TAB I 103783-0

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMATICA

RESOLUÇÃO DE SINGULARIDADES DE SISTEMAS DE PFAFF NO PLANO PROJETIVO ATRAVÉS DO GRUPO DE CREMONA

POR

LUÍS GUSTAVO DONINELLI MENDES

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMATICA COMO REQUISITO PARCIAL PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

ORIENTADOR

PROF. MARCOS SEBASTIANI

PORTO ALEGRE, DEZEMBRO DE 1993.

SISTEMA DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA SETORIAL DE MATEMÁTICA

ABSTRACT

We describe a reduction of singularities of holomorphic foliations (with isolated singularities) in the complex projective plane by means of birational transformations of the Cremona group.
This reduction is applied to the elimination of singular points of birational transformations, resulting a description of the rational surfaces.

RESUMO

Descrevemos um processo de resolução de singularidades de sistemas de Pfaff holomorfos (com singularidades isoladas) no plano projetivo complexo, através de aplicações biracionais do plano que formam o grupo de Cremona.
Essa resolução para folheações é empregada na eliminação de singularidades de aplicações biracionais, resultando uma descrição das superfícies racionais.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer sinceramente a generosidade dos seguintes professores (na ordem em que os conheci): Jaime Ripoll, pela acolhida, por seu espírito científico e anti-burocrático; Ada Doering, por tantas aulas e simpatia; Nubem Medeiros, pela paciência e camaradagem; Eduardo Brietzki, pelo seu trabalho e seriedade; Artur Lopes, pelo seu entusiasmo, pelo apoio recebido.

Ao prof. Marcos Sebastiani, em quem encontrei tudo isso, desde o princípio, agradeço também as lições sobre ética, política e música.

Agradeço às gentis bibliotecárias Adriana Dorneles, Erica Menella e Jane Camboim e a Ana Gutierrez, pela confiança e apoio.

A Manoel Silveira, do laboratório de computação, obrigado pela atenção.

Aos colegas dos seminários, Elisabeth Gomes e Ivan Pan.

À camaradagem de todos os colegas da Matemática.

Por fim, à "retaguarda" essencial e incansável que foram minhas duas famílias; especialmente à minha companheira,a meu pai e a meu irmão Elfio.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Nesta dissertação estudam-se algumas inter-relações entre a geometria biracional de superfícies e a resolução de singularidades de sistemas de Pfaff analíticos (com singularidades isoladas).

Na direção da geometria para os sistemas de Pfaff, o objetivo central é demonstrar o teorema 3.2.2 : trata-se de um tipo de resolução de singularidades para sistemas de Pfaff analíticos no plano projetivo complexo, com singularidades isoladas, através de aplicações biracionais. Essa resolução se caracteriza por:

i) o sistema resultante ainda está definido no plano e tem singularidades isoladas e

ii) além das singularidades irredutíveis há somente singularidades com a propriedade de que por uma explosão não dão origem a singularidades sobre a reta excepcional.

Este resultado decorre da fatoração da aplicação quadrática biracional do plano projetivo em termos de explosões e contra - ções em conjunção com o teorema de Seindenberg (empregando-se o conceito de transformado estrito de sistema de Pfaff por aplica - ção biracional).

O teorema 3.2.2 é o análogo para sistemas de Pfaff do teorema de M. Noether para curvas :"Toda curva algébrica plana é biracionalmente equivalente a alguma curva plana que só tem singularidades ordinárias ". De fato, o conhecimento dos teoremas de Noether e de Seindenberg levou o autor desta tese a conjecturar um resul - tado aproximado ao 3.2.2, e a demonstrar o 3.2.2, independentemente do trabalho de M. Carnicer [C].

Na outra direção, menos usual, de sistemas de Pfaff para a geometria biracional, há o teorema 4.1.1, corolário do 3.2.2, que dá uma propriedade das superfícies racionais ; na mesma ordem de idéias se demonstra o clássico teorema 4.2.1 da geometria via o teorema de Seindenberg.

Além de generalidades sobre os sistemas de Pfaff, o trabalho inclui uma justificação do uso desse conceito ao invés do de campos vetoriais; ademais, faz referência a resultados onde intervém o espaço topológico dos sistemas de Pfaff com singularidades isoladas em uma superfície.

1. SISTEMAS DE PFAFF

1.1 DEFINIÇÃO DE SISTEMA DE PFAFF E GENERALIDADES

Neste trabalho o interesse está em estudar pontos singulares de equações diferenciais analíticas em superfícies algébricas projetivas complexas não-singulares e na resolução de singularidades no caso específico do plano projetivo complexo (denotado por $\mathbb{P}_2$).

No entanto, vários conceitos empregados no tratamento do tema se extendem a variedades analíticas complexas, como é o caso dos sitemas de Pfaff.

Definição 1.1.1 : Um <u>sistema de Pfaff analítico</u> numa superfície analítica complexa M é um par $(\{U_i\},\{\omega_i\})_{i\in I}$ onde $\{U_i\}_{i\in I}$ é um cobrimento aberto de M e $\{\omega_i\}_{i\in I}$ é um conjunto de 1-formas analíticas , ω_i definida em U_i, tais que em $U_i \cap U_j$ temos $\omega_j = g_{ij}\omega_i$ onde $g_{ij}: U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ são analíticas.

Considero o mesmo sistema de Pfaff em M a dois pares $(\{U_i\},\{\omega_i\})_{i\in I}$ e $(\{V_j\},\{\eta_j\})_{j\in J}$ como na def.1.1.1 se em toda interseção $U_i \cap V_j$ temos $\eta_j = h_{ij}\omega_i$ com $h_{ij}: U_i \cap V_j \longrightarrow \mathbb{C}^*$ analíticas.

Dado um sistema de Pfaff $\Omega = (\{U_i\},\{\omega_i\})_{i\in I}$ em M fica bem definido $\forall p$ $p \in M$ $L_p := \operatorname{Ker}\, \omega_i(p)$, $L_p \subset T_p(M)$ e $\dim_{\mathbb{C}} L_p = 1$ ou 2 caso $\omega_i(p) \neq 0$ ou $\omega_i(p) = 0$ respectivamente .

Definição 1.1.2 : $\left\{ L_p \ ; \ p \in M \right\}$ é a <u>distribuição associada</u> a $\Omega = (\{U_i\},\{\omega_i\})_{i\in I}$

Definição 1.1.3 : Se $\dim_{\mathbb{C}} L_p = 2$ dizemos que p é <u>ponto singular</u> (<u>singularidade</u>) de Ω.

Lema 1.1.1 :

a) Se $\left\{L_p; p\in M\right\} = \left\{\tilde{L}_p; p\in M\right\}$ são distribuições associadas a sistemas de Pfaff Ω e Γ em M, com singularidades isoladas em M, então $\Omega = \Gamma$.

b) Se $\left\{L_p; p\in U\right\} = \left\{\tilde{L}_p ; p\in U\right\}$, com $U \neq \emptyset$ aberto Zariski em M, e Ω e Γ têm singularidades isoladas em M então $\Omega = \Gamma$.

Prova : a) Se Ω se representa em U_i por ω_i e Γ, em V_j, por η_j, em $U_i\cap V_j\setminus \mathrm{Sing}(\Omega)$ temos $\eta_j = \tilde{h}_{ij}\omega_i$ com $\tilde{h}_{ij}$ analítica nunca nula.

Mas $\tilde{h}_{ij}$ se extende a $h_{ij}: U_i\cap V_j \longrightarrow \mathbb{C}^*$ porque as singularidades dos sistemas são isoladas.

b) Se $q\in U_i\cap V_j\setminus(\mathrm{Sing}(\Omega) \cup \mathrm{Sing}(\Gamma))$, como U é denso em M e os campos de retas $\{L_p;\ p\in M\setminus \mathrm{Sing}(\Omega)\}$ e $\{\tilde{L}_p;\ p\in M\setminus \mathrm{Sing}(\Gamma)\}$ dependem continuamente do ponto p, em q temos $L_q = \tilde{L}_q$.

Mostrando que $\mathrm{Sing}(\Omega) = \mathrm{Sing}\ (\Gamma)$ teremos a parte b) aplicando a parte a).

Suponhamos por absurdo $\mathrm{Sing}(\Omega) \neq \mathrm{Sing}(\Gamma)$; por exemplo, que existe $p\in \mathrm{Sing}(\Gamma)$ e $p\notin \mathrm{Sing}(\Omega)$. Tomo vizinhança de p, V_p, tal que $\mathrm{Sing}(\Gamma)\cap V_p = \{p\}$ e $\mathrm{Sing}(\Omega)\cap V_p = \emptyset$, $V_p\subset U_i\cap V_j$. Pelo caso anterior, em $V_p\setminus\{p\}$ temos $\eta_{j|V_p\setminus\{p\}} = \tilde{h}_{ij}\omega_i$, $\tilde{h}_{ij}$ analítica nunca nula, que se extende a V_p como função analítica nunca nula h_{ij}: $\eta_j = h_{ij}\omega_i$. Logo $p\notin \mathrm{Sing}(\Gamma)$. ■

Denoto $\mathrm{Sing}(\Omega) := \{\ p\in M\ ; p$ é ponto singular de $\Omega\ \}$.

Seja $p \in \mathrm{Sing}(\Omega)$ e (x,y) carta local com $x(p)=y(p)=0$ tal que uma 1-forma que representa Ω nesta carta é dada por :

$$\omega_i = \omega_i(x,y) = \sum_{s=k}^{\infty} P_s(x,y)dx + Q_s(x,y)dy$$

com $P_k \neq 0$ ou $Q_k \neq 0$, P_s e Q_s polinômios homogêneos de grau $\underline{s}$. Então :

Definição 1.1.4 : A multiplicidade algébrica da singularidade p de Ω é igual a $\underline{k}$.

Definição 1.1.5 : Uma solução de um sistema de Pfaff analítico Ω é uma aplicação analítica $\phi : D \longrightarrow M$, $D \subset \mathbb{C}$ aberto, tal que $\phi'(t) \in L_{\phi(t)}$ $\forall\, t \in D$ (ou equivalentemente $(\phi_{|\phi^{-1}(U_i)})^{*}(\omega_i)=0$ $\forall i \in I$)

Definição 1.1.6 : Uma separatriz de Ω é um subconjunto analítico Z de dimensão pura 1 (não necessariamente fechado) de M) tal que $\omega_{i}{}_{|Z^{o} \cap U_i} = 0$ $\forall i \in I$ onde Z^{o} é o conjunto de pontos regulares de Z.

Diremos separatriz algébrica (ou solução algébrica) quando Z acima for isomorfo a uma curva algébrica projetiva irredutível.

Lema 1.1.2 : Seja X campo vetorial analítico na superfície analítica M e $S := \{p \in M;\ X(p) = 0\}$ discreto em M. Então existe um único sistema de Pfaff analítico Ω em M com $\mathrm{Sing}(\Omega) = S$ e tal que $\forall p \in M \setminus S$ $L_p = \mathbb{C}X(p)$, onde $\{L_p ; p \in M\}$ é a distribuição associada a Ω .

Prova: Em $U \subset M$ aberto com coordenadas (x,y) temos:

$$X(x,y) = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \qquad a,b: U \longrightarrow \mathbb{C} \text{ analíticas}$$

e defino ω que representa Ω em U por $\omega(x,y) = b(x,y)dx - a(x,y)dy$.

A unicidade decorre do lema 1.1.1 a). ■

1.2 REPRESENTAÇÃO LOCAL POR CAMPOS VETORIAIS

Seja Ω sistema de Pfaff analítico na superfície analítica M.

Definição 1.2.1 : Diremos que Ω é <u>representado localmente por campo vetorial</u> se $\forall p \in M$ existem um aberto U_p de M e X_p campo vetorial analítico em U_p tal que em $U_p \setminus Sing(\Omega)$ X_p não se anula e ademais $L_p = \mathbb{C}\, X_p$. Se eventualmente o aberto U_p é toda M diremos que Ω é <u>representado globalmente por campo vetorial</u> em M .

Lema 1.2.1 :

Todo sistema de Pfaff analítico numa superfície analítica M é representado localmente por campo vetorial.

Prova : Se num aberto U com coordenadas (x,y) a forma que representa o sistema de Pfaff é dada por $\omega(x,y) = a(x,y)dx + b(x,y)dy$

então em U tomo o campo $X_U(x,y) := b(x,y)\frac{\partial}{\partial x} - a(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ ■

Lema 1.2.2 : Se Ω e Γ são sistemas de Pfaff analíticos com singularidades isoladas que têm a mesma representação local por campo vetorial em M então $\Omega = \Gamma$.

Prova : Decorre do lema 1.1.1 b). ■

1.3 : OBSTRUÇÃO À REPRESENTAÇÃO GLOBAL POR CAMPOS VETORIAIS

Podemos colocar uma questão natural em relação à representação local por campos vetoriais analíticos de um sistema de Pfaff com singularidades isoladas, discutida no § 1.2: por que não escolher os campos vetoriais locais de modo que em $U_\alpha \cap U_\beta$ tenhamos $X_\beta = X_\alpha$ $\forall\ \alpha,\beta \in A$ ao invés de somente $X_\beta = \phi_{\alpha\beta} X_\alpha$, com $\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathbb{C}^*$ analítica ?

O objetivo desta seção é explicar que em geral <u>não</u> existe uma representação global por campos vetoriais analíticos para sistemas de Pfaff analíticos em superfícies analíticas complexas. O ponto de vista de campos vetoriais globais para tratar de equações diferenciais em superfícies, que é natural na categoria diferenciável e real se mostrará, portanto, restritivo no analítico complexo.

Seja $\mathcal{P}(M)$ o conjunto dos sistemas de Pfaff analíticos com singularidades isoladas em M.

Seja $\Omega \in \mathcal{P}(M)$ com uma representação local por campos vetoriais.

Como as singularidades de Ω são isoladas, temos em $V_i \cap V_j$

$$X_j = \phi_{ij} X_i$$

com $\phi_{ij}: V_i \cap V_j \longrightarrow \mathbb{C}^*$ analítica, extensão de $\tilde{\phi}_{ij}: V_i \cap V_j \setminus \mathrm{Sing}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}^*$.

Observo que

$$X_k = \phi_{ik}\ X_i \ ,\ X_k = \phi_{jk}\ X_j \quad \text{e} \quad X_j = \phi_{ij}\ X_i$$

implicam $X_k = \phi_{ik}\ X_i = \phi_{jk}\ X_j = \phi_{jk}(\phi_{ij}\ X_i)$, logo $\phi_{ik} = \phi_{ij}\ \phi_{jk}$.

<u>Afirmação</u> : $\Phi := (\langle V_i \rangle,\ \langle \phi_{ij} \rangle)_{i,j \in I}$ é um 1-cociclo de Čech a valores no feixe $\mathcal{O}^*$ dos germes de funções analíticas nunca nulas.

De fato, a 1-cocadeia Φ pertence ao núcleo do homomorfismo de cobordo $\delta_1 : C^1(N(V), \mathcal{O}^*) \longrightarrow C^2(N(V), \mathcal{O}^*)$, onde $V := (V_i)_{i \in I}$, pois se $\sigma = (V_0, V_1, V_2)$ temos :

$$\delta_1 \Phi\,(\sigma) := \prod_{s=0}^{2} (r_\sigma \Phi(U_0, \hat{U}_s, U_2))^{(-1)^s} = r_\sigma \phi_{21} (r_\sigma \phi_{20})^{-1} r_\sigma \phi_{10} = 1$$

pois $\phi_{20} = \phi_{21}\phi_{10}$ (acima r_σ é restrição das seções a $U_0 \cap U_1 \cap U_2$).

Proposição 1.3.1 : $\Omega \in \mathcal{P}(M)$ tem representação global por campo vetorial em M se e somente se o 1-cociclo Φ é um 1-cobordo.

Prova :

Supondo Φ é 1-cobordo, existe $f := (f_i : V_i \longrightarrow \mathbb{C}^*)$ 0-cocadeia com $\delta_0 f = \Phi$, ou seja, se $\sigma = (V_0, V_1)$:

$$\Phi(\sigma) = \prod_{s=0}^{1} (\, r_\sigma f(V_0, \hat{V}_s))^{(-1)^s} = r_\sigma f_1 (r_\sigma f_0)^{-1}$$

Ou seja, em $V_i \cap V_j$ $\phi_{ij} = f_i / f_j$. Se defino $\tilde{X}_i := f_i X_i$ em $V_i \cap V_j$ temos : $\tilde{X}_j = f_j X_j = f_j\ \phi_{ij} X_i = f_j (f_i / f_j)\ X_i = f_i X_i = \tilde{X}_i$.

Logo $\tilde{X} := (\tilde{X}_i)$ é representação global para Ω.

Reciprocamente, supondo existe $\tilde{X}$ representação global de Ω temos $\tilde{X}_{|V_i} = f_i X_i$ com X_i dado pela representação local de Ω. Logo :

$$X_{j|_{V_i \cap V_j}} = f_j^{-1}\, \tilde{X}_{|_{V_i \cap V_j}} = f_j^{-1}\, f_i X_{i|_{V_i \cap V_j}}$$

de onde $f_i / f_j = \phi_{ij}$ portanto $\Phi := ((V_i), \phi_{ij})$ é um 1-cobordo ■

Raciocínios semelhantes mostram que a classe de cohomologia de Φ está bem determinada.

Decorre da proposição 1.3.1 que a obstrução à representação global por campo vetorial de $\Omega \in \mathcal{P}(M)$ está em $H^1(M , \mathcal{O}^*)$.

Proposição 1.3.2 :

Se M é superfície analítica complexa com $H^1(M , \mathcal{O}^*) = 0$ (trivial) então todo $\Omega \in \mathcal{P}(M)$ tem representação global por campo vetorial analítico.

Prova : Da definição do primeiro grupo de cohomologia a coeficientes em $\mathcal{O}^*$ e proposição 1.3.1. ∎

Exemplo 1.3.1 : Pode-se mostrar que, no caso em que M é um bidisco $B_r := \{ (x,y) \in \mathbb{C}^2;\ |x|<r \text{ e } |y|<r \}$, $H^1(B_r, \mathcal{O}^*) = 0$

Em superfícies analíticas complexas compactas, por exemplo, é muito restritiva a condição de existência de campos vetoriais analíticos na superfície (não triviais), como pode ser visto em [C-H-K]. Obviamente, quando são equivalentes as noções de sistema de Pfaff e campos vetoriais globais o tratamento das questões sobre as equações diferenciais analíticas pode se simplificar.

TOPOLOGIA DO CONJUNTO DE SISTEMAS DE PFAFF COM SINGULARIDADES ISOLADAS NUMA SUPERFÍCIE

Podemos introduzir uma topologia τ no conjunto dos sistemas de Pfaff com singularidades isoladas numa superfície M, denotado $\mathcal{P}(M)$ [baseado em L.N;1]. Posteriormente denotaremos o par $\left(\mathcal{P}(M), \tau\right)$ ainda por $\mathcal{P}(M)$.

Dado $\Omega \in \mathcal{P}(M)$, pelo lema 1.2.1 temos uma representação local de Ω por campo vetorial, denotada $(\{V_\alpha\}, \{X_\alpha\})_{\alpha\in A}$ onde X_α é campo vetorial em V_α.

Sem perda de generalidade suponho $\forall\alpha$ V_α é domínio de carta local de M $\phi_\alpha : V_\alpha \longrightarrow B_2$ onde $B_r := \{ (x,y)\in \mathbb{C}^2; |x|<r \text{ e } |y|<r \}$, tais que $W_\alpha := \phi_\alpha^{-1}(\bar{B}_1)$ formam também uma cobertura de M.

Fixo Ω e uma representação local $(\{V_\alpha\}, \{X_\alpha\})_{\alpha\in A}$. Dado $\Gamma\in \mathcal{P}(M)$ podemos obter uma representação local de Γ, $(\{V_\alpha\}, \{Y_\alpha\})_{\alpha\in A}$, no cobrimento $\{V_\alpha\}$, se para cada α tomo a representação global por campo vetorial Y_α de $\Gamma_{|V_\alpha}$ (exemplo 1.3.1)

Uma ε-vizinhança de Ω, denotada $\mathcal{U}(\Omega,\varepsilon)$, é definida como o conjunto dos $\Gamma\in \mathcal{P}(M)$ tais que $\forall\alpha\in A$ existe função $\mu_\alpha : \phi_\alpha(V_\alpha) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ com :

$$\sup_{p\in W_\alpha} \left\{ \| \phi_{\alpha *}X_\alpha(p) - \mu_\alpha \phi_{\alpha *}Y_\alpha(p) \| \right\} < \varepsilon .$$

Verifica-se que $\left\{ \mathcal{U}(\Omega,\varepsilon);\ \Omega \in \mathcal{P}(M),\ \varepsilon > 0 \right\}$, fixada a representação local de Ω, é base de uma topologia τ em $\mathcal{P}(M)$.

1.4 SISTEMAS DE PFAFF EM SUPERFÍCIES ALGÉBRICAS PROJETIVAS COM INTEGRAL PRIMEIRA RACIONAL

Definição 1.4.1 : Se $f: M \longrightarrow \mathbb{C}$ é função holomorfa, onde M é superfície analítica conexa e $\Omega = (\{U_i\},\{\omega_i\})_{i\in I}\in \mathcal{P}(M)$, dizemos que <u>f é integral primeira holomorfa de Ω</u> se f não é constante e $(d f_{|U_i}) \wedge \omega_i = 0 \quad \forall i\in I$.

Claramente a definição 1.4.1 é vazia no caso das superfícies compactas. No caso das superfícies algébricas projetivas, onde as "funções" são as funções racionais, temos outra noção de integral primeira.

Seja M superfície algébrica projetiva (complexa, não-singular), $M \subset \mathbb{P}_n$.

Definição 1.4.2 : Uma <u>função</u> <u>racional</u> <u>de</u> <u>M</u> <u>em</u> $\mathbb{P}_1$, denotada por $f: M \dashrightarrow \mathbb{P}_1$, é dada por $f = P/Q$, onde $\underline{P}$ e $\underline{Q} \in \mathbb{C}[x_0,\ldots x_n]$, homogêneos, têm o mesmo grau $\underline{d}$, $\mathrm{mdc}(g,h)=1$ e Q não é nulo sobre M.

Logo f racional é uma função bem definida em $\{p\in M;\ P(p) \neq 0$ ou $Q(p) \neq 0 \}$, chamado <u>conjunto</u> <u>regular</u> da f .

Em cada parte afim de M, $M(i) := M \cap \mathbb{C}^n(i)$ $f_{|M(i)}$ é dada por $f = P_i/Q_i$ com P_i e $Q_i \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ do mesmo grau; portanto, $f_{|M(i)}$ é uma função bem definida em $\{ p\in M(i);\ P_i(p) \neq 0$ ou $Q_i(p) \neq 0 \}$ a valores em $\mathbb{P}_1$.

Definição 1.4.3 : Seja $f: M \dashrightarrow \mathbb{P}_1$ função racional não constante. <u>f</u> <u>é</u> <u>integral</u> <u>primeira</u> <u>racional</u> de $\Omega\in \Pi(M)$ se em toda parte afim $M(i)$ de M $f_{|M(i)} = P_i/Q_i$ é integral primeira holomorfa de $\Omega_{|M(i)\setminus\{p\in M(i);Q_i(p)=0\}}$.

Lema 1.4 .1: Dada $f: M \dashrightarrow \mathbb{P}_1$ função racional não constante existe um único $\Omega\in \Pi(M)$ que tem f por integral primeira racional.

Prova : Se $M(i)$ tem coordenadas (x,y), $f_{|M(i)} = P_i/Q_i$ e $dP_iQ_i - P_idQ_i = A(x,y)dx + B(x,y)dy$ com $m(x,y) = \mathrm{mdc}\ (A,B)$, defino em $U_i = M(i)\setminus\{ p\in M(i);\ Q_i(p)=0 \}$ a 1-forma analítica com singula -

ridades isoladas $\omega_i := \dfrac{dP_iQ_i - P_idQ_i}{m(x,y)}$.

Então é claro que em U_i $d(P_i/Q_i) \wedge \omega_i = 0$.

Ademais, $((U_i),(\omega_i))_{i\in I}$ é um sistema de Pfaff (com singula - ridades isoladas) pois em $U_i \cap U_j$, onde $d(P_i/Q_i) = d(P_j/Q_j)$, temos $\omega_j = \lambda_j\ d(P_i/Q_i)$ e $\omega_i = \lambda_i\ d(P_i/Q_i)$ com λ_i, λ_j analíticas . Então $\omega_j = \lambda_j/\lambda_i\ \omega_i$ e a função λ_j/λ_i, meromorfa, é de fato analítica nunca nula porque ω_i e ω_j são analíticas com singularidades isoladas.

A unicidade de $\Omega := ((U_i),(\omega_i))_{i\in I}$ decorre do lema 1.1.1 b). ∎

Um Ω nas condições do lema 1.4.1 será referido por "Ω : $df = 0$".

Para o sistema $\Omega \in \mathcal{P}(M)$ com integral primeira racional $f=P/Q$ é claro que $\lambda P + \eta Q = 0$ $\forall$ $(\lambda,\eta) \in \mathbb{P}_1$ são separatrizes algébricas.

De fato, $\Omega_{|M(i) \setminus (Q_i=0)}$ é dado por $\omega_i = h_i d(P_i/Q_i)$, h_i analítica e:

$$\omega_{i\,|\lambda P_i + \eta Q_i = 0} = h_i d(\lambda/\eta) = 0$$

Verifica-se que todas as separatrizes de Ω são do tipo $\lambda P + \eta Q = 0$ de onde decorre que $f: M \dashrightarrow \mathbb{P}_1$ é constante ao longo de cada separatriz de Ω.

Exemplo 1.4.1 :

Dados dois polinômios homogêneos de mesmo grau $\underline{d}$ em $\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2]$ e co-primos, $\lambda P + \eta Q = 0$ $(\lambda,\eta) \in \mathbb{P}_1$ é um sistema linear de curvas em $\mathbb{P}_2$. O sistema Ω : $d(P/Q)=0$ tem como integral primeira racional a função racional $f: \mathbb{P}_2 \dashrightarrow \mathbb{P}_1$ que associa a cada ponto de $\mathbb{P}_2 \setminus (p \in \mathbb{P}_2;$

$P(p) = Q(p) = 0$) o parâmetro (λ,η) da curva do sistema linear que passa por p.

Uma questão natural em relação aos sistemas com integral primeira racional numa superfície algébrica projetiva M, concerne ao "tamanho" do conjunto que definem em $\mathcal{P}(M)$. Se M é $\mathbb{P}_2$ a resposta a essa questão é que os sistemas com integral primeira racional formam um conjunto pequeno em $\mathcal{P}(\mathbb{P}_2)$ ("pequeno" no sentido que passo a explicar).

De fato os sistemas com integral primeira racional no plano projetivo têm a seguinte caracterização :

Teorema 1.4.1 :[conf. J]

$\Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{P}_2)$ tem integral primeira racional se e somente se Ω tem infinitas separatrizes algébricas.

Por outro lado, é sabido [conf. L.N:2 ou G.M-B] que $\mathcal{P}(\mathbb{P}_2)$ tem infinitas componentes conexas, denotadas $\mathcal{X}_n$,n=0,1,2...

O teorema a seguir [conf L.N:2] , juntamente com a implicação fácil ($\Rightarrow$) do teorema 1.4.1 justifica a afirmação acima :

Teorema 1.4.2 :[conf. L.N:2]

Para todo $n \geq 2$, existe um aberto denso $U_n \subset \mathcal{X}_n$ formado de sistemas de Pfaff sem nenhuma separatriz algébrica.

2.1 EXPLOSÃO DE UM PONTO NUMA SUPERFÍCIE

TRANSFORMADO ESTRITO DE SISTEMA DE PFAFF POR EXPLOSÃO

Explosão de (0,0) em $\mathbb{C}^2$[conf. C-S].

Tomo em $\mathbb{P}_1$:= { retas em $\mathbb{C}^2$ por (0,0) } as coordenadas locais

$$\phi_1 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}_1 \qquad \text{e} \qquad \phi_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}_1$$

$$\phi_1(t) = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2;\ y=tx\} \qquad \phi_2(u) = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2;\ x=uy\}$$

Logo o eixo Ox está na imagem de ϕ_1 e o eixo Oy, na imagem de ϕ_2. Denoto Op a reta por (0,0) e $p=(p_1,p_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Definição 2.1.1 : A explosão de (0,0) em $\mathbb{C}^2$ é o conjunto de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_1$ dado por $\left\{(p,Op);\ p \in \mathbb{C}^2 \setminus (0,0)\right\} \cup \left\{(0,0) \times \mathbb{P}_1\right\}$. Será denotada por $\mathbb{C}^2_0$.

Proposição 2.1.1 : $\mathbb{C}^2_0$ é fibrado vetorial holomorfo de posto 1 e base $\mathbb{P}_1$.

Prova : Seja $\eta : \mathbb{C}^2_0 \longrightarrow \mathbb{P}_1$ a projeção contínua dada por

$$\begin{cases} \eta(p,Op) = Op \\ \eta((0,0),Op) = Op \end{cases}$$

Sejam os abertos de $\mathbb{P}_1$:

$$V_1 := \mathbb{P}_1 \setminus Oy$$
$$V_2 := \mathbb{P}_2 \setminus Ox$$

Sejam $\beta_i : \eta^{-1}(V_i) \longrightarrow \mathbb{C}^2 \quad i = 1,2$ dadas por :

$$\begin{cases} \beta_1(p, Op) = (p_1, \phi_1^{-1}(Op)) \\ \beta_1((0,0), Op) = (0, \phi_1^{-1}(Op)) \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_2(p, Op) = (\phi_2^{-1}(Op), p_2) \\ \beta_2((0,0), Op) = (\phi_2^{-1}(Op), 0) \end{cases}$$

Logo : $(\beta_2 \circ \beta_1^{-1})(x,t) = \beta_2((x, xt), tx) = (1/t, tx)$ porque em $V_1 \cap V_2$ temos $t, u \neq 0$ e $1/t = u$.

Ademais η é holomorfa, pois nas coordenadas (x,t) de $\eta^{-1}(V_1)$ e (u,y) de $\eta^{-1}(V_2)$, η se escreve : $\eta(x,t) = t$ e $\eta(u,y) = u$. ∎

Seja $\Pi_0 : \mathbb{C}_0^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ dada por $\Pi_0(p, Op) = p$ e $\Pi_0((0,0), Op) = (0,0)$ a <u>contração</u> , que em coordenadas é da forma :

$$\Pi_0(x,t) = (x, \ xt) \qquad e \qquad \Pi_0(u,y) = (uy, y)$$

Logo a contração Π_0 é holomorfa e é fácil ver que $\Pi_0^{-1}((0,0)) = \{(0,0)\} \times \mathbb{P}_1$ e que $\Pi_0 \,|_{\mathbb{C}_0^2 \setminus \Pi_0^{-1}(0,0)}$ é isomorfismo analítico.

Definição 2.1.2 : $\Pi_0^{-1}((0,0))$ é a <u>reta excepcional</u> da explosão.

Seja $p \in M$ superfície analítica. Seja $U \subset M$ aberto isomorfo a um bidisco, com $p = (0,0)$ na carta local em U.

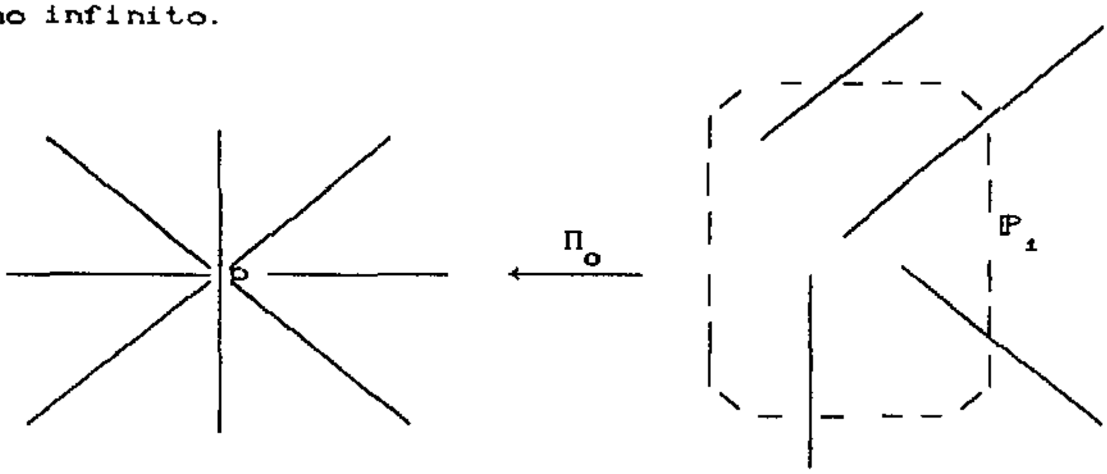
Definição 2.1.3 :

A <u>explosão de p em M</u> é a superfície analítica obtida da união $(M \setminus U) \cup (U \setminus \{(0,0)\} \cup \Pi_0^{-1}(U \setminus \{(0,0)\}) \cup \Pi_0^{-1}((0,0))$ com a identificação de $U \setminus \{(0,0)\}$ e $\Pi_0^{-1}(U \setminus \{(0,0)\})$ através da Π_0.

Será denotada por M_p. Temos $\Pi : M_p \longrightarrow M$ aplicação holomorfa dada pela contração da reta excepcional em M_p.

Exemplo 2.1.1:

Seja $p \in \mathbb{P}_2$ que suponho é $p = (0,0) \in \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{P}_2 \setminus L_\infty$ onde L_∞ é a reta no infinito.



$\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{P}_2 \setminus L_\infty$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{C}^2_0$

Como temos um isomorfismo analítico entre $(\mathbb{P}_2)_p \setminus \Pi_0^{-1}(0,0)$ e $\mathbb{P}_2 \setminus \{p\}$, o fibrado em retas afins $\mathbb{C}^2_0$ se completa a um fibrado em retas projetivas com base $\mathbb{P}_1$, já que as retas por $p \in \mathbb{C}^2$ se completam a retas projetivas (formando um feixe por p em $\mathbb{P}_2$).

O fibrado sobre $\mathbb{P}_1$ com fibra $\mathbb{P}_1$ dado pela explosão de um ponto em $\mathbb{P}_2$ do exemplo 2.1.1 acima será denotado F_1.

F_1 <u>não</u> é analiticamente isomorfo a $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, por exemplo, que denoto F_0.

De fato,[conf.B] existem infinitos fibrados holomorfos sobre $\mathbb{P}_1$ com fibra $\mathbb{P}_1$, os F_n $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$ dois a dois <u>não</u> isomorfos analiticamente , porém <u>biracionalmente equivalentes</u> (no sentido do § 3.1).

Transformado estrito de sistema de Pfaff : [conf C-S]

Sejam $\Omega \in \mathcal{P}(M)$, M superfície analítica, $p \in M$ e M_p explosão de p em M. Suporei $p \in U \subset M$ aberto com coordenadas (x,y) tais que $x(p)=y(p)=0$; neste sentido $p=(0,0)$. O objetivo desta seção é justificar a seguinte:

Afirmação : Existe um único sistema de Pfaff analítico com singularidades isoladas em M_p, chamado o transformado estrito de Ω pela explosão de p e denotado $\Pi^*(\Omega)$, tal que $\Pi^*(\Omega)_{|M_p \setminus \Pi_o^{-1}(0,0)}$ se identifica a $\Omega_{|M \setminus (p)}$ através do isomorfismo:

$$\Pi_{|M_p \setminus \Pi_o^{-1}(0,0)} : M_p \setminus \Pi_o^{-1}(0,0) \longrightarrow M \setminus (p)$$

Suponho inicialmente $p \in \operatorname{Sing}(\Omega)$, $U \cap \operatorname{Sing}(\Omega) = (p)$ e p tem multiplicidade algébrica k ($k \geq 1$). Em suma $\Omega_{|U}$ é dado por :

$$\omega = \omega(x,y) = \sum_{j=k}^{\infty} P_j(x,y)dx + Q_j(x,y)dy \ , \ P_k \text{ ou } Q_k \not\equiv 0$$

Ao impormos a condição de que o sistema a definir $\Pi^*(\Omega)$ e Ω se identifiquem via $\Pi_{o|M_p \setminus \Pi_o^{-1}(0,0)}$ devemos considerar o pull-back de ω por Π_o em vizinhanças coordenadas (x,t) e (u,y) de $\Pi_o^{-1}(0,0)$:

$$\Pi_o^* \ \omega(x,t) := \sum_{j=k}^{\infty} P_j(x,tx)dx + Q_j(x,tx) \ (dx\ t + x\ dt) =$$
$$= \sum_{j=k}^{\infty} x^j (P_j(1,t) + tQ_j(1,t))dx + x^{j+1} Q_j(1,t)dt$$

$$\Pi_o^* \omega(u,y) := \sum_{j=k}^{\infty} P_j(uy,y)(dy\ u+y\ du) + Q_j(uy,y)dy =$$

$$= \sum_{j=k}^{\infty} y^{j+1}P_j(u,1)du + y^j(Q_j(u,1)+uP_j(u,1))dy$$

Definida desse modo a 1-forma $\Pi_o^*\omega$ tem singularidades em toda $\Pi_o^{-1}(0,0)\cong \mathbb{P}_1$ (de fato x =0 implica $\Pi_o^*\omega\ (0,t)\equiv 0$, por ex.). Logo para que $\Pi^*(\Omega)$ tenha singularidades isoladas preciso eliminar os fatores x, y dividindo $\Pi_o^*\omega(x,t)$ e $\Pi_o^*\ \omega(u,y)$ por alguma potência x^ν, y^ν, respectivamente .

Decorre que $\Pi^*(\Omega)$ se representa em vizinhanças (x,t) e (u,y) de $\Pi_o^{-1}(0,0)$ por :

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}(x,t) := \frac{\Pi_o^*\omega(x,t)}{x^\nu} \quad \text{e} \quad \hat{\omega} = \hat{\omega}(u,y) := \frac{\Pi_o^*\omega(u,y)}{y^\nu}$$

Temos de fato um sistema de Pfaff em M_p porque $\hat{\omega} = \hat{\omega}(x,t)$ e $\Pi_o^*\omega(x,t)$, onde $\Pi_o=\Pi_o(x,t)$ é isomorfismo i.é. $x \neq 0$, diferem por multiplicação por função holomorfa não nula x^ν $\nu\in\mathbb{N}$ (analogamente na carta (u,y)); por outro lado, sobre $\Pi_o^{-1}(0,0)$, na interseção das cartas locais $\underline{t}$ e $\underline{u}$ temos $\hat{\omega}(u,y) = u^\nu\ \hat{\omega}(x,t)$, com $u \neq 0$.

Devo considerar os casos em que a potência ν exigida para se ter $\hat{\omega}$ com singularidades isoladas seja 1) $\nu\geq k+1$ e 2) $\nu=k$.

É claro que o caso 1) equivale a $x^kP_k(1,t) + x^kt\ Q_k(1,t) \equiv 0$ na expressão anterior para $\Pi_o^*\omega(x,t)$; ou seja :

$$x^k(x^kP_k(1,t) + x^kt\ Q_k(1,t))\equiv 0 \iff xP_k(x,xt) + xtQ_k(x,xt)\equiv 0 \iff$$

$$\iff x\ P_k(x,y) + yQ_k(x,y) \equiv 0$$

Definição 2.1.4 : Uma singularidade $(0,0)$ da 1-forma $\omega(x,y)=\sum_{j=k\geq 1}^{\infty} P_j(x,y)dx+Q_j(x,y)dy$ é <u>dicrítica</u> se $xP_k(x,y)+yQ_k(x,y)\equiv 0$

É fácil ver que no caso 1), dicrítico, $\Pi_o^{-1}(0,0)$ não é separatriz de $\Pi^*(\Omega)$ (por ex. para $\hat{\omega}(x,t)=[P_{k+1}(1,t)+tQ_{k+1}(1,t)]dx + Q_k(1,t)dt + x\omega'$ fazendo $x = 0$).

Ao contrário do caso 2), não-dicrítico, em que $\Pi^{-1}(0,0)$ sim é separatriz (como se vê fazendo $x = 0$ em $\hat{\omega}(x,t) = [(P_k(1,t) + tQ_k(1,t))dx + x\, Q_k(1,t)dt] + x\,\omega'$).

Ainda se observa que por uma singularidade dicrítica passam infinitos germes de separatrizes (imagens pela aplicação própria $\Pi : M_p \longrightarrow M$ das separatrizes de $\Pi^*(\Omega)$ tranversais ou tangentes à reta excepcional em M_p).

Em particular, um ponto regular de um sistema de Pfaff se comporta por explosão como no caso não-dicrítico.

Exemplo 2.1.2 : $(0,0)\in \mathbb{C}^2$ é singularidade dicrítica para $\omega(x,y):= y\,dx -x\,dy$, pois $x\,y + y\,(-x) \equiv 0$. As separatrizes do sistema em $\mathbb{C}^2$ dado pela $\omega=\omega(x,y)$ são as retas pela origem, pois $\omega_{|(x,\lambda x)}= \lambda x -x\lambda \equiv 0$ e também $\omega_{|(uy,y)}\equiv 0$.

Exemplo 2.1.3 : Se $\lambda P +\eta Q =0$ $(\lambda,\eta)\in \mathbb{P}_1$, P e Q polinômios homogêneos grau <u>d</u> , é sistema linear de curvas em $\mathbb{P}_2$ então cada ponto-base i.é. $\{ p\in \mathbb{P}_2;\ P(p) = Q(p) =0 \}$, é dicrítico para o o sistema Ω : $d(P/Q)=0$.

Definição 2.1.5 : Neste trabalho chamo de <u>estritamente dicrítica</u> uma singularidade dicrítica p de Ω se $\Pi^*(\Omega)$, obtido por explosão em p, não tem nenhuma singularidade sobre a reta excepcional.

Observo que os exemplos 2.1.2 e 2.1.3, se suponho adicionalmente que as curvas $P = 0$ e $Q = 0$ se intersectam transversalmente, são também exemplos de sistemas com singularidades estritamente dicríticas.

Para o estudo das singularidades (estritamente) dicríticas ver [K].

Observação : Seja $f = P/Q$ a integral primeira racional do sistema de Pfaff do exemplo 2.1.3, com $P = 0$ e $Q = 0$ transversais. Se explodimos uma vez cada um dos d^2 pontos de $Sing(\Omega)$ obtemos uma superfície , denotada S , e um morfismo $\Pi : S \longrightarrow \mathbb{P}_2$ de contração nas d^2 retas excepcionais em S. Então $R := f \circ \Pi$ é uma função bem definida e holomorfa, em S, cujo significado geométrico é associar a cada ponto $q \in S$ o parâmetro da curva por <u>q</u> que é transformado estrito por explosão de alguma curva do sistema linear $\lambda P + \eta Q = 0$.

O processo exemplificado de eliminação das singularidades de aplicações racionais por explosões será tratado no § 4.2.

UFRGS
SISTEMA DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA SETORIAL DE MATEMÁTICA

2.2 RESOLUÇÃO DE SINGULARIDADES DE SISTEMAS DE PFAFF POR EXPLOSÕES

Seja $p \in M$ superfície analítica e $\Omega \in \mathcal{P}(M)$. Uma sequência finita de explosões começando em p significará fazer a explosão M_p, em seguida explodir algum ponto de M_p sobre a reta excepcional, e assim um número finito de vezes sempre explodindo pontos em retas excepcionais de explosões anteriores.

O transformado estrito de Ω pela sequência de explosões é o sistema de Pfaff resultante de todas as explosões da sequência. O conjunto das retas excepcionaisintroduzidas ao longo do processo será chamado divisor excepcional (relativo à sequência de explosões).

O teoremas 2.2.1 e 2.2.2, citados a seguir, são fatos fundamentais da teoria.

Teorema 2.2.1 :[baseado C-S] Existe uma sequência finita de explosões começando em p tal que o sistema de Pfaff transformado estrito de Ω pela sequência de explosões tem todas as singularidades sobre o divisor excepcional com multiplicidade algébrica 1.

Definição 2.2.1 : $p \in Sing(\Omega)$ (com multiplicidade algébrica 1) é <u>irredutível</u> se em coordenadas convenientes Ω se representa por uma 1-forma cuja parte linear $\lambda x\, dy - \mu y\, dx$ satisfaz :

i) se $\lambda\ \mu \neq 0$ então $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}^{+}$ ii) se $\lambda\ \mu = 0$ então $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$

A denominação "irredutível" se justifica pelo fato de que a propriedade que define essas singularidades se preserva por explosões. Ademais é fácil ver que no caso irredutível há 2 germes de separatrizes (se temos i)) ou 1 germe (se ii)).

Teorema 2.2.2 :(Seindenberg) [baseado em C-S]

Existe uma sequência finita de explosões começando em p tal que o transformado estrito de Ω pela sequência de explosões tem sobre o divisor excepcional apenas singularidades irredutíveis.

3. Resolução de singularidades de sistemas de Pfaff por transformações de Cremona

3.1 TRANSFORMAÇÕES BIRACIONAIS

TRANSFORMADO ESTRITO DE SISTEMA DE PFAFF POR TRANSFORMAÇÁO BIRACIONAL

Esta seção começa lembrando algumas definições e resultados.

Se M, N são superfícies algébricas projetivas(complexas e não singulares), $N \subset \mathbb{P}_\nu$ $\nu \in \mathbb{N}$, uma <u>aplicação racional</u> f de M em N , dada por uma ν -upla de funções racionais de M em $\mathbb{P}_1$, é uma aplicação analítica em $M \setminus F$, F conjunto finito de pontos da M. Os pontos de $M \setminus F$ serão ditos os pontos <u>regulares da f</u> e os de F, os <u>singulares da f</u>.

Define-se $f(M) := \overline{f(M \setminus F)}$ e para curva $\mathscr{C} \subset M$, $f(\mathscr{C}) := \overline{f(\mathscr{C} \setminus F)}$.

Se $f: M \dashrightarrow N$ racional tem inversa racional f^{-1} diremos que a f é uma <u>aplicação biracional</u>, e que M e N são <u>biracionalmente equivalentes.</u> Neste caso, se f^{-1}não está definida em $p \in N$, mostra se que existe uma curva projetiva $\mathscr{C} \subset M$ tal que $f(\mathscr{C}) = p$. Diz-se então que a curva $\mathscr{C}$ é <u>contraída ao ponto p pela f.</u>

A $f: M \dashrightarrow N$ biracional é um isomorfismo analítico entre $U \subset M$ e $V \subset N$ abertos de Zariski não vazios.

Exemplo 3.1.1 : Seja $\mathbb{C}^2_0$ a explosão de $(0,0)$ em $\mathbb{C}^2$. Então $\pi_0 : \mathbb{C}^2_0 \longrightarrow \mathbb{C}^2$, a contração, é uma aplicação biracional; de fato, $\pi_0|_{\mathbb{C}^2_0 \setminus \pi_0^{-1}(0,0)}$ é um isomorfismo analítico. Ademais, π_0 é regular em toda $\mathbb{C}^2_o$ e sua inversa racional tem o $(0,0)\in \mathbb{C}^2$ como ponto singular.

Def. 3.1.1 : Uma aplicação biracional $f:M \dashrightarrow N$ regular em toda M é um <u>morfismo biracional</u> ; denotado por $f:M \longrightarrow N$.

Def. 3.1.2 : Se existe $f:M \longrightarrow N$ morfismo biracional dizemos que M <u>domina</u> N.

Exemplo 3.1.2 : Seja $\tilde{M}$ superfície obtida de M por uma sequência finita de explosões e $\Pi:\tilde{M} \longrightarrow M$ a sequência correspondente de contrações. Então $\tilde{M}$ domina M.

Convenção : se a $\tilde{M}$ do exemplo 3.1.2 for obtida por explosão de um número finito de pontos de M, farei referência , eventualmente, à tripla $(\tilde{M},M,\Pi)$, usando a expressão "a explosão de pontos $p_1,\ldots, p_k$ de M pela Π ".

A seguir uma aplicação biracional que <u>não</u> é um morfismo.

Exemplo 3.1.3 : <u>A transformação quadrática standard Q</u> [conf. B-K]

No plano projetivo complexo com coordenadas homogêneas $(x_0:x_1:x_2)$, consideramos a transformação birracional quadrática standard $Q:\mathbb{P}_2 \dashrightarrow \mathbb{P}_2$ dada por :

$$Q(x_0:x_1:x_2) = (x_1x_2:x_0x_2:x_0x_1) = (y_0:y_1:y_2).$$

Os pontos $P_0=(1:0:0)$, $P_1=(0:1:0)$, $P_2=(0:0:1)$, singulares para Q são os <u>pontos fundamentais da Q</u> e as retas $L_i: x_i=0$, as <u>retas fundamentais da Q</u>. A restrição da Q, $\tilde{Q}:\mathbb{P}_2\setminus\bigcup_{i=0}^{2}L_i \longrightarrow \mathbb{P}_2\setminus\bigcup_{i=1}^{2}L_i$ é um isomorfismo analítico e $\tilde{Q}\circ\tilde{Q} = \mathrm{Id}$.

A importância das aplicações biracionais quadráticas (i.é. composição da standard Q com mudanças de coordenadas projetivas de $\mathbb{P}_2$) aparece no teorema que segue , que menciono mas que não empregarei nas demonstrações do § 3.2.

Teorema 3.1.1 (Max Noether)

Toda $T: \mathbb{P}_2 - - \rightarrow \mathbb{P}_2$ biracional é uma composição de aplicações biracionais quadráticas.

O grupo das transformações biracionais de $\mathbb{P}_2$ em $\mathbb{P}_2$ é chamado grupo de Cremona.

TRANSFORMADO ESTRITO DE SISTEMA DE PFAFF POR APLICAÇÃO BIRACIONAL

Definição 3.1.3 : Sejam M e N superfícies analíticas complexas e $f: M \longrightarrow N$ isomorfismo bianalítico. Seja $\Omega = (\langle U_i \rangle, \langle \omega_i \rangle)_{i \in I}$ $\Omega \in \Pi(N)$; define-se $f^*(\Omega) \in \mathcal{P}(M)$ por:

$$f^*(\Omega) := \left\{ \langle f^{-1} U_i \rangle \rangle \ , \ \langle (f_{|f^{-1}(U_i)})^* \omega_i \rangle \right\}_{i \in I}$$

Teorema-Definição 3.1.2 : Sejam M e N superfícies algébricas projetivas complexas não singulares e $T: M - - \rightarrow N$ aplicação biracional. Seja $\Omega \in \mathcal{P}(N)$.

Então existe um único sistema de Pfaff em $\mathcal{P}(M)$, denotado $T^*(\Omega)$, tal que se $A \subset M$, $T(A) \subset N$ são abertos de Zariski não vazios com T regular em A, $T_{|A}: A \longrightarrow T(A)$ isomorfismo bianalítico, temos

$$T^*(\Omega)_{|A} = (T_{|A})^*(\Omega_{|T(A)})$$

$T^*(\Omega)$ é o transformado estrito de Ω pela T.

Para a demonstração deste teorema temos a definição e os lemas seguintes :

Definição 3.1.4 : Se $\Omega = (\{U_i\},\{\omega_i\})_{i\in I} \in \mathcal{F}(S)$, S é superfície, $W\subset S$ aberto, e η é 1-forma holomorfa em W, diremos que $(W,\eta)\in\Omega$ se $\eta\wedge\omega_i = 0$ em $U_i\cap W$ $\forall i\in I$.

Lema 3.1.1 : Seja $V'\subset N$ aberto Zariski não vazio da superfície N algébrica projetiva e f, g funções racionais em N, holomorfas em V' , $df\wedge dg\,(p)\neq 0$ $\forall p\in V'$. Seja $\Omega\in\mathcal{F}(N)$.

Então existem $V''\subset V'$ aberto Zariski não vazio e a, b funções racionais em N e holomorfas em V'', $a\neq 0$ ou $b\neq 0$, tais que:

$$(V'',\ a\,df + b\,dg\,)\in\Omega$$

Prova : Seja $\Omega = (\ \{U_i\},\{\omega_i\})_{i\in I}$. Temos $\omega_i = a_i df + b_i dg$ em $U_i\cap V'$, onde $a_i, b_i:\ U_i\cap V'\longrightarrow\mathbb{C}$ são holomorfas.

Caso $b_i = 0$ para algum i então $b_i = 0$ $\forall i\in I$. Neste caso tomo a=1, b = 0 e $(\ V',\ df)\in\Omega$.

Caso $b_i\neq 0$ $\forall i\in I$:

Então $\{\ U_i\cap V'\ ,a_i/b_i\ \}$ define uma função meromorfa h em V' .

De fato h é racional em N:

Seja $p\in N\setminus V'$, $p\in U_i$. Seja U_p vizinhança de p com coordenadas locais analíticas, em p, (x,y), $U_p\subset U_i$.

Então: $\omega_i = u\, dx + v\, dy$ em U_p

$\omega_i = a_i\, df + b_i\, dg$ em $U_p \cap V' \subset U_i \cap V'$

$df = \phi_1 dx + \phi_2 dy \quad dg = \psi_1 dx + \psi_2 dy$ em U_p ,

onde ϕ_1, ϕ_2, ψ_1, ψ_2 são meromorfas em U_p e

$$\begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{vmatrix} \not\equiv 0 \text{ em } U_p \text{ porque } df \wedge dg\,(p) \neq 0 \text{ em } U_p \cap V'.$$

Mas $u\, dx + v\, dy = a_i df + b_i dg \Rightarrow \begin{cases} u = a_i \phi_1 + b_i \psi_1 \\ v = a_i \phi_2 + b_i \psi_2 \end{cases}$

Pela regra de Cramer, a_i, b_i são meromorfas em U_p. Logo h é meromorfa em U_p e portanto h é meromorfa em N. Então h é racional em N. Defino $V'' := V' \cap$ {aberto onde h é holomorfa}, $a := h$, $b := 1$ e temos $(V'', h\, df + dg) \in \Omega$. ■

Lema 3.1.2 : Sejam $\tilde{U} \subset M$ aberto Zariski não vazio de M superfície algébrica projetiva, e ω 1-forma holomorfa em $\tilde{U}$, $\omega \not\equiv 0$.

Suponhamos que existem $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ funções racionais em M e holomorfas em $\tilde{U}$ tais que $\omega = \tilde{a}\, d\tilde{f} + \tilde{b}\, d\tilde{g}$ em $\tilde{U}$.

Então existe $\Theta \in \mathcal{P}(M)$ tal que $(\tilde{U}, \omega) \in \Theta$.

Prova : Se $p \in M$ e U_p é vizinhança de p com coordenadas (x,y), em $U_p \cap \tilde{U}$ $\omega = u\, dx + v\, dy$, com u, v meromorfas em U_p. Defino

$$\omega_p := \frac{u}{m} dx + \frac{v}{m} dy \quad \text{onde } m := \text{mdc } (u,v) \text{ em } p.$$

Então $\Theta := (\{U_p\}, \{\omega_p\})_{p \in M}$ ■

Prova Teor-Def. 3.1.2:

Dado $\Omega \in \mathcal{P}(N)$, pelo lema 3.1.1 existe $(V'', adf + bdg) \in \Omega$, com a, b, f, g funções racionais em N, holomorfas em V''.

Sejam $\tilde{a} = a \circ T$, $\tilde{b} = b \circ T$, $\tilde{f} = f \circ T$ e $\tilde{g} = g \circ T$, funções racionais em M. Seja $\tilde{U}$ aberto Zariski de M onde $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ são holomorfas. Defino $\omega := \tilde{a}\, d\tilde{f} + \tilde{b}\, d\tilde{g}$, holomorfa em $\tilde{U}$. Pelo lema 3.1.2 existe $\Theta \in \mathcal{P}(M)$ tal que $(\tilde{U},\omega) \in \Theta$.

Sejam $U \subset M$ e $V \subset N$ abertos Zariski tais que $T_{|U}: U \longrightarrow V$ é isomorfismo bianalítico. Sejam $B \subset V \cap V''$ aberto Zariski não vazio de N onde a df+b dg tem singularidades isoladas e $A = T^{-1}(B) \subset U \cap \tilde{U}$ aberto Zariski não vazio onde $\tilde{a}\, d\tilde{f} + \tilde{b}\, d\tilde{g}$ tem singularidades isoladas.

Então $\mathcal{B} := (\langle B\rangle, \langle a\, df + b\, dg_{|B}\rangle) \in \mathcal{P}(B)$ e $\Omega_{|B}$ são iguais, pelo lema 1.1.1 b), já que têm as mesmas distribuições associadas em B. Do mesmo modo, pelo lema 1.1.1.b), $\mathcal{A} := (\langle A\rangle, \langle \tilde{a}\, d\tilde{f} + \tilde{b}\, d\tilde{g}_{|A}\rangle) \in$ $\in \mathcal{P}(M)$ e $\Theta_{|A}$ são iguais.

Como $T_{|A}: A \longrightarrow B$ é isomorfismo bianalítico temos:

$$\mathcal{A} = (T_{|A})^{*}(\mathcal{B}) \text{ e daí } \Theta_{|A} = (T_{|A})^{*}(\mathcal{B}) = (T_{|A})^{*}(\Omega_{|B})$$

como queríamos.

Unicidade: Seja $\Theta' \in \mathcal{P}(M)$ tal que se A' é aberto Zariski não vazio de M a $T_{|A'}: A' \longrightarrow B'$ é isomorfismo, temos:

$$\Theta'_{|A'} = (T_{|A'})^{*}(\Omega_{|B'})$$

Então $\Theta'_{|A \cap A'} = \Theta_{|A \cap A'}$. Mas $A \cap A'$ é aberto Zariski não vazio de M, logo, pelo lema 1.1.1 b), temos $\Theta' = \Theta$ ∎

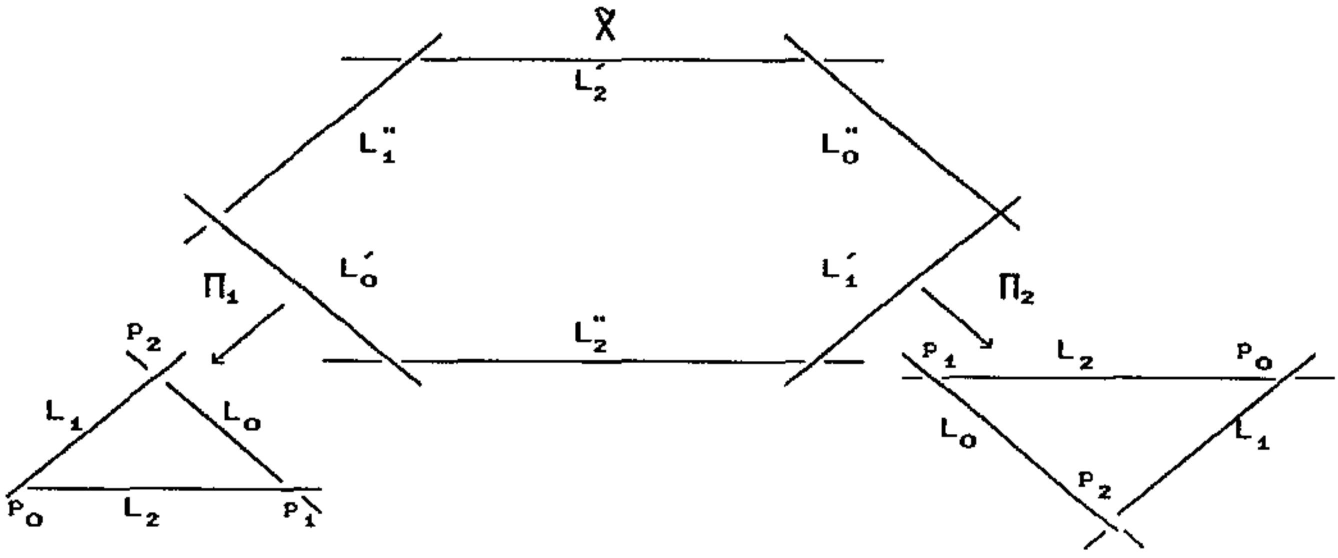
3.2 RESOLUÇÃO DE SINGULARIDADES DE SISTEMAS DE PFAFF NO PLANO PROJETIVO PELO GRUPO DE CREMONA

Para o teorema 3.2.1 a seguir será importante ter em mente a fatoração da aplicação quadrática standard [exemplo 3.1.3] em termos de explosões e contrações, a seguir [conf. B-K]:

Observo que $Q : \mathbb{P}_2 \setminus \{P_0, P_1, P_2\} \longrightarrow \mathbb{P}_2$ é uma aplicação bem definida e o fecho de seu gráfico em $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$ é a subvariedade dada por $\tilde{X} = \{(x_0 : x_1 : x_2 ; y_0 : y_1 : y_2);\ y_i x_i = y_j x_j\}$. Temos duas projeções de $\tilde{X}$ em $\mathbb{P}_2$, $\Pi_1(x_0 \ldots y_2) = (x_0 : x_1 : x_2)$ e $\Pi_2(x_0 \ldots y_2) = (y_0 : y_1 : y_2)$ com $Q = \Pi_2 \circ \Pi_1^{-1}$.

Podemos obter cobertura de $\tilde{X}$ por vizinhanças $U_{ij} = \{(x, y) \in \tilde{X};\ x_i \neq 0$ e $y_j \neq 0\}$ com coordenadas $u_{ij} = y_k / y_j$ e $v_{ij} = x_k / x_i$. Em U_{ij}, Π_1 se escreve como $x_i = 1 \quad x_j = u_{ij} v_{ij} \quad x_k = v_{ij}$, fórmulas da explosão de P_i, e Π_2, como $y_i = u_{ij} v_{ij} \quad y_j = 1 \quad y_k = u_{ij}$, que são as fórmulas de explosão de um ponto fundamental P_j da Q (com $i \neq j \neq k$).

Π_1 e Π_2 são isomorfismos analíticos entre abertos de $\tilde{X}$ e $\mathbb{P}_2 \setminus \{P_0, P_1, P_2\}$; por Π_1 cada reta $L_i' = \{(x, y) \in \tilde{X}\ ;\ x_j = x_k = 0\}$ é contraída ao ponto fundamental P_i, assim como por Π_2 cada reta $L_j'' = \{(x, y) \in \tilde{X};\ y_i = y_k = 0\}$ é contraída ao ponto fundamental P_j.



$$\mathbb{P}_2 \xleftarrow{\ \Pi_1\ } \tilde{X} \xrightarrow{\ \Pi_2\ } \mathbb{P}_2$$

$$L_i' = \Pi_1^{-1}(P_i) \qquad L_j'' = \Pi_2^{-1}(P_j)$$

Definição 3.2.1 : Duas singularidades p, p' de sistemas de Pfaff Γ e Γ' são isomorfas se existem abertos coordenados U, U' e isomorfismo analítico $f: (U,p) \longrightarrow (U',p')$ que identifica $\Gamma_{|U}$ com $\Gamma'_{|U'}$.

Definição 3.2.2 : Diremos que uma reta em $\mathbb{P}_2$ por um ponto singular p de um sistema de Pfaff é uma <u>direção crítica</u> quando seu transformado estrito pela explosão de p passar por alguma singularidade(do transformado do sistema pela explosão) situada sobre a reta excepcional.

Lema 3.2.1 : [conf. G.M-B] Seja $\Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{P}_2)$ com infinitas retas projetivas por separatrizes. Então Ω tem por separatrizes todas as retas que passam por um ponto $p \in \mathbb{P}_2$.

Um $\Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{P}_2)$ deste tipo será referido como "Ω associado ao feixe de retas por um ponto".

Prova : Como cada intersecção de retas separatrizes é uma singularidade de Ω, tem que existir um ponto p pelo qual passam infinitas retas separatrizes. Como Ω não pode ter por separatrizes todas as retas de $\mathbb{P}_2$, seja L reta que não é separatriz, $p \notin L$ e seja $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}_2 \setminus L$, $p=(0,0)$. Então $\Omega_{|\mathbb{C}^2}$: $\omega = P(x,y)dx - Q(x,y)dy$, com P e Q polinômios com $mdc(P,Q) = 1$. A condição de que uma reta por $(0,0)$ seja separatriz equivale a: $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{y}{x} \leftrightarrow P\,x - Q\,y = 0$

Como o conjunto algébrico em $\mathbb{C}^2$ $P\,x - Q\,y = 0$ contém infinitas retas, temos $P\,x - Q\,y \equiv 0$. Como $mdc(P,Q) = 1$, sai que $P = c\,y$ e $Q = c\,x$. ■

Diremos que uma reta projetiva r̲ é tangente à separatriz de Ω em p̲ $\notin Sing(\Omega)$ se $r = L_p$ (da distribuição de Ω).

Lema 3.2.2: Seja r̲ uma reta projetiva. Se r̲ tem infinitas tangências com separatrizes de $\Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{P}_2)$ então r̲ é separatriz de Ω.

Prova: Sejam (x,y) coordenadas locais tais que $(0,0)$ é ponto de acumulação das tangências de r̲, dada localmente por $y = 0$. Então Ω

se representa por $\omega = w(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, com P e Q analíticas e as tangências em $(x,0)$ implicam $P(x,0)=0$. Logo os zeros de $P(x,0)$ se acumulam e $P(x,0) \equiv 0$. ■

Teorema 3.2.1 :

Dado sistema de Pfaff analítico Ω em $\mathbb{P}_2$ com singularidades isoladas $\{P^0, \ldots, P^m\} = Sing(\Omega)$, que supomos não é o sistema associado a um feixe de retas por um ponto de $\mathbb{P}_2$, então existe uma aplicação quadrática Q tal que $Q^{-1*}(\Omega)$ tem as seguintes singularidades :

i) *isomorfas às singularidades de Ω em* $Sing(\Omega) \setminus \{P^0\}$

ii) *irredutíveis (duas)* [definição 2.2.1]

iii) *estritamente dicríticas (três)* [definição 2.1.5]

iv) *singularidades isomorfas às que se encontram na reta excepcional pela explosão de P^0.*

Demonstração :

Seja $\mathcal{R} = \{$ retas r; r não é separatriz de Ω e $r \cap Sing(\Omega) = \emptyset$ $\}$.

Pelo lema 3.2.1 a primeira condição que define $\mathcal{R}$ exclui um número finito de retas, enquanto a segunda, um número finito de feixes de retas (pelos pontos de $Sing(\Omega)$).

Fixado um $P^0 \in Sing(\Omega)$, existe $r_0 \in \mathcal{R}$ tal que para algum $P \in r_0$ $L_P \neq P^0P$ (onde P^0P é a reta por esses pontos).

De fato, caso contrário, seja uma reta r qualquer de $\mathcal{R}$ e $Q=Q_1 \in$ $\in r$. Então as interseções de P^0Q_1 com infinitas retas $r_n \in \mathcal{R}$ dão origem a infinitos pontos $Q_n \in P^oQ_1$ tais que $P^oQ_1 = L_Q$, i.e., tangências de P^oQ_1 com separatrizes. Pelo lema 3.2.2 P^oQ_1 é separatriz. Repetindo o argumento ao tomar outro ponto Q' em r prova-se que P^oQ' é separatriz. Daí Ω tem infinitas separatrizes por P^o e Ω é o feixe de retas por P^o pelo lema 3.2.1: contradição.

Em $r_o \in \mathcal{R}$ existe um aberto U de pontos P tais que $P^oP \neq L_P$.

De fato, a condição $P^oP \neq L_P$ é aberta, já que $\{L_P;\ P \notin Sing(\Omega)\}$ é um campo contínuo de retas (como de fato o campo é analítico, o aberto U em r_o é de Zariski).

Seja $\{ P \in r_o;\ L_P = r_o\}$. Então, pelo lema 3.2.2 tal conjunto é finito. Logo podemos escolher em $U \subset r_o$ dois pontos M e N tais que $L_M \neq P^oM$, $L_N \neq P^oN$, $L_M \neq r_o$, $L_N \neq r_o$. Evitando eventualmente um conjunto finito de pontos em U, podemos supor que $P^oM \cap Sing(\Omega) = P^oN \cap Sing(\Omega) = \{ P^o \}$, que P^oM e P^oN não são direções críticas em P^o e , por último, P^oM e P^oN não são separatrizes de Ω por P^o.

Consideramos coordenadas homogêneas tais que $P^o = P_o = (1:0:0)$ e as retas fundamentais sejam $L_o = r_o$, $L_1 = P^oM$, $L_2 = P^oN$.

Nessas coordenadas as separatrizes de Ω por M e N não têm como tangentes L_o, L_1 ou L_2 e $Sing(\Omega) \cap \{L_o \cup L_1 \cup L_2\} = \{ P^o \}$.

Sejam Q (quadrática standard) nessas coordenadas, Q^{-1} a inversa birracional e $Q^{-1*}(\Omega)$. Com base na fatoração da Q, i. é. $Q = \Pi_2 \circ \Pi_1^{-1}$, consideremos o sistema de Pfaff em $\tilde{X}$ $\tilde{\Omega} := \Pi_1^*(\Omega)$ (ou, equivalentemente, $\tilde{\Omega} := \Pi_2^*(Q^{-1*}(\Omega))$).

Se $P \in Sing(Q^{-1*}(\Omega))$ então os seguintes casos se apresentam :

i) $P \notin \{L_o \cup L_1 \cup L_2\}$

ii) $P \in L_1 \setminus \{P_o, P_2\}$ [analogamente para $P \in L_2 \setminus \{P_o, P_1\}$]

iii) $P = P_0$, P_1 ou P_2

iv) $P \in L_0 \setminus (P_1, P_2)$

Com a notação introduzida na fatoração $Q = \Pi_2 \circ \Pi_1^{-1}$, discuto :

Caso i): Como $Q \mid \mathbb{P}_2 \setminus (L_0 \cup L_1 \cup L_2)$ é isomorfismo analítico e $\mathrm{Sing}(\Omega) \cap (L_0 \cup L_1 \cup L_2) = (P^0)$ existe $P^i \in \mathrm{Sing}(\Omega)$ com $i \neq 0$ tal que é singularidade isomorfa a P.

Caso ii): Π_2 é isomorfismo analítico entre aberto de $\tilde{X}$ contendo singularidade de $\tilde{\Omega}$ em $L'_1 \setminus (L''_0 \cap L'_1,\ L''_2 \cap L'_1)$ e aberto contendo P. Logo as singularidades de $Q^{-1*}(\Omega)$ em $L_1 \setminus (P_0, P_2)$ são isomorfas às que resultam da explosão de P_1 por Π_1 situadas em $L'_1 \setminus (L''_0 \cap L'_1,\ L''_2 \cap L'_1)$, que só podem ser a intersecção do transformado estrito da separatriz de Ω por P_1 com L'_1, porque nem L_0 nem L_2 são a tangente da separatriz de Ω por P_1. (Caso em que se introduz singularidade irredutível).

Caso iii): Por Π_2 temos explosão de $P = P_i$ nas retas L''_i. Suponhamos que $\tilde{\Omega}$ tem singularidade em aberto em torno de $L''_i \setminus (L'_j \cap L''_i,\ L'_k \cap L''_i)$, $i = 0, 1, 2$ então são isomorfas por Π_1 às singularidades de Ω em $L_i \setminus (P_j, P_k)$. Contradição. Como L_1 e L_2 não são direções críticas em relação a P_0 em Ω segue que em $L'_0 \cap L''_1$ e $L'_0 \cap L''_2$ o sistema $\tilde{\Omega}$ não tem singularidades. As demais intersecções de L''_i para $i = 0, 1, 2$ em $\tilde{X}$ não são singularidades de $\tilde{\Omega}$ pela escolha de L_i $i = 0, 1, 2$ não tangentes às separatrizes de Ω em P_1 e P_2. Logo P_0, P_1 e P_2 são estritamente dicríticas em $Q^{-1*}(\Omega)$.

Caso iv): Por Π_2 a singularidade P de $Q^{-1*}(\Omega)$ é isomorfa à singularidade de $\tilde{\Omega}$ em $L'_0 \setminus (L''_1 \cap L'_0,\ L''_2 \cap L'_0)$, que resulta da explosão de P_0 por Π_1 ■

Para a demonstração do teorema 3.2.2 introduzo as definições que seguem.

Dado $\Omega \in \mathcal{P}(M)$, $p \in \mathrm{Sing}(\Omega)$, denoto por s_p uma sequência de explosões começando em p tal que o transformado estrito de Ω pela sequência tem somente singularidades irredutíveis sobre o divisor excepcional. Denoto $\# s_p$ o número de explosões efetuadas em s_p.

Definição 3.2.3 : Dado $p \in \mathrm{Sing}(\Omega)$ defino <u>o</u> <u>peso</u> <u>de</u> <u>p</u>, $m(p)$, por:

$$\begin{cases} m(p) = \min\limits_{s_p} (\# s_p) \quad \text{e} \quad m(p) = 0 \text{ se p é estritamente dicrítico} \end{cases}$$

O peso da singularidade p está bem definido pelo teorema de Seindenberg (2.2.2).

Teorema 3.2.2 :

Dado $\Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{P}_2)$ é possivel obter, através de uma seqüência finita de aplicações quadráticas Q_i, um novo sistema em $\mathbb{P}_2$ com singularidades, isoladas, dos seguintes tipos: i) irredutíveis e ii) estritamente dicríticas .

Durante a resolução nenhuma separatriz algébrica de Ω é contraída.

Demonstração:

Se Ω é o sistema de Pfaff em $\mathbb{P}_2$ associado ao feixe de retas por um ponto o teorema vale trivialmente.

Caso contrário, aplico a Ω uma Q quadrática standard como no teorema 3.2.1 com P^0 = p onde $p \in \mathrm{Sing}(\Omega)$, p não é irredutível e p não é estritamente dicrítico. Então se $t \in \mathrm{Sing}(Q^{-1*}(\Omega))$ temos:

$$\begin{cases} m(t) < m(p) \text{ , se } t \text{ é estritamente dicrítico ou irredutível} \\ m(t) < m(p) \text{ , se } t \text{ é isomorfo a uma singularidade sobre a reta} \\ \qquad\qquad\qquad \text{excepcional da explosão em } p \end{cases}$$

Nos demais casos $m(t) = m(p')$, $p' \neq p$, $p' \in \mathrm{Sing}(\Omega)$.

Observo que nenhuma separatriz algébrica de Ω se contrai a ponto nas aplicações sucessivas de Q pois as retas fundamentais da Q standard são escolhidas de modo a não serem separatrizes dos sistemas em que a aplico.

■

De fato é possível, mediante uma escolha adequada das aplicações quadráticas, obter uma forma mais forte do teorema 3.2.2, onde as singularidades estritamente dicríticas têm a propriedade adicional de que, ao serem explodidas, as tangên - cias entre as separatrizes (do transformado estrito do sistema) e a reta excepcional são apenas quadráticas [conf. C].

4. APLICAÇÕES : RESOLUÇÃO DE SINGULARIDADES DE APLICAÇÕES BIRACIONAIS

4.1 UMA PROPRIEDADE DAS SUPERFÍCIES RACIONAIS

Def. 4.1.1 : Diz-se que uma superfície M é <u>racional</u> se M é biracionalmente equivalente a $\mathbb{P}_2$.

O teorema 4.1.1 a seguir, [ver **M-S:1**], é uma aplicação do teorema 3.2.2 à resolução de singularidades de aplicações biracionais entre superfícies (racionais) e $\mathbb{P}_2$.

Preliminarmente, observo que transformação biracional usada no teorema 3.2.2 para resolver singularidades de sistemas de Pfaff em $\mathbb{P}_2$ é de um tipo "simples", a saber :

Proposição 4.1.1 :

Seja $\Omega' \in \mathcal{P}(\mathbb{P}_2)$ que resulta de Ω pela resolução de singularidades dada no teorema 3.2.2, i.é. $\Omega' := T^{-1*}(\Omega)$, com $T = Q_k \circ \dots \circ Q_1$, Q_i aplicações quadráticas. Seja $\Pi : S \longrightarrow \mathbb{P}_2$ morfismo dado por contrações de retas em S, onde S resulta de $\mathbb{P}_2$ ao *se explodir uma única vez cada singularidade estritamente dicrítica* de Ω'.

Então $f : S \longrightarrow \mathbb{P}_2$ definida por $f = T^{-1} \circ \Pi$ é um morfismo.

Prova : De fato, se f^{-1} contrai alguma curva $\mathcal{C}$, então é a T que contrai $\mathcal{C}$ e portanto, pelo teor. 3.2.2, $\mathcal{C}$ não é separatriz de Ω . Se consideramos em S o sistema de Pfaff transformado de Ω pela f, $f^*(\Omega)$, possuirá um ponto singular com infinitos germes de separatrizes resultado da contração de $\mathcal{C}$. Como tal sistema em S é o transformado estrito de Ω' pela Π, $\Pi^*(\Omega')$, há contradição com a definição de Π. ■

Teorema 4.1.1 :

Seja M superfície racional. Então existe um conjunto finito de pontos $p_1, \ldots, p_k$ de $\mathbb{P}_2$ ($p_i \neq p_j$ se $i \neq j$) talque M é dominada pela superfície obtida explodindo uma vez cada ponto p_j ($j = 1 \ldots k$)

Prova :

Seja $g: \mathbb{P}_2 - - \rightarrow M$ uma aplicação biracional. Basta demonstrar que existe uma aplicação biracional $B: \mathbb{P}_2 - - \rightarrow \mathbb{P}_2$ tal que todas as singularidades de $g \circ B$ desaparecem ao explodirmo-las uma vez.

Sejam $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_r$ as curvas de M que se contraem a pontos por g^{-1}. Seja α uma função racional em M tal que :

i) nenhuma $\mathcal{C}_j$ é pólo de α e ii) $\alpha_{|\mathcal{C}_j}$ não é constante ($j=1 \ldots r$)

Em particular, nenhuma das $\mathcal{C}_j$ é separatriz do sistema Ω : $d\alpha = o$

Seja $\Gamma = g^*(\Omega)$. Pelo teorema 3.2.2 existe $B: \mathbb{P}_2 - - \rightarrow \mathbb{P}_2$ biracional tal que $B^*(\Gamma)$ tem apenas singularidades irredutíveis ou estritamente dicríticas. Ademais, B^{-1} não contrai a um ponto nenhuma separatriz de Γ.

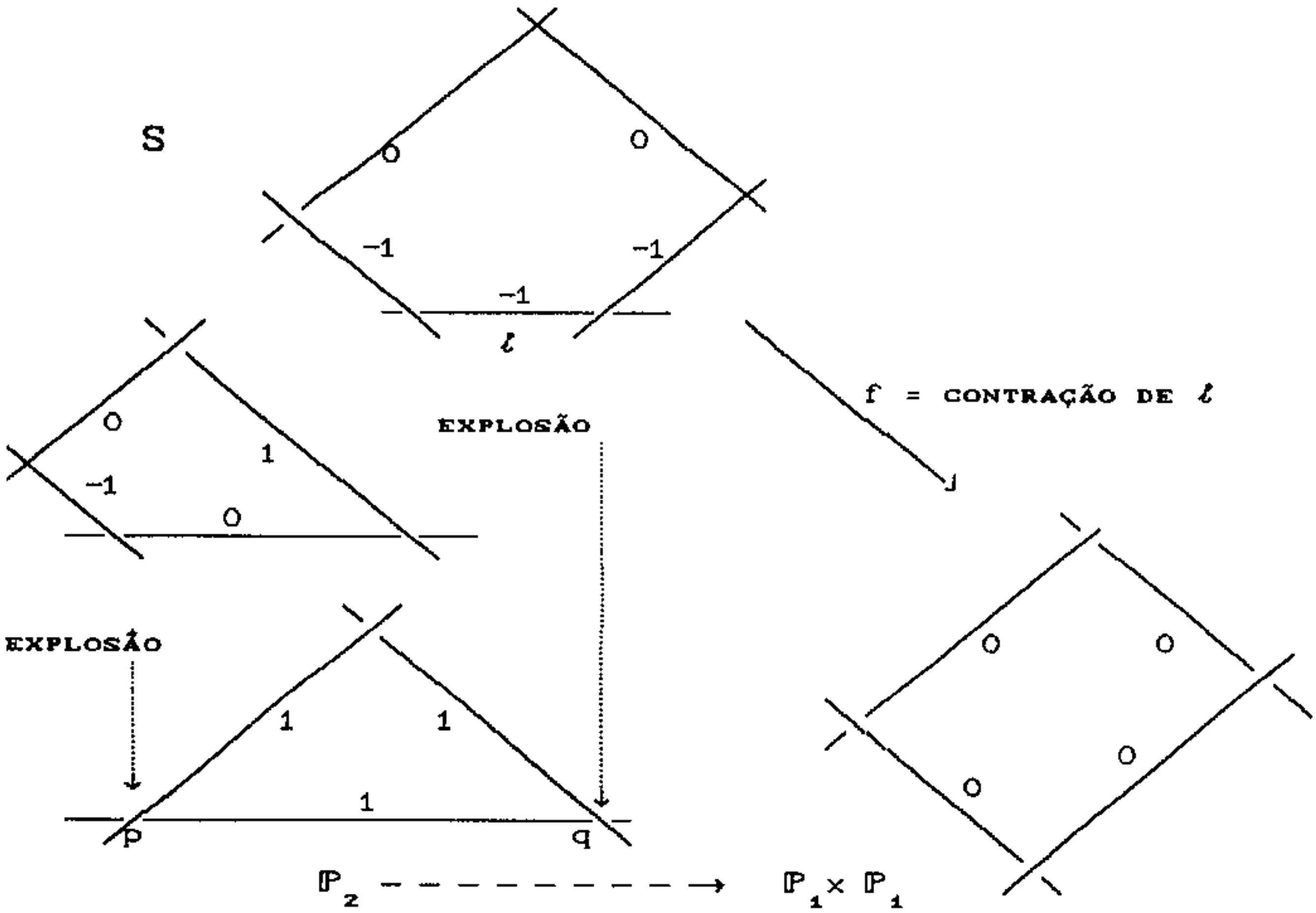
Seja $\Pi: S \longrightarrow \mathbb{P}_2$ morfismo dado pela contração das retas excepcionais de S, onde S é obtida pela explosão uma vez de cada singularidade estritamente dicrítica de $B^*(\Gamma)$. Então $\Pi^*(B^*(\Gamma))$ tem apenas singularidades irredutíveis. Decorre que $f = g \circ B \circ \Pi$ é um morfismo.

De fato, supondo por absurdo que f não é um morfismo, existe uma curva $\mathscr{C} \subset M$ que se contrai a um ponto pela f^{-1}.

Caso 1: $\mathscr{C}$ é uma separatriz de Ω. Então $\mathscr{C} \neq \mathscr{C}_1,\dots,\mathscr{C}_r$ e portanto, $g^{-1}(\mathscr{C})$ é uma curva, separatriz de Γ. Logo $B^{-1}(g^{-1}(\mathscr{C}))$ é uma curva e portanto $\Pi^{-1}(B^{-1}(g^{-1}(\mathscr{C})))$ é uma curva : contradição.

Caso 2 : $\mathscr{C}$ não é separatriz de Ω. Então existem infinitos germes analíticos de separatrizes de $f^{*}(\Omega)=\Pi^{*}(B^{*}(\Gamma))$ passando por $p= f^{-1}(\mathscr{C})$, $p\in S$ (imagens pela f^{-1}dos germes de separatrizes de Ω transversos à $\mathscr{C}$). Mas então p é uma singularidade não irredutível de $\Pi^{*}(B^{*}(\Gamma))$: contradição. ■

Exemplo 4.1.1 : $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ é uma superfície racional caracterizada pelos números de auto-intersecção das retas $\mathbb{P}_1 \times (\iota)$ e $(v)\times \mathbb{P}_1$ que são iguais a 0. Em $\mathbb{P}_2$, as retas projetivas têm número de auto-intersecção igual a 1 e a reta excepcional de uma explosão tem esse número igual a −1. Também são fatos conhecidos que cada explosão em ponto sobre uma reta diminui em 1 o número de auto-intersecção da reta e que (pelo critério de Castelnuovo) uma reta com esse número igual a −1 pode ser contraída a um ponto. Com essas observações podemos obter $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ a partir de $\mathbb{P}_2$ em acordo com o teorema 4.1.1 , como se ilustra a seguir :



Concluo esta seção com uma digressão sobre as superfícies racionais e seus sistemas de Pfaff.

Se M é uma superfície racional não isomorfa a $\mathbb{P}_2$ então existe uma aberto $U \subset M$,não vazio, tal que U é isomorfo ao produto $\mathbb{P}_1 \times D$, onde $D \subset \mathbb{C}$ aberto [conf. B].

É possível mostrar que se $\Omega \in \mathcal{P}(M)$ é tal que $\Omega_{|U}$ tem por separatrizes as retas $\mathbb{P}_1 \times \{t\}$, $\forall t \in D$, então Ω é um ponto isolado de $\mathcal{P}(M)$ [conf. M-S:2].

Como no caso de $\mathbb{P}_2$ é sabido que em $\mathcal{P}(\mathbb{P}_2)$ não há pontos isolados [conf. L-N:2 ou G.M-B] chegamos à seguinte caracterização de $\mathbb{P}_2$:

Teorema 4.1.2 :

Seja M superfície racional. Então M é isomorfa a $\mathbb{P}_2$ se e somente se em $\mathcal{P}(M)$ não existe ponto isolado.

4.2 RESOLUÇÃO DE SINGULARIDADES DE APLICACÕES BIRACIONAIS

Seja $Q : \mathbb{P}_2 - - \rightarrow \mathbb{P}_2$ a aplicação biracional quadrática standard.[exemplo 3.1.3] . No § 3.2 vimos uma fatoração de Q como $Q = \Pi_2 \circ \Pi_1^{-1}$, onde $\Pi_i : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}_2$ $i=1,2$ contraem cada um 3 retas em $\tilde{X}$.

Em geral, para uma $\Phi: S - - \rightarrow S'$ aplicação biracional entre S e S' superfícies algébricas projetivas temos :

Teorema 4.2.1

Seja $\Phi: S - - \rightarrow S'$ aplicação biracional entre as superfícies S e S'. Então existe $\Pi: \tilde{S} \longrightarrow S$ tal que :

a) $\tilde{S}$ é obtida por um número finito de explosões e Π é contração dos divisores excepcionais

b) $f = \Phi \circ \Pi$ é um morfismo.

Este teorema é um corolário do teorema 2.2.2 de Seindenberg, como se mostra :

Prova :

Sejam $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_r$ as curvas de S' que se contraem a pontos por Φ^{-1}. Seja α uma função racional em S' tal que :

UFRGS
SISTEMA DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA SETORIAL DE MATEMÁTICA

i) nenhuma $\mathscr{C}_j$ é pólo de α e ii) $\alpha_{|\mathscr{C}_j}$ não é constante $(j=1...r)$

Seja Ω em S' dado por $d\alpha = o$.

Pelo teorema de Seindenberg existe $\Pi: \tilde{S} \longrightarrow S$ morfismo de contração das retas excepcionais de $\tilde{S}$ obtida de S por um número finito de explosões tal que $\Pi^*(\Phi^*(\Omega))$ tem apenas singularidades irredutíveis. Afirmo que $f = \Phi \circ \Pi$ é um morfismo.

De fato, suponhamos por absurdo que exista uma curva $\mathscr{C} \subset S'$ que se contrai a um ponto pela f^{-1}. Então $\mathscr{C}$ se contrai a um ponto pela Φ^{-1}. Logo $\mathscr{C} = \mathscr{C}_j$ para algum j. Segue que $\mathscr{C}$ não é separatriz de Ω e, portanto, que existem em $p = f^{-1}(\mathscr{C})$ infinitos germes analíticos de separatrizes de $f^*(\Omega) = \Pi^*(\Phi^*(\Omega))$. Logo p não é singularidade irredutível de $\Pi^*(\Phi^*(\Omega))$: contradição. ■

Observação : Se existe em S' um sistema de Pfaff Ω' que não tem nenhuma separatriz algébrica, poderíamos obter outra demonstração do teorema 4.2.1 tomando Ω' ao invés de Ω : $d\alpha = o$.

Neste ponto temos um problema em aberto na teoria :

Questão : Dada qualquer superfície algébrica projetiva M (complexa e não-singular) existe um $\Gamma \in \mathscr{P}(M)$ tal que Γ não tem nenhuma separatriz algébrica ?

REFERÊNCIAS

[B] Beauville, A. Surfaces algébriques complexes Astérisque, vol.54, 1978.

[B-K] Brieskorn, E., Knörrer, H. Plane algebraic curves ed. Birkhäuser 1986.

[C] Carnicer, M. Resolución sumergida de foliaciones sobre el plano proyectivo complejo Tese de Doutorado da Univ. Valladolid, 1990.

[C-H-K] Carrell, J., Howard, A., Kosniowski, C. Holomorphic vector fields on complex surfaces Math. Ann. 204 (1973) 73-81

[C-S] Camacho, C., Sad, P. Pontos singulares de equações diferenciais analíticas 16º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1987.

[G.M-B] Gómez-Mont, X., Bobadilla, L. O. Sistemas dinámicos holomorfos en superficies Aportaciones Matemáticas - Notas de investigación n.3, Sociedad Matemática Mexicana, 1989.

[J] Jouanolou, J. P. Équations de Pfaff algébriques Lecture Notes in Math. Springer-Verlag v.708, 1979

[K] Klughertz, M. Feuilletages holomorphes a singularité isolée ayant une infinité de courbes integrales Tese de Doutorado de L'Université Paul Sabatier, Toulouse 1988.

[L.N:1] Lins Neto, A. Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two J. Differential Geometry 26 (1987) 1-31

[L.N:2] Lins Neto, A. Algebraic solutions of polinomial differential equations and foliations in dimension two Lecture Notes in Math. Springer-Verlag v.1345.

[M-S:1] Mendes, L.G., Sebastiani, M. Une propriété des surfaces rationnelles - pré-publicação.

[M-S:2] Mendes, L.G., Sebastiani, M. Sur la densité des systèmes de Pfaff sans solution algébrique - a ser publicado em Annales de l'Institut Fourier fasc.1 vol.44 (1994).