema

$$(*) \quad \left|\begin{array}{l} \dfrac{dx_k}{dt} = y_k \\[2ex] \dfrac{dy_k}{dt} = - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}\, y_k y_j \quad , \quad k=1,2,\ldots,n \end{array}\right.$$

na carta coordenada $TU = U \times \mathbb{R}^n$ de TM. Em cada TU obtemos, assim, pela unicidade das soluções do sistema de equações diferenciais (*), um único campo G_{TU} em TU cujas trajetórias são da forma $t \mapsto (g(t), \frac{dg}{dt}(t))$, onde g é uma geodésica em U. O seguinte resultado é imediato:

3.2.3 - PROPOSIÇÃO

Existe um único campo G em TM, dito campo geodésico em TM, cujas trajetórias são da forma

$$t \mapsto (g(t), \frac{dg}{dt}(t)),$$

onde g é uma geodésica em M.

$\urcorner$

É imediato verificar que se g é uma geodésica em M, então $h: [0, \frac{1}{a}] \longrightarrow M$, $a > 0$, dada por $h(t) = g(at)$ é também uma geodésica em M. Esta homogeneidade permite dar a seguinte caracterização do fluxo definido pelo campo geodésico:

3.2.4 - TEOREMA

Para todo ponto $p \in M$, existem uma vizinhança $V = V_p$ de p e um número $\varepsilon = \varepsilon_p > 0$ tais que para cada $q \in V$ e para cada vetor $v \in T_qM$, com $|v| \leqslant \varepsilon$, existe uma única geodésica

$$g : (-2,2) \longrightarrow M$$

satisfazendo $\quad g(0) = q \quad e \quad \frac{dg}{dt}(0) = v.$

3.3 - APLICAÇÃO EXPONENCIAL

Dado $p \in M$, pelo teorema 3.2.4, existe uma bola $B_\varepsilon(0)$ em T_pM de centro na origem e raio $\varepsilon > 0$ tal que a aplicação

$$\exp_p : B_\varepsilon(0) \longrightarrow M \quad \text{dada por}$$

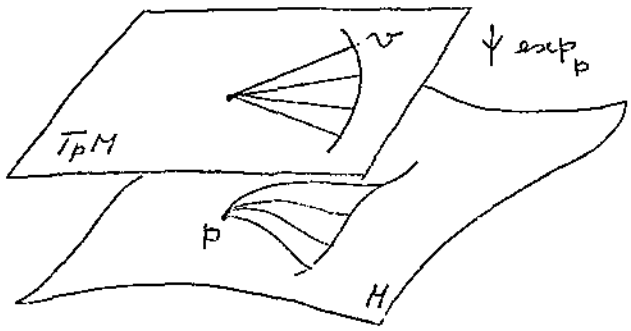
$$\exp_p(v) = g(1)$$

está bem definida, sendo $g : (-2,2) \to M$ a geodésica (única) satisfazendo $g(0) = p$ e $\frac{dg}{dt}(0) = v$.

Desde que o fluxo geodésico é C^∞, para cada $p \in M$, a aplicação $\exp_p$, dita aplicação exponencial em p, é também C^∞.

É fácil de ver, então, que a geodésica g é definida por $g(t) = \exp_p(tv)$, $t \in I$. Além disso, se $t \mapsto v(t)$ é uma curva diferenciável em T_pM tal que $|v(t)| = 1$, então, para cada $r_o \in \mathbb{R}$ com $0 < r_o \leq \varepsilon$, a curva $t \mapsto \exp_p(r_o v(t))$ é ortogonal à geodésica $r \mapsto \exp_p(rv(t_o))$, para cada $t_o \in (-2,2)$. A demonstração de tal resultado, conhecido como Lema de Gauss, pode ser vista em [1; p. 59].

Se $g:(-2,2) \to M$ é a única geodésica tal que $g(0) = p$ e $\frac{dg}{dt}(0) = v$, é claro que $\ell_o^t(g) = t|v|$, $0 \leq t \leq 1$; em particular $\ell_o^1(g) = |v| = \left|\frac{dg}{dt}(o)\right|$.



Observemos, por fim, que $d(\exp_p)(0)$ é a identidade em T_pM, donde decorre que $\exp_p$ é um difeomorfismo local numa vizinhança de 0 em T_pM.

4 - GEODÉSICAS: PROPRIEDADES LOCAIS

4.1 - INTRODUÇÃO

Nesta seção, demonstramos dois resultados fundamentais sobre propriedades locais das geodésicas, a serem utilizados nos capítulos que se seguem.

Para tal, será conveniente introduzirmos as seguintes notações. Se $\exp_p$ é um difeomorfismo em uma vizinhança V da origem em T_pM, $U = \exp_p V$ é chamada de vizinhança normal de p. Se $B_\varepsilon(0) \subset V$, chamamos $B_\varepsilon(p) = \exp_p B_\varepsilon(0)$ de bola normal de centro p e raio ε em M.

4.2 - TEOREMA

Dado $p \in M$, sejam U uma vizinhança normal de p e $B \subset U$ uma bola normal de centro p. Seja g uma geodésica em M contida em B tal que $g(0)=p$. Se c é uma curva seccionalmente dife renciável em M tal que $c(0) = g(0)$ e $c(1) = g(1)$, então

$$\ell(g) \leqslant \ell(c).$$

Além disso, se $\ell(g) = \ell(c)$, então $g(I) = c(I)$.

Prova:

Suponhamos inicialmente que $c(I) \subset \overline{B}$, onde $\overline{B}$ denota o fecho de B. Seja $\bar{t}$ o maior número em $[0,1)$ tal que $c(\bar{t}) = p$. É suficiente mostrar então que $\ell(g) \leqslant \ell_{\bar{t}}^{1}(c)$; note: $c(1) = g(1) \neq p$.

Seja $\bar{c} = c \mid [\bar{t},1]$. Como $\exp_p$ é um difeomorfismo sobre U, podemos definir uma curva $c_T : [\bar{t},1] \to T_pM$, pondo

$$c_T(t) = \exp_p^{-1}(\bar{c}(t)).$$

c_T é então seccionalmente diferenciável.

Podemos escrever, para $t \in (\bar{t},1]$,

$$c_T(t) = |c_T(t)| \frac{c_T(t)}{|c_T(t)|} = r(t)v(t), \text{ onde então}$$

$r = |c_T| : (\bar{t},1] \to \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente diferenciável e positiva, e $v = \frac{c_T}{|c_T|} : (\bar{t},1] \to T_pM$ é uma curva seccionalmente diferenciável satisfazendo $|v(t)| = 1$, $t \in (\bar{t},1]$.

Assim, $\forall t \in (\bar{t},1]$, temos $\bar{c}(t) = f(r(t),t)$, onde

$f(r,t) = \exp_p r\, v(t)$, e obtemos

$$\frac{d\bar{c}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}, \text{ donde}$$

$$\left|\frac{d\bar{c}}{dt}\right|^2 = \left\langle \frac{d\bar{c}}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle =$$

$$= (\frac{dr}{dt})^2 \, |\frac{\partial f}{\partial r}|^2 + 2 \frac{dr}{dt} < \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} > + |\frac{\partial f}{\partial t}|^2.$$

Pelo lema de Gauss citado em 3.3, temos $< \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} > = 0$, bem como $|\frac{\partial f}{\partial r}| = 1$, obtendo: $|\frac{d\bar{c}}{dt}|^2 = |\frac{dr}{dt}|^2 + |\frac{\partial f}{\partial t}|^2 \geq |\frac{dr}{dt}|^2$.

Segue-se que $\int_\alpha^1 |\frac{d\bar{c}}{dt}| dt \geq \int_\alpha^1 |\frac{dr}{dt}| dt \geq \int_\alpha^1 \frac{dr}{dt} dt = r(1) - r(\alpha)$, $\alpha \in (\bar{t}, 1]$.

Como $r(1) = |c_T(1)| = |\exp_p^{-1} \bar{c}(1)| = |\exp_p^{-1} g(1)| = |\frac{dg}{dt}(0)| = \ell(g)$, fazendo $\alpha \to \bar{t}$, obtemos $\ell_{\bar{t}}^1 (c) \geq \ell(g)$.

Suponhamos agora que $\ell(c) = \ell(g)$. Então $\ell_{\bar{t}}^1(c) = \ell(g)$ e obtemos $|\frac{\partial f}{\partial t}| = 0$. Segue-se que $v(t)$ = constante e $r'(t) > 0$, $\forall t \in (\bar{t}, 1]$. Portanto, $\bar{c}$ é uma reparametrização monótona de g, donde $c(I) = \bar{c}([\bar{t}, 1]) = g(I)$.

Se $c(I) \not\subset \bar{B}$, seja t_1 o menor valor do parâmetro t em I tal que $c(t_1)$ pertence à fronteira de B. Se $\rho > 0$ é o raio da bola normal B, temos:

$$\ell(c) \geq \ell_0^{t_1}(c) \geq \rho \geq \ell(g).$$

$\rceil$

O teorema 4.2 nos permite introduzir uma métrica em M que induz em M uma topologia equivalente à topologia inicial de M. São nossos próximos resultados:

4.3 - PROPOSIÇÃO

Dados $p, q \in M$, seja $d(p,q)$ = ínfimo dos comprimentos das curvas seccionalmente diferenciáveis ligando p a q. Então (M,d) é um espaço métrico.

Prova:

A única condição a ser demonstrada para que d seja uma métrica em M que não decorre da definição de ínfimo e na qual usamos o teorema anterior, é a seguinte: se $d(p,q)=0$, então $p=q$. Admitindo $d(p,q)=0$, suponhamos $p\neq q$. Seja $B_r(p)$ uma bola normal de centro p e raio $r>0$ que não contém q. Como $d(p,q)=0$, existe uma curva c seccionalmente diferenciável ligando p a q tal que $\ell(c)<r$. Mas se $\bar{c}=c|[0,\bar{t}]$ é o arco de c contido em $B_r(p)$, temos, pelo teorema anterior,

$$r\leq \ell_0^{\bar{t}}(c)\leq \ell(c),$$

o que é uma contradição.

$\urcorner$

Chamamos de geodésica minimizante toda geodésica cujo comprimento é menor que o comprimento de qualquer curva seccionalmente diferenciável que une seus extremos. Assim, dados $p,q\in M$, se existe uma geodésica minimizante ligando p a q, então $d(p,q)=\ell(g)$. Deste fato, e do teorema anterior, segue-se que se r é suficientemente pequeno, então a bola normal de raio r coincide com a bola métrica de raio r, e reciprocamente. Obte mos assim o seguinte resultado:

4.4 - PROPOSIÇÃO

A topologia induzida por d em M coincide com a topologia inicial de M.

4.5 - TEOREMA

Para cada $p \in M$, existem uma vizinhança $W = W_p$ de p em M e um número $\delta = \delta_p > 0$ tais que:

i) Dois pontos quaisquer de W são ligados por uma única geodésica minimizante de extremos nestes pontos e de comprimento menor que δ.

ii) Dados $q_1, q_2 \in W$, a geodésica determinada em (i) por ligar q_1 a q_2 depende diferenciavelmente de q_1 e q_2, no seguinte sentido: se $t \mapsto \exp_{q_1}(tv)$, $t \in I$, é a geodésica ligando q_1 a q_2, então o par $(q_1, v) \in TM$ depende diferenciavelmente de (q_1, q_2).

Prova de (i) e (ii)

Dado $p \in M$, a aplicação $(q,v) \mapsto \exp_q v$ está definida, conforme teorema 3.2.4 deste capítulo, para q pertencente a uma vizinhança $V = V_p$ de $p \in M$ e para v pertencente a uma bola $B = B_\varepsilon(0)$ de centro na origem em T_qM e raio $\varepsilon > 0$. Denotando $\bar{U} = \{(q,v) \in TM \mid q \in V,\ v \in T_qM,\ |v| < \varepsilon\}$, fica bem definida a aplicação $F : \bar{U} \to M \times M$ dada por $F(q,v) = (q, \exp_q v)$.

Como $d(\exp_p)(0)$ é a identidade em T_pM, decorre que F é um difeomorfismo local numa vizinhança de $(p,0)\in TM$. Assim, F aplica difeomorficamente uma vizinhança $\overline{U}'$ de $(p,0)$ em TM sobre uma vizinhança W' de $F(p,0) = (p,p)$ em $M \times M$. Podemos supor $\overline{U}'$ da forma

$$\overline{U}' = \{(q,v) \in TM \mid q \in V', v \in T_qM, |v| < \delta\} \text{ , onde}$$

$V' \subset V$ é uma vizinhança de p em M e $\delta > 0$.

Escolhendo agora uma vizinhança W de p em M tal que $W \times W \subset W'$, é imediato verificar que W e δ satisfazem o enunciado de i e ii.

$\rceil$

4.6 - OBSERVAÇÃO

Dado $p \in M$ e W como antes, é possível determinarmos uma vizinhança $\overline{W} \subset M$ de p, dita vizinhança convexa de p, de tal forma que se $q_1, q_2 \in \overline{W}$, então a geodésica determinada univocamente por ligar q_1 a q_2 está inteiramente contida em $\overline{W}$ [2, p.65]

$\rceil$

Da diferenciabilidade do fluxo geodésico e do teorema anterior, obtemos o seguinte resultado:

4.7 - COROLÁRIO

Dado $p \in M$, seja W como no teorema anterior. Para $q_1, q_2 \in W$, denotemos por $g(q_1,q_2)$ a geodésica (única) ligando q_1 a q_2. Então a aplicação $(q_1,q_2,t) \mapsto g(q_1,q_2)(t)$, $q_1,q_2 \in W$, $t \in I$, é contínua e é diferenciável para $q_1 \neq q_2$.

$\urcorner$

Para variedades riemanianas compactas, nas quais estamos diretamente interessados, decorre dos teoremas anteriores o seguinte resultado geral:

4.8 - TEOREMA

Seja M uma variedade riemaniana compacta de classe C^∞ e dimensão n. Existe então um número $\delta = \delta(M) > 0$ com as seguintes propriedades:

(a) Cada geodésica de comprimento menor ou igual a δ é minimizante.

(b) Se $p, q \in M$ são tais que $d(p,q) \leqslant \delta$, então existe uma única geodésica de comprimento menor do que ou igual a δ (uma geodésica minimizante, por (a)) que une p a q.

(c) Para cada $p \in M$, a aplicação de $B_{\delta/2}(p) \times B_{\delta/2}(p) \times I$ em M dada por $(q_1,q_2,t) \mapsto g(q_1,q_2)(t)$ é contínua e é diferenciável para $q_1 \neq q_2$.

(Observação: como no corolário 4.6, $g(q_1,q_2)$ denota a geodésica ligando q_1 a q_2).

Prova:

É suficiente cobrir M por abertos W_α dados pelo teorema 4.5, e tomar δ como o número de Lebesque desta cobertura; assim, se $q_1, q_2 \in M$ são tais que $d(q_1,q_2) \leq \delta$, então q_1, q_2 pertencem a um W_α comum.

$\rceil$

4.9 - COROLÁRIO

Seja $c : I \longrightarrow M$ seccionalmente diferenciável e parametrizada com parâmetro proporcional ao comprimento de arco. Suponhamos que c satisfaz a seguinte condição: dados dois pontos quaisquer $p, q \in c(I)$ tais que $p = c(s)$ e $q = c(t)$, $s \leq t$, se $d(p,q) \leq \delta$, então $d(p,q) = \ell_s^t(c)$. Então c é uma geodésica.

Prova:

Provemos que $\frac{D}{dt}\left(\frac{dc}{dt}\right)$ é identicamente zero em I. Seja $t \in I$, e consideremos a bola normal $B_{\delta/2}(c(t))$. Existe um intervalo fechado $J \subset I$ com interior não vazio, e com $t \in J$, tal que $c(J) \subset B_{\delta/2}(c(t))$. Segue-se que $c : J \longrightarrow M$ é uma curva seccionalmente diferenciável ligando dois pontos da bola normal $B_{\delta/2}(c(t))$. Das hipóteses e do teorema 4.2, segue-se que c é uma geodēsica em J, e, portanto, em t, isto ē, $\frac{D}{dt}(\frac{dc}{dt})=0$.

$\rceil$

4.10 - GEODÉSICAS FECHADAS

Uma geodésica fechada é uma geodésica $g:I\to M$ tal que $g(0)=g(1)$ (isto é , g é também uma curva fechada) e tal que o produto

$$g_0 * g_1 : I \to M$$

é uma geodésica, onde $g_0:[0,1/2]\to M$ é a restrição $g_0(t)=g(t+1/2)$ e $g_1:[1/2,1]\to M$ é a restrição $g_1(t)=g(t-1/2)$.

Em outras palavras, uma curva fechada é uma geodésica fechada se o segmento final e o inicial são uma mesma geodésica pelo ponto inicial.

É claro, pelo corolário acima, que uma curva fechada $g:I\to M$ é uma geodésica fechada se e somente se g é uma geodésica e se existem $0<s<t<1$ tais que

$$d(g(t),\ g(s))= \ell_t^1(g) + \ell_0^s(g).$$

$\rceil$

CAPÍTULO III

O ESPAÇO $\overline{\Omega}(M)$

1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo relacionamos e desenvolvemos alguns dos conceitos apresentados anteriormente. Obtemos então resultados a serem empregados nas seções restantes. No que segue, M denotará uma variedade riemaniana C^{∞} (não necessariamente compacta).

Introduzimos já no capítulo I o conjunto $\Omega(M)$ das curvas contínuas em M, que, como foi mencionado, é um espaço métrico com a métrica dada por $\rho(c,c') = \max_{t\in I} d(c(t), c'(t))$. Como agora precisamos falar em comprimento de curvas, introduzimos o espaço $\Omega^*(M)$, constituído de todas curvas seccionalmente diferenciáveis e regulares em M mais as curvas pontuais (Note que $\Omega^*(M) \not\subset \Omega(M)$, pois não exigimos que o domínio das curvas de $\Omega^*(M)$ seja o intervalo $I = [0,1]$).

Entretanto, o conceito de curva como aplicação é geral demais para nossos propósitos, pois o que nos interessa, fundamentalmente, é o traço de cada curva na variedade. Sendo assim, consideramos o espaço quociente $\overline{\Omega}(M)$ obtido de $\Omega^*(M)$

mediante a relação de equivalência que identifica curvas com o mesmo traço.

A seguir, damos uma definição formal do conjunto $\overline{\Omega}(M)$, dotamo-lo de uma métrica $\overline{\rho}$ especial e estabelecemos alguns resultados a serem empregados posteriormente.

2 - O ESPAÇO $\overline{\Omega}(M)$

A proposição que se segue é de demonstração imediata.

2.1 - PROPOSIÇÃO

A relação em $\Omega^*(M)$ definida por $c \approx d$ se, e só se, d é uma reparametrização diferenciável de c é uma relação de equivalência em $\Omega^*(M)$.

2.2 - NOTAÇÕES

Dada uma curva $c \in \Omega^*(M)$, $\overline{c}$ denotará a classe de equivalência de c mediante a relação de equivalência $\approx$. Denotaremos por $\overline{\Omega}(M)$ o conjunto de todas as classes de equivalência $\overline{c}$ para $c \in \Omega^*(M)$.

Dado $p \in M$, usamos ainda a notação $\overline{\Omega}_p(M)$ para representar as classes de $\overline{\Omega}(M)$ constituídas por curvas fechadas.

em p; finalmente, $\bar{\Omega}_o(M) = \bigcup_{p\in M} \vec{\Omega}_p(M)$ é o conjunto de todas as classes de curvas fechadas de $\bar{\Omega}(M)$.

2.3 - PROPOSIÇÃO

Dado $\bar{c} \in \bar{\Omega}(M)$, existe uma única curva $c_a : I \to M$ parametrizada com parâmetro proporcional ao comprimento de arco tal que $\overline{c_a} = \bar{c}$.

Prova:

Decorre do observado em II.3.1.

2.4 - DEFINIÇÃO

Dado $\bar{c} \in \bar{\Omega}(M)$ e $s,t \in I$, $s \leq t$, o arco $\bar{c}(s,t)$ de $\bar{c}$ é definido por $\bar{c}(s,t) = \overline{c_a(s,t)}$, onde $c_a(s,t) : [s,t] \longrightarrow M$ é dado por $c_a(s,t)(u) = c_a(u)$.

2.5 - CONVENÇÃO

Em todo texto posterior, identificamos cada classe $\bar{c}$ de $\bar{\Omega}(M)$ com a curva c_a, conforme proposição 2.3 anterior. Escrevemos, ainda, c, ao invés de c_a. Com esta convenção, dado $s,t \in I$, $s \leq t$, temos $c(s,t) \equiv \overline{(c_a(s,t))_a}$.

Na proposição seguinte definimos uma métrica em $\bar{\Omega}(M)$. A demonstração da proposição é imediata.

2.6 - PROPOSIÇÃO

A aplicação $\bar{\rho} : \bar{\Omega}(M) \times \bar{\Omega}(M) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{\rho}(c,c') = \max_{t\in I} d(c(t), c'(t)) + |\ell(c) - \ell(c')|$$ é uma métrica em $\bar{\Omega}(M)$.

$\rceil$

Decorre da proposição 2.6, diretamente, o seguinte resultado.

2.7 - PROPOSIÇÃO

A aplicação $\ell:\bar{\Omega}(M)\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $c\mapsto \ell(c)$ é contínua.

$\rceil$

Observamos que se tomássemos em $\bar{\Omega}(M)$ apenas a métrica do max, não obteríamos a continuidade da função ℓ. Isto é uma justificativa para o aparecimento do módulo da diferença dos comprimentos em 2.6.

2.8 - COROLÁRIO

Dado $p\in M$, seja W dado pelo teorema II.4.5. Então a função de $W\times W$ em $\mathbb{R}$ dada por $(p,q)\mapsto \ell(g(p,q))$ é contínua (como antes, $g(p,q)$ denota a geodésica minimizante ligando p a q).

Prova:

A prova desta proposição é conseqüência direta do item (ii) do teorema II.4.5 e da proposição acima.

2.9 - PROPOSIÇÃO

A aplicação de $\overline{\Omega}(M) \times I$ em M dada por $(c,s) \longmapsto c(s)$ é contínua.

Prova:

Sejam (c_n) e (s_m) seqüências em $\overline{\Omega}(M)$ e I, respectivamente, e tais que $\lim\limits_n c_n = c$ e $\lim\limits_m s_m = s$. Então, $\forall n, m \in \mathbb{Z}^+$, temos:

$$d(c(s), c_n(s_m)) \leqslant d(c(s), c(s_m)) + d(c(s_m), c_n(s_m)) \leqslant \ell_s^{s_m}(c) +$$

$$+ \max_{t \in I} d(c(t), c_n(t)) \leqslant [s_m - s]\,\ell(c) + \overline{\rho}(c, c_n).$$

Assim, obtemos $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(c(s), c_n(s_m)) = 0$, donde $\lim\limits_{n,m\to\infty} (c_n(s_m)) = c(s)$.

2.10 - PRODUTO DE CURVAS EM $\overline{\Omega}(M)$

No capítulo I, seção 3.2, definimos o produto de curvas, e comentamos que tal produto é uma operação contínua no espaço de curvas considerado. Podemos também aqui definir o produto de curvas de maneira análoga. Entretanto, um cuidado especial deve ser tomado ao multiplicarmos curvas pontuais com curvas regulares, pois o produto de duas curvas deste tipo como definido no cap. I, não tem como resultado uma curva de $\overline{\Omega}(M)$ (i.é.: não é nem uma curva regular nem pontual). Tendo em vista (conforme comentado na introdução deste capítulo), que o fundamental é o traço da curva na variedade, faz sentido definir o produto de uma curva pontual por uma curva regular co mo a própria curva regular. É simples mostrar que o produto de curvas em $\overline{\Omega}(M)$ considerado desta forma está bem definido e é contínuo.

3 - HOMOTOPIA NO ESPAÇO $\overline{\Omega}(M)$

3.1 - PROPOSIÇÃO

Toda curva (fechada) em M é homotópica a uma curva (fechada) regular em M.

Prova:

Dada $c: I \to M$ contínua, cobrimos $c(I)$ com um número finito de vizinhanças coordenadas. Escolhemos, em cada vizinhança coordenada, uma curva regular c'. Como o produto de curvas é uma operação contínua, e, como em cada vizinhança coordenada o segmento de c compreendido nesta vizinhança é homotópico a c', o resultado se segue.

3.2 - PROPOSIÇÃO

Seja Y um espaço topológico qualquer. Dado $p \in M$, se existe $f: Y \to \Omega_p(M)$ não nul-homotópica, então existe $\overline{f}: Y \to \overline{\Omega}_p(M)$ não nul-homotópica.

Prova:

Não fazemos uma demonstração detalhada, e sim apenas um esboço desta. Uma prova razoavelmente completa pode ser vista em [4; pp.93 e 150].

A proposição fica demonstrada se encontrarmos uma aplicação contínua $h : \Omega_p(M) \to \overline{\Omega}_p(M)$ tal que $i \circ h$ é homotópica à aplicação identidade em $\Omega_p(M)$, onde, aqui, i denota a inclusão $i : \overline{\Omega}_p(M) \to \Omega_p(M) \mid i(c) = c$. De fato: supondo a existência de tal aplicação h, se $f : Y \to \Omega_p(M)$ não é nul-homotópica, então é imediato verificar que a aplicação $h \circ f : Y \to \overline{\Omega}_p(M)$ não é nul-homotópica.

A existência de h pode ser provada como segue. Seja $\{N_\alpha\}_{\alpha \in II}$ uma cobertura de M constituída de vizinhanças convexas de M (conforme obs. II.4.6). Subdividimos o intervalo I em 2^k subintervalos $[(j-1)/2^k, j/2^k]$, e definimos os subconjuntos $\Omega_k(M)$ de $\Omega_p(M)$ como sendo os conjuntos formados por todas das curvas contínuas $c \in \Omega_p(M)$ tais que a imagem por c de cada subintervalo $[(j-1)/2^k, j/2^k]$ cai em alguma vizinhança convexa N_α da cobertura.

Verifica-se que cada $\Omega_k(M)$ é aberto em $\Omega_p(M)$, e que $\Omega_p(M)$ é a união da seqüência $\Omega_1(M) \subset \Omega_2(M) \subset \Omega_3(M) \subset \ldots$

Analogamente, os subconjuntos $\overline{\Omega}_k(M) = i^{-1}(\Omega_k(M))$ formam uma seqüência ascendente por inclusão de abertos cuja união é $\overline{\Omega}_p(M)$.

Definamos $h_k : \Omega_k(M) \to \overline{\Omega}_k(M)$ da seguinte forma:

$$h_k(c)(t) = \begin{cases} c(t), \text{ se } t = \frac{j}{k},\ j = 0,1,\ldots,2^k \\ g(t), \text{ onde } g \text{ é a geodésica minimizante li-} \\ \text{gando } c(\frac{j-1}{2^k}) \text{ a } c(\frac{j}{2^k}) \text{ se } t \in (\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}), \\ j = 1,2,\ldots,2^k \end{cases}$$

Mostra-se então que h_k é contínua e que $i \circ h_k$ é homotópica à identidade em $\Omega_k(M)$.

Definamos $h : \Omega_p(M) \to \overline{\Omega}_p(M)$ por $h(c) = h_k(c)$, se $c \in \Omega_k(M)$. A prova de que h satisfaz às condições alegadas é conseqüência do fato que $\Omega_p(M)$ é limite direto homotópico da seqüência $\Omega_k(M)$ (conforme [4;p.150]).

3.3 - TEOREMA

Sejam $k \geq 1$, $s_o \in S^k$, $p \in M$ e $h: S^k \to \overline{\Omega}_p(M)$ uma aplicação contínua tal que $h(s_o) = \overline{p}$. Se existe uma aplicação contínua $D: I \times h(S^k) \to \overline{\Omega}_o(M)$ tal que $D(0,c) = c$, $D(t,\overline{p}) = \overline{p}$ e $D(1,c)$ é uma curva pontual para quaisquer $c \in h(S^k)$ e $t \in I$, então h é nul-homotópica.

<u>Observação:</u> Seja $\Gamma \subseteq \overline{\Omega}_o(M)$ um conjunto de curvas fechadas que contém todas as curvas pontuais de M tal que $h(S^k) \subseteq \Gamma$. Decorre trivialmente do teorema que nenhum conjunto de curvas pontuais é um retrato de deformação de $h(S^k)$ em Γ se h não é nul-homotópica.

Prova:

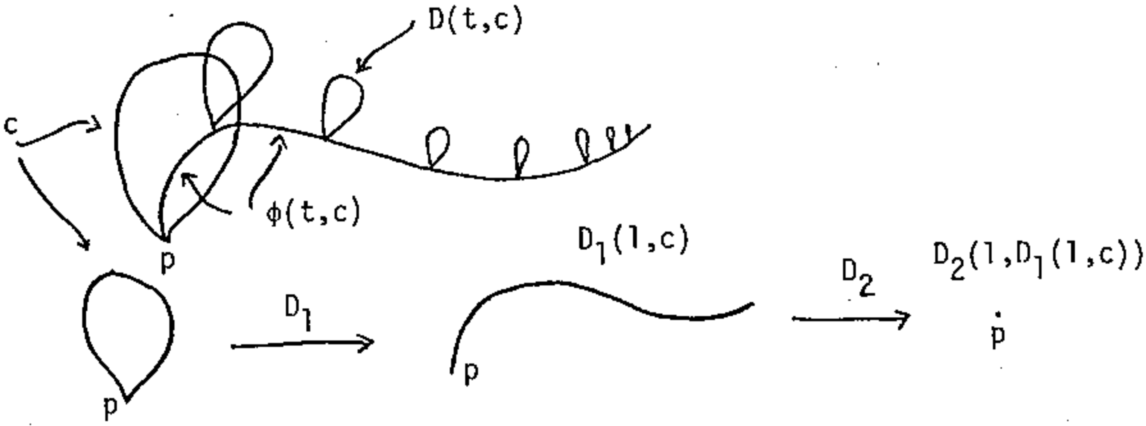
Suponhamos que $D: I \times h(S^k) \to \overline{\Omega}_o(M)$ é contínua e $\forall c \in h(S^k)$, $D(0,c) = c$ e $D(1,c)$ é uma curva pontual e $D(t,\bar{p}) = \bar{p}$, $\forall$ $t \in I$. A aplicação $\phi : I \times h(S^k) \to \overline{\Omega}(M)$ dada por $\phi(t,c)(s) = D(st,c)(0)$, certamente está bem definida e é contínua. Como, $\forall$ $t \in I$, temos $\phi(t,c)(1) = D(t,c)(0) = D(t,c)(1)$, podemos considerar a aplicação $D_1 : I \times h(S^k) \to \overline{\Omega}_p(M)$ dada por:

$$D_1(t,c) = \phi(t,c) * D(t,c) * (\phi(t,c))^{-1}.$$

D_1 está bem definida, pois $D_1(t,c)(0) = D_1(t,c)(1) = p$, $\forall$ $t \in I$. Além disso, D_1 certamente é contínua, $D_1(I,\{\bar{p}\}) = \{\bar{p}\}$ e

$$D_1(0,c) = \bar{p} * D(0,c) * (\bar{p})^{-1} = D(0,c) = c, \ \forall c \in h(S^k).$$

Definamos, agora, $\overline{D}: I \times h(S^k) \to \overline{\Omega}_p(M)$ por $\overline{D}(t,c) = D_1(2t,c)$ se $0 \leq 2t \leq 1$ e $\overline{D}(t,c) = \phi(2-2t,c) * (\phi(2-2t,c))^{-1}$ se $1 \leq 2t \leq 2$. É imediato verificar que $\overline{D}$ está bem definida, é contínua e satisfaz $\overline{D}(0,c) = c$ e $\overline{D}(1,c) = \bar{p} = \overline{D}(t,\bar{p})$ para $c \in h(S^k)$ e $t \in I$.



Definindo, agora, $F: I \times S^k \to \overline{\Omega}_p(M)$ por $F(t,u) = \overline{D}(t,h(u))$, é imediato verificar que F é uma nul-homotopia para h.

$\rceil$

CAPÍTULO IV

A ℓ-DEFORMAÇÃO STANDARD
A EXISTÊNCIA DE GEODÉSICAS FECHADAS

1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo definimos uma ℓ-deformação standard e enunciamos algumas de suas principais propriedades, as necessárias para o teorema principal que será demonstrado no final ainda deste capítulo.

As demonstrações destas propriedades foram deixadas para o capítulo posterior, tendo em vista serem demonstrações fundamentalmente técnicas.

2 - CONVENÇÕES E NOTAÇÕES

a) Daqui em diante, M denotará uma variedade riemaniana compacta de classe C^∞.

b) δ denotará sempre o número dado pela proposição II.4.8, e será chamado de comprimento elementar.

c) Uma geodésica de comprimento menor ou igual a δ será chamada de segmento elementar; toda curva que é o produto de um número finito de segmentos elementares será chamada de polígono elementar.

d) Uma geodésica fechada será denominada de ponto estacionário de $\tilde{\Omega}(M)$ e o comprimento de uma geodésica fechada será denominado de valor estacionário do comprimento ℓ.

e) Observamos que homotopia e nul-homotopia de geodésicas fechadas é sempre definida como homotopia e nul-homotopia de curva fechada, isto é, cada curva da família $F(t,.)$ é uma curva fechada.

f) Dado $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \geqslant 0$, denotamos por ℓ_β o conjunto das curvas $c \in \overline{\Omega}_o(M)$ tais que $\ell(c) \leqslant \beta$; assim, ℓ_0 é o conjunto das pontuais.

e) Neste capítulo, até o corolário 3.3, fixamos arbitrariamente $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$.

h) Dada $c \in \overline{\Omega}(M)$, se $s, t \in I$, $s \leqslant t$, são tais que:

$$d(c(s), c(t)) \leqslant \delta,$$

a geodésica minimizante determinada univocamente por ligar $c(s)$ a $c(t)$ será denotada por $g_c(s,t)$.

3 - DEFINIÇÃO DA ℓ-DEFORMAÇÃO

Seja $c \in \ell_\beta$ com $\ell(c) = \alpha > 0$.

Escolhemos $q = q(\beta) \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{\beta}{q} \leqslant \delta$.

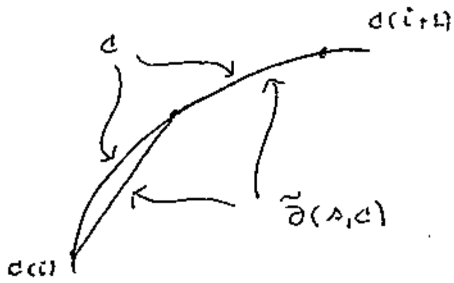
Tomando $(i) = \frac{i}{q}$, $i = 0, 1, \ldots, q-1$, obtemos uma partição regular $\{0 = (0) < (1) < \ldots < (q-1) < (q) = 1\}$ de I que satisfaz $\ell_{(i)}^{(i+1)}(c) \leqslant \delta$.

De fato: $\ell_{(i)}^{(i+1)}(c) = \ell_0^{(i+1)}(c) - \ell_0^{(i)}(c) = (i+1)\alpha - (i)\alpha = \frac{\alpha}{q} \leqslant \frac{\beta}{q} \leqslant \delta.$

Segue-se que dois pontos quaisquer de cada arco $c((i), (i+1))$ de c podem ser ligados por um único segmento elementar com extremidades nestes pontos. Fica então bem definida a aplicação $\tilde{\partial} = \tilde{\partial}_\beta : I \times \ell_\beta \to \ell_\beta$ dada por:

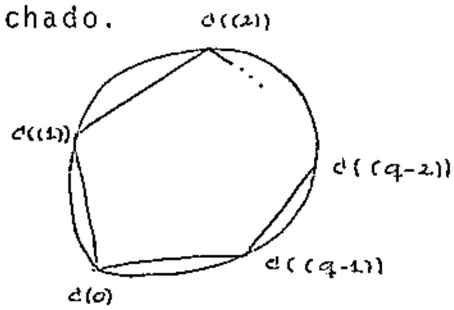
$$\tilde{\partial}(s,c) = \partial(s, c(0,(1))) * \partial(s, c((1),(2))) * \ldots *$$
$$* \, \partial(s, c((q-1),1)), \text{ onde } \partial(s, c((i),(i+1))) =$$

$$= \partial_\beta(s,c((i),(i+1))) = g_c((i),(i)+s((i+1)-(i))) *$$
$$* \; c((i)+s((i+1)-(i)),(i+1)), \quad i = 0,1,\dots,q-1$$

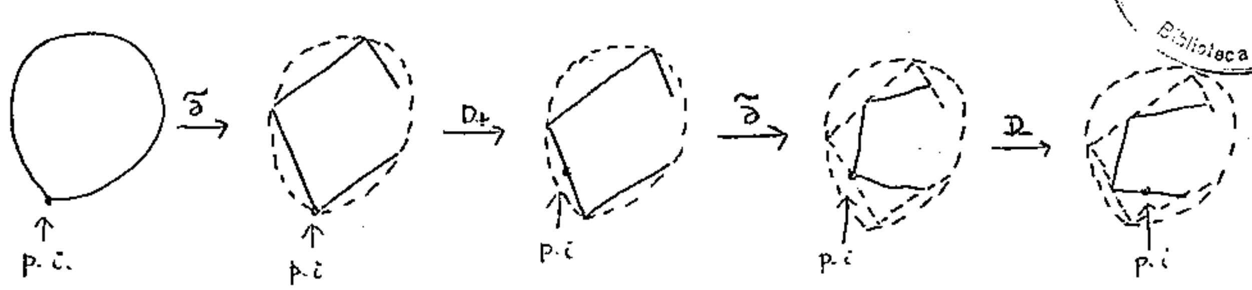


No caso de c ser uma curva pontual, então, por definição $\tilde{\partial}(s,c) = c, \; \forall \; s \in I$.

Mostraremos no próximo capítulo que $\tilde{\partial}$ é de fato uma ℓ-deformação (proposição V.2) que deforma cada curva $c \in \ell_\beta$ num polígono elementar fechado.



Transladando o parâmetro t da curva $\tilde{\partial}(1,c)$ de $-\frac{1}{2q}$, fazemos rodar esta curva de tal forma que o ponto inicial c(0) é deslocado até a metade do segmento elementar de c(0) a c(1). Obtemos assim uma nova curva que difere da anterior essencialmente quanto à localização do ponto inicial. Tal operação, denotada por D_+ será definida rigorosamente no capítulo seguinte (proposição V.3). Aplicando novamente a ℓ-deformação $\tilde{\partial}$ e, por fim, a aplicação inversa D_- de D_+, obtemos por justaposição a ℓ-deformação standard: $\overline{D} = \overline{D}_\beta = \tilde{\partial} + D_+ + \tilde{\partial} + D_- : I \times \ell_\beta \to \ell_\beta$.



A aplicação $D : \ell_\beta \longrightarrow \ell_\beta$ definida por $D(c) = \overline{D}(1,c)$ é denominada de aplicação de encurtamento, e verifica-se que uma curva c permanece inalterada pela aplicação de encurtamento se, e só se, c é uma geodésica fechada ou uma curva pontual (prop. V.5).

Fato fundamental sobre a ℓ-deformação $\overline{D}$, cuja demonstração será dada no próximo capítulo, é o seguinte:

3.1 - TEOREMA

Toda seqüência encurtada pela ℓ-deformação $\overline{D}$ em ℓ_β contém uma subseqüência convergente a uma geodésica fechada ou a uma curva pontual.

$\rceil$

Decorre do teorema 3.1, o seguinte **corolário** fundamental.

3.2 - COROLÁRIO

Suponhamos que β seja um valor não estacionário de ℓ, e seja $U \subset \ell_\beta$ uma vizinhança aberta de todos os pontos estacionários de $\overline{\Omega}(M)$ em ℓ_β, com $\ell_0 \subset U$. Então a diferença

$$\ell(c) - \ell(D(c))$$

tem em ℓ_β - U uma cota inferior positiva.

Prova:

Seja $r = \inf\{\ell(c) - \ell(D(c)) \mid c \in \ell_\beta - U\}$. Se $r=0$, então existe uma seqüência (c_n) em $\ell_\beta - U$ que é encurtada por $\bar{D}$. Pelo teorema, (c_n) contém uma subseqüência convergente a uma geodésica fechada $g \in \ell_\beta - U$, contrariando a escolha de U.

$\rceil$

De 3.2 obtemos ainda o seguinte resultado:

3.3 - COROLÁRIO

Seja $A \subset \ell_\beta$ e suponhamos que nenhuma curva de A é homotópica a alguma geodésica fechada de ℓ_β. Então existe um subconjunto de ℓ_0 que é retrato de deformação de A em ℓ_β.

Prova:

Se $A \subset \ell_\delta$, então é imediato verificar que a deformação $\bar{D}_\delta$, com $q = 2$, aplica A em algum subconjunto de ℓ_0.

Se $A - \ell_\delta \neq \emptyset$, definamos o conjunto $\bar{A}$ da seguinte forma: dada $c \in \ell_\beta$, $c \in \bar{A}$ se, e só se, $c \in A$ ou existe $m \in \mathbb{Z}^+$ e $d \in A$ tal que $c = D^m(d)$, onde $D^m = D + \ldots + D$.

Agora, se $g \in \ell_\beta$ é geodésica fechada, seja $U_g \subset \ell_\beta$ uma vi zinhança aberta de g com a propriedade de que se $c \in U_g$, então c é homotópica a g, e seja $U = \bigcup_{g \in \ell_\beta} U_g$ (g geodésica fechada). Segue-se que $\bar{A} \cap U = \emptyset$. Tomando-se uma vizinhança U_0 das curvas pontuais tal que $U_0 \subset \ell_\delta$, decorre, do lema anterior, que a diferença $\ell(c) - \ell(D(c))$ possui uma cota inferior positiva r em $\ell_\beta - (U \cup U_0)$, e, portanto, em $\bar{A} - \ell_\delta$. Tomando-se $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $mr \leqslant \beta - \delta$, segue-se que a ℓ-deformação $(\bar{D})^m$ aplica A em algum subconjunto de ℓ_δ. Logo, a justaposição $(\bar{D})^m + (\bar{D}_\delta)^2$ aplica A em algum subconjunto de ℓ_0.

4 - A EXISTÊNCIA DE GEODÉSICAS FECHADAS

4.1 - TEOREMA

Seja M uma variedade riemaniana compacta de classe C^∞, e suponhamos $\pi_k(M) \neq \{0\}$, para algum $k \geqslant 2$. Então existe em M uma geodésica fechada nul-homotópica.

Prova:

Seja p um ponto arbitrário de M. Da proposição I.3.10, existe uma aplicação contínua $\bar{h}: S^{k-1} \to \Omega_p(M)$ não nul-homotópica. Da proposição III.3.2, existe uma aplicação contínua $h: S^{k-1} \to \bar{\Omega}_p(M)$ não nul-homotópica. Considerando a função composta $\ell o h : S^{k-1} \to \mathbb{R}$, seja $\beta = \max_{s \in S^{k-1}} (\ell o h)(s)$. Assim, obtemos $h(S^{k-1}) \subset \ell_\beta$. Do teorema III.3.3, concluímos que $h(S^{k-1})$ não é retratável em um conjunto de curvas pontuais, e, do corolário 3.3, concluímos que existe uma curva de $h(S^{k-1})$ homotópica a alguma geodésica fechada. Da observação I.3.11, segue-se que g é nul-homotópica.

4.2 - TEOREMA

Seja M uma variedade riemaniana compacta de classe C^{∞}. Toda curva fechada e não nul-homotópica em M é homotópica a uma geodésica fechada.

Prova:

Seja c uma curva fechada e não nul-homotópica; pela proposição III.3.1, c é homotópica a uma curva fechada e regular c'. Se c' não é homotópica a alguma geodésica, então podemos deformar c' até obter uma curva pontual; assim, c' é nul-homotópica, o que é impossível.

┐

Dos dois teoremas anteriores, obtemos o seguinte resultado de demonstração óbvia.

4.3 - COROLÁRIO

Seja M uma variedade riemaniana compacta de classe C^∞. Se $\pi_k(M) \neq \{0\}$ para algum $k \geq 2$ então qualquer curva fechada em M é homotópica a uma geodésica fechada.

CAPÍTULO V

DEMONSTRAÇÕES DAS PROPOSIÇÕES ENUNCIADAS NO CAPÍTULO IV

1 - OBSERVAÇÕES

Neste capítulo usaremos as mesmas notações utilizadas no capítulo IV.

Fixamos $q \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{\beta}{q} \leqslant \delta$, com $\beta > 0$ fixo.

2 - PROPOSIÇÃO

A aplicação $\tilde{\delta} : I \times \ell_\beta \to \ell_\beta$ é uma ℓ-deformação.

<u>Prova</u>:

Mostraremos inicialmente que $\tilde{\delta}$ é contínua.

Sejam $c_0 \in \ell_\beta$ e $s_0 \in I$. Então $\forall s \in I$, e $\forall c \in \ell_\beta$, temos:

$$\bar{\rho}(\tilde{\delta}(s_0,c_0),\tilde{\delta}(s,c)) = \max_{t \in I} d(\tilde{\partial}(s_0,c_0)(t),\tilde{\partial}(s,c)(t)) + |\ell(\tilde{\delta}(s_0,c_0)) - \ell(\tilde{\delta}(s,c))| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{q-1} \max_{t \in I} d(\partial(s_0,c_0((i),(i+1)))(t), \partial(s,c((i),(i+1))(t)) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{q-1} |\ell(\partial(s_0,c_0((i),(i+1)))) - \ell(\partial(s,c((i),(i+1))))|.$$

Para cada $i = 0,1, \ldots, q-1$, temos:

$|\ell(\partial(s_0,c_0((i),(i+1)))) - \ell(\partial(s,c((i),(i+1))))| \leqslant |\ell(g_{c_0}((i),(i)+s_0((i+1)-(i)))) - \ell(g_c((i),(i)+s((i+1)-(i))))| + |\ell(c_0((i)+s_0((i+1)-(i)),(i+1))) - \ell(c((i)+s((i+1)-(i)),(i+1)))|$. Do Teorema II.4.8 e da proposição III.8, decorre imediatamente que o primeiro módulo do membro direito da desigualdade anterior tende a zero para $s \to s_0$ e $c \to c_0$. O segundo módulo também tende a zero quando $s \to s_0$ e $c \to c_0$ pois:

$$|\ell(c_0((i)+s_0((i+1)-(i)),\ (i+1))) - \ell(c((i)+s((i+1)-(i)),(i+1)))| =$$
$$= |((i+1)-(i) - s_0((i+1)-(i)))\ \ell(c_0)-((i+1)-(i) - s((i+1)-(i)))\ \ell(c)| =$$
$$= ((i+1)-(i))\ |s\ell(c) - s_0\ell(c_0)|\ .$$

Mostremos agora que

$$\max_{t\in I}\ d(\partial(s_0,c_0((i),(i+1)))(t),\ \partial(s,c((i),(i+1)))(t))\quad \text{tende a}$$

zero para $s \to s_0$ e $c \to c_0$.

Para cada $t \in I$

$$d(\partial(s_0,c_0((i),(i+1)))(t),\ \partial(s,c((i),(i+1)))(t)) =$$

(1) $d(g_{c_0}((i),(i)+s_0((i+1)-(i)))(t),g_c((i),(i)+((i+1)-(i)))(t))$

se $t \leq \min\{s,s_0\}$

(2) $d(g_{c_0}((i),(i)+s_0((i+1)-(i)))(t),c((i)+s((i+1)-(i)),(i+1))$

se $s \leq t \leq s_0$

(3) $d(c_0((i)+s_0((i+1)-(i)),(i+1))(t),g_c((i),(i)+s((i+1)-(i))))(t))$

se $s_0 \leq t \leq s$

(4) $d(c_0((i)+s_0((i+1)-(i)),(i+1))(t),c((k)+s((k+1)-(i)),(i+1))(t))$

se $t \geq \max\{s,s_0\}$

Decorre do teorema II.4.8 que a distância (1) tende a zero para $c \to c_0$ e $s \to s_0$. No caso (2), como $s \leqslant t \leqslant s_0$, se $s \to s_0$, então $g_{c_0}((i),(i)+s_0((i+1)-(i)))(t) \to c_0((i)+s_0((i+1)-(i)))$; logo, se $c \to c_0$ e $s \to s_0$, segue-se que:

$$g_{c_0}((i),(i)+s_0((i+1)-(i)))(t) \to c_0((i)+s_0((i+1)-(i))), \quad \text{e}$$

$$c((i)+s((i+1)-(i))) \to c_0((i)+s_0((i+1)-(i))),$$

donde (2) tende a zero, conforme proposição III.12.

Os casos (3) e (4) se demonstram analogamente aos anteriores. Assim, de fato, $\tilde{\partial}$ é uma aplicação contínua. É imediato verificar agora que $\ell(\tilde{\partial}(s,c)) \leqslant \ell(c)$, $\forall s \in I$, $\forall c \in \ell_\beta$, e que $\tilde{\partial}(1,c) = c$, $\forall c \in \ell_\beta$, donde $\tilde{\partial}$ é de fato uma ℓ-deformação em ℓ_β.

3 - PROPOSIÇÃO

As aplicações $D_+ = D_{+\beta}: I \times \ell_\beta \to \ell_\beta$ e $D_- = D_{-\beta}: I \times \ell_\beta \to \ell_\beta$ definidas por:

$$D_+(t,c)(s) = \begin{cases} c(\frac{t}{2q} + s) & \text{se } \frac{t}{2q} + s \leqslant 1 \\ c(\frac{t}{2q} + s - 1) & \text{se } \frac{t}{2q} + s \geqslant 1, \end{cases}$$

$$D_-(t,c)(s) = \begin{cases} c(1+s - \frac{t}{2q}) & \text{se } s \leqslant \frac{t}{2q} \\ c(s - \frac{t}{2q}) & \text{se } s \geqslant \frac{t}{2q} \end{cases}, \text{ para cada}$$

$c \in \ell_\beta$ e $s \in I$, são ℓ-deformações em ℓ_β.

Prova:

Sejam $t_0 \in I$, $c_0 \in \ell_\beta$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

Para quaisquer $c \in \ell_\beta$ e $t \in I$, da desigualdade triangular, obtemos:

$$\overline{\rho}(D_+(t_0,c_0), D_+(t,c)) \leq \overline{\rho}(D_+(t_0,c_0), D_+(t_0,c)) + \overline{\rho}(D_+(t_0,c), D_+(t,c)) =$$
$$= \overline{\rho}(c,c_0) + \overline{\rho}(D_+(t_0,c), D_+(t,c))$$

Se $\frac{t}{2q} \geq \frac{to}{2q}$ então, para todo $s \in I$ tal que $\frac{t}{2q} + s \leq 1$, denotando $y = \frac{t}{2q} + s$ e $x = \frac{t_0}{2q} + s$, obtemos:

$$d(D_+(t_0,c)(s), D_+(t,c)(s)) = d(c(x),c(y)) \leq \ell_x^y(c) =$$
$$= \ell_0^y(c) - \ell_0^x(c) = y\ell(c) - x\ell(c) = (y-x)\ell(c) = \frac{t-t_0}{2q}\ell(c) \leq \frac{t-t_0}{2q}\beta$$

Da mesma forma, se $s \in I$ é tal que $\frac{t_0}{2q} + s \geq 1$, obtemos $d(D_+(t_0,c)(s), D_+(t,c)(s)) \leq \frac{t-t_0}{2q}\beta$.

Se $s \in I$ é tal que $y = \frac{t}{2q} + s \geq 1$ e $x = \frac{t_0}{2q} + s \geq 1$, então $d(D_+(t_0,c)(s), D_+(t,c)(s)) = d(c(x),c(y-1)) \leq \ell_x^1(c) + \ell_0^{y-1} \leq$ $\leq \frac{t-t_0}{2q}\beta$.

Analogamente, quando $\frac{t}{2q} \leq \frac{t_0}{2q}$, obtemos:
$d(D_+(t_0,c)(s), D_+(t,c)(s)) \leq \frac{t_0-t}{2q}$. Segue-se que: $\overline{\rho}(D_+(t_0,c), D_+(t,c)) =$

$$= \max_{s \in I} d(D_+(t_0,c)(s), D_+(t,c)(s)) + |\ell(D_+(t_0,c)) - \ell(D_+(t,c))| =$$
$$= \max_{s \in I} d(D_+(t_0,c)(s), D_+(t,c)(s)) \leq \frac{|t_0-t|}{2q}\beta.$$

Assim, se $\overline{\rho}(c,c_0) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ e $|t-t_0| \leq \frac{q}{\beta}\varepsilon$, obtemos:

$\bar{\rho}\ (D_+(t_o,c_o),\ D_+(t,c)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{q}{\beta} \cdot \frac{\beta}{2q}\ \varepsilon = \varepsilon.$

Segue-se que D_+ é uma aplicação contínua. Além disso, é imediato verificar as igualdades:

$D_+(o,c) = c$

$\ell(D_+(t,c)) = \ell(c)$, $\forall c \in \ell_\beta$ e $\forall t \in I$. Assim, de fato, D_+ é uma ℓ-deformação em ℓ_β.

Analogamente, demonstra-se que D_- também é uma ℓ-deformação em ℓ_β.

$\rceil$

Relembramos agora as seguintes notações, já empregadas no capítulo anterior.

4 - NOTAÇÕES

$\bar{D} = \bar{D}_\beta = \tilde{\partial} + D_+ + \tilde{\partial} + D_-$

$D = \bar{D}\ (1,.)$

5 - PROPOSIÇÃO

Dada $c \in \ell_\beta$, temos $\ell(D(c)) = \ell(c)$ se, e só se, c é uma geodésica fechada ou uma curva pontual.

<u>Prova</u>:

Como $\tilde{\partial}$ é uma ℓ-deformação, e como D_+ e D_- não alteram comprimento de curvas, temos:

$$\ell(D(c)) = \ell((\tilde{\partial}+D_+ +\tilde{\partial}+D_-)(1,c)) = \ell((\tilde{\partial}+D_+ +\tilde{\partial})(1,c)) \leqslant$$

$\leqslant \ell((\tilde{\partial}+D_+)(1,c)) = \ell(\tilde{\partial}(1,c)) \leqslant \ell(c)$. Assim, se $\ell(D(c)) = \ell(c)$, obtemos $\ell(\tilde{\partial}(1,c)) = \ell(c)$. Logo, se c não é uma curva pontual, obtemos:

$$\sum_{i=0}^{q-1} \ell(g_c((i),(i+1))) = \sum_{i=0}^{q-1} \ell(c((i),(i+1))), \quad \text{donde}$$

$$\sum_{i=0}^{q-1} \left[\ell(c((i),(i+1))) - \ell(g_c((i),(i+1)))\right] = 0.$$

Como cada parcela do somatório é não negativa, segue-se que:

$$\ell(c((i),(i+1))) = \ell(g_c((i),(i+1))), \ i = 0,1,\ldots,q-1$$

Assim, dados $s,t \in [(i),(i+1)]$, $s \leqslant t$, temos $\ell_s^t(c((i),(i+1))) = d(c((i),(i+1))(s),c((i),(i+1))(t))$. Do corolário II.4.9, segue-se que cada arco $c((i),(i+1))$ é uma geodésica. Portanto, c é um polígono elementar fechado tal que $\tilde{\partial}(1,c)=c$.

Mostremos agora que c é uma geodésica fechada. Denotando $x_i=(i)+\frac{1}{2q}$, $i=0,1,\ldots,q-1$, basta mostrar (usando novamente o Corolário II.4.9) que cada arco $c(x_{i-1},x_i)$ é tal que $\ell(c(x_{i-1},x_i)) = d(c(x_{i-1},x_i))$, $i = 1,\ldots,q-1$, e que

$$\ell^1_{(q-1)}(c) + \ell_o^{x_o}(c) = d(c(x_{q-1}), c(x_o)).$$

Como $\ell(D(c)) = \ell(c)$, obtemos $\ell(\tilde{\partial}(1,D_+(1,c))) = \ell(c)$

Por um lado, temos:

$$\ell(c) = \ell(c(x_0,x_1)) + \ldots + \ell(c(x_{q-2},x_{q-1})) + \ell^1_{x_{q-1}}(c) + \ell_0^{y_0}(c)$$

Por outro:

$$\ell(\tilde{\partial}(1,D_+(1,c))) = \ell(g_c(x_0,x_1)) + \ldots + \ell(g_c(x_{q-1},x_0)).$$

Subtraindo membro a membro as igualdades anteriores, por um raciocínio análogo ao do parágrafo anterior, concluímos o resultado alegado e c é uma geodésica fechada.

Provemos agora a recíproca. Se c é uma curva pontual, então $\ell(c) = 0 = \ell(D(c))$. Se c é uma geodésica, então $\forall s \in I$, temos $g_c((i),(i)+s((i+1)-(i))) = c((i),s((i+1)-(i)))$. Em particular, para s=1, obtemos $g_c((i),(i+1)) = c((i),(i+1))$, donde decorre $\partial(1,c((i),(i+1))) = c((i),(i+1))$, i=0,1, ..., q-1. Segue-se que $\tilde{\partial}(1,c) = c((0),(i)) * \ldots * c((q-1),(q)) = c$.

Além disso, sendo c geodésica fechada, como D_+ apenas desloca o ponto inicial, $D_+(1,c)$ é também geodésica fechada. Assim, pelo mesmo motivo anterior, $\tilde{\partial}(1,D_+(1,c)) = D_+(1,c)$. Logo $D(c) = (\tilde{\partial}+ D_+ +\tilde{\partial}+D_-)(1,c) = D_-(1,\tilde{\partial}(1,D_+(1,\tilde{\partial}(1,c)))) = D_-(1,D_+(1,c)) = c$. Segue-se que $\ell(D(c)) = \ell(c)$.

$\urcorner$

A seguir, demonstramos três lemas a serem empregados na demonstração do teorema IV.3.1, enunciado no capítulo anterior.

6 - LEMA

Seja (P_n) uma sequência de polígonos elementares fechados em ℓ_β, contendo cada P_n o mesmo número de segmentos elementares. Se (P_n) é encurtada por $\bar{D}$ então (P_n) contém uma subsequência convergente a uma geodésica fechada ou a uma curva pontual.

Prova:

Consideremos a seqüência $(p_1^n,\ldots,p_k^n)$ dos vértices dos segmentos elementares P_n em M^k. Como M^k é compacta, $(p_1^n,\ldots,p_k^n)$ contém uma subseqüência convergente $(q_1^n,\ldots,q_k^n)$. Seja $(p_1,\ldots,p_k)$ o limite de tal subseqüência. Segue-se de (c) do teorema II.4.8, que os polígonos elementares Q_n de vértices $(q_1^n,\ldots,q_k^n)$ formam uma subseqüência de P_n convergente a P, onde P é o polígono elementar de vértices $p_1,\ldots,p_k$. Pela continuidade da aplicação D, $\lim_n D(Q_n) = D(P)$. Pela continuidade da função ℓ, $\lim_n \ell(D(Q_n)) = \ell(D(P))$. Assim, obtemos: $\ell(P)-\ell(D(P)) = \lim_n \ell(Q_n) - \lim_n \ell(D(Q_n)) = \lim_n [\ell(Q_n)-\ell(D(Q_n))] = 0$, pois (P_n) é encurtada por $\bar{D}$. Segue-se, da proposição 5 deste capítulo, que P é uma geodésica fechada ou uma curva pontual.

$\rceil$

7 - LEMA

Sejam (c_n) uma sequência em ℓ_β e (P_n) a sequência de polígonos elementares fechados definida por $P_n=\tilde{\partial}(1,c_n)$. Se (c_n) é encurtada por $\bar{D}$ então (P_n) é encurtada por $\bar{D}$ e

$$\lim_n \left[\ell(c_n((i),(i+1))) - \ell(P_n((i),(i+1)))\right] = 0,\ i=0,1,\dots,q-1.$$

<u>Nota</u>:
Convém lembrar que $P_n((i),(i+1)) = g_c((i),(i+1))$.

<u>Prova</u>: Como

(a) $D(c_n) = D(P_n)$

(b) $\ell(c_n) \geqslant \ell(\tilde{\partial}(1,c_n)) = \ell(P_n) \geqslant \ell(D(P_n))$,

obtemos:

$\ell(c_n) - \ell(D(c_n)) \geqslant \ell(P_n) - \ell(D(P_n)) \geqslant 0$, donde
$\lim_n \left[\ell(P_n) - \ell(D(P_n))\right] = 0$, e P_n é encurtada por $\bar{D}$.

Como $\ell(c_n((i),(i+1))) - \ell(P_n((i),(i+1))) \geqslant 0$, $i=0,1,\dots,q-1$,

obtemos: $\ell(c_n((i),(i+1))) - \ell(P_n((i),(i+1))) \leqslant \sum_{j=0}^{q-1} [\ell(c_n((j),(j+1))) -$
$-\ell(P_n((j),(j+1)))] = \sum_{j=0}^{q-1} \ell(c_n((j),(j+1))) + \sum_{j=0}^{q-1} \ell(P_n((j),(j+1))) =$

$= \ell(c_n) - \ell(P_n)$. Segue-se que $0 \leqslant \lim\limits_n [\ell(c_n((i),(i+1))) - \ell(P_n((i),(i+1)))] \leqslant \lim\limits_n [\ell(c_n) - \ell(P_n)] = 0$.

8 - LEMA

Seja $S : I \to M$ um segmento elementar, e seja (c_n) uma seqüência de curvas em M satisfazendo:

(i) $\lim\limits_n c_n(0) = S(0)$ e $\lim\limits_n c_n(1) = S(1)$

(ii) $\lim\limits_n \ell(c_n) = \ell(S)$

Então (c_n) contém uma subseqüência convergente a S.

Prova:

Seja t_n um valor do parâmetro t em I tal que $\max\limits_{t\in I} d(c_n(t), S(t)) = d(c_n(t_n), S(t_n))$. Como M é compacta, $\{c_n(t_n)\}$contém uma subseqüência $\{d_n(s_n)\}$ convergente. Mostremos que d_n converge para S. Como $\bar{\rho}(d_n,S) = d(d_n(s_n),S(s_n)) + |\ \ell(d_n)-\ell(S)\ |$, e como $\lim\limits_n |\ \ell(d_n) - \ell(S)\ | = 0$, é suficiente mostrarmos que $\lim\limits_n d(d_n(s_n),S(s_n)) = 0$. Suponhamos $\lim\limits_n S(s_n) = p \in S(I)$ e $\lim\limits_n d_n(S_n) = p'$.

Temos $d(S(0),d_n(s_n)) \leqslant d(S(0),d_n(0)) + d(d_n(0),d_n(s_n)) \leqslant$ $\leqslant d(S(0),d_n(0)) + \ell_0^{s_m}(c)$, donde $\ell_0^{s_n}(c) \geqslant d(S(0),d_n(s_n)) - d(d_n(1),d_n(0))$. Analogamente, encontramos $\ell_{s_n}^1(c) \geqslant d(d_n(s_n),S(1)) - d(d_n(1),S(1))$. Logo, $\ell(d_n) = \ell_0^{s_n}(d_n) + \ell_{s_n}^1(d_n) \geqslant d(S(0),d_n(s_n)) + d(d_n(s_n),S(1)) - d(S(0),d_n(0)) -$

$- d(d_n(1),S(1))$. Passando ao limite, obtemos $\ell(S) \geq d(S(0),p')+ + d(p',S(1))$. Como, $\ell(S) = d(S(0),S(1)) \leq d(S(0),p') + d(p',S(1))$, obtemos $\ell(S) = d(S(0),p') + d(p',S(1))$, donde $p' \in S(I)$.

Temos:

$\ell_0^{s_n}(d_n) \geq d(S(0),d_n(s_n)) - d(S(0),d_n(0))$, donde obtemos, $\ell_0^{s_n}(d_n) - d(S(0), S(s_n)) \geq d(S(0), d_n(s_n)) - d(S(0), d_n(0)) - - d(S(0),S(s_n))$, ou seja, $s_n \ell(d_n) - s_n \ell(S) \geq d(S(0),d_n(s_n)) - - d(S(0),d_n(0)) - d(S(0),S(s_n))$. Passando ao limite, encontramos $0 \geq d(S(0),p') - d(S(0),p))$, donde $d(S(0),p') \leq d(S(0),p)$. Analogamente, partindo da desigualdade, $\ell_{s_n}^1(c) \geq d(d_n(s_n),S(1)) - - d(d_n(1),S(1))$, encontramos $d(p',S(1)) \leq d(p,S(1))$. Como $p,p' \in S(I)$, devemos ter $p = p'$. Portanto,

$$\lim_n d(d_n(s_n),S(s_n)) = d(p,p') = 0, \text{ donde } d_n \text{ converge a } S.$$

9 - TEOREMA

Toda sequência em ℓ_β que é encurtada por $\bar{D}$ possui uma subsequência convergente a uma geodésica fechada ou a uma curva pontual.

Prova:

Seja (c_n) uma seqüência em ℓ_β encurtada por $\bar{D}$. e seja (P_n) a seqüência de polígonos elementares $P_n = \bar{\partial}(1, c_n)$.

Pelo lema 7, (P_n) é encurtada por $\bar{D}$ e, pelo lema 6, (P_n) (ou uma subseqüência de (P_n) , se necessário) converge a uma geodésica fechada ou a uma curva pontual P. Para cada $i = 0,1, \ldots, q$, temos $\lim_n c_n((i)) = \lim_n P_n((i)) = P((i))$. Assim, cada arco $c_n((i),(i+1))$ satisfaz as hipóteses do lema 8, convergindo, portanto a $P((i),(i+1))$. Como o produto de curvas é uma operação contínua, segue-se que

$$\lim_n c_n = \lim_n \left[c_n((0),(1)) * \ldots * c_n((q-1),(q))\right] = P((0),(1)) * \ldots *$$

$$* \; P((q-1),(q)) = P.$$

RESUMO

Usando métodos de deformação de Morse e conceitos de homotopia, demonstramos o seguinte resultado:

"Seja M uma variedade riemaniana compacta. Se, para algum $k > 1$, o grupo de homotopia $\pi_k(M)$ é não trivial, então existe em M uma geodésica fechada nul-homotópica".

Como caso particular obtemos, com o teorema do Isomorfismo de Hurewicz, o resultado: "Toda variedade riemaniana compacta e simplesmente conexa possui uma geodésica fechada".

ABSTRACT

Using Morse's deformation methods and simple concepts of homotopy, the following result is proved:

"Let M be a compact Riemann manifold. If, for some $k > 1$, the homotopy group $\pi_k(M)$ is non trivial then there exists in M a closed geodesic that is homotopically trivial".

As a particular case we obtain, with Hurewicz's Isomorphism Theorem, the following result: "Every Riemann Manifold that is compact and simply connected contains a closed geodesic".

NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] CARMO, M. do, Geometria Riemanniana. Projeto Euclides , IMPA, 1979.

[2] KLINGENBERG, W. Lectures on Closed Geodesics. Springer Verlag, 1978.

[3] LIMA, E., Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento . 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1977.

[4] MILNOR, J., Morse Theory. Annals of Mathematical Studies, Number 51, Princeton U.Press, 1973.

[5] OLIVIER, R., Die Existenz Geschlossener Geodätischer auf Kompakten Mannigfaltigkeiten. Comment. Math. Helv. 35 (1961), 146-152.

[6] SEIFERT, H & THRELFALL, W. Variationsrechnung im Grossen. Chelsea, 1951.