

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

ÓRBITAS PERIÓDICAS NA VIZINHANÇA DO EQUILÍBRIO DE UM
SISTEMA HAMILTONIANO; TEOREMA DE LIAPUNOV

VERA CLOTILDE GARCIA CARNEIRO

C2890

Porto Alegre, novembro de 1980

AGRADECIMENTOS

Professor Marcus Sebastiani
Arthur Oscar Lopes
Ricardo Mañe
Julio Cesar Ruiz Claeysen

AGRADECIMIENTO ESPECIAL:

Claus Ivo Doering (orientador)

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma demonstração detalhada do Teorema de Liapunov relativo à existência das variedades subcentrais de um sistema hamiltoniano em um ponto de equilíbrio sem ressonância.

Introduzindo este teorema, estudamos a formulação hamiltoniana de um sistema mecânico, e aspectos qualitativos locais dos campos hamiltonianos. Além disso, exibimos exemplos e contra-exemplos de sistemas hamiltonianos, comparando o seu comportamento na vizinhança de um ponto de equilíbrio, com as conclusões do teorema de Liapunov.

INTRODUÇÃO

Temos por principal objetivo neste trabalho demonstrar o seguinte teorema devido a Liapunov sobre a existência de soluções periódicas de equações diferenciais de tipo Hamiltoniano próximas a um ponto de equilíbrio.

Teorema I: Sejam $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ um aberto e $H:U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Seja a equação hamiltoniana:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} & (x,y) \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} & (x,y) \end{cases}, \quad (x,y) \in U$$

Suponhamos que (x_0, y_0) seja um ponto crítico de H (isto é $\text{grad } H(x_0, y_0) = 0$) e que a derivada da aplicação $X_H: U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ tal que $X_H(x,y) = \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right)(x,y)$ possui em (x_0, y_0) um par de autovalores $\{-i\lambda, i\lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ e nenhum dos outros autovalores é múltiplo inteiro destes. Então existe uma variedade bidimensional de classe C^1 , $M^\lambda \subset U$, tal que é a união de soluções periódicas da equação. Além disso os períodos destas soluções convergem a $2\pi|\lambda|^{-1}$ se a condição inicial converge a (x_0, y_0) e o espaço tangente a M^λ no ponto (x_0, y_0) é o subespaço associado aos autovalores $\{-i\lambda, i\lambda\}$.

A motivação fundamental para a consideração de equações do tipo Hamiltoniano é que elas descrevem a evolução de sistemas de massas submetidas a forças conservativas. No capítulo I esta relação será deduzida com detalhes.

Os pontos críticos da função H (denominada Hamiltoniano do sistema) representam os estados de equilíbrio. Especialmente interessantes são os pontos críticos estáveis. Este conceito será definido e comentado no capítulo II. A importância deste conceito deriva de que a estabilidade do equilíbrio significa que ele é fisicamente observável.

Em pontos críticos estáveis todos os autovalores são imaginários. Se entre eles não existe ressonância dão origem a n variedades como a M^λ do teorema. No capítulo III esta situação é ilustrada pela análise do movimento do pêndulo-mola.

Vemos também no capítulo III que, de fato, o Teorema I acima é um corolário imediato de outro mais geral que enunciamos a seguir:

Teorema II: Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 . Suponhamos que a equação

$$\dot{x} = f(x)$$

possui uma integral de classe C^2 , $H: U \rightarrow \mathbb{R}$, isto é:

$$\langle f(x), \nabla H(x) \rangle = 0, \forall x \in U, \quad \nabla = \text{grad.}$$

Seja $p_0 \in U$.

Suponhamos que $f(p_0) = \text{grad } H(p_0) = 0$ e que existe um espaço bidimensional $E \subset \mathbb{R}^m$ tal que

- 1) $f'(p_0)(E) = E$
- 2) $D^2H(p_0) / E$ é definida



Então os autovalores de $f'(p_0)/E$ são imaginários $\{-i\lambda, i\lambda\}$ e se todo outro autovalor de $f'(p_0)$ não é múltiplo inteiro deles, existe uma variedade bidimensional de classe C^1 , $M \subset U$ tangente a E em p_0 que é a união de soluções periódicas cujos períodos convergem a $2\pi|\lambda|^{-1}$ se a condição inicial converge a p_0 .

O Teorema I é falso sem a hipótese de não ressonância. Isto é demonstrado no capítulo III por um exemplo de C.L.Siegel. Também neste capítulo enunciamos resultados concernentes a existência de órbitas periódicas próximas do equilíbrio em presença de ressonâncias.

No capítulo IV demonstramos o Teorema II reduzindo-o a uma demonstração do Teorema de Liapunov devida a A. Kelley; esta é apresentada em detalhes.

CAPÍTULO I

1) Sistemas Mecânicos Simples

Definição: Um sistema mecânico simples é:

- a) um conjunto de k n^os reais positivos, $m_1 \dots m_k$;
- b) uma subvariedade $\Sigma \subset \mathbb{R}^{5k}$
- c) uma função $V:U \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 , onde U é uma vizinhança de Σ .

Interpreta-se fisicamente:

k como o número de corpos e m_j a massa do j -ésimo corpo:

$$a = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots, x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}) \in \Sigma$$

é a configuração onde o j -ésimo corpo tem coordenação $(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)})$.

Σ se denomina variedade de configuração. Σ tem dimensão $n = 5k - m$, onde m é o número de equações dos vínculos que relacionam as coordenadas umas às outras. (como por exemplo, se algumas das partículas estão ligadas, formando cor-

pos rígidos, ou se o movimento é forçado a se realizar ao longo de algum caminho ou superfície).

A função V nos dá a energia potencial do corpo e não depende do tempo.

Um estado de um sistema físico é a informação que caracteriza o sistema num dado momento. Num sistema mecânico simples, um estado é obtido pela posição e velocidade num dado momento. A determinação da história da vida do estado se dá através das equações diferenciais de movimento.

Definição: Diz-se que $x: I \rightarrow \Sigma$, de classe C^2 é um movimento se, para cada $t \in I$,

$$M\ddot{x} + \partial V \perp \Sigma \quad \text{onde} \quad M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_k \end{pmatrix}$$

Portanto, qualquer força que aja sobre o sistema e que não derive de um potencial não tem componentes sobre a variedade Σ , logo não influi no movimento, são forças fictícias que não realizam trabalho.

Salientamos que nos restringimos a sistemas mecânicos autônomos e cujas forças atuantes derivam de um potencial.

2) Equação de Lagrange.

Definição: Função de Lagrange

Seja $T\Sigma$ o fibrado tangente a Σ .

Seja $L: T\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$L(q, w) = \frac{1}{2} \langle Mw, w \rangle - V(q)$$

L é de classe C^2 e é chamado Lagrangiano ou função de Lagrange do sistema.

Em termos de coordenadas generalizadas de Σ , o Lagrangiano é expresso da seguinte maneira:

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $P: U \rightarrow \Sigma$ uma carta local numa vizinhança de uma configuração.

Define-se $L_p: TU \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$L_p(x, v) = \frac{1}{2} \langle MDP(x)v, DP(x)v \rangle - V(P(x))$$

Seja $Q: U' \rightarrow \Sigma$, $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, uma outra carta local numa vizinhança de outra configuração, tal que $P(U) \cap Q(U') \neq \emptyset$

Sendo $q = P(x) = Q(x')$

$$\omega = DP(x)v = DQ(x')v'$$

é claro que $L_p(x, v) = L_Q(x', v') = L(q, \omega)$

Para facilitar a notação, de agora em diante, $L_p(x, v) = L(x, v)$.

Teorema de Lagrange

Sejam $I = [0, \xi]$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $x: I \rightarrow U$ de classe C^2 e $P: U \rightarrow \Sigma$ uma carta local numa vizinhança de uma configuração.

$P \circ x$ é um movimento se e só se:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t), x'(t)) \right] - \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), x'(t)) = 0$$

Obs: Em notação concisa, a equação acima pode ser escrita:

$$\frac{d}{dt} (\partial_{\dot{x}} L) - \partial_x L = 0$$

que é a equação de Lagrange.

Usaremos também, a seguir, as notações:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}(t) & x &= x(t) & \ddot{x} &= \ddot{x}(t) \\ DP &= DP(x(U)) & P &= P(x(t)) \end{aligned}$$

Lema: Pox é movimento \Leftrightarrow
 $(DP)^t M (DP) \ddot{x} + (DP)^t M (D^2P) (\dot{x}), \dot{x} + \partial_x V = 0$

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $P: U \rightarrow \Sigma$ um difeomorfismo sobre um aberto de $\Sigma \subset \mathbb{R}^{3k}$.

Seja $M = \text{diag} \langle m_1^{(1)}, m_2^{(1)}, m_3^{(1)}, \dots, m_1^{(k)}, m_2^{(k)}, m_3^{(k)} \rangle$

Por definição, temos que Pox é um movimento se e só se $M\ddot{P} + \text{grad } V \perp \Sigma_x$

Mas esta afirmação é equivalente a dizer:

$$\langle M\ddot{P} + \text{grad } V, u \rangle = 0 \quad \forall u \in T_{P(x(t))}(\Sigma)$$

Tal u é da forma:

$$u = DP(x) \cdot v, \quad v \in \mathbb{R}^n$$

Logo temos:

$$\langle M\ddot{P} + \text{grad } V, DP(x) \cdot v \rangle = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

o que equivale a

$$\langle (DP)^t M \ddot{P} + (DP)^t \text{grad } V, v \rangle = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

Então temos a seguinte equivalência:

$$\text{Pox } \dot{c} \text{ movimento } \Leftrightarrow (DP)^t M \ddot{P} + (DP)^t \text{grad } V = 0$$

$$\text{Mas } \dot{P} = (DP(x)) \dot{x} = (DP) \dot{x}$$

$$\begin{aligned} \text{e } \ddot{P} &= (DP(x)) \ddot{x} + D^2P(x) (\dot{x}) \cdot \dot{x} = \\ &= (DP) \ddot{x} + D^2P (\dot{x}) \cdot \dot{x} \end{aligned}$$

$$\text{onde } P: U \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^{3k}$$

$$DP: U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{3k})$$

$$D^2P: U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{3k}))$$

Usando o Lema de Schwartz que afirma:

$$D^2P(u) \cdot v = D^2P(v) \cdot u, \quad u, v \in \mathbb{R}^n$$

e usando a igualdade: $(DP)^t \text{grad } V = \partial_x V$ (onde por abuso de notação $V = V \circ P$), temos:

$$(DP)^t M \ddot{P} + (DP)^t \text{grad } V = (DP)^t M (DP) \ddot{x} + (DP)^t M (D^2P) (\dot{x}) \cdot \dot{x} + \partial_x V = \square$$

Demonstração do Teorema de Lagrange:

O teorema se reduz a mostrar que:

$$\frac{d}{dt} \left[\partial_{\dot{x}} L \right] - \partial_x L = 0 \Leftrightarrow (DP)^t M (DP) \ddot{x} + (DP)^t M (D^2P) (\dot{x}) \cdot \dot{x} + \partial_x V = 0$$

$$\text{Define-se } T: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(x, y) = \frac{1}{2} \langle M(DP)(x) \cdot y, (DP)(x) \cdot y \rangle$$

Então $T(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \langle M(DP)(x) \cdot \dot{x}, (DP)(x) \cdot \dot{x} \rangle$,
é a energia cinética do estado (x, \dot{x}) .

$$\text{Consideramos } T = \frac{1}{2} \langle (DP)^t M (DP) \cdot y, y \rangle = \frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle$$

$$\text{Temos } \partial_y T: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$A = (a_{ij})$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \dot{y}_j \dot{y}_i$$

$$\partial_y T = \sum_i a_{ij} \dot{y}_i = Ay = (DP)^t M (DP) \cdot y$$

$$\partial_y T \cdot (u) = \langle (DP)^t M (DP) y, u \rangle, u \in \mathbb{R}^n$$

Temos $\frac{d}{dt} (\partial_y T(x, \dot{x})) : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $\frac{d}{dt} (\partial_y T(x, \dot{x})) (u)$

$$= \langle \frac{d}{dt} [(DP)^t M (DP) \dot{x}], u \rangle =$$

$$= \langle D((DP)^t M (DP))(\dot{x}) \cdot \dot{x}, u \rangle + \langle (DP)^t M (DP) \ddot{x}, u \rangle =$$

$$= \langle D(DP)^t(\dot{x}) M (DP) \dot{x}, u \rangle + \langle (DP)^t M D^2 P(\dot{x}) \cdot \dot{x}, u \rangle +$$

$$\langle (DP)^t M (DP) \ddot{x}, u \rangle =$$

$$= \langle (D^2 P)(\dot{x})^t M (DP) \dot{x}, u \rangle + \langle (DP)^t M D^2 P(\dot{x}) \dot{x}, u \rangle +$$

$$\langle (DP)^t M (DP) \ddot{x}, u \rangle$$

Mas:

Lema de
Schwartz

$$\langle (D^2 P)(\dot{x})^t M (DP) \dot{x}, u \rangle = \langle M (DP) \dot{x}, (D^2 P)(\dot{x}) u \rangle =$$

$$= \langle M (DP) \dot{x}, (D^2 P)(u) \dot{x} \rangle = \langle M (D^2 P)(u) \cdot \dot{x}, (DP) \dot{x} \rangle$$

Por outro lado:

$$\partial_x T : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$\partial_x T(x, \dot{x}) u = \frac{1}{2} \langle M (D^2 P)(u) \cdot \dot{x}, (DP) \dot{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle M (DP) \dot{x}, D^2 P(u) \dot{x} \rangle = \langle M (D^2 P)(u) \dot{x}, (DP) \dot{x} \rangle$$

Logo

$$\left(\frac{d}{dt} (\partial_y T(x, \dot{x})) - \partial_x T(x, \dot{x}) \right) (u) =$$

$$\langle (DP)^t M (DP) \ddot{x}, u \rangle + \langle (DP)^t M (D^2 P)(\dot{x}) \cdot \dot{x}, u \rangle$$

Além disso, $L = T - V$, logo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y} (x, \dot{y}) \right) - \frac{\partial L}{\partial x} (x, \dot{x}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial y} (x, \dot{y}) \right) - \frac{\partial T}{\partial x} (x, \dot{x}) + \frac{\partial V}{\partial x}$$

Então:

$$\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y} (x, \dot{y}) \right) - \frac{\partial L}{\partial x} (x, \dot{x}), u \rangle = \langle (DP)^t M (DP) \ddot{x}, u \rangle +$$

$$+ \ll (DP)^t M (D^2P) (\dot{x}) \cdot \dot{x}, u \gg + \ll \frac{\partial V}{\partial x}, u \gg, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

3) Equações de Hamilton

É vantajoso caracterizar o movimento de um sistema mecânico não a partir das equações de Lagrange, mas a partir das equações de Hamilton, que lhes são equivalentes. Estas se prestam particularmente ao estudo da estabilidade pois dão sistemas de equações ordinárias de 1ª ordem com grande simetria.

Seja o Lagrangiano considerado como função das coordenadas generalizadas $(x, v) \in \mathbb{R}^{2n}$. Isto é, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto e $P: U \rightarrow \Sigma$ é uma carta local numa vizinhança de uma configuração.

Seja $\pi: TU \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, definida por $\pi(x, v) = (x, \partial_v L(x, v))$, a transformação de Legendre.

Como $\partial_v^2 L \neq 0$, π define uma mudança de coordenadas em $\pi(TU) \subseteq \mathbb{R}^{2n}$; passamos a denotar as novas coordenadas de

$$(q, p) = \pi(x, v)$$

$p = \partial_v L(x, v) = \partial_v T(x, v) = (DP(x))^t M(DP(x)) v$ é o momento linear do sistema.

Definição: Função de Hamilton

Seja $W \subset \mathbb{R}^{2n}$ um aberto parametrizado por π (isto é W é difeomorfo a $\pi^{-1}(U)$). Definimos

$$H: W \rightarrow \mathbb{R}$$

por $H(q, p) = \sum_{i=1}^n v_i p_i - L(x, v)$ com $(q, p) = \pi(x, v)$

H é de classe C^2 e é denominada função de Hamilton ou Hamiltoniano do sistema

Diagrama:



Teorema: Seja $(q,p): I \rightarrow W$ uma função de classe C^2 com $\pi^{-1} \circ (q,p) = (x,v): I \rightarrow TU$.

$pox: I \rightarrow \Sigma$ é um movimento do sistema se e

só se
$$\begin{cases} \dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t)) \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t)) \end{cases}$$

Tais equações são denominadas equações de Hamilton do sistema.

Demonstração:

A demonstração segue diretamente do Teorema de Lagrange, pois só mudamos as coordenadas generalizadas.

Pode-se ver também que se

$x = x(t)$, $v = \dot{x}(t)$, $q = q(t)$, $p = p(t)$ e

$$H = H(q(t), p(t)) = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(t) p_i(t) - L(x(t), \dot{x}(t)),$$

então:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} p_i - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \quad \text{Def de } p$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{-\partial L}{\partial q_j} =$$

$$= -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -\dot{p}_j$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{x}_j + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial p_j} p_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j} = \dot{x}_j = \dot{q}_j$$

□

4) A Energia nos Sistemas Hamiltonianos Autônomos

Definição: Energia Total

Seja $T: T\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ função tal que $T(q, w) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i w_i^{(i)2}$

e $V: T\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ função que depende apenas de q ,

$E = T + V$ é a energia total do sistema mecânico considerado.

Dando uma carta local de P de Σ , temos $E(x, v) = T(P(x), DP(x)v) + V(P(x), DP(x)v)$

Observa-se que $L = T - V$

$$\text{e } H \circ \pi = 2T - L = T + V = E$$

De agora em diante consideraremos Hamiltoniano como sinônimo de Energia.



Definição: Integral do Sistema

Uma integral do espaço de estado S de um dado sistema é qualquer função, não constante sobre qualquer aberto do espaço, mas constante em toda curva solução do sistema.

É fácil ver que H é uma integral para um sistema Hamiltoniano autônomo, pois

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (H(p, q)) &= \frac{d}{dt} \left[L - \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] = \\ &= \frac{d}{dt} L - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \\ \text{Eq. Lagrange} \quad &= \frac{d}{dt} L - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} L - \frac{d}{dt} L = 0 \end{aligned}$$

onde $L = L(q(t), \dot{q}(t))$.

A superfície $H(q, p) = \text{constante } C$, onde C é um valor regular de H é uma hipersuperfície de \mathbb{R}^{2n} . As trajetórias das soluções do sistema correspondente a H que ali iniciam, ali permanecem para todos os tempos futuros.

CAPÍTULO II

CONSIDERAÇÕES SOBRE SISTEMAS HAMILTONIANOS

1) Campo Hamiltoniano

As equações do movimento deduzidas no capítulo anterior são um modelo de uma classe muito especial de campos de vetores.

Seja $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^{r+1} , $r > 1$. O campo de vetores $X_H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ definido em $x = (q, p)$ por

$$X_H(q, p) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right)$$

é denominado campo Hamiltoniano com energia H . X_H é um campo de classe C^r ; o espaço de campos vetoriais de classe C^r em \mathbb{R}^{2n} munido da topologia da convergência uniforme em partes compactas é denotado por $X^r(\mathbb{R}^{2n})$.

A equação diferencial $\dot{x} = X_H(x)$ define o sistema Hamiltoniano com energia H . É claro que H é uma integral do sistema, pois $\langle X_H(x), \nabla H(x) \rangle = 0$ com $\nabla = \text{grad}$.

Mais sinteticamente, o campo Hamiltoniano é escrito na forma: $X_H(x) = J \nabla H(x)$ onde ∇H é o gradiente de H e

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad \text{com } I \text{ a matriz identidade } n \times n.$$

Dado $x_c \in \mathbb{R}^{2n}$, x_0 é um ponto de equilíbrio do sistema se e só se x_0 é um ponto crítico da energia H :

$$X_H(x_0) = 0 \iff \nabla H(x_0) = 0$$

Seja $x_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ um ponto de equilíbrio do sistema, temos:

$$\begin{aligned} X_H(x) &= D X_H(x_0) \cdot x + R(x) = \\ &= J D^2 H(x_0) \cdot x + R(x) \end{aligned}$$

$$\text{onde } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{|x-x_0|} = 0.$$

Vemos que o comportamento da parte linear do sistema em x_0 depende do Hessiano da energia H em x_0 .

2) Estabilidades

Estamos interessados em estudar a estabilidade de um sistema Hamiltoniano, nas proximidades de um ponto de equilíbrio.

Definição: Equilíbrio Estável

Seja E um espaço vetorial, $W \subset E$ um aberto e $f: W \rightarrow E$ uma aplicação C^1 .

$\bar{x} \in W$ é um equilíbrio estável do sistema $\dot{x} = f(x)$ se, para qualquer $U \subset W$, uma vizinhança de \bar{x} , existe $U_1 \subset U \subset W$, outra vizinhança de \bar{x} , tal que toda solução $\varphi_t(x)$ do sistema, $x \in U_1$, permanece em U para todos os tempos positivos, $t > 0$.

Queremos um critério de estabilidade, ou seja, uma condição computável para se obter um equilíbrio estável num sistema Hamiltoniano.

Lema:

Seja H uma função real contínua em $W \subset \mathbb{R}^n$, aberto. Se x_0 é ponto de mínimo isolado de H com $H(x_0) = 0$, então para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que a componente conexa de $H^{-1}[0, \delta]$ que contém x_0 está contida em $B(x_0, \varepsilon)$.

Dem:

Seja $x_0 \in W$ um ponto de mínimo isolado de H com $H(x_0) = 0$.

Fixemos $\epsilon_0 > 0$ tal que,

$$\forall x \in B(x_0, \epsilon_0), \quad H(x) > 0 = H(x_0)$$

Basta mostrar que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_0 > 0, \forall \delta \leq \delta_0, H^{-1}([0, \delta]) \cap B(x_0, 2\epsilon) \subset B(x_0, \epsilon)$.

Suponhamos que $\exists \epsilon, 0 < \epsilon < \frac{\epsilon_0}{2}$ tal que $\forall \delta_0 > 0, \exists \delta \leq \delta_0$ e

$$H^{-1}([0, \delta]) \cap \overline{B(2\epsilon)} \not\subset B(\epsilon)$$

(ou seja $H^{-1}([0, \delta])$ não converge a $\{x_0\}$)

Então tem-se uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in [H^{-1}([0, \frac{1}{n}]) \cap \overline{B(2\epsilon)}] - B(\epsilon)$

Mas $\overline{B(2\epsilon)} - B(\epsilon)$ é compacta.

Logo $\exists y_0 \in \overline{B(2\epsilon)} - B(\epsilon)$ tal que $x_n \rightarrow y_0$

Como $H(x_n) < \frac{1}{n}$ e H é contínua,

$H(x_n) \rightarrow H(y_0) = 0 = H(x_0)$ (o que é contradição).

□

Critério de Estabilidade:

Todo ponto de mínimo isolado da Energia é um ponto de equilíbrio estável do sistema.

Dem: Seja O um equilíbrio do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \end{cases} \quad \begin{array}{l} p, q \in \mathbb{R}^n \\ O \in \mathbb{R}^{2n} \end{array}$$

Suponhamos que $H(O) = 0$ é um mínimo isolado da energia.

Seja U uma vizinhança de O em \mathbb{R}^{2n} .

Tomamos $\epsilon > 0$ tal que $B(O, 2\epsilon) \subseteq U$.

Seja $\delta > 0$ tal que a componente conexa de $H^{-1} [0, \delta]$ que contém O está contida em $B(O, \epsilon)$.

Tomamos U_1 de \mathbb{R}^{2n} tal que U_1 é aberto e $O \in U_1 \subseteq H^{-1} [0, \delta] \cap B(O, \epsilon) \subseteq U$.

Dado $x \in U_1$, temos $H(x) \leq \delta$ e portanto $H(\varphi_t(x)) = H(x) \leq \delta$, para todo $t > 0$.

Logo $\varphi_t(x) \in U_1 \subseteq U, \forall t > 0$.

Então O é ponto de equilíbrio estável. □

A recíproca do teorema acima é falsa em geral. Por exemplo, o sistema Hamiltoniano definido por

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2 + p_1^2 - p_2^2)$$

tem um ponto de equilíbrio estável na origem o qual não é mínimo de H , já que H é negativa em $q_1 = p_1 = 0$ e positiva em $q_2 = p_2 = 0$.

Este contraexemplo leva à procura de condições que garantam esta recíproca. Como a origem é um ponto crítico isolado de H , no exemplo acima, a não-degenerescência do ponto crítico não é suficiente.

A primeira condição natural a impor (evitando o exemplo acima) é que o Hamiltoniano seja a energia de um sistema mecânico simples, isto é, supomos que a energia do sistema é da forma

$$H(q, p) = T(p) + U(q)$$

com energia cinética T uma forma quadrática positivo definida em p e U a energia potencial. Neste contexto, a origem é um mínimo da energia H se e só se um mínimo da energia potencial U .

Existem pontos de equilíbrio estável que não são mínimos de energia; por exemplo o sistema com

$$T(p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$$

$$U(q_1, q_2) = U(x, y) = e^{-1/x^2} \cos \frac{1}{x} - e^{-1/y^2} (\cos \frac{1}{y} + y^2)$$

que é estável na origem mas U é negativo na reta $q_1 = q_2$.

Acontece que neste exemplo, embora H seja C^∞ , a origem não é um ponto crítico isolado de H .

Isto nos leva a propor a seguinte conjectura para Hamiltonianos clássicos.

Conjectura: Seja U de classe C^2 e suponhamos que a origem é um ponto de equilíbrio isolado do sistema. Se o ponto de equilíbrio é estável então é um ponto de mínimo isolado da energia.

Sem exigir que o equilíbrio seja isolado, mas por outro lado, exigindo que a energia potencial seja analítica real, Taliaferro demonstrou que, para dois graus de liberdade, a estabilidade do sistema na origem implica mínimo fraco da energia potencial.

Os mínimos do Hamiltoniano que melhor se prestam a resultados são os mínimos não degenerados, isto é, o Hessiano $D^2H(o)$ de H é positivo definido (ver cap. III, enunciado do Teorema de Weinstein)

A seguir salientamos que nos sistemas Hamiltonianos não se encontram pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis.

Lema:

Seja $A \in M(m \times m, \mathbb{R})$ uma matriz tal que $A^t J + J A = 0$.
Seja λ um auto valor de A .

Então $\bar{\lambda}$, $-\lambda$, $-\bar{\lambda}$ também são autovalores de A .

Dem: Seja $M \in M(m \times m, \mathbb{R})$.

Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle Mx, y \rangle = \langle x, M^t y \rangle$, onde consideramos $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Seja $A \in M(m \times m, \mathbb{R})$, uma matriz tal que $A^t J + J A = 0$.

Então: $\langle Jx, Ay \rangle + \langle JAx, y \rangle =$
 $= \langle A^t J x, y \rangle + \langle JAx, y \rangle = \langle (A^t J + JA)x, y \rangle = 0$
 para todo $x, y \in \mathbb{R}^m$.

Seja λ um autovalor de A e seja $u \in \mathbb{R}^m - \{0\}$ tal que $Au = \lambda u$.

Então temos, para todo $y \in \mathbb{R}^m$:

$$\langle Ju, Ay \rangle + \langle J \bar{\lambda} u, y \rangle = 0$$

$$\langle Ju, Ay \rangle + \langle Ju, \lambda y \rangle = 0$$

$$\langle Ju, \lambda y + Ay \rangle = 0$$

Seja $B: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $B = \lambda I + A$.

$\text{Im } B \subset (Ju)^\perp$, logo a dimensão de B é no máximo igual a $n-1$, então B é inversível.

$$\text{Logo } \det (A + \lambda I) = 0$$

Então $-\lambda$ é autovalor de A .

Como A é real, $\bar{\lambda}$ e $-\bar{\lambda}$ também são autovalores de A .

□

Teorema: Caracterização dos Autovalores

Se x_0 um ponto de equilíbrio estável de um sistema Hamiltoniano, então x_0 só admite autovalores imaginários puros.

Dem: A aproximação linear de um sistema Hamiltoniano com equilíbrio na origem é da forma $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} D^2H(0)$, com matriz A .

Como a matriz H_2 associada a $D^2H(0)$ é simétrica e $A = J H_2$, temos:

$$\begin{aligned} A^t J + J A &= (J H_2)^t J + J (J H_2) = \\ &= H_2^t J^t J + J^2 H_2 = H_2 (-J^2) + J^2 H_2 = H_2 - H_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Já que } J^t = -J = J^{-1} \text{ e } J^2 = -I$$

Logo se $a + bi$, com $a \neq 0$, é um autovalor do

sistema, -a -bi também o \bar{e} , e teríamos uma direção assintoticamente instável.

3) Persistência dos autovalores imaginários puros

Vimos na parte 2, que num ponto de equilíbrio estável de um Hamiltoniano todos os autovalores do sistema são imaginários puros. Passamos a examinar a questão da persistência destes autovalores.

A variedade invariante associada a todos os autovalores imaginários puros de $DX_H(x_0)$ é a variedade central M^C do sistema. Liapunov simplificou o comportamento das órbitas próximo ao equilíbrio x_0 com a divisão de M^C em subvariedades de dimensão 2, as variedades subcentrais. Estas são as variedades associadas aos autovalores com multiplicidade 1.

Em geral, com uma leve perturbação local de H e do campo X_H na vizinhança do ponto estável, pode-se dividir multiplicidades maiores e obter autovalores imaginários puros de multiplicidade 1.

No teorema abaixo tratamos da persistência destes autovalores.

Teorema.

Seja $H: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ um Hamiltoniano de classe C^r , $r \geq 2$, e suponhamos que $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto crítico não degenerado com exatamente n autovalores imaginários puros de multiplicidade 1.

Existem vizinhanças U de X_H em $X^r(\mathbb{R}^m)$ e V de x em \mathbb{R}^m tais que, para cada $Y \in U$ existe $y \in V$ tal que $Y(y) = 0$ e

se Y é um campo Hamiltoniano então o ponto crítico y tem exatamente n autovalores imaginários puros de multiplicidade 1.

OBS: um ponto crítico de um campo de vetores é não degenerado se 0 não é autovalor.

Dem: Da teoria geral de campos de vetores sabe-se que pontos críticos não degenerados dependem continuamente do campo; da teoria geral de campos lineares sabe-se que o conjunto de autovalores depende continuamente do campo linear.

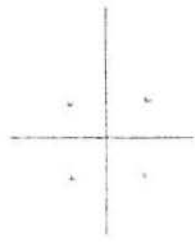
Assim, o que resta observar é que um autovalor imaginário puro $i\lambda$ de multiplicidade 1 não pode ser perturbado para $a + i\lambda$ com $|a| \neq 0$ suficientemente pequeno pois, neste caso, $-a + i\lambda$ está à mesma distância de $i\lambda$ que $a + i\lambda$ e o perturbado teria dois autovalores distintos onde X só tem um único.



Num ponto crítico, não necessariamente estável, as variedades estáveis e instáveis tem a mesma dimensão e a variedade central é de dimensão par. A variedade central não pode, em geral, ser removida por pequenas perturbações de H , embora sua dimensão possa ser reduzida por quatro se existir um autovalor imaginário puro de multiplicidade dois.

Para melhor visualização apresentamos as possibilidades para o espectro de um sistema Hamiltoniano, quando $n = 2$.





Sela complexa



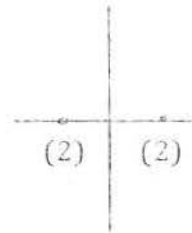
Sela central



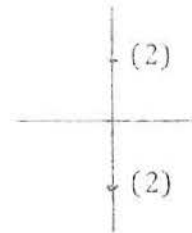
Centro genérico



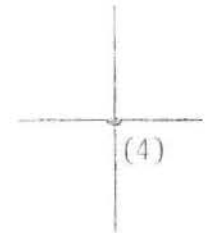
Sela real



Sela degenerada



Centro degenerado



parte linear nula

CAPÍTULO III

SOLUÇÕES PERIÓDICAS PRÓXIMAS A UM PONTO DE EQUILÍBRIO

1) Teorema de Liapunov

Tratando de um sistema Hamiltoniano autônomo, numa vizinhança de equilíbrio, o Teorema de Liapunov assegura a existência de famílias de soluções periódicas se não houver ressonância. Mais precisamente, sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n$ os $2n$ autovalores da aproximação linear; se λ_1 é um imaginário puro, e se nenhuma das razões $\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$ ($i=1, \dots, n$) é um inteiro, então existe numa vizinhança do equilíbrio uma família de soluções periódicas, dependentes de um parâmetro $r \geq 0$. Se r tende a zero, as órbitas tendem ao equilíbrio e o período a $\frac{2\pi_i}{\lambda_1}$.

O caso clássico é para Hamiltonianos holomorfos. Kelley demonstrou o teorema para Hamiltonianos de classe C^2 . Além disso mostrou que a composição destas órbitas, forma uma variedade local de dimensão 2, de classe C^1 , tangente ao auto-espaço associado a $\{\lambda_1, -\lambda_1\}$, e que esta variedade de órbitas é única localmente.

Uma aplicação deste teorema é vista no problema restrito dos três-corpos. Este é o problema do movimento de um asteróide de massa m , desprezível, que se move no campo de dois planetas de massas M_1 e M_2 , sem perturbar seu movimento (Ex: Sol-Júpiter - asteróides)

Tal problema, no plano, se reduz a um sistema com dois graus de liberdade, dependendo periodicamente do tempo, para o movimento do asteróide.

O equilíbrio ocorre quando os 3 corpos ocupam os vértices de um triângulo equilátero.

O problema, quando linearizado na vizinhança do triângulo equilátero de equilíbrio, tem quatro auto valores distintos: $\pm i n_2$, $\pm i n_3$, quando a razão das massas está no intervalo aberto $(0, \frac{1}{2} (1 - \frac{\sqrt{69}}{9}))$.

Quando n_3 é maior que n_2 , existe uma família de soluções periódicas (curtas), cujo período tende a $\frac{2\pi}{n_3}$, quando a solução se aproxima do equilíbrio. Por outro lado, se $n_3 \neq k n_2$ (k é inteiro) o teorema de Liapunov assegura a existência de uma outra família de soluções periódicas (longas). Se $n_3 = k n_2$, o teorema não pode ser aplicado.

O teorema de Liapunov para Hamiltonianos é um corolário imediato de outro mais geral que enunciaremos a seguir.

Teorema II: Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 .
Suponhamos que a equação

$$\dot{x} = f(x)$$

possui uma integral de classe C^2 $H: U \rightarrow \mathbb{R}$, isto é

$$\langle f(x), \nabla H(x) \rangle = 0, \quad \forall x \in U \quad (*)$$

Seja $p_0 \in U$.

Suponhamos que $f(p_0) = \text{grad } H(p_0) = 0$ e que existe um espaço bidimensional $E \subset \mathbb{R}^m$ tal que:

- 1) $f'(p_0)(E) = E$
- 2) $D^2H(p_0) / E$ é definida.

Então os autovalores de $f'(p_0) / E$ são imaginários $\{-i\lambda, i\lambda\}$ e, se todo outro autovalor de $f'(p_0)$ não é múltiplo inteiro deles, existe uma variedade bidimensional de classe C^1 , $M \subset U$ tangente a E em p_0 que é a união de soluções periódicas cujos períodos convergem a $2\pi|\lambda|^{-1}$ se a condição inicial converge a p_0 .

Vejamos como o Teorema I (enunciado na introdução) decorre do Teorema II,

$$\text{Tomamos } \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{2n}, \quad f = \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right),$$

$p_0 = (x_0, y_0)$ e H como a integral.

É claro que $\langle f(x), \text{grad } H(x) \rangle = 0, \quad \forall x \in U$.

Como espaço E bidimensional tomamos o associado aos autovalores $\{-i\lambda, i\lambda\}$. É claro que $f'(p_0)(E) = E$.

Só resta mostrar que $D^2H(p_0)/E$ é definida.

Seja A a matriz hessiana de H em p_0

$$A = \left(\frac{\partial^2 H(p_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right) \text{ e seja } J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

Então $f'(p_0) = J A$

e $D^2H(p_0)(u_1, u_2) = \langle Au_1, u_2 \rangle$

Basta mostrar que se para algum $u \in E$, $\langle Au, u \rangle = 0$ então $u = 0$

Começamos afirmando que $JE = E$, pois

Através do diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & AJ & \\ JE & \xrightarrow{\quad} & JE \\ J \uparrow & & \uparrow J \\ E & \xrightarrow{\quad} & E \\ & JA & \end{array}$$

vemos que $\{-i\lambda, i\lambda\} = \{\text{autovalores de } JA/E\} =$
 $= \{\text{autovalores } AJ/JE\}$

Mas $AJ = -A(-J) = -(JA)^t$ pois A é simétrica e $J^t = -J$, e $\{\text{autovalores } (JA)^t / JE\} = \{\text{autovalores de } JA/JE\}$.

Logo $\{\text{autovalores } JA/JE\} = \{i\lambda, -i\lambda\}$

Então, pela hipótese de não ressonância,
 $E = JE$.

Seja $u \in E - \{0\}$ tal que $\langle Au, u \rangle = 0$.

É fácil ver que $\langle Ju, u \rangle = 0$; como $Ju, Au, u \in E$, decorre que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $kJu = Au$, portanto

$$J Au = J kJu = k J^2 u = -k u \text{ e}$$

JA/E tem um autovalor real $(-k)$, o que é um absurdo.

Logo $u = 0$, como queríamos.



Vamos mostrar por um exemplo de Siegel que sem a condição de não ressonância é falso o teorema de Liapunov.

Seja $H = \frac{1}{2} (x_1^2 + y_1^2) - x_2^2 - y_2^2 + x_1 y_1 x_2 + \frac{1}{2} (x_1^2 - y_1^2) y_2$ uma função de Hamilton.

O sistema de Hamilton correspondente se torna:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 + x_1 x_2 - y_1 y_2 & , \dot{y}_1 = -x_1 - y_1 x_2 - x_1 y_2 \\ \dot{x}_2 = -2y_2 + \frac{1}{2} (x_1^2 - y_1^2) & , \dot{y}_2 = 2x_2 - x_1 y_1 \end{cases}$$

$x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$ é uma solução de equilíbrio.

Os autovalores correspondentes são:

$$\lambda_1 = -\lambda_3 = i \quad , \quad \lambda_2 = -\lambda_4 = 2i$$

Se λ_2 é considerado como o auto valor imaginário puro do teorema de Liapunov, então, como $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{2}$ não é um inteiro, pode-se afirmar a existência de uma família parametrizada de soluções periódicas com período aproximadamente $\frac{2\pi i}{\lambda_2} = \pi$.

Quando $x_1 = y_1 = 0$ a solução geral é $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = \alpha \cos 2t - \beta \sin 2t$, $y_2 = \alpha \sin 2t + \beta \cos 2t$ com α, β constantes, isto é, um círculo no plano (x_2, y_2) com período π , com nenhuma restrição no raio.

Pela unicidade das soluções periódicas, estas são precisamente as soluções dadas pelo teorema de Liapunov.

Por outro lado, se λ_1 é considerado como o auto valor do teorema, vamos mostrar que não existe solução periódica com período aproximadamente $\frac{2\pi i}{\lambda_1} = 2\pi$, afora as tri-

viais.

Seja $(x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))$ uma solução da equação Hamiltoniana correspondente. Definamos $p(t) = x_1^2(t) + y_1^2(t)$ e $q(t) = x_2^2(t) + y_2^2(t)$

Derivando, obtenos a relação:

$$\dot{p}(t) = 4 p(t) q(t) + p^2(t)$$

Segue que $x_1(t) = y_1(t) = 0$, $\forall t$. Portanto se a solução não está contida neste plano, devemos ter $\dot{p}(t) > 0$, $\forall t$.

Isto mostra que se a solução não está contida no plano $x_1 = y_1 = 0$ então ela não pode ser periódica, pois neste caso p seria periódica e não poderíamos ter $\dot{p}(t) > 0$, $\forall t$.

Sistemas Hamiltonianos com ressonância

Como foi mencionado antes (cap. II) o caso em que o ponto crítico do Hamiltoniano é um mínimo isolado é especialmente interessante porque implica a estabilidade do equilíbrio.

Nesta seção enunciamos resultados e damos exemplos que mostram que na vizinhança de um ponto de equilíbrio que é mínimo não degenerado (portanto isolado) do Hamiltoniano podem existir famílias de órbitas periódicas mesmo na presença de ressonância.

Teorema (Moser) Sejam $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 e $H: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que H é uma integral da equação $\dot{x} = f(x)$.

Se p_0 é um mínimo não degenerado de H e $f'(p_0)$ não se anula então existe uma variedade bidimensional topológica $p_0 \in M \subset \mathbb{R}^m$ que é a união de órbitas periódicas do sistema cujos períodos se aproximam dos da parte linearizada.

No caso Hamiltoniano este resultado pode ser substancialmente melhorado. Suponhamos que $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 e que apresenta em (x_0, y_0) um mínimo não degenerado (e portanto isolado). Isto implica (cap. II) que os autovalores da derivada do campo X_H em (x_0, y_0) são todos imaginários puros não nulos. Suponhamos que sejam $\{i\lambda_1, -i\lambda_1, \dots, i\lambda_n, -i\lambda_n\}$

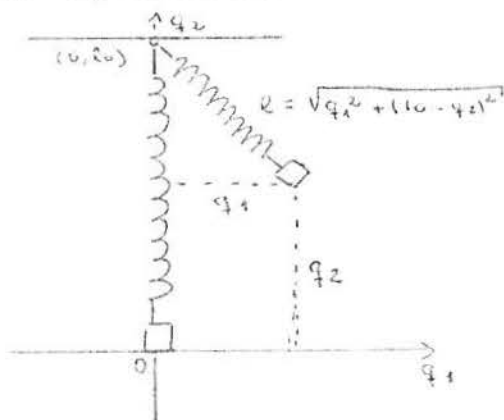
Teorema (Weinstein) Nas condições acima existem n variedades bidimensionais topológicas $M(\lambda_1), \dots, M(\lambda_n)$ contendo (x_0, y_0) tais que cada uma delas é a união de órbitas periódicas do sistema e se a condição inicial converge a (x_0, y_0) sobre $M(\lambda_j)$ o período converge a $2\pi |\lambda_j|^{-1}$.

As variedades topológicas M^λ dos dois teoremas acima não são, em geral, de classe C^1 em $p_0 = (x_0, y_0)$, conforme exemplos devidos a Duistermaat.

O exemplo de Siegel na sec. 1) acima mostra também que o Teorema de Weinstein é falso sem a hipótese de p_0 ser um mínimo de H .

A seguir veremos exemplos de sistemas mecânicos simples que obedecem ao Teorema de Weinstein exibindo famílias de curvas periódicas próximas a um ponto de equilíbrio que é mínimo não degenerado mas não se enquadram na hipótese de não ressonância do Teorema de Liapunov.

A mola tem uma energia potencial que é uma função C^3 do comprimento ℓ ($\mathcal{G}(\ell)$) e seja l_0 o comprimento da mola em sua posição de equilíbrio.



$(0,0)$ é uma posição de equilíbrio do sistema.

A energia potencial do sistema em (q_1, q_2) é

$U(q_1, q_2) = mg q_2 + \mathcal{G}(\sqrt{q_1^2 + (l_0 - q_2)^2} + k)$ onde k é tal que $U(0, 0) = 0$.

O sistema pode ser descrito pela equação de Hamilton:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2$$

com $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + U(q_1, q_2)$

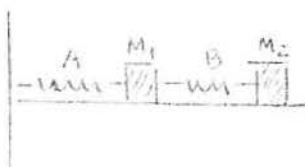
Na vertical

$$\begin{cases} \dot{q}_2 = \frac{p_2}{m} = f_1(q_2, p_2) \\ \dot{p}_2 = mg + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \ell} (\sqrt{q_1^2 + (l_0 - q_2)^2}) \cdot \frac{(l_0 - q_2)}{\sqrt{q_1^2 + (l_0 - q_2)^2}} = f_2(q_2, p_2) \end{cases}$$



Outro exemplo é um sistema de duas molas acopladas. (Sistema com dois graus de liberdade)

Suponhamos que a mola A tenha uma força $F_1(x) = -x$ e a mola B uma força $F_2(x) = -\omega^2 x$ com $\omega > 0$ e suponhamos que as massas $M_1 = M_2 = 1$.



Temos as equações

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_2 \end{cases}$$

que nos leva ao sistema Hamiltoniano: (com $q = (x_1, x_2)$ e $p = (y_1, y_2)$)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\omega^2 x_2 \end{cases}$$

Fácilmente se vê que 0 é equilíbrio e que os autovalores em 0 são $\lambda_1 = -\lambda_2 = i$ e $\lambda_3 = -\lambda_4 = i\omega$

As soluções do sistema são periódicas, da forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 \operatorname{sen} t \\ y_1 &= C_1 \operatorname{cos} t \\ x_2 &= C_2 \operatorname{cos} \omega t + C_3 \operatorname{sen} \omega t \\ y_2 &= -\omega C_2 \operatorname{sen} \omega t + \omega C_3 \operatorname{cos} \omega t \end{aligned}$$

No plano determinado por (x_1, y_1) , ou seja, na horizontal, temos círculos de período 2π .

No plano determinado por (x_2, y_2) , ou seja, na vertical, temos curvas periódicas de período $\frac{2\pi}{\omega}$.

CAPÍTULO IV
 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE LIAPUNOV

Dividimos a demonstração do Teorema II em duas partes. Inicialmente obtemos uma formulação em coordenadas locais convenientes, das hipóteses intrínsecas do teorema e numa segunda etapa usamos esta formulação para mostrar a existência e a unicidade da variedade de órbitas periódicas.

Como o problema é local tomamos $p_0 = 0 \in \mathbb{R}^m$. .

1) Coordenadas Locais

Nesta seção demonstramos a seguinte afirmação.

Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto com $0 \in U$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1 . Suponhamos que $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma integral de classe C^2 do sistema

$$(2) \quad \dot{x} = f(x) \quad ,$$

que $f(0) = \nabla H(0) = 0$ e que existe um espaço bidimensional $E \subset \mathbb{R}^m$ tal que $f'(0) \cdot E = E$.

Se $D^2H(0)/E$ é definido então os autovalores

de $f'(0)/E$ são imaginários puros não nulos: $i\lambda, -i\lambda$.

Sejam $\lambda_3, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ os demais autovalores de $f'(0)$. Se $\lambda_j \neq i\lambda$ para cada $3 \leq j \leq m$ então existem coordenadas lineares $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-2}$ de \mathbb{R}^m tais que, na vizinhança da origem, o sistema (2) é equivalente ao sistema

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = \lambda y + X(x, y, z) \\ \dot{y} = -\lambda x + Y(x, y, z) \\ \dot{z} = Az + Z(x, y, z) \end{cases}$$

onde $A \in M((m-2) \times (m-2), \mathbb{R})$ e X, Y, Z são de classe C^1 numa vizinhança da origem e se anulam, juntamente com suas derivadas primeiras, na origem.

Evidentemente $\lambda_3, \dots, \lambda_m$ são os autovalores de A e o sistema (1) também possui uma integral.

Se $\lambda_j \neq i\lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}$ e $3 \leq j \leq m$, então existem funções F quadrática em z e G de classe C^2 numa vizinhança da origem com $G(0), DG(0)$ e $D^2G(0)$ nulos, tais que

$$H_\lambda(x, y, z) = \frac{1}{2} \lambda(x^2 + y^2) + F(z) + G(x, y, z)$$

é uma integral de (1).

Começamos por um lema:

Lema 1: Sejam E um espaço vetorial real de dimensão finita ($=n$) munido de um produto interno, $U \subset E$ um aberto com $0 \in U$, $H: U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $f: U \rightarrow E$ uma aplicação de classe C^1 .

Se $f(0) = \nabla H(0) = 0$ e $\langle f(x), \nabla H(x) \rangle = 0$ para cada $x \in U$, então a função quadrática $F: E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(u) = \frac{1}{2} D^2H(0) \cdot u^2$$

satisfaz

$$\langle f'(0) \cdot u, \nabla F(u) \rangle = 0$$

para cada $u \in E$.

DEM:

Seja B a matriz simétrica associada a $D^2H(0)$;

temos

$$F(u) = \frac{1}{2} D^2H(0) \cdot u^2 = \frac{1}{2} \langle B u, u \rangle$$

Logo,

$$2 F'(u) \cdot h = \langle B u, h \rangle + \langle B h, u \rangle = \langle B u, h \rangle + \langle h, B u \rangle = 2 \langle B u, h \rangle$$

Então,

$$\langle \nabla F(u), h \rangle = F'(u) \cdot h = \langle B u, h \rangle \rightarrow \nabla F(u) = B u$$

Como $H \in C^2$, $\nabla H \in C^1$ e para cada $x \in U$,

$$\nabla H(x) = \nabla H(0) + D(\nabla H)(0) \cdot x + G(x) = B x + G(x)$$

com $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x)}{\|x\|} = 0$.

Como $f \in C^1$, temos para cada $x \in U$,

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + R(x) = L x + R(x)$$

onde $L = f'(0)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x)}{\|x\|} = 0$

Seja $u \in E$ e $t_0 > 0$ tal que $x = t u \in U$ para

todo $0 < t \leq t_0$. Temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f(t u), \nabla H(t u) \rangle = \langle L t u + R(t u), B t u + G(t u) \rangle = \\ &= t^2 \langle L u, B u \rangle + t \langle L u, G(t u) \rangle + t \langle B u, R(t u) \rangle + \langle R(t u), G(t u) \rangle \end{aligned}$$

Dividindo por t^2 obtemos:

$$0 = \langle L u, B u \rangle + \langle L u, \frac{1}{t} G(t u) \rangle + \langle B u, \frac{1}{t} R(t u) \rangle + \langle \frac{1}{t} R(t u), \frac{1}{t} G(t u) \rangle$$

de modo que, quando $t \rightarrow 0$, resulta

$$\langle Lu, Bu \rangle = 0$$

demonstrando o Lema. \square

Voltando à demonstração.

Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$, aberto com $0 \in U$ e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 e $H: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

Suponhamos que $f(0) = \nabla H(0)$ e que H é integral do sistema

$$(2) \quad \dot{x} = f(x)$$

isto é, $\langle f(x), \nabla H(x) \rangle = 0$, $\forall x \in U$.

Seja $E \subset \mathbb{R}^m$ um espaço bidimensional invariante por $f'(0)$ e tal que $D^2H(0)/E$ é uma forma quadrática definida.

Afirmamos que os autovalores de $f'(0)/E$ são imaginários puros conjugados e não nulos.

Seja $F(u) = \frac{1}{2} D^2H(0) \cdot u^2$ para $u \in \mathbb{R}^m$; pelo lema acima, F é uma integral de $\dot{u} = f'(0) \cdot u$, $u \in \mathbb{R}^m$. Como F/E é definida as curvas de nível de F no plano E são elipses em torno da origem. Logo a origem é um ponto de equilíbrio estável não assintótico para $\dot{u} = f'(0) \cdot u$. Portanto os autovalores de $f'(0)/E$ são imaginários puros, conjugados e não nulos pois $f'(0)/E$ é um isomorfismo e o sistema é real.

Sejam λi e $-\lambda i$, com $\lambda \neq 0$ os autovalores de $f'(0)/E$.

Sejam $\lambda_3, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ os demais autovalores, distintos ou não, de $f'(0)$ e suponhamos que $\lambda_j \neq \pm i\lambda$ para $3 \leq j \leq m$.

Na Forma canônica de Jordan real de $f'(0)$, aparece um bloco

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

correspondente ao autoespaço E de $\{\lambda i, -\lambda i\}$ e obtemos um subespaço $W \subset \mathbb{R}^m$ tal que, $E \oplus W = \mathbb{R}^m$ e $f'(0) \cdot W = W$. Colocamos novas coordenadas $u = (x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-2}$ em \mathbb{R}^m , e designamos por $A \in M((m-2) \times (m-2), \mathbb{R})$ a matriz de $f'(0)/W$ nas coordenadas $z \in \mathbb{R}^{m-2}$, obtendo

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & & A \end{array} \right)$$

como matriz de $f'(0)$ nas coordenadas u .

Conseqüentemente o sistema (2) é equivalente do sistema (1) da afirmação, sendo

$$(X, Y, Z) : U \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-2}$$

o resto da expressão de Taylor de f na origem.

A última afirmação destacamos como lema; observando que sempre podemos supor $D^2H(0)/E$ positivo definida, tomando para isso, se necessário, a integral $-H$.

Lema 2: Sejam $\lambda > 0$, $A \in M((m-2) \times (m-2), \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^m$ uma vizinhança da origem e $(X, Y, Z) : U \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-2}$ uma aplicação de classe C^1 que se anula junto com sua derivada na origem. Se o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda y + X(x, y, z) \\ \dot{y} = -\lambda x + Y(x, y, z) \\ \dot{z} = Az + Z(x, y, z) \end{cases}$$

possui uma integral $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 com $\nabla H(0) = 0$ e se nenhum autovalor de A é múltiplo de $i\lambda$, então existem uma vizinhança V da origem, uma função F quadrática em $z \in \mathbb{R}^{m-2}$ e uma função $G : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 com $G(0) = DG(0) = D^2G(0) = 0$ tais que

$$H_\lambda(x, y, z) = \frac{1}{2} \lambda(x^2 + y^2) + F(z) + G(x, y, z)$$

é uma integral de (1) em V .

DEM:

Definimos $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em $u = (x, y, z)$ por

$$f(u) = (\lambda y + X(u), -\lambda x + Y(u), Az + Z(u))$$

Seja $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 com $\nabla H(0) = 0$ e $\langle f(u), \nabla H(u) \rangle = 0, \forall u \in U$.

Sejam L a matriz associada a $f'(0)$ e B a matriz simétrica associada a $D^2H(0)$.

Mostremos que existem $B_0 \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ e $B_1 \in M((m-2) \times (m-2), \mathbb{R})$ simétricas tais que:

$$B = B_0 \oplus B_1$$

Como H é integral de (1) sabemos, pelo Lema 1 acima, que a forma $u \rightarrow \frac{1}{2} \langle Bu, u \rangle, u \in \mathbb{R}^m$, é integral do sistema $\dot{u} = Lu$, ou seja,

$$\langle Bu, Lu \rangle = 0, \forall u \in \mathbb{R}^m$$

Então: $\langle L^* B u, u \rangle = 0$ e $\langle u, B Lu \rangle = \langle B Lu, u \rangle = 0$

e portanto: $\langle (L^* B + B L)u, u \rangle = 0$, o que significa que $BL + L^* B = 0$.

Seja $E = \{u = (x, y, 0) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, o espaço

associado a $\{-\lambda i, \lambda i\}$, tal que

$$1) f'(0)(E) = E \text{ isto é } LE = E$$

$$2) D^2H(0)/E \text{ é definida}$$

$$\text{Temos } L^*(BE) = BLE = BE$$

Mas $D^2H(0)$ é definida em E , logo $\langle Bu, u \rangle$ é definida em E , então B/E é injetiva. Então B é um isomorfismo de E em BE .

O diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{L} & E \\ B \downarrow & & \downarrow B \\ BE & \xrightarrow{L^*} & BE \end{array}$$

Logo BE é bidimensional e L^*/BE tem os mesmos autovalores que L/E , $\{\lambda i, -\lambda i\}$.

Então $BE = E$, pela hipótese de não ressonância.

Como B é simétrica segue-se que $BE^\perp = E^\perp$ e assim

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B_0 & 0 \\ \hline 0 & B_1 \end{array} \right)$$

onde $B_0 = B/E_0$ com B_0 e B_1 simétricas.

Sabemos que $\langle B_0(x, y), (x, y) \rangle$ é integral de

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda y \\ \dot{y} = \lambda x \end{cases}$$

ou seja, $B_0 \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} B_0 = 0$

Seja $B_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$

Temos
$$\begin{pmatrix} b\lambda & -\lambda a \\ d\lambda & \lambda b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda b & \lambda d \\ -\lambda a & -\lambda b \end{pmatrix} = 0$$

Então $b = 0$
 $a = d$



Não podemos ter $a = d = 0$ porque $\langle B u, u \rangle$ é definida em E .

Então temos:

$$H(x, y, z) = \frac{1}{2} a(x^2 + y^2) + \langle B_1 z, z \rangle + G(u)$$

Tomamos $H_\lambda(u) = \frac{\lambda}{a} H(u)$. \square

2) Variedades de órbitas

Nesta seção demonstramos a afirmação a seguir; observamos que a maioria dos cálculos necessários foi separado em um apêndice ao final.

Sejam $\lambda > 0$, $A \in M((m-2) \times (m-2), \mathbb{R})$ e $U \subset \mathbb{R}^m$ uma vizinhança da origem e sejam $X, Y: U \rightarrow \mathbb{R}$ e $Z: U \rightarrow \mathbb{R}^{m-2}$ funções de classe C^1 em U que se anulam, juntamente com suas derivadas primeiras, na origem. Consideremos o sistema:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = \lambda y + X(x, y, z) \\ \dot{y} = -\lambda x + Y(x, y, z) \\ \dot{z} = Az + Z(x, y, z) \end{cases}$$

com $(x, y, z) \in U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-2}$.

Se o sistema (1) possui uma integral $H: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que $H(0) = \nabla H(0) = 0$ e se nenhum autovalor de A é igual a $i\lambda k$, com $k \in \mathbb{Z}$, então o sistema (1) tem, localmente na origem, uma única variedade invariante de dimensão 2, de classe C^1 e tangente ao plano $z = 0$. Esta variedade é composta

de uma família parametrizada por $r \geq 0$ de órbitas periódicas encaixadas de (1) tais que quando $r \rightarrow 0$, as órbitas convergem para a origem e o período para $\frac{2\pi}{\lambda}$.

Preliminares

Vimos no Lema 2 da seção anterior que existem $G: V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 na vizinhança V da origem, com $G(0) = DG(0) = D^2G(0) = 0$ tais que

$$H(x, y, z) = \frac{1}{2} \lambda (x^2 + y^2) + F(z) + G(x, y, z)$$

Para cada r , $H^{-1}(\frac{1}{2} \lambda r^2)$ é uma subvariedade invariante para as soluções do sistema (1), isto é, $H = \frac{1}{2} \lambda r^2$ determina uma família parametrizada por r , de subvariedades invariantes para o sistema.

Queremos mostrar que, para cada $r \geq 0$, existe uma função $R(\theta, r, u)$ e uma função $v(\theta, r)$, reais, e com determinadas propriedades, tais que:

$$\begin{aligned} x &= r(1 + R(\theta, r, v(\theta, r))) \cos \theta \\ y &= r(1 + R(\theta, r, v(\theta, r))) \sin \theta \\ z &= r v(\theta, r) \end{aligned}$$

é a equação de uma órbita periódica, solução do sistema (1), sobre a variedade $H^{-1}(\frac{1}{2} \lambda r^2)$.

Quando $r \rightarrow 0$ é claro que as órbitas periódicas da solução (x, y, z) vão para a origem.

Para um δ adequado definimos:

$$M^\lambda = \{(x, y, z) \mid |x| + |y| < \delta \text{ e } z = w(x, y)\} \text{ onde}$$

$$x = x(\theta, r)$$

$$y = y(\theta, r)$$

$$w(x, y) = w(x(\theta, r), y(\theta, r)) = r v(\theta, r) .$$

M^λ é uma variedade de dimensão 2, composta de órbitas periódicas encaixadas, como se queria.

Com o auxílio das propriedades de R e v , provamos que M^λ é de classe C^1 e tangente ao plano $z=0$, numa vizinhança da origem.

Em outra etapa, obtemos θ como função de t e conseqüentemente, x, y, z como funções de t e r e analisamos o período das órbitas, próximo à origem.

Através do teorema das Funções Implícitas, mostramos que o período é uma função $w(r)$ contínua em $0 \leq r \leq \delta$ e que quando $r \rightarrow 0$, $w(r) \rightarrow 2\pi\lambda^{-1}$, como se queria.

Demonstração: I ETAPA

Como H é uma integral do sistema (1), a equação $H = \frac{1}{2} \lambda r^2$ define implicitamente uma família parametrizada por $r \geq 0$, de variedades invariantes por (1).

Introduzindo as variáveis:

$$x = r(1 + R) \cos \theta$$

$$y = r(1 + R) \sin \theta$$

$$z = r u$$

onde $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{R}^{m-2}$ temos:

$$\frac{1}{2} \lambda (x^2 + y^2) + F(z) + G(x, y, z) = H(x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad H = \frac{1}{2} \lambda r^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \lambda (r^2 (1 + R)^2 \cos^2 \theta + r^2 (1 + R)^2 \sin^2 \theta) + F(r, u) + \tilde{G} = \frac{1}{2} \lambda r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2R + R^2 + 2\lambda^{-1} r^{-2} F(r u) + 2\lambda^{-1} r^{-2} \tilde{G} = 0$$

onde $\tilde{G} = \tilde{G}(\theta, r, u, R) = G(r(1 + R) \cos \theta, r(1 + R) \sin \theta, r u)$

Como F é quadrática em z , temos a equação:

$$2R + R^2 + 2\lambda^{-1} \{F(u) + r^{-2} \tilde{G}\} = 0$$

Definimos $N_\delta = \{(\theta, r, u) \mid \theta \text{ é qualquer,}$

$$0 \leq r \leq \delta, \quad |u| \leq \delta\}$$

$$N'_\delta = \{(\theta, r, u) \mid (\theta, r, u) \in N_\delta \text{ e } r \neq 0\}$$

Lema 1: Existência e propriedades de $R(\theta, r, u)$

A equação $2R + R^2 + 2\lambda^{-1} [F(u) + r^{-2} \tilde{G}] = 0$

i) tem uma única solução $R = R(\theta, r, u)$ definida e contínua em N_δ , para algum δ

ii) R é C^1 em (θ, u) em N_δ e C^1 em (θ, r, u) em N'_δ

- iii) R tem período 2π em θ
 iv) $R(\theta, 0, 0) = 0$ e $R_\theta(\theta, 0, u) \equiv 0$
 v) $r R_r(\theta, r, u) \rightarrow 0$ uniformemente em θ , $|u| \leq \delta$ e $r \rightarrow 0$.

(Demonstração no apêndice A1)

Buscando a função $v = v(\theta, r)$, definimos "a",
 $a = a(\theta, r, u) = r(1 + R(\theta, r, u))$ e, através dos sistemas

$$\begin{cases} \dot{x} = a \cos \theta \\ \dot{y} = a \sin \theta \\ \dot{z} = ru \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x} = \lambda y + X(x, y, z) \\ \dot{y} = -\lambda x + Y(x, y, z) \\ \dot{z} = Az + Z(x, y, z) \end{cases}$$

obtemos, por cálculo simples, o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\lambda - a^{-1} \{ \tilde{X} \sin \theta - \tilde{Y} \cos \theta \} \\ (2) \quad \dot{a} &= \tilde{X} \cos \theta - \tilde{Y} \sin \theta \\ \dot{u} &= Au + r^{-1} \tilde{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{onde } \tilde{X} &= \tilde{X}(\theta, r, u) = X(r(1+R) \cos \theta, r(1+R) \sin \theta, ru) \\ \tilde{Y} &= \tilde{Y}(\theta, r, u) = Y(r(1+R) \cos \theta, r(1+R) \sin \theta, ru) \\ \tilde{Z} &= \tilde{Z}(\theta, r, u) = Z(r(1+R) \cos \theta, r(1+R) \sin \theta, ru) \end{aligned}$$

Como "a" é conhecido como função de θ, r, u ,
 o sistema (2) se reduz à equação:

$$\frac{du}{d\theta} = - [\lambda + a^{-1} (\tilde{X} \sin \theta - \tilde{Y} \cos \theta)]^{-1} (Au + r^{-1} \tilde{Z})$$

Consideremos $\frac{du}{d\theta} = Bu + U(\theta, r, u)$ com $B = -\lambda^{-1}A$

$$\text{e } U(\theta, r, u) = \lambda^{-1} Au - [\lambda + a^{-1} (\tilde{X} \sin \theta - \tilde{Y} \cos \theta)]^{-1} (Au + r^{-1} \tilde{Z})$$

Adendo: Propriedades da U

- i) U está definida e é contínua em N_δ

ii) U é C^1 em (θ, u) em N_δ

iii) U é C^1 em (θ, r, u) em N'_δ

iv) $r U_r(\theta, r, u) \rightarrow 0$, uniformemente em $\theta, |u| \leq \delta, r \rightarrow 0$

(ver apêndice A2)

Analisando a equação $\frac{du}{d\theta} = Bu + U(\theta, r, u)$ quanto à existência de uma solução periódica em θ , de período 2π , colocamos

$\frac{dv}{d\theta} = Bv + f(\theta)$, $U(\theta, r, u) = f(\theta)$, com condição inicial $v(0) = v_0$.

A solução geral da equação é da forma

$$v(\theta) = e^{B\theta} v_0 + \int_0^\theta e^{B(\theta-s)} f(s) ds$$

Se existir v , solução periódica da equação, devemos ter: $v(\theta + 2\pi) = v(\theta) \Leftrightarrow v(0) = v(2\pi) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow v(0) = e^{2\pi B} v_0 + \int_0^{2\pi} e^{B(2\pi-s)} f(s) ds \Leftrightarrow v_0 = (I - e^{2\pi B})^{-1} \int_0^{2\pi} e^{B(2\pi-s)} f(s) ds$$

$$\Leftrightarrow (I - e^{2\pi B}) \text{ é inversível} \Leftrightarrow e^{2\pi B} \neq I \Leftrightarrow \beta, \text{ autovalor de } B, \\ e^{2\pi\beta} = \cos 2\pi\beta + i \sin 2\pi\beta \neq 1 \Leftrightarrow \beta \neq n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Por hipótese, temos que todo α , autovalor de A , não é múltiplo inteiro de λ , isto é:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha \neq n\lambda \Leftrightarrow \forall \beta, \beta = \frac{-\alpha}{\lambda} \neq \frac{n\lambda}{\lambda} = n \Leftrightarrow \forall \beta, n, \beta \neq n$$

Logo, pode-se partir para a procura de uma expressão para v (ver apêndice A5) que é, pela Teoria das Perturbações:

$$v(\theta, r) = (e^{-2\pi B} - I)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{-B\sigma} u(\theta + \sigma, r, v(\theta + \sigma, r)) d\sigma$$

Lema 2: Existência e propriedade de $v(\theta, r)$

A solução $v = v(\theta, r)$ tem as seguintes propriedades:

i) para δ suficientemente pequeno, v está definida e é contínua para todo θ e $0 \leq r \leq \delta$; v tem período 2π em θ ;

$$v(\theta, 0) = 0$$

ii) v é C^1 em θ e $v_\theta(\theta, 0) \equiv 0$

iii) v é C^1 em (θ, r) para todo θ e $0 < r \leq \delta$;

$$r v_r(\theta, r) \rightarrow 0 \text{ uniformemente em } \theta, \text{ quando } r \rightarrow 0.$$

(Demonstração no apêndice A4)

Procurando uma expressão para M^λ , vamos primeiramente analisar as consequências do Lema 2.

Uma consequência do Lema 2 é que os produtos $r R(\theta, r, v(\theta, r))$ e $r v(\theta, r)$ são de classe C^1 em (θ, r) , para todo θ e $0 \leq r \leq \delta$. (ver apêndice A5)

Além disso:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(r R(\theta, r, v(\theta, r)))|_{r=0} &= R(\theta, r, v(\theta, r))|_{r=0} + r R_r(\theta, r, v(\theta, r))|_{r=0} \\ &+ r R_u(\theta, r, v(\theta, r)) v_r(\theta, r)|_{r=0} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dr}(r v(\theta, r))|_{r=0} = v(\theta, r)|_{r=0} + r v_r(\theta, r)|_{r=0} = 0$$

Para cada r , seja b a distância do ponto sobre a trajetória periódica de nível de energia $\frac{1}{2} \lambda r^2$, correspondente a θ , à origem.

$$\text{Define-se } b = b(\theta, r) = r(1 + R(\theta, r, v(\theta, r))).$$

Temos

$$\frac{\partial b}{\partial r}(\theta, r) = 1 + \frac{\partial}{\partial r}(r R(\theta, r; v(\theta, r))) = 1 \quad \text{quando } r = 0$$

$$\frac{\partial b}{\partial r}(\theta, 0) = 1 \quad \text{é um isomorfismo, logo pode-se aplicar o Teo}$$

rema da Função Inversa para afirmar a existência de $r = r(\theta, b)$ para $0 \leq b \leq \gamma$ e γ suficientemente pequeno.

$$\text{Através das coordenadas polares } \begin{cases} x = b \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$

a variedade M^λ é facilmente descrita.

Seja $w(x, y) = r(\theta, b) \cdot v(\theta, r(\theta, b))$, onde θ e b são funções de x e y , obtidas pela inversão de $x = b \cos \theta$ e $y = b \sin \theta$.

$$\text{Definimos: } M^\lambda = \{(x, y, z) \mid |x| + |y| < \delta \text{ e } z = w(x, y)\}.$$

Queremos mostrar que M^λ é C^1 na origem, para isso calculamos (no apêndice A6):

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \cos \theta [r_b v + r v_r r_b] - b^{-1} \sin \theta [r_\theta v + r v_r r_\theta + r v_\theta]$$

Vemos no apêndice A7: $\frac{\partial w}{\partial x} \rightarrow 0$ quando $(x, y) \rightarrow 0$.

$$\text{Analogamente } \frac{\partial w}{\partial y} \rightarrow 0 \quad \text{quando } (x, y) \rightarrow 0.$$

$$\text{Definimos } \frac{\partial w}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

$$\text{Se mostrarmos que } \lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{w(x,y)}{|(x,y)|} = 0 \quad \text{então}$$

temos que w é derivável em $(0, 0)$ e $w'(0, 0) = 0$.

Vejam os:

Sabemos que existe um $k > 0$ tal que

$$|(x, y)| \geq \frac{1}{k}(|x| + |y|)$$

Por outro lado $|x| + |y| = b(|\cos \theta| + |\sin \theta|) = r(1+R)(|\cos \theta| + |\sin \theta|)$

$$\text{Então: } \frac{w(x, y)}{|x| + |y|} = \frac{r v(\theta, r)}{r(1+R)(|\cos \theta| + |\sin \theta|)} \rightarrow 0 \text{ quando } r \rightarrow 0$$

Logo $w(x, y) = o(|x| + |y|)$

$$\text{mas } \frac{w(x, y)}{|(x, y)|} \leq \frac{k w(x, y)}{|x| + |y|} \text{ e, portanto}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{w(x, y)}{|(x, y)|} = 0 \text{ como queríamos.}$$

Então $w'(0, 0) = 0$ e as parciais são contínuas, logo w é de classe C^1 na origem.

$$\text{A parametrização } \begin{cases} x = r(1 + R(\theta, r, v(\theta, r))) \cos \theta \\ y = r(1 + R(\theta, r, v(\theta, r))) \sin \theta \\ z = r v(\theta, r) \end{cases} \quad (5)$$

nos dá M^λ como uma família parametrizada por r de órbitas pe-
riódicas do sistema (1), encaixadas.

Conseguimos isto introduzindo novas coordenadas, calculando R como auxílio de H e calculando v como uma família única de soluções periódicas da equação

$$\frac{du}{d\theta} = B u + U(\theta, r, u) \text{ , que foi obtida eliminando } t \text{ .}$$

É claro que, quando $r \rightarrow 0$, as órbitas periódicas vão para a origem.

II ETAPA O Período das órbitas em t

Seja $\psi(t, r)$ com $\psi(0, r) = \theta$ a única solução da equação $\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\lambda - b^{-1} [\hat{X} \sin \theta - \hat{Y} \cos \theta]$ com condição inicial zero em $t = 0$, onde

$$\hat{X} = X(r(1 + R(\theta, r, v(\theta, r))) \cos \theta, \dots)$$

$$\hat{Y} = Y(r(1 + R(\theta, r, v(\theta, r))) \cos \theta, \dots)$$

A equação acima é a primeira do sistema (2), restrita à variedade M^λ .

Soluções do sistema (1) em M^λ são obtidas pela substituição de θ em (3) por $\psi(t + c, r)$ onde c é qualquer constante real.

Se existe $w \neq 0$ tal que $\psi(w, r) + 2\pi = 0$ (isto é, se percorrendo uma órbita dada por r uma volta inteira, a partir de $\theta = 0$, voltamos à posição inicial após um tempo w) então, para todo $t > 0$,

$$\psi(t + w, r) - \psi(t, r) + 2\pi = 0$$

$$\text{ou } \psi(t + w, r) + 2\pi = \psi(t, r)$$

(isto é, se percorremos uma órbita dada por r uma volta inteira a partir de $\theta = \psi(t, r)$ voltamos a esta posição após um tempo w).

Seja w tal que

$$\psi(w, 0) + 2\pi = 0 \Rightarrow \dot{\psi}(w, 0) = 0$$

$$\text{mas } \dot{\psi}(w, 0) = -\lambda - \lim_{r \rightarrow 0} b^{-1}(\hat{X} \sin \theta - \hat{Y} \cos \theta) = -\lambda$$

$$\text{logo } \psi(w, 0) = -\lambda w \text{ quando } \psi(0, 0) = 0$$

$$\text{logo } -\lambda w + 2\pi = 0 \Rightarrow w = 2\pi\lambda^{-1}$$

$$\text{Temos, então: } \psi(2\pi\lambda^{-1}, 0) + 2\pi = 0$$

$$\text{e } \frac{\partial \psi}{\partial t}(2\pi\lambda^{-1}, 0) = \dot{\psi}(2\pi\lambda^{-1}, 0) = -\lambda \neq 0$$

logo, pode-se aplicar o Teorema da Função Implícita, para afirmar a existência e unicidade de uma função real $w(r)$, definida e contínua para $0 \leq r \leq \delta$, para δ suficientemente pequeno, tal



que

$$w(0) = 2\pi\lambda^{-1} \quad e$$

$$\psi(w(r), r) + 2\pi = 0$$

Então a família de órbitas periódicas encaixadas constitui M^λ tem a propriedade que, quando $r \rightarrow 0$, as órbitas periódicas correspondentes vão para a origem e seu período vai para $2\pi|\lambda^{-1}|$.

A unicidade de M^λ segue da unicidade das soluções periódicas de $\frac{du}{d\theta} = Bu + U(\theta, r, u)$.

APENDICE A

A1

$$\text{A equação } 2R + R^2 + 2\lambda^{-1}[F(u) + r^{-2}\tilde{G}] = 0$$

- i) tem uma única solução $R = R(\theta, r, u)$ definida e contínua em $N_\delta = \{(\theta, r, u) \mid \theta \text{ é qualquer, } 0 \leq r \leq \delta, |u| \leq \delta\}$, para δ suficientemente pequeno;
- ii) R é de classe C^1 em (θ, u) em N_δ e em (θ, r, u) em N'_δ .
- iii) R tem período 2π em θ
- iv) $R(\theta, 0, 0) \equiv 0$ e $R_\theta(\theta, 0, u) \equiv 0$
- v) $r R_r(\theta, r, u) \rightarrow 0$ uniformemente em $\theta, |u| \leq \delta$ e $r \rightarrow 0$

Dem: Seja $f: \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com

$$f(\theta, r, u, R) = 2R + R^2 + 2\lambda^{-1}[F(u) + r^{-2}\tilde{G}] = 0$$

f tem as seguintes propriedades:

- 1) f é contínua em N_δ , pois F é quadrática e $\lim_{r \rightarrow 0} r^{-2}\tilde{G} = 0$,

pois a segunda derivada de G se anula na origem. Portanto, definindo $r^{-2}\tilde{G} = 0$ quando $r = 0$ temos $r^{-2}\tilde{G}$ contínua em N_δ .

- 2) f é de classe C^1 em (θ, u) em N_δ

$$\text{Vejam os: } \frac{\partial f}{\partial \theta} = 2\lambda^{-1} r^{-2} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \theta}$$

$$\tilde{G} = \tilde{G}(\theta, r, u, R) = G(r(1+R)\cos\theta, r(1+R)\sin\theta, ru)$$

Quando $r \neq 0$ temos $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ contínua pois G é C^2 .

$$\text{Por outro lado } \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \theta} = \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} =$$

$$= -r(1+R)\sin\theta \frac{\partial G}{\partial x} + r(1+R)\cos\theta \frac{\partial G}{\partial y}$$

Logo $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 2\lambda^{-1} r^{-1} [(1+R) \operatorname{sen} \theta \frac{\partial G}{\partial x} + (1+R) \operatorname{cos} \theta \frac{\partial G}{\partial y}] \rightarrow 0$

quando $r \rightarrow 0$ e conseqüentemente $(x, y, z) \rightarrow 0$ pois a segunda derivada de G se anula na origem.

$\frac{\partial f}{\partial u} = 2\lambda^{-1} \frac{\partial F}{\partial u}$ é contínua em θ e u pois F é quadrática em u .

3) f é de classe C^1 em N'_δ

Vejam os: $\frac{\partial f}{\partial r} = -4\lambda^{-1} r^{-3} \tilde{G} + 2\lambda^{-1} r^{-2} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial r}$, onde

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial r} = \frac{\partial G}{\partial x} (1+R) \operatorname{cos} \theta + \frac{\partial G}{\partial y} (1+R) \operatorname{sen} \theta + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot u$$

Logo, quando $r \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial r}$ é contínua. E pelos resultados de 2, quando $r \neq 0$ $\frac{\partial f}{\partial u}$ e $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ são contínuas.

4) $f(\theta, 0, 0, 0) = 0$, definindo $r^{-2} \tilde{G} = 0$ quando $r = 0$.

5) f é periódica de período 2π em θ , pois \tilde{G} o é.

6) $0 = \frac{\partial}{\partial R} f(\theta, 0, 0, 0) = 2 + 2R + 2\lambda^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial R} (r^{-2} \tilde{G}) \right]$

$(\theta, 0, 0, 0)$ pois $\frac{\partial}{\partial R} (r^{-2} \tilde{G}) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial G}{\partial x} \operatorname{cos} \theta + \frac{\partial G}{\partial y} \operatorname{sen} \theta \right]$

converge para 0 quando $r \rightarrow 0$, pois a segunda derivada de g se anula na origem.

Então, pelo Teorema das Funções Implícitas, para um δ suficientemente pequeno, temos:

i) existe uma única função real $R = R(\theta, r, u)$ definida e contínua em N_δ tal que $f(\theta, r, u, R(\theta, r, u)) = 0$

ii) R é C^1 em N'_δ e em (θ, u) em N_δ .

iii) R é periódica de período 2π em θ

iv) $R(\theta, 0, 0) = 0$ pois $f(\theta, 0, 0) = 2R(\theta, 0, 0) + R^2(\theta, 0, 0) = 0$
 e $R_\theta(\theta, 0, u) = 0$ pois $f_\theta(\theta, 0, u) =$
 $= 2R_\theta(\theta, 0, u) + 2RR_\theta(\theta, 0, u) + 2\lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta}(r^{-2} \tilde{G})(\theta, 0, u) = 0$
 e $\frac{\partial}{\partial \theta}(r^{-2} \tilde{G})(\theta, 0, u) = r^{-2} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \theta} = 0$ por 2

v) $r R_r \xrightarrow{\text{unif}} 0$, em θ , quando $r \rightarrow 0$ pois

$$f(\theta, r, u, R(\theta, r, u)) = 0$$

$$f_r(\theta, r, u, R(\theta, r, u)) = 2R_r + 2RR_r + 2\lambda^{-1}[-2r^{-3}\tilde{G} + r^{-2}\tilde{G}_r] = 0$$

$$\Rightarrow r f_r = 2r R_r - 2r R R_r - 4\lambda^{-1} r^{-2} \tilde{G} + 2\lambda^{-1} r^{-1} \tilde{G}_r = 0$$

$$\Rightarrow r R_r(R + 2R) - \lambda^{-1} r^{-2} \tilde{G} + 2\lambda^{-1} r^{-1} \tilde{G}_r = 0 \text{ e } r^{-2} \tilde{G} \rightarrow 0,$$

$r^{-1} \tilde{G}_r \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$ pois as derivadas de primeira e segunda ordem de G se anulam na origem. \square

A2-Adendo - Propriedades da U

Consideremos a equação $\frac{du}{d\theta} = B u + U(\theta, r, u)$,

onde $U(\theta, r, u) = \lambda^{-1} Au - [\lambda + a^{-1}(\tilde{X} \sin \theta - \tilde{Y} \cos \theta)]^{-1} \cdot (Au + r^{-1} \tilde{Z})$.

U tem as seguintes propriedades:

1) U está definida e contínua em N_δ pois

$$\lim_{r \rightarrow 0} U(\theta, r, u) = \lambda^{-1} Au - \left[\lambda + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r(1+R)} (\tilde{X} \sin \theta - \tilde{Y} \cos \theta) \right]^{-1}$$

$$(Au - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{Z}}{r}) = \lambda^{-1} Au - \lambda^{-1} Au = 0$$

pois as derivadas primeiras de X, Y, Z se anulam na origem.

2) U é de classe C^1 em (θ, u) em N_δ pois

$$U(\theta, 0, u) = 0 \Rightarrow U_\theta(\theta, 0, u) = 0 \text{ e } U_u(\theta, 0, u) = 0$$

calculando U_θ e U_u , observa-se que $U_\theta \rightarrow 0$ e $U_u \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$

3) U é de classe C^1 em (θ, r, u) em N'_δ pois

$$U_{n=1} = \frac{\left(\frac{\tilde{Z}_n \cdot r - \tilde{Z}}{r^2}\right) \left(\lambda + \frac{1}{r(R+1)} (\tilde{X} \sin \theta - \tilde{Y} \cos \theta)\right) - (Au - \frac{\tilde{Z}}{r}) \left[\frac{(\tilde{Y}_n \sin \theta - \tilde{Y} \cos \theta) a - a_n (\tilde{X} \sin \theta - \tilde{Y} \cos \theta)}{r^2 (R+1)^2} \right]}{\lambda^2 + \frac{2}{r(R+1)} (\tilde{X} \sin \theta - \tilde{Y} \cos \theta) + \frac{(\tilde{X} \sin \theta - \tilde{Y} \cos \theta)^2}{a^2}}$$

onde $a_r = (R+1) + r R_r$

Nada se pode dizer sobre $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{Z}}{r^2}$ e, portanto

$\lim_{r \rightarrow 0} U_r$, mas se $r \neq 0$, $\frac{\partial U}{\partial r}(\theta, r, u)$ é contínua.

4) $r U_r(\theta, r, u) \xrightarrow{\text{unif.}} 0$ em θ e $|u| \leq \delta$ quando $r \rightarrow 0$.

$$r U_r = \frac{\left(\frac{\tilde{Z}_n \cdot r - \tilde{Z}}{r}\right) \left(\lambda + \frac{1}{r} (\tilde{X} \sin \theta - \tilde{Y} \cos \theta)\right) - (Au + \frac{\tilde{Z}}{r}) \left[\frac{(\tilde{Y}_n \sin \theta - \tilde{Y} \cos \theta) r(R+1) - (R+1 + r R_r) (\tilde{X} \sin \theta - \tilde{Y} \cos \theta)}{r (R+1)^2} \right]}{\lambda^2 + \frac{\tilde{X}}{r} \frac{2 \sin \theta}{R+1} - \frac{\tilde{Y}}{r} \frac{2 \cos \theta}{R+1} + \frac{\tilde{X}^2 \sin^2 \theta}{r^2 (R+1)^2} - \frac{\tilde{Y}^2 \cos^2 \theta}{r^2 (R+1)^2} - \frac{\tilde{X} \tilde{Y} 2 \sin \theta \cos \theta}{r^2 (R+1)^2}}$$

e quando $r \rightarrow 0$, $\tilde{X}_r, \tilde{Z}_r, \tilde{Y}_r, \frac{\tilde{X}}{r}, \frac{\tilde{Y}}{r}, \frac{\tilde{Z}}{r} \rightarrow 0$ e $r R_r \rightarrow 0$.

A3-Expressão para $v(\theta, r)$ solução de $\frac{du}{d\theta} = Bu + U(\theta, r, u)$

Seja $\frac{du}{d\theta} = Bu + f(\theta)$.

Pela Teoria das Perturbações, temos:

$$v(\theta, r) = (e^{-B2\pi} - I)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{-B\sigma} U(\theta + \sigma, r, v(\theta + \sigma, r)) d\sigma$$

Vejamos como obter esta solução:

A solução geral é: $v(\theta) = e^{B\theta} v_0 + \int_0^\theta e^{B(\theta-s)} f(s) ds$ com

$$v_0 = (I - e^{B2\pi})^{-1} \int_0^{2\pi} e^{B(2\pi-s)} f(s) ds$$

Então:

$$v(\theta) = e^{B\theta} \left[(1 - e^{2\pi B})^{-1} \int_0^{2\pi} e^{B(2\pi-s)} f(s) ds \right] + \int_C^{\theta} e^{B(\theta-s)} f(s) ds$$

Mas $1 + \frac{e^{2\pi B}}{1 - e^{2\pi B}} = \frac{1}{1 - e^{-2\pi B}}$, logo:

$$\begin{aligned} v(\theta) &= e^{B\theta} \left[e^{2\pi B} (1 - e^{2\pi B})^{-1} \int_0^{2\pi} e^{B(2\pi-s)} f(s) ds + \int_0^{2\pi} e^{B(2\pi-s)} f(s) ds \right] + \\ &+ \int_0^{\theta} e^{B(\theta-s)} f(s) ds = -e^{B\theta} (1 - e^{-2\pi B})^{-1} \int_0^{2\pi} e^{B(2\pi-s)} f(s) ds + \\ &+ \int_0^{2\pi} e^{B(2\pi-s+\theta)} f(s) ds + \int_0^{\theta} e^{B(\theta-s)} f(s) ds = \\ &= \int_0^{2\pi} -(1 - e^{-2\pi B})^{-1} e^{B(2\pi-s+\theta)} f(s) + e^{(2\pi-s+\theta)} f(s) ds + \int_0^{\theta} e^{B(\theta-s)} f(s) ds \end{aligned}$$

Como $f(s + 2\pi) = f(s)$, seja $s + 2\pi = \sigma$ e

$$-s = -\sigma + 2\pi$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta} e^{B(\theta-s)} f(s) ds &= \int_{2\pi}^{\theta+2\pi} e^{B(\theta+2\pi-s)} f(s) ds \\ v(\theta) &= \int_0^{2\pi} \left[-(1 - e^{-2\pi B})^{-1} + 1 \right] e^{B(\theta+2\pi-s)} f(s) ds + \int_{2\pi}^{\theta+2\pi} e^{B(\theta+2\pi-s)} f(s) ds = \\ &= \int_C^{2\pi} e^{B(\theta+2\pi-s)} f(s) ds - (1 - e^{-2\pi B})^{-1} \int_0^{2\pi} e^{B(\theta+2\pi-s)} f(s) ds - \\ &- \int_0^{2\pi} e^{B(\theta+2\pi-s)} f(s) ds + \int_0^{\theta+2\pi} e^{B(\theta+2\pi-s)} f(s) ds = \\ &= - \int_0^{2\pi} (1 - e^{-2\pi B})^{-1} e^{B(\theta+2\pi-s)} f(s) ds + \int_0^{\theta+2\pi} e^{B(\theta+2\pi-s)} f(s) ds = \\ &= - \int_0^{2\pi} (1 - e^{-2\pi B})^{-1} e^{B(\theta+2\pi-s)} f(s) ds + (1 - e^{-2\pi B}) \int_0^{2\pi} (1 - e^{-2\pi B})^{-1} e^{B(\theta+2\pi-s)} f(s) ds \\ &+ (1 - e^{-2\pi B}) \int_{2\pi}^{\theta+2\pi} (1 - e^{-2\pi B})^{-1} f(s) ds = -e^{-2\pi B} \int_0^{2\pi} (1 - e^{-2\pi B})^{-1} e^{B(\theta+2\pi-s)} f(s) ds \\ &+ (1 - e^{-2\pi B}) \int_{-\pi}^{\theta+\pi} (1 - e^{-2\pi B})^{-1} e^{B(\theta+2\pi-s)} f(s) ds \quad * \end{aligned}$$

Consideremos $(1 - e^{-2\pi B})^{-1} = K$

$$* = - \int_0^{2\pi} K e^{B(\theta-s)} f(s) ds + \int_{2\pi}^{\theta+2\pi} K e^{B(\theta+2\pi-s)} f(s) ds - \int_{2\pi}^{\theta+2\pi} K e^{B(\theta-s)} f(s) ds =$$

$$= - \int_0^{2\pi} K e^{B(\theta-s)} f(s) ds + \int_0^{2\pi} K e^{B(\theta-s)} f(s) ds - \int_0^{\theta+2\pi} K e^{B(\theta-s)} f(s) ds + \int_{2\pi}^{\theta+2\pi} K e^{B(\theta+2\pi-s)} f(s) ds \quad *$$

Seja $\sigma = s - 2\pi$

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= f(s) \quad , \quad \text{temos} \quad \int_{2\pi}^{\theta+2\pi} K e^{B(\theta+2\pi-s)} f(s) ds = \int_c^{\theta} K e^{B(\theta-\sigma)} f(\sigma) d\sigma \\ &= - \int_0^{\theta} K e^{B(\theta-s)} f(s) ds - \int_{\theta}^{\theta+2\pi} K e^{B(\theta-s)} f(s) ds + \int_c^{\theta} K e^{B(\theta-s)} f(s) ds = \\ &= - \int_0^{2\pi} K e^{B(\theta-s)} f(s) ds \quad * \end{aligned}$$

Seja $s = \sigma - 2\pi$, $f(s) = f(\sigma - 2\pi) = f(\sigma)$

$$= - \int_0^{2\pi} K e^{B(\theta+2\pi-s)} f(s) ds \quad *$$

Seja $\sigma = s + \theta$

$$\begin{aligned} &= - \int_c^{2\pi} (I - e^{-2\pi B})^{-1} e^{B(\theta+2\pi-s-\theta)} f(s+\theta) ds = \\ &= - \int_c^{2\pi} (I - e^{-2\pi B})^{-1} e^{B(2\pi-s)} f(s+\theta) ds = \\ &= - \int_c^{2\pi} (I - e^{-2\pi B})^{-1} e^{-(-2\pi B)} e^{-Bs} f(s+\theta) ds = \\ &= (e^{-2\pi B} - I)^{-1} \int_c^{2\pi} e^{-Bs} f(s+\theta) ds \end{aligned}$$

Verificamos que, se $v(\theta, r)$ existe e é solução periódica da equação $\frac{du}{d\theta} = Bu + U(\theta, r, u)$

então $v(\theta, r) = (e^{-2\pi B} - I)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{-Bs} U(\theta+s, r, v(\theta+s, r)) ds$

A4

A solução $v = v(\theta, r)$ tem as seguintes propriedades:

- i) para δ suficientemente pequeno, existe $v(\theta, r)$ para todo θ e $0 \leq r \leq \delta$ tal que:

- 1) v é contínua em θ
 2) v tem período 2π em θ
 3) $v(\theta, 0) = 0$
- ii) v é de classe C^1 em θ e $v_\theta(\theta, 0) = 0$
- iii) v é de classe C^1 em (θ, r) para $0 < r \leq \delta$ e $r v_r(\theta, r) \rightarrow 0$ uniformemente em θ , quando $r \rightarrow 0$.

Dem:

Seja $E = \{ \alpha : [0, 2\pi] \times [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha \text{ é contínua em } \theta \text{ e } 0 \leq r \leq \delta \text{ e } \alpha \text{ é periódica em } \theta \}$

E é espaço métrico completo com $\| \alpha \| = \sup_{\theta, r} | \alpha(\theta, r) |$

Seja $T : E \rightarrow E$ tal que

$$T(\alpha(\theta, r)) = (e^{-B2\pi} - I)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{-B\sigma} U(\theta + \sigma, r, \alpha(\theta + \sigma, r)) d\sigma$$

Como $U, \alpha \in E$, temos que $T(\alpha) \in E$.

Queremos mostrar que T é uma contração.

Sejam $\alpha, \beta \in E$

$$\begin{aligned} & | T(\alpha(\theta, r)) - T(\beta(\theta, r)) | \leq K_1 | U(\theta + \sigma, r, \alpha(\theta + \sigma, r)) \\ & - U(\theta + \sigma, r, \beta(\theta + \sigma, r)) | \leq K_1 \left\| \frac{\partial U}{\partial u} \right\| \| \alpha - \beta \| \end{aligned}$$

onde K_1 é uma constante.

Existe $\delta > 0$ tal que, para $0 \leq r \leq \delta$, existe $L < 1$ tal que $\left\| \frac{\partial U}{\partial u} \right\| < L$ pois $\frac{\partial U}{\partial u} \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$.

Logo $| T(\alpha(\theta, r)) - T(\beta(\theta, r)) | \leq L \| \alpha - \beta \|$, para todo θ e $0 \leq r \leq \delta$.

Então T é uma contração, e pelo teorema do Ponto Fixo de Banach pode-se afirmar a existência de $v \in E$ tal que $T(v) = v$, isto é, existe v tal que

$$v(\theta, r) = (e^{-B2\pi} - I)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{-B\sigma} U(\theta+\sigma, r, v(\theta+\sigma, r)) d\sigma$$

v é contínua em θ e $0 \leq r \leq \delta$

v tem período 2π em θ

e, além disso, $v(\theta, 0) = 0$ pois $U(\theta+\sigma, 0, v(\theta+\sigma, 0)) = 0$

ii) Seja $E = \{ \alpha : [0, 2\pi] \times [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha(\theta, r) \text{ é contínua em } \theta \text{ e em } 0 \leq r \leq \delta \}$.

E é espaço métrico completo com a norma do sup.

Seja $T : E \rightarrow E$ tal que

$$T(\alpha(\theta, r)) = (e^{-2\pi B} - I)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{-B\sigma} (U_\theta(\theta+\sigma, r, v(\theta+\sigma, r)) + U_u(\theta+\sigma, r, v(\theta+\sigma, r))\alpha(\theta+\sigma, r)) d\sigma$$

$$U_\theta, U_u, \alpha \in E \Rightarrow T(\alpha) \in E$$

Sejam $p, q \in E$, então temos $\|T_p - T_q\| < K_1 \max_\theta \left\| \frac{\partial U}{\partial u} \right\| \|p - q\|$

Como $\frac{\partial U}{\partial u} \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$, existe δ tal que para $0 \leq r \leq \delta$

existe $L < 1$ tal que $\|T_p - T_q\| < L \|p - q\|$.

Logo, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe $p \in E$ tal que $T_p = p$, isto é :

$$p(\theta, r) = (e^{-2\pi B} - I)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{-B\sigma} (U_\theta(\theta+\sigma, r, p(\theta+\sigma, r)) + U_u(\theta+\sigma, r, p(\theta+\sigma, r))p(\theta+\sigma, r)) d\sigma$$

Mas :

$$p(\theta, r) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} [v(\theta+h, r) - v(\theta, r)]$$

É pelo Teorema Geral das Equações Diferenciais Ordinárias, quanto à dependência das soluções em relação aos parâmetros, como v é solução de $\frac{dv}{d\theta} = Bv + U(\theta, r, v) = f(\theta, r, v)$ e f é de classe C^1 em θ então v é de classe C^1 em θ .

Logo existe $\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} |v(\theta+h, r) - v(\theta, r)| = v_\theta(\theta, r)$

Então $p(\theta, r) = v_\theta(\theta, r)$.

Além disso, quando $r=0$, $U_\theta = U_u = 0$ e v_θ é contínua em $[0, \delta]$, portanto limitada, logo $v_\theta(\theta, 0) = 0$.

iii) Seja $E = \{ \alpha : [0, 2\pi] \times [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha(\theta, r) \text{ é contínua em } \theta \text{ e em } 0 < r \leq \delta \text{ e } r\alpha \rightarrow 0 \text{ quando } r \rightarrow 0 \}$

E é espaço métrico completo com a norma do supremo.

Seja $T : E \rightarrow E$ tal que

$$T(\alpha(\theta, r)) = (e^{-B2\pi} - I)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{-B\sigma} [U_r(\theta+\sigma, r, v(\theta+\sigma, r)) + U_u(\theta+\sigma, r, v(\theta+\sigma, r))\alpha(\theta, r)] d\sigma$$

Como U_r e $\alpha \in E$, $T(\alpha) \in E$.

Queremos mostrar que T é uma contração.

Sejam $\alpha, \beta \in E$.

$$\|T(\alpha) - T(\beta)\| < K \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left\| \frac{\partial U}{\partial u} \right\| \|\alpha - \beta\|$$

Como $\frac{\partial U}{\partial u} \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$, pode-se afirmar que existe $\delta > 0$ tal que para $0 \leq r \leq \delta$, existe $L < 1$ tal que

$$\left\| \frac{\partial U}{\partial u} \right\| < L . \text{ Logo } \|T(\alpha) - T(\beta)\| < L \|\alpha - \beta\|$$

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe $p \in E$ tal que $T(p) = p$, isto é

$$p(\theta, r) = (e^{-B2\pi} - 1)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{-B\sigma} [U_r(\theta+\sigma, r, v(\theta+\sigma, r)) + U_u(\theta+\sigma, r, v(\theta+\sigma, r))p(\theta, r)] d\sigma$$

É fácil ver que $\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} |v(\theta, r+h) - v(\theta, r)| = p(\theta, r)$

Pelo Teorema da Dependência de soluções em relação a condições iniciais e parâmetros, em $\frac{du}{d\theta} = Bu + U(\theta, r, u) = f(\theta, r, u)$

é de classe C^1 em $0 < r < \delta$ então toda solução é C^1 em $0 < r \leq \delta$. Logo existe v_r ,

$$v_r^{(\theta, r)} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} |v(\theta, r+h) - v(\theta, r)| = p(\theta, r)$$

Como $v_r \in E$ temos $rv_r \rightarrow 0$ uniformemente em θ quando $r \rightarrow 0$.

A5-Propriedades dos produtos $rR(\theta, r, v(\theta, r))$ e $rv(\theta, r)$

1) $rR(\theta, r, v(\theta, r))$ e $rv(\theta, r)$ são contínuas para todo θ e $0 \leq r \leq \delta$ e C^1 em todo θ e $0 < r \leq \delta$, pois R e v tem estas propriedades.

2) Quando $r \rightarrow 0$ temos:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rR(\theta, r, v(\theta, r))) = R(\theta, r, v(\theta, r)) + rR_r(\theta, r, v(\theta, r))$$

$$+ rR_u(\theta, r, v(\theta, r))v_r(\theta, r) \rightarrow 0 \text{ pois } R(\theta, 0, 0) = 0,$$

$$\text{e } rR_r(\theta, r, v(\theta, r)) \rightarrow 0, \quad rv_r(\theta, r) \rightarrow 0 \text{ e } v(\theta, r) \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(rR(\theta, r, v(\theta, r))) = rR_\theta(\theta, r, v(\theta, r)) + rR_u(\theta, r, v(\theta, r))v_\theta(\theta, r) \rightarrow 0$$

$$\text{pois } R_\theta(\theta, 0, 0) = 0, \quad R_u(\theta, r, v(\theta, r)) \rightarrow 0, \quad v_\theta(\theta, 0) = 0$$

Além do mais: $\frac{rR(\theta, r, v(\theta, r))}{r} \rightarrow 0$ uniformemente em θ

Logo $rR(\theta, r, v(\theta, r)) \in C^1$ em θ e $0 \leq r \leq \delta$

3) Quando $r \rightarrow 0$, temos

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv(\theta, r)) = v(\theta, r) + rv_r(\theta, r) \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(rv(\theta, r)) = rv_\theta(\theta, r) \rightarrow 0$$

e além disso: $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{rv(\theta, r)}{r} = 0$ uniformemente em θ .

Logo $r v(\theta, r)$ é C^1 em θ e $0 \leq r \leq \delta$

A6-Cálculo auxiliar para mostrar que M^λ é C^1

Seja $w(x, y) = r(\theta, b) \cdot v(\theta, r(\theta, b))$ onde θ e b são funções de x e y como inversas da função

$$\begin{cases} x = b \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$

e $b(\theta, r) = r(1 + R(\theta, r, v(\theta, r)))$ e θ e b definidas para $(x, y) \neq (0, 0)$, isto é, $b > 0$.

Nestes pontos, temos:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [r(\theta, b) \cdot v(\theta, r(\theta, b))] = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot -b \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot b \cos \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial b} [r(\theta, b) \cdot v(\theta, r(\theta, b))] = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial b} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta$$

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} [r \cdot v] = \frac{\partial w}{\partial x} (-b \sin^2 \theta) + \frac{\partial w}{\partial y} (b \cos \theta \sin \theta)$$

$$-b \cos \theta \frac{\partial}{\partial b} [r \cdot v] = \frac{\partial w}{\partial x} (-b \cos^2 \theta) + \frac{\partial w}{\partial y} (-b \cos \theta \sin \theta)$$

somando membro a membro, temos:

$$-b \frac{\partial w}{\partial x} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} [r \cdot v] - b \cos \theta \frac{\partial}{\partial b} [r \cdot v]$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -b^{-1} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} [r \cdot v] - \cos \theta \frac{\partial}{\partial b} [r \cdot v]$$

$$\frac{\partial}{\partial b} [r(\theta, b) \cdot v(\theta, r(\theta, b))] = r_b v + r v_r r_b$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [r(\theta, b) \cdot v(\theta, r(\theta, b))] = r_\theta v + r v_\theta + r v_r r_\theta$$

Logo:

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x, y) = \cos \theta (r_b v + r v_r r_b) - b^{-1} \sin \theta (r_\theta v + r v_\theta + r v_r r_\theta)$$

Analogamente temos:

$$\frac{1}{b} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} [r v] = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot -\sin \theta \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \cos^2 \theta$$

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial b} [r v] = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin^2 \theta$$

somando temos:

$$\frac{1}{b} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} [r v] + \sin \theta \frac{\partial}{\partial b} [r v] = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Então:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = b^{-1} \cos \theta (r_{\theta} v + r v_{\theta} + r v_r r_{\theta}) + \sin \theta (r_b v + r v_r r_b)$$

A7 $\frac{\partial w}{\partial x}$ é contínua na origem:

Queremos ver que: $\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = 0$.

Para isto vamos analisar os limites:

$$1) \lim_{b \rightarrow 0} r_b(\theta, b) v(\theta, r(\theta, b)) + r(\theta, b) v_r(\theta, r(\theta, b)) r_b(\theta, b)$$

$$2) \lim_{b \rightarrow 0} \frac{r_{\theta}(\theta, b) v(\theta, r(\theta, b)) + r(\theta, b) v_r(\theta, r(\theta, b)) r_{\theta}(\theta, b) + r(\theta, b) \cdot v_{\theta}(\theta, r(\theta, b))}{b}$$

Vejamos o primeiro:

$$b(\theta, r) = r(1 + R(\theta, v(\theta, r))) \text{ e já vimos que}$$

$$b_r(\theta, 0) = 1 \text{ logo } r_b(\theta, 0) = 1$$

$$b(\theta, 0) = 0 \text{ logo } r(\theta, 0) = 0$$

$$v(\theta, 0) = 0 \text{ logo quando } b \rightarrow 0, v(\theta, r(\theta, b)) \rightarrow 0$$

$$r v_r(\theta, r) \rightarrow 0 \text{ com } r \text{ logo converge para } 0 \text{ com } b$$

$$\text{Logo: } r_b \cdot v + r v_r r_b \rightarrow 0 \text{ quando } b \rightarrow 0.$$

Vejamos o segundo limite: Iniciamos analisando

r_{θ} .

Quando $z = 0$ temos:

$$\frac{1}{2} \lambda r^2 = \frac{1}{2} \lambda (x^2 + y^2) + G(x, y, 0) \quad \text{ou seja}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + k G(x, y, 0) \quad , \quad k \text{ constante .}$$

$$\text{Como } \begin{cases} x = b \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad , \text{ vem que:}$$

$$r(\theta, b) = b \sqrt{1 + \frac{1}{b^2} k G(b \cos \theta, b \sin \theta, 0)}$$

$$\text{Logo } r_\theta = \frac{k}{2 \sqrt{1 + \frac{1}{b^2} G(b \cos \theta, b \sin \theta, 0)}} \left(-\frac{\partial G}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial G}{\partial y} \cos \theta \right)$$

Vemos que $r(\theta, 0) = 0$ pois $G, \frac{\partial G}{\partial x}$ e $\frac{\partial G}{\partial y}$ se anulam na origem.

$$\text{Temos } \frac{r_\theta}{b} = \frac{r_\theta}{2 \sqrt{1 + \frac{1}{b^2} G(b \cos \theta, b \sin \theta, 0)}} \left(-\frac{\partial G}{\partial x} \frac{\sin \theta}{b} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\cos \theta}{b} \right)$$

Logo, quando $b \rightarrow 0$, $\frac{r_\theta}{b} \rightarrow 0$ pois as derivadas de segunda ordem de G também se anulam na origem.

Então o limite:

$$\lim_{b \rightarrow 0} r_\theta \cdot v + r v_r r_\theta + r v_\theta = 0 \quad , \text{ como queríamos.}$$

Analogamente, $\frac{\partial w}{\partial y} \rightarrow 0$ quando $(x, y) \rightarrow 0$.

REFERÊNCIAS

A) Teorema de Liapunov

O teorema de Liapunov apareceu originalmente em 1892, imprimido pela Sociedade de Matemática de Cracóvia, tendo sido traduzido para o francês em 1907, sendo publicado nos Anais da Faculdade de Ciências de Toulouse, segunda série, volume 9.

Reapareceu em:

LIAPUNOV, M.A.: Problème générale de la Stabilité du Mouvement. Annals of Mathematics Studies, N. 17., Princeton University Press (1949).

Seguimos a demonstração de Kelley, que apareceu como apêndice C da 1^a edição do livro de Abraham, abaixo mencionado, e foi publicado em:

KELLEY, A: On the Liapunov sub-center manifolds. J. Math. Anal. Appl. 18:336-344 (1967)

B) Sistemas Hamiltonianos

ABRAHAM, R. e MARSDEN, J.E.: Foundations of Mechanics, 2^a edição, Benjamin (1978)

Observação: O cap. 3.1 é usado nos cap. II.1 e II.3; o cap. 3.3 é usado no cap. II.2; o cap. 5.6 é usado nos capítulos II e III.

ARNOLD, V.I.: Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer (1978)

Obs.: Os capítulos 2 e 3 são usados nos cap. I e III.3; o capítulo 8 é usado no cap. II.1.

MARION: Classical Dynamics of Particles and Systems, 2^a edição, Academic Press (1970).

Obs.: O capítulo 7 é usado no cap. I.

SIEGEL, C.L. e MOSER J.K.: Lectures on Celestial Mechanics, Springer (1971).

Obs.: Os capítulos 2.15 e 2.16 são usados nos cap. III.1 e III.2.

HIRSCH, M.W. e SMALE, S.: Differential Equations, dynamical system and linear algebra, Academic, (1974).

Obs.: O capítulo 9 é usado no cap. II.1 e o capítulo 14 é usado no capítulo 1.

PALIS JÚNIOR, J. e MELO, W.: Introdução aos Sistemas Dinâmicos, IMPA (1977).

Obs.: O capítulo II do livro é usado no capítulo II.3 do trabalho

TALIAFERRO, S.D.: Stability for two Dimensional Analytic Potentials, Jo Diff. Eq. 35, 248-265 (1980).

Obs.: É mencionado no cap. II.2.

ROELS, J: An Extension to Resonant Cases of Liapunov's Theorem Concerning the Periodic Solutions Near a Hamiltonian Equilibrium, J. Diff. Eq., 9, 300-324 (1971).

Obs.: É usado no cap. III.2.

DUISTERMAAT, J.J.: On periodic solutions near equilibrium points of Conservative Systems, Arch. Rat. Mech. Anal. 45, 143-160. (1972)

Obs.: É usado no cap. III-3.

MOSER, J. Periodic orbits near an equilibrium and a theorem by Alan Weinstein, Comun. Pure Appl. Math. 29. 727-747. (1976).

Obs.: É citado no capítulo III.3

MANE, R.: Notas de um curso de Introdução à Mecânica, Impa. (1974).

Obs.: Serviu de base para o capítulo I.