UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES EM DOMÍNIOS NÃO LIMITADOS ATRAVÉS DO MÉTODO DE GALERKIN

por

ROSENEI FELIPPE KNACKFUSS.

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada

Prof. João Paulo Lukaszczyk
Orientador

Santa Maria, 22 de outubro de 1999.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Knackfuss, Rosenei Felippe

Resolução de Equações de Navier-Stokes em Domínios Não Limitados Através do Método de Galerkin / Rosenei Felippe Knackfuss - Porto Alegre: CPGMAp da UFRGS, 1999.

66 p.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 1999. Orientador: Lukaszczyk, João Paulo.

1.Equações de Navier-Stokes. 2. Método de Galerkin. 3.Domínios Não Limitados.

Agradecimentos

Agradeço ao corpo docente e à coordenação do curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada.

Agradeço aos colegas de CPGMAp pelo companheirismo, amizade e apoio, em especial aos colegas Leandra Anversa Fiorese, Adilção Cabrini Beust e Alcides Dallanora Buzato.

Agradeço à Profª Drª Vanilde Bisognin, Profª Drª Eleni Bisognin e Profª Drª Liliane Barrichello pelo empenho na concessão do convênio UFRGS/UFSM.

Agradeço à chefia do departamento de Matemática da UFSM pela compreensão e apoio obtido durante o curso.

Em especial agradeço:

— Ao Prof. Dr. João Paulo Lukaszczyk, meu incansável orientador, que pela sabedoria e competência na orientação mostrou-me novos conhecimentos para meu trabalho e para minha formação.

— A minha família, em especial a minha esposa e pais, que através do seu incentivo, permitiu que este trabalho se concretizasse.

Dedico todos os meus esforços neste trabalho aos meus filhos Leonardo e Aline.

Resumo

Neste trabalho, apresenta-se o resultado da existência de soluções fracas em domínios não-limitados para as equações de Navier-Stokes, desde que a fronteira satisfaça uma certa condição de regularidade que é necessária para a obtenção de estimativas em domínios não-limitados semelhantes à desigualdade de Poincaré em domínios limitados.

Apresenta-se o desenvolvimento detalhado do método de Galerkin para as equações de Navier-Stokes em domínios não-limitados com cálculo explícito de várias constantes e com forças externas não nulas. Apresenta-se dois teoremas fundamentais: um fornecendo condições para existência de soluções do problema estacionário e o outro fornecendo condições para existência de soluções do problema não-estacionário.

Palavras-Chaves: Equações de Navier-Stokes, Método de Galerkin, Domínios Não Limitados.

Abstract

In the work it is presented results of existence of weak solutions in unbounded domains for the Navier-Stokes equations.

The main condition to obtain similar results as those for bounded domains; for example the Poincaré inequality; is a certain condition of regularity at the boundary of the domain.

It is presented the detailed development of the Galerkin method for the the Navier-Stokes equations in unbounded domains with the explicit calculations of many constants and with non null external forces.

It is presented two basic theorem: one presenting condition for the existence of solutions for the stationary problem and the other presenting conditions for existence of solution for the non stationary problem.

Key Words: Navier-Stokes Equations, Galerkin Method, Unbounded Domains.

Notação

Em nosso trabalho utilizamos a seguinte notação normalmente utilizada em estudos de equações diferenciais parciais.

$A \circlearrowleft B$, denota que o espaço funcional A está continuamente imerso no espaço funcional B.

Ω, um aberto do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

$\overline{\Omega}$, o fecho do conjunto Ω.

$\partial\Omega$, fronteira do conjunto Ω.

$k = (k_1, k_2, ..., k_n)$ é um multi-índice em $\mathbb{R}^n$.

$|k| = k_1 + k_2 + ... + k_n$.

$$D^m\phi(x) = \frac{\partial^{|m|}\phi(x)}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}...\partial x_n^{m_n}} \text{onde } m = (m_1, m_2, ..., m_n)$$

$L^p(\Omega)$, o espaço das funções mensuráveis g tais que

$$\|g\|_p = \left(\int_\Omega |g(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \text{ , } 1 \leq p < \infty.$$

$C(\Omega), C^k(\Omega), C_0^k(\Omega), C_0^\infty(\Omega)$ são os espaços funcionais com a definição usual em análise.

$C_B^k(\Omega)$ é o conjunto das funções de C^k que são limitadas.

$W^{m,p}(\Omega)$ onde $m \in \{1, 2, 3, ...\}$ e $p \in \mathbb{R}$; $1 \leq p < \infty$, é definido por $\{u \in L^p(\Omega) : \exists h_k \in L^p(\Omega)\}$ satisfazendo

$$\int_\Omega u(x)D^k\phi(x)dx = (-1)^{|k|}\int_\Omega h_k(x)\phi(x)dx$$

para multi-índices k com $1 \leq |k| \leq m$ e $\forall\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

$W_{\text{loc}}^{m,p}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; u|_D \in W^{m,p}(D)$, onde D é um conjunto limitado com $\overline{D} \subset \Omega\}$.

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $p \geq 1$ e $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ onde $u_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ com $i = 1, 2, 3$ temos:

$$\begin{aligned}
\|u\|_p &= \left(\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega |u_i(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
\|\nabla u\|_p &= \left(\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \left| \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
\left\| D^2 u \right\|_p &= \left(\sum_{i,j,k=1}^{3} \int_\Omega \left| \frac{\partial^2 u_i(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
((u, v)) &= \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j} dx \\
b(u, v, \omega) &= \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u_i \, \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, \omega_j \, dx
\end{aligned}$$

Os subescritos das normas são suprimidos quando $p = 2$ e usualmente denota-se $W^{m,2} = H^m$.

$D(\Omega) = \{\phi; \phi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } \operatorname{div} \phi = 0\}$.

$J(\Omega)$ = Fecho de $D(\Omega)$ na norma $\|\phi\|$,usualmente, para Ω limitado denota-se $J(\Omega) = H$.

$J_0(\Omega)$ = Fecho de $D(\Omega)$ na norma $\|\nabla \phi\|$, usualmente para Ω limitado denota-se $J_0(\Omega) = V$.

$J_0^*(\Omega) = \{\phi; \phi \in W_0(\Omega) \text{ e } \operatorname{div} \phi = 0\}$ onde $W_0(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma $\|\nabla \phi\|$.

$J_1(\Omega)$ = Fecho de $D(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$.

$J_1^*(\Omega) = \{\phi; \phi \in \omega_2^1(\Omega) \text{ e } \operatorname{div} \phi = 0\}$ quando $W_2^1(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$.

P, a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ sobre $J(\Omega)$.

B' denota o dual do espaço Banach B, isto é, o conjunto dos funcionais lineares contínuos em B.

Sumário

0.1 Introdução

O sistema de equações de Navier-Stokes, cujo nome é devido a George Gabriel Stokes (1819-1903) e Claude Louis Marie Navier (1785-1836), descreve o fluxo de um fluido homogêneo (massa específica constante) movimentando-se sem obstáculos numa certa região tridimensional e sujeito a um campo de forças externo dado. As incógnitas do sistema são o campo de velocidade e a pressão.

Mais detalhadamente:

$$\begin{cases} \rho u_t + \rho u \cdot \nabla u - \mu \Delta u + \nabla p = \rho f \text{ em } Q_T \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ em } Q_T \\ u(x,t) = 0 \ \forall x \in \partial\Omega, \ \forall t \in (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \ \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Aqui $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d; d = 2,3$ é um domínio, $u(x,t)$ denota a velocidade do fluido, $p(x,t)$ é a pressão no ponto x e instante t, μ é a viscosidade do fluido, ρ é a massa específica do fluido e f é um campo de forças externas dado.

Este sistema de equações foi e tem sido objeto de estudo de matemáticos e físicos em geral. Entre alguns problemas envolvendo este sistema temos: determinar condições matemáticas para garantir a existência de soluções em certos espaços funcionais, verificar a adequação das equações para a descrição de escoamentos existentes no mundo físico e estudar o problema de formação de turbulência em fluidos. Além disto, sistemas de equações semelhantes surgem na modelagem matemática de diversos fenômenos que envolvem o movimento de um fluído, como por exemplo na previsão do tempo em meteorologia e em escoamentos de fluidos em meios porosos não consolidados.

A teoria clássica do método de Galerkin para as equações de Navier-Stokes pode ser vista em TEMAM [18] onde são apresentadas certas condições funcionais para a força externa e para a velocidade inicial com o intuito de obtermos existência ou existência e unicidade de soluções em domínios limitados para problema estacionário de Navier-Stokes, para o problema linear de evolução e para o sistema completo.

Também podemos encontrar nesta referência alguns resultados de regularidade e de comportamento assintótico das soluções.

Uma característica matemática típica do sistema de equações de Navier-Stokes é o de podermos, sob mesmas condições garantir a existência e unicidade de soluções fracas em dimensão espacial dois mas não em dimensão três onde podemos garantir somente existência.

O objetivo deste trabalho foi o de desenvolver, com base no artigo de HEYWOOD [7], o método de Galerkin para o sistema de Navier-Stokes em domínios espaciais não-limitados.

A principal diferença no estudo de existência de soluções para as equações de Navier-Stokes em domínios limitados e em não-limitados está no uso da desigualdade de Poincaré

$$\|u\| \leq C_\Omega \|\nabla u\|$$

a qual é válida somente em domínios limitados ou pelo menos limitados numa direção. Neste trabalho esta dificuldade é contornada através do uso de certas estimativas que são válidas em domínios não limitados desde que satisfaçam uma condição de regularidade uniforme de classe C^3 na fronteira. Em tais estimativas as constantes não dependem do tamanho do domínio ou do tamanho da fronteira e sim da regularidade uniforme da fronteira (Veja Lema 1.17).

O trabalho está dividido em três capítulos principais e um capítulo de conclusões: no primeiro são apresentados aqueles preliminares básicos para o estudo de equações diferenciais parciais como por exemplo os espaços de

Sobolev, algumas imersões de espaços funcionais assim como alguns resultados fundamentais que são utilizados nos demais capítulos.

No segundo capítulo, apresentamos o teorema de existência de solução para o problema estacionário em domínios não-limitados e no terceiro capítulo apresentamos o teorema de existência de soluções para o problema de evolução também em domínios não-limitados. Finalmente, no quarto capítulo apresentamos algumas conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 1

Preliminares

Nesta secção apresentaremos alguns resultados básicos utilizados, geralmente, no estudo de equações diferenciais parciais, assim como, alguns lemas importantes para obtermos os resultados de existência de soluções fracas.

1.1 Lema

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ então

$$ab \leq \frac{a^2}{4\varepsilon} + \varepsilon b^2.$$

Demonstração

$$(A - B)^2 \geq 0 \Rightarrow AB \leq \frac{A^2 + B^2}{2}$$

fazendo

$$A = \frac{a}{\sqrt{2\varepsilon}} \qquad B = \sqrt{2\varepsilon} b$$

obtemos:

$$ab \leq \frac{a^2}{4\varepsilon} + \varepsilon b^2.$$

1.2 Desigualdade de Young

Se $a, b \in \mathbb{R}_+$; $p, q \in \mathbb{R}$ com $1 < p, q < \infty$ e

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Então

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Demonstração Veja BRÉZIS [5] na página 56.

Uma conseqüência imediata e bastante útil da desigualdade de Young é o seguinte resultado com as mesmas hipóteses da proposição (1.2) e supondo $\alpha > 0$, obtemos:

$$ab \leq \frac{1}{p\alpha^p}a^p + \frac{\alpha^q}{q}b^q.$$

1.3 Desigualdade de Hölder

Sejam $1 < p < \infty$; $1 < q < \infty$, com

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Se $u \in L^p$ e $v \in L^q$ então $uv \in L^1$ e tem-se a desigualdade

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_p \|v\|_q .$$

Demonstração Veja MEDEIROS [13] na página 75.

1.4 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Seja B a bola fechada de centro O e raio r em $\mathbb{R}^n$. Toda aplicação contínua $f : B \to B$ possui, pelo menos, um ponto fixo em B, isto é, $\exists x \in B$ tal que $f(x) = x$.

Demonstração Veja LIMA [12] na página 447.

1.5 Lema de Dubois Raymound

Seja $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que $\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0$, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Então $u = 0$ quase sempre em Ω.

Demonstração Veja MEDEIROS [14] na página 13.

1.6 Lema

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com $u \in C_0^\infty(\Omega)$ então:

$$\|u\|_6 \leq \sqrt[6]{48}\, \|\nabla u\|.$$

Demonstração Veja LADYZHENSKAYA [11] na página 10.

1.7 Teorema de Imersão de Sobolev

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, satisfazendo a propriedade do cone, j, m inteiros não negativos e $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. Então:

A) Se $mp < n$ então $W^{j+m,p} \circlearrowleft W^{j,q}(\Omega)$ com

$$p \leq q \leq \frac{np}{n - mp}.$$

Portanto $W^{m,p}(\Omega) \circlearrowleft L^q(\Omega)$ com

$$p \leq q \leq \frac{np}{n - mp}.$$

B) Se $mp = n$ então $W^{j+m,p}(\Omega) \circlearrowleft W^{j,p}(\Omega)$ com $p \leq q < \infty$.

Portanto $W^{m,p}(\Omega) \circlearrowleft L^q(\Omega)$ $p \leq q \leq \infty$. Todavia se $p = 1$, portanto $m = n$ e neste caso a imersão anterior vale até $q = \infty$ e mais ainda

$$W^{j+n,1}(\Omega) \circlearrowleft C^j_B(\Omega)$$

C) Se $mp > n$ então $W^{j+m,p}(\Omega) \circlearrowleft C^j_B(\Omega)$.

Demonstração Veja ADAMS [1] na página 97.

1.8 Proposição

Seja B um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em B convergindo fracamente para x, isto é, $x_n \rightharpoonup x$ então $\|x_n\|_B$ é limitada e

$$\|x\|_B \leq \liminf \|x_n\|_B .$$

Demonstração Veja BRÉZIS [5] na página 35.

1.9 Proposição

Seja B um espaço de Banach uniformemente convexo e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em B que converge fracamente para x, isto é, $x_n \rightharpoonup x$ e satisfazendo

$$\limsup \|x_n\|_B \leq \|x\|_B .$$

Então $x_n \longrightarrow x$ fortemente.

Demonstração Veja BRÉZIS [5] na página 52.

1.10 Desigualdade de Poincaré-Friedrichs

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Se $v \in H_0^1(\Omega)$, então $\|v\| \leq C_\Omega \|\nabla v\|$ onde C_Ω é uma constante que depende de Ω.

Demonstração Veja MEDEIROS [14] na página 91.

1.11 Teorema de Lax-Milgram

Seja H um espaço de Hilbert. Se $a(u, v)$ é uma forma bilinear, contínua e coercisa em H. Então para todo $u \in H'$ existe $u \in H$ único tal que

$$a(u, v) = \langle u, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

Ainda se a é simétrica, então u caracteriza-se pela propriedade

$$u \in H \text{ e } \frac{1}{2}a(u, v) - \langle u, v \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(u, v) - \langle u, v \rangle \right\}.$$

Demonstração Veja BRÉZIS [5] na página 84.

Operador -P$\triangle$

O operador $-P\Delta$ desempenha um importante papel na teoria das equações de Navier-Stokes pois suas autofunções constituem uma base ideal em certos espaços funcionais. Os principais resultados referentes a este operador estão listados abaixo e podem ser encontrados em RAUTMANN [15] nas páginas 427 e 428.

1.12 Lema

O operador $-P\Delta : J_0 \cap H^2(\Omega) \longrightarrow J$ define sobre J_0 um operador simétrico, definido positivo com inverso compacto $(-P\Delta)^{-1} : J \longrightarrow J$.

1.13 Lema

O operador $-P\Delta$ tem uma seqüência (λ_i) de autovalores positivos $\lambda_i > 0$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_i \to \infty$, e as correspondentes autofunções (a_i) formam um conjunto ortonormal completo em J.

1.14 Lema

As funções

$$\left(\frac{a_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)$$

formam um conjunto ortonormal completo em J_0. Para cada $f \in J_0$ a seqüência $(P_M f)$ converge para f em V onde P_M é a projeção ortogonal no espaço m-dimensional gerado pelos m primeiros autovetores.

1.15 Proposição

Seja H um espaço de Hilbert e $M \subset H$ um subespaço vetorial fechado. Se $f \in H$, então $u = P_M f$ se caracteriza por $u \in M$ e $(f - u, v) = 0 \ \forall v \in M$. Ainda $P_M f$ é um operador linear.

Demonstração Veja BRÉZIS [5] na página 80.

1.16 Definição

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ dizemos que $\partial\Omega$ é uniforme ou uniformemente de classe C^3 se tivermos uma limitação uniforme para as constantes que dependem localmente das derivadas do sistema de cartas local.

Como exemplos de domínios cuja fronteira é uniformemente de classe C^3 temos que qualquer domínio limitado cuja fronteira é de classe C^3 é uniformemente de classe C^3 e $\Omega = \mathbb{R}^3_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R} \text{ e } z \in \mathbb{R}_+\}$. Como exemplo de domínio não limitado cuja fronteira não é uniformemente de classe C^3 temos:

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2\right\}.$$

1.17 Lema

Seja Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^3$, com fronteira uniforme de classe C^3. Seja $\omega \in J_0^*(\Omega)$ uma solução generalizada da equação de Stokes, isto é, $\Delta\omega = -\nabla p - f$ com $f \in L^2(\Omega)$, ou seja:

$$\int_\Omega \nabla\omega \ \nabla\phi dx = \int_\Omega f \ \phi \ dx.$$

para todo $\phi \in D(\Omega)$. Então ω possui derivadas segundas em $L^2(\Omega)$ e valem as desigualdades.

$$\begin{aligned} \left\|D^2\omega\right\| &\leq C_\partial \left(\|Pf\| + \|\nabla\omega\|\right) \\ \|\nabla\omega\|_3 &\leq C_\partial \left(\|Pf\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla\omega\|^{\frac{1}{2}} + \|\nabla\omega\|\right) \end{aligned}$$

com constantes dependendo apenas da regularidade uniforme C^3 da $\partial\Omega$ e não do tamanho de Ω ou $\partial\Omega$.

Demonstração Veja HEYWOOD [7] na página 646.

1.18 Lema

Sejam ϕ, ψ e f funções suaves não negativas definidas em $t \geq 0$ e seja g uma função Lipschitziana não negativa também definida em $t \geq 0$ tais que

$$\phi'(t) + \psi(t) \leq g(\phi(t)) + f(t) \ \forall t \geq 0$$

com $\phi(0) = \phi_0$.

Então vale

$$\phi(t) \leq F(t) \ \forall t \in [0, T)$$

onde $F(t)$ é a solução do problema de valor inicial

$$F'(t) = g(F(t)) + f(t)$$

com $F(0) = \phi_0$ e $[0, T)$ é o maior intervalo de definição de F.

Ainda, se g é não decrescente então vale

$$\int_0^t \psi(\tau)\, d\tau \leq \widetilde{F}(t)$$

onde

$$\widetilde{F}(t) = \phi_0 + \int_0^t [g(F(\tau)) + f(\tau)]\, d\tau.$$

Demonstração Veja HEYWOOD [7] na página 656.

1.19 Lema

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira uniformemente de classe C^3. Seja $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de subdomínios limitados tais que $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \ldots$ e

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$$

e tais que a regularidade uniforme C^3 de $\partial\Omega_n$ é uniformemente limitada com relação a n e seja $a \in J_0(\Omega_n)$. Então existe uma seqüência de funções $\alpha_n \in J_0(\Omega_n)$ com supp $\alpha_n \subset \overline{\Omega}_n$ e $\|\nabla\alpha_n\| \leq \|\nabla a\|$ e tais que $\|\nabla\alpha_n - \nabla a\| \longrightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração Veja HEYWOOD [7] na página 665.

Capítulo 2

O Problema Estacionário

2.1 Introdução

Neste capítulo, consideremos o problema estacionário para as equações de Navier-Stokes.

$$u \cdot \nabla u - \mu \Delta u = -\nabla p + f \tag{2.1}$$

com div $u = 0$ em Ω onde f é uma força externa e μ é a viscosidade cinemática constante.

Denotaremos $u = b^*$ em $\partial\Omega$ e se Ω é ilimitado, a velocidade no infinito será denotada por $b^*_\infty(x)$, isto é, b^*_∞ é uma prescrição assintótica da velocidade definida em Ω para $|x|$ grande.

Nas próximas secções deste capítulo demonstraremos o seguinte teorema:

Teorema 1 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *um domínio com fronteira uniformemente de classe* C^3 *e* $f \in L^2(\Omega)$. *Suponhamos que* b^* *possa ser prolongada em* Ω *como uma função* $b \in L^\infty(\Omega)$ *com* $\nabla b \in L^3(\Omega)$ *satisfazendo* div $b = 0$ *em* Ω; $b = b^*$ *em* $\partial\Omega$.

$$\lim_{x\to\infty} b(x) = b^*_\infty(x) \text{ (no caso de } \Omega \text{ ilimitado).}$$

Suponhamos ainda que $\exists\, \beta, \gamma > 0,\ \gamma < \mu$ *tais que* $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ *com* $\mathrm{div}\phi \equiv 0$ *tem-se:*

$$-\int_\Omega \phi\ \nabla b\ \phi\ dx \leq \gamma \int_\Omega (\nabla\phi)^2\, dx \tag{2.2}$$

$$\left|\int_\Omega \phi\,(f + \mu\Delta b - b\ \nabla b)\, dx\right| \leq \beta \left(\int_\Omega (\nabla\phi)^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3}$$

Então existe $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \subset C(\overline{\Omega})$ *solução do problema estacionário satisfazendo*

$$\|\nabla(u - b)\| \leq \frac{\beta}{\mu - \gamma} \qquad e$$

$\|D^2(u - b)\|$ *é limitada por uma expressão envolvendo a regularidade uniforme* C^3 *da fronteira de* Ω, $\gamma, \beta, \|f\|\,, \|b\|_\infty$ *e* $\|\nabla b\|_3$.

Vamos procurar u da forma $u = v + b$ com $v \in J_0(\Omega)$. Assim u será uma solução generalizada (no sentido de distribuições) do problema estacionário se v satisfizer:

$$(v + b)\ \nabla(v + b) - \mu\Delta(v + b) = -\nabla p + f$$

$$v\ \nabla v + v\ \nabla b + b\ \nabla v + b\ \nabla b - \mu\Delta v - \mu\Delta b = -\nabla p + f$$

$$v\ \nabla v + v\ \nabla b + b\ \nabla v = \mu\Delta v + \mu\Delta b - \nabla p + f - b\ \nabla b$$

$$v\ \nabla v + b\ \nabla v + v\ \nabla b = -\nabla p + \mu\Delta v + g \tag{2.4}$$

onde $g = f + \mu\Delta b - b\ \nabla b$.

Deste modo, u será uma solução generalizada da equação (2.1) desde que v seja uma solução generalizada da equação (2.4).

2.2 Estimativas a Priori

A seguir, faremos várias estimativas a priori supondo a existência de v e que as integrais são calculáveis.

Em termos gerais, fazemos o produto interno de (2.4) por v e integramos sobre Ω :

$$\int_\Omega v\ \nabla v\ v\ dx + \int_\Omega b\ \nabla v\ v\ dx + \int_\Omega v\ \nabla b\ v\ dx =$$

$$= -\int_\Omega \nabla p\ v\ dx + \mu \int_\Omega \Delta v\ v\ dx + \int_\Omega g\ v\ dx \tag{2.5}$$

e como,

(I)

$$\int_\Omega v\ \nabla v\ v\ dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega (\text{div } v)\ v^2 dx = 0 \text{ pois div } v = 0;$$

(II)

$$\int_\Omega b\ \nabla v\ v\ dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega (\text{div } b)\ v^2 dx = 0 \text{ pois div } b = 0;$$

(III)

$$\int_\Omega \nabla p\ v\ dx = 0$$

pois,

$$\int_\Omega \text{div}(p\ v) dx = \int_\Omega \nabla p\ v\ dx + \int_\Omega p \text{ div } v\ dx,$$

como temos,

$$\int_\Omega p \text{ div } v\ dx = 0$$

pois div $v = 0$ e pelo Teorema de Gauss

$$\int_\Omega \operatorname{div}(p\ v) dx = \int_{\partial\Omega} p\ v\ \overrightarrow{n}\ ds = 0$$

pois $v|_{\partial\Omega} = 0$ e aqui $\overrightarrow{n}$ é o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$.

Então

$$0 = \int_\Omega \nabla p\ v\ dx + 0 \Rightarrow \int_\Omega \nabla p\ v\ dx = 0$$

(IV)

$$\mu \int_\Omega \Delta v\ v dx = -\mu \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx,$$

pois pela Primeira Identidade de Green

$$\mu \int_\Omega (u\ \Delta v + \nabla u\ \nabla v)\, dx = \mu \int_{\partial\Omega} u\ \frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}}\ ds,$$

fazendo $u = v$,

temos:

$$\mu \int_\Omega \left(v\ \Delta v + |\nabla v|^2\right) dx = \mu \int_{\partial\Omega} v\ \frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}}\ ds$$

e como $v|_{\partial\Omega} = 0$, temos:

$$\mu \int_\Omega \left(v\ \Delta v + |\nabla v|^2\right) dx = 0.$$

Então

$$\mu \int_\Omega v\ \Delta v\ dx = -\mu \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx.$$

Então, a equação (2.5) resulta:

$$\int_\Omega v\ \nabla b\ v\ dx = -\mu \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx + \int_\Omega g\ v\ dx$$

$$\mu \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx = - \int_\Omega v \ \nabla b \ v \ dx + \int_\Omega g \ v \ dx \tag{2.6}$$

usando (2.2)

$$- \int_\Omega v \ \nabla b \ v \ dx \leq \gamma \int_\Omega (\nabla v)^2 \, dx$$

e (2.3)

$$\left| \int_\Omega v \ g \ dx \right| \leq \beta \left(\int_\Omega (\nabla v)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

temos:

$$\begin{aligned}
\mu \|\nabla v\|^2 &= - \int_\Omega v \ \nabla b \ v \ dx + \int_\Omega g \ v \ dx \\
\mu \|\nabla v\|^2 &\leq \gamma \int_\Omega (\nabla v)^2 \, dx + \int_\Omega g \ v \ dx \\
\mu \|\nabla v\|^2 &\leq \gamma \|\nabla v\|^2 + \int_\Omega g \ v \ dx \\
(\mu - \gamma) \|\nabla v\|^2 &\leq \int_\Omega g \ v \ dx \\
(\mu - \gamma) \|\nabla v\|^2 &\leq \beta \left(\int_\Omega (\nabla v)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
(\mu - \gamma) \|\nabla v\|^2 &\leq \beta \|\nabla v\|
\end{aligned}$$

$$\|\nabla v\| \leq \frac{\beta}{\mu - \gamma} \tag{2.7}$$

A estimativa (2.7) nos auxiliará para o estudo da existência da solução na equação (2.4) mas isto não é suficiente, por isso, daremos uma segunda estimativa, envolvendo derivadas segundas.

Com $\Delta v \in L^2(\Omega)$, multiplicamos a equação (2.4) pela projeção $P\Delta v$ de Δv no $J(\Omega)$, e integrando sobre Ω.

$$\int_\Omega v \ \nabla v \ P\Delta v \ dx + \int_\Omega b \ \nabla v \ P\Delta v \ dx + \int_\Omega v \ \nabla b \ P\Delta v \ dx =$$

$$-\int_\Omega \nabla p\ P\Delta v\, dx + \mu \int_\Omega \Delta v\ P\Delta v\ dx + \int_\Omega g\ P\Delta v\ dx$$

e como

$$\int_\Omega \Delta v\ P\Delta v\ dx = \int_\Omega (P\Delta v)^2\, dx \quad \text{Veja Proposição 1.15}$$

e que

$$\int_\Omega \nabla p\ P\Delta v\ dx = 0.$$

Resulta

$$\int_\Omega v\ \nabla v\ P\Delta v\ dx + \int_\Omega b\ \nabla v\ P\Delta v\ dx + \int_\Omega v\ \nabla b\ P\Delta v\ dx =$$

$$= \mu \int_\Omega (P\Delta v)^2\, dx + \int_\Omega g\ P\Delta v\ dx \tag{2.8}$$

No termo

$$\int_\Omega v\ \nabla v\ P\Delta v\ dx,$$

usamos a desigualdade de Hölder preliminar 1.3, temos:

$$\left| \int_\Omega v\ \nabla v\ P\Delta v\ dx \right| \leq \|v\|_6 \|\nabla v\|_3 \|P\Delta v\|$$

usamos o Lema 1.17 em $\|\nabla v\|_3$, obtemos:

$$\left| \int_\Omega v\ \nabla v\ P\Delta v\ dx \right| \leq \|v\|_6 . C_\partial \left(\|P\Delta v\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|^{\frac{1}{2}} + \|\nabla v\| \right) \|P\Delta v\|$$

usando o Lema 1.6 em $\|v\|_6$, temos:

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega v\ \nabla v\ P\Delta v\ dx \right| &\leq C_\partial \sqrt[6]{48}. \|\nabla v\| \left(\|P\Delta v\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|^{\frac{1}{2}} + \|\nabla v\| \right) \|P\Delta v\| \\ &= C_\partial \sqrt[6]{48} \left(\|P\Delta v\|^{\frac{3}{2}} \|\nabla v\|^{\frac{3}{2}} + \|\nabla v\|^2 \|P\Delta v\| \right) \end{aligned}$$

$$\left|\int_\Omega v\ \nabla v\ P\Delta v\ dx\right| \leq C_\partial \sqrt[6]{48}\, \|P\Delta v\|^{\frac{3}{2}} \|\nabla v\|^{\frac{3}{2}} + C_\partial \sqrt[6]{48}\, \|\nabla v\|^2 \|P\Delta v\| \tag{2.9}$$

Em

$$C_\partial \sqrt[6]{48}\, \|\nabla v\|^2 \|P\Delta v\| \tag{2.10}$$

usando o Lema 1.1

$$a.b \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Fazendo

$$a = \frac{A}{k} \quad b = kB$$

$$2AB \leq \frac{A^2}{k^2} + (kB)^2 \Rightarrow AB \leq \frac{A^2}{2k^2} + \frac{k^2B^2}{2}$$

onde $k = \sqrt{\alpha}$, $A = C_\partial \sqrt[6]{48}\, \|\nabla v\|^2$ e $B = \|P\Delta v\|$.

Então

$$\begin{aligned} C_\partial \sqrt[6]{48}\, \|\nabla v\|^2 \|P\Delta v\| &\leq \frac{\left(C_\partial \sqrt[6]{48}\, \|\nabla v\|^2\right)^2}{2\left(\sqrt{\alpha}\right)^2} + \frac{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2}{2} \|P\Delta v\|^2 \\ &= \frac{C_\partial^2 \sqrt[3]{48}}{2\alpha} \|\nabla v\|^4 + \frac{\alpha}{2} \|P\Delta v\|^2 \end{aligned}$$

$$C_\partial \sqrt[6]{48}\, \|\nabla v\|^2 \|P\Delta v\| \leq \frac{C_\partial^2 \sqrt[3]{48}}{2\alpha} \|\nabla v\|^4 + \frac{\alpha}{2} \|P\Delta v\|^2 \tag{2.11}$$

Em

$$C_\partial \sqrt[6]{48}\, \|P\Delta v\|^{\frac{3}{2}} \|\nabla v\|^{\frac{3}{2}} \tag{2.12}$$

usamos a desigualdade de Young, preliminar 1.2.

Fazendo

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{k}A \\ b &= kB \\ AB &\leq \frac{1}{k^p}\frac{A^p}{p} + \frac{k^q B^q}{q} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= C_\partial \sqrt[6]{48}\,\|\nabla v\|^{\frac{3}{2}} \\ B &= \|P\Delta v\|^{\frac{3}{2}} \\ p &= 4 \\ q &= \frac{4}{3} \\ \frac{k^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} &= \frac{\alpha}{2} \Rightarrow k = \left(\frac{2}{3}\alpha\right)^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$C_\partial \sqrt[6]{48}\,\|P\Delta v\|^{\frac{3}{2}}\,\|\nabla v\|^{\frac{3}{2}} \leq \frac{\left(C_\partial \sqrt[6]{48}\,\|\nabla v\|^{\frac{3}{2}}\right)^4}{\left(\frac{2}{3}\alpha\right)^3 .4} + \frac{\alpha}{2}\|P\Delta v\|^2$$

$$C_\partial \sqrt[6]{48}\,\|P\Delta v\|^{\frac{3}{2}}\,\|\nabla v\|^{\frac{3}{2}} \leq \frac{27 C_\partial^4 \left(\sqrt[6]{48}\right)^4}{32\alpha^3}\|\nabla v\|^6 + \frac{\alpha}{2}\|P\Delta v\|^2$$

$$C_\partial \sqrt[6]{48}\,\|P\Delta v\|^{\frac{3}{2}}\,\|\nabla v\|^{\frac{3}{2}} \leq \frac{27}{8}\sqrt[3]{36}\frac{C_\partial^4}{\alpha^3}\|\nabla v\|^6 + \frac{\alpha}{2}\|P\Delta v\|^2 \tag{2.13}$$

substituindo (2.13) e (2.11) em (2.9) obtemos:

$$\left|\int_\Omega v\ \nabla v\ P\Delta v\ dx\right| \leq \frac{27}{8}\sqrt[3]{36}\frac{C_\partial^4}{\alpha^3}\|\nabla v\|^6 + \frac{C_\partial^2}{2\alpha}\sqrt[3]{48}\,\|\nabla v\|^4 + \alpha\|P\Delta v\|^2 \tag{2.14}$$

No termo

$$\int_\Omega b\ \nabla v\ P\Delta v\ dx$$

fazemos a seguinte estimativa:

$$\left|\int_\Omega b\ \nabla v\ P\Delta v\ dx\right| \leq \int_\Omega \sup_\Omega |b|\, |\nabla v\ P\Delta v|\, dx = \sup_\Omega |b| \int_\Omega |\nabla v\ P\Delta v|\, dx$$

usando a desigualdade de Hölder, preliminar 1.3 temos:

$$\int_\Omega b\ \nabla v\ P\Delta v\ dx \leq \sup_\Omega |b|\, \|\nabla v\|\, \|P\Delta v\|$$

usando o Lema 1.1 onde

$$\begin{aligned} A &= \sup_\Omega |b|\, \|\nabla v\| \\ B &= \|P\Delta v\| \\ k &= \sqrt{2\alpha} \end{aligned}$$

temos

$$\left|\int_\Omega b\ \nabla v\ P\Delta v\ dx\right| \leq \frac{1}{4\alpha} \sup_\Omega |b|^2\, \|\nabla v\|^2 + \alpha\, \|P\Delta v\|^2 \qquad (2.15)$$

No termo

$$\int_\Omega v\ \nabla v\ P\Delta v\ dx$$

usando a desigualdade de Hölder, preliminar 1.3 obtemos:

$$\left|\int_\Omega v\ \nabla b\ P\Delta v\ dx\right| \leq \|v\|_6\, \|\nabla b\|_3\, \|P\Delta v\|$$

usando a desigualdade de Sobolev, preliminar 1.6 em $\|v\|_6$, obtemos:

$$\left|\int_\Omega v\ \nabla b\ P\Delta v\ dx\right| \leq \sqrt[6]{48}\, \|\nabla v\|\, \|\nabla b\|_3\, \|P\Delta v\|$$

usando o Lema 1.1 com

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[6]{48}\, \|\nabla v\|\, \|\nabla b\|_3 \\ B &= \|P\Delta v\| \\ k &= \sqrt{2\alpha} \end{aligned}$$

obtemos:

$$\left|\int_\Omega v\ \nabla b\ P\Delta v\ dx\right| \leq \frac{\left(\sqrt[6]{48}\,\|\nabla v\|\,\|\nabla b\|_3\right)^2}{2\left(\sqrt{2\alpha}\right)^2} + \frac{\left(\sqrt{2\alpha}\right)^2}{2}\|P\Delta v\|^2$$

$$\left|\int_\Omega v\ \nabla b\ P\Delta v\ dx\right| \leq \frac{\sqrt[3]{48}}{4\alpha}\|\nabla v\|^2\,\|\nabla b\|_3^2 + \alpha\,\|P\Delta v\|^2 \tag{2.16}$$

Este mesmo termo

$$\int_\Omega v\ \nabla b\ P\Delta v\ dx$$

pode ser estimado de outra forma: primeiro usamos a condição

$$\sup_\Omega |\nabla b| < \infty :$$

$$\left|\int_\Omega v\ \nabla b\ P\Delta v\ dx\right| \leq \sup_\Omega |\nabla b| \int_\Omega |v\ P\Delta v|\ dx$$

usando a desigualdade de Hölder, preliminar 1.3, obtemos:

$$\left|\int_\Omega v\ \nabla b\ P\Delta v\ dx\right| \leq \sup_\Omega |\nabla b|\,\|v\|\,\|P\Delta v\|$$

usando a desigualdade de Poincaré, preliminar 1.10, obtemos:

$$\left|\int_\Omega v\ \nabla b\ P\Delta v\ dx\right| \leq C_\Omega \sup_\Omega |\nabla b|\,\|\nabla v\|\,\|P\Delta v\|$$

usando o Lema 1.1 com:

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{2\alpha} \\ A &= C_\Omega \sup_\Omega |\nabla b|\,\|\nabla v\| \\ B &= \|P\Delta v\|\,, \end{aligned}$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega v\ \nabla b\ P\Delta v\ dx\right| &\leq \frac{\left(C_\Omega \sup_\Omega |\nabla b|\,\|\nabla v\|\right)^2}{2\left(\sqrt{2\alpha}\right)^2} + \frac{\left(\sqrt{2\alpha}\right)^2}{2}\|P\Delta v\|^2 \\ \left|\int_\Omega v\ \nabla b\ P\Delta v\ dx\right| &\leq \frac{C_\Omega^2}{4\alpha}\sup_\Omega |\nabla b|^2\,\|\nabla v\|^2 + \alpha\,\|P\Delta v\|^2 \end{aligned}$$

$$\left|\int_\Omega v \ \nabla b \ P\Delta v \ dx\right| \leq C_{\alpha,\Omega} \sup_\Omega |\nabla b|^2 \|\nabla v\|^2 + \alpha \|P\Delta v\|^2 \tag{2.17}$$

no termo

$$\left|\int_\Omega g \ P\Delta v \ dx\right|$$

usando a desigualdade de Hölder, preliminar 1.3 obtemos:

$$\left|\int_\Omega g \ P\Delta v \ dx\right| \leq \|g\| \ \|P\Delta v\|$$

usando o Lema 1.1 com:

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{2\alpha} \\ A &= \|g\| \\ B &= \|P\Delta v\|, \end{aligned}$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega g \ P\Delta v \ dx\right| &\leq \frac{\|g\|^2}{2\left(\sqrt{2\alpha}\right)^2} + \frac{\left(\sqrt{2\alpha}\right)^2}{2} \|P\Delta v\| \\ \left|\int_\Omega g \ P\Delta v \ dx\right| &\leq \frac{\|g\|^2}{4\alpha} + \alpha \|P\Delta v\| \end{aligned}$$

$$\left|\int_\Omega g \ P\Delta v \ dx\right| \leq \frac{1}{4\alpha} \|g\|^2 + \alpha \|P\Delta v\|. \tag{2.18}$$

Usando as estimativas (2.14), (2.15), (2.16), (2.18) para os termos da equação (2.8), dada por

$$\begin{aligned} \mu \int_\Omega (P\Delta v)^2 dx &= \int_\Omega v \ \nabla v \ P\Delta v \ dx + \int_\Omega b \ \nabla v \ P\Delta v \ dx + \\ &+ \int_\Omega v \ \nabla b \ P\Delta v \ dx - \int_\Omega g \ P\Delta v \ dx \end{aligned}$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \mu \|P\Delta v\|^2 &\leq \frac{27}{8}\sqrt[3]{36}\frac{C_\partial^4}{\alpha^3} \|\nabla v\|^6 + \frac{C_\partial^2}{2\alpha}\sqrt[3]{48} \|\nabla v\|^4 + \alpha \|P\Delta v\|^2 \\ &+\frac{1}{4\alpha} \sup_\Omega |b|^2 \|\nabla v\|^2 + \alpha \|P\Delta v\|^2 + \frac{\sqrt[3]{48}}{4\alpha} \|\nabla v\|^2 \|\nabla b\|_3^2 \\ &+\alpha \|P\Delta v\|^2 + \frac{\|g\|^2}{4\alpha} + \alpha \|P\Delta v\|^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mu \left\| P\Delta v \right\|^2 &\leq \frac{27}{8}\sqrt[3]{36}\frac{C_\partial^4}{\alpha^3}\left\|\nabla v\right\|^6 + \frac{C_\partial^2}{2\alpha}\sqrt[3]{48}\left\|\nabla v\right\|^4 + \frac{1}{4\alpha}\sup_\Omega |b|^2 \left\|\nabla v\right\|^2 \\
&\quad + \frac{\sqrt[3]{48}}{4\alpha}\left\|\nabla v\right\|^2 \left\|\nabla b\right\|_3^2 + \frac{\left\|g\right\|^2}{4\alpha} + 4\alpha \left\|P\Delta v\right\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mu - 4\alpha)\left\| P\Delta v \right\|^2 &\leq \frac{27}{8}\sqrt[3]{36}\frac{C_\partial^4}{\alpha^3}\left\|\nabla v\right\|^6 + \frac{C_\partial^2}{2\alpha}\sqrt[3]{48}\left\|\nabla v\right\|^4 + \frac{1}{4\alpha}\sup_\Omega |b|^2 \left\|\nabla v\right\|^2 \\
&\quad + \frac{\sqrt[3]{48}}{4\alpha}\left\|\nabla b\right\|_3^2 \left\|\nabla v\right\|^2 + \frac{\left\|g\right\|^2}{4\alpha}.
\end{aligned}
$$

Seja α tal que

$$
\mu - 4\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < \frac{\mu}{4},
$$

tomando então

$$
\alpha = \frac{\mu}{8},
$$

obtemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mu}{2}\left\| P\Delta v \right\|^2 &\leq \frac{27}{8}\frac{8^3\sqrt[3]{36}C_\partial^4\left\|\nabla v\right\|^6}{\mu^3} + \frac{4}{\mu}\sqrt[3]{48}C_\partial^2\left\|\nabla v\right\|^4 + \frac{2}{\mu}\sup_\Omega |b|^2 \left\|\nabla v\right\|^2 \\
&\quad + \frac{2\sqrt[3]{48}}{\mu}\left\|\nabla b\right\|_3^2 \left\|\nabla v\right\|^2 + \frac{2}{\mu}\left\|g\right\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\| P\Delta v \right\|^2 &\leq \frac{27}{4}.8^3\sqrt[3]{36}\frac{C_\partial^4}{\mu^4}\left\|\nabla v\right\|^6 + 8\sqrt[3]{48}\frac{C_\partial^2}{\mu^2}\left\|\nabla v\right\|^4 + \frac{4}{\mu^2}\sup_\Omega |b|^2 \left\|\nabla v\right\|^2 \\
&\quad + \frac{4}{\mu^2}\sqrt[3]{48}\left\|\nabla b\right\|_3^2 \left\|\nabla v\right\|^2 + \frac{4}{\mu^2}\left\|g\right\|^2
\end{aligned}
$$

Sendo:

$$
\begin{aligned}
C'_{\partial,\mu} &= \frac{27}{4}8^3\sqrt[3]{36}\frac{C_\partial^4}{\mu^4} \\
C_{\partial,\mu} &= 8\sqrt[3]{48}\frac{C_\partial^2}{\mu^2} \\
C_{b,\mu} &= \frac{4}{\mu^2}\sup_\Omega |b|^2 + \frac{4}{\mu^4}\sqrt[3]{48}\left\|\nabla b\right\|_3^2 \\
C_\mu &= \frac{4}{\mu^2}
\end{aligned}
$$

obtemos:

$$\|P\Delta v\|^2 \le C_{\partial,\mu} \|\nabla v\|^2 + C_{\partial,\mu} \|\nabla v\|^4 + C'_{\partial,\mu} \|\nabla v\|^6 + C_\mu \|g\|^2 \tag{2.19}$$

Temos, então uma estimativa na norma L^2 das derivadas segundas v.

$$\begin{aligned} \left\|D^2 v\right\| \le \; & \text{uma expressão envolvendo a regularidade } C^3 \text{ de} \\ & \partial\Omega, \text{ a viscosidade cinética } \mu, \text{ números que aparecem} \\ & \text{nas condições (2.2) e (2.3), isto é,} \\ & \gamma, \beta, \|f\|, \sup_\Omega |b| \text{ e } \|\nabla b\|_3 \end{aligned} \tag{2.20}$$

2.3 Solução em Dimensão Finita

Para a construção da solução, empregamos o método de Galerkin, escolhendo as autofunções do operador $P\Delta$ como funções base. O operador $(P\Delta)^{-1}$ possui uma seqüência ortonormal de autofunções $\{a_l\}$ com $a_l \in H^2(\Omega)$ completa em $J(\Omega)$. Temos

$$\int_\Omega \nabla\phi \; \nabla a_l \; dx = -\lambda_l \int_\Omega \phi \; a_l \; dx$$

para $\forall\phi \in J_0(\Omega)$ e λ_l é o l-ésimo autovalor, isto é, $P\Delta a_l = \lambda_l a_l$.

Para uma n-ésima solução aproximada da equação (2.4) definimos

$$v_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_{kn} \; a_k(x)$$

para as equações $(l = 1, 2, 3, ..., n)$:

$$\int_\Omega (v_n \; \nabla v_n + b \; \nabla v_n + v_n \; \nabla b - \mu\Delta v_n) \; a_l \; dx = \int_\Omega g \; a_l \; dx \tag{2.21}$$

Então:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \sum_{k=1}^{n} C_{kn}\ a_k(x)\ \sum_{j=1}^{n} C_{jn}\ \nabla a_j(x)\ a_l(x)\ dx + \int_\Omega \sum_{k=1}^{n} C_{kn}\ b\ \nabla a_k(x)\ a_l(x)\ dx + \\
&\int_\Omega \sum_{k=1}^{n} C_{kn}\ b\ \nabla a_k(x)\ b\ \nabla a_l(x)\ dx - \mu \int_\Omega \sum_{k=1}^{n} C_{kn}\ \nabla a_k(x)\ a_l(x)\ dx \\
= &\int_\Omega g\ a_l(x)\ dx
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{k,j=1}^{n} C_{kn}\ C_{jn} \int_\Omega a_k(x)\ \nabla a_j(x)\ a_l(x)\ dx + \sum_{k=1}^{n} C_{kn} \int_\Omega b\ \nabla a_k(x)\ a_l(x)\ dx +
$$

$$
\sum_{k,j=1}^{n} C_{kn} \int_\Omega a_k(x)\ \nabla b\ a_l(x)\ dx + \mu \sum_{k=1}^{n} C_{kn} \int_\Omega \nabla a_k\ \nabla a_l(x)\ dx = \int_\Omega g\ a_l(x)\ dx \tag{2.22}
$$

O sistema (2.22) é quadrado de n equações para os coeficientes C_{kn}. Todas as integrais existem desde que cada a_l pertence a $H^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$. Qualquer solução v_n do sistema terá que satisfazer as estimativas (2.7) e (2.20).

A identidade (2.6) para v^n é obtida multiplicando (2.21) por $\lambda_l C_{l\,n}$ e somando-se em $l = 1, 2, \ldots n$.

A estimativa (2.20) é obtida como anteriormente.

Para (2.8) da mesma forma, mas agora rigorosamente.

Para provar a solubilidade das equações algébricas (2.21) usamos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (Veja Lema 1.10), como segue abaixo:

Seja M_n o subespaço de $J_0(\Omega)$, formado por $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ com a mesma norma. Para cada $\omega \in M_n$, existe uma única solução $v \in M_n$ do sistema linearizado ($l = 1, 2, \ldots n$)

$$
\int_\Omega (\omega\ \nabla v + b\ \nabla v + v\ \nabla b - \mu \Delta v)\ a_l\ dx = \int_\Omega g\ a_l\ dx \tag{2.23}
$$

pois o sistema (2.23) equivale a um sistema de n equações lineares para os coeficientes na expressão

$$v = \sum_{k=1}^{n} C_k \; a_k$$

e porque $v = 0$ é a única solução do sistema homogêneo associado, isto é, $g \equiv 0$.

De fato, mostramos por contradição. Supondo

$$v = \sum_{k=1}^{n} C_l \; a_l \neq 0.$$

Multiplicando (2.23) por C_l e somando em $l = 1, 2, ...n$, temos:

$$\int_{\Omega} (\omega \; \nabla v \; v + b \; \nabla v \; v + v \; \nabla b \; v - \mu \Delta v \; v \; dx) = 0$$

os termos

$$\int_{\Omega} \omega \; \nabla v \; v \; dx \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} b \; \nabla v \; v \; dx$$

são iguais a zero. Ver TEMAM [18] pág 163.

Resulta

$$\int_{\Omega} v \; \nabla b \; v \; dx - \mu \int_{\Omega} \Delta v \; v \; dx = 0 \; ,$$

ou ainda

$$- \int_{\Omega} \Delta v \; v \; dx = \int_{\Omega} \nabla u \; \nabla v \; dx$$

o que leva a

$$- \int_{\Omega} v \; \nabla b \; v \; dx = \mu \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \tag{2.24}$$

Por (2.2), temos

$$(\mu - \gamma) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \leq 0$$

como $\mu - \gamma > 0$ então

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \leq 0$$

o que é uma contradição.

Além disso, devemos observar que v varia continuamente em M_n na variável ω porque a matriz do sistema (2.23) é inversível e seus coeficientes dependem continuamente em ω. Ainda mais

$$\|\nabla v\| \leq \frac{\beta}{(\mu - \gamma)}.$$

Podemos definir operador solução: $T : M_n \longrightarrow M_n$

$$\omega \longmapsto T(\omega) = v$$

onde v é solução de (2.23).

Definimos:

$$B = \left\{ \phi \in M_n ; \|\nabla \phi\| \leq \frac{\beta}{\mu - \gamma} \right\}$$

Para $T : B \longrightarrow B$ temos:

i) T é contínua

ii) T leva B em B pois

Multiplicando (2.23) por $C_{l\,n}$ e somando-se em $l = 1, 2, \ldots n$, obtemos:

$$\int_\Omega (\omega \; \nabla v \; v + b \; \nabla v \; v + v \; \nabla b \; v - \mu \Delta v \; v) \, dx = \int_\Omega g \; v \; dx$$

os termos

$$\int_\Omega \omega \; \nabla v \; v \; dx \quad \text{e} \quad \int_\Omega b \; \nabla v \; v \; dx$$

são iguais a zero.

O que resulta:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega v \ \nabla b \ v \ dx - \mu \int_\Omega \nabla v \ \nabla v \ dx &= \int_\Omega g \ v \ dx \\
\int_\Omega v \ \nabla b \ v \ dx - \mu \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx &= \int_\Omega g \ v \ dx \\
\mu \, \|\nabla v\|^2 &= \int_\Omega g \ v \ dx - \int_\Omega v \ \nabla b \ v \ dx
\end{aligned}$$

Por (2.2) e (2.3), resulta

$$\|\nabla v\| \le \frac{\beta}{\mu - \gamma}$$

Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, preliminar 1.4,

$\exists \ u \in B$ tal que

$T(u) = u$ e assim garantimos a existência de solução do sistema (2.21).

2.4 Passagem ao Limite

A seqüência $\{v_n\}$ é limitada em $H^2(\Omega)$ devido as estimativas (2.7) e (2.20) e devido ao domínio limitado temos $\|v_n\| \le C_\Omega \|\nabla v_n\|$ o que implica $v_n \in H^2(\Omega)$ e $\|v_n\|_{H^2(\Omega)} \le C$, onde C é uma constante independente de n.

Como a imersão $H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ é compacta e v_n é limitada em $H^2(\Omega)$ então ela possui uma subseqüência que por simplicidade de notação denotamos por v_n convergindo fortemente em $H^1(\Omega)$ para v, temos que $v \in J_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ pois:

i) $v \in J_0(\Omega)$ pois temos $v_n \longrightarrow v$ em $H_0^1(\Omega)$ e como $\operatorname{div} v_n = 0$ então $\operatorname{div} v = 0$

ii) $v \in H^2(\Omega)$ como $v_n \to v$ em $H^2(\Omega)$ então

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i \partial x_j} \phi \ dx \longrightarrow \int \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \phi \ dx \ , \ n \to \infty \ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Assim

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i \partial x_j} \rightharpoonup \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \text{ em } L^2(\Omega)$$

Como $\|D^2 v_n\| \leq k$ então

$$\left\| \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i \partial x_j} \right\| \leq k$$

e existe uma subseqüência de

$$\left\| \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i \partial x_j} \right\|$$

ainda denotada por

$$\left\| \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i \partial x_j} \right\|$$

que converge em $\mathbb{R}$, isto é,

$$\left\| \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i \partial x_j} \right\| \longrightarrow \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|, \quad n \to \infty$$

o que implica, devido a proposição 1.9, que:

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i \partial x_j} \longrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}, \text{ em } L^2(\Omega)$$

logo

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega).$$

Pela imersão de Sobolev $H^2(\Omega) \circlearrowright C(\overline{\Omega})$, obtemos que $v \in C(\overline{\Omega})$ e $v = 0$ em $\partial\Omega$, pois

$$\begin{aligned} v, v_n &\in H^2(\Omega); v_n - v \in H^2(\Omega) \\ \|v_n - v\|_{C(\overline{\Omega})} &\leq \|v_n - v\|_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\|v_n - v\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |v_n(x) - v(x)| \geq |v_n(x) - v(x)|$$

com $x \in \partial\Omega$ e $v_n(x) = 0$ em $\partial\Omega$.

Então

$$|v(x)| \leq \|v_n - v\|_{H^2} \longrightarrow 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Logo

$$|v(x)| \leq \varepsilon,\ \forall\varepsilon > 0 \Longrightarrow v(x) = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Como temos que:

$$\begin{aligned}
&v_n \text{ converge fracamente para } v \text{ em } H^2,\\
&v_n \text{ converge fortemente para } v \text{ em } H^1\\
&\nabla v_n \text{ converge fortemente para } \nabla v \text{ em } L^2\\
&v_n \text{ converge fortemente para } v \text{ em } L^2\\
v \ \in \ &J_0(\Omega) \cap H^2\ v \in C\left(\overline{\Omega}\right);\ \ v|_{\partial\Omega} = 0
\end{aligned}$$

Para qualquer l fixado, podemos passar o limite com $n \to \infty$ em:

$$\int_\Omega (v_n\ \nabla v_n + b\ \nabla v_n + v_n\ \nabla b - \mu\Delta v_n)\ a_l dx = \int_\Omega g\ a_l dx.$$

Assim temos:

i)

$$\int_\Omega v_n\ \nabla v_n\ a_l\ dx \longrightarrow \int_\Omega v\ \nabla v\ a_l\ dx \text{ quando } n \to \infty$$

De fato

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega v_n\ \nabla v_n\ a_l\ dx - \int_\Omega v\ \nabla v\ a_l\ dx\right| \\
= &\left|\int_\Omega (v_n\ \nabla v_n\ a_l - v_n\ \nabla v\ a_l + v_n\ \nabla v\ a_l - v\ \nabla v\ a_l)\, dx\right| \\
\leq &\int_\Omega |v_n\,(\nabla v_n - \nabla v)\ a_l|\, dx + \int_\Omega |(v_n - v)\,\nabla v\ a_l|\, dx \\
\forall l;\ a_l \in &\ J_0 \cap H^2(\Omega) \circlearrowleft C\left(\overline{\Omega}\right) \Longrightarrow a_l \in C\left(\overline{\Omega}\right)
\end{aligned}$$

$$\leq \sup_{x\in\Omega} |a_l(x)| \int_\Omega |v^n\ \nabla\,(v^n - \nabla v)|\, dx + \sup_{x\in\Omega} |a_l(x)| \int_\Omega |v_n - v|\,|\nabla v|\, dx$$

Pela desigualdade de Hölder, preliminar 1.3,

$$\leq C_l\,(\|v_n\|\,\|\nabla v_n - \nabla v\| + \|v_n - v\|\,\|\nabla v\|)$$

como $\nabla v_n - \nabla v \longrightarrow 0$ e $v_n - v \longrightarrow 0$ e $v_n \leq C$ pois $v_n \to v$ em $L^2(\Omega)$ temos que

$$C_l\,(\|v_n\|\,\|\nabla v_n - \nabla v\| + \|v_n - v\|\,\|\nabla v\|) \longrightarrow 0 \text{ quando } n \to \infty$$

ii)

$$\int_\Omega b\ \nabla v_n\ a_l\ dx \longrightarrow \int b\ \nabla v\ a_l\ dx \text{ quando } n \to \infty$$

De fato

$$\int_\Omega (b\ \nabla v_n - b\ \nabla v)\ a_l\ dx \leq \int_\Omega |b|\,|\nabla v_n - \nabla v|\,|a_l|\, dx$$

usando a desigualdade de Hölder, preliminar 1.3

$$\leq \|b\|_\infty\,\|\nabla v_n - \nabla v\|\,\|a_l\| \to 0 \text{ quando } n \to \infty\ .$$

iii)

$$\int_\Omega v_n \nabla b \; a_l \; dx \longrightarrow \int_\Omega v \nabla b \; a_l \; dx \text{ quando } n \to \infty$$

De fato

$$\int |(v_n \nabla b \; a_l - v \nabla b \; a_l)| \, dx = \int |v_n - v| \, |\nabla b| \, |a_l| \, dx$$

usando a desigualdade de Hölder, preliminar 1.3

$$\leq \|v_n - v\|_p \|\nabla b\|_q \|a_l\|_r \; ,$$

onde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1 \; ,$$

$p = 2$, $q = 3$ e $r = 6$, como $v_n - v \longrightarrow 0$, temos que

$$\|v_n - v\| \|\nabla b\|_3 \|a_l\|_6 \longrightarrow 0 \text{ quando } n \to \infty$$

iv)

$$\int_\Omega \mu \Delta v_n \; a_l \; dx \longrightarrow \int_\Omega \mu \Delta v \; a_l \; dx \text{ quando } n \to \infty$$

De fato como:

$$\begin{aligned} v_n &\rightharpoonup v \text{ em } H^2 \text{ se } \forall F \in \left(H^2\right)' \simeq H^2 \, (*) \\ F(v_n) &\longrightarrow F(v) \end{aligned}$$

cada $a_l \in H^2(\Omega)$ define uma $F \in (H^2(\Omega))'$ através de:

$$\begin{aligned} F &: H^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ para } u \in H^2(\Omega) \text{ dada por} \\ F(u) &= \int_\Omega u \; a_l \; dx + \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \; a_l \; dx + \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \; a_l \; dx \end{aligned}$$

devido a $(*) : F(v_n) \longrightarrow F(v)$ em particular

$$\int_\Omega \Delta v_n \; a_l \; dx \longrightarrow \int_\Omega \Delta v \; a_l \; dx.$$

Mostraremos, agora, que

$$v\ \nabla v + b\ \nabla v + v\ \nabla b - \mu\Delta v - g \in L^2(\Omega)$$

Para isso, mostramos que

$$\int_\Omega |v\ \nabla v + b\ \nabla v + v\ \nabla b - \mu\Delta v - g|^2\, dx < \infty$$

i)

$$\int_\Omega |v\ \nabla v|^2\, dx \leq \sup_{\overline{\Omega}} |v| \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx < \infty$$

ii)

$$\int_\Omega |b\ \nabla v|^2\, dx \leq \sup_{\overline{\Omega}} |b| \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx < \infty$$

iii)

$$\int_\Omega |v|^2\, |\nabla b|^2\, dx \leq \left(\int_\Omega |v|^{2p}\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla b|^{2q}\, dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

com

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Fazemos

$$2q = 3,\ \text{isto é},\ q = \frac{3}{2}.\ \text{Então}\ p = 3\ \text{portanto temos:}$$

$$\int_\Omega |v|^2\, |\nabla b|^2\, dx \leq \|v\|_6^2\, \|\nabla b\|_3^2 < \infty$$

iv)

$$\int_\Omega |\Delta v|^2\, dx \leq \|v\|_{H^2(\Omega)} < \infty$$

v)

$$g \in L^2(\Omega)$$

Finalmente, como o sistema $\{a_l\}$ é completo em $J_0(\Omega)$ e

$$v\ \nabla v + b\ \nabla v + v\ \nabla b - \mu\Delta v - g \in L^2(\Omega)$$

e

$$J^{\perp} = \left\{v \in L^2(\Omega);\ v = \nabla p;\ p \in H^1(\Omega)\right\}$$

a equação

$$\int_\Omega (v\ \nabla v + b\ \nabla v + v\ \nabla b - \mu\Delta v - g)\, a_l\, dx = 0$$

implica a existência de uma função $\nabla P \in J^{\perp}$ tal que

$$v\ \nabla v + b\ \nabla v + v\ \nabla b - \mu\Delta v - g = \nabla P,$$

denotado $p = -P$, temos

$$v\ \nabla v + b\ \nabla v + v\ \nabla b - \mu\Delta v + \nabla p = g.$$

A função $\nabla p \in G(\Omega)$ junto com v satisfaz (2.4). Portanto $u = v + b$ é uma solução generalizada em $H^2(\Omega)$ para o problema (2.1), devido a imersão $H^2(\Omega) \subset C\left(\overline{\Omega}\right)$, preliminar 1.7, u é contínuo em $\overline{\Omega}$ e igual a b^* em $\partial\Omega$.

2.5 Solução em Domínio não Limitado

Finalmente, consideremos o caso em um domínio não limitado Ω com fronteira uniforme de classe C^3.

Da mesma forma que nas secções anteriores, consideraremos a fronteira uniformemente de classe C^3. Considere a existência de uma seqüência de subdomínios limitados $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset ...$ tal que

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$$

e tal que a uniformidade de classe C^3 na fronteira de Ω é mantida nos domínios Ω_k. Para cada Ω_k, encontramos uma solução $v_k \in J_0(\Omega_k) \cap H^2(\Omega_k)$ da equação (2.4). As estimativas (2.7) e (2.20) nos fornecem limitações uniformes com respeito a k para

$$\|\nabla v_k\|_{\Omega_k} \text{ e } \left\|D^2 v_k\right\|_{\Omega_k}.$$

Além disso se $l \leq k$ então

$$\|v_k\|_{H^2(\Omega_l)} \leq C_l \left(\left\|D^2 v_k\right\|_{L^2(\Omega_k)} + \|\nabla v_k\|_{L^2(\Omega_k)} \right)$$

com constante C_l independente de k.

De fato:

$$\begin{aligned}
\|v_k\|_{H^2(\Omega_l)} &= \sqrt{\|D^2 v_k\|^2_{L^2(\Omega_l)} + \|\nabla v_k\|^2_{L^2(\Omega_l)} + \|v_k\|^2_{L^2(\Omega_l)}} \\
&\leq \sqrt{\|D^2 v_k\|^2_{L^2(\Omega_l)}} + \sqrt{\|\nabla v_k\|^2_{L^2(\Omega_l)}} + \sqrt{\|v_k\|^2_{L^2(\Omega_l)}} \\
&\leq \left\|D^2 v_k\right\|_{L^2(\Omega_l)} + \|\nabla v_k\|_{L^2(\Omega_l)} + \|v_k\|_{L^2(\Omega_l)}
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder, preliminar 1.3, obtemos

$$\begin{aligned}
\|v_k\|_{L^2(\Omega_l)} &\leq \left(\int_{\Omega_l} |v_k|^6 \, dx \right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(\int_{\Omega_l} |1|^{\frac{3}{2}} \, dx \right)^{\frac{1}{3}} \\
\|v_k\|_{L^2(\Omega_l)} &\leq \|v_k\|_{L^6(\Omega_l)} |\Omega_l|^{\frac{1}{3}} \\
\|v_k\|_{L^2(\Omega_l)} &\leq \sqrt[3]{|\Omega_l|} \cdot \|v_k\|_{L^6(\Omega_l)}
\end{aligned}$$

Então:

$$\|v_k\|_{H^2(\Omega_l)} \leq \left\|D^2 v_k\right\|_{L^2(\Omega_l)} + \|\nabla v_k\|_{L^2(\Omega_l)} + C_{\Omega_l} \|v_k\|_{L^6(\Omega_l)}$$

Utilizando o Lema 1.10, obtemos:

$$\|v_k\|_{H^2(\Omega_l)} \leq C_l \left(\left\| D^2 v_k \right\|_{L^2(\Omega_k)} + \|\nabla v_k\|_{L^2(\Omega_k)} \right)$$

que devido as estimativas (2.7) e (2.20), obtemos:

$$\|v_k\|_{H^2(\Omega_l)} \leq C_{\partial\Omega, \Omega_l}$$

Assim, formamos as seguintes subseqüências utilizando um raciocínio conhecido como diagonal de Cantor:

Em Ω_1, existe uma subseqüência de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denotada por $(v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_4^1, ...)$, tal que

$$\begin{aligned} &v_n^1 \text{ converge fracamente para } v^1 \text{ em } H^2(\Omega_1) \text{ e} \\ &v_n^1 \text{ converge fortemente para } v^1 \text{ em } H^1(\Omega_1). \end{aligned}$$

Em Ω_2, existe uma subseqüência de $(v_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ denotada por $(v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_4^2, ...)$, tal que

$$\begin{aligned} &v_n^2 \text{ converge fracamente para } v^2 \text{ em } H^2(\Omega_2) \text{ e} \\ &v_n^2 \text{ converge fortemente para } v^2 \text{ em } H^1(\Omega_2) \end{aligned}$$

Em geral temos que:

Em Ω_k, existe uma subseqüência de $\left(v_n^{k-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ denotada por $\left(v_1^k, v_2^k, v_3^k, v_4^k, ...\right)$, tal que

$$\begin{aligned} &v_n^k \text{ converge fracamente para } v^k \text{ em } H^2(\Omega_k) \text{ e} \\ &v_n^k \text{ converge fortemente para } v^k \text{ em } H^1(\Omega_k). \end{aligned}$$

Consideramos agora, a seqüência $(v_1^1, v_2^2, v_3^3, ...)$, isto é, $(v_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal seqüência é uma subseqüência de todas as anteriores, a partir do índice n.

Por motivos de simplicidade na notação, ainda denotamos a subseqüência final por $\{v_k\}$ e seu limite por v.

Como $v \in H^2_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\|D^2v\|, \|\nabla v\|, \|v\|_6 < \infty$, devido as imersões de Sobolev temos que $v \in H^2_{\text{loc}}(\overline{\Omega})$.

Desde que $v \in J_0(\Omega) \cap H^2_{\text{loc}}(\overline{\Omega})$ temos que $v \in C(\overline{\Omega})$ e $v = 0$ em $\partial\Omega$. Observamos que $v(x) \longrightarrow 0$ quando $|x| \to \infty$, de fato:

Primeiro observemos que considerando uma seqüência de cones disjuntos K_{x_n} com vértices em x_n e com a mesma abertura (pois Ω tem fronteira uniforme de classe C^3) e com $|x| \to \infty$ quando $n \to \infty$ temos que

$$\|v\|_{H^2(K_{x_n})} \longrightarrow 0$$

quando $n \to \infty$ pois $\|D^2v\|$; $\|\nabla v\|$ e $\|v\|$ são finitos.

Pelo Teorema da imersão de Sobolev temos que $|v(x)| \leq C\|v\|_{H^2(K_x)}$, com a mesma constante para cada cone. Assim fazendo $|x| \to \infty$ obtemos $|v(x)| \longrightarrow 0$.

Vemos que v satisfaz (2.4). Se $\phi \in D(\Omega)$, então

$$\int_\Omega (v_k \ \nabla v_k + b \ \nabla v_k + v_k \ \nabla b - \mu\Delta v_k - g)\,\phi \ dx = 0$$

considerando para todo k suficientemente grande para que supp $\phi \subset \Omega_k$.

Passando o limite sobre a subseqüência, obtemos como na secção (2.4)

$$\int_\Omega (v \ \nabla v + b \ \nabla v + v \ \nabla b - \mu\Delta v - g)\,\phi \ dx = 0$$

para todo $\phi \in D(\Omega)$.

Da mesma forma que na secção (2.4) a expressão $v \ \nabla v + b \ \nabla v + v \ \nabla b - \mu\Delta v - g$ pertence a $L^2(\Omega)$, assim existe a função $\nabla p \in J^{\perp}(\Omega)$, que juntamente com v satisfaz (2.4). Deste modo $u = v + b$ é uma solução do problema (2.1) pertencente a $H^2_{\text{loc}}(\overline{\Omega}) \subset C(\overline{\Omega})$.

Capítulo 3

O Problema não Estacionário

3.1 Introdução

O problema não estacionário para o sistema de equações de Navier-Stokes, descreve a velocidade e pressão de um fluido homogêneo ($\rho \equiv 1$) com viscosidade constante ($\mu =$ constante), incompressível e sujeito a um campo de forças externo $f(x,t)$, movimentando-se numa região $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $d = 2, 3$. O problema é obter $u(x,t) \in \mathbb{R}^3$ e $p(x,t) \in \mathbb{R}$ definidas para $x \in \Omega$ e $t > 0$, tais que satisfaçam

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u - \mu \Delta u + \nabla p = f \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = a(x), \ \forall x \in \Omega \\ u(x,t) = 0, \ \forall t \in (0,T), \ \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $u(x,t)$ denota a velocidade do fluido, $p(x,t)$ é a pressão hidrostática no ponto x e no instante t e $a(x)$ é a velocidade inicial e f é um campo de forças externas dado.

Na secção 3.4, demonstraremos o Teorema 2 que é o teorema principal deste capítulo.

Teorema 2 *Seja Ω um domínio tridimensional, com fronteira uniformemente de classe C^3. Se $a \in J_0(\Omega)$ e*

$$F(t) = \int_0^t \|f\|^2 d\tau < \infty, \ \forall t > 0.$$

Então existe um intervalo $(0,T)$ e funções $u(x,t)$, $p(x,t)$ definidas e satisfazendo as equações de Navier-Stokes

$$u_t + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \mu \Delta u + f, \ \mathrm{div}\ u = 0 \ \text{em} \ \Omega \times (0,T),$$

tais que

$$u \in L^\infty(0,T'; J_0(\Omega)) \ \text{para} \ 0 < T' < T \tag{3.2}$$

$$u_t, \ D_x^2 u, \ \nabla p \in L^2\left(0,T'; L^2(\Omega)\right) \ \text{para} \ 0 < T' < T \tag{3.3}$$

e

$$\|\nabla u(t) - \nabla a\| \longrightarrow 0, \ \text{quando} \ t \to 0^+ \tag{3.4}$$

onde T depende de $\|a\|$, F, μ e da regularidade C^3 da fronteria.

3.2 Solução em Dimensão Finita

Nesta secção mostraremos a formulação variacional para a equação (3.1) e a existência da solução para a formulação variacional em dimensão finita.

Para a formulação clássica da equação de Navier-Stokes (3.1), a formulação variacional é:

$$\frac{d}{dt}(u,v) + \mu((u,v)) + b(u,u,v) = (f,v), \ \forall v \in J_0 \tag{3.5}$$

$$u(0) = u_0$$

Aplicamos o método de Galerkin. Uma vez que V é separável, isto é, existe um conjunto denso e enumerável onde qualquer elemento do espaço pode ser aproximado por uma seqüência de elementos deste conjunto. Seja $\{\omega_1, \omega_2, ...\}$ este conjunto. Para cada m definimos a solução aproximada u_m de (3.5) como segue:

$$u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} g_{i,m}(t)\,\omega_i(x). \tag{3.6}$$

A formulação variacional no espaço $V_m = [\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m]$ é:

$$\begin{aligned} (u_m'(t), \omega_j) + \mu((u_m(t), \omega_j)) + b(u_m(t), u_m(t), \omega_j) &= (f(t), \omega_j) \qquad (3.7) \\ t &\in [0, T),\ j = 1, ..., m \end{aligned}$$

$$u_m(0) = u_{0m} \tag{3.8}$$

onde u_{0m} é a projeção ortogonal em H do u_0 sobre o espaço V_m gerado por $\{\omega_1, ..., \omega_m\}$.

A equação (3.7) forma um sistema diferencial não-linear para as funções $g_{1m}, ..., g_{mm}$.

Então temos:

$$\begin{aligned} u_m &= g_{1m}(t)\,\omega_1 + g_{2m}(t)\,\omega_2 + ... + g_{mm}(t)\,\omega_m \qquad (3.9) \\ u_m' &= \omega_1 g_{1m}'(t) + \omega_2 g_{2m}'(t) + ... + \omega_m g_{mm}'(t) \end{aligned}$$

Escrevendo mais explicitamente o sistema (3.7) temos:

$$\begin{cases} (u_m'(t), \omega_1) + \mu((u_m(t), \omega_1)) + b(u_m(t), u_m(t), \omega_1) = (f(t), \omega_1) \\ \\ (u_m'(t), \omega_2) + \mu((u_m(t), \omega_2)) + b(u_m(t), u_m(t), \omega_2) = (f(t), \omega_2) \\ \\ \vdots \\ \\ (u_m'(t), \omega_m) + \mu((u_m(t), \omega_m)) + b(u_m(t), u_m(t), \omega_m) = (f(t), \omega_m) \end{cases} \tag{3.10}$$

Substituindo (3.9) em (3.10), obtemos:

$$\begin{cases} (\omega_1 g_{1m}'(t) + \omega_2 g_{2m}'(t) + ... + \omega_m g_{mm}'(t), \omega_1) + \mu((g_{1m}(t)\omega_1 + g_{2m}(t)\omega_2 + ... \\ \\ +\omega_m g_{mm}(t), \omega_1)) + b(\omega_1 g_{1m}(t) + \omega_2 g_{2m}(t) + ... + \omega_m g_{mm}, \\ \\ \omega_1 g_{1m}(t) + \omega_2 g_{2m}(t) + ... + \omega_m g_{mm}, \omega_1) = (f(t), \omega_1) \\ \\ \vdots \\ \\ (\omega_1 g_{1m}'(t) + \omega_2 g_{2m}'(t) + ... + \omega_m g_{mm}'(t), \omega_m) + \mu((g_{1m}(t)\omega_1 + g_{2m}(t)\omega_2 + \\ \\ ... + \omega_m g_{mm}(t), \omega_m)) + b(\omega_1 g_{1m}(t) + \omega_2 g_{2m}(t) + ... + \omega_m g_{mm}, \\ \\ \omega_1 g_{1m}(t) + \omega_2 g_{2m}(t) + ... + \omega_m g_{mm}, \omega_m) = (f(t), \omega_m) \end{cases}$$

Então, para cada $j = 1, ..., m$, temos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{m} (\omega_i, \omega_j)\, g'_{im}(t) + \mu \sum_{i=1}^{m} ((\omega_i, \omega_j))\, g_{im}(t) \\ & + \sum_{i,l=1}^{m} b(\omega_i, \omega_l, \omega_j)\, g_{im}(t)\, g_{lm}(t) \\ = \;& (f(t), \omega_j), \end{aligned} \tag{3.11}$$

isto é,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} (\omega_i, \omega_1)\, g'_{im}(t) + \mu \sum_{i=1}^{m} ((\omega_i, \omega_1))\, g_{im}(t) \\ + \sum_{i,l=1}^{m} b(\omega_i, \omega_l, \omega_1)\, g_{im}(t)\, g_{lm}(t) = (f(t), \omega_1) \\ \sum_{i=1}^{m} (\omega_i, \omega_2)\, g'_{im}(t) + \mu \sum_{i=1}^{m} ((\omega_i, \omega_2))\, g_{im}(t) \\ + \sum_{i,l=1}^{m} b(\omega_i, \omega_l, \omega_2)\, g_{im}(t)\, g_{lm}(t) = (f(t), \omega_2) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} (\omega_i, \omega_m)\, g'_{im}(t) + \mu \sum_{i=1}^{m} ((\omega_i, \omega_m))\, g_{im}(t) \\ + \sum_{i,l=1}^{m} b(\omega_i, \omega_l, \omega_m)\, g_{im}(t)\, g_{lm}(t) = (f(t), \omega_m) \end{cases}$$

Então:

$$\begin{bmatrix} (\omega_1,\omega_1) & ... & (\omega_m,\omega_1) \\ \vdots & ... & \vdots \\ (\omega_1,\omega_m) & ... & (\omega_m,\omega_m) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ \vdots \\ g'_{mm}(t) \end{bmatrix} + \tag{3.12}$$

$$\mu \begin{bmatrix} ((\omega_1,\omega_1)) & ... & ((\omega_m,\omega_1)) \\ \vdots & ... & \vdots \\ ((\omega_1,\omega_m)) & ... & ((\omega_m,\omega_m)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1m} & \cdots & g_{mm} \end{bmatrix}_{1\times m} \cdot \begin{bmatrix} b(\omega_1,\omega_1,\omega_1) & ... & b(\omega_1,\omega_m,\omega_1) \\ \vdots & ... & \vdots \\ b(\omega_m,\omega_1,\omega_1) & ... & b(\omega_m,\omega_m,\omega_1) \end{bmatrix}_{m\times m} \cdot \begin{bmatrix} g_{1m} \\ \vdots \\ g_{mm} \end{bmatrix}_{m\times 1} \\ \begin{bmatrix} g_{1m} & \cdots & g_{mm} \end{bmatrix}_{1\times m} \cdot \begin{bmatrix} b(\omega_1,\omega_1,\omega_2) & ... & b(\omega_1,\omega_m,\omega_2) \\ \vdots & ... & \vdots \\ b(\omega_m,\omega_1,\omega_2) & ... & b(\omega_m,\omega_m,\omega_2) \end{bmatrix}_{m\times m} \cdot \begin{bmatrix} g_{1m} \\ \vdots \\ g_{mm} \end{bmatrix}_{m\times 1} \\ \begin{bmatrix} g_{1m} & \cdots & g_{mm} \end{bmatrix}_{1\times m} \cdot \begin{bmatrix} b(\omega_1,\omega_1,\omega_m) & ... & b(\omega_1,\omega_m,\omega_m) \\ \vdots & ... & \vdots \\ b(\omega_m,\omega_1,\omega_m) & ... & b(\omega_m,\omega_m,\omega_m) \end{bmatrix}_{m\times m} \cdot \begin{bmatrix} g_{1m} \\ \vdots \\ g_{mm} \end{bmatrix}_{m\times 1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (f(t),\omega_1) \\ \vdots \\ (f(t),\omega_m) \end{bmatrix}$$

A matriz

$$M = \begin{bmatrix} (\omega_1, \omega_1) & ... & (\omega_m, \omega_1) \\ \vdots & ... & \vdots \\ (\omega_1, \omega_m) & ... & (\omega_m, \omega_m) \end{bmatrix}$$

é não singular pois,

$$\begin{bmatrix} (\omega_1, \omega_1) & ... & (\omega_m, \omega_1) \\ \vdots & ... & \vdots \\ (\omega_1, \omega_m) & ... & (\omega_m, \omega_m) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (\omega_1, \omega_1)\, x_1 + ... + (\omega_m, \omega_1)\, x_m = 0 \\ \vdots \\ (\omega_1, \omega_m)\, x_1 + ... + (\omega_m, \omega_m)\, x_m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_1\omega_1, \omega_1) + ... + (x_m\omega_m, \omega_1) = 0 \\ \vdots \\ (x_1\omega_1, \omega_m) + ... + (x_m\omega_m, \omega_m) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_1\omega_1 + ... + x_m\omega_m, \omega_1) = 0 \\ \vdots \\ (x_1\omega_1 + ... + x_m\omega_m, \omega_m) = 0 \end{cases}$$

Logo:

$$x_1\omega_1 + ... + x_m\omega_m = 0 \Rightarrow x_1 = ... = x_m = 0$$

pois o conjunto $\{\omega_1, ..., \omega_m\}$ é L.I.

■

Como a matriz M é não singular, então possui inversa M^{-1}.

Multiplicamos o sistema (3.12) pela matriz inversa de M e obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias escrito na forma vetorial:

$$g_{im}'(t) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} g_{im}(t) + \sum_{j,k=1}^{m} \gamma_{ijk} g_{im}(t) g_{km}(t) = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} (f(t), \omega_j) \quad (3.13)$$

onde $\alpha_{ij}, \gamma_{ijk}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq m$.

A condição (3.8) é equivalente as condições escalares para o m.

$$g_{im}(0) = \text{i-ésima componente de } u_{0m}; \quad (3.14)$$

isto é,

$$u_{0m} = g_{1m}(0)\omega_1 + g_{2m}(0)\omega_2 + ... + g_{mm}(0)\omega_m.$$

O sistema (3.13) com a condição inicial (3.14) tem uma solução definida num intervalo $[0, T_m)$. Se $T_m < T$ então $\|u_m(t)\|$ tende a ∞ quando $t \longrightarrow T_m$. Mas a estimativa (3.18) da próxima secção mostra que $T_m = T$.

3.3 Estimativas a Priori

Nesta secção apresentaremos estimativas para a solução do problema de valor inicial (3.1).

Usando o método de Galerkin com autofunções do operador de Stokes, isto é, do $P\Delta$. Estas autofunções $\{a_l\}$ são ortogonais em $J(\Omega)$. Os correpondentes autovalores são $\{\lambda_l\}$, então

$$P\Delta a_l = \lambda_l a_l.$$

Tomando as n-ésimas aproximações a solução

$$u_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} C_{kn}(t) . a_k(x)$$

do problema de valor inicial, $t \geq 0$, para o sistema $(l = 1, 2, ...n)$ da equação diferencial ordinária

$$\left(\frac{d}{dt}u_n, a_l\right) + (u_n \nabla u_n, a_l) - \mu (\Delta u_n, a_l) = (f, a_l) \tag{3.15}$$

com condições iniciais $C_{kn}(0) = (a, a_k)$, $k = 1, 2, ..., n$.

Observe que aqui, como $a_l \in H^2(\Omega)$ podemos reescrever na formulação fraca o termo $\mu((u_n(t), a_l))$ como $-\mu(\Delta u_n, a_l)$.

Multiplicando (3.15) por $C_{kn}(t)$, lembrando que $(\Delta u_n, a_l) = -(\nabla u_n, \nabla a_l)$ e somando em $l = 1, ..., n$ temos:

$$\left(\frac{d}{dt}u_n, u_n\right) + \mu \|\nabla u_n\|^2 + (u_n.\nabla u_n, u_n) = (f, u_n)$$

como o termo $(u_n.\nabla u_n, u_n) = 0$. Veja TEMAM [18] na página 163.

Então,

$$\left(\frac{d}{dt}u_n, u_n\right) + \mu \|\nabla u_n\|^2 = (f, u_n) \tag{3.16}$$

Multiplicando (3.16) por 2 e escrevendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2 &= \left(\frac{d}{dt}u_n, u_n\right) \\ \frac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2 &= 2\left(\frac{d}{dt}u_n, u_n\right) \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2 + 2\mu\|\nabla u_n\|^2 &= 2(f, u_n) \\ \frac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2 + 2\mu\|\nabla u_n\|^2 &\leq 2\|f(t)\|\,\|u_n(t)\| \\ \frac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2 + 2\mu\|\nabla u_n\|^2 &\leq \mu\|u_n\|^2 + \frac{1}{\mu}\|f(t)\|^2 \end{aligned}$$

pois:

$$2\|f(t)\|\,\|u_n(t)\| = 2\sqrt{\mu}\,\|u_n\|\,\frac{1}{\sqrt{\mu}}\|f(t)\| \leq \mu\|u_n\|^2 + \frac{1}{\mu}\|f(t)\|^2.$$

Assim que

$$\frac{d}{dt}\left\|u_n(t)\right\|^2 \leq \frac{d}{dt}\left\|u_n(t)\right\|^2 + \mu\left\|\nabla u_n\right\|^2 \leq \frac{1}{\mu}\left\|f(t)\right\|^2. \tag{3.17}$$

Integrando (3.17) de 0 a s obtemos:

$$\begin{aligned}
\left\|u_n(s)\right\|^2 &\leq \left\|u_{0n}\right\|^2 + \frac{1}{\mu}\int_0^s \left\|f(t)\right\|^2 dt \\
&\leq \left\|u_0\right\|^2 + \frac{1}{\mu}\int_0^T \left\|f(t)\right\|^2 dt,
\end{aligned}$$

pois u_{0n} é a projeção ortogonal de u_0 sobre V_m.

Conseqüentemente

$$\sup_{0\leq s\leq T}\left\|u_n(s)\right\|^2 \leq \left\|u_0\right\|^2 + \frac{1}{\mu}\int_0^T \left\|f(t)\right\|^2 dt < \infty$$

o que implica que:

$$\text{a seqüência } u_n \in L^\infty(0,T;H) \text{ e é limitada uniformemente em } n. \tag{3.18}$$

Quando integramos as duas ultimas expressões de (3.17), de 0 a T, obtemos:

$$\begin{aligned}
\left\|u_n(T)\right\|^2 - \left\|u_n(0)\right\|^2 + \mu\int_0^T \left\|\nabla u_n(t)\right\|^2 dt &\leq \frac{1}{\mu}\int_0^T \left\|f(t)\right\|^2 dt \\
\left\|u_n(T)\right\|^2 + \mu\int_0^T \left\|\nabla u_n(t)\right\|^2 dt &\leq \frac{1}{\mu}\int_0^T \left\|f(t)\right\|^2 dt + \left\|u_n(0)\right\|^2 \\
\mu\int_0^T \left\|\nabla u_n(t)\right\|^2 dt &\leq \frac{1}{\mu}\int_0^T \left\|f(t)\right\|^2 dt + \left\|u_0\right\|^2
\end{aligned}$$

$$\int_0^T \left\|\nabla u_n(t)\right\|^2 dt \leq \frac{1}{\mu^2}\int_0^T \left\|f(t)\right\|^2 dt + \frac{1}{\mu}\left\|u_0\right\|^2$$

o que nos leva a concluir que

$$u_n \in L^2(0,T;V) \text{ e é limitada uniformemente em } n \tag{3.19}$$

Multiplicando (3.15) por $\lambda_l C_{l\,n}$, somando em $l = 1, ..., n$, e definindo

$$\sum_{l=1}^{n} \lambda_l C_{l\,n} a_l = P\Delta u_n = \widetilde{\Delta} u_n$$

pois

$$P\Delta u_n = P\Delta\left(\sum_{k=1}^{n} C_{kn} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} C_{kn} P\Delta\left(a_k\right).$$

Obtemos:

$$\left(\frac{d}{dt} u_n, \widetilde{\Delta} u_n\right) + \left(u_n \nabla u_n, \widetilde{\Delta} u_n\right) - \mu\left(\Delta u_n, \widetilde{\Delta} u_n\right) = \left(f, \widetilde{\Delta} u_n\right) \tag{3.20}$$

Utilizando a proposição 1.15 podemos caracterizar $\widetilde{\Delta} u_n$ pois:

$$\left(\Delta u_n - \widetilde{\Delta} u_n, v\right) = 0 \ \forall v \in V_m$$

Para $v = \widetilde{\Delta} u_n$ obtemos

i)

$$\left(\Delta u_n, \widetilde{\Delta} u_n\right) = \left(\widetilde{\Delta} u_n, \widetilde{\Delta} u_n\right) = \left\|\widetilde{\Delta} u_n\right\|^2$$

Como:

$$\int_\Omega \frac{d}{dt}\ u_n\ \widetilde{\Delta} u_n dx = -\int_\Omega \nabla \frac{d}{dt} u_n\ \nabla u_n dx$$

Assim:

$$\left(\frac{d}{dt} u_n, \widetilde{\Delta} u_n\right) = -\left(\nabla \frac{d}{dt} u_n, \nabla u_n\right) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\nabla u_n, \nabla u_n\right)$$

Então:

ii)

$$\left(\frac{d}{dt} u_n, \widetilde{\Delta} u_n\right) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u_n\right\|^2$$

iii)

$$\left(f,\widetilde{\Delta}u_n\right) \leq \frac{1}{\varepsilon}\|f\|^2 + \varepsilon\left\|\widetilde{\Delta}u_n\right\|^2 \text{ com } \varepsilon > 0$$

Substituindo **i, ii, iii** em (3.20), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_n\|^2 + \mu\left\|\widetilde{\Delta}u_n\right\|^2 - \left(u_n\nabla u_n,\widetilde{\Delta}u_n\right) = \left(f;\widetilde{\Delta}u_n\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_n\|^2 + (\mu-\varepsilon)\left\|\widetilde{\Delta}u_n\right\|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}\|f\|^2 + \left(u_n\nabla u_n,\widetilde{\Delta}u_n\right) \tag{3.21}$$

Encontramos outra estimativa para aproximação de Galerkin, baseado na identidade (3.21). O lado direito de (3.21) será estimado usando a estimativa (2.14), fazendo

$$\varepsilon = \frac{\mu}{2},$$

o que resulta:

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u_n\|^2 + \mu\left\|\widetilde{\Delta}u_n\right\|^2 \leq C_{\partial,\mu}\|\nabla u_n\|^4 + C'_{\partial,\mu}\|\nabla u_n\|^6 + C\|f\|^2 \tag{3.22}$$

Temos que

$$\|\nabla u_n(x,0)\| \leq \|\nabla a\| \tag{3.23}$$

pois:

$$u_n(x,0) = \sum_{k=1}^{n} C_{k,n}\ a_k$$

onde

$$C_{k,n}(0) = (a,a_k) = \frac{(\nabla a,\nabla a_k)}{\|\nabla a_k\|^2}$$

Assim:

$$\nabla u_n(x,0) = \sum_{k=1}^{n} C_{k,n}(0)\ \nabla a_k$$

e

$$\|\nabla u_n(x,0)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} C_{k,n}^2(0) \quad \|\nabla a_k\|^2 \quad (*)$$

pois:

$$\nabla a = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \ \nabla a_k \text{ com } \beta_k = \frac{(\nabla a, \nabla a_k)}{\|\nabla a_k\|^2}$$

Assim:

$$\|\nabla a\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \quad \|\nabla a_k\|^2 \quad (**)$$

Portanto da igualdade $(*)$ e $(**)$ acima concluimos que

$$\|\nabla u_n(x,0)\| \leq \|\nabla a\|.$$

Por (3.22) e (3.23) e fazendo no Lema 1.8 $\psi = \mu \left\|\widetilde{\Delta} u_n\right\|^2$, $f \equiv 0$,

$$g(t) = Ct^2 + C't^3 \Rightarrow g\left(\|\nabla u_n\|^2\right) = C_{\partial,\mu} \|\nabla u_n\|^4 + C'_{\partial,\mu} \|\nabla u_n\|^6$$

concluimos que existe, no intervalo $[0,T)$, funções contínuas $F(t)$ e $\widetilde{F}(t)$ tais que:

$$\|\nabla u_n(t)\|^2 \leq F(t) \text{ e } \int_0^t \left\|\widetilde{\Delta} u_n\right\|^2 d\tau \leq \widetilde{F}(t) \tag{3.24}$$

Em vista do Lema 1.17, $\|D^2\omega\| \leq C_\partial (\|Pf\| + \|\nabla\omega\|)$ a desigualdade (3.24) implica

$$\int_0^t \left\|D_x^2 u\right\|^2 d\tau \leq \widetilde{F}(t) \tag{3.25}$$

para $t \in [0,T)$, onde

$$\|D_x^2 u\|^2 = \left(\sum_{i,j,k=1}^{3} \left\|\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Multiplicando (3.15) por

$$\frac{dC_{l\,n}}{dt}$$

e somando em $l = 1, ..., n$, obtemos:

$$\left\| \frac{d}{dt} u_n \right\|^2 = \mu \left(\widetilde{\Delta} u_n \ \frac{d}{dt} u_n \right) - \left(u_n \ \nabla u_n \ \frac{d}{dt} u_n \right) + \left(f, \frac{d}{dt} u_n \right)$$

Usando a desigualdade de Hölder, preliminar 1.3, obtemos:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{d}{dt} u_n \right\|^2 &\leq \mu \left\| \widetilde{\Delta} u_n \right\| \left\| \frac{d}{dt} u_n \right\| + \|u_n \ \nabla u_n\| \left\| \frac{d}{dt} u_n \right\| + \|f\| \left\| \frac{d}{dt} u_n \right\| \\
\left\| \frac{d}{dt} u_n \right\| &\leq \mu \left\| \widetilde{\Delta} u_n \right\| + \|u_n \ \nabla u_n\| + \|f\|
\end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned}
\|u_n \nabla u_n\| &= \left(\int_\Omega |u_n \nabla u_n|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |u_n|^2 \, |\nabla u_n|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_\Omega |u_n|^{2p} \, dx \right)^{\frac{1}{2p}} \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^{2q} \, dx \right)^{\frac{1}{2q}} \text{ com } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\
&= \|u_n\|_6 \, \|\nabla u_n\|_3 \, .
\end{aligned}$$

Acima foi escolhido

$$p = 3 \text{ e } q = \frac{3}{2}.$$

Em $\|u_n\|_6$ usamos o Lema 1.6, isto é,

$$\|u_n\|_6 \leq C \, \|\nabla u_n\|$$

e em $\|\nabla u_n\|_3$ usamos Lema 1.17, isto é,

$$\|\nabla u_n\|_3 \leq C_\partial \left(\left\| \widetilde{\Delta} u_n \right\|^{\frac{1}{2}} . \|\nabla u_n\|^{\frac{1}{2}} + \|\nabla u_n\| \right).$$

Assim:

$$\|u_n\|_6 \|\nabla u_n\|_3 \leq C \|\nabla u_n\| .C_\partial \left(\left\| \widetilde{\Delta} u_n \right\|^{\frac{1}{2}} . \|\nabla u_n\|^{\frac{1}{2}} + \|\nabla u_n\| \right).$$

Então

$$\left\| \frac{d}{dt} u_n \right\| \leq \mu \left\| \widetilde{\Delta} u_n \right\| + C \|\nabla u_n\| .C_\partial \left(\left\| \widetilde{\Delta} u_n \right\|^{\frac{1}{2}} . \|\nabla u_n\|^{\frac{1}{2}} + \|\nabla u_n\| \right) + \|f\|$$

$$\left\| \frac{d}{dt} u_n \right\| \leq \mu \left\| \widetilde{\Delta} u_n \right\| + C'_\partial \left\| \widetilde{\Delta} u_n \right\|^{\frac{1}{2}} . \|\nabla u_n\|^{\frac{3}{2}} + C'_\partial \|\nabla u_n\|^2 + \|f\|$$

utilizando o Lema 1.1 em:

$$C'_\partial \left\| \widetilde{\Delta} u_n \right\|^{\frac{1}{2}} . \|\nabla u_n\|^{\frac{3}{2}} .$$

temos:

$$\begin{aligned} C'_\partial \left\| \widetilde{\Delta} u_n \right\|^{\frac{1}{2}} . \|\nabla u_n\|^{\frac{3}{2}} &\leq \frac{1}{2k^2} C'_\partial \left\| \widetilde{\Delta} u_n \right\| + \frac{k^2}{2} \|\nabla u_n\|^3 \\ &= \left\| \widetilde{\Delta} u_n \right\| + \frac{C'_\partial}{4} \|\nabla u_n\|^3 \\ &= \left\| \widetilde{\Delta} u_n \right\| + C''_\partial \|\nabla u_n\|^3 \end{aligned}$$

o que resulta:

$$\left\| \frac{d}{dt} u_n \right\| \leq (\mu + 1) \left\| \widetilde{\Delta} u_n \right\| + C''_\partial \|\nabla u_n\|^3 + C'_\partial \|\nabla u_n\|^2 + \|f\| . \qquad (3.26)$$

elevando-se ao quadrado, integrando de 0 a t e utilizando (3.24), obtemos:

$$\int_0^t \left\| \frac{d}{dt} u_n \right\|^2 d\tau \leq G(t) \qquad (3.27)$$

para $t \in [0, T)$.

3.4 Propriedades de uma Solução em Domínio Limitado

As estimativas (3.18), (3.19), (3.24), (3.25) e (3.27) são suficientes para demonstrarmos o Teorema 2 enunciado na secção 3.1 deste trabalho.

Consideremos, Ω um domínio limitado, deste modo, temos aproximações de Galerkin $\{u_n\}$ satisfazendo (3.6), (3.24), (3.25), (3.27), $\|u_n(t)\| \leq C_\Omega \|\nabla u_n(t)\|$ e também uma solução u para a equação de Navier-Stokes em J_0, conforme TEMAM [18] na página 283.

A tese (3.2), do Teorema 2 decorre de (3.24) pois $\|\nabla u(t)\|^2 \leq F(t)$ com F contínua em $[0, T)$. Para todo $T' < T$ tem-se $\nabla u \in L^\infty(0, T'; L^2(\Omega))$, isto é, $u \in L^\infty(0, T'; J_0(\Omega))$.

A tese (3.3) do Teorema 2 decorre de (3.25) e (3.27).

Como

$$\begin{aligned}
\|u\ \nabla u\| &\leq \|u\|_6 \|\nabla u\|_3 \leq C_\partial \|\nabla u\| \left(\left\|\widetilde{\Delta} u\right\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|^{\frac{1}{2}} + \|\nabla u\|\right) \\
&= C_\partial \left\|\widetilde{\Delta} u\right\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|^{\frac{3}{2}} + C_\partial \|\nabla u\|^2 \leq \left\|\widetilde{\Delta} u\right\| + C_\partial \|\nabla u\|^3 + C_\partial \|\nabla u\|^2
\end{aligned}$$

Portanto

$$\|u\ \nabla u\|^2 \leq C\left(\left\|\widetilde{\Delta} u\right\|^2 + \|\nabla u\|^6 + \|\nabla u\|^4\right).$$

Assim:

$$\int_0^{T'} \|u\ \nabla u\|^2 d\tau \leq C\left(\int_0^{T'} \left\|\widetilde{\Delta} u\right\|^2 d\tau + \int_0^{T'} \|\nabla u\|^6 d\tau + \int_0^{T'} \|\nabla u\|^4 d\tau\right)$$

o que implica que:

$$u\ \nabla u \in L^2\left(0, T'; L^2(\Omega)\right).$$

Desta forma:

$$u_t + u\ \nabla u - \mu \Delta u + f \in L^2\left(0, T'; L^2(\Omega)\right).$$

Se ϕ_m é qualquer função da forma

$$\phi_m(x, t) = \sum_{l=1}^{m} C_l(t)\ a_l(x)$$

com coeficientes contínuos em $(0, T]$, então (3.15) implica

$$\int_0^{T'} \int_\Omega \left(\frac{d}{dt} u_n - \mu \Delta u_n + u_n \nabla u_n - f \right) \phi_m \, dx \, dt = 0 \tag{3.28}$$

para todo $n \geq m$, onde u_n são as aproximações de Galerkin da secção 3.3 e $0 < T' < T$. Ao passarmos o limite, quando $n \to \infty$, obtemos:

$$\int_0^{T'} \int_\Omega \left(\frac{d}{dt} u - \mu \Delta u + u \nabla u - f \right) \phi_m \, dx \, dt = 0 \tag{3.29}$$

e desde que ϕ_m são densas em $L^2(0, T'; J)$ então $\exists \; p(x, t)$ tal que $\nabla p \in L^2(0, T'; L^2(\Omega))$ com

$$\frac{d}{dt} u - \mu \Delta u + u \nabla u - f = -\nabla p.$$

Vamos mostrar agora, a tese (3.4) do Teorema 2 uma vez que u satisfaz (3.21), e

$$F(0) = \|\nabla a\|^2,$$

temos

$$\limsup_{t \to 0} \|\nabla u(t)\| \leq \limsup_{t \to 0} \sqrt{F(t)} = \sqrt{F(0)} = \|\nabla a\|$$

se $u(t) \rightharpoonup a$ em $J_0(\Omega)$ então pela proposição 1.9 $u(t) \longrightarrow a$ fortemente em $J_0(\Omega)$.

Vamos verificar que $u(t) \rightharpoonup a$ em $J_0(\Omega)$. De fato:

Dado a_l um elemente da base, mostraremos que:

$$\int_\Omega \nabla (u(t) - a) \; \nabla a_l dx \longrightarrow 0 \text{ quando } t \to 0^+ \tag{3.30}$$

mas:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla\left(u\left(t\right)-a\right)\ \nabla a_l\ dx &= \int_\Omega \nabla\left(u\left(t\right)\right)\ \nabla a\ dx-\int_\Omega \nabla a\ \nabla a_l\ dx\\
&= \int_\Omega \nabla\left(u\left(t\right)\ \nabla a\right)dx-\int_\Omega \nabla a\ \nabla a_l\ dx\\
&\quad+\int_\Omega \nabla u_n\left(t\right)\ \nabla a_l\ dx-\int_\Omega \nabla u_n\ \nabla a_l\ dx\\
&\quad+\int_\Omega \nabla u_n\left(0\right)\ \nabla a_l\ dx-\int_\Omega \nabla u_n\left(0\right)\ \nabla a_l\ dx\\
\int_\Omega \nabla\left(u\left(t\right)-a\right)\ \nabla a_l\ dx &= \int_\Omega \nabla\left(u\left(t\right)-u_n\left(t\right)\right)\ \nabla a_l\ dx\\
&\quad+\int_\Omega \nabla\left(u_n\left(t\right)-u_n\left(0\right)\right)\ \nabla a_l\ dx\\
&\quad+\int_\Omega \nabla\left(u_n\left(0\right)-a\right)\ \nabla a_l\ dx
\end{aligned}$$

o termo

$$\int_\Omega \nabla\left(u_n\left(t\right)-u_n\left(0\right)\right)\ \nabla a_l\ dx \longrightarrow 0 \text{ quando } t\to 0^+ \text{ uniformemente em } n, \tag{3.31}$$

pois:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla\left(u_n\left(t\right)-u_n\left(0\right)\right)\ \nabla a_l\ dx &= \left|\int_0^t \frac{d}{dt}\left(\nabla u_n\left(\tau\right),\nabla a_l\right)d\tau\right|\\
&= \left|\int_0^t \left(\nabla\frac{d}{dt}u_n\left(\tau\right),\nabla a_l\right)d\tau\right|\\
&= \left|\int_0^t \left(\frac{d}{dt}u_n\left(\tau\right),\Delta a_l\right)d\tau\right|\\
&= \left|\int_0^t \left(-\frac{d}{dt}u_n\left(\tau\right),\widetilde{\Delta} a_l\right)d\tau\right|\\
&\le \left(\int_0^t \left\|\frac{d}{dt}u_n\left(\tau\right)\right\|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T \left\|\widetilde{\Delta} a_l\right\|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Devido a (3.27)

$$\left(\int_0^t \left\|\frac{d}{dt}u_n\left(\tau\right)\right\|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T \left\|\widetilde{\Delta} a_l\right\|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{G\left(t\right)}\left\|\widetilde{\Delta} a_l\right\|\sqrt{T} \longrightarrow 0 \text{ quando } t\to 0^+$$

uniformemente em n.

Para cada $t \in (0, T)$ fixo temos que o termo

$$\int_\Omega \nabla \left(u\left(t\right) - u_n\left(t\right)\right)\ \nabla a_l\ dx \longrightarrow 0 \tag{3.32}$$

quando $n \to \infty$ pois se fizermos $\omega_n = u - u_n$ e $h\left(\tau\right)$ uma função suave, que se anula para

$$\tau \leq \frac{t}{2}$$

e é igual a um para $\tau \geq t$, então

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla\omega_n\left(t\right)\ \nabla a_l dx &= \int_0^t \frac{d}{d\tau}\int_\Omega h\left(\tau\right)\ \nabla\omega_n\ \nabla a_l\ dx\ d\tau \\
&= \int_0^t \int_\Omega \left(h_t\ \nabla\omega_n\ \nabla a_l + h\ \nabla\frac{d}{dt}\omega_n\ \nabla a_l\right) dx\ d\tau \\
&= \int_0^t \int_\Omega \left(h_t\ \nabla\omega_n\ \nabla a_l - h\ \frac{d}{dt}\omega_n\ \nabla a_l\right) dx\ d\tau \\
&= \int_0^t \int_\Omega \left(h_t\ \nabla\omega_n\ \nabla a_l - h\ \frac{d}{dt}\omega_n\ \widetilde{\Delta} a_l\right) dx\ d\tau \longrightarrow 0 \\
\text{quando } n &\to \infty
\end{aligned}$$

pois $\nabla\omega_n$ e

$$\frac{d}{dt}\omega_n$$

convergem para zero fracamente em $L^2\left(0, T; L^2\left(\Omega\right)\right)$.

O termo

$$\int_\Omega \nabla\left(u_n\left(0\right) - a\right)\ \nabla a_l\ dx = 0, \text{ para } n \geq l. \tag{3.33}$$

Isto é, devemos mostrar que:

$$\int_\Omega \nabla u_n\left(0\right)\ \nabla a_l\ dx = \int_\Omega \nabla a\ \nabla a_l\ dx.$$

Como temos:

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= \sum_{k=1}^{n} C_{kn}(t)\ a_k(x) \\ u_n(x,0) &= \sum_{k=1}^{n} C_{kn}(0)\ a_k(x) \end{aligned}$$

implica que

$$\nabla u_n(x,0) = \sum_{k=1}^{n} C_{kn}(0) . \nabla a_k(x)$$

onde

$$C_{kn}(0) = (a, a_k) = \frac{(\nabla a\ \nabla a_k)}{\|\nabla a_k\|^2}.$$

Então

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n} C_{kn}(0)\ \nabla a_k \right) \nabla a_l\, dx &= C_{l\,n}(0)\ (\nabla a_l, \nabla a_l) \\ &= (\nabla a, \nabla a_l) \\ &= \int_\Omega \nabla a\ \nabla a_l\, dx. \end{aligned}$$

Concluimos que (3.31), (3.32) e (3.33) implicam (3.30).

Assim, concluimos a prova do Teorema 2 num domínio limitado.

3.5 Solução em Domínio não Limitado

Nesta secção, supomos Ω um domínio não limitado com fronteira uniformemente de classe C^3. Escolhemos, como no problema estacionário, uma seqüência crescente de subdomínios $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset ...$ onde

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n.$$

Ecolhemos uma seqüência de funções de velocidade inicial a_n no $J_0(\Omega)$, tal que supp $a_n \subset \overline{\Omega}_n$, $\|\nabla a_n\| \leq \|\nabla a\|$ e $\|\nabla a_n - \nabla a\| \to 0$ quando $n \to \infty$, isto é possível devido ao Lema 1.19.

Seja ω_n uma solução do sistema de equações de Navier-Stokes em Ω_n com velocidade inicial igual a a_n em $\Omega_n \times (0, T)$. Todas as ω_n existem num intervalo comum $(0, T)$, com T dependendo somente de $\|\nabla a\|$, μ e da regularidade C^3 da fronteira e além disto ω_n satisfazem as estimativas abaixo:

$$\|\nabla \omega_n(t)\| \leq F(t) \text{ e } \int_0^t \left\|\widetilde{\Delta}\omega_n(t)\right\|^2 d\tau \leq \widetilde{F}(t) \tag{3.34}$$

$$\int_0^t \left\|D_x^2 \omega_n\right\|^2 d\tau \leq \widetilde{F}(t) \tag{3.35}$$

$$\int_0^t \left\|\frac{d}{dt}\omega_n\right\|^2 d\tau \leq G(t). \tag{3.36}$$

Vamos contruir uma seqüência da seguinte forma:

Em Ω_1 consideramos uma subseqüência de $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denotada por $\omega_1^1, \omega_2^1, \omega_3^1, \ldots$ que converge fraca em $L^2(0, T'; H^2(\Omega_1))$ e cujas derivadas

$$\left(\frac{d}{dt}\omega_n^1\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

convergem fraco em $L^2(0, T'; L^2(\Omega_1))$.

Em Ω_2 consideramos uma subseqüência de $(\omega_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ denotada por $\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \ldots$ que converge fraco em $L^2(0, T'; H^2(\Omega_2))$ e com

$$\left(\frac{d}{dt}\omega_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

convergindo fraco em $L^2(0, T'; L^2(\Omega_2))$. Em geral, em Ω_m consideramos uma subseqüência de $(\omega_m^{m-1})_{n\in\mathbb{N}}$ denotada por $\omega_1^m, \omega_2^m, \omega_3^m, \ldots$ que converge fraco em $L^2(0, T'; H^2(\Omega_m))$ e com

$$\left(\frac{d}{dt}\omega_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

convergindo fraco em $L^2(0,T';L^2(\Omega_m))$.

A seqüência $(\omega_1^1,\omega_2^2,\omega_3^3,\omega_4^4...)$ ainda denotada para simplificar a notação por $(\omega_1,\omega_2,\omega_3,...)$ tem a propriedade que para qualquer Ω_l dado e $\forall T'<T$ convergir fracamente para ω em $L^2(0,T';H^2(\Omega_l))$ e

$$\left(\frac{d}{dt}\omega_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

convergir fracamente para

$$\frac{d}{dt}\omega$$

em $L^2(0,T';L^2(\Omega_l))$.

Além disto o limite ω satisfaz

$$\begin{aligned}\|\nabla\omega(t)\|^2 &\leq F(t)\ ;\ \int_0^t\left\|\widetilde{\Delta}\omega(\tau)\right\|^2 d\tau\leq\widetilde{F}(t)\ \text{e}\\ \int_0^t\left\|D_x^2\omega(\tau)\right\|^2 d\tau &\leq \overline{F}(t).\end{aligned}$$

Considere $\phi\in C_0^\infty(\Omega_m)$ com div $\phi=0$, $\phi\in C_0^1(\Omega_m\times[0,T])$ e se ϕ e ω_n são iguais a zero fora de Ω_m em Ω então

$$\int_0^{T'}\int_\Omega\left(\frac{d}{dt}\omega_n-\mu\Delta\omega_n+\omega_n\ \nabla\omega_n-f\right)\phi\ dx\ dt=0 \tag{3.37}$$

$\forall n\geq m$, e $0<T'<T$.

De fato

$$\int_0^{T'}\int_\Omega\left(\frac{d}{dt}\omega_n-\mu\Delta\omega_n+\omega_n\ \nabla\omega_n-f\right)\phi\ dx\ dt=$$

$$\int_0^{T'}\int_{\Omega_m}\left(\frac{d}{dt}\omega_n-\mu\Delta\omega_n+\omega_n\ \nabla\omega_n-f\right)\phi\ dx\ dt= \tag{3.38}$$

$$\int_0^{T'}\int_{\Omega_m}\left(\frac{d}{dt}\omega_m-\mu\Delta\omega_m+\omega_m\ \nabla\omega_m-f\right)\phi\ dx\ dt=0,\ \forall n\geq m.$$

Passando o limite com $n \to \infty$ em (3.38) e lembrando que $\omega_n \to \omega$ em $L^2(0,T';H^2(\Omega_l))$ $\forall \Omega_l$, obtemos que:

$$\int_0^{T'} \int_{\Omega_m} \left(\frac{d}{dt}\omega_n - \mu\Delta\omega_n + \omega_n \nabla\omega_n - f \right) \phi \; dx \; dt$$

converge para

$$\int_0^{T'} \int_{\Omega_m} \left(\frac{d}{dt}\omega - \mu\Delta\omega + \omega \; \nabla\omega - f \right) \phi \; dx \; dt$$

isto é,

$$\int_0^{T'} \int_{\Omega} \left(\frac{d}{dt}\omega - \mu\Delta\omega + \omega \; \nabla\omega - f \right) \phi \; dx \; dt = 0 \; \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega_m)$$

temos, analogamente ao caso estacionário que

$$\frac{d}{dt}\omega + \omega \; \nabla\omega - \mu\Delta\omega - f \in L^2\left(0,T';L^2(\Omega)\right). \tag{3.39}$$

Como o conjunto das funções ϕ é denso em $L^2(0,T';J(\Omega))$, então existe uma função $p(x,t)$ com $\nabla p \in L^2(0,T';L^2(\Omega))$ tal que

$$\frac{d}{dt}\omega - \mu\Delta\omega + \omega \; \nabla\omega - f = -\nabla p.$$

A prova para condição inicial $\|\nabla\omega(t) - \nabla a\| \longrightarrow 0$ quando $t \to 0^+$ para domínio não-limitado é mostrado analogamente como no caso do domínio limitado.

Por (3.24), temos:

$$\|\nabla\omega_n(t)\| \leq \|\nabla\alpha_n\| \leq \|\nabla a\|$$

para cada t fixo, $t \in [0,T']$. Como $\omega_n \longrightarrow \omega$ fracamente em $L^2(0,T;H^2(\Omega))$ então pela proposição 1.8 obtém-se que

$$\|\nabla\omega(t)\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|\nabla\omega_n(t)\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|\nabla a\| = \|\nabla a\|$$

o que implica

$$\limsup_{t\to 0} \|\nabla\omega(t)\| \leq \|\nabla a\|.$$

Para mostrar que $\omega(t) \longrightarrow a$ fortemente em $J_0(\Omega)$, precisamos mostrar que $\omega(t) \rightharpoonup a$ em $J_0(\Omega)$, isto é,

$$\int_\Omega \nabla(\omega(t) - a)\ \nabla\phi\, dx \longrightarrow 0 \text{ quando } t \to 0^+,\ \forall\phi \in D(\Omega).$$

Isto é obtido de forma semelhante ao já feito para o caso de Ω limitado com a diferença que em (3.33) temos:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla(\omega(0) - a)\ \nabla a_l\, dx &= \int_\Omega \nabla(\alpha_n - a)\ \nabla a_l\, dx \\ &\leq \|\nabla(\alpha_n - a)\|\, \|\nabla a_l\| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$.

■

Capítulo 4

Conclusão e Sugestões para Trabalhos Futuros e Referências Bibliograficas

O objetivo deste trabalho foi o de fazer o desenvolvimento do método de Galerkin para as equações de Navier-Stokes em domínios não limitados. Vimos que se o domínio satisfizer uma condição de regularidade especial na fronteira, podemos obter resultados de existência de soluções fracas semelhantes àquelas existentes para domínios limitados.

A dificuldade principal residiu na passagem ao limite das soluções em domínios limitados para obtermos uma solução em domínios não-limitados. Limite este que foi possível de ser realizado devido ao fato das constantes que aparecem no desenvolvimento da solução em domínios limitados serem majorados por uma constante que depende, além dos dados iniciais, somente da uniformidade de classe C^3 da fronteira.

Entre algumas sugestões para trabalhos futuros, temos:

— Desenvolvimento do método de Galerkin para a equação de Navier-

Stokes em domínios não-limitados utilizando outros espaços funcionais como por exemplo os espaços de Nikolski.

— Desenvolver resultados de regularidade para a solução da equação de Navier-Stokes em domínios não-limitados.

— Estudar existência global e decaimento da solução para as equações de Navier-Stokes em domínios não-limitados.

— Considerar o problema de resolver as equações de Navier-Stokes em domínios não-limitados com condições de fronteira não homogêneas.

— Utilizar o método de Galerkin aqui apresentado para resolver equações do tipo Navier-Stokes, isto é, equações deduzidas a partir da Navier-Stokes ou semelhantes a ela.

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R., Sobolev Spaces, Academic Press, N.Y., 1975.

[2] ARIS, R., Vectores, Tensores and the Basic Equations of Fluid Machanics, Prentice-Hall, Canada, 1962.

[3] BARTLE, R. G., The Elements of Integrations, John Wiley & Sons, New York.

[4] BEJAN, A., Convection Heat Transfer, John Wiley & Sons, New York, 1960.

[5] BRÉZIS, H., Análisis Funcional-Teoría y Aplicaciones, Aliança Editorial S.A., Madrid, 1983.

[6] COURANT, R. & JOHN, F., Introduction to Calculus and Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1965.

[7] HEYWOOD, J. G., The Navier-Stokes Equations: On the Existence, Regularity and Decay of Solutions, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 29, number 5, pág 639-681, 1980.

[8] HOUNIE, J., Teoria Elementar das Distribuições, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[9] JOHN, F., Partial Differential Equations, Spinger-Verlag, N.Y.-Heidelberg-Berlin, 1980.

[10] KUELKAMP, N., Introdução à Topologia Geral, Editora da UFSC, Florianópolis, 1988.

[11] LADYZHENSKAYA, O. A., The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, 2ª Edição, Gordon and Breach, New York, 1969.

[12] LIMA, E. L., Um Curso de Análise, Vol. 2, SBM, Rio de Janeiro, 1981.

[13] MEDEIROS, L. A. & MELLO, E. A., Textos de Métodos Matemáticos-A Integral de Lebesgue, Vol. 18, UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.

[14] MEDEIROS, L. A. & MIRANDA, M. M., Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais, UFRJ, Notas de Aula, Rio de Janeiro, 1989.

[15] RAUTMANN, R., On the Convergence Rate of Nonstationary Navier-Stokes Aproximations, Lecture Notes in Mathematics 771, pág 425-449, Spinger Verlog, 1979.

[16] SCHLICHTING, H., Bourdary Layer Theory, McGraw-Hill, New York, 1960.

[17] STRANG, G., Linear Algebra and its Aplications, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1976.

[18] TEMAM, R., Navier-Stokes Equations-Theory and Numerical Analysis, North-Holland Publishing Company, Amisterdam-N.Y.-Oxford, 1979.