Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Curso de Pós-Graduação em Matemática

HIPERSUPERFÍCIES COM CURVATURAS PRINCIPAIS POSITIVAS EM ESPAÇOS HOMOGÊNEOS

por

GIOVANNI DA SILVA NUNES

Porto Alegre, setembro de 1998

A meus pais: Elço Pires Nunes e Marilene da Siva Nunes;

e a meus irmãos: Edison Fernando e Adilson.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meu pai, Elço, que apesar da baixa renda salarial, garantiu meu sustento até que eu ingressasse no mestrado. Suas atitudes, seus conselhos e sua serenidade foram decisivos nas minhas conquistas.

A minha mãe, Marilene, pelo incentivo, pela vibração nos momentos de euforia, pelas palavras de apoio nas horas difíceis, pelas animadas conversas acompanhadas de chimarrão nas noites sem sono e por entender minhas ausências.

Ao "Nando", (Edison Fernando), e ao "Fão", (Adilson), pela constante preocupação com o andamento do trabalho e pela demonstração de carinho e orgulho pela minha pessoa.

Ao meu orientador Jaime Rippol, que não poupou paciência para orientar meu trabalho e desconheceu dias e horários para me ajudar.

Ao professor Leivas que me induziu ao mestrado durante a minha graduação.

Ao professor Mário por sempre acreditar em meu potencial.

Aos meus colegas do CPGMAT, pelo companheirirsmo.

A Izabel pela solicitude.

A Simone, a Déia, ao Ivan, ao Italo e ao Claus pela amizade.

Resumo

Um resultado clássico em Geometria Diferencial, conhecido como teorema de Hadamard, e demonstrado pelo mesmo ([Ha]), estabelece que uma superfície conexa compacta no espaço Euclidiano cujas curvaturas principais são todas positivas é o bordo de um corpo convexo. Em particular, a superfície é difeomorfa a uma esfera. Neste trabalho apresentamos extensões parciais deste teorema para imersões de codimensão arbitrária e para outros espaços ambientes que o Euclidiano conforme feito em [R].

Abstract

A classical result in differential geometry, known as Hadamard's theorem and proved by himself ([Ha]), establishes that a compact connected surface in the Euclidean space whose principal curvatures are everywhere positive is the boundary of a convex body. In particular, the surface is diffeomorphic to a sphere. In this work we present partial extensions of this theorem to immersions of arbitrary codimension and to other spaces than the Euclidean one, as done in [R].

Indice

1. Introdução

Um resultado clássico em Geometria Diferencial, conhecido como teorema de Hadamard, e demonstrado pelo mesmo ([Ha]), estabelece que uma superfície conexa compacta no espaço Euclidiano cujas curvaturas principais são todas positivas é o bordo de um corpo convexo. Em particular, a superfície é difeomorfa a uma esfera. Nosso objetivo é apresentar extensões parciais deste teorema, para hipersuperfícies do $\mathbb{R}^{n+1}$ para imersões de codimensão arbitrária e para outros espaços ambiente não necessariamente Euclidianos conforme feito em [R]. Iniciamos nosso trabalho recordando alguns resultados básicos sobre Grupos de Lie e Variedades Homogêneas, necessários aos resultados subsequentes. A seguir enunciaremos e demonstraremos as extensões parciais do teorema de Hadamard.

2. Preliminares

Vamos definir aqui algumas estruturas que serão bastante usadas em nosso trabalho.

2.1. Grupos de Lie

Um grupo de Lie é um grupo G com uma estrutura diferenciável tal que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \rightarrow & G \\ (x, y) & \mapsto & xy^{-1} \end{array}$$

com $x, y \in G$ é diferenciável.

2.2. Campos Invariantes à Esquerda

Dizemos que um campo diferenciável de vetores X em um grupo de Lie G é invariante à esquerda se $d(L_x)_p X(p) = X(xp)$ para todo $x, p \in G$,onde $L_x : G \to G$ é a translação à esquerda, $L_x(y) = xy$.

2.3. Exponencial em um Grupo de Lie

É fácil ver que o conjunto dos campos invariantes à esquerda $X_L(G)$ formam um espaço vetorial. Além disso, a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & X_L(G) \to \Gamma \\ & X \longmapsto X(e) \end{aligned}$$

onde $\Gamma = T_e G$, é um isomorfismo linear. Portanto podemos associar a cada vetor $x \in T_e G$ o campo invariante à esquerda definido por $X(p) = d(L_p)x$. No que se segue, não faremos distinção entre $T_e G$ e $X_L(G)$.

Definimos:

$$\begin{aligned} \exp. : \quad \Gamma & \to G \\ X & \mapsto \gamma(X, 1) \end{aligned}$$

onde $\gamma(X, t)$ é a curva integral de X tal que $\gamma(X, 0) = e$.

O que precisamos agora é mostrar que exp está bem definida, ou seja , $\gamma(X, t)$

está definida para $t = 1$. De fato, mostraremos que $\gamma(X,t)$ está definida para todo t. A idéia é a seguinte: Sabemos por teorema de campos de vetores que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma(X,t)$ está definida em $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Podemos supor, além disso que este intervalo seja maximal e, por contradição, assumimos que $\varepsilon < +\infty$. Mostraremos a seguir que $\gamma(X,t)\gamma(X,s) = \gamma(X,t+s)$ e então tomando $t_0 = \frac{2}{3}\varepsilon = s_0$ temos $\gamma(X,t)$ definida para $t = \frac{4}{3}\varepsilon > \varepsilon$ o que é absurdo.

Tome $\gamma(X,t)$ a curva integral de X tal que $\gamma(X,0) = e$ e $\gamma(X,t_0) = y_0$, para $t,t_o \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. A mostrar: $y_0^{-1}\gamma(X,t)$ é uma curva integral de X. Denotando $\alpha(t) = y_0^{-1}\gamma(X,t)$, mostraremos que $X(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}\alpha(t)$.

Como X é invariante à esquerda, temos

$$X(\alpha(t)) = X(y_0^{-1}\gamma(X,t)) = d(L_{y_0^{-1}})_{\gamma(X,t)}(X(\gamma(X,t))). \tag{1}$$

Observando que $\alpha(t) = y_0^{-1}\gamma(X,t) = L_{y_0^{-1}}(\gamma(X,t))$ temos

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = d(L_{y_0^{-1}})_{\gamma(X,t)}(\frac{d}{dt}(\gamma(X,t))) = d(L_{y_0^{-1}})_{\gamma(X,t)}(X(\gamma(X,t))). \tag{2}$$

Comparando (1) e (2), temos $X(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}\alpha(t)$ de modo que $\alpha(t)$ é uma curva integral de X. Como $y_0^{-1}\gamma(X,t)$ é a curva integral de X passando por e em $t = t_0$

temos $y_0^{-1}\gamma(X,t) = \gamma(X, t-t_0)$. Fazendo $t = 0$, constatamos que

$$\gamma(X,t_0)^{-1}\gamma(X,0) = \gamma(X, 0-t_0) = \gamma(X,-t_0)$$

de modo que $\gamma(X,t_0)^{-1} = \gamma(X,-t_0)$ já que $\gamma(X,0) = e$.

Fazendo agora $t_0 = -s$ temos

$$\gamma(X,s)\gamma(X,t) = \gamma(X,t+s). \tag{3}$$

Conforme esclarecido anteriormente, segue-se de (3) que γ está definida para qualquer t. Em particular, $\gamma(X,t)$ está definida para $t = 1$, o que prova que exp está bem definida.

Demonstraremos o seguinte lema para uso posterior.

2.3.1. Lema

$$(\exp tX)(\exp sX) = \exp(t+s)X.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}(\exp tX)(\exp sX) &= \gamma(tX,1)\gamma(sX,1) = \\ &= \gamma(X,t)\gamma(X,s) = \\ &= \gamma(X,t+s) = \\ &= \gamma((t+s)X,1) = \\ &= \exp(t+s)X.\end{aligned}$$

Note que na segunda igualdade, usamos o fato de que $\gamma(tX,1) = \gamma(X,t)\ \forall t$, cuja demonstração é a seguinte: fazendo

$$\begin{aligned}\alpha(s) = &\ \ \gamma(tX,s) \\ \beta(s) = &\ \ \gamma(X,ts)\end{aligned}$$

temos $\alpha(0) = \gamma(tX,0) = e$ e $\beta(0) = \gamma(X,0) = e$. Além disto temos

$\alpha'(s) = \gamma'(tX,s) = (tX)(\alpha(s))$ de modo que

$$\alpha'(0) = tX(e) = tX.$$

Por outro lado $\beta'(s) = \gamma'(X, ts)t$,e daí,

$$\beta'(0) = \gamma'(X, 0)t = Xt = tX.$$

Como $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ são curvas integrais de X satisfazendo a mesma condição inicial, temos a igualdade entre as duas curvas.

2.4. Campos de Killing

Dada uma variedade Riemanniana M^n, denotemos por G o grupo de isometrias de M. Sabe-se de [He] que G é um grupo de Lie.

Ao vetor $X \in T_eG$, podemos associar um campo de vetores em M, também denotanto por X, definido por:

$$X(p) = \frac{d}{dt}(\exp tX)(p) \mid_{t=0}; p \in M.$$

X é dito um campo de Killing de M.

2.4.1. Lema

Dado um campo de Killing X em M tem-se

$$X[(\exp tX)(p)] = d(\exp tX)_p(X(p)).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
X((\exp tX)(p)) &= \frac{d}{ds}\left[(\exp sX)[(\exp tX)(p)]\right]_{s=0} = \\
&= \frac{d}{ds}\left[(\exp sX)(\exp tX)(p)\ \right]_{s=0} = \\
&= \frac{d}{ds}\left[\exp(s+t)X(p)\right]_{s=0} = \\
&= \frac{d}{ds}\left[\exp(t+s)X(p)\right]_{s=0} = \\
&= \frac{d}{ds}\left[(\exp tX)[(\exp sX)(p)]\ \right]_{s=0}.
\end{aligned}$$

Por outro lado :

$$d(\exp tX)_p(v) = \frac{d}{ds}\left[(\exp tX)(\alpha(s))\right]_{s=0}$$

onde α é uma curva diferenciável tal que:

$$\begin{aligned}
\alpha(0) = &\quad p \\
\alpha'(0) = &\quad v = X(p).
\end{aligned}$$

Podemos então tomar $\alpha(s) = (\exp sX)(p)$ pois:

$$\begin{aligned}
\alpha\,(0) = &\quad (\exp 0)(p) = & p \\
\alpha'(o) = &\quad \tfrac{d}{ds}\left[(\exp sX)(p)\right]_{s=0} = & X(p)
\end{aligned}$$

Daí $d(\exp tX)_p(v) = \frac{d}{ds}\left[(\exp tX)(\alpha(s))\right]_{s=0} =$

$$= \frac{d}{ds}\left[(\exp tX)[(\exp sX)(p)]\right]_{s=0}$$

o que mostra que $X(\exp tX)(p) = d(\exp tX)_p(X(p))$.

2.4.2. Lema

Seja X um campo de Killing em M. Então:

$$< \nabla_Y X, Z > + < \nabla_Z X, Y > = 0 \tag{4}$$

onde Y e Z são campos de vetores diferenciáveis quaisquer de M e ∇ é a conexão Riemanniana.

Demonstração. Seja q um ponto qualquer de M. Vamos provar (4) em q no caso $X(q) \neq 0$. Nos pontos em que $X = 0$ obtem-se (4) por continuidade. Seja $S \subset M$, uma subvariedade de M passando por q, com $\dim S = n - 1$ e ortogonal a $X(q)$ em q. Seja $\varphi : U \subset R^{n-1} \to S$ uma parametrização local de S em torno de q com $\varphi(x_0) = q$. Definimos $\psi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ por $\psi(x,t) = (\exp tX)(\varphi(x))$, de modo que $\psi(x_0, 0) = q$.

Observe que ψ é uma parametrização local de M em torno de q quando restrita a um aberto de $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, o qual podemos supor sem perda de generalidade ser o próprio $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Definimos campos de vetores X_i em $W = \psi(U \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ $i = 1, ..., n$, pondo:

$$X_i(p) = d\psi_{\psi^{-1}(p)}(e_i), \ i = 1, ..., n \ p \in W.$$

Os seguintes fatos são então válidos:

(a) $\nabla_{X_j} X_i = \nabla_{X_i} X_j$ pois $[X_i, X_j] = 0$;

(b) $X_n = X$ já que $X_n(p) = d\psi_{\psi_p^{-1}}(e_n) = \frac{d}{dt}[\psi(\alpha(t))]_{t=0}$ onde

$$\begin{aligned} \alpha(0) = & \quad (X_0, t) = \psi^{-1}(p) \\ \alpha'(0) = & \quad (0, ..., 0, 1). \end{aligned}$$

Podemos tomar $\alpha(t) = (X_0, t_0 + t)$. Decorre então que

$$\begin{aligned} \psi(\alpha(t)) = & \quad \psi(X_0, t_0 + t) = \\ & = (\exp(t + t_0)X)(\varphi(x_0)) = \\ & = (\exp tX)(\exp t_0 X)(\varphi(x_0)) \end{aligned}$$

o que implica

$$X_n(p) = \frac{d}{dt}[\psi(\alpha(t))]_{t=0} = X(\exp t_0 X)(\varphi(x)) = X(\psi(x, t_0)) = X(p).$$

Observamos então, de (a) e (b) que:

$$\begin{aligned} < \nabla_{X_j} X, X_i > + < \nabla_{Xi} X, X_j > &= < \nabla_{X_j} X_n, X_i > + < \nabla_{Xi} X_n, Xj >= \\ &= < \nabla_{Xn} X_j, X_i > + < \nabla_{Xn} X_i, X_j >= \\ &= X_n(< X_i, X_j >). \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} X_n(< X_i, X_j >) &= X(< X_i, X_j >) = \\ &= \tfrac{d}{dt}[< X_i(\beta(t)), X_j(\beta(t)) >]_{t=0} \end{aligned}$$

onde $\beta(t)$ é uma curva com

$$\begin{aligned} \beta(0) = & \quad p \\ \beta'(0) = & \quad X(p), \end{aligned}$$

p em W. Podemos tomar $\beta(t) = (\exp tX)(p)$. Assim a igualdade fica:

$$X_n(< X_i, X_j >)_p = \frac{d}{dt}[(< X_i((\exp tX)(p)), X_j((\exp tX)(p)) >]_{t=0}.$$

Mas

$$
\begin{aligned}
X_i((\exp tX)(p)) &= X_i(\psi(x,t_0)) = \\
&= d\psi_{(x,t_0)}(e_i) = \\
&= \tfrac{d}{ds}[(\psi\circ\alpha)(s)]_{s=0},
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\alpha(0) = &\quad (x,t_0)\\
\alpha'(0) = &\quad e_i.
\end{aligned}
$$

Podemos tomar $\alpha(s) = (x,t_0)+se_i$. Para $i < n$, vem $(\psi\circ\alpha)(s) = (\exp t_0X)(\varphi(x+se_i))$, de modo que

$$
\begin{aligned}
X_i[(\exp tX)(p)] &= d(\exp tX)_{\varphi(x)}(d\varphi_x(e_i)) = \\
&= d(\exp tX)_{\varphi(x)}(X_i(\varphi(x))).
\end{aligned}
$$

Para $i = n$ vem

$$
\begin{aligned}
(\psi\circ\alpha)(s) &= [\exp(s+t)X](\varphi(x)) = \\
&= (\exp tX)[(\exp sX)(\varphi(x))]
\end{aligned}
$$

o que implica

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}[(\psi \circ \alpha)(s)]_{s=0} &= d(\exp tX)_{\varphi(x)}(X(\varphi(x))) = \\ &= d(\exp tX)_{\varphi(x)}(X_n(\varphi(x))).\end{aligned}$$

Portanto, em qualquer caso, temos:

$$\begin{aligned}X_n(< X_i, X_j >) &= \tfrac{d}{dt} < d(\exp tX)_{\varphi(x)}(X_i(\varphi(x)), d(\exp tX)_{\varphi(x)}(X_j(\varphi(x))) > \\ &= \tfrac{d}{dt} < X_i(\varphi(x)), X_j(\varphi(x)) > \\ &= \tfrac{d}{dt}(\text{constante}) = 0.\end{aligned}$$

Isto prova que a igualdade vale para $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$. O resultado pode ser estendido para campos quaisquer Y, Z por linearidade, o que conclui a demonstração do lema.

2.5. Variedades Homogêneas

Uma Variedade Riemanniana M é dita homogênea se, tomando dois pontos quaisquer p, $q \in M$ existe uma isometria $g : M \to M$ tal que $g(p) = q$.

2.5.1. Proposição:

Seja M^n uma variedade Riemanniana homogênea conexa. Então existe um aberto denso U em M e "n" campos de Killing linearmente independentes sobre

U.

Demonstração. Dado $p_0 \in M$, defina

$$\begin{array}{rccc} \phi: & G & \to & M \\ & g & \mapsto & g(p_0) \end{array}$$

onde G é o grupo de isometrias de M. Seja $H := \{g \in G \mid g(p_0) = p_0\}$. Sabe-se de [He] que H é um subgrupo de Lie compacto e que

$$\frac{G}{H} := \{gh/g \in G\}$$

é uma variedade real analítica de dimensão $\dim G - \dim H$. Notemos que

$$\begin{array}{rl} h: & \frac{G}{H} \to M \\ & gH \mapsto g(p_0) \end{array}$$

está bem definida pois:

$$\begin{array}{rcl} \text{Se } gH & = & g'H, \text{ então } \exists h_1, h_2 \in H \text{ tal que } gh_1 = g'h_2, \text{ logo} \\ g(p_0) & = & g(h_1(p_0)) = (gh_1)(p_0) = (g'h_2)(p_0) = g'(h_2(p_0)) = g'(p_0). \end{array}$$

Decorre dos teoremas 2.5, pág. 204, 3.2 pág.121 e da proposição 4.3 pág. 125 de [He] que h é um difeomorfismo de modo que, em particular, $\dim\left(\frac{G}{H}\right) = \dim M = n$. Podemos induzir em M, através de h, uma estrutura real analítica relativa a qual h é um difeomorfismo real analítico.

Escrevendo $T_eG = T_eH \oplus m$ temos $\dim m = \dim(T_eG - T_eH) = \dim(\frac{G}{H}) = n$.

Tomemos $X_1, ..., X_n \in m$ linearmente independentes. Então cada X_i determina um campo de Killing em M, pondo, como antes, $X_i(p) = \frac{d}{dt}\left[(\exp tX_i)(p)\right]_{t=0}$.

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(p) = \det(< X_i(p), X_j(p) >).$$

Do fato de M ter uma estrutura real analítica na qual $h : \frac{G}{H} \to M$ é um difeomorfismo real analítico, segue que f é real analítica. Definindo

$$U = \{p \in M \mid f(p) \neq 0\},$$

mostraremos que $U \neq \emptyset$, aberto e denso em M. É claro que U é aberto. Para mostrar que $U \neq \emptyset$, notemos primeiro que:

$$d\phi_e(X) = \frac{d}{dt}\left[\phi(\exp tX)\right]_{t=o} = \frac{d}{dt}\left[(\exp tX)(p_0)\right]_{t=0} = X(p_0). \tag{5}$$

Agora, observando que

$$d\phi_e\mid_m \text{injetivo} \Rightarrow \det(< X_i(p_0), X_j(p_0) >) \neq 0,$$

basta mostrar que $d\phi_e\mid_m$é injetora e teremos que $p_0 \in U$.

Note que:

$$d\phi_e : T_eG \to T_{p_0}M.$$

Tome $X \in m$ tal que $d\phi_e(X) = 0$. Por (5), $d\phi_e(X) = 0$ o que implica $X(p_0) = 0$ e então podemos concluir que p_0 é uma singularidade de X. Daí,

$$\begin{aligned} (\exp tX)(p_0) &= p_0, \forall t \Rightarrow \exp tX \in H, \forall t \Rightarrow \\ &\Rightarrow X = \frac{d}{dt}\left[\exp tX\right]_{t=0} \in T_eH. \end{aligned}$$

Mas $T_eG = T_eH \oplus m$, de modo que $X = 0$. Logo $d\phi_e\mid_m$é injetora.

Mostremos que U é denso em M. Por absurdo, suponha que exista um aberto V de M tal que $f|_V \equiv 0$. Como f é analítica e M conexa, então $f \equiv 0$, o que absurdo pois $U \neq \emptyset$. Como os campos de Killing $X_1, \ldots, X_n$ anteriormente definidos são linearmente independentes em U, a proposição fica provada.

2.6. Segunda Forma Fundamental.

Sejam M^n variedade Riemanniana de dimensão n, $\overline{M}^{n+1}$ variedade Riemanniana de dimensão $n+1$, ambas orientáveis e orientadas, ∇ conexão Riemanniana de $\overline{M}$ e $f : M \to \overline{M}$ imersão isométrica.

Seja $p \in M$, e sejam $v_1, ..., v_n$ campo de vetores de M tais que $\{v_1(q), ..., v_n(q)\}$ é uma base positiva de T_qM para q em uma vizinhança de p. Existe um único vetor unitário $\eta(f(p)) \in T_{f(p)}\overline{M}$ tal que $\{df_pv_1, ..., df_pv_n, \eta(f(p))\}$ é uma base ortonormal positiva de $T_{f(p)}\overline{M}$.

Afirmação. η depende diferenciavelmente de p. De fato: Seja $V \subset \overline{M}$ vizinhança de $f(p)$ tal que em V estão definidos $n+1$ campos de vetores $e_1, ..., e_{n+1}$ de $\overline{M}$ tais que $\{e_1(q), ..., e_{n+1}(q)\}$ é uma base ortonormal de $T_q\overline{M}, \forall q \in V$. Podemos escrever

$$df_pv_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}(p)e_j(f(p)), i = 1, ..., n$$

e

$$\eta(f(p)) = \sum_{j=1}^{n+1} x_j(p)e_j(f(p)).$$

Para mostrar que $x_j(p)$ depende diferenciavelmente de p, notemos que $x_j(p) =$

$\det A_j(p)$ onde $A_j(p)$ é a matriz $n\times n$ obtida da matriz $A(p)$ de ordem $n\times(n+1)$,

$$A(p) = (< df_p v_i, e_{k(f(p))} >)_{i,k}$$

retirando-se a $j-$ésima coluna de A, o que mostra que x_j é diferenciável. Isto prova nossa afirmação.

Como f é uma imersão, existe $U \subset M$, $p \in U$, tal que $f : U \to \overline{M}$ é um mergulho, de modo que podemos considerar η como a restrição a $f(U)$ de um campo de vetores em $\overline{M}$, também denotado por η.

Notemos que $\nabla_{df_p v}\eta(f(p)) \in df_p(T_pM)$. Para isto note que $df_p(T_pM) = \{\eta(f(p))\}^{\perp}$ e temos então

$$\nabla_{df_p v}\eta(f(p)) \in \{\eta(f(p))\}^{\perp} \Leftrightarrow < \nabla_{df_p v}\eta(f(p)), \eta(f(p)) >= 0.$$

Tome $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= p \\ \alpha'(0) &= v. \end{aligned}$$

Como $|\eta| = 1$, temos

$$
\begin{aligned}
<\eta(f(\alpha(t))),\eta(f(\alpha(t)))>=1 \quad &\Rightarrow \tfrac{d}{dt}<\eta(f(\alpha(t))),\eta(f(\alpha(t)))>|_{t=0}=0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2<\nabla_{df_pv}\eta(f(p)),\eta(f(p))>=0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow<\nabla_{df_pv}\eta(f(p)),\eta(f(p))>=0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \nabla_{df_pv}\eta(f(p)) \in \{\eta(f(p))\}^{\perp}.
\end{aligned}
$$

Definimos

$$A_p : T_pM \to T_pM$$

como sendo

$$A_p(v) = -(df_p)^{-1}\nabla_{df_pv}\eta.$$

Como se sabe da Geometria Riemanniana, A_p é uma aplicação linear auto-adjunta, e $K_p = \det A_p$ é chamado curvatura de Gauss-Kronecker de M em p.

No caso $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$, a aplicação $N : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ onde $N(p) = \eta(f(p))$ é chamada aplicação normal de Gauss, e temos $dN_p(v) = \nabla_{df_pv}\eta$.

3. Extensões parciais do Teorema de Hadamard.

3.1 Extensão para hipersuperfícies do $\mathbb{R}^{n+1}$.

Faremos uso do seguinte resultado:

3.1.1. Lema. *Seja M espaço topológico compacto, $\overline{M}$ espaço de Hausdorff e*

$f : M \to \overline{M}$ *contínua e injetiva. Então* $f^{-1} : f(M) \to M$ *é contínua.*

Demonstração. Vamos mostrar que a imagem inversa de qualquer fechado em M é fechado em $f(M)$. De fato: Tome $F \subset M$, fechado, como M é compacto, temos F compacto, daí sua imagem inversa $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$, é compacta pois f é contínua, e como $\overline{M}$ é Hausdorff, $f(F)$ é fechado.

3.1.2. Teorema.

Seja $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *uma imersão isométrica,* $n \geq 2$. M *variedade Riemanniana compacta , orientável e orientada. Suponhamos que a curvatura de Gauss de* M *seja diferente de zero em todos os pontos de* M. *Então:*

(a) M *é difeomorfa a* $\mathbb{S}^n$;

(b) f *é um mergulho;*

Demonstração.

$a)$ M é difeomorfa a $\mathbb{S}^n$

A idéia é tomarmos a aplicação normal de Gauss e mostrarmos que ela é um difeomorfismo local de M em $\mathbb{S}^n$. Em seguida mostraremos que a mesma aplicação é bijetiva, implicando assim no difeomorfismo global.

Afirmação: a aplicação

$$\begin{aligned} N: \quad M &\longrightarrow \quad \mathbb{S}^n \\ p &\longmapsto \quad N(p) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo local. De fato

$$K(p) = \det A_p = -\det(df_p)^{-1}(dN_p) \neq 0. \tag{6}$$

Podemos concluir por (6) que $(df_p)^{-1} o dN_p$ é um isomorfismo, e sabemos que $(df_p)^{-1}$ é injetiva. Segue-se que $dN_p : T_pM \longrightarrow T_{n(p)}\mathbb{S}^n$ é injetiva e portanto isomorfismo. Pelo teorema da função inversa, $N : M \longrightarrow \mathbb{S}^n$ é um difeomorfismo local.

Mostraremos que $N(M) = \mathbb{S}^n$ e N é injetiva

1) $N(M) = \mathbb{S}^n$

Como $N(M)$ é fechado segue-se que $A := \mathbb{S}^n \backslash N(M)$ é aberto. Supondo $A \neq \emptyset$, seja $y \in \partial A$. Então $y \in \partial N(M) \cap N(M)$ e existe $x \in M$ tal que $y = N(x)$. Como N é um difeo local existe $U \subset M$, aberto, com $x \in U$, tal que $N|_U : U \to N(U)$ é um difeomorfismo.

Segue-se que $N(U)$ é aberto, e $y \in N(U) \subset N(M) \Rightarrow y \notin \partial N(M)$ o que é uma contradição.

2) N é injetiva.

Sejam $p, q \in M$ tal que $N(p) = N(q) = x$. Tome $\alpha : [0,1] \to M$ contínua com, $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$. Então $\beta = No\alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^n$ é uma curva fechada em $\mathbb{S}^n$, e como $\mathbb{S}^n$ é simplesmente conexo, existe $F : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{S}^n$, homotopia entre β e x, tal que

$$\begin{cases} F(0,t) = & \beta(t), \forall t \in [0,1] \\ F(1,t) = & x, \forall t \in [0,1] \\ F(s,0) = F(s,1) = & x, \forall s \in [0,1]. \end{cases}$$

Vamos mostrar que α é uma curva fechada. Tome $G : [0,1] \times [0,1] \to M$, levantamento da F, tal que $G(0,t) = \alpha(t)$.

Como

$$\begin{cases} N \circ G(s,0) & = F(s,0) & = x \\ N \circ G(s,1) & = F(s,1) & = x \end{cases}$$

não dependem de s temos que:

$$\begin{cases} G(s,0) & = p \\ G(s,1) & = q \end{cases}$$

não depende de s, pois $N^{-1}(x)$ é discreto. Então o caminho $t \mapsto G(1,t)$ em M é um levantamento de x e segue que $G(1,t) = p$, para todo t, o que implica em α homotópico a p. Como $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$, temos $p = q$.

b) f é um mergulho.

Basta mostrar que f é injetiva, pois aplicando o lema 3.1 temos o resultado desejado.

Sejam $p_1, p_2 \in M$ e suponhamos que $f(p_1) = f(p_2)$. Existem 2 possibilidades:

a) $df_{p_1}(T_{p_1}(M)) \neq df_{p_2}(T_{p_2}(M))$

Faça $v := N(p_1)$ e defina $h(p) :=< f(p), v >$. Note que $f(M)$ tem pontos em ambos os lados de $f(p_1) + df_{p_1}(T_{p_1}M)$. Portanto, existem p', p'' tais que $h(p'') < h(p_1) < h(p')$.

Sejam q_1 e q_2 os pontos de máximo e mínimo absolutos de h em M.

Então $q_1 \neq p_1 \neq q_2$. Vamos mostrar que $N(q_1) = \pm N(q_2) = \pm N(p_1)$, o que é uma contradição tendo em vista a injetividade de N. Temos,

$$dh_{q_i} \equiv 0 \Leftrightarrow dh_{q_i}(u) = 0, \forall u \in T_{q_i}M, \ i = 1, 2,$$

de modo que

$$dh_{q_i}(u) =< df_{qi}u, v >= 0 \Leftrightarrow v \perp df_{q_i}(T_{q_i}M) \Rightarrow v = \pm N(q_i) \Rightarrow N(p_1) = \pm N(q_i), \ i = 1, 2.$$

b) $df_{p_1}(T_{p_1}(M)) = df_{p_2}(T_{p_2}(M))$.

Neste caso, temos $N(p_1) = -N(p_2)$, pois estes vetores são colineares. Defina $v = N(p_1)$ e $h(p) =< f(p), v >$. Então ou h tem máximo absoluto ou h tem mínimo absoluto. Em qualquer dos casos, este ponto não coincide com p_1, o que, conforme visto antes, é uma contradição.

3.2. Extensão para imersões de codimensão arbitrária e para outros espaços ambientes.

Sejam M^n e $\overline{M}^{n+k}$ variedades Riemannianas de dimensão n e $n+k$, $n \geq 2$, $k \geq 1$, M compacto, conexo, e seja $\phi : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica. Denote por $N(M)$ o fibrado normal unitário de ϕ, a saber

$$N(M) = \left\{(p,\eta) \mid p \in M,\, \eta \in T_{\phi(p)}\overline{M},\ \eta \perp d\phi\,(T_pM)\,, \|\eta\| = 1\right\}.$$

Nós denotaremos por $N^*(M)$ o subfibrado normal de $N(M)$ consistindo de pares (p,η) tal que a 2^a forma fundamental A de ϕ com respeito a η em p, isto é, $A_\eta(v) = -(d\phi_p)^{-1}\left(\nabla_{d\phi(v)}\eta\right)^T$, $v \in T_pM$, possui auto valores positivos. ∇ será a conexão Riemanniana de $\overline{M}$ e $(\ \ )^T$ a projeção ortogonal sobre $d\phi_p\,(T_pM)$.

3.2.1. Proposição. *Conforme a notação acima , assuma a existência de $n+1$ campos de Killing $X_1, ..., X_{n+1}$ em $\overline{M}$ os quais são linearmente independentes em*

$\phi(M)$, *e uma seção global*

$$\eta : M \to N^*(M)$$

tal que $\eta(p) \in$ *gerado* $\{X_1\phi(p), ..., X_{n+1}\phi(p)\}$ *para todo* $p \in M$. *Então* M *é difeomorfo a uma esfera* n*-dimensional.*

Obtemos os seguintes corolários:

3.2.2. Corolário 1. *Seja* N *uma variedade homogênea com uma métrica invariante. Então existe um aberto denso* U *de* N *tal que toda hipersuperfície compacta conexa de* U *cujas curvaturas principais são positivas é difeomorfa a uma esfera.*

Demonstração. Decorre imediatamente das proposições 2.5.1 e 3.2.1.

3.2.3. Corolário 2. *Seja* G *um grupo de Lie com uma métrica invariante à esquerda. Então, qualquer hipersuperfície imersa compacta e conexa de* G *cujas curvaturas principais são todas positivas é difeomorfa a uma esfera.*

3.2.4. Observação. Sabe-se que todo espaço simétrico do tipo não compacto é isométrico a um Grupo de Lie com uma certa métrica invariante à esquerda. Portanto, o Corolário 3.2.3 se aplica a estes espaços.

Demonstração da Proposição 3.2.1. Dado $p \in M$, tome o conjunto

$$E_p = \left\{a_1X_1(\phi(p)) + ... + a_{n+1}X_{n+1}(\phi(p)) \mid a_1^2 + ... + a_{n+1}^2 = 1\right\}.$$

Pela hipótese, existe um campo de vetores unitários η em $\phi(\eta)$ tal que a 2^a forma fundamental com respeito a η é definida positiva e

$$\eta(p) \in gerado\left\{X_1(\phi(p)), ..., X_{n+1}(\phi(p))\right\},$$

para todo $p \in M$. Então existe uma aplicação diferenciável $f : M \longrightarrow R^+$ tal que $f(p)\eta(p) \in E_p$, para todo $p \in M$. Nós definimos a aplicação $\gamma : M \longrightarrow \mathbb{S}^n$, onde $\mathbb{S}^n$ é a esfera unitária centrada na origem em R^{n+1}, colocando

$$\gamma(p) = (a_1(p), ..., a_{n+1}(p)) \tag{7}$$

se

$$f(p)\eta(p) = a_1(p)X_1(\phi(p)) + ... + a_{n+1}(p)X_{n+1}(\phi(p)), p \in M. \tag{8}$$

Nós afirmamos que γ é um difeomorfismo. γ é claramente uma aplicação diferenciável. Escolha $p \in M$ e seja $v \in T_pM$ tal que $d\gamma_p(v) = 0$. De (7), nós temos $d(a_j)_p(v) = 0, j = 1, ..., n+1$.

Calculando a derivada covariante de (8) com respeito a $d\phi_p(v)$ nós obtemos então

$$df_p(v)\,\eta(p) + f(p)\nabla_{d\phi_p(v)}\eta(p) = da_1(p)(v)X_1(\phi(p)) + a_1(p)(\nabla_{d\phi_p(v)}X_1)(\phi(p)) + ...$$

$$+da_{n+1}(p)(v)X_{n+1}(\phi(p)) + a_{n+1}(p)(\nabla_{d\phi_p(v)}X_{n+1})(\phi(p)).$$

Tomando o produto interno de ambos os lados com $d\phi_p(v)$, sendo que os X_j são campos de Killing, temos pelo Lema 2.4.2 que $f(p) < \nabla_{d\phi_p(v)}\eta, d\phi_p(v) >= 0$. Mas

$$\begin{aligned} 0 &= < \nabla_{d\phi_p(v)}\eta, d\phi_p(v) >=< \left(\nabla_{d\phi_p(v)}\eta\right)^T, d\phi_p(v) > \\ &= < (d\phi_p)^{-1}\left(\nabla_{d\phi_p(v)}\eta\right)^T, v >= -\langle A_\eta(v), v\rangle \end{aligned}$$

o que implica $v = 0$, pois $\eta \in N^*(M)$. Daí $d\gamma_p$ é um isomorfismo o que implica γ difeomorfismo local. Como γ toma valores na esfera e M é compacta segue-se que γ é um difeomorfismo global.

BIBLIOGRAFIA

[Ha] Hadamard, M.: *"Sur certaines proprietés des trajectoires en Dynamique"*, Journal de Math. ($5^{a.}$ série), Tome III, Fasc. IV, 1987

[He] Helgason, S.: *"Differential Geometry and symmetric spaces"*,

[R] Ripoll, J.: *"Hypersurfaces with positive principal curvatures in symmetric spaces"*, a aparecer no Proceedings da AMS, 1998.