

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

O MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS PARA PROBLEMAS DE DIFUSÃO EM
MEIOS COMPOSTOS

por

SOLANGE GALIOTTO SARTOR

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Matemática Aplicada

Porto Alegre
1997

O MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS PARA PROBLEMAS DE
DIFUSÃO EM MEIOS COMPOSTOS

por

Solange Galiotto Sartor

Especialista em Matemática

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação
em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio
Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Matemática Aplicada

Área de Concentração: Engenharia Matemática

Aprovado por:

Profa. Dra. Liliane Basso Barichello (Orientadora)
Prof. Dr. Marco Tullio M. B. de Vilhena (CPGMAp)
Prof. Dr. Horácio Vielmo (PROMEC)
Prof. Dr. Augusto Cardona (IMA - PUCRS)

Profa. Dra. Maria Cristina Varriale

Cordenadora do Programa de Pós-Graduação em
Matemática Aplicada

Porto Alegre, 30 de janeiro de 1997.

16558

DISSERTACAO/MAT
S251M
1997

MAT
1997/210852-2
1997/09/18
8028

Ao meu marido, Henrique e
à minha filha, Natália.

“Falar raramente é conforme com a natureza.

Um vendaval não dura toda a manhã.

Um aguaceiro não dura todo o dia.

Quem os produz ? O céu e a terra.

Se os fenômenos do céu e da terra não são duráveis,

Por que o seriam as ações humanas ? ”

Lao - Tsé .

AGRADECIMENTOS

Agradeço, especialmente, à Profa. Dra. Liliane Basso Barichello, pelo exemplo de trabalho e dedicação, pela sua disponibilidade e, principalmente, por sua amizade.

Ao Prof. Dr. Marco Túllio de Vilhena, que na sua simplicidade, mostrou toda a sua competência.

Ao Prof. Dr. Oclide José Dotto, pelo incentivo.

Às amigas Isolda, Laurete e Vânia, por compartilharem comigo de todos os momentos, muitos deles, nada fáceis.

À Universidade de Caxias do Sul, que possibilitou mais este passo na minha caminhada.

A todos os familiares e amigos, que sempre torceram por mim.

À minha mãe, Enedida, pelo exemplo.

Ao meu pai, Mansueto, onde quer que ele esteja, pela proteção espiritual.

A Deus, por tudo.

RESUMO

Neste trabalho, o método de separação de variáveis é usado para obtenção de uma solução, em forma fechada, de problemas de condução de calor em meios compostos. A idéia básica, aqui apresentada, consiste em resolver o problema definido para cada meio, através do referido método e, usando as condições nas interfaces, acoplar as soluções obtidas. Chega-se, desta forma, à equações integrais ou sistemas de equações integrais, para domínios compostos por mais de dois meios, que envolvem as temperaturas nas interfaces e que podem ter um tratamento via Transformada de Laplace.

Foram abordados problemas unidimensionais em uma placa composta por dois e três meios. Além disso, consideramos um problema bidimensional em uma placa composta por dois meios em contato térmico perfeito.

ABSTRACT

In this work, the separation of variables method is used to obtain a closed form solution for diffusion problems through composite media. The main idea of this approach consists in solving a problem for each medium, by the separation of variables method, and then using the interface conditions to couple all these problems. It will result in integral equations, for the temperatures at the interfaces, that can be treated by Laplace Transform.

One-dimensional problems, in a composite slab of two and three media are presented, as well as a two-dimensional problem.

LISTA DE SÍMBOLOS

- k_i - condutividade térmica na subregião R_i de uma região R .
- α_i - difusividade térmica na subregião R_i da região R .
- h_{i0} - coeficiente de transferência de calor na superfície exterior de R_i .
- h_{ij} - condutância de contato térmico na interface S_{ij} .
- $\frac{\partial}{\partial n_{ij}}$ - derivada normal na interface S_{ij} .
- $\frac{\partial}{\partial n_{i0}}$ - derivada normal no contorno externo S_{i0} .
- T_i - temperatura na subregião R_i .
- \bar{T} - transformada integral da temperatura .
- N - norma .
- $*$ - convolução .
- L - transformada de Laplace .
- L^{-1} - transformada inversa de Laplace .

SUMÁRIO

RESUMO	iii
ABSTRACT	iv
LISTA DE SÍMBOLOS	v
1. INTRODUÇÃO	01
2. A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL PARA UM PROBLEMA DE CONDUÇÃO DO CALOR EM MEIO COMPOSTO	04
2.1 Um Problema Unidimensional	11
2.2 Um Problema Particular	14
3. O MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS PARA PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS DE CONDUÇÃO DE CALOR EM MEIOS COMPOSTOS	18
3.1 Problema Unidimensional de Condução de Calor para Dois Meios em Contato Térmico Perfeito	19
3.2 Problema Unidimensional em Dois Meios: Um Caso Particular	30
3.3 Problema Unidimensional de Condução de Calor para Três meios em Contato Térmico Perfeito	35
4. UM PROBLEMA BIDIMENSIONAL DE CONDUÇÃO DO CALOR EM MEIO COMPOSTO	50
5. CONCLUSÕES	67
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	69

1. INTRODUÇÃO.

A determinação da distribuição de temperatura em regime transiente em um meio composto, consistindo de várias camadas em contato, tem numerosas aplicações em engenharia. Dessa forma, o tratamento de problemas de difusão em meios compostos vem sendo investigado por muitos autores, até mesmo pelo fato de que o tratamento clássico de separação de variáveis não é aplicável de forma direta nesse caso. Alguns dos métodos propostos envolvem técnicas analíticas como transformadas e teoria de resíduos [5], ou ainda funções de Green [20]. No entanto, essas técnicas se tornam restritivas para o tratamento de problemas mais complexos, como o caso de problemas com mais de dois meios. Nesse sentido, uma contribuição significativa, citada na literatura [16], foi inicialmente apresentada por V. Vodicka e posteriormente por Tittle [21]. Essas soluções são baseadas na construção de um novo tipo de relações de ortogonalidade nas quais os conjuntos ortogonais são construídos a partir de autoconjuntos não ortogonais (quase-ortogonais). A partir daí, muitas outras abordagens surgiram, combinando, em geral, técnicas analíticas e numéricas [9,10,11], usando aproximações [16], apresentando restrições para problemas multidimensionais [18], ou restritas a condições de contorno específicas [15]. Outras referências encontradas em Özisik [17] podem ser consideradas representativas na literatura.

Mais recentemente, a técnica da transformada integral [17], que também tem se mostrado muito eficiente no tratamento de outros problemas de difusão, foi aplicada para o tratamento de problemas em meios compostos. Pela aplicação da transformada integral, as derivadas parciais com respeito às variáveis espaciais são removidas e a equação da condução do calor é reduzida a uma equação diferencial ordinária, que é resolvida, sujeita à condição inicial transformada. A solução é obtida quando a transformada da temperatura é invertida pelo uso da fórmula de inversão.

Nesse trabalho, motivados, inicialmente, pelo tratamento do problema de determinação do fluxo de calor em uma residência cujas paredes se constituem de uma composição de diferentes materiais [3], apresentamos uma nova proposta para o tratamento de problemas de difusão em meios compostos, que tem por principal objetivo, utilizar a técnica clássica de separação de variáveis e, conseqüentemente, determinar ao menos, a solução formal para o problema, incluindo de forma especial os problemas bidimensionais. A proposta se baseia na solução de um problema em meio composto pelo acoplamento das soluções de problemas em meios homogêneos através da temperatura na interface. Procuramos analisar, de acordo com a nova proposta, a influência na solução, do número de diferentes meios que compõem o material, com condições de contorno gerais, bem como o caso bidimensional.

Assim sendo, no Cap. 2, apresentamos, inicialmente, a técnica da transformada integral e uma aplicação da mesma a um problema em meio composto unidimensional, por ser essa técnica bastante utilizada e que apresenta resultados satisfatórios, com vistas a uma possível análise comparativa. No Cap. 3, apresentamos a nova proposta aplicada à problemas unidimensionais em dois e três meios, considerando contato térmico perfeito. No Cap. 4, abordamos um problema bidimensional, especificamente motivado pelo cálculo do fluxo de calor em uma residência. Por fim, no Cap. 5, mencionamos algumas conclusões do trabalho desenvolvido, salientando a importância de solucionarmos um certo tipo de equação integral para o uso eficiente dessa técnica.

2. A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL PARA UM PROBLEMA DE CONDUÇÃO DO CALOR EM MEIO COMPOSTO.

A técnica da transformada integral produz uma boa aproximação para a solução de problemas homogêneos, ou não, de condução de calor em meios compostos. O uso desta técnica é apresentado [17] para a solução de problemas de condução do calor, não-homogêneos, dependentes do tempo e tri-dimensionais, com coeficientes constantes numa região composta finita. Para tanto, consideramos a região R limitada pela superfície S_0 e subdividida em subregiões R_i , $i = 1, 2, \dots, M$. Sejam k_i e α_i a condutividade térmica e a difusividade térmica, respectivamente, para a região R_i , que são assumidas como uniformes em cada região mas, diferentes entre regiões consecutivas. Seja h_{i0} o coeficiente de transferência de calor na superfície exterior S_{i0} da região R_i e h_{ij} a condutância de contato térmico nas interfaces S_{ij} entre duas subregiões adjacentes R_i e R_j . Assumimos que h_{i0} e h_{ij} são constantes para cada interface e $h_{ij} = h_{ji}$.

Seja o problema definido por

$$\alpha_i \nabla^2 T_i(\mathbf{r}, t) + \frac{\alpha_i}{k_i} g_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial T_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2-1a)$$

em R_i , $i = 1, 2, \dots, M$ para $t > 0$, sujeito às condições de contorno:

$$k_i^* \frac{\partial T_i(\mathbf{r}, t)}{\partial n_{i0}} + h_{i0} T_i(\mathbf{r}, t) = f_i(\mathbf{r}, t) \quad (2-1b)$$

no contorno externo S_{i0} , $t > 0$;

$$-k_i \frac{\partial T_i(\mathbf{r}, t)}{\partial n_{ij}} = h_{ij} [T_i(\mathbf{r}, t) - T_j(\mathbf{r}, t)] = -k_j \frac{\partial T_j(\mathbf{r}, t)}{\partial n_{ij}} \quad (2-1c)$$

nas interfaces S_{ij} , $i \neq j$, $t > 0$, e com as condições iniciais

$$T_i(r, t) = F_i(\mathbf{r}) , \text{ em } R_i, t = 0, i = 1, 2, \dots, M \quad (2-1d)$$

Na condição de contorno (2-1b) a quantidade com o asterisco. k_i^* , é usado no k_i para distingui-lo do parâmetro de condição de interface ; $\frac{\partial}{\partial n_{ij}}$ denota a derivada normal na interface S_{ij} entre as subregiões R_i e R_j no sentido de R_i para R_j , e $\frac{\partial}{\partial n_{i0}}$ denota a derivada normal no contorno externo S_{i0} da região R_i na direção para fora. As quantidades $F_i(\mathbf{r})$, $g_i(\mathbf{r}, t)$, α_i , k_i , k_i^* , h_{i0} e h_{ij} são consideradas especificadas.

Os passos básicos na solução deste problema pela técnica da transformada integral são:

1) O par de transformadas integrais apropriado é desenvolvido;

2) Pela aplicação da transformada integral, as derivadas parciais com respeito às variáveis espaciais são removidas e a equação da condução do calor é reduzida a uma equação diferencial ordinária;

3) A equação diferencial ordinária resultante é resolvida sujeita à condição inicial transformada. Quando a transformada da temperatura é invertida pela fórmula de inversão, a solução desejada é obtida.

Para tal, adotamos o seguinte procedimento:

1) Tomamos o problema de autovalor obtido por separação de variáveis na versão homogênea do problema (2-1):

$$\nabla^2 \psi_i(\mathbf{r}) + \frac{\lambda^2}{\alpha_i} \psi_i(\mathbf{r}) = 0 \quad , \text{ em } R_i, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (2-2a)$$

$$k_i^* \frac{\partial \psi_i(\mathbf{r})}{\partial n_{i0}} + h_{i0} \psi_i(\mathbf{r}) = 0 \quad , \text{ no contorno externo } S_{i0} \quad (2-2b)$$

$$-k_i \frac{\partial \psi_i(\mathbf{r})}{\partial n_{ij}} = h_{ij} [\psi_i(\mathbf{r}) - \psi_j(\mathbf{r})] = -k_j \frac{\partial \psi_j(\mathbf{r})}{\partial n_{ij}} \quad , \text{ na interface } S_{ij}, \quad i \neq j \quad (2-2c)$$

onde h_{i0} , h_{ij} , k_i^* , $\frac{\partial}{\partial n_{i0}}$ e $\frac{\partial}{\partial n_{ij}}$ são definidos previamente.

As autofunções $\psi_i(\mathbf{r})$, ou mais especificamente $\psi_i(\lambda_n, \mathbf{r})$, do problema de autovalores satisfazem a seguinte condição de ortogonalidade:

$$\sum_{i=1}^M \frac{k_i}{\alpha_i} \int_{R_i} \psi_i(\lambda_n, \mathbf{r}) \psi_i(\lambda_l, \mathbf{r}) dv = \begin{cases} 0 & , n \neq l \\ N(\lambda_n) & , n = l \end{cases} \quad (2-3a)$$

onde o processo de determinação dos autovalores será especificado mais adiante e a norma $N(\lambda_n)$ é definida por

$$N(\lambda_n) = \sum_{j=1}^M \frac{k_j}{\alpha_j} \int_{R_j} [\psi_j(\lambda_n, \mathbf{r})]^2 dv. \quad (2-3b)$$

Num passo seguinte, consideramos a representação das funções $T_i(\mathbf{r}, t)$ em termos das autofunções $\psi_i(\lambda_n, \mathbf{r})$ do problema de autovalores acima, da seguinte forma:

$$T_i(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \psi_i(\lambda_n, \mathbf{r}) \quad , \text{ em } R_i, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (2-4)$$

onde o somatório é feito sobre todo o espectro de autovalores λ_n .

Para determinar os valores de $c_n(t)$, operamos ambos os lados de (2-4) com o operador

$$\frac{k_i}{\alpha_i} \int_{R_i} \psi_i(\lambda_l, \mathbf{r}) dv$$

e somamos a expressão resultante, de $i = 1$ a M , para obter

$$\sum_{i=1}^M \frac{k_i}{\alpha_i} \int_{R_i} \psi_i(\lambda_l, \mathbf{r}) T_i(\mathbf{r}, t) dv = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sum_{i=1}^M \frac{k_i}{\alpha_i} \int_{R_i} \psi_i(\lambda_n, \mathbf{r}) \psi_i(\lambda_l, \mathbf{r}) dv \quad (2-5)$$

Usando a condição de ortogonalidade (2-3), obtemos, então,

$$c_n(t) = \frac{1}{N(\lambda_n)} \sum_{i=1}^M \frac{k_i}{\alpha_i} \int_{R_i} \psi_i(\lambda_n, \mathbf{r}) T_i(\mathbf{r}, t) dv \quad (2-6)$$

Agora, a equação (2-6) é substituída em (2-4) e a expressão resultante é dividida em duas partes para definir a fórmula da inversão e a transformada integral desejada para a função $T_i(\mathbf{r}, t)$, respectivamente, como:

$$T_i(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_i(\lambda_n, \mathbf{r})}{N(\lambda_n)} \bar{T}(\lambda_n, t) \quad (2-7a)$$

$$\text{e } \bar{T}(\lambda_n, t) = \sum_{i=1}^M \frac{k_i}{\alpha_i} \int_{R_i} \psi_i(\lambda_n, \mathbf{r}') T_i(\mathbf{r}', t) dv' \quad (2-7b)$$

2) O próximo passo, é a remoção das derivadas parciais com respeito às variáveis espaciais da equação (2-1a), como descrevemos:

Ambos os lados da equação (2-1a) são operados pelo operador

$$\frac{k_i}{\alpha_i} \int_{R_i} \psi_i(\lambda_n, \mathbf{r}) dv,$$

os resultados somados para $i = 1$ até M e a definição da transformada integral (2-7b) é utilizada. Obtemos, então,

$$\sum_{i=1}^M k_i \int_{R_i} \psi_i(\lambda_n, \mathbf{r}) \nabla^2 T_i(\mathbf{r}, t) dv + \sum_{i=1}^M \int_{R_i} \psi_i(\lambda_n, \mathbf{r}) g_i(\mathbf{r}, t) dv = \frac{d\bar{T}(\lambda_n, t)}{dt} \quad (2-8)$$

O primeiro termo do lado esquerdo pode ser calculado fazendo uso do teorema de Green como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M k_i \int_{R_i} \psi_{i,n}(\mathbf{r}) \nabla^2 T_i dv &= \sum_{i=1}^M k_i \int_{R_i} T_i \nabla^2 \psi_{i,n} dv \\ &+ \sum_{i=1}^M k_i \int_{S_i} \left(\psi_{i,n} \frac{\partial T_i}{\partial n_i} - T_i \frac{\partial \psi_{i,n}}{\partial n_i} \right) dS_i \quad (2-9) \end{aligned}$$

onde $\psi_{i,n}(\mathbf{r}) = \psi_i(\lambda_n, t)$.

Para calcular o primeiro termo do lado direito da equação (2-9), a equação (2-2a) é escrita para a autofunção $\psi_{i,n}$, ambos os lados da equação são multiplicados por $k_i T_i(\mathbf{r}, t)$, integradas sobre a região R_i , as expressões resultantes são somadas sobre $i = 1$ a M , e a definição da transformada integral (2-7b) é usada. Desta forma encontramos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M k_i \int_{R_i} T_i \nabla^2 \psi_{i,n}(\mathbf{r}) dv &= -\lambda^2 \sum_{i=1}^M \frac{k_i}{\alpha_i} \int_{R_i} \psi_{i,n}(\mathbf{r}) T_i(\mathbf{r}, t) dv \\ &= -\lambda^2 \bar{T}(\lambda_n, t) \quad (2-10a) \end{aligned}$$

As integrais de superfície do lado direito da equação (2-9) consistem na integração sobre a superfície externa S_{i0} e integração sobre as interfaces S_{ij} . As integrais sobre as interfaces desaparecem, uma vez que $\int_{S_{ij}}$ e $\int_{S_{ji}}$ tem sinais opostos. Assim, a expressão resultante fica:

$$\sum_{i=1}^M k_i \int_{S_i} \left(\psi_{i,n} \frac{\partial T_i}{\partial n_i} - T_i \frac{\partial \psi_{i,n}}{\partial n_i} \right) dS_i = \sum_{i=1}^M k_i \int_{S_{i0}} \frac{\psi_{i,n}(\mathbf{r})}{k_i^*} f_i(\mathbf{r}, t) dS_i \quad (2-10b)$$

Substituindo as equações (2-10a,b) na equação (2-9),

obtemos

$$\sum_{i=1}^M k_i \int_{R_i} \psi_{i,n}(\mathbf{r}) \nabla^2 T_i(\mathbf{r}, t) dv = -\lambda^2 \bar{T}(\lambda_n, t) + \sum_{i=1}^M k_i \int_{S_{i0}} \frac{\psi_{i,n}(\mathbf{r})}{k_i^*} f_i(\mathbf{r}, t) dS_i \quad (2-11)$$

Quando a equação (2-11) é substituída em (2-8), a equação diferencial ordinária resultante para a transformada da temperatura é obtida:

$$\frac{d\bar{T}(\lambda_n, t)}{dt} + \lambda^2 \bar{T}(\lambda_n, t) = A(\lambda_n, t) \quad (2-12a)$$

onde

$$A(\lambda_n, t) = \sum_{i=1}^M k_i \int_{S_{i0}} \frac{\psi_{i,n}(\mathbf{r})}{k_i^*} f_i(\mathbf{r}, t) dS_i + \sum_{i=1}^M \int_{R_i} \psi_{i,n}(\mathbf{r}) g_i(\mathbf{r}, t) dv. \quad (2-12b)$$

A condição inicial é obtida fazendo a transformada integral da condição (2-1d) pela aplicação da transformada (2-7a). Assim,

$$\bar{T}(\lambda_n, t) = \bar{F}(\lambda_n) \quad , \text{ para } t = 0. \quad (2-12c)$$

3) A solução da equação (2-12a) sujeita à condição inicial (2-12c) fornece a transformada da temperatura como

$$\bar{T}(\lambda_n, t) = e^{-\lambda_n^2 t} [\bar{F}(\lambda_n) + \int_0^t e^{\lambda_n^2 \tau} A(\lambda_n, \tau) d\tau] \quad (2-13)$$

Finalmente, a inversão deste resultado com a fórmula (2-7a) dá a distribuição da temperatura $T_i(\mathbf{r}, t)$ na região R_i como

$$T_i(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 t} \psi_i(\lambda_n, \mathbf{r}) [\bar{F}(\lambda_n) + \int_0^t e^{\lambda_n^2 \tau} A(\lambda_n, \tau) d\tau] \quad (2-14a)$$

em R_i , $i = 1, 2, \dots, M$, onde

$$A(\lambda_n, \tau) = \sum_{j=1}^M k_j \int_{S_{j0}} \frac{\psi_j(\lambda_n, \mathbf{r}')}{k_j^*} f_j(\mathbf{r}', \tau) dS'_j + \sum_{j=1}^M \psi_j(\lambda_n, \mathbf{r}') g_j(\mathbf{r}', \tau) dv' \quad (2-14b)$$

$$\bar{F}(\lambda_n) = \sum_{j=1}^M \frac{k_j}{\alpha_j} \int_{R_j} \psi_j(\lambda_n, \mathbf{r}') F_j(\mathbf{r}') dv' \quad e \quad (2-14c)$$

$$N(\lambda_n) = \sum_{j=1}^M \frac{k_j}{\alpha_j} \int_{R_j} [\psi_j(\lambda_n, \mathbf{r}')]^2 dv' \quad (2-14d)$$

Cabe salientar aqui, que em geral, basicamente dois procedimentos numéricos estão envolvidos nessa técnica: a solução da equação ordinária e o cálculo das respectivas autofunções e autovalores.

2.1 Um Problema Unidimensional.

Para apresentar um caso mais específico, que possa ser mais esclarecedor da técnica, consideramos um problema unidimensional em uma placa, consistindo de M camadas. Neste caso, a equação (2-1) se reduz a :

$$\alpha_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\alpha_i}{k_i} g_i(x, t) = \frac{\partial T_i(x, t)}{\partial t} \quad , x_i < x < x_{i+1}, t > 0, i = 1, 2, \dots, M \quad (2-15a)$$

sujeita às condições de contorno

$$-k_1^* \frac{\partial T_1}{\partial x} + h_1 T_1(x, t) = f_1(t) \quad , x = x_1, t > 0 \quad (2-15b)$$

$$-k_i \frac{\partial T_i}{\partial x} = h_{i+1} [T_i - T_{i+1}] = -k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x} \quad , x = x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, M, t > 0 \quad (2-15c)$$

$$e \quad k_M^* \frac{\partial T_M}{\partial x} + h_{M+1} T_M(x, t) = f_M(t) \quad , x = x_{M+1}, t > 0 \quad (2-15d)$$

e às condições iniciais

$$T_i(x, t) = F_i(x) \quad , t = 0, x_i < x < x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, M \quad (2-15e)$$

O problema de autovalores que se origina da versão homogênea de (2-15) é dado por [17]:

$$\frac{d^2 \psi_{i,n}(x)}{dx^2} + \frac{\beta_n^2}{\alpha_i} \psi_{i,n}(x) = 0 \quad , x_i < x < x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, M \quad (2-16a)$$

sujeito às condições

$$-k_1^* \frac{d\psi_{1,n}(x)}{dx} + h_1 \psi_{1,n}(x) = 0 \quad , x = x_1 \quad (2-16b)$$

$$-k_i \frac{d\psi_{i,n}}{dx} = h_{i+1} [\psi_{i,n} - \psi_{i+1,n}] = -k_{i+1} \frac{d\psi_{i+1,n}}{dx} \quad , x = x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, M \quad (2-16c)$$

$$k_M^* \frac{d\psi_{M,n}(x)}{dx} + h_{M+1} \psi_{M,n}(x) = 0 \quad , x = x_{M+1} \quad (2-16d)$$

As autofunções satisfazem a condição de ortogonalidade:

$$\sum_{i=1}^M \frac{k_i}{\alpha_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi_{i,n}(x) \psi_{l,n}(x) dx = \begin{cases} 0 & , n \neq l \\ N(\beta_n), & n = l \end{cases} \quad (2-17a)$$

onde

$$N(\beta_n) = \sum_{j=1}^M \frac{k_j}{\alpha_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} [\psi_{j,n}(x)]^2 dx. \quad (2-17b)$$

Seguindo o procedimento descrito anteriormente e considerando a situação simplificada das equações (2-15), a solução é obtida, de (2-14) como:

$$T_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N(\beta_n)} e^{-\beta_n^2 t} \psi_{i,n}(x) \left[\bar{F}(\beta_n) + \int_0^t e^{\beta_n^2 \tau} A(\beta_n, \tau) d\tau \right] \quad (2-18a)$$

$$x_i < x < x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, M$$

onde

$$\bar{F}(\beta_n) = \sum_{j=1}^M \frac{k_j}{\alpha_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \psi_{j,n}(x') F_j(x') dx', \quad (2-18b)$$

$$A(\beta_n, \tau) = \sum_{j=1}^M \int_{x_j}^{x_{j+1}} \psi_{j,n}(x') g_j(x', \tau) dx' + \left\{ k_1 \left[\frac{\psi_{1,n}(x')}{k_1^*} \right]_{x'=x_1} f_1(\tau) \right. \\ \left. + k_M \left[\frac{\psi_{M,n}(x')}{k_M^*} \right]_{x'=x_{M+1}} f_M(\tau) \right\} e \quad (2-18c)$$

$$N(\beta_n) = \sum_{j=1}^M \frac{k_j}{\alpha_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} [\psi_{j,n}(x')]^2 dx'. \quad (2-18d)$$

2.2 Um Problema Particular.

Considerando, agora, o problema particular para o caso de dois meios, definido por

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 T_1(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad t > 0 \quad (2-19a)$$

$$\alpha_2 \frac{\partial^2 T_2(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial t}, \quad a < x < b, \quad t > 0, \quad (2-19b)$$

sujeito às condições de contorno

$$T_1(x, t) = 0, \quad x = 0, \quad t > 0 \quad (2-19c)$$

$$T_1(x, t) = T_2(x, t), \quad x = a, \quad t > 0 \quad (2-19d)$$

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}, \quad x = a, \quad t > 0 \quad (2-19e)$$

$$k_2^* \frac{\partial T_2}{\partial x} + h_3 T_2 = 0, \quad x = b, \quad t > 0 \quad (2-19f)$$

e às condições iniciais

$$T_1(x, t) = F_1(x) \quad , 0 \leq x \leq a, t = 0 \quad (2-19g)$$

$$T_2(x, t) = F_2(x) \quad , a \leq x \leq b, t = 0 \quad (2-19h)$$

vemos que sua solução é obtida, diretamente, de (2-18), como

$$T_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N(\beta_n)} e^{-\beta_n^2 t} \psi_1(\beta_n, x) \bar{F}(\beta_n) \quad , 0 < x < a \quad (2-20a)$$

$$e T_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N(\beta_n)} e^{-\beta_n^2 t} \psi_2(\beta_n, x) \bar{F}(\beta_n) \quad , a < x < b \quad (2-20b)$$

onde

$$\bar{F}(\beta_n) = \frac{k_1}{\alpha_1} \int_0^a \psi_1(\beta_n, x') F_1(x') dx' + \frac{k_2}{\alpha_2} \int_a^b \psi_2(\beta_n, x') F_2(x') dx' \quad (2-20c)$$

$$e N(\beta_n) = \frac{k_1}{\alpha_1} \int_0^a [\psi_1(\beta_n, x')]^2 dx' + \frac{k_2}{\alpha_2} \int_a^b [\psi_2(\beta_n, x')]^2 dx'. \quad (2-20d)$$

As autofunções da porção homogênea do problema

(2-19) são dadas por:

$$\psi_1(\beta_n, x) = A_{1n} \operatorname{sen} \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} x + B_{1n} \cos \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} x \quad (2-21a)$$

$$e \psi_2(\beta_n, x) = A_{2n} \operatorname{sen} \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} x + B_{2n} \cos \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} x. \quad (2-21b)$$

Pela condição de contorno em $x = 0$, obtemos:

$$\psi_1(\beta_n, x) = \text{sen} \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} x \quad (2-22a)$$

$$\text{e } \psi_2(\beta_n, x) = A_{2n} \text{sen} \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} x + B_{2n} \cos \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} x. \quad (2-22b)$$

Usando as condições de contorno em $x = a$ e $x = b$,

obtemos as equações dadas. matricialmente, por:

$$\begin{bmatrix} \text{sen} \frac{a\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} & -\text{sen} \frac{a\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} & -\cos \frac{a\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} \\ \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \cos \frac{a\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} & -\cos \frac{a\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} & \text{sen} \frac{a\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} \\ 0 & \frac{h_3 \sqrt{\alpha_2}}{k_2^* \beta_n} \text{sen} \frac{b\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} + \cos \frac{b\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} & \frac{h_3 \sqrt{\alpha_2}}{k_2^* \beta_n} \cos \frac{b\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} - \text{sen} \frac{b\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 \\ A_{2n} \\ B_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2-23)$$

donde

$$A_{2n} = \text{sen} \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} a \text{sen} \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a + \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \cos \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} a \cos \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a \quad (2-24a)$$

$$\text{e } B_{2n} = \text{sen} \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} a \cos \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a - \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \cos \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} a \text{sen} \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a. \quad (2-24b)$$

Os autovalores β_n são obtidos do fato de que o determinante da matriz dos coeficientes na equação matricial (2-23) deve ser nulo. Assim, os autovalores β_n são as raízes positivas da equação transcendental

$$\begin{vmatrix}
 \operatorname{sen} \frac{a\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} & -\operatorname{sen} \frac{a\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} & -\cos \frac{a\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} \\
 \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \cos \frac{a\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} & -\cos \frac{a\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} & \operatorname{sen} \frac{a\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} \\
 0 & \frac{h_3 \sqrt{\alpha_2}}{k_2^* \beta_n} \operatorname{sen} \frac{b\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} + \cos \frac{b\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} & \frac{h_3 \sqrt{\alpha_2}}{k_2^* \beta_n} \cos \frac{b\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} - \operatorname{sen} \frac{b\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}
 \end{vmatrix} = 0$$

(2-24c)

Esse mesmo problema será tratado posteriormente, usando o método de separação de variáveis, segundo a proposta apresentada no capítulo a seguir.

3. O MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS PARA PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS DE CONDUÇÃO DE CALOR EM MEIOS COMPOSTOS.

A proposta que está sendo investigada neste trabalho, para tratamento de problemas de difusão em meios compostos, consiste, basicamente, em resolver, separadamente, o problema definido em cada meio que compõe o domínio e, através das condições nas interfaces, acoplar as soluções obtidas. Conforme será mostrado, podemos chegar, desta forma, a equações integrais que envolvem as temperaturas nas interfaces.

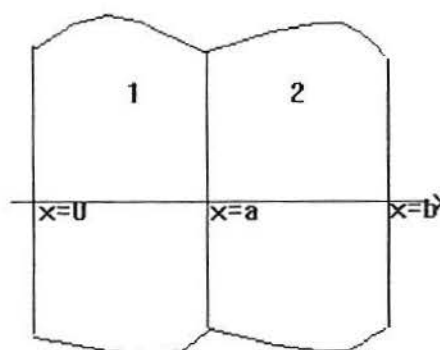
Neste capítulo, a técnica é introduzida via o tratamento de um problema de condução de calor unidimensional, não-estacionário, com condições de contorno do 3º tipo, em uma placa composta por dois meios ($0 \leq x \leq a$, $a \leq x \leq b$), considerando contato térmico perfeito na interface. Além disso, tendo em vista uma possível avaliação comparativa com a técnica apresentada no capítulo 2, examinamos o mesmo caso particular do problema de dois meios já resolvido e descrito pelas equações (2-19). Para finalizar o capítulo, usamos a técnica para um problema de fluxo de calor unidimensional em uma placa composta por três meios ($0 \leq x \leq a$, $a \leq x \leq b$, $b \leq x \leq c$) supondo, também, contato térmico perfeito nas interfaces.

Para mantermos uma consistência de notação, visando

um melhor entendimento e para facilitar uma possível análise comparativa, optamos por utilizar, também a partir deste capítulo, a mesma notação apresentada no capítulo anterior.

3.1 Problema Unidimensional de Condução de Calor para Dois Meios em Contato Térmico Perfeito.

Nesta seção, utilizamos o método de separação de variáveis para um problema de fluxo de calor unidimensional, não-estacionário, em uma placa composta por dois meios ($0 \leq x \leq a$, $a \leq x \leq b$), conforme figura



(Fig.1)

Assumimos contato térmico perfeito na interface e, para maior generalidade, consideramos condições de contorno de 3º tipo nos demais contornos.

Seja o problema definido por

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 T_1(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad t > 0 \quad (3-1a)$$

$$\alpha_2 \frac{\partial^2 T_2(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial t}, \quad a < x < b, \quad t > 0 \quad (3-1b)$$

sujeito às condições de contorno

$$-k_1^* \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} + h_1 T_1(x,t) = g_1(t) \quad , x = 0, t > 0 \quad (3-1c)$$

$$T_1(x,t) = T_2(x,t) \quad , x = a, t > 0 \quad (3-1d)$$

$$k_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} = k_2 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} \quad , x = a, t > 0 \quad (3-1e)$$

$$k_2^* \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} + h_3 T_2(x,t) = g_2(t) \quad , x = b, t > 0 \quad (3-1f)$$

e às condições iniciais

$$T_1(x,t) = F_1(x) \quad , 0 \leq x \leq a, t = 0 \quad (3-1g)$$

$$T_2(x,t) = F_2(x) \quad , a \leq x \leq b, t = 0. \quad (3-1h)$$

As quantidades α_i , k_i , k_i^* e h_i , são consideradas especificadas, seguindo a notação e o significado apresentado no capítulo anterior e assumimos, por uma questão de maior simplicidade, que as funções $F_i(x)$ são tais que $F_1(x)$ é contínua em $(0, a)$, $F_2(x)$ é contínua em (a, b) , $F_1(0) = 0$, $F_2(a) = 0$ e $F_1'(x)$ e $F_2'(x)$ são seccionalmente contínuas em $(0, a)$ e (a, b) , respectivamente, embora condições menos severas pudessem ser consideradas [6,8].

A proposta apresentada nesse trabalho sugere a solução do problema no meio composto, pela decomposição em dois problemas: um para o meio 1 e outro para o meio 2, descritos, respectivamente,

por:

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{\partial T_1}{\partial t} \quad , 0 < x < a, t > 0 \quad (3-2a)$$

$$-k_1^* \frac{\partial T_1}{\partial x} + h_1 T_1 = g_1(t) \quad , x = 0, t > 0 \quad (3-2b)$$

$$T_1(x, t) = A(t) \quad , x = a, t > 0 \quad (3-2c)$$

$$T_1(x, t) = F_1(x) \quad , 0 \leq x \leq a, t = 0 \quad (3-2d)$$

e

$$\alpha_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \frac{\partial T_2}{\partial t} \quad , a < x < b, t > 0 \quad (3-3a)$$

$$T_2(x, t) = A(t) \quad , x = a, t > 0 \quad (3-3b)$$

$$k_2^* \frac{\partial T_2}{\partial x} + h_3 T_2 = g_2(t) \quad , x = b, t > 0 \quad (3-3c)$$

$$T_2(x, t) = F_2(x) \quad , a \leq x \leq b, t = 0 \quad (3-3d)$$

Os problemas resultantes para os meios 1 e 2 tem condições de contorno dependentes de t e, dessa forma, pelo Teorema de Duhamel [17], suas soluções podem ser escritas como

$$T_j(x, t) = F_j(x) + \int_{\tau=0}^t \frac{\partial \phi_j(x, t - \tau, \tau)}{\partial t} d\tau \quad (3-4)$$

onde τ é um parâmetro, $0 < \tau < t$, e $\phi_j(x, t, \tau)$, $j = 1, 2$, são as soluções obtidas para os seguintes problemas auxiliares para o meio 1 e 2, respectivamente

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \quad , 0 < x < a, t > 0 \quad (3-5a)$$

$$-k_1^* \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + h_1 \phi_1 = g_1(\tau) \quad , x = 0, t > 0 \quad (3-5b)$$

$$\phi_1(x, t, \tau) = A(\tau) \quad , x = a, t > 0 \quad (3-5c)$$

$$\phi_1(x, t, \tau) = F_1(x) \quad , 0 \leq x \leq a, t = 0 \quad (3-5d)$$

e

$$\alpha_2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \quad , a < x < b, t > 0 \quad (3-6a)$$

$$\phi_2(x, t, \tau) = A(\tau) \quad , x = a, t > 0 \quad (3-6b)$$

$$k_2^* \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + h_3 \phi_2 = g_2(\tau) \quad , x = b, t > 0 \quad (3-6c)$$

$$\phi_2(x, t, \tau) = F_2(x) \quad , a \leq x \leq b, t = 0. \quad (3-6d)$$

Devido às condições de contorno não-homogêneas, é necessário a decomposição de cada um destes problemas em problemas auxiliares, desde que serão resolvidos por separação de variáveis.

Assim, para o meio 1:

$$\phi_1(x, t, \tau) = \phi_{1s}(x, \tau) + \phi_{1h}(x, t, \tau) \quad (3-7)$$

onde $\phi_{1s}(x, \tau)$ é solução do seguinte problema estacionário obtido do problema (3-5):

$$\frac{d^2 \phi_{1s}}{dx^2} = 0 \quad , 0 < x < a \quad (3-8a)$$

$$-k_1^* \frac{d\phi_{1s}}{dx} + h_1 \phi_{1s} = g_1(\tau) \quad , x = 0 \quad (3-8b)$$

$$\phi_{1s}(x, \tau) = A(\tau) \quad , x = a \quad (3-8c)$$

e $\phi_{1h}(x, t, \tau)$ é solução do seguinte problema homogêneo obtido do problema (3-5):

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 \phi_{1h}}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi_{1h}}{\partial t} \quad , 0 < x < a, t > 0 \quad (3-9a)$$

$$-k_1^* \frac{\partial \phi_{1h}}{\partial x} + h_1 \phi_{1h} = 0 \quad , x = 0, t > 0 \quad (3-9b)$$

$$\phi_{1h}(x, t, \tau) = 0 \quad , x = a, t > 0 \quad (3-9c)$$

$$\phi_{1h}(x, t, \tau) = F_1(x) - \phi_{1s}(x, \tau) \quad , 0 \leq x \leq a, t = 0 \quad (3-9d)$$

Analogamente, para o meio 2, a solução de (3-6) será escrita como:

$$\phi_2(x, t, \tau) = \phi_{2s}(x, \tau) + \phi_{2h}(x, t, \tau) \quad (3-10)$$

sendo $\phi_{2s}(x, \tau)$ e $\phi_{2h}(x, t, \tau)$ as soluções dos problemas estacionário e homogêneo, respectivamente, obtidos de (3-6) e dados por:

$$\frac{d^2 \phi_{2s}}{dx^2} = 0 \quad , a < x < b \quad (3-11a)$$

$$\phi_{2s}(x, \tau) = A(\tau) \quad , x = a \quad (3-11b)$$

$$k_2^* \frac{d\phi_{2s}}{dx} + h_3 \phi_{2s} = g_2(\tau) \quad , x = b \quad (3-11c)$$

e

$$\alpha_2 \frac{\partial^2 \phi_{2h}}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi_{2h}}{\partial t} \quad , a < x < b, t > 0 \quad (3-12a)$$

$$\phi_{2h}(x, t, \tau) = 0 \quad , x = a, t > 0 \quad (3-12b)$$

$$k_2^* \frac{\partial \phi_{2h}}{\partial x} + h_3 \phi_{2h} = 0 \quad , x = b, t > 0 \quad (3-12c)$$

$$\phi_{2h}(x, t, \tau) = F_2(x) - \phi_{2s}(x, \tau) \quad , a \leq x \leq b, t = 0 \quad (3-12d)$$

Resolvendo o problema (3-8), obtemos

$$\phi_{1s}(x, \tau) = c_1^* x + c_2^* \quad (3-13)$$

onde

$$c_1^* = \frac{-g_1(\tau) + h_1 A(\tau)}{k_1^* + h_1 a} \quad (3-14)$$

e

$$c_2^* = \frac{ag_1(\tau) + k_1^* A(\tau)}{k_1^* + h_1 a}. \quad (3-15)$$

Já, a solução do problema (3-9), obtida por separação de variáveis, pode ser escrita como:

$$\phi_{1h}(x, t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_1(\beta_n, x) e^{-\beta_n^2 t} \quad (3-16)$$

onde

$$X_1(\beta_n, x) = \text{sen} \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} (a - x) \quad (3-17)$$

e

$$c_n = \frac{1}{N(\beta_n)} \int_0^a [F_1(x') - \phi_{1s}(x', \tau)] X_1(\beta_n, x') dx' . \quad (3-18)$$

β_n são os autovalores associados às autofunções $X_1(\beta_n, x)$, que satisfazem

$$\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} \cot \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} a = -\frac{h_1}{k_1^*} \quad (3-19)$$

e a norma associada, $N(\beta_n)$, [17] é tal que

$$\frac{1}{N(\beta_n)} = 2 \frac{(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}})^2 + (\frac{h_1}{k_1^*})^2}{a[(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}})^2 + (\frac{h_1}{k_1^*})^2] + \frac{h_1}{k_1^*}} . \quad (3-20)$$

Resolvendo o problema (3-11), obtemos

$$\phi_{2s}(x, \tau) = d_1^* x + d_2^* \quad (3-21)$$

onde

$$d_1^* = \frac{g_2(\tau) - h_3 A(\tau)}{k_2^* + h_3(b-a)} \quad (3-22)$$

e

$$d_2^* = \frac{-ag_2(\tau) + (k_2^* + h_3 b)A(\tau)}{k_2^* + h_3(b-a)} , \quad (3-23)$$

e, novamente, por separação de variáveis, obtemos a solução do problema (3-12) como:

$$\phi_{2h}(x, t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n X_2(\gamma_n, x) e^{-\gamma_n^2 t} \quad (3-24)$$

onde

$$X_2(\gamma_n, x) = \text{sen} \frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_2}} (x - a) \quad (3-25)$$

e

$$d_n = \frac{1}{N(\gamma_n)} \int_a^b [F_2(x') - \phi_{2s}(x', \tau)] X_2(\gamma_n, x') dx'. \quad (3-26)$$

γ_n são os autovalores associados às autofunções $X_2(\gamma_n, x)$, que satisfazem

$$\frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_2}} \cot \frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_2}} (b - a) = -\frac{h_3}{k_2^*} \quad (3-27)$$

e a norma associada, $N(\gamma_n)$, [17] é tal que:

$$\frac{1}{N(\gamma_n)} = 2 \frac{(\frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_2}})^2 + (\frac{h_3}{k_2^*})^2}{(b - a)[(\frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_2}})^2 + (\frac{h_3}{k_2^*})^2] + \frac{h_3}{k_2^*}}. \quad (3-28)$$

Substituindo (3-13) e (3-16) em (3-7) e , utilizando (3-4) para $j = 1$, podemos escrever a solução do problema para o meio 1 como:

$$T_1(x, t) = F_1(x) + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta_n^2) c_n X_1(\beta_n, x) e^{-\beta_n^2 (t-\tau)} d\tau \quad (3-29)$$

e, substituindo (3-21) e (3-24) em (3-10) e, utilizando (3-4) para $j = 2$, podemos escrever a solução do problema para o meio 2 como:

$$T_2(x, t) = F_2(x) + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} (-\gamma_n^2) d_n X_2(\gamma_n, x) e^{-\gamma_n^2(t-\tau)} d\tau, \quad (3-30)$$

já que as condições impostas anteriormente em relação às funções $F_i(x)$, $i = 1, 2$, garantem a diferenciabilidade resultando, ainda, em séries que convergem uniformemente [6,8].

No entanto, as soluções obtidas em (3-29) e (3-30) para os dois meios da placa, não estão completamente definidas, restando, ainda, a determinação de $A(\tau)$. Para isto, utilizamos a condição de interface (3-1e), resultando, daí, a seguinte equação integral:

$$\begin{aligned} \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} [c_{1n} e^{-\beta_n^2(t-\tau)} + c_{2n} e^{-\gamma_n^2(t-\tau)}] A(\tau) d\tau &= k_1 \frac{dF_1}{dx}(a) - k_2 \frac{dF_2}{dx}(a) \\ &+ \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} c_{1n}^* e^{-\beta_n^2(t-\tau)} g_1(\tau) d\tau + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}^* e^{-\gamma_n^2(t-\tau)} g_2(\tau) d\tau \\ &+ \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\beta_n^2(t-\tau)} d\tau + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\gamma_n^2(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (3-31)$$

onde

$$c_{1n} = -\frac{k_1 \beta_n^2}{N(\beta_n)} \frac{dX_1}{dx}(\beta_n, a) \int_0^a \frac{k_1^* + h_1 x'}{k_1^* + h_1 a} X_1(\beta_n, x') dx'$$

$$= -\frac{k_1\beta_n^2}{N(\beta_n)} \frac{dX_1}{dx}(\beta_n, a) \int_0^a q_1(x')X_1(\beta_n, x')dx' \quad (3-32)$$

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{k_2\gamma_n^2}{N(\gamma_n)} \frac{dX_2}{dx}(\gamma_n, a) \int_a^b \frac{k_2^* + h_3(b-x')}{k_2^* + h_3(b-a)} X_2(\gamma_n, x')dx' \\ &= \frac{k_2\gamma_n^2}{N(\gamma_n)} \frac{dX_2}{dx}(\gamma_n, a) \int_a^b q_2(x')X_2(\gamma_n, x')dx' \end{aligned} \quad (3-33)$$

$$\begin{aligned} c_{1n}^* &= \frac{k_1\beta_n^2}{N(\beta_n)} \frac{dX_1}{dx}(\beta_n, a) \int_0^a q_3(x')X_1(\beta_n, x')dx' \\ &= \frac{k_1\beta_n^2}{N(\beta_n)} \frac{dX_1}{dx}(\beta_n, a) \int_0^a \frac{a-x'}{k_1^* + h_1a} X_1(\beta_n, x')dx' \end{aligned} \quad (3-34)$$

$$\begin{aligned} c_{2n}^* &= -\frac{k_2\gamma_n^2}{N(\gamma_n)} \frac{dX_2}{dx}(\gamma_n, a) \int_a^b \frac{x'-a}{k_2^* + h_3(b-a)} X_2(\gamma_n, x')dx' \\ &= -\frac{k_2\gamma_n^2}{N(\gamma_n)} \frac{dX_2}{dx}(\gamma_n, a) \int_a^b q_4(x')X_2(\gamma_n, x')dx' \end{aligned} \quad (3-35)$$

$$A_n = -\frac{k_1\beta_n^2}{N(\beta_n)} \frac{dX_1}{dx}(\beta_n, a) \int_0^a F_1(x')X_1(\beta_n, x')dx' \quad (3-36)$$

$$B_n = \frac{k_2\gamma_n^2}{N(\gamma_n)} \frac{dX_2}{dx}(\gamma_n, a) \int_a^b F_2(x')X_2(\gamma_n, x')dx' \quad (3-37)$$

e $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$ e $q_4(x)$ vem de $\phi_{1s}(x, \tau)$ e $\phi_{2s}(x, \tau)$, quando trabalhamos a equação (3-1e), utilizada para o acoplamento, a fim de isolar os termos que contém $A(\tau)$.

De forma mais compacta e, sob hipótese da convergência das séries envolvidas, reescrevemos (3-31) como:

$$\int_{\tau=0}^t f(t-\tau)A(\tau)d\tau = g(t) \quad (3-38)$$

onde

$$f(t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} [c_{1n}e^{-\beta_n^2(t-\tau)} + c_{2n}e^{-\gamma_n^2(t-\tau)}] \quad (3-39)$$

e

$$\begin{aligned}
g(t) = & k_1 \frac{dF_1}{dx}(a) - k_2 \frac{dF_2}{dx}(a) + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} c_{1n}^* e^{-\beta_n^2(t-\tau)} g_1(\tau) d\tau \\
& + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}^* e^{-\gamma_n^2(t-\tau)} g_2(\tau) d\tau + \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\beta_n^2(t-\tau)} d\tau \\
& + \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\gamma_n^2(t-\tau)} d\tau \tag{3-40}
\end{aligned}$$

em que c_{1n} , c_{2n} , c_{1n}^* , c_{2n}^* , A_n e B_n são definidos como em (3-32) a (3-37), respectivamente.

Cabe observar que obtemos, aqui, a solução formal para o problema, faltando, ainda, uma verificação rigorosa da mesma, embora os passos intermediários tenham sido baseados nos resultados clássicos da literatura [6], como citados no decorrer do texto.

Cumprе ressaltar, ainda, que a solução do problema dada pelas equações (3-29) e (3-30) para os meios 1 e 2, respectivamente, só fica bem definida com a determinação de $A(t)$ na equação (3-38). Neste sentido, sugerimos, apesar da referida equação ser um caso particular da equação de Volterra do 1º tipo [22], o que poderia resultar em procedimento padrão de solução, a utilização da transformada de Laplace, uma vez que, da equação (3-38), temos

$$(f * A)(t) = g(t) \tag{3-41}$$

onde $(f * A)(t)$ denota a convolução de $f(t)$ e $A(t)$.

Assim, se L denota a transformada de Laplace, podemos escrever

$$L\{(f * A)(t)\} = L\{g(t)\}. \quad (3-42)$$

Em seguida, pelo teorema da convolução [4], obtemos

$$L\{f(t)\}L\{A(t)\} = L\{g(t)\}, \quad (3-43)$$

donde

$$L\{A(t)\} = \frac{L\{g(t)\}}{L\{f(t)\}}. \quad (3-44)$$

Por fim, se L^{-1} denota a transformada inversa de Laplace, obtemos

$$A(t) = L^{-1} \left\{ \frac{L\{g(t)\}}{L\{f(t)\}} \right\}. \quad (3-45)$$

onde a inversão deve ser implementada numericamente [2].

3.2 Problema Unidimensional em Dois Meios: Um Caso Particular.

No Capítulo 2, vimos a solução de um problema de condução de calor unidimensional para dois meios em contato térmico perfeito, pela utilização da técnica da transformada integral. Nesta seção, propomos a solução para o mesmo problema, através do método de separação de variáveis. Repetimos, aqui, a sua formulação:

$$\begin{aligned}\alpha_1 \frac{\partial^2 T_1(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial t} \quad , 0 < x < a, t > 0 \\ \alpha_2 \frac{\partial^2 T_2(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial t} \quad , a < x < b, t > 0,\end{aligned}$$

as condições de contorno são:

$$\begin{aligned}T_1(x, t) &= 0 \quad , x = 0, t > 0 \\ T_1(x, t) &= T_2(x, t) \quad , x = a, t > 0 \\ k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} &= k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \quad , x = a, t > 0 \\ k_2^* \frac{\partial T_2}{\partial x} + h_3 T_2 &= 0 \quad , x = b, t > 0\end{aligned}$$

e as condições iniciais são:

$$\begin{aligned}T_1(x, t) &= F_1(x) \quad , 0 \leq x \leq a, t = 0 \\ T_2(x, t) &= F_2(x) \quad , a \leq x \leq b, t = 0\end{aligned}$$

A solução deste problema, por esta técnica, pode ser imediatamente escrita de acordo com as equações (3-29) e (3-30) como

$$T_1(x, t) = F_1(x) + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta_n^2) c_n X_1(\beta_n, x) e^{-\beta_n^2(t-\tau)} d\tau \quad (3-46)$$

para o meio 1 e,

$$T_2(x, t) = F_2(x) + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} (-\gamma_n^2) d_n X_2(\gamma_n, x) e^{-\gamma_n^2(t-\tau)} d\tau \quad (3-47)$$

para o meio 2, e como em (3-18) e (3-26), respectivamente,

$$c_n = \frac{1}{N(\beta_n)} \int_0^a [F_1(x') - \phi_{1s}(x', \tau)] X_1(\beta_n, x') dx' \quad (3-48)$$

e

$$d_n = \frac{1}{N(\gamma_n)} \int_a^b [F_2(x') - \phi_{2s}(x', \tau)] X_2(\gamma_n, x') dx'. \quad (3-49)$$

$\phi_{1s}(x, \tau)$ é obtida de (3-13), (3-14) e (3-15), fazendo k_1^* e $g_1(\tau)$ iguais a zero e h_1 igual a um, sendo, então, escrita como:

$$\phi_{1s}(x, \tau) = \frac{A(\tau)}{a} x \quad (3-50)$$

e $\phi_{2s}(x, \tau)$ é obtida de (3-21), (3-22) e (3-23) como

$$\phi_{2s}(x, \tau) = \frac{A(\tau)[k_2^* + h_3(b-x)]}{k_2^* + h_3(b-a)}, \quad (3-51)$$

desde que $g_2(\tau) = 0$.

Do problema (3-9), considerando $k_1^* = g_1(\tau) = 0$ e $h_1 = 1$, resulta um problema de autovalores, para o qual,

$$X_1(\beta_n, x) = \text{sen} \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} x, \quad (3-52)$$

β_n são os autovalores associados às autofunções $X_1(\beta_n, x)$ tais que:

$$\operatorname{sen} \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} a = 0, \quad (3-53)$$

ainda, a norma associada [17] é tal que

$$\frac{1}{N(\beta_n)} = \frac{2}{a} \quad (3-54)$$

De (3-25), (3-27) e (3-28), temos, diretamente, que

$$X_2(\gamma_n, x) = \operatorname{sen} \frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_2}} (x - a), \quad (3-55)$$

γ_n são os autovalores definidos por

$$\frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_2}} \cot \frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_2}} (b - a) = -\frac{h_3}{k_2^*} \quad (3-56)$$

e, a norma $N(\gamma_n)$ [17] é tal que

$$\frac{1}{N(\gamma_n)} = 2 \frac{(\frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_2}})^2 + (\frac{h_3}{k_2^*})^2}{(b - a)[(\frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_2}})^2 + (\frac{h_3}{k_2^*})^2] + \frac{h_3}{k_2^*}}. \quad (3-57)$$

Para obter o resultado da utilização da condição de interface, fazemos $g_1(\tau) = g_2(\tau) = 0$ em (3-31), resultando, daí, a seguinte equação integral que define $A(\tau)$:

$$\int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} [c_{1n} e^{-\beta_n^2(t-\tau)} + c_{2n} e^{-\gamma_n^2(t-\tau)}] A(\tau) d\tau = k_1 \frac{dF_1}{dx}(a)$$

$$-k_2 \frac{dF_2}{dx}(a) + \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\beta_n^2(t-\tau)} d\tau + \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\gamma_n^2(t-\tau)} d\tau \quad (3-58)$$

onde c_{1n} , c_{2n} , A_n e B_n são como dados em (3-32), (3-33), (3-36) e (3-37), respectivamente, fazendo $k_1^* = 0$ e $h_1 = 1$, resultando

$$c_{1n} = -\frac{k_1\beta_n^2}{N(\beta_n)} \frac{dX_1}{dx}(\beta_n, a) \int_0^a q_1(x')X_1(\beta_n, x')dx' \quad (3-59)$$

$$c_{2n} = \frac{k_2\gamma_n^2}{N(\gamma_n)} \frac{dX_2}{dx}(\gamma_n, a) \int_a^b q_2(x')X_2(\gamma_n, x')dx' \quad (3-60)$$

$$A_n = -\frac{k_1\beta_n^2}{N(\beta_n)} \frac{dX_1}{dx}(\beta_n, a) \int_0^a F_1(x')X_1(\beta_n, x')dx' \quad (3-61)$$

e

$$B_n = \frac{k_2\gamma_n^2}{N(\gamma_n)} \frac{dX_2}{dx}(\gamma_n, a) \int_a^b F_2(x')X_2(\gamma_n, x')dx'. \quad (3-62)$$

De forma mais compacta, podemos escrever a equação como:

$$\int_{\tau=0}^t f(t-\tau)A(\tau)d\tau = g(t) \quad (3-63)$$

onde

$$f(t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} [c_{n1}e^{-\beta_n^2(t-\tau)} + c_{n2}e^{-\gamma_n^2(t-\tau)}] \quad (3-64)$$

e

$$g(t) = k_1 \frac{dF_1}{dx}(a) - k_2 \frac{dF_2}{dx}(a) + \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\beta_n^2(t-\tau)} d\tau + \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\gamma_n^2(t-\tau)} d\tau \quad (3-65)$$

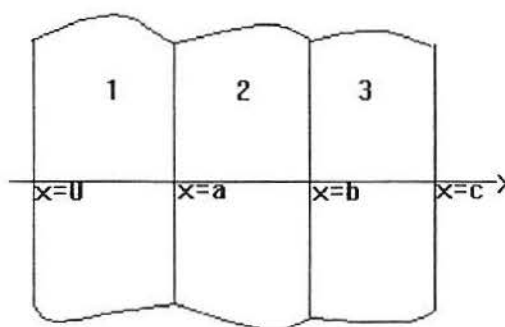
em que c_{1n} , c_{2n} , A_n e B_n são definidos em (3-59) a (3-62).

De fato, a intenção na apresentação desse caso particular era de facilitar algum tipo de análise comparativa com a técnica apresentada no cap. 2. É claro que essa comparação não poderá ser feita por observação direta dos elementos que compõem as soluções, já que são técnicas diferentes. O que pode ser evidenciado, porém, é que no primeiro caso, apresentado no cap.2, a técnica exige procedimentos numéricos em dois estágios e, no segundo caso, na solução da equação integral e, é claro, na determinação dos autovalores, apenas para alguns casos específicos de condições de contorno. Essa necessidade é melhor caracterizada para problemas mais complexos ou multidimensionais.

3.3 Problema Unidimensional de Condução de Calor para Três Meios em Contato Térmico Perfeito.

Propomos, agora, a solução de um problema de determinação da temperatura, unidimensional, em regime transiente, em uma placa composta por três meios ($0 \leq x \leq a$, $a \leq x \leq b$, $b \leq x \leq c$), de acordo com a seguinte figura, utilizando o método de separação de variáveis.

Novamente, resolvemos o problema para cada meio e, através das condições nas interfaces, acoplamos as soluções. Obtemos, desta maneira, um sistema de duas equações integrais envolvendo as temperaturas nas duas interfaces.



(Fig.2)

Seja o problema definido por

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 T_1(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial t} \quad , 0 < x < a, t > 0 \quad (3-66a)$$

$$\alpha_2 \frac{\partial^2 T_2(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial t} \quad , a < x < b, t > 0 \quad (3-66b)$$

$$\alpha_3 \frac{\partial^2 T_3(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial T_3(x, t)}{\partial t} \quad , b < x < c, t > 0 \quad (3-66c)$$

sujeito às condições de contorno

$$-k_1^* \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial x} + h_1 T_1(x, t) = g_1(t) \quad , x = 0, t > 0 \quad (3-66d)$$

$$T_1(x, t) = T_2(x, t) \quad , x = a, t > 0 \quad (3-66e)$$

$$k_1 \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial x} = k_2 \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial x} \quad , x = a, t > 0 \quad (3-66f)$$

$$T_2(x, t) = T_3(x, t) \quad , x = b, t > 0 \quad (3-66g)$$

$$k_2 \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial x} = k_3 \frac{\partial T_3(x, t)}{\partial x} \quad , x = b, t > 0 \quad (3-66h)$$

$$k_3^* \frac{\partial T_3(x, t)}{\partial x} + h_4 T_3(x, t) = g_2(t) \quad , x = c, t > 0 \quad (3-66i)$$

e às condições iniciais

$$T_1(x, t) = F_1(x) \quad , 0 \leq x \leq a, t = 0 \quad (3-66j)$$

$$T_2(x, t) = F_2(x) \quad , a \leq x \leq b, t = 0 \quad (3-66k)$$

$$T_3(x, t) = F_3(x) \quad , b \leq x \leq c, t = 0 \quad (3-66l)$$

Aqui, novamente, as funções $F_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, satisfazem as condições definidas na seção 3.1, e salientamos a utilização de condições de contorno de caráter mais geral.

De acordo com nossa proposta, decompos o problema (3-66) em três problemas, um para cada meio da placa, que são descritos como segue.

No meio 1,

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{\partial T_1}{\partial t} \quad , 0 < x < a, t > 0 \quad (3-67a)$$

$$-k_1^* \frac{\partial T_1}{\partial x} + h_1 T_1 = g_1(t) \quad , x = 0, t > 0 \quad (3-67b)$$

$$T_1(x, t) = A(t) \quad , x = a, t > 0 \quad (3-67c)$$

$$T_1(x, t) = F_1(x) \quad , 0 \leq x \leq a, t = 0, \quad (3-67d)$$

enquanto no meio 2,

$$\alpha_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \frac{\partial T_2}{\partial t} \quad , a < x < b, t > 0 \quad (3-68a)$$

$$T_2(x, t) = A(t) \quad , x = a, t > 0 \quad (3-68b)$$

$$T_2(x, t) = B(t) \quad , x = b, t > 0 \quad (3-68c)$$

$$T_2(x, t) = F_2(x) \quad , a \leq x \leq b, t = 0 \quad (3-68d)$$

e no meio 3

$$\alpha_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} = \frac{\partial T_3}{\partial t} \quad , b < x < c, t > 0 \quad (3-69a)$$

$$T_3(x, t) = B(t) \quad , x = b, t > 0 \quad (3-69b)$$

$$k_3^* \frac{\partial T_3}{\partial x} + h_4 T_3 = g_2(t) \quad , x = c, t > 0 \quad (3-69c)$$

$$T_3(x, t) = F_3(x) \quad , b \leq x \leq c, t = 0. \quad (3-69d)$$

O problema (3-67) é o mesmo que o problema (3-2) da primeira seção deste capítulo. Sua solução é dada em (3-29) e repetida aqui:

$$T_1(x, t) = F_1(x) + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta_n^2) c_n X_1(\beta_n, x) e^{-\beta_n^2(t-\tau)} d\tau \quad (3-70)$$

onde $X_1(\beta_n, x)$, c_n e β_n são dados em (3-20), (3-21) e (3-23), respectivamente.

Os problemas (3-68) e (3-69) tem condições de contorno dependentes de t e, dessa forma, pelo teorema de Duhamel [17], sua solução pode ser escrita como

$$T_j(x, t) = F_j(x) + \int_{\tau=0}^t \frac{\partial \phi_j(x, t - \tau, \tau)}{\partial t} d\tau \quad (3-71)$$

onde τ é um parâmetro, $0 < \tau < t$, e $\phi_j(x, t, \tau)$, $j = 2, 3$, são as

soluções obtidas para os seguintes problemas auxiliares para os meios 2 e 3, respectivamente,

$$\alpha_2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi_2}{\partial t}, \quad , a < x < b, t > 0 \quad (3-72a)$$

$$\phi_2(x, t, \tau) = A(\tau), \quad , x = a, t > 0 \quad (3-72b)$$

$$\phi_2(x, t, \tau) = B(\tau), \quad , x = b, t > 0 \quad (3-72c)$$

$$\phi_2(x, t, \tau) = F_2(x), \quad , a \leq x \leq b, t = 0 \quad (3-72d)$$

e

$$\alpha_3 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi_3}{\partial t}, \quad , b < x < c, t > 0 \quad (3-73a)$$

$$\phi_3(x, t, \tau) = B(\tau), \quad , x = b, t > 0 \quad (3-73b)$$

$$k_3^* \frac{\partial \phi_3}{\partial x} + h_4 \phi_3 = g_2(\tau), \quad , x = c, t > 0 \quad (3-73c)$$

$$\phi_3(x, t, \tau) = F_3(x), \quad , b \leq x \leq c, t = 0 \quad (3-73d)$$

Para aplicação do método de separação de variáveis, devido às condições de contorno não-homogêneas, decomposmos cada um desses problemas, de forma que, para o meio 2

$$\phi_2(x, t, \tau) = \phi_{2s}(x, \tau) + \phi_{2h}(x, t, \tau), \quad (3-74)$$

onde $\phi_{2s}(x, \tau)$ é solução de seguinte problema estacionário obtido do problema (3-72):

$$\frac{d^2 \phi_{2s}}{dx^2} = 0 \quad , a < x < b \quad (3-75a)$$

$$\phi_{2s}(x, \tau) = A(\tau) \quad , x = a \quad (3-75b)$$

$$\phi_{2s}(x, \tau) = B(\tau) \quad , x = b \quad (3-75c)$$

e $\phi_{2h}(x, t, \tau)$ é solução do problema homogêneo obtido a partir de (3-72):

$$\alpha_2 \frac{\partial^2 \phi_{2h}}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi_{2h}}{\partial t} \quad , a < x < b, t > 0 \quad (3-76a)$$

$$\phi_{2h}(x, t, \tau) = 0 \quad , x = a, t > 0 \quad (3-76b)$$

$$\phi_{2h}(x, t, \tau) = 0 \quad , x = b, t > 0 \quad (3-76c)$$

$$\phi_{2h}(x, t, \tau) = F_2(x) - \phi_{2s}(x, \tau) \quad , a \leq x \leq b, t = 0 \quad (3-76d)$$

Analogamente, para o meio 3

$$\phi_3(x, t, \tau) = \phi_{3s}(x, \tau) + \phi_{3h}(x, t, \tau) \quad (3-77)$$

com $\phi_{3s}(x, \tau)$ satisfazendo

$$\frac{d^2 \phi_{3s}}{dx^2} = 0 \quad , b < x < c \quad (3-78a)$$

$$\phi_{3s}(x, \tau) = B(\tau) \quad , x = b \quad (3-78b)$$

$$k_3^* \frac{d\phi_{3s}}{dx} + h_4 \phi_{3s} = g_2(\tau) \quad , x = c \quad (3-78c)$$

e $\phi_{3h}(x, t, \tau)$ tal que

$$\alpha_3 \frac{\partial^2 \phi_{3h}}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi_{3h}}{\partial t} \quad , b < x < c, t > 0 \quad (3-79a)$$

$$\phi_{3h}(x, t, \tau) = 0 \quad , x = b, t > 0 \quad (3-79b)$$

$$k_3^* \frac{\partial \phi_{3h}}{\partial x} + h_4 \phi_{3h} = 0 \quad , x = c, t > 0 \quad (3-79c)$$

$$\phi_{3h}(x, t, \tau) = F_3(x) - \phi_{3s}(x, \tau) \quad , b \leq x \leq c, y = 0. \quad (3-79d)$$

Resolvendo o problema (3-75), obtemos

$$\phi_{2s}(x, \tau) = d_1^* x + d_2^* \quad (3-80)$$

onde

$$d_1^* = \frac{A(\tau) - B(\tau)}{a - b} \quad (3-81)$$

e

$$d_2^* = \frac{aB(\tau) - bA(\tau)}{a - b}. \quad (3-82)$$

Já, resolvendo o problema (3-76) por separação de variáveis, obtemos

$$\phi_{2h}(x, t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n X_2(\gamma_n, x) e^{-\gamma_n^2 t} \quad (3-83)$$

onde

$$X_2(\gamma_n, x) = \text{sen} \frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_2}} (x - a) \quad (3-84)$$

e

$$d_n = \frac{1}{N(\gamma_n)} \int_a^b [F_2(x') - \phi_{2s}(\gamma_n, x')] dx'. \quad (3-85)$$

γ_n são os autovalores associados às autofunções $X_2(\gamma_n, x)$, definidos por

$$\text{sen} \frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_2}} (b - a) = 0 \quad (3-86)$$

e a norma associada $N(\gamma_n)$ [17] é dada por

$$\frac{1}{N(\gamma_n)} = \frac{2}{b - a}. \quad (3-87)$$

No caso do problema (3-78), obtemos

$$\phi_{3s}(x, \tau) = r_1^* x + r_2^* \quad (3-88)$$

onde

$$r_1^* = \frac{g_2(\tau) - h_4 B(\tau)}{k_3^* + h_4(c - b)} \quad (3-89)$$

e

$$r_2^* = \frac{(k_3^* + h_4 c) B(\tau) - b g_2(\tau)}{k_3^* + h_4(c - b)}. \quad (3-90)$$

A solução do problema (3-79) é dada por

$$\phi_{3h}(x, t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n X_3(\theta_n, x) e^{-\theta_n^2 t} \quad (3-91)$$

onde

$$X_3(\theta_n, x) = \operatorname{sen} \frac{\theta_n}{\sqrt{\alpha_3}} (x - b), \quad (3-92)$$

$$r_n = \frac{1}{N(\theta_n)} \int_b^c [F_3(x') - \phi_{3s}(x', \tau)] X_3(\theta_n, x') dx', \quad (3-93)$$

θ_n são os autovalores associadas às autofunções $X_3(\theta_n, x)$ que satisfazem:

$$\frac{\theta_n}{\sqrt{\alpha_3}} \cot \frac{\theta_n}{\sqrt{\alpha_3}} (c - b) = -\frac{h_4}{k_3^*} \quad (3-94)$$

e, $N(\theta_n)$ é a norma associada, [17] dada por:

$$\frac{1}{N(\theta_n)} = 2 \frac{\left(\frac{\theta_n}{\sqrt{\alpha_3}}\right)^2 + \left(\frac{h_4}{k_3^*}\right)^2}{(c - b) \left[\left(\frac{\theta_n}{\sqrt{\alpha_3}}\right)^2 + \left(\frac{h_4}{k_3^*}\right)^2\right] + \frac{h_4}{k_3^*}}. \quad (3-95)$$

Substituindo (3-80) e (3-83) em (3-74) e, utilizando (3-71) para $j = 2$, obtemos a a distribuição de temperatura para o meio 2 como

$$T_2(x, t) = F_2(x) + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} (-\gamma_n^2) d_n X_2(\gamma_n, x) e^{-\gamma_n^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (3-96)$$

Novamente, substituindo (3-88) e (3-91) em (3-77) e, utilizando (3-71) para $j = 3$, obtemos a solução do problema para o meio 3:

$$T_3(x, t) = F_3(x) + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} (-\theta_n^2) r_n X_3(\theta_n, x) e^{-\theta_n^2(t-\tau)} d\tau, \quad (3-98)$$

lembrando as condições impostas sobre as $F_i(x)$, $i = 1, 2, 3$.

As soluções obtidas em (3-70), (3-96) e (3-97) para o problema em cada um dos três meios da placa não estão completamente definidas, restando, ainda, a determinação de $A(\tau)$ e $B(\tau)$. Para isto, utilizamos as condições de interface (3-66f) e (3-66h), resultando daí, as seguintes equações integrais:

$$\begin{aligned} & \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} [c_{n1} e^{-\beta_n^2(t-\tau)} + c_{n2} e^{-\gamma_n^2(t-\tau)}] A(\tau) d\tau + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} c_{n3} e^{-\gamma_n^2(t-\tau)} B(\tau) d\tau = \\ & k_1 \frac{dF_1}{dx}(a) - k_2 \frac{dF_2}{dx}(a) + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} c_{n1}^* e^{-\beta_n^2(t-\tau)} g_1(\tau) d\tau \\ & + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\beta_n^2(t-\tau)} d\tau + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\gamma_n^2(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (3-98)$$

e

$$\begin{aligned} & \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} d_{1n} e^{-\gamma_n^2(t-\tau)} A(\tau) d\tau + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} [d_{2n} e^{-\gamma_n^2(t-\tau)} + d_{3n} e^{-\theta_n^2(t-\tau)}] B(\tau) d\tau = \\ & k_2 \frac{dF_2}{dx}(b) - k_3 \frac{dF_3}{dx}(b) + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} d_{1n}^* e^{-\theta_n^2(t-\tau)} g_2(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$+ \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\gamma_n^2(t-\tau)} d\tau + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\theta_n^2(t-\tau)} d\tau \quad (3-99)$$

onde

$$\begin{aligned} c_{1n} &= -\frac{k_1 \beta_n^2}{N(\beta_n)} \frac{dX_1}{dx}(\beta_n, a) \int_0^a \frac{k_1^* + h_1 x'}{k_1^* + h_1 a} X_1(\beta_n, x') dx' \\ &= -\frac{k_1 \beta_n^2}{N(\beta_n)} \frac{dX_1}{dx}(\beta_n, a) \int_0^a q_1(x') X_1(\beta_n, x') dx' \end{aligned} \quad (3-100)$$

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{k_2 \gamma_n^2}{N(\gamma_n)} \frac{dX_2}{dx}(\gamma_n, a) \int_a^b \frac{x' - b}{a - b} X_2(\gamma_n, x') dx' \\ &= \frac{k_2 \gamma_n^2}{N(\gamma_n)} \frac{dX_2}{dx}(\gamma_n, a) \int_a^b q_5(x') X_2(\gamma_n, x') dx' \end{aligned} \quad (3-101)$$

$$\begin{aligned} c_{3n} &= \frac{k_2 \gamma_n^2}{N(\gamma_n)} \frac{dX_2}{dx}(\gamma_n, a) \int_a^b \frac{a - x'}{a - b} X_2(\gamma_n, x') dx' \\ &= \frac{k_2 \gamma_n^2}{N(\gamma_n)} \frac{dX_2}{dx}(\gamma_n, a) \int_a^b q_6(x') X_2(\gamma_n, x') dx' \end{aligned} \quad (3-102)$$

$$\begin{aligned} c_{1n}^* &= \frac{k_1 \beta_n^2}{N(\beta_n)} \frac{dX_1}{dx}(\beta_n, a) \int_0^a \frac{a - x'}{k_1^* + h_1 a} X_1(\beta_n, x') dx' \\ &= \frac{k_1 \beta_n^2}{N(\beta_n)} \frac{dX_1}{dx}(\beta_n, a) \int_0^a q_3(x') X_1(\beta_n, x') dx' \end{aligned} \quad (3-103)$$

$$A_n = -\frac{k_1}{N(\beta_n)} \frac{dX_1}{dx}(\beta_n, a) \int_0^a F_1(x') X_1(\beta_n, x') dx' \quad (3-104)$$

$$B_n = \frac{k_2}{N(\gamma_n)} \frac{dX_2}{dx}(\gamma_n, a) \int_a^b F_2(x') X_2(\gamma_n, x') dx' \quad (3-105)$$

$$\begin{aligned} d_{1n} &= -\frac{k_2 \gamma_n^2}{N(\gamma_n)} \frac{dX_2}{dx}(\gamma_n, b) \int_a^b \frac{x' - b}{a - b} X_2(\gamma_n, x') dx' \\ &= -\frac{k_2 \gamma_n^2}{N(\gamma_n)} \frac{dX_2}{dx}(\gamma_n, b) \int_a^b q_5(x') X_2(\gamma_n, x') dx' \end{aligned} \quad (3-106)$$

$$\begin{aligned} d_{2n} &= -\frac{k_2 \gamma_n^2}{N(\gamma_n)} \frac{dX_2}{dx}(\gamma_n, b) \int_a^b \frac{a - x'}{a - b} X_2(\gamma_n, x') dx' \\ &= -\frac{k_2 \gamma_n^2}{N(\gamma_n)} \frac{dX_2}{dx}(\gamma_n, b) \int_a^b q_6(x') X_2(\gamma_n, x') dx' \end{aligned} \quad (3-107)$$

$$\begin{aligned} d_{3n} &= \frac{k_3 \theta_n^2}{N(\theta_n)} \frac{dX_3}{dx}(\theta_n, b) \int_b^c \frac{k_3^* + h_4(c - x')}{k_3^* + h_4(c - b)} X_3(\theta_n, x') dx' \\ &= \frac{k_3 \theta_n^2}{N(\theta_n)} \frac{dX_3}{dx}(\theta_n, b) \int_b^c q_7(x') X_3(\theta_n, x') dx' \end{aligned} \quad (3-108)$$

$$\begin{aligned} d_{1n}^* &= -\frac{k_3 \theta_n^2}{N(\theta_n)} \frac{dX_3}{dx}(\theta_n, b) \int_b^c \frac{x' - b}{k_3^* + h_4(c - b)} X_3(\theta_n, x') dx' \\ &= -\frac{k_3 \theta_n^2}{N(\theta_n)} \frac{dX_3}{dx}(\theta_n, b) \int_b^c q_8(x') X_3(\theta_n, x') dx' \end{aligned} \quad (3-109)$$

$$C_n = -\frac{k_2}{N(\gamma_n)} \frac{dX_2}{dx}(\gamma_n, b) \int_a^b F_2(x') X_2(\gamma_n, x') dx' \quad (3-110)$$

$$D_n = \frac{k_3}{N(\theta_n)} \frac{dX_3}{dx}(\theta_n, b) \int_b^c F_3(x') X_3(\theta, x') dx' \quad (3-111)$$

As funções $q_j(x)$, $j = 1, \dots, 8$ são definidas a partir de ϕ_{1s} , ϕ_{2s} e ϕ_{3s} , quando trabalhamos as equações (3-66f) e (3-66h), utilizadas no acoplamento, a fim de isolar os termos com $A(\tau)$ ou $B(\tau)$.

De forma mais compacta, reescrevemos o sistema de duas equações integrais como:

$$\int_{\tau=0}^t f_1(t-\tau) A(\tau) d\tau + \int_{\tau=0}^t f_2(t-\tau) B(\tau) d\tau = u(t) \quad (3-112)$$

e

$$\int_{\tau=0}^t f_3(t-\tau) A(\tau) d\tau + \int_{\tau=0}^t f_4(t-\tau) B(\tau) d\tau = v(t) \quad (3-113)$$

onde

$$f_1(t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} [c_{1n} e^{-\beta_n^2(t-\tau)} + c_{2n} e^{-\gamma_n^2(t-\tau)}], \quad (3-114)$$

$$f_2(t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{3n} e^{-\gamma_n^2(t-\tau)}, \quad (3-115)$$

$$f_3(t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{1n} e^{-\gamma_n^2(t-\tau)}, \quad (3-116)$$

$$f_4(t - \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} [d_{2n} e^{-\gamma_n^2(t-\tau)} + d_{3n} e^{-\theta_n^2(t-\tau)}]. \quad (3-117)$$

$$u(t) = k_1 \frac{dF_1}{dx}(a) - k_2 \frac{dF_2}{dx}(a) + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} c_{1n}^* e^{-\beta_n^2(t-\tau)} g_1(\tau) d\tau + \\ \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\beta_n^2(t-\tau)} d\tau + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\gamma_n^2(t-\tau)} d\tau, \quad (3-118)$$

e

$$v(t) = k_2 \frac{dF_2}{dx}(b) - k_3 \frac{dF_3}{dx}(b) + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} d_{1n}^* e^{-\theta_n^2(t-\tau)} g_2(\tau) d\tau + \\ \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\gamma_n^2(t-\tau)} d\tau + \int_{\tau=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\theta_n^2(t-\tau)} d\tau, \quad (3-119)$$

em que os demais elementos estão definidos em (3-100) a (3-111).

Conforme o sugerido na secção 3.1, deste capítulo, também aqui, podemos escrever (3-112) e (3-113), respectivamente, como

$$(f_1 * A)(t) + (f_2 * B)(t) = u(t) \quad (3-120)$$

e

$$(f_3 * A)(t) + (f_4 * B)(t) = v(t) \quad (3-121)$$

onde * significa a convolução.

Aplicando a transformada de Laplace, que denotamos por L , às equações (3-120) e (3-121) e usando o teorema da convolução [4], obtemos

$$L\{f_1(t)\}L\{A(t)\} + L\{f_2(t)\}L\{B(t)\} = L\{u(t)\} \quad (3-122)$$

e

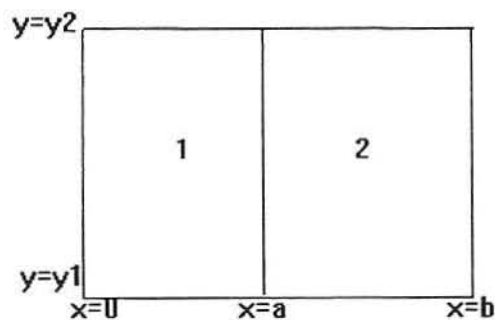
$$L\{f_3(t)\}L\{A(t)\} + L\{f_4(t)\}L\{B(t)\} = L\{v(t)\}. \quad (3-123)$$

Resolvendo o sistema de equações (3-122) e (3-123) para $L\{A(t)\}$ e $L\{B(t)\}$ e aplicando a transformada inversa de Laplace, L^{-1} , obtemos, finalmente, $A(t)$ e $B(t)$, o que completa a solução dada por (3-70), (3-96) e (3-97), para cada meio da placa.

Cabe salientar que a observação das equações integrais resultantes (3-98) e (3-99), bem como a definição dos coeficientes e termos nelas envolvidos, permite uma comparação com aqueles estabelecidos em (3-32) a (3-37). Isso nos possibilita fazer considerações sobre problemas em um domínio composto de M meios, que exigirá a solução de $M - 1$ equações integrais acopladas, através da inversão de $M - 1$ transformadas de Laplace das temperaturas nas interfaces.

4. UM PROBLEMA BIDIMENSIONAL DE CONDUÇÃO DE CALOR EM MEIO COMPOSTO.

Introduzimos, neste capítulo, a utilização do método de separação de variáveis para a resolução de um problema de fluxo de calor bidimensional, não-estacionário em uma placa. O problema abordado tem características específicas, pois sua motivação vem do estudo do fluxo de calor em uma residência cujas paredes seriam constituídas de diferentes materiais [3]. Devido à necessidade de tratamento de problemas de difusão multidimensionais, que, em geral, tem apenas abordagens numéricas, iniciou-se a modelagem com o caso bidimensional. Assim a placa é composta por dois meios, como na figura abaixo, com propriedades térmicas diferentes e, entre eles, vamos supor contato térmico perfeito.



(Fig.3)

Na face esquerda da placa, supomos um fluido com temperatura variável $T_a(t)$ e um coeficiente de convecção constante h_1 e, na face direita, um fluido com temperatura constante T_b e um

coeficiente de convecção constante h_3 . Na face inferior, a temperatura T_c é constante e na face superior, há um fluido com temperatura variável $T_d(t)$ e um coeficiente de convecção constante h_2 .

O problema é definido por:

$$\alpha_1 \left(\frac{\partial^2 T_1(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1(x, y, t)}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial T_1(x, y, t)}{\partial t}, \quad 0 < x < a, y_1 < y < y_2, t > 0 \quad (4-1a)$$

$$\alpha_2 \left(\frac{\partial^2 T_2(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2(x, y, t)}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial T_2(x, y, t)}{\partial t}, \quad a < x < b, y_1 < y < y_2, t > 0 \quad (4-1b)$$

sujeito às condições de contorno em x

$$-k_1^* \frac{\partial T_1}{\partial x} + h_1 T_1 = h_1 T_a(t), \quad x = 0, y_1 \leq y \leq y_2, t > 0 \quad (4-1c)$$

$$k_2^* \frac{\partial T_2}{\partial x} + h_3 T_2 = h_3 T_b, \quad x = b, y_1 \leq y \leq y_2, t > 0 \quad (4-1d)$$

e, às condições de contorno em y

$$T_1(x, y, t) = T_c, \quad 0 \leq x \leq a, y = y_1, t > 0 \quad (4-1e)$$

$$T_2(x, y, t) = T_c, \quad a \leq x \leq b, y = y_1, t > 0 \quad (4-1f)$$

$$k_1^* \frac{\partial T_1}{\partial y} + h_2 T_1 = h_2 T_d(t), \quad 0 \leq x \leq a, y = y_2, t > 0 \quad (4-1g)$$

$$k_2^* \frac{\partial T_2}{\partial y} + h_2 T_2 = h_2 T_d(t), \quad a \leq x \leq b, y = y_2, t > 0 \quad (4-1h)$$

As condições de interface são

$$T_1(x, y, t) = T_2(x, y, t) \quad , x = a, y_1 \leq y \leq y_2, t > 0 \quad (4-1i)$$

$$k_1 \frac{\partial T_1(x, y, t)}{\partial x} = k_2 \frac{\partial T_2(x, y, t)}{\partial x} \quad , x = a, y_1 \leq y \leq y_2, t > 0 \quad (4-1j)$$

e as condições iniciais são

$$T_1(x, y, t) = F_1(x, y) \quad , 0 \leq x \leq a, y_1 \leq y \leq y_2, t = 0 \quad (4-1k)$$

$$T_2(x, y, t) = F_2(x, y) \quad , a \leq x \leq b, y_1 \leq y \leq y_2, t = 0. \quad (4-1l)$$

Conforme a proposta aqui sugerida, decompomos o problema (4-1) em dois problemas: um para o meio 1 e um para o meio 2, descritos, respectivamente, por

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \alpha_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} = \frac{\partial T_1}{\partial t} \quad , 0 < x < a, y_1 < y < y_2, t > 0 \quad (4-2a)$$

$$-k_1^* \frac{\partial T_1}{\partial x} + h_1 T_1 = h_1 T_a(t) \quad , x = 0, y_1 \leq y \leq y_2, t > 0 \quad (4-2b)$$

$$T_1(x, y, t) = A(y, t) \quad , x = a, y_1 \leq y \leq y_2, t > 0 \quad (4-2c)$$

$$T_1(x, y, t) = T_c \quad , 0 \leq x \leq a, y = y_1, t > 0 \quad (4-2d)$$

$$k_1^* \frac{\partial T_1}{\partial y} + h_2 T_1 = h_2 T_d(t) \quad , 0 \leq x \leq a, y = y_2, t > 0 \quad (4-2e)$$

$$T_1(x, y, t) = F_1(x, y), 0 \leq x \leq a, y_1 \leq y \leq y_2, t = 0 \quad (4-2f)$$

e

$$\alpha_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = \frac{\partial T_2}{\partial t} \quad , a < x < b, y_1 < y < y_2, t > 0 \quad (4-3a)$$

$$T_2(x, y, t) = A(y, t) \quad , x = a, y_1 \leq y \leq y_2, t > 0 \quad (4-3b)$$

$$k_2^* \frac{\partial T_2}{\partial x} + h_3 T_2 = h_3 T_b \quad , x = b, y_1 \leq y \leq y_2, t > 0 \quad (4-3c)$$

$$T_2(x, y, t) = T_c \quad , a \leq x \leq b, y = y_1, t > 0 \quad (4-3d)$$

$$k_2^* \frac{\partial T_2}{\partial y} + h_2 T_2 = h_2 T_d(t) \quad , a \leq x \leq b, y = y_2, t > 0 \quad (4-3e)$$

$$T_2(x, y, t) = F_2(x, y), a \leq x \leq b, y_1 \leq y \leq y_2, t = 0 \quad (4-3f)$$

Os problemas resultantes para os meios 1 e 2 tem condições de contorno dependentes de t e, dessa forma, pelo Teorema de Duhamel [17], suas soluções podem ser escritas como

$$T_j(x, y, t) = F_j(x, y) + \int_{\tau=0}^t \frac{\partial \phi_j(x, y, t - \tau, \tau)}{\partial t} d\tau \quad (4-4)$$

onde τ é um parâmetro, $0 < \tau < t$, e $\phi_j(x, y, t, \tau)$, $j = 1, 2$, são as soluções para os seguintes problemas auxiliares para o meio 1 e 2 , respectivamente:

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \alpha_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \quad , 0 < x < a, y_1 < y < y_2, t > 0 \quad (4-5a)$$

$$-k_1^* \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + h_1 \phi_1 = h_1 T_a(\tau) \quad , x = 0, y_1 \leq y \leq y_2, t > 0 \quad (4-5b)$$

$$\phi_1(x, y, t, \tau) = A(y, \tau) \quad , x = a, y_1 \leq y \leq y_2, t > 0 \quad (4-5c)$$

$$\phi_1(x, y, t, \tau) = T_c \quad , 0 \leq x \leq a, y = y_1, t > 0 \quad (4-5d)$$

$$k_1^* \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + h_2 \phi_1 = h_2 T_d(\tau) \quad , 0 \leq x \leq a, y = y_2, t > 0 \quad (4-5e)$$

$$\phi_1(x, y, t, \tau) = F_1(x, y), 0 \leq x \leq a, y_1 \leq y \leq y_2, t = 0 \quad (4-5f)$$

e

$$\alpha_2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} = \frac{\partial \phi_2}{\partial t}, a < x < b, y_1 < y < y_2, t > 0 \quad (4-6a)$$

$$\phi_2(x, y, t, \tau) = A(y, \tau), x = a, y_1 \leq y \leq y_2, t > 0 \quad (4-6b)$$

$$k_2^* \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + h_3 \phi_2 = h_3 T_b, x = b, y_1 \leq y \leq y_2, t > 0 \quad (4-6c)$$

$$\phi_2(x, y, t, \tau) = T_c, a \leq x \leq b, y = y_1, t > 0 \quad (4-6d)$$

$$k_2^* \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + h_2 \phi_2 = h_2 T_d(\tau), a \leq x \leq b, y = y_2, t > 0 \quad (4-6e)$$

$$\phi_2(x, y, t, \tau) = F_2(x, y), a \leq x \leq b, y_1 \leq y \leq y_2, t = 0 \quad (4-6f)$$

Devido às condições não-homogêneas, é necessário a decomposição de cada um destes problemas em problemas auxiliares para aplicação do método de separação de variáveis. Deste modo, para o meio 1,

$$\phi_1(x, y, t, \tau) = \sum_{k=1}^4 \phi_{1sk}(x, y, \tau) + \phi_{1h}(x, y, t, \tau) \quad (4-7)$$

onde $\phi_{1sk}(x, y, \tau)$, $k = 1, 2, 3, 4$, são as soluções dos seguintes problemas estacionários, obtidos do problema (4-5):

$$\frac{\partial^2 \phi_{1s1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{1s1}}{\partial y^2} = 0, 0 < x < a, y_1 < y < y_2 \quad (4-8a)$$

$$-k_1^* \frac{\partial \phi_{1s1}}{\partial x} + h_1 \phi_{1s1} = h_1 T_a(\tau) \quad , x = 0, y_1 \leq y \leq y_2 \quad (4-8b)$$

$$\phi_{1s1}(x, y, \tau) = 0 \quad , x = a, y_1 \leq y \leq y_2 \quad (4-8c)$$

$$\phi_{1s1}(x, y, \tau) = 0 \quad , 0 \leq x \leq a, y = y_1 \quad (4-8d)$$

$$k_1^* \frac{\partial \phi_{1s1}}{\partial y} + h_2 \phi_{1s1} = 0 \quad , 0 \leq x \leq a, y = y_2, \quad (4-8e)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{1s2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{1s2}}{\partial y^2} = 0 \quad , 0 < x < a, y_1 < y < y_2 \quad (4-9a)$$

$$-k_1^* \frac{\partial \phi_{1s2}}{\partial x} + h_1 \phi_{1s2} = 0 \quad , x = 0, y_1 \leq y \leq y_2 \quad (4-9b)$$

$$\phi_{1s2}(x, y, \tau) = A(y, \tau) \quad , x = a, y_1 \leq y \leq y_2 \quad (4-9c)$$

$$\phi_{1s2}(x, y, \tau) = 0 \quad , 0 \leq x \leq a, y = y_1 \quad (4-9d)$$

$$k_1^* \frac{\partial \phi_{1s2}}{\partial y} + h_2 \phi_{1s2} = 0 \quad , 0 \leq x \leq a, y = y_2, \quad (4-9e)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{1s3}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{1s3}}{\partial y^2} = 0 \quad , 0 < x < a, y_1 < y < y_2 \quad (4-10a)$$

$$-k_1^* \frac{\partial \phi_{1s3}}{\partial x} + h_1 \phi_{1s3} = 0 \quad , x = 0, y_1 \leq y \leq y_2 \quad (4-10b)$$

$$\phi_{1s3}(x, y, \tau) = 0 \quad , x = a, y_1 \leq y \leq y_2 \quad (4-10c)$$

$$\phi_{1s3}(x, y, \tau) = T_c \quad , 0 \leq x \leq a, y = y_1 \quad (4-10d)$$

$$k_1^* \frac{\partial \phi_{1s3}}{\partial y} + h_2 \phi_{1s3} = 0 \quad , 0 \leq x \leq a, y = y_2 \quad (4-10e)$$

e

$$\frac{\partial^2 \phi_{1s4}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{1s4}}{\partial y^2} = 0 \quad , 0 < x < a, y_1 < y < y_2 \quad (4-11a)$$

$$-k_1^* \frac{\partial \phi_{1s4}}{\partial x} + h_1 \phi_{1s4} = 0 \quad , x = 0, y_1 \leq y \leq y_2 \quad (4-11b)$$

$$\phi_{1s4}(x, y, \tau) = 0 \quad , x = a, y_1 \leq y \leq y_2 \quad (4-11c)$$

$$\phi_{1s4}(x, y, \tau) = 0 \quad , 0 \leq x \leq a, y = y_1 \quad (4-11d)$$

$$k_1^* \frac{\partial \phi_{1s4}}{\partial y} + h_2 \phi_{1s4} = h_2 T_d(\tau) \quad , 0 \leq x \leq a, y = y_2 \quad (4-11e)$$

e, $\phi_{1h}(x, y, t, \tau)$ é a solução do problema homogêneo associado a (4-5):

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 \phi_{1h}}{\partial x^2} + \alpha_1 \frac{\partial^2 \phi_{1h}}{\partial y^2} = \frac{\partial \phi_{1h}}{\partial t} \quad , 0 < x < a, y_1 < y < y_2, t > 0 \quad (4-12a)$$

$$-k_1^* \frac{\partial \phi_{1h}}{\partial x} + h_1 \phi_{1h} = 0 \quad , x = 0, y_1 \leq y \leq y_2, t > 0 \quad (4-12b)$$

$$\phi_{1h}(x, y, t, \tau) = 0 \quad , x = a, y_1 \leq y \leq y_2, t > 0 \quad (4-12c)$$

$$\phi_{1h}(x, y, t, \tau) = 0 \quad , 0 \leq x \leq a, y = y_1, t > 0 \quad (4-12d)$$

$$k_1^* \frac{\partial \phi_{1h}}{\partial y} + h_2 \phi_{1h} = 0 \quad , 0 \leq x \leq a, y = y_2, t > 0 \quad (4-12e)$$

$$\phi_{1h} = F_1(x, y) - \sum_{k=1}^4 \phi_{1sk}(x, y, \tau) \quad ,$$

$$0 \leq x \leq a, y_1 \leq y \leq y_2, t = 0 \quad (4-12f)$$

Para o meio 2,

$$\phi_2(x, y, t, \tau) = \sum_{k=1}^4 \phi_{2sk}(x, y, \tau) + \phi_{2h}(x, y, t, \tau) \quad (4-13)$$

onde $\phi_{2sk}(x, y, \tau)$, $k = 1, 2, 3, 4$, satisfazem os problemas estacionários associados ao problema (4-6):

$$\frac{\partial^2 \phi_{2s1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{2s1}}{\partial y^2} = 0 \quad , a < x < b, y_1 < y < y_2 \quad (4-14a)$$

$$\phi_{2s1}(x, y, \tau) = A(y, \tau) \quad , x = a, y_1 \leq y \leq y_2 \quad (4-14b)$$

$$k_2^* \frac{\partial \phi_{2s1}}{\partial x} + h_3 \phi_{2s1} = 0 \quad , x = b, y_1 \leq y \leq y_2 \quad (4-14c)$$

$$\phi_{2s1}(x, y, \tau) = 0 \quad , a \leq x \leq b, y = y_1 \quad (4-14d)$$

$$k_2^* \frac{\partial \phi_{2s1}}{\partial y} + h_2 \phi_{2s1} = 0 \quad , a \leq x \leq b, y = y_2 \quad (4-14e)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{2s2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{2s2}}{\partial y^2} = 0 \quad , a < x < b, y_1 < y < y_2 \quad (4-15a)$$

$$\phi_{2s2}(x, y, \tau) = 0 \quad , x = a, y_1 \leq y \leq y_2 \quad (4-15b)$$

$$k_2^* \frac{\partial \phi_{2s2}}{\partial x} + h_3 \phi_{2s2} = h_3 T_b \quad , x = b, y_1 \leq y \leq y_2 \quad (4-15c)$$

$$\phi_{2s2}(x, y, \tau) = 0 \quad , a \leq x \leq b, y = y_1 \quad (4-15d)$$

$$k_2^* \frac{\partial \phi_{2s2}}{\partial y} + h_2 \phi_{2s2} = 0 \quad , a \leq x \leq b, y = y_2 \quad (4-15e)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{2s3}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{2s3}}{\partial y^2} = 0 \quad , a < x < b, y_1 < y < y_2 \quad (4-16a)$$

$$\phi_{2s3}(x, y, \tau) = 0 \quad , x = a, y_1 \leq y \leq y_2 \quad (4-16b)$$

$$k_2^* \frac{\partial \phi_{2s3}}{\partial x} + h_3 \phi_{2s3} = 0 \quad , x = b, y_1 \leq y \leq y_2 \quad (4-16c)$$

$$\phi_{2s3}(x, y, \tau) = T_c \quad , a \leq x \leq b, y = y_1 \quad (4-16d)$$

$$k_2^* \frac{\partial \phi_{2s3}}{\partial y} + h_2 \phi_{2s3} = 0 \quad , a \leq x \leq b, y = y_2 \quad (4-16e)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{2s4}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{2s4}}{\partial y^2} = 0 \quad , a < x < b, y_1 < y < y_2 \quad (4-17a)$$

$$\phi_{2s4}(x, y, \tau) = 0 \quad , x = a, y_1 \leq y \leq y_2 \quad (4-17b)$$

$$k_2^* \frac{\partial \phi_{2s4}}{\partial x} + h_3 \phi_{2s4} = 0 \quad , x = b, y_1 \leq y \leq y_2 \quad (4-17c)$$

$$\phi_{2s4}(x, y, \tau) = 0 \quad , a \leq x \leq b, y = y_1 \quad (4-17d)$$

$$k_2^* \frac{\partial \phi_{2s4}}{\partial y} + h_2 \phi_{2s4} = h_2 T_d(\tau) \quad , a \leq x \leq b, y = y_2 \quad (4-17e)$$

e, $\phi_{2h}(x, y, t, \tau)$ é a solução do seguinte problema homogêneo obtido do problema (4-6):

$$\alpha_2 \frac{\partial^2 \phi_{2h}}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \phi_{2h}}{\partial y^2} = \frac{\partial \phi_{2h}}{\partial t}, a < x < b, y_1 < y < y_2, t > 0 \quad (4-18a)$$

$$\phi_{2h}(x, y, t, \tau) = 0, x = a, y_1 \leq y \leq y_2, t > 0 \quad (4-18b)$$

$$k_2^* \frac{\partial \phi_{2h}}{\partial x} + h_3 \phi_{2h} = 0, x = b, y_1 \leq y \leq y_2, t > 0 \quad (4-18c)$$

$$\phi_{2h}(x, y, t, \tau) = 0, a \leq x \leq b, y = y_1, t > 0 \quad (4-18d)$$

$$k_2^* \frac{\partial \phi_{2h}}{\partial y} + h_2 \phi_{2h} = 0, a \leq x \leq b, y = y_2, t > 0 \quad (4-18e)$$

$$\phi_{2h} = F_2(x, y) - \sum_{k=1}^4 \phi_{2sk}(x, y, \tau),$$

$$a \leq x \leq b, y_1 \leq y \leq y_2, t = 0 \quad (4-18f)$$

As soluções dos problemas estacionários (4-8), (4-9), (4-10) e (4-11), obtidas por separação de variáveis, são, respectivamente,

$$\phi_{1s1}(x, y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{1n}^* X_1(\beta_n, x) Y_1(\beta_n, y) \quad (4-19)$$

$$\phi_{1s2}(x, y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{1n}^* X_2(\beta_n, x) Y_2(\beta_n, y) \quad (4-20)$$

$$\phi_{1s3}(x, y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e_{1n}^* X_3(\gamma_n, x) Y_3(\gamma_n, y) \quad (4-21)$$

$$\phi_{1s4}(x, y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n}^* X_4(\gamma_n, x) Y_4(\gamma_n, y) \quad (4-22)$$

onde

$$c_{1n}^* = \frac{1}{N(\beta_n)[-k_1^* \frac{dX_1}{dx}(\beta_n, 0) + h_1 X_1(\beta_n, 0)]} \int_{y_1}^{y_2} h_1 T_a(\tau) Y_1(\beta_n, y) dy \quad (4-23)$$

$$d_{1n}^* = \frac{1}{N(\beta_n) X_2(\beta_n, a)} \int_{y_1}^{y_2} A(y, \tau) Y_2(\beta_n, y) dy \quad (4-24)$$

$$e_{1n}^* = \frac{1}{N(\gamma_n) Y_3(\gamma_n, y_1)} \int_0^a T_c X_3(\gamma_n, x) dx \quad (4-25)$$

$$f_{1n}^* = \frac{1}{N(\gamma_n)[k_1^* \frac{dY_4}{dy}(\gamma_n, y_2) + h_2 Y_4(\gamma_n, y_2)]} \int_0^a h_2 T_a(\tau) X_4(\gamma_n, x) dx, \quad (4-26)$$

as funções que aparecem nas soluções são:

$$X_1(\beta_n, x) = \operatorname{senh} \beta_n (a - x) \quad (4-27)$$

$$X_2(\beta_n, x) = \operatorname{senh} \beta_n x \quad (4-28)$$

$$X_3(\gamma_n, x) = \text{sen}\gamma_n(a - x) \quad (4-29)$$

$$X_4(\gamma_n, x) = X_3(\gamma_n, x) \quad (4-30)$$

$$Y_1(\beta_n, y) = \text{sen}\beta_n y \quad (4-31)$$

$$Y_2(\beta_n, y) = Y_1(\beta_n, y) \quad (4-32)$$

$$Y_3(\gamma_n, y) = \frac{k_1^* h_2 \text{senh}\gamma_n(y_2 - y) + k_1^* \gamma_n \cosh \gamma_n(y_2 - y)}{(k_1^*)^2 \gamma_n^2 - h_2^2} \quad (4-33)$$

$$\text{e } Y_4(\gamma_n, y) = \text{senh}\gamma_n(y_1 - y), \quad (4-34)$$

os autovalores satisfazem:

$$\beta_n \cot \beta_n(y_2 - y_1) = -\frac{h_2}{k_1^*} \quad (4-35)$$

$$\text{e } \gamma_n \cot \gamma_n a = -\frac{h_1}{k_1^*} \quad (4-36)$$

e as normas associadas são dadas[17] por:

$$\frac{1}{N(\beta_n)} = 2 \frac{\beta_n^2 + (\frac{h_2}{k_1^*})^2}{(y_2 - y_1)[\beta_n^2 + (\frac{h_2}{k_1^*})^2] + \frac{h_2}{k_1^*}} \quad (4-37)$$

$$\text{e } \frac{1}{N(\gamma_n)} = 2 \frac{\gamma_n^2 + (\frac{h_1}{k_1^*})^2}{a[\gamma_n^2 + (\frac{h_1}{k_1^*})^2] + \frac{h_1}{k_1^*}}. \quad (4-38)$$

Resolvendo o problema homogêneo (4-12), também por separação de variáveis,obtemos

$$\phi_{1h}(x, y, t, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} X_3(\gamma_n, x) Y_1(\beta_m, y) e^{-\alpha_1(\beta_m^2 + \gamma_n^2)t} \quad (4-39)$$

onde

$$c_{mn} = \frac{1}{N(\beta_m)N(\gamma_n)} \int_{y_1}^{y_2} \int_0^a [F_1(x', y') - \sum_{k=1}^4 \phi_{1sk}] X_3(\gamma_n, x') Y_1(\beta_m, y') dx' dy' \quad (4-40)$$

As autofunções são definidas como em (4-29) e (4-31), os autovalores definidos por (4-35) e (4-36) e as normas por (4-37) e (4-38).

Agora, resolvendo os problemas estacionários (4-14), (4-15), (4-16) e (4-17), obtemos

$$\phi_{2s1}(x, y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}^* X_5(\theta_n, x) Y_5(\theta_n, y) \quad (4-41)$$

$$\phi_{2s2}(x, y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{2n}^* X_6(\theta_n, x) Y_6(\theta_n, y) \quad (4-42)$$

$$\phi_{2s3}(x, y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e_{2n}^* X_7(\rho_n, x) Y_7(\rho_n, y) \quad (4-43)$$

$$\phi_{2s4}(x, y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}^* X_8(\rho_n, x) Y_8(\rho_n, y) \quad (4-44)$$

onde

$$c_{2n}^* = \frac{1}{N(\theta_n) X_5(\theta_n, a)} \int_{y_1}^{y_2} A(y, \tau) Y_5(\theta_n, y) dy \quad (4-45)$$

$$d_{2n}^* = \frac{1}{N(\theta_n) [k_2^* \frac{dX_6}{dx}(\theta_n, b) + h_3 X_6(\theta_n, b)]} \int_{y_1}^{y_2} h_3 T_b Y_6(\theta_n, y) dy \quad (4-46)$$

$$e_{2n}^* = \frac{1}{N(\rho_n) Y_7(\rho_n, y_1)} \int_a^b T_c X_7(\rho_n, x) dx \quad (4-47)$$

$$f_{2n}^* = \frac{1}{N(\rho_n)[k_2^* \frac{dY_8}{dy}(\rho_n, y_2) + h_2 Y_8(\rho_n, y_2)]} \int_a^b h_2 T_d(\tau) X_8(\rho_n, x) dx, \quad (4-48)$$

as funções envolvidas são:

$$X_5(\theta_n, x) = \frac{k_2^* h_3 \operatorname{senh} \theta_n (b-x) + k_2^* \theta_n \cosh \theta_n (b-x)}{(k_2^*)^2 \theta_n^2 - h_3^2} \quad (4-49)$$

$$X_6(\theta_n, x) = \operatorname{senh} \theta_n (a-x) \quad (4-50)$$

$$X_7(\rho_n, x) = \operatorname{sen} \rho_n x \quad (4-51)$$

$$X_8(\rho_n, x) = X_7(\rho_n, x) \quad (4-52)$$

$$Y_5(\theta_n, y) = \operatorname{sen} \theta_n y \quad (4-53)$$

$$Y_6(\theta_n, y) = Y_5(\theta_n, y) \quad (4-54)$$

$$Y_7(\rho_n, y) = \frac{k_2^* h_3 \operatorname{senh} \rho_n (y_2 - y) + k_2^* \rho_n \cosh \rho_n (y_2 - y)}{(k_2^*)^2 \rho_n^2 - h_3^2} \quad (4-55)$$

$$Y_8(\rho_n, y) = \operatorname{senh} \rho_n (y_1 - y), \quad (4-56)$$

os autovalores satisfazem as equações:

$$\theta_n \cot \theta_n (y_2 - y_1) = -\frac{h_2}{k_2^*} \quad (4-57)$$

$$\text{e } \rho_n \cot \rho_n (b-a) = -\frac{h_3}{k_2^*} \quad (4-58)$$

e as normas são dadas[17] por:

$$\frac{1}{N(\theta_n)} = 2 \frac{\theta_n^2 + (\frac{h_2}{k_2^*})^2}{(y_2 - y_1)[\theta_n^2 + (\frac{h_2}{k_2^*})^2] + \frac{h_2}{k_2^*}} \quad (4-59)$$

$$e \quad \frac{1}{N(\rho_n)} = 2 \frac{\rho_n^2 + \left(\frac{h_3}{k_2^*}\right)^2}{(b-a)[\rho_n^2 + \left(\frac{h_3}{k_2^*}\right)^2] + \frac{h_3}{k_2^*}} \quad (4-60)$$

Já, a solução do problema homogêneo (4-18) pode ser escrita como

$$\phi_{2h}(x, y, t, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn} X_7(\rho_n, x) Y_5(\theta_m, y) e^{-\alpha_2(\theta_m^2 + \rho_n^2)t} \quad (4-61)$$

onde

$$d_{mn} = \frac{1}{N(\theta_m)N(\rho_n)} \int_{y_1}^{y_2} \int_a^b [F_2(x', y') - \sum_{k=1}^4 \phi_{2sk}] X_7(\rho_n, x') Y_5(\theta_m, y') dx' dy'. \quad (4-62)$$

As autofunções são definidas como em (4-51) e (4-53), os autovalores estão definidos por (4-57) e (4-58) e as normas, por (4-59) e (4-60).

Substituindo (4-19) a (4-22) e (4-39) em (4-7) e, utilizando (4-4) para $j = 1$, podemos escrever a solução do problema para o meio 1 como:

$$T_1(x, y, t) = F_1(x, y) + \int_{\tau=0}^t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [-\alpha_1(\beta_m^2 + \gamma_n^2) c_{mn}] X_3(\gamma_n, x) \times Y_1(\beta_m, y) e^{-\alpha_1(\beta_m^2 + \gamma_n^2)(t-\tau)} d\tau \quad (4-63)$$

e, substituindo (4-41) a (4-44) e (4-61) em (4-13) utilizando (4-4) para $j = 2$, podemos escrever a solução do problema para o meio 2 da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
T_2(x, y, t) = & F_2(x, y) + \int_{\tau=0}^t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [-\alpha_2(\theta_m^2 + \rho_n^2) d_{mn}] X_7(\rho_n, x) \\
& \times Y_5(\theta_m, y) e^{-\alpha_2(\theta_m^2 + \rho_n^2)(t-\tau)} d\tau
\end{aligned} \tag{4-64}$$

No entanto, as soluções obtidas em (4-63) e (4-64) não estão completamente determinadas, restando a determinação de $A(y, \tau)$. Para isto, usamos a condição de interface (4-1j), resultando, daí, a seguinte equação integral:

$$\begin{aligned}
& \int_{\tau=0}^t \int_{y_1}^{y_2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} K_{mnl} Y_1(\beta_m, y) e^{-\alpha_1(\beta_m^2 + \gamma_n^2)(t-\tau)} Y_1(\beta_l, y'') + \right. \\
& \left. \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl} Y_5(\theta_m, y) e^{-\alpha_2(\theta_m^2 + \rho_n^2)(t-\tau)} Y_5(\theta_l, y'') \right\} A(y'', \tau) dy'' d\tau = \\
& k_1 \frac{\partial F_1}{\partial x}(a, y) - k_2 \frac{\partial F_2}{\partial x}(a, y) + \int_{\tau=0}^t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-k_1 \alpha_1(\beta_m^2 + \gamma_n^2)}{N(\beta_m) N(\gamma_n)} \\
& \times \int_{y_1}^{y_2} \int_0^a [F_1(x', y') - \sum_{k=1, k \neq 2}^4 \phi_{1sk}(x', y', \tau)] X_3(\gamma_n, x') Y_1(\beta_m, y') dx' dy' \\
& \times \frac{dX_3}{dx}(\gamma_n, a) Y_1(\beta_m, y) e^{-\alpha_1(\beta_m^2 + \gamma_n^2)(t-\tau)} d\tau + \int_{\tau=0}^t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_2 \alpha_2(\theta_m^2 + \rho_n^2)}{N(\theta_m) N(\rho_n)} \\
& \times \int_{y_1}^{y_2} \int_a^b [F_2(x', y') - \sum_{k=2}^4 \phi_{2sk}(x', y', \tau)] X_7(\rho_n, x') Y_5(\theta_m, y') dx' dy' \\
& \times \frac{dX_7}{dx}(\rho_n, a) Y_5(\theta_m, y) e^{-\alpha_2(\theta_m^2 + \rho_n^2)(t-\tau)} d\tau
\end{aligned} \tag{4-65}$$

onde

$$\begin{aligned}
K_{mnl} = & \frac{-k_1 \alpha_1(\beta_m^2 + \gamma_n^2)}{N(\beta_m) N(\gamma_n) N(\beta_l) X_2(\beta_l, a)} \frac{dX_3}{dx}(\gamma_n, a) \int_{y_1}^{y_2} \int_0^a X_2(\beta_l, x') X_3(\gamma_n, x') \\
& \times Y_1(\beta_m, y') Y_1(\beta_l, y') dx' dy'
\end{aligned} \tag{4-66}$$

e

$$Q_{mnl} = \frac{k_2 \alpha_2 (\theta_m^2 + \rho_n^2)}{N(\theta_m) N(\rho_n) N(\theta_l) X_5(\theta_l, a)} \frac{dX_7}{dx}(\rho_n, a) \int_{y_1}^{y_2} \int_a^b X_5(\theta_l, x') X_7(\rho_n, x') \\ \times Y_5(\theta_m, y') Y_5(\theta_l, y') dx' dy' \quad (4-67)$$

ou, de forma mais compacta:

$$\int_{\tau=0}^t \int_{y_1}^{y_2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} f_1(y, t - \tau) Y_1(\beta_l, y'') + \sum_{l=1}^{\infty} f_2(y, t - \tau) Y_5(\theta_l, y'') \right\} \\ \times A(y'', \tau) dy'' d\tau = g(y, t) \quad (4-68)$$

onde

$$f_1(y, t - \tau) = K_{mnl} Y_1(\beta_m, y) e^{-\alpha_1 (\beta_m^2 + \gamma_n^2) (t - \tau)}, \quad (4-69)$$

$$f_2(y, t - \tau) = Q_{mnl} Y_5(\theta_m, y) e^{-\alpha_2 (\theta_m^2 + \rho_n^2) (t - \tau)} \quad (4-70)$$

e

 $g(y, t)$ é o segundo membro da igualdade definida por (4-65).

A equação (4-68) pode ser escrita como:

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{\tau=0}^t G(y, y'', t - \tau) A(y'', \tau) d\tau dy'' = g(y, t) \quad (4-71)$$

ou ainda da forma:

$$\int_{y_1}^{y_2} (G * A) dy'' = g(y, t) \quad (4-72)$$

onde * significa "convolução".

Nesse caso, a análise da convergência das séries envolvidas terá um papel ainda mais importante para garantir o procedimento formal aqui usado. E, então, um tratamento numérico adequado para a equação (4-72) também deverá ser investigado.

Esta metodologia poderá ser estendida para considerar outros tipos de condições de contorno, uma vez que as autofunções foram utilizadas com notação genérica.

5. CONCLUSÕES.

Acreditamos que o presente trabalho realmente evidencia, ainda que formalmente, a possibilidade da aplicação do método de separação de variáveis à problemas de difusão em meios compostos. Além disso, a aplicação do método de separação de variáveis para problemas em vários meios e, até mesmo multidimensionais, está bastante relacionada à solução de uma equação integral que poderá ser tratada com o uso da transformada de Laplace, já que a referida equação envolve uma convolução. Esse deverá ser o aspecto básico de tratamento numérico do procedimento, a menos de casos específicos, onde a determinação dos autovalores também exija soluções numéricas. Isso representa um resultado significativo em relação à outras técnicas apresentadas na literatura e citadas nesse trabalho e que envolvem técnicas numéricas de forma mais significativa.

Não podemos deixar de citar a possível simplificação desta formulação com a transformação das condições não homogêneas nos contornos externos em condições homogêneas, como descrito em Özisik [17]. Além disso, observamos que esta metodologia serve, também, para problemas de difusão de massa em uma mistura binária, bastando, para isso, substituir a temperatura pela concentração e a condutividade térmica pelo coeficiente de difusão.

É claro que, como já foi dito anteriormente, de forma

mais geral, apenas soluções formais foram aqui apresentadas, contando com alguns resultados clássicos. A verificação dessas soluções, seguindo um tratamento mais rigoroso, deverá ser o passo seguinte dessa proposta, juntamente com a determinação de resultados numéricos.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BAKER-JARVIS, J. , INGUVA, R. Heat conduction in heterogeneous materials. Journal of Heat Transfer, v.107, p. 39-43, 1985.
- [2] BARICHELO, L. B. Inversão numérica da transformada de Laplace por polinômios trigonométricos e de Laguerre. Porto Alegre: Curso de Pós-Graduação em Matemática, 1988. Dissertação (Mestrado em Matemática) - UFRGS.
- [3] BEYER , Paulo Otto. Fluxo de calor não - estacionário em meios compostos. Porto Alegre: PROMEC, 1996. Exame de qualificação ao Doutorado - Escola de Engenharia, UFRGS.
- [4] BRONSON, Richard. Equações Diferenciais. Makron Books, SãoPaulo, 1994.
- [5] CARSLAW, H. S., JAEGER, J. C. Conduction of Heat in Solids. Oxford University Press, London, 1959.
- [6] CHURCHILL, Ruel V. Fourier Séries of Boundary Value Problems. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York and London, 1941.
- [7] CRANK, J. The Mathematics of Diffusion. 2nd ed , Clarendon Press, London, 1975.
- [8] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. Análise de Fourier e equações diferenciais parciais. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq , Rio de Janeiro, 1977.
- [9] HAJI-SHEIKN, A. , BECK , J. V. Green's function partitioning in Galerkin-based integral solution of the diffusion equation. Journal of Heat Transfer, v. 112, p. 28-34, 1990.
- [10] HAJI-SHEIKN, A., LAKSHMINARAYANAN, R. Integral solution of diffusion equation: part 2 - boundary conditions of second and third kinds. Journal of Heat Transfer, v. 109, p. 557-562, 1987.
- [11] HAJI-SHEIKN, A. , MASHENA, M. Integral solution of diffusion equation: part 1 - general solution. Journal of Heat Transfer , v. 109, p. 551-556, 1987.

- [12] HUANG, S. C. , CHANG , Y.P. Heat conduction in unsteady , periodic, and steady states in laminated composites. Journal of Heat Transfer, v. 102 , p. 742-748, 1980.
- [13] LARSEN, Poul S. , ARPACI, Vedat S. On the similarity solutions to laminar natural convection boundary layers. International Journal of Heat Mass Transfer, v. 29, p. 340-342, 1986.
- [14] LUIKOV, A. V. Analytical Heat Diffusion Theory. Academic Press, New York, 1968.
- [15] MIKHAILOV , M. D. General solutions of the diffusion equations coupled at boundary conditions. International Journal of Heat Mass Transfer, v. 16, p. 2155-2164, 1973.
- [16] MULHOLLAND, G. P., COBBLE, M. N. Diffusion through composite media. International Journal of Heat Mass Transfer, v. 15, p. 147-160, 1972.
- [17] ÖZISIK, M. Necati. Heat Conduction. John Wiley & Sons , North Carolina State University, Raleigh, 1979.
- [18] SALT, H. Transient conduction in a two-dimensional composite slab-I . Theoretical development of temperature modes. International Journal of Heat Mass Transfer , v. 26, p. 1611-1616, 1983.
- [19] _____. Transient conduction in a two-dimensional composite slab - II. Physical interpretation of temperature modes. International Journal of Heat Mass Transfer, v. 26, p. 1617-1623, 1983.
- [20] TITCHMARSH, E. C . Eigenfunction Expansions Associated with Second - Order Differential Equations. Oxford University Press, London, 1958.
- [21] TITLE, C. W. Boundary value problems in composite media: quasi - orthogonal functions. Journal of Applied Physics , v. 36, p. 1486-1488, 1965.
- [22] TRICOMI, F.G. Integral Equations. University Press, Cambridge, 1957.