CARACTERIZAÇÃO DAS CLASSES DE

ISOTOPIA MORSE-SMALE EM SUPERFÍCIES

LUIZ FERNANDO C. DA ROCHA

Tese apresentada para obtenção do título de

Doutor em Matemática

IMPA

Rio de Janeiro

1978

À MARIA ALICE

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer

- ao meu orientador Jacob Palis pela compreensão, estímulo e orientação
- aos professores A. Lins, A. Manning, R. Mañe e W. Melo por inúmeras discussões críticas e proveitosas
- ao professor G. Fleitas por sugestões que simplificaram considerávelmente algumas demonstrações
- aos colegas e amigos C. Doering, A. Lopes e P. Sad por diversas conversas e trocas de idéias matemáticas e não matemáticas
- a Wilson Góes pelo excelente trabalho de datilografia.

Rio de Janeiro, Março de 1978

Luiz Fernando C. da Rocha

INTRODUÇÃO

Este trabalho trata de classes de isotopia de difeomorfismos em variedades diferenciáveis compactas conexas com ou sem bordo. Por diferenciável entenderemos sempre diferenciável de classe C^{∞}.

Dada M variedade diferenciável como acima, uma isotopia em M é uma aplicação contínua $F: M \times I \to M$, $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, tal que:

1) F é diferenciável em $M \times (0,1)$
2) $F(\ ,t)$ é um difeomorfismo, $t \in I$.

(Dados X, Y e Z conjuntos, $f: X \times Y \to Z$ uma aplicação e $x_o \in X$, $y_o \in Y$ vamos denotar por $f(x_o,\ )$ e $f(\ ,y_o)$ as aplicações $y \in Y \to f(x_o,y) \in Z$ e $x \in X \to f(x,y_o) \in Z$, respectivamente).

3) $F(\ ,t_1) = F(\ ,t_2)$ para t_1 e t_2 uma vizinhança de 0 ou de 1.

Dados f e g difeomorfismos de M fizemos que existe uma isotopia ligando f a g ou que f é isotópico à g, notação $f \sim g$, se existe uma isotopia de M, F, tal que $F(\ ,0) = f$ e $F(\ ,1) = g$.

É claro que a relação $\sim$ é uma relação de equivalência cujas classes chamaremos classes de isotopia de M. Ademais, se $f_1 \sim g_1$ e $f_2 \sim g_2$ então $f_1 \circ f_2 \sim g_1 \circ g_2$ ou seja a relação de isotopia é compatível com a composição o que torna o conjunto das classes de isotopia de M um grupo com a operação natural.

Em 1967 [11] colocou o problema de caracterizar as classes de isotopia Morse-Smale de uma variedade M sem bordo, i.e. classes nas quais podemos obter um representante Morse-Smale. Para dar a definição de difeomorfismo Morse-Smale precisamos de outras preliminares.

Dado $f: M \to M$ C^r difeomorfismo, $r \geq 1$, M variedade diferenciável sem bordo, vamos denotar por $Per(f)$ o conjunto dos pontos periódicos de M i.e. os pontos $p \in M$ tais que existe $n \in Z$, $n \neq 0$, tal que $f^n(p) = p$. Neste caso $\pi(p) = \min\{n > 0 \mid f^n(p) = p\}$ denota o período de p. Mais geralmente, se $C \subseteq M$ e existe $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, t.q. $f^n(C) = C$ vamos denotar por $\pi(C) = \min\{n > 0 \mid f^n(C) = C\}$ o f-período de C. Se existe $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, t.q. $f^n = I_M$, a identidade de $\min\{n > 0 \mid f^n = I_M\}$.

Dado $p \in M$ dizemos que p é ponto periódico hiperbólico de f se $p \in Per(f)$ e $Df_p^{\pi(p)}: T_p(M) \to T_p(M)$ é hiperbólica, i.e., não tem autovalores de módulo um. Neste caso os subconjuntos, f-invariantes de M,

$$W^s(p) = \{q \in M \mid \lim_{i\to\infty} f^{i\pi(p)}(q) = p\}$$

e

$$W^u(p) = \{q \in M \mid \lim_{i\to-\infty} f^{i\pi(p)}(q) = p\},$$

denominados variedade estável e variedade instável de p, respectivamente, são C^r-imersões injetivas de um espaço euclidiano de dimensão igual ao número de autovalores de $Df_p^{\pi(p)}$ de módulo menor e maior que um, respectivamente.

Denotando por $\Omega(f)$ o conjunto f-invariante dos pontos não errantes de f, i.e. os pontos $p \in M$ tais que para toda vizinhança aberta V de p existe $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, tal que $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$ estamos em condições de definir um difeomorfismo Morse-Smale, M.S. para simplificar.

$f: M \to M$ C^r-difeomorfismo, $r \geq 1$, é dito M.S. se satisfaz as três condições abaixo

1) $\Omega(f)$ é finito logo $\Omega(f) = Per(f)$
2) os pontos periódicos de f são hiperbólicos
3) $W^s(p)$ e $W^u(q)$ são transversais para todo p e q em $Per(f)$.

Dizemos que $f \in Dif^r(M)$, $Dif^r(M)$ é o conjunto dos difeomorfismos de classe C^r de M, $r \geq 1$, munido da topologia C^r, é estruturalmente estável quando existe uma vizinhança de f, $V \subseteq Dif^r(M)$, tal que todo $g \in V$ é topologicamente conjugado à f, i.e., existe $h: M \to M$ homeomorfismo t.q $fh = hg$.

Os difeomorfismo M.S. formam um subconjunto aberto de $Dif^r(M)$, Palis [8], e são os estruturalmente estáveis mais simples que existem no seguinte sentido:

<u>Teorema 1</u> (Palis-Smale [9]) - Dado $f \in Dif^r(M)$ temos: f é estruturalmente estável com $\Omega(f)$ finito se e somente se f é M.S.

O objetivo deste trabalho é dar uma resposta à questão levantada por Smale em variedades de dimensão dois. Nestas variedades temos:

<u>Teorema A</u> - Se M é variedade diferenciável de dimensão dois sem bordo com característica de Euler-Poincaré negativa e φ é uma classe de isotopia de M então cada uma das seguintes

condições é necessária e suficiente para que φ tenha um representante Morse-Smale:

1) $C(\varphi) = c(\varphi) = 1$

2) $CC(\varphi) = cc(\varphi) = 1$

3) Para toda métrica riemaniana de M, $\langle\ ,\ \rangle$ e para toda classe de curvas fechadas simples $\alpha \in \mathcal{S}$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} [i(\langle\ ,\ \rangle, \varphi^n(\alpha))]^{\frac{1}{n}} = 1$$

4) φ é de tipo algebricamente finito.

Nos casos em que $\chi(M) \geq 0$ temos a seguinte situação:

$M = S^2$ tem apenas duas classes de isotopia e ambas tem M.S.

$M = P^2$ tem apenas uma classe de isotopia a qual tem M.S.

$M = T^2$. Neste caso uma classe de isotopia, φ, tem M.S. se e somente se $H_1(\varphi)\otimes I: H_1(M,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C} \to H_1(M,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}$ tem autovalores no conjunto $\pm 1, \pm i, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, onde $H_1(\varphi): H_1(M,\mathbb{Z}) \to H_1(M,\mathbb{Z})$ é o isomorfismo induzido por φ em $H_1(M,\mathbb{Z})$, o primeiro grupo de homologia de M com coeficientes inteiros.

$M = K^2$. Neste caso todas as classes de isotopia de M tem M.S.

As diversas definições necessárias à compreensão do teorema bem como uma discussão de várias condições necessárias mas não suficientes para que uma classe de isotopia possua um representante Morse-Smale estão na Parte I deste trabalho. Resulta desta discussão que, em geral, em superfícies, a ação na homologia é insuficiente para tal caracterização.

Finalmente, na Parte II, damos a demonstração do Teorema A e dos resultados sobre classes de isotopia em variedades de característica não negativa.

Parte I

Seja G um grupo e $\mathcal{G} \subseteq G$. Dizemos que $\mathcal{G}$ é um sistema de geradores para G quando para todo $g \in G$, $g \neq e$ = identidade de G, existem $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, e $g_1,\dots,g_n \in \mathcal{G} \cup \mathcal{G}^{-1}$ ($\mathcal{G}^{-1} = \{g^{-1} \mid g \in \mathcal{G}\}$) tais que $g = g_1,\dots,g_n$. Neste caso podemos definir o comprimento de $g \in G$ em relação ao sistema de geradores $\mathcal{G}$ por $C(\mathcal{G},g) = 0$ se $g = e$ e $C(\mathcal{G},g) = \min\{n \geq 1 \mid \exists\, g_1,\dots,g_n \in \mathcal{G} \cup g^{-1}$ t.q. $g = g_1,\dots,g_n\}$ se $g \neq e$. Podemos definir também o comprimento da classe de conjugação de $g \in G$ em relação à $\mathcal{G}$ por:

$$CC(\mathcal{G},g) = \min\{C(\mathcal{G},g') \mid g' \in \mathrm{Conj}(g)\}$$

onde $\mathrm{Conj}(g)$ é a classe de $g \in G$ na relação de conjugação em G.

É claro então que $CC(\mathcal{G},g) \leq C(\mathcal{G},g)$. Um grupo G é dito finitamente gerado quando tem um sistema de geradores, $\mathcal{G}$, com um número finito de elementos. Neste caso se $h: G \to G$ é um homomorfismo definimos a razão de crescimento de h em relação à $\mathcal{G}$ como o número não negativo:

$$C(\mathcal{G},h) = \sup_{g\in G} \limsup_{n\geq 1} [C(\mathcal{G},h^n(g))]^{\frac{1}{n}}$$

e a razão de crescimento de h nas classes de conjugação em relação a $\mathcal{G}$ como o número não negativo:

$$CC(\mathcal{G},h) = \sup_{g\in G} \limsup_{n\geq 1} [CC(\mathcal{G},h^n(g))]^{\frac{1}{n}}$$

donde $CC(\mathcal{G},h) \leq C(\mathcal{G},h)$.

Dado G grupo finitamente gerado, $\mathcal{G} \subseteq G$ sistema finito de geradores de G e $h: G \to G$ homomorfismo, os crescimentos de h gozam das seguintes propriedades:

1) $C(\mathcal{G},h) = \max_{g\in\mathcal{G}} \limsup_{n\geq 1} [C(\mathcal{G},h^n(g))]^{\frac{1}{n}}$

2) $C(\mathcal{G},h) < \infty$ e $CC(\mathcal{G},h) \geq 1$

se h é um automorfismo de um grupo não trivial.

Em particular,

$CC(\mathcal{G},I_G) = C(\mathcal{G},I_G) = 1$

3) Se $\mathcal{G}' \subseteq G$ é outro sistema finito de geradores de G então $C(\mathcal{G},h) = C(\mathcal{G}',h)$ e $CC(\mathcal{G},h) = CC(\mathcal{G}',h)$ donde podemos falar na razão de crescimento, $C(h)$, e na razão de crescimento de h nas classes de conjugação, $CC(h)$, de um homomorfismo h sem referência à sistemas de geradores.

4) Se $k: G \to G$ é um automorfismo interno então

$C(h) = C(kh)$ e $CC(h) = CC(kh)$. Em particular

$C(k) = CC(k) = 1$ se G é um grupo não trivial.

5) $C(h^n) = C(h)^n$ e $CC(h^n) = [CC(h)]^n$ para $n \geq 1$.

6) Se H é um grupo, $\pi: G \to H$ é um homomorfismo sobrejetivo e $k: H \to H$ é um homomorfismo t.q.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ H \arrow[r, "k"] & H \end{tikzcd}$$

comuta temos que H é finitamente gerado, $C(h) \geq C(k)$ e $CC(h) \geq CC(k)$, donde vale a igualdade se π é um isomorfismo.

Assim se X é um espaço topológico conexo por caminhos cujo grupo fundamental é finitamente gerado e $f: X \to X$ é contínua podemos definir a razão de crescimento de f no grupo fundamental e a razão de crescimento de f nas classes de conjugação do grupo fundamental por $C(f) = C(\hat{\gamma} \circ f_*)$ e $CC(f) = CC(\hat{\gamma} \circ f_*)$, respectivamente, onde $f_*: \pi_1(X, x_o) \to \pi_1(X, f(x_o))$, $x_o \in X_o$, é o isomorfismo induzido por f e $\hat{\gamma}: \pi_1(X, f(x_o)) \to \pi_1(X, x_o)$ é o isomorfismo induzido por uma curva $\gamma: I \to X$, ligando x_o à $f(x_o)$, i.e.,

$$\hat{\gamma}([\alpha]) = [\gamma\alpha\gamma^{-1}], \qquad [\alpha] \in \pi_1(X, f(x_o))$$

e $\alpha: I \to X$ laço em $f(x_o)$, pois as propriedades do crescimento acima mencionadas implicam que estes números são independentes das escolhas de $x_o \in X$ e de γ ligando x_o à $f(x_o)$.

Se $f: X \to X$ e $g: X \to X$ são homotópicas (i.e. existe $H: X \times I \to Y$ contínua t.q. $H(\ ,0) = f$ e $H(\ ,1) = g$), então, pelas mesmas propriedades do crescimento, temos que $C(f) = C(g)$ e $CC(f) = CC(g)$ ~~donde os~~ crescimentos são invariantes da classe de homotopia de uma aplicação contínua. Em particular se $X = M$ variedade diferenciável compacta conexa com ou sem bordo de dimensão $m \geq 1$ e $f: M \to M$ é contínua podemos falar em $C(f)$ e $CC(f)$ pois o grupo fundamental de M é finitamente gerado.

Se $P \in \mathrm{Int}\, M$* e $\langle\ ,\ \rangle$ é uma métrica riemaniana para M podemos usar $\langle\ ,\ \rangle$ para dar outra definição de comprimento para os elementos de $\pi_1(M,P)$ que, como veremos em seguida, está estreitamente relacionado com o comprimento destes elementos dados por sistemas de geradores. Mais explicitamente, dado $g \in \pi_1(M,P)$ definimos o comprimento de g, $c(\langle\ ,\ \rangle, g)$, e o comprimento da classe de conjugação de g, $cc(\langle\ ,\ \rangle, g)$, em relação à $\langle\ ,\ \rangle$ por:

$$c(\langle\ ,\ \rangle, g) = \inf \left\{ \int_0^1 \sqrt{\langle \xi', \xi' \rangle} \;\middle|\; \begin{array}{l} \xi : I \to M \text{ é diferenciável} \\ \text{por partes e } \xi \in g \end{array} \right\}$$

e

$$cc(\langle\ ,\ \rangle, g) = \inf \{ c(\langle\ ,\ \rangle, g') \mid g \in \mathrm{Conj}(g) \},$$

respectivamente.

Analogamente ao que fizemos acima definimos, para $f: M \to M$ contínua, o crescimento, $c(f)$, e o crescimento nas classes de conjugação, $cc(f)$, de f no grupo fundamental em relação a $\langle\ ,\ \rangle$ por:

$$c(f) = \sup_{g \in \pi_1(M,P)} \limsup_{n \geq 1} \left[c(\langle\ ,\ \rangle, (\hat{\gamma} \circ f)^n\, g) \right]^{\frac{1}{n}}$$

e

$$cc(f) = \sup_{g \in \pi_1(M,P)} \limsup_{n \geq 1} \left[cc(\langle\ ,\ \rangle, (\hat{\gamma} \circ f)^n\, g) \right]^{\frac{1}{n}},$$

respectivamente, onde $\gamma: I \to M$, como antes, é um caminho ligando P a $f(P)$. Veremos, como corolário do Lema 1 abaixo, que $c(f) = C(f)$ e que $cc(f) = C(f)$ donde tanto $c(f)$ quanto $cc(f)$ independem das escolhas de $\langle\ ,\ \rangle$, P e γ.

---

*Por $\mathrm{Int}(M)$ vamos denotar o subconjunto aberto de M dado por $M - \partial M$.

<u>Lema 1</u> (Milnor [5]) - Seja M variedade riemaniana como acima e $P \in \text{Int } M$. Então, existem constantes positivas K e L e $\mathcal{G} \subseteq \pi_1(M,P)$, sistema finito de geradores, tais que:

$$K\, C(\mathcal{G},g) \geq c(\langle\ ,\ \rangle,g) \geq L\, C(\mathcal{G},g),$$

para todo $g \in \pi_1(M,P)$.

<u>Corolário 1</u> - Dados M e P como no Lema 1 e $f: M \to M$ contínua temos que:

$$cc(f) = CC(f) \leq C(f) = c(f).$$

Demonstração: Óbvia.

Uma curva fechada simples em M, a, é um mergulho $a: S' \to M$, $S' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Neste caso vamos denotar por $\bar{a}: I \to M$ a aplicação diferenciável dada por $\bar{a}(t) = a(e^{2\pi ti})$, $t \in I$. Duas curvas fechadas simples em M, a e b, são ditas isotópicas, notação $a \sim b$, quando existe $H: S' \times I \to M$ diferenciável tal que $H(\ ,0) = a$ e $H(\ ,1) = b$. $\sim$ é uma relação de equivalência e suas classes são denominadas classes de curvas fechadas simples de M. Dada φ classe de isotopia de difeomorfismos de M e α classe de curvas fechadas simples de M a classe definida por $f \circ a$, $f \in \varphi$ e $a \in \alpha$, independe das escolhas feitas o que mostra que uma classe de isotopia induz uma bijeção nas classes de curvas fechadas simples de M.

A cada classe de curvas fechadas simples de M, α, podemos associar uma única classe de conjugação de $\pi_1(M,P)$, $P \in \text{Int}(M)$, $CONJ_P(\alpha)$ da seguinte maneira:

Seja $a \in \alpha$ e ξ diferenciável ligando P a $a(1,0)$, $CONJ_P(\alpha) = conj([\xi\ \tilde{a}\ \xi^{-1}])$ onde $[\xi\ \tilde{a}\ \xi^{-1}]$ indica o elemento de $\pi_1(M,P)$ dado pelo laço $\xi\ \tilde{a}\ \xi^{-1}$. É fácil ver que $CONJ_P(\alpha)$ independe das escolhas feitas e que $\alpha \mapsto CONJ_P(\alpha)$ é injetiva.
Doravante, salvo menção explícita em contrário, M vai denotar uma variedade diferenciável de dimensão dois com ou sem bordo com característica de Euler-Poincaré, $\chi(M)$, negativa. Neste caso seguindo a notação de Thurston [12], denotamos por $\mathcal{S} = \mathcal{S}(M)$ o conjunto das classes de curvas fechadas simples de M, α, tais que α tem pelo menos um elemento (logo todos) bilateral, i.e. tem uma vizinhança tubular homeomorfa ao cilindro, e nenhum (basta que um) elemento de α limita disco ou cilindro em M.

Uma família finita $\{a_1,\ldots,a_n\}$, $n \geq 1$, de curvas fechadas simples em M é dita família não trivial se as curvas são disjuntas e $a_1,\ldots,a_n$ representam elementos distintos de $\mathcal{S}$.

Um difeomorfismo $f: M \to M$ é dito decomponível se existe uma família não trivial de curvas fechadas simples de M, $\{a\}$, tal que $f(\Sigma a) = \Sigma a$*, neste caso dizemos que $\{a\}$ decompõe f. Uma classe de isotopia de M, φ, é dita decomponível se tem um representante decomponível.

Se $\alpha \in \mathcal{S}$ e $\langle\ ,\ \rangle$ é uma métrica riemaniana de M,

$$i(\langle\ ,\ \rangle,\alpha) = \inf \left\{ \int_0^1 \sqrt{\left\langle \frac{d\tilde{a}}{dt}(t), \frac{d\tilde{a}}{dt}(t)\right\rangle}\, dt \;\middle|\; a \in \alpha \right\}$$

---

*Nos casos, como agora, em que não houver possibilidade de confusão vamos denotar a imagem de uma função, $g: X \to Y$, pelo mesmo símbolo, g.

denota o comprimento de α em relação à $\langle\ ,\ \rangle$.

Para $\alpha \in \mathcal{S}$ e $P \in \mathrm{Int}\ M$ temos que:

$$i(\langle\ ,\ \rangle, \alpha) \leq CC(\langle\ ,\ \rangle, CONJ_P(\alpha)) \leq L\ i(\langle\ ,\ \rangle, \alpha)$$

desde que

$$L \geq 1 + \frac{2\delta(M)}{\inf\limits_{\beta \in \mathcal{S}} i(\langle\ ,\ \rangle, \beta)},$$

onde $\delta(M)$ é o diâmetro de M na métrica $\langle\ ,\ \rangle$.

Isto mostra que para todo $\alpha \in \mathcal{S}$, toda métrica riemaniana $\langle\ ,\ \rangle$ e toda classe de isotopia φ de M temos

$$\limsup_{n \geq 1} [i(\langle\ ,\ \rangle, \varphi^n(\alpha))]^{\frac{1}{n}} \leq CC(\varphi).$$

Uma folheação com medida em M, $\mathcal{F}$, é uma família de parametrizações $\mathcal{F} = \{f\}$, $f: U \to \mathbb{R}^2$, $U \subseteq M$ aberto, tais que:

1) $\bigcup\limits_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{Dom}\ f$ é igual a M menos um número finito de pontos chamados singularidades de $\mathcal{F}$.

2) $f_2 f_1^{-1}: f_1(U_1 \cap U_2) \to f_2(U_1 \cap U_2)$ é da forma $(x,y) \to$ $\to (g(x,y), \pm y + c)$, $c = c(f_1, f_2) \in \mathbb{R}$ constante, f_1 e $f_2 \in \mathcal{F}$.

3) Para cada $p \in M - \bigcup\limits_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{Dom}\ f$ existe uma parametrização, $g: V \to \mathbb{R}^2$, $p \in V \subseteq M$ aberto, t.q. $g(p) = 0$ e $g(\mathcal{F})$ é dada em coordenadas polares em torno de 0 por
$r^{k/2}\,[\cos(\frac{2+k}{2}\theta)d\theta + \mathrm{sen}(\frac{2+k}{2}\theta)dr]$, $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ e $\kappa \geq 1$.

Se $\partial M \neq \emptyset$ a definição é análoga mas exige-se que cada componente do bordo tenha ao menos uma singularidade fora tais quais os bordos são folhas de $\mathcal{F}$.

Dada $a: I \to M$ diferenciável definimos $\int_a \mathcal{F}$ por:

$$\int_a \mathfrak{F} = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left|\frac{d(y_i \circ a)}{dt}(t)\right| dt$$

onde $f_i = (x_i, y_i): U_i \subseteq M \to \mathbb{R}^2$ são elementos de $\mathfrak{F}$, $i=1,\ldots,n$. tais que $a[t_{i-1}, t_i] \subseteq U_i$, $0 = t_o < t_1 < t_2, \ldots, < t_n = 1$.

É claro que $\int_a \mathfrak{F}$ independe das escolhas feitas donde podemos definir $\int_\alpha \mathfrak{F}$ para $\alpha \in \mathcal{S}$ por:

$$\int_\alpha \mathfrak{F} = \inf \left\{ \int_{\bar{a}} \mathfrak{F} \mid a \in \alpha \right\}.$$

Duas folheações com medida $\mathfrak{F}_1$ e $\mathfrak{F}_2$ são ditas transversais quando são transversais em todo ponto não singular de $Int(M)$ tanto de $\mathfrak{F}_1$ quanto de $\mathfrak{F}_2$. Usaremos a notação $\mathfrak{F}_1 = \lambda \mathfrak{F}_2$, $\lambda \in R$, quando $\mathfrak{F}_1$ e $\mathfrak{F}_2$ coincidirem como folheações e $\int_a \mathfrak{F}_1 = \lambda \int_a \mathfrak{F}_2$ para toda aplicação diferenciável $a: I \to M$.

Estamos então em condições de definir um difeomorfismo Pseudo-Anosov, P.A. para simplificar. $f: M \to M$ é um difeomorfismo pseudo-Anosov se existem $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 1$, e folheações com medida $\mathfrak{F}^u$ e $\mathfrak{F}^s$ tais que $\mathfrak{F}^s$ e $\mathfrak{F}^u$ são transversais e $\varphi(\mathfrak{F}^s) = 1/\lambda\ \mathfrak{F}^s$, $\varphi(\mathfrak{F}^u) = \lambda\ \mathfrak{F}^u$. Thurston em [12] definiu e estudou várias propriedades dos difeomorfismos P.A.

Importantes para nós neste trabalho são os seguintes teoremas:

Teorema 2 - Toda classe de isotopia de M, φ, possui um representante f que é:

1) Pseudo-Anosov ou

2) Decomponível ou

3) Isometria periódica de uma métrica riemaniana $\langle\ ,\ \rangle$ de M com curvature constante -1 e tal que ∂M é uma união de geodésicas fechadas.

<u>Teorema 3</u> - Dada uma classe de isotopia de M, φ, existem inteiros algébricos $\lambda_1,\ldots,\lambda_k \geq 1$, $k \geq 1$, tais que para todo $\alpha \in \mathcal{S}$ e toda métrica riemaniana, $\langle\ ,\ \rangle$, de M temos que

$$\lim_{n\geq 1} [\, i(\langle\ ,\ \rangle, \varphi^n(a))]^{\frac{1}{n}} = \lambda_i$$

para algum $i = 1,\ldots,k$.

Ademais, φ tem um representante P.A. se e somente se $k = 1$ e $\lambda_1 > 1$.

<u>Teorema 4</u> - Dado $f: M \to M$ difeomorfismo P.A., f tem o menor número de pontos periódicos de cada período dentre todos os difeomorfismos de sua classe de isotopia.

<u>Teorema 5</u> - Se M é orientável então existe $f: M \to M$ P.A. tal que $H_1(f): H_1(M) \to H_1(M)$ é a identidade; $H_1(f)$ é a aplicação induzida por f em $H_1(M)$, o primeiro grupo de homologia de M com coeficientes racionais.

Pelo Teorema 4 não existem isotopias ligando P.A. à M.S. pois todo P.A. possui um número infinito de pontos periódicos hiperbólicos. Assim, pelo Teorema 5, existem classes de isotopia de M cuja ação na homologia é a identidade e que não possúem M.S.

Se M é uma variedade diferenciável de dimensão $m \geq 1$ sem bordó e $f: M \to M$ é contínua o número de Lefschetz de f é definido por:

$$L(f) = \sum_{r=0}^{m} (-1)^i \, tr(H_i(f): H_i(M) \to H_i(M))$$

onde $H_1(M)$ é i-ésimo grupo de homologia de M com coeficientes racionais e $H_i(f)$ é a aplicação induzida por f em $H_i(M)$. Se f é um difeomorfismo cujos pontos periódicos são hiperbólicos temos, pela fórmula de Lefschetz, que

$$L(f) = \sum_{\substack{p\in Per(f)\\ \pi(p)=1}} L(p) \quad \text{onde} \quad L(p) = (-1)^n \Delta$$

e $n = \dim W^u(p)$ = número de autovalores de Df_p de módulo maior que um e $\Delta = 1$ se $Df_p: T_p W^u(p) \to T_p W^u(p)$ preserva a orientação e $\Delta = -1$ em caso contrário.

Em particular, como foi observado por Smale em [11], se f é um difeomorfismo M.S., $|L(f^n)| \leq \sum_{\substack{p\in\Omega(f)\\ \pi(p)|n}} |L(p)| \leq \#\Omega(f)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

Em 1971 Shub [10] anunciou:

<u>Teorema 6</u> - Dada φ classe de isotopia de M. Se φ tem M.S. então $H_i(\varphi): H_i(M) \to H_i(M)$ é unipotente i.e. os autovalores de $H_i(\varphi)$ são raizes da unidade, $i = 0,1,\ldots,m$.

Em particular se φ é uma classe de isotopia que possui M.S.

$|tr\, H_i(\varphi^n)| \leq \dim H_i(M)$ para todo $i = 0,1,\ldots,m$ e $n \in \mathbb{Z}$.

É evidente, então, da discussão acima que todas estas condições são necessárias mas não suficientes para que uma classe de isotopia possúa M.S.

$f: M \to M$ difeomorfismo, M variedade de dimensão dois, é dito de tipo algebricamente finito se existe uma família finita e disjunta de mergulhos $\{\sigma\}$, $\sigma: S^1 \times [-1,1] \to M$, e $m \geq 1$ tal que

1) $f(\Sigma\sigma) = \Sigma\sigma$

2) $f^m(p) = p$ para todo $p \in M - \Sigma \text{ Int } \sigma$.

Uma classe de isotopia é de tipo algebricamente finita se possui um representante de tipo algebricamente finito. Nielsen [6], computando diretamente o polinômio característico de $H_1(\varphi)$, provou que uma classe de tipo algebricamente finita é unipotente e conjeturou que isto bastava para caracterizar tais classes. Resulta das observações acima e do Teorema A que tal conjectura é falsa e que uma classe de isotopia é de tipo algebricamente finita se e só se possui M.S.

Parte II

Demonstraremos agora o Teorema A para o qual será necessária a seguinte proposição:

Proposição 1 - Seja $f: N \to N$ isometria periódica de período $n \geq 1$, N variedade riemanniana de dimensão dois com ou sem bordo tal que ∂N é uma união disjunta de geodésicas fechadas. Então, dada M variedade diferenciável de dimensão dois sem bordo contendo N como subvariedade cujo complementar é uma união de discos abertos, existe $X: M \to TM$ campo Morse-Smale diferenciável sem órbitas fechadas (i.e. X não tem órbitas fechadas e X_1, o difeomorfismo induzido pelo fluxo de X, X_t, para $t=1$, é M.S.) satisfazendo

1) $X|_N$ é f invariante

2) X é transversal à ∂N

3) $$M - \mathrm{Int}(N) \subseteq \bigcup_{p \text{ poço de } X} W^s(p)$$

Demonstração: Como $f: N \to N$ é uma isometria dado $p \in N$ existe $\varepsilon > 0$ t.q.

$$\exp_p: \exp_p^{-1}(B(p,\varepsilon)) \subseteq T_p(N) \to B(p,\varepsilon) \subseteq N$$

é uma conjugação entre

$$f^{\pi(p)}: B(p,\varepsilon) \to B(p,\varepsilon)$$

e

$$Df_p^{\pi(p)}: T_p(N) \to T_p(N).$$

Isto mostra que a fronteira do conjunto dos pontos de N com período igual a n é um compacto, f-invariante, da forma $A + \Sigma B_1 + \Sigma B_2 + \Sigma C$ onde A é um subconjunto finito de N, $\{B_1\} + \{B_2\}$ é uma família finita e disjunta de subvariedades de $\mathrm{Int}(N)$, $B \cong S^1$, tais que B_1 é bilateral e B_2 é unilateral e $\{C\}$ é uma família finita disjunta de subvariedades de N, $C \cong [-1,1]$ e $\partial C \subseteq \partial N$. Em torno de cada elemento, F, da família $\mathfrak{F} = A + \{B_1\} + \{B_2\} + \{C\}$, que, excluindo o caso $F \in A$, são, pelo comportamento local de f, geodésicas fechadas simples ou segmentos de geodésicas, vamos tomar uma vizinhança tubular normal fechada $T = T(F)$ t.q. $f^{\pi}(T) = T$, $\pi = \pi(F)$, $f^{\pi}: T \to T$ se expressa de uma maneira simples e $\{T(F)\}$ seja disjunta. Mais precisamente, se $p \in A$ então $T(p) = D(p,\varepsilon)$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno; se $F = B_1$ então $T(F) = \sigma$ onde $S^1 \times [-1,1] \xhookrightarrow{\sigma} \mathrm{Int}\, N$ é um mergulho t.q. $\sigma(\ ,0) = B_1$ e $\sigma^{-1} f^{\pi} \sigma(z,t) = (z,-t)$, $z \in S^1$ e $t \in [-1,+1]$; se $F = B_2$ então

$T(F) = \mu$ onde $M_b \xrightarrow{\mu} \text{Int } N$ é um mergulho t.q. $\sigma((x,0)) \in B_2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, e $\mu^{-1} f^{\pi} \mu\ ((\overline{x,t})) = (\overline{x,-t})$ onde $(\overline{x,t}) \in M_b$ e M_b é o espaço quociente de $\mathbb{R} \times [-1,1]$ pelo grupo gerado por $(x,t) \longmapsto (x+1,-t)$ e finalmente, se $F = C$ então $T(C) = \rho$ onde $\rho: [-1,1]^2 \to N$ é um mergulho t.q. $\rho(\ ,0) = C$, $\rho(0,\ ) + \rho(1,\ ) \subseteq \partial N$ e $\rho^{-1} f^{\pi} \rho(s,t) = (s,-t)$, $s,t \in [-1,1]$.

O espaço $K = M - \sum_F \text{Int } T(F)$ é uma variedade diferenciável compacta com esquinas i.e. cada ponto tem uma vizinhança difeomorfa à um aberto de $\{(x,y) \in R^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$ e $f: K \to K$ é t.q. todos os pontos tem período n. Assim K/f, o espaço das f-órbitas de K, é uma variedade diferenciável compacta com esquinas, como K, recoberto por K via a aplicação $p \in K \overset{\pi}{\longmapsto} \Theta_f(p) \in K/f$. K/f é, portanto, difeomorfa à esfera com k asas e ℓ cross-caps menos o interior de m discos e de n polígonos de $r_i \geq 4$ lados, $i = 1,\dots,n$. Em K/f tomemos um campo com duas fontes F_1 e F_2, $3k + 2\ell + m + n$ selas, $k+\ell$ poços e transversal aos lados e bordos de K/f como mostra a figura 1 e seja X'' o campo em K obtido tomando o pull-back deste campo via π. É claro, então, pela construção, que X'' é f-invariante.

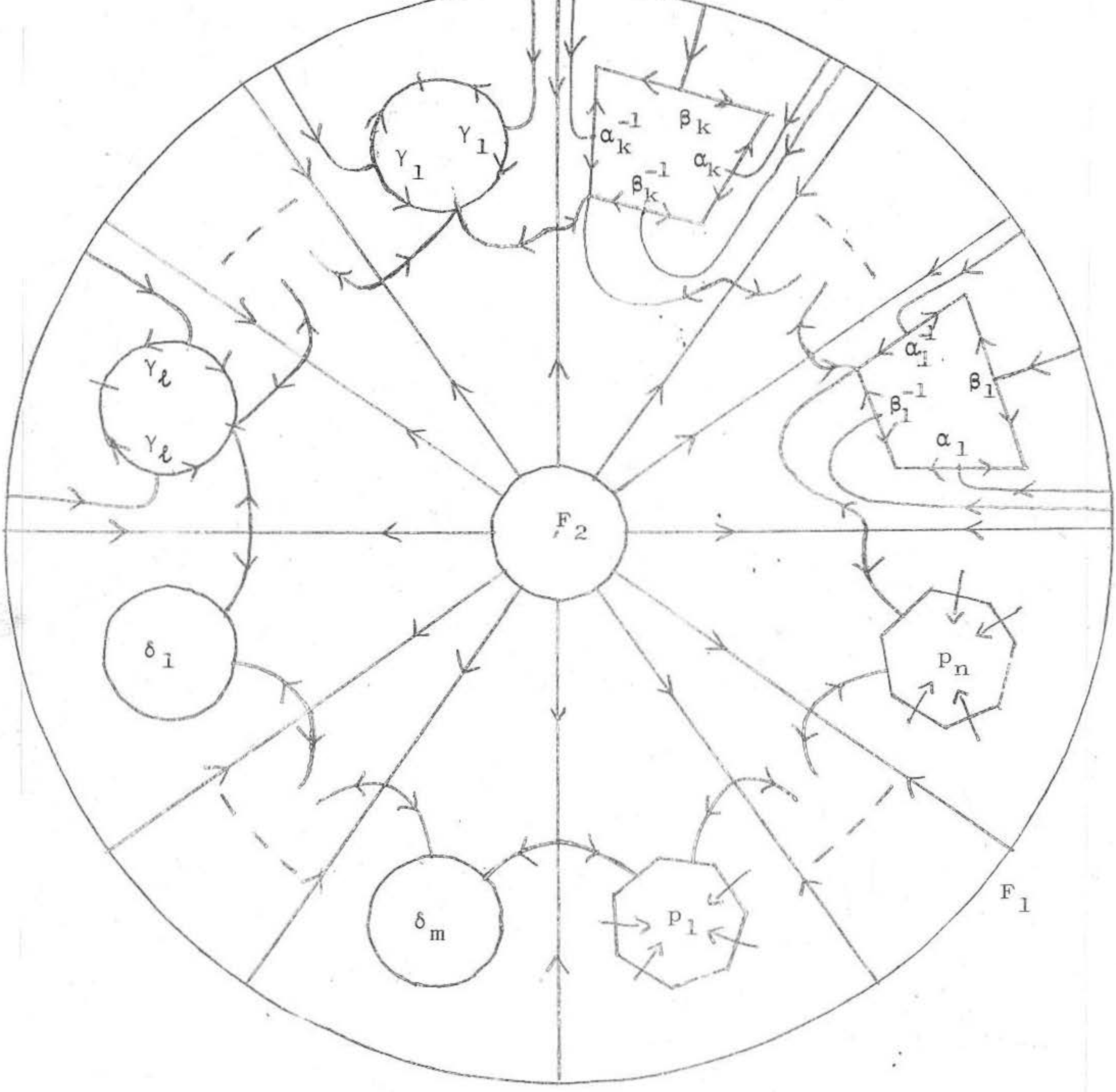
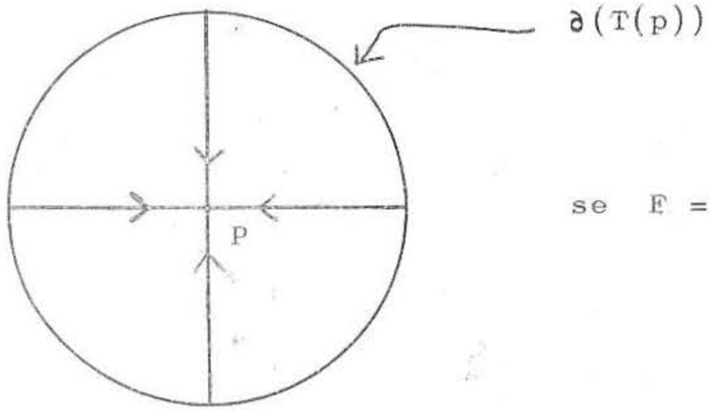
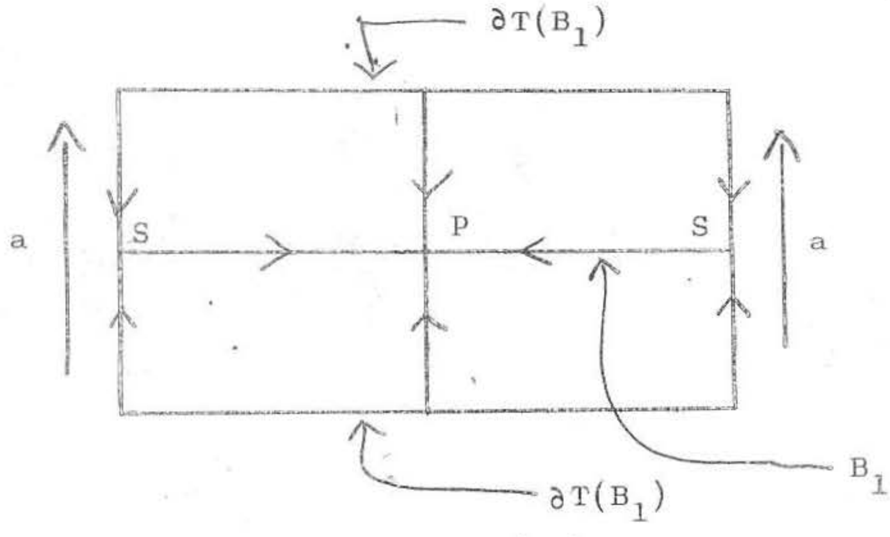

γ_1
γ_1
α_k^{-1}
β_k
α_k
β_k^{-1}
α_1^{-1}
β_1
β_1^{-1}
α_1
γ_ℓ
γ_ℓ
F_2
δ_1
p_n
δ_m
p_1
F_1

FIGURA 1

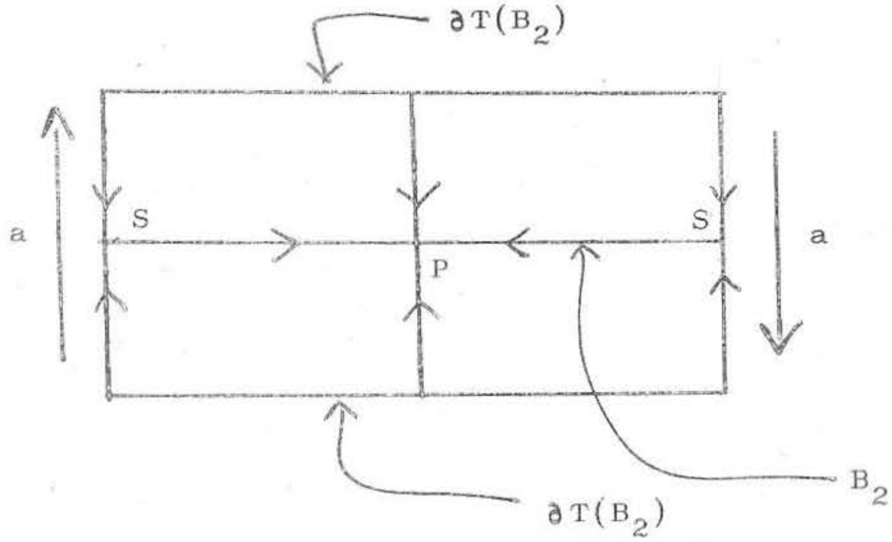
Seja X' a extensão f-invariante de X'' a N t.q. X' em $Int(T(F))$ tem o seguinte diagrama de fase:



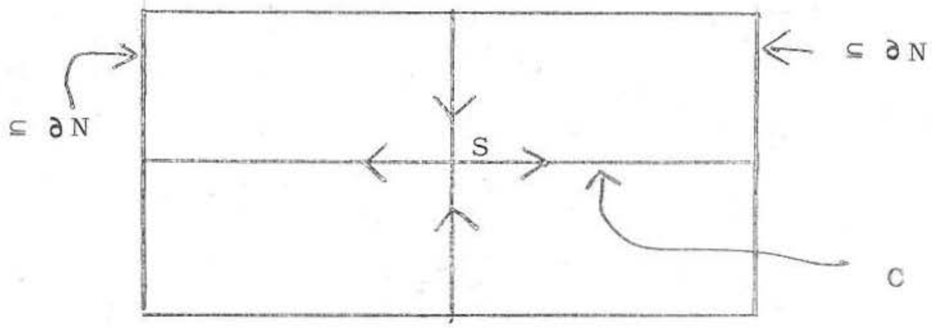
se $F = p \in A$



se $F = B_1$



se $F = B_2$



se $F = C$

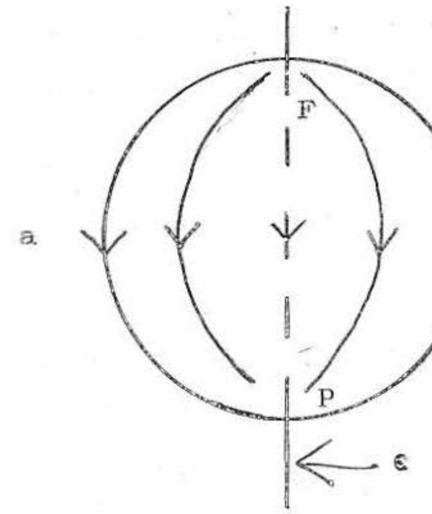
É claro que podemos tomar esta extensão de tal maneira que X' não tenha ligações de sela e que podemos extender X' a X, campo Morse-Smale em M, colocando um poço no interior de cada disco de $M - \text{Int}(N)$ pois X é transversal a ∂N no sentido de Int N a Ext N donde a proposição está demonstrada.

Corolário 2 - Seja M variedade diferenciável compacta conexa de dimensão dois sem bordo e $f: M \to M$ difeomorfismo periódico. Então existe $X: M \to TM$ campo Mose-Smale f-invariante sem órbitas fechadas donde $f \circ X_t = X_t \circ f$, $t \neq 0$ é difeomorfismo M.S.

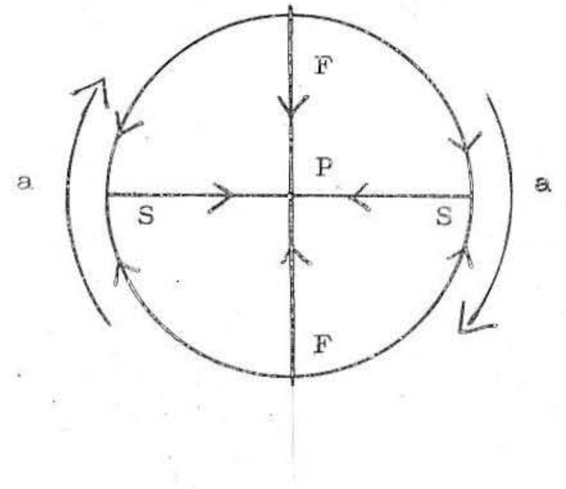
Demonstração: Por Palais [7] existe uma métrica riemaniana para M para a qual f é uma isometria. O Corolário é, então, evidente da proposição bastando tomar $M = N$.

Vamos agora examinar o problema das classes de isotopia que possúem M.S. em superfícies, M, tais que $\chi(M) \geq 0$. Temos então que M é uma das seguintes superfícies: a esfera, o plano projetivo, o toro ou a garrafa de Klein.

No caso $M = S^2$, M possui somente duas classes de isotopia a que preserva e a que inverte a orientação de S^2 e em cada uma delas podemos exibir um M.S.. No primeiro caso o tempo um de um campo M.S. sem órbitas fechadas, e.g. polo norte-polo sul, resolve. No segundo caso podemos tomar, por exemplo, $f = R \circ X_t = X_t \circ R$, $t \neq 0$, onde R é a reflexão no eixo ϵ e X é o campo polo norte-polo sul com a necessária simetria como mostra a figura abaixo:



Se $M = P^2$ só temos uma classe de isotopia, a da identidade, e novamente o tempo um de um campo M.S. sem órbitas fechadas resolve, por exemplo:



$M = T^2$. Neste caso vamos mostrar que uma classe de isotopia φ se T^2 possui M.S. se e somente se os autovalores de $H_1(\varphi)\otimes I: H_1(M,\mathbb{Z})\otimes \mathbb{C} \to H_1(M,\mathbb{Z})\otimes \mathbb{C}$ são números da forma ± 1, $\pm i$, $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $+\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Em particular, φ possui M.S. se e somente se $|\mathrm{tr}\, H_1(\varphi)\otimes I| \leq 2$ resultado já demonstrado por G. Fleitas num trabalho não publicado. De fato se existe $f \in \varphi$ M.S. temos por Manning [4] que:

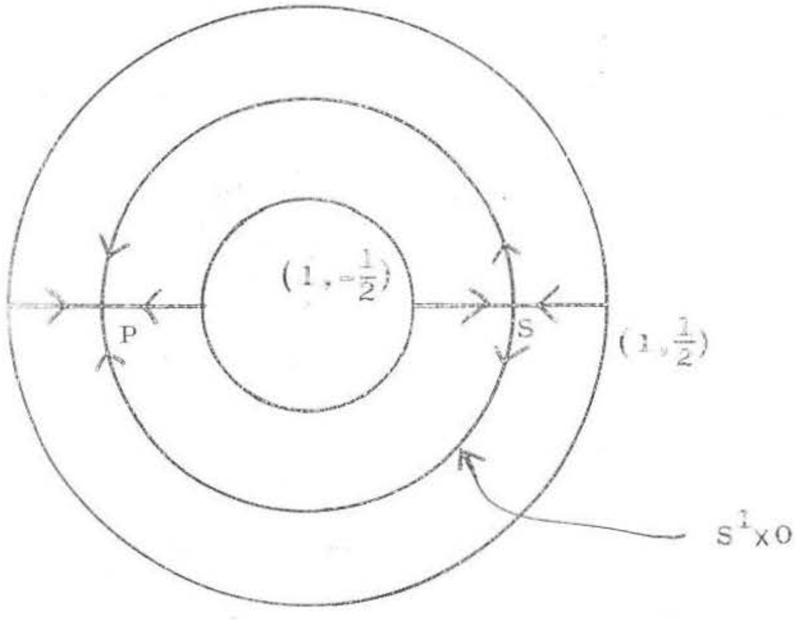
$0 = \text{entropia } (f) \geq \log \max \{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$ onde λ_1 e λ_2 são os autovalores de $H_1(\varphi)\otimes I$. Como $\det H_1(\varphi)\otimes I = \pm 1$ segue-se que $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ donde ou λ_1 e λ_2 são reais, e neste caso λ_1 e $\lambda_2 \in \{-1,+1\}$, ou os autovalores de $H_1(\varphi)\otimes I$ são complexos da forma $a \pm ib$, $b \neq 0$, satisfazendo $2a \in \mathbb{Z}$ e $a^2+b^2 = 1$ donde $a \pm ib$ é da forma $\pm i$, $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ o que prova a necessidade das condições acima. Para ver a suficiência vamos considerar T^2 como o espaço quociente de $\mathbb{R}^2$ pelo grupo abeliano livre gerado pelas isometrias de $\mathbb{R}^2$ α e β: $\alpha: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x+1,y) \in \mathbb{R}^2$ e $\beta: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x,y+1)$ o grupo gerado pelas isometrias α e β pode ser identificado com $H_1(T^2,\mathbb{Z})$. Na base $\{\alpha,\beta\}$ de $H_1(T^2,\mathbb{Z})$, $H_1(\varphi)$ é expresso por uma matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S\ell(2,\mathbb{Z})$ e podemos obter $f \in \varphi$ da forma

$$\widetilde{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} \in T^2 \to A\,\widetilde{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$$

Se os autovalores de $H_1(\varphi)\otimes I$ são complexos então f é periódica e pelo Corolário 2 existe M.S. isotópico a f. Se os autovalores de $H_1(\varphi)\otimes I$ são reais existe um subespçao unidimensional A-invariante de $\mathbb{R}^2$ com inclinação racional donde po demos obter $\gamma: S' \to T^2$ mergulho que não limita o disco e f-invariante i.e. $f(\gamma) = \gamma$. Podemos obter então σ_1 e σ_2 mergulhos $S^1 \times [-1,1] \to T^2$ t.q. $\sigma_1 \cup \sigma_2 = T^2$, $\operatorname{Int} \sigma_1 \cap \operatorname{Int} \sigma_2 = \phi$ e $f' \in \varphi$ t.q. $f'\sigma_1 = \sigma_i$ $i = 1,2$ e $\sigma_i f' \sigma_1^{-1}$ em $S^1 \times [-1/2, 1/2]$ é igual a um dos quatro difeomorfismos abaixo:

$$(z,t) \longmapsto (z,\pm t) \quad \text{ou} \quad (z,t) \longmapsto (\bar{z},\pm t).$$

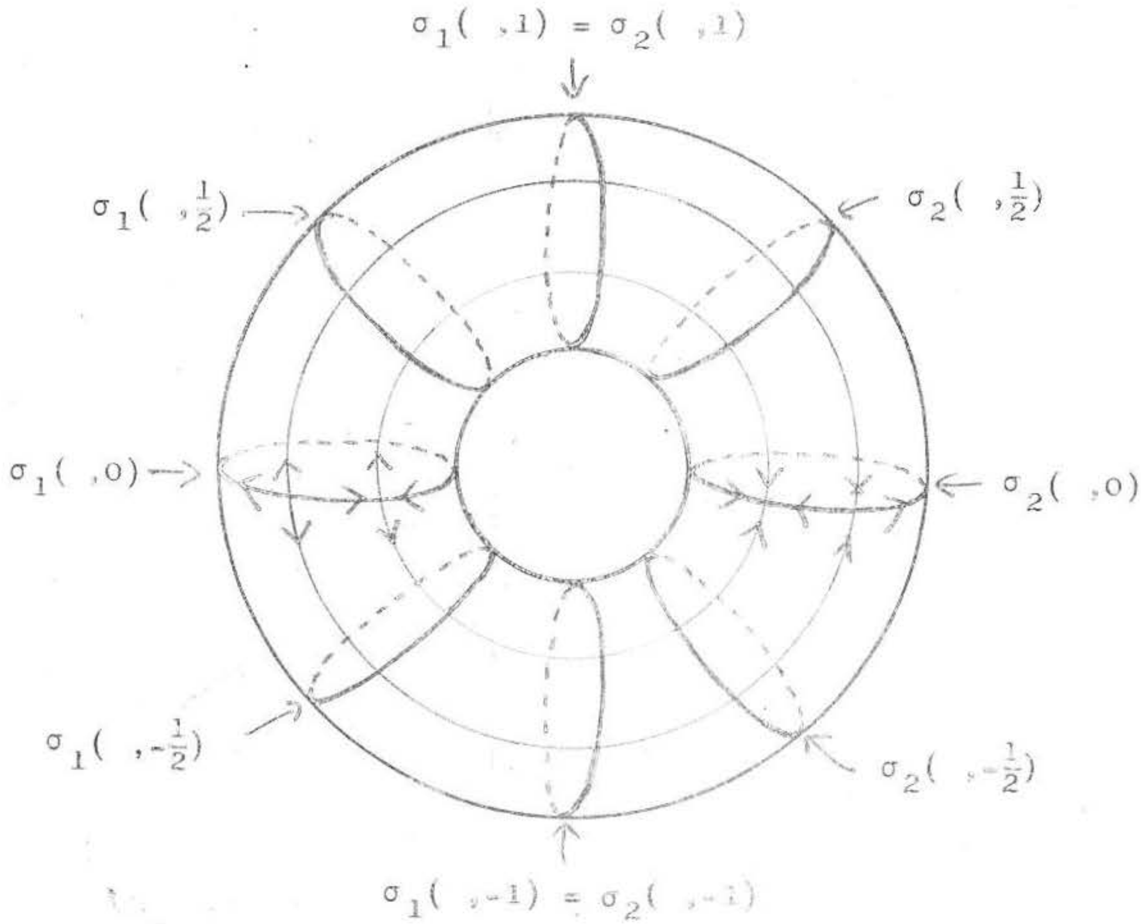
Em $\sigma_i(S^1 \times [-1/2, 1/2])$ tomemos o campo $(-1)^i X'$, $i = 1,2$, onde X' é o push-forward, via σ_i, do campo com o seguinte diagrama de fase convenientemente simétrico:



Finalmente, seja X uma extensão a T^2 do campo X' t.q.

1) X não tenha ligação de sela

2) $X_1\left(\bigcup_{i=1,2} \sigma_i(S^1 \times [-1,-1/2] + S^1 \times [1/2,1])\right) \subseteq \sigma_2(S^1 \times (-1/2, 1/2))$



Nestas condições X é um campo M.S. e, modificando f' por uma pequena isotopia para evitar tangências, temos que $f' \circ X_1$ é um M.S. em φ concluindo o caso $M = T^2$.

Se M é a garrafa de Klein, K^2, vamos mostrar que toda classe de isotopia de M tem M.S.. Para tanto é suficiente mostrar que dado φ, classe de isotopia de M, podemos obter $f \in \varphi$ e $\gamma: S^1 \to M$ mergulho bilateral que não limita disco t.q. $f(\gamma) = \gamma$ pois, com um raciocínio análogo ao feito no caso de $M = T^2$ e $H_1(\varphi) \otimes I$ com autovalores reais, obtemos o resultado enunciado. Para ver isto vamos considear K^2 o espaço de órbitas do grupo, G, gerado pelas isometrias α e β de $\mathbb{R}^2$:

$$\alpha: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (x+1,-y) \in \mathbb{R}^2$$

e

$$\beta: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (x,y+1) \in \mathbb{R}^2$$

G pode ser identificado com $\pi_1(K^2,P)$, $P \in K^2$, e dado $g \in G$, $g = g_k^{\xi_k} \dots g_1^{\xi_1}$, $k \geq 1$ e $g_i \in \{\alpha,\beta\}$, $\xi_i = \pm 1$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$g(x,y) = \left(x + \sum_{g_i=\alpha} \xi_i,\ (-1)^{\sum_{g_i=\alpha} |\xi_i|} y + n\right)$$

para todo x e $y \in \mathbb{R}$.

Isto mostra que dado $g \in G$ existe uma expressão única de g em termos de α e β da forma $\beta^n \alpha^m$, n e $m \in \mathbb{Z}$. Seja $f_*: \pi_1(K^2,P) \to \pi_1(K^2,P)$ a aplicação induzida por f, difeomorfismo de φ que deixa P fixo. Temos que

$$f_*(\alpha) = \beta^c \alpha^a \quad e \quad f_*(\beta) = \beta^d \alpha^b,$$

a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$.

Dada $F = (f_1,f_2): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, levantamento de f t.q. $F(\tilde{P}) = \tilde{P}$, para $\tilde{P} \in \mathbb{R}^2$ sobre P, temos que:

1) $f_1(x+1,-y) = f_1(x,y) + a$
2) $f_2(x+1,-y) = (-1)^a f_2(x,y) + c$
3) $f_1(x,y+1) = f_1(x,y) + b$
4) $f_2(x,y+1) = (-1)^b f_2(x,y) + d$

Por 3) temos que $f_1(x,\ )$ é uma homotopia em $S^1 \approx \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de grau b e por 1) temos que $f_1(1,\ )\circ R = T \circ f_1(0,\ )$ onde R é uma reflexão e T uma rotação em S^1 portanto $gr(f_1(1,\ )\circ R) = gr(T \circ f_1(0,\ )) \therefore - gr\, f_1(1,\ ) = gr\, f_1(0,\ )$ donde $b = gr\, f_1(x,\ ) = 0$.

Analogamente temos

$$(f^{-1})_* = \beta^{\bar{c}}\alpha^{\bar{a}} \quad e \quad (f^{-1})_* = \beta^{\bar{d}},$$

$\bar{a}$, $\bar{c}$ e $\bar{d} \in \mathbb{Z}$, donde

$$\beta = (f^{-1})_* \circ f_*(\beta) = (\beta^{\bar{d}})^d = \beta^{\bar{d}d}$$

logo $\bar{d}d = 1$ e $\bar{d} = \pm 1$.

Assim $f_*(\beta) = \beta^{\pm 1}$ provando o que queríamos pois basta tomar $\gamma: S^1 \to M$ na classe de conjugação de β e modificar f convenientemente. Isto termina com o caso $\chi(M) \geq 0$.

Passemos então à demonstração do Teorema A.

Teorema A - Se M é superfície diferenciável sem bordo com característica de Euler-Poincaré $\chi = \chi(M) < 0$ e φ classe de isotopia de M então cada uma das seguintes condições é necessária e suficiente para que φ possua M.S.

1) $C(\varphi) = c(\varphi) = 1$
2) $CC(\varphi) = cc(\varphi) = 1$
3) $\forall\, \alpha \in \mathcal{S}$ $\forall\, \langle\ ,\ \rangle$ métrica riemaniana de M

$$\lim_{n\to\infty} [\,i(\langle\ ,\ \rangle, \varphi^n(\alpha))]^{\frac{1}{n}} = 1$$

4) φ é de tipo algebricamente finito.

Demonstração: Se existe $f \in \varphi$ M.S. temos por Bowen [2] que:

$$0 = \text{entropia } (f) \geq \log C(f) = \log C(\varphi)$$

donde $C(f) = c(f) = 1$. É claro que 1) implica 2) e, pelas observações da Parte I relacionando os elementos de $\mathcal{S}$ com classes de conjugação de $\pi_1(M)$, temos que:

$$\limsup_{n\geq 1} i(\langle \cdot, \rangle, \varphi^n \alpha)^{\frac{1}{n}} \leq CC(\varphi) = 1,$$

para todo $\alpha \in \mathcal{S}$ e $\langle\ \rangle$, métrica riemaniana de M. Pelo Teorema 3 existe o limite de $(i(\langle\ ,\ \rangle, \varphi^n(\alpha))^{\frac{1}{n}})_{n\geq 1}$ donde 3) é necessário para 2). Vamos provar agora que 3) implica 4). De fato, supondo 3) vamos provar 4') onde:

4') Existem $f \in \varphi$, $\{\sigma\}$ família finita e disjunta de mergulhos $\sigma: S^1 \times [-1,1] \to M$ e $m \geq 1$ t.q.

4'a) $f(\Sigma\sigma) = \Sigma\sigma$

4'b) $f^m(p) = p$, $p \in M - \Sigma \operatorname{Int} \sigma$ e

4'c) Existe métrica riemaniana de curvatura constante -1 em $M - \Sigma \operatorname{Int} \sigma$ t.q. f é isometria em $M - \Sigma \operatorname{Int} \sigma$ e $\sigma(\ ,-1)$, $\sigma(\ ,1)$ são geodésicas fechadas.

Realmente, por hipótese e pelos Teoremas 2 e 3 existe $f \in \varphi$ que é periódica ou decomponível. Se podemos obter $f \in \varphi$ periódica estamos feitos de modo que podemos supor que existem difeomorfismos decomponíveis em φ. Seja então $R = R(\varphi)$ o conjunto das famílias não triviais de curvas fechadas simples de M, $\{a\}$, tais que existe $f \in \varphi$ satisfazendo $f(\Sigma a) = \Sigma a$. Em R vamos definir uma relação reflexiva e transitiva, $\leq$, dada por $\{a_1\} \leq \{a_2\}$ se e somente se existe $\gamma: \{a_1\} \to \{a_2\}$ injetiva tal que $\gamma(a_1)$ e a_1 representam o mesmo elemento de $\mathcal{S}$, para todo a_1. É fácil ver que, $\{a_1\} \equiv \{a_2\}$ se e somente se $\{a_1\} \leq \{a_2\}$ e $\{a_2\} \leq \{a_1\}$, é uma relação de equivalência em R, que $\leq$ induz uma relação de ordem nas classes desta relação de equivalência e, como a cardinalidade dos elementos de R é limitada por $K = K(\chi(M)) > 0$, existem elementos maximais em $R/\equiv$. Seja então $\{a\} \in R$ t.q. $\{a\}$ é maximal nesta ordem e $f \in \varphi$ t.q. $f(\Sigma a) = \Sigma a$. Tomando em M uma métrica de curvatura negativa, $(\ ,\ )$, podemos supor, pelo teorema de Gauss-Bonnet e pelo Teorema 10, página 243, de Bishop e Crittensen [1], que os a's são geodésicas fechadas de $(\ ,\ )$. Seja $\{\sigma_a\}$ família de mergulhos disjuntos de $S^1 \times [-1,1]$ em M t.q. $\sigma_a(\ ,0) = a$. Modificando f por uma isotopia podemos supor que $f(\Sigma\sigma_a) = \Sigma\sigma_a$ e $f(\Sigma a) = \Sigma a$. Seja $N \subseteq M$ componente conexa de $M - \sum_a \operatorname{Int} \sigma_a$, $n = \pi(N) \geq 1$ e $g: N \to N$ o difeomorfismo induzido por f^n, $g(p) = f^n(p)$, $p \in N$. Se N é a esfera menos três discos abertos temos que g^6 é isotópico à identidade donde, por Fenchel [3], g é isotópico à h, isometria periódica como em 4'c). Se N não é a esfera menos três discos abertos temos, pelo Teorema 2, que g é isotópico a h que é PA, decomponível ou periódica.

Em qualquer caso, porém, $g^{-1}h$ é isotópico à identidade de N. Seja então $F': I \times N \to N$ isotopia ligando I_N a $g^{-1}h$. A partir de F' podemos obter uma isotopia de M, F, satisfazendo:

1) $F(\ ,0) = I_M$
2) $F(p,t) = F'(p,t)$ $p \in N$ e $t \in I$
3) $F(p,t) = p$ para todo $t \in I$ e $p \notin V \subseteq M$, V vizinhança conexa de N tal que $V \cap a = \emptyset$, para todo a.

Assim $f \circ F(\ ,1)$ é isotópica à f via $f \circ F$. Vamos agora mostrar que $h: N \to N$ no caso em que N não é a esfera menos três discos abertos, não pode ser P.A. nem decomponível. De fato se h é decomponível e $\{a'\}$ é uma família não trivial de curvas fechadas simples de $\mathrm{Int}(N)$ que decompõe h então a família não trivial $\{a\} \cup \{f^i(a') \mid a' \in \{a'\}$ e $-n < i \leq 0\}$ é estritamente maior que $\{a\}$ e decompõe $f \circ F(\ ,1) \in \varphi$ que contradiz a hipótese da maximalidade de $\{a\}$. Se h é P.A. temos para algum $\lambda > 1$ que: $\lim\limits_{k \to 0} i((\ ,\ ), \widetilde{h^k(b)}^N) = \lambda$ onde b é uma curva fechada simples de $\mathrm{Int}(N)$ que não limita disco ou cilindro. Para $k \geq 1$ temos, pelo Teorema 10, página 243, de Bishop e Crittenden [1], que $i((\ ,\ ), \widetilde{h^k \circ b}^N) = \ell(g)$, onde $\ell(g)$ é o comprimento de uma geodésica fechada simples isotópica a $h^k \circ b$ em N contida em $\mathrm{Int}\, N$ e $i((\ ,\ ), \widetilde{h^k \circ b}^M) = \ell(g')$, onde g' é uma geodésica fechada simples isotópica a $h^k \circ b$ em M. Pelo teorema de Gauss-Bonnet e pelo fato de $(\ ,\ )$ ter curvatura negativa temos que $g = g'$ que contradiz a hipótese inicial uma vez que $(f \circ F(\ ,1))^{kn} = h^k$ em N e teriamos

$$\lim_{k \to \infty} i(\ ,\ ), \widetilde{(f \circ F(\ ,1))^{kn} \circ b)}^M = \lambda > 1.$$

Assim h é periódica de período digamos $\pi \geq 1$ o que prova que $f \circ F(\ ,1)$ é periódica de período $n\pi$ em $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} f^i(N)$. O Teorema 2 nos garante também a existência de uma métrica riemaniana de curvatura constante -1 tal que as componentes conexas de ∂N são geodésicas fechadas e para qual h é uma isometria. Levando esta métrica a $f^i(N)$, $0 < i < n$, via f^i temos que $f \circ F(\ ,1)$ é uma isometria em $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} f^i(N)$, que esta métrica tem curvatura constante -1 e que $\partial(\bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} f^i(N))$ tem por componentes conexas geodésicas fechadas.

Procedendo da mesma maneira nas outras órbitas das componentes conexas de $M - \bigcup \sigma_\gamma$ vemos que φ satisfaz 4').

É claro que 4') implica 4) e que 4) implica 1) pois vê-se facilmente que $C(f^m) = 1$ uma vez que $f^m = I_M$ fora de um número finito de cilindros disjuntos mergulhados em M e que $C(f^m) = C(f)^m$. Portanto de 4') segue-se 1). Vimos que 3) implica 4') vamos agora provar que se φ satisfaz 4') podemos exibir um M.S. em φ. Para tanto seja $f \in \varphi$, $\{\sigma\}$ e $m \geq 1$ com em 4').

Dado σ e $n = \pi(\sigma) \geq 1$, $\sigma^{-1} f^n \sigma: S^1 \times [-1,1] \to S^1 \times [-1,1]$ é isotópico a um difeomorfismo h de $S^1 \times [-1,1]$ tal que h é igual, em $S^1 \times [-1/2, 1/2]$, a um dos quatro difeomorfismos abaixo:

$$(z,t) \longmapsto (z,\pm t) \quad \text{ou} \quad (z,t) \longmapsto (\bar{z},\pm t)$$

e $h = \sigma^{-1} f^n \sigma$ numa vizinhança de $S^1 \times -1 + S^1 \times 1$.

Seja então F' isotopia de $S^1 \times [-1,1]$ ligando $I_{S^1 \times [-1,1]}$ à $(\sigma^{-1} f^n \sigma)^{-1} \circ h$. F' tem, então, as seguintes propriedades:

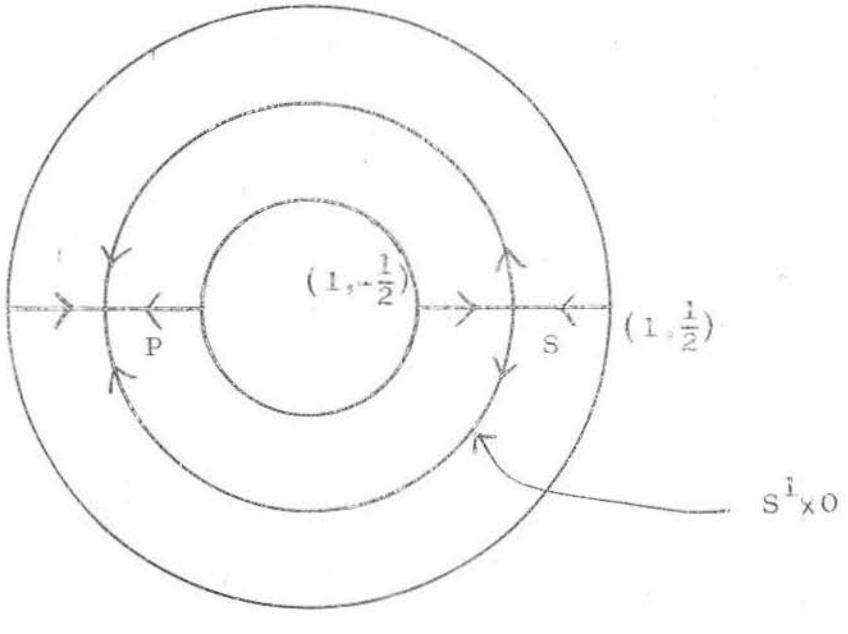
1) $F'(\ ,0) = I$ em $S^1 \times [-1,1]$
2) $\sigma^{-1} \circ f^n \circ \sigma \circ F'(\ ,1) = h$
3) $F'(\ ,t) = I$ em uma vizinhança $S^1 \times -1 + S^1 \times 1$, $t \in I$.

Levando, via σ, esta isotopia para M obtemos uma isotopia $F: M \times I \to M$ t.q.

1) $F(p,t) = p$ para $t=0$ e $p \in M$ ou $p \notin \sigma$ e $t \in I$
2) $f \circ F(\ ,1)$ é isotópico à f e $\sigma: S^1 \times [-1,1] \to M$ é um mergulho t.q. $\sigma^{-1}[f \circ F(\ ,1)]^n \sigma(z,t) = (z,\pm t)$ ou

$(\tilde{z},\pm t)$, $z \in S^1$ e $t \in [-1/2, 1/2]$.

Procedendo da mesma maneira nas outras órbitas $(f^i(\sigma))_{i\in\mathbb{Z}}$, $\sigma \in \{\sigma\}$, e modificando f por uma isotopia obtemos expressões similares de $f^{\pi(\sigma)}$ em um mergulho distinguido de cada f órbita de $\{\sigma\}$. Na subvariedade de M, $M' = (M - \Sigma \operatorname{Int} \sigma) \cup$ $\cup\ (\Sigma\ \sigma(S^1\times[-1/2,1/2]))$ tomemos o campo X' f-invariante obtido em cada órbita $\theta = (f^i(\sigma(S^1\times[-1/2,1/2])))_{n\in\mathbb{Z}}$ levando o campo $(z,t)\mapsto(z,\pm)$ e $(z,t)\mapsto(\bar{z},\pm t)$ invariante, como mostra a figura abaixo, pelo mergulho distinguido de θ e em seguida iterando



por f e em cada órbita, $\wp$, das componentes conexas de $M - \Sigma \operatorname{Int} \sigma$ tomando o f iterado de um campo em N $f^{\pi(N)}$-invariante dado pela Proposição 1 onde N é escolhido e fixado arbitrariamente em $\wp$.

Seja X a extensão de X' para M t.q.

1) $X_1(\sigma(S^1 \times [-1,-1/2]) + \sigma(S^1 \times [1/2,1])) \subseteq \sigma((-1/2,1/2))$, para todo σ.

2) X não tenha ligações de selas.

Modificando f em $\sum_{\gamma\in\sigma} \sigma(S^1 \times [-1,-1/2]) + \sigma(S^1 \times [+1/2,1])$ por uma pequena isotopia para evitar tangências temos que $f\circ X_1$ é M.S. e $f\circ X_1$ é isotópico à f via $(f\circ X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ donde $f\circ X_1 \in \varphi$ o que prova o Teorema A.

Referências

[1] Bishop, R.L. e Crittenden, R.J. - Geometry of Manifolds, Acad. Press, 1964.

[2] Bowen, R. - Entropy and the Fundamental Group, a aparecer.

[3] Fenchel, W. - Estensioni di Gruppi Discontinui Transformazioni periodiche delle Superficie, Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat (8) 5, 326-229 (1948).

[4] Manning, A. - Topological Entropy and the First Homology Group, Dyn. Syst. Proc. Symp. Warwick 1973/74 pp. 185-190.

[5] Milnor, J. - A note on Curvature and Fundamental Group, Jour. of Diff. Geom. Vol. 2 1968, pp. 1-7.

[6] Nielsen, J. - Surface Transformations of Algebraically Finite Type, Danske. Vid. Selsk. Math-Phys. Medd. 21, nº 2, 89 pp (1944).

[7] Palais, R.S. - Imbedding of Compact Differentiable Transformations Groups in Orthogonal Representations, J. Math. Mech. 6 (1957), pp. 673-678.

[8] Palis, J. - On Morse-Smale Dynamical Systems, Topology, Vol. 8, 1969.

[9] Palis, J. e Smale, S. - Structural Stability Theorems, Global Analysis Proc. Symp. Pure Math. Vol. 14 AMS (1970).

[10] Sub, M. - Morse-Smale Diffeomorphisms are Unipotent on Homology, Dynamical Systems, Proc. Symp. Salvador (1971) pp. 489-491.

[11] Smale, S. - Differentiable Dynamical Systems, B.A.M.S. 73 (1967), pp. 747-817.

[12] Thurston, W.P. - On the Geometry and Dynamics of Diffeomorphisms of Surfaces, a aparecer.