ISOMORFISMOS DE ANÊIS DE POLINÔMIOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

GELSA KNIJNIK BAUMVOL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA • UFRGS • 1979

DISSERTAÇÃO realizada sob a orientação do Dr. Miguel A. Ferrero, apresentada ao Instituto de Matemática da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Ao

Dr. L. C. Meneghini

A muita gente sou grata neste momento.

Em especial,

aos meus colegas do Instituto de Matemática da UFRGS, particularmente aos membros do Colegiado do DMPA, pelas condições de trabalho que tornaram este mestrado possível;

ao Professor Miguel A. Ferrero, por seu contagiante entusiasmo pela matemática, pela extrema dedicação com que me orientou e pela paciência com que sempre me ouviu;

ao Professor Kasuo Kishimoto, por sua constante disponibilidade em ensinar;

à Cydara, por sua amizade de todos os momentos;

à Heloiza, pelo carinho com que se envolveu no dia a dia deste mestrado;

ao Israel e à Laura, por terem sido os companheiros desta jornada.

Gelsa Knijnik Baumvol

S U M Á R I O

PREFÁCIO

Seja B um anel. O anel de Polinômios $B[X]$ na indeterminada X com coeficientes em B é o anel formado por todas as combinações lineares finitas $\sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ ($b_i \in B$) cuja soma e multiplicação se definem do seguinte modo: se $p(X) = \sum_{i=0}^{m} X^i a_i$ e $q(X) = \sum_{i=0}^{m} X^i c_i$ são elementos arbitrários de $B[X]$, então

$$p(X) + q(X) = \sum_{i=0}^{m} X^i (a_i + c_i)$$

$$p(X)q(X) = \sum_{i=0}^{m^2} X^i d_i \,, \quad \text{onde} \quad d_i = \sum_{j=0}^{i} a_{i-j} b_j$$

Na Teoria de Anéis não comutativos desempenham um papel fundamental os Anéis de Polinômios Tipo Automorfismo e Tipo Derivação. Para definir o primeiro deles, que anotaremos por $B[X,\alpha]$, consideremos α um automorfismo de B e $B[X,\alpha]$ o conjunto de todos os polinômios $\sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ ($b_i \in B$) na indeterminada X, cuja soma é definida como em $B[X]$ e cuja multiplicação é definida por $bX = Xb^{\alpha}$, para todo $b \in B$, onde b^{α} indica o elemento de B que se obtém ao aplicar α em b.

Seja agora D uma derivação de B. O Anel de Polinômios Tipo Derivação, que anotaremos por $B[X,D]$ é o anel de todos os polinômios $\sum_{i=0}^{n} X^i b_i$, na indeterminada X, cuja soma é definida também de modo usual e cuja multiplicação é definida por $bX = Xb + D(b)$, para todo $b \in B$.

O Anel de Polinômios usual $B[X]$ pode ser obtido como caso particular de $B[X,\alpha]$ ou $B[X,D]$ desde que se tome α como a aplicação identidade de B ou D como a derivação nula.

A primeira caracterização de automorfismos de anéis de polinômios deve-se a Gilmer |4| (1968), que estudou os automorfismos de $B[X]$ para B um anel comutativo. Coleman e Enochs |1| (1971) generalizaram os resultados de Gilmer para o caso onde B é um anel arbitrário e obtiveram, como resultado principal, o seguinte teorema:

"Seja B um anel e $\{b_i\}_{0\leq i\leq n}$ uma família de elementos de B. Então, as seguintes condições são equivalentes:

(1) b_i é central, $\forall i$ tal que $0\leq i\leq n$, b_1 é inversível e b_i é nilpotente, $\forall i$ tal que $2\leq i\leq n$.

(2) A aplicação $\Phi: B[X]\to B[X]$ definida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ induz um homomorfismo sobrejetor.

(3) A aplicação $\phi: B[X]\to B[X]$ definida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ induz um B-isomorfismo".

Estes resultados foram generalizados por Rimmer |8| (1978) que determina os B-automorfismos de $B[X,\alpha]$ que deixam fixos os elementos de B, para um anel arbitrário B e um automorfismo α de B. O resultado central deste trabalho estabelece que

"Seja B um anel com unidade e α um automorfismo de B. Então, as seguintes condições são equivalentes:

(a) A aplicação $\phi: B[X,\alpha]\to B[X,\alpha]$ induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{m} X^i b_i$ é um B-automorfismo.

(b) A aplicação $\phi:B[X,\alpha] \to B[X,\alpha]$ induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ é um B-epimorfismos.

(c) A família $\{b_i\}_{0 \leq i \leq n}$ de elementos de B satisfaz

(i) $b_i b^{\alpha} = b^{\alpha^i} b_i$, $\forall b \in B$, $\forall i$ tal que $0 \leq i \leq n$

(ii) $b_1 \in U(Z(B))$

(iii) b_i é nilpotente, $\forall i$ tal que $2 < i < n$".

Rimmer, neste mesmo artigo, analisa também o caso de isomorfismos entre Anéis de Polinômios Tipo Automorfismo cujos anéis subjacentes são isomorfos.

Como os resultados de Coleman e Enochs |1| e Gilmer |4| podem ser obtidos como corolários dos de Rimmer, nos restringiremos a demonstrar os resultados deste último.

Os automorfismos de $B[X,D]$ que deixam fixos os elementos de B foram estudados por Ferrero e Kishimoto | 3 |. Os principais resultados obtidos pressupõem a hipótese de que B é um anel de característica 0. Neste caso, seja $\{b_i\}_{0 \leq i \leq n}$ uma família de elementos de B. Consideremos as seguintes condições:

(a) $b_i b = \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} D^{j-i}(b) b_j$ para todo $b \in B$ e $i \geq 1$

$$b_0 b + D(b) = \sum_{j=0}^{n} D^j(b) b_j \text{ para todo } b \in B$$

(b) b_1 é um elemento inversível

(c) b_i é nilpotente para $i \geq 2$

(c') O ideal bilateral N_0 gerado por $\{D^j(b_i) \mid j \geq 0, 2 \leq i \leq n\}$ é um ideal nilpotente.

Então,

(1) Se ϕ é um B-automorfismo então $\{b_i\}_{0\leq i\leq n}$ satisfaz (a), (b) e (c).

(2) Se $\{b_i\}_{0\leq i\leq n}$ satisfaz (a), (b) e (c') então ϕ é um B-automorfismo.

Conseqüentemente,

(3) Se B é noetheriano, ou todo elemento nilpotente de B é central (por exemplo, se B é comutativo) ou existe um inteiro m tal que $D^m = 0$, então ϕ é um B-automorfismo se e somente se (a), (b) e (c) são verificadas.

Finalmente, os automorfismos entre anéis de polinômios cujos anéis subjacentes são isomorfos foram estudados pela autora em colaboração com M.Ferrero. Os resultados obtidos generalizam os de M.Ferrero e K.Kishimoto | 3 |.

No Capítulo 0 apresentamos alguns resultados gerais da Teoria de Anéis que serão necessários nos capítulos seguintes.

No Capítulo I desenvolvemos os resultados básicos referentes a Anéis de Polinômios Tipo Automorfismo e Tipo Derivação.

O Capítulo II trata de Automorfismos de Anéis de Polinômios Tipo Automorfismo e, como corolário são obtidos os resultados para anéis de polinômios usuais.

O Capítulo III trata de Automorfismos de Anéis de Polinômios Tipo Derivação e no Capítulo IV apresentamos alguns resultados sobre isomorfismos entre Anéis de Polinômios Tipo Derivação cujos anéis subjacentes são isomorfos.

CAPÍTULO 0

INTRODUÇÃO

Apresentamos aqui vários resultados clássicos sobre a Teoria de Anéis a que faremos referência nos capítulos seguintes. Um estudo mais aprofundado sobre o assunto pode ser encontrado em Ribemboim |7| e Curtis-Reiner |2|. No § 1 estabelecemos algumas Definições e Teoremas gerais. No § 2 fazemos um estudo sobre Nilpotência.

Neste capítulo, B indicará sempre um anel com unidade.

§ 1 ALGUNS RESULTADOS SOBRE TEORIA DE ANÉIS

Definição 0.1.1

Sejam J e J' ideais à esquerda de B. Anotamos por JJ' o conjunto de todas as somas finitas de produtos xx', com $x \in J$ e $x' \in J'$.

Observemos que JJ' é um ideal e se J e J' forem bilaterais teremos que JJ' é bilateral e $JJ' \subset J \cap J'$. Anotaremos por J^n o produto obtido pela multiplicação de J, n vezes.

Definição 0.1.2

Seja J um ideal à esquerda de B. J é dito NILPOTENTE se e somente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $J^n = (0)$.

Definição 0.1.3

Seja J um ideal à esquerda de B. J é dito NILIDEAL se e somente se todo elemento de J é nilpotente.

As proposições seguintes estabelecem algumas propriedades importantes sobre ideais nilpotentes e nilideais.

Proposição 0.1.4

(a) Se J é um ideal nilpotente de B então J é nilideal.

(b) Se J é um ideal nilpotente à esquerda (à direita) de B então JB (BJ) é um ideal bilateral nilpotente que contém J.

(c) Se J e J' são nilideais bilaterais então J + J' é um nilideal bilateral. Mais geralmente, se $\{J_i\}_{0 \leq i \leq n}$ é uma família de nilideais bilaterais de B, então $\sum_{i=0}^{n} J_i$ é um nilideal bilateral.

Se J e J' são ideais nilpotentes de B então J + J' é um ideal nilpotente de B. Mais geralmente, se $\{J_i\}_{0 \leq i \leq n}$ é uma família de ideais nilpotentes de B então $\sum_{i=0}^{n} J_i$ é um ideal nilpotente de B.

Demonstração

(a) Se J é nilpotente então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $J^n = 0$. Seja $x \in J$.

Como $x.x \ldots. x = x^n \in J^n$, então $x^n = 0$. Logo, J é nilideal.

(b) Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $J^m = 0$. É imediato que $J \subset JA$. Logo, $(JA)^m = (JA)(JA) \ldots (JA) = J(AJ)(AJ) \ldots (AJ)A \subseteq J^m A = (0)$.

(c) Sejam J e J' ideais bilaterais de A. Seja $\psi: \frac{A}{J \cap J'} \to \frac{A}{J}$ o epimorfismo definido por $a + (J \cap J') \mapsto a + J$ e consideremos a restrição de ψ ao ideal $\frac{J'}{J \cap J'} \subseteq \frac{A}{J \cap J'}$.

$\psi(\frac{A}{J \cap J'}) = \{a + (J \cap J') \mid a \in J'\} = \{(a + b) + J \mid a \in J' \text{ e } b \in J\} = \frac{J + J'}{J}$.

Além disso $\psi|_{J'/J \cap J'}$ é injetora. Logo, $\frac{J'}{J \cap J'} \cong \frac{J' + J}{J}$.

Assumamos que J e J' sejam nilideais. Seja $x \in J + J'$. Então, $x + J = \psi\big(y + (J \cap J')\big)$ com $y \in J'$.

Se m é o índice de nilpotência de y, então: $x^m + J = (x + J)^m = \psi\big(y^m + (J \cap J')\big) = \psi\big(0 + (J + J')\big) \in J$. Logo, $x^m \in J$, o que indica que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^{m^n} = 0$. Portanto, $J + J'$ é nilideal. Por indução mostra-se que o resultado pode ser estendido a uma família finita de ideais bilaterais.

Assumamos que J e J' sejam nilpotentes. De (b) temos que JA e $J'A$ são ideais bilaterais nilpotentes. Portanto, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $(J + J')^r A^r = (0)$, o que mostra a nilpotência de $J + J'$. Pode-se estender este resultado para uma família de ideais nilpotentes, utilizando-se indução sobre o número de elementos da família. $\square$

Proposição 0.1.5

(1) A união de todos os nilideais de B é um nilideal, anotado por $UR(B)$.

(2) A união de todos os ideais bilaterais nilpotentes de B é um nilideal, anotado por $NR(B)$, que é igual à união de

todos os ideais à esquerda (ou à direita) nilpotentes de B.

(3) $NR(B) \subseteq UR(B) \subseteq N(B)$, onde $N(B)$ indica o conjunto dos elementos nilpotentes de B.

Demonstração

(1) Seja U a união de todos os nilideais de B. Sejam a e a' dois elementos de U. Existem, então, J e J' nilideais de B tais que $a \in J$ e $a' \in J'$. Logo $a - a' \in J + J'$. Pela Proposição 0.1.4 (parte c), $J + J'$ é um nilideal e, consequentemente, U é um subgrupo aditivo de B. Como $BU \subseteq U$ e $UB \subseteq U$, segue que U é um ideal bilateral. Seja $x \in U$ e J nilideal de B tal que $x \in J$. Então, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x^m = 0$. Logo, U é um nilideal.

(2) Seja V a união de todos os ideais bilaterais nilpotentes de B. Utilizando-se a Proposição 0.1.4 (parte a) e o item (1) acima, temos que V é um nilideal. Logo V contém (e portanto é igual) à união de todos os ideais nilpotentes à esquerda (ou à direita) de B.

(3) Como todo ideal nilpotente é um nilideal temos que $NR(B) \subseteq UR(B) \subseteq N(B)$. $\square$

Definição 0.1.6

Com as notações acima, $NR(B)$ é chamado RADICAL DE NOETHER de B e $UR(B)$ é dito NILRADICAL SUPERIOR de B.

Definição 0.1.7

O ideal bilateral R de B é dito um NILRADICAL de B sempre que B seja um nilideal e o único ideal bilateral nilpotente de B/R seja (0).

Proposição 0.1.8

Se todo elemento nilpotente de B está no centro de B (por exemplo, se B é um anel comutativo), então NR(B) = UR(B) = N(B).

Demonstração

Seja $a \in Z(B)$ um elemento nilpotente. É imediato, então, que Ba é um ideal nilpotente. Portanto, $a \in Ba \subseteq NR(B)$, o que mostra que $N(B) \subseteq NR(B)$. As outras inclusões são conseqüência imediata da Proposição 0.1.5. $\square$

Definição 0.1.7

O anel B é dito NOETHERIANO à esquerda quando o B-módulo à esquerda $_BB$ for noetheriano. Analogamente definimos anéis noetherianos à direita.

Definição 0.1.8

O anel B é dito ARTINIANO à esquerda quando o B-módulo à esquerda $_BB$ for artiniano. Analogamente definimos anéis artinianos à direita.

Utilizaremos os Teoremas seguintes no Capítulo III. Uma demonstração cuidadosa destes resultados encontra-se em Ribemboim | 7 |.

Teorema 0.1.9 (Levitzki)

Se B é um anel noetheriano à esquerda então todo nili-ideal bilateral é nilpotente. Portanto, UR(B) = NR(B) é o maior ideal bilateral nilpotente de B.

Teorema 0.1.10 (Akizuki-Hopkins)

Todo anel artiniano à esquerda é um anel noetheriano à esquerda.

§ 2 NILPOTÊNCIA

Seja NR(B) o radical de Noether de B. A partir de agora, anotaremos NR(B) = N. Observemos, pois, que afirmar que $x \in N$ é equivalente a garantir a existência de um ideal bilateral nilpotente $J \subseteq B$ tal que $x \in J$.

O seguinte estudo sobre nilpotência será utilizado nos Capítulos II e III. Os resultados apresentados foram obtidos por Ferrero, M. e Kiskimoto, K. | 3 |.

Consideremos um sistema $S = \{d_{ij} \in B \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$. Assumamos que cada $d_{ij} \in S$ satisfaça a seguinte condição:

$$d_{ij}b \in \sum_{\substack{p\geq i\\ q\geq j}} Bd_{pq} \qquad \forall b \in B \qquad [0.1]$$

É imediato que o ideal à esquerda $B_k = \sum_{p+q\geq k} Bd_{pq}$ é um ideal bilateral, para todo $k \geq 1$ uma vez que da condição [0.1] segue que $B_k B \subset B_k$.

<u>Lema 0.2.1</u>

Seja $\{d_{ij}\}_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ uma família de elementos de B que verifica [0.1]. Seja $B_k = \sum_{p+q\geq k} Bd_{pq}$ e N o radical de Noether de B. Se d_{pq} é nilpotente para todo par de inteiros (p,q) tal que $p+q\geq k$, então $d_{pq} \in N$ e B_k é um ideal nilpotente.

<u>Demonstração</u>

O Lema é verdadeiro para $k = mn$. De fato, $B_{nm} = Bd_{nm}$ é um ideal nilpotente uma vez que para n e m a condição [0.1] reduz-se a $d_{nm}b \in Bd_{nm}$. Portanto,

$$b_1 d_{nm} . b_2 d_{nm} \ldots b_t d_{nm} = b_1 b_2' \ldots b_t' d_{nm}^t \qquad \forall t \in \mathbb{N} .$$

Como, por hipótese, d_{pq} é nilpotente, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $d_{nm}^r = 0$ e, conseqüentemente, $b_1 d_{nm} \ldots b_r d_{nm} = 0$.

Assumamos que B_u é nilpotente para todo $u > v+1$ com $v \geq k$. e mostremos que B_v é nilpotente.

Seja $p \geq 1$, $q \geq 1$ tal que $p+q = v$

Seja $I_{(p,q)} = Bd_{pq} + B_u$

Pela condição [0.1] temos que $I_{(p,q)}$ é um ideal bilateral. No anel quociente $B|_{B_u}$ consideremos, então, o ideal $I_{(p,q)}/B_u \subseteq B/B_u$.

Todo elemento de $I_{(p,q)}/B_u$ pode ser representado por $\bar{b}\bar{d}_{pq}$ com $b \in B$, uma vez que $\forall i \forall j$ tal que $i + j > u$ temos que $\bar{d}_{ij} = 0$.

Da relação [0.1] segue que $\bar{d}_{pq}\bar{b} \in \bar{B}\bar{d}_{pq}$ e, como por hipótese d_{pq} é nilpotente, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $d_{pq}^r = 0$. Logo, para tal $r \in \mathbb{N}$ temos que $\bar{d}_{pq}^r = \bar{0}$.

Para mostrar a nilpotência de $I_{(p,q)}/B_u$ consideremos o produto $\bar{b}_1\bar{d}_{pq}\bar{b}_2\bar{d}_{pq} \ldots \bar{b}_r\bar{d}_{pq}$. Como $\bar{d}_{pq}\bar{b} \in \bar{B}\bar{d}_{pq}$ vem que $\bar{b}_i\bar{d}_{pq}\bar{b}_j\bar{d}_{pq} = \bar{b}_i(\bar{d}_{pq}\bar{b}_j)\bar{d}_{pq} = \bar{b}_i(\bar{b}_j'\bar{d}_{pq})\bar{d}_{pq} = \bar{b}_i\bar{b}_j'\bar{d}_{pq}$ $\forall i \forall j$ $1 \leqslant i, j \leqslant r$. Portanto, existem $b_2', b_3', \ldots, b_r'$ tal que

$$\bar{b}_1\bar{d}_{pq}\bar{b}_2\bar{d}_{pq} \ldots \bar{b}_r\bar{d}_{pq} = \bar{b}_1\bar{b}_2' \ldots \bar{b}_r'\bar{d}_{pq} = \bar{0} .$$

Isso mostra que todo produto de r fatores de elementos de $I_{(p,q)}/B_u$ se anula, isto é, $I_{(p,q)}/B_u$ é um ideal nilpotente de B/B_u.

Existe, pois, $t \in \mathbb{N}$ tal que $I_{(p,q)}^t \subset B_u$. Como pela hipótese de indução B_u é nilpotente, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $I_{(p,q)}^{st} \subset B_u^s = (0)$. Portanto, $I_{(p,q)}$ é nilpotente. Conseqüentemente $B_v = \sum_{p+q=v} I_{(p,q)}$, soma de ideais nilpotentes, é um ideal nilpotente. □

O corolário que se segue trata de uma situação particular do Lema 1.2.1, à qual nos referiremos no capítulo II.

Corolário 0.2.2

Seja $m \in \mathbb{N}$ e $\omega_1, \ldots, \omega_m$ elementos nilpotentes de B tais que $B\omega_j = \omega_j B$ $\forall_j$ tal que $1 \leqslant j \leqslant m$. Então $\sum_{j=1}^{m} B\omega_j$ é um ideal nilpotente de B.

Demonstração

Seja $d_{1j} = \omega_j$, $\forall_j$ tal que $1 \leq j \leq m$. Como, por hipótese, $Bd_{1j} = d_{1j}B$, $\forall j$ tal que $1 \leq j \leq m$, temos que $d_{1j}b \in Bd_{1j} \subseteq \sum_{q \geq j} Bd_{1q}$. Portanto, ocorre a condição [0.1] e, pelo Lema 0.2.1 temos que $B_1 = \sum_{q \geq 1} Bd_{1q} = \sum_{j=1}^{m} B\omega_j$ é um ideal nilpotente. $\square$

CAPÍTULO I

ANÉIS DE POLINÔMIOS

Neste capítulo apresentamos alguns resultados básicos referentes a Anéis de Polinômios Tipo Automorfismo e Tipo Derivação. No § 1 definimos o primeiro deles e obtemos alguns resultados que serão utilizados no Capítulo II.

O § 2 trata de Anéis de Polinômios Tipo Derivação e nele são desenvolvidos os resultados básicos para o Capítulo III.

No § 3 apresentamos alguns resultados adicionais sobre $B[X,*]$, com $* = \alpha$ ou $* = D$, onde α é um automorfismo de B e D uma derivação de B, resultados estes obtidos por K.Kishimoto.

§ 1 ANÉIS DE POLINÔMIOS TIPO AUTOMORFISMO

Seja B um anel com unidade e α um automorfismo de B. Anotemos por $B[X,\alpha]$ o conjunto de todas as somas finitas $\sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ com $b_i \in B$ para $0 \leq i \leq n$. Definimos uma adição em $B[X,\alpha]$ de modo análogo à definida em $B[X]$. É imediato que $(B[X,\alpha],+)$ é um grupo comutativo.

O teorema seguinte é o resultado central deste parágrafo.

Teorema 1.1.1

Existe uma única estrutura de anel sobre $B[X,\alpha]$ tal que $bX = Xb^{\alpha}$ $\forall b \in B$ e $X^i X^j = X^{i+j}$, $\forall i,j \geq 0$.

Demonstração

Seja $f = \sum_{i=0}^{m} X^i a_i$ e $g = \sum_{j=0}^{m} X^j b_j$ dois elementos arbitrários de $B[X,\alpha]$. Definamos uma multiplicação em $B[X,\alpha]$ por:

$$fg = \left(\sum_{i=0}^{m} X^i a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} X^j b_j\right) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} X^{i+j} a_i^{\alpha^j} b_j \qquad [1.1]$$

Em particular (para $f = X^i a_i$ e $g = X^j b_j$) temos que

$$(X^i a_i)(X^j b_j) = X^{i+j} a_i^{\alpha^j} b_j \qquad [1.2]$$

Então,

$$bX^i = X^i b^{\alpha^i} \qquad \forall b \in B\ ,\ \forall i \qquad [1.3]$$

e $$X^i X^j = X^{i+j} \qquad \forall i,j \geqslant 0$$

Utilizando a relação [1.3] obtemos que

$$\left[(X^i a)(X^j b)\right](X^k c) = \left[X^{i+j} a^{\alpha^j} b\right](X^k c) = X^{i+j+k} a^{\alpha^{j+k}} b^{\alpha^k} c$$

Por outro lado,

$$(X^i a)\left[(X^j b)(X^k c)\right] = (X^i a)\left[X^{j+k} b^{\alpha^k} c\right] = X^{i+j+k} a^{\alpha^{j+k}} b^{\alpha^k} c$$

Logo, $\forall a \in B$, $\forall b \in B$, $\forall c \in B$

$$(X^i a)\left[(X^j b)(X^k c)\right] = \left[(X^i a)(X^j b)\right](X^k c) \qquad [1.4]$$

Mostremos, então, que com a multiplicação definida por [1.1] $(B[X,\alpha],+,\cdot)$ tem uma estrutura de anel com unidade.

De fato, utilizando a relação [1.3] temos que

$$fg = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} X^i \left(X^j a_i^{\alpha^j}\right) b_j = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} X^i (a_i X^j) b_j = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} (X^i a_i)(X^j b_j) \qquad [1.5]$$

Como por [1.4] a multiplicação é associativa para elementos do tipo $x^i a_i$ e, por [1.5], o produto de elementos arbitrários de $B[X,\alpha]$ é uma soma finita de produtos do tipo acima, a associatividade da multiplicação é verificada, então, facilmente.

A distributividade é satisfeita. De fato, se

$$f = \sum_{i=0}^{m} X^i a_i \quad , \qquad g = \sum_{j=0}^{m} X^j b_j \quad , \qquad h = \sum_{k=0}^{m} X^k c_k$$

temos, pela relação [1.1], que

$$f\left[g + h\right] = \left[\sum_{i=0}^{m} X^i a_i\right]\left[\sum_{j=0}^{m} X^j (b_j + c_j)\right] = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} X^{i+j} a_i^{\alpha^j} (b_j + c_j) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} X^{i+j} a_i^{\alpha^j} b_j + \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} X^{i+j} a_i^{\alpha^j} c_j = fg + fh \ .$$

A unidade em $B[X,\alpha]$ é dada por $1 = x^o 1$.

Reciprocamente, se $B[X,\alpha]$ tem uma estrutura de anel tal que $bX = Xb^{\alpha}$ e $X^i X^j = X^{i+j}$, então o produto de dois elementos arbitrários $f = \sum_{i=0}^{m} X^i a_i$ e $g = \sum_{j=0}^{m} X^j b_j$ é dado por

$$fg = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} X^{i+j} a^{\alpha^j} b_j \; .$$

De fato, por indução sobre i, demonstra-se facilmente a relação [1.3] e, utilizando-se a distributividade e a associatividade da multiplicação obtemos que

$$fg = \left(\sum_{i=0}^{m} X^i a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} X^j b_j\right) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} X^i (a_i X^j) b_j =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} X^i (X^j a_i^{\alpha^j}) b_j = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} X^{i+j} a_i^{\alpha^j} b_j \; . \qquad \square$$

O anel $B[X,\alpha]$ definido no Teorema anterior será denominado Anel de Polinômios Tipo Automorfismo.

Os Lemas seguintes fornecem algumas expressões de produtos de $B[X,\alpha]$ que serão utilizadas no Capítulo II.

Lema 1.1.2

Seja $\{b_j\}_{1 \leq j \leq m}$ uma família de elementos de B. Nestas condições

$$(X^m b_m) \ldots (X^2 b_2)(X^1 b_1) = X^{1+2+\ldots+m}\, b_m^{\alpha^{1+2+\ldots+m-1}} \ldots b_2^{\alpha} b_1$$

Demonstração

Como $(X^2 b_2)(X b_1) = X^{2+1} b_2^{\alpha} b_1$ (por [1.2]) temos que o Lema é verdadeiro para $m = 2$. Assumamos que o Lema se verifica para todo $m \leq p$. Utilizando a relação [1.2] temos que:

$$(X^{p+1}b_{p+1})(X^p b_p)\dots(X^2 b_2)(Xb_1) = (X^{p+1}b_{p+1})\left[(X^p b_p)(X^{p-1}b_{p-1})\dots(Xb_1)\right] =$$

$$= (X^{p+1}b_{p+1})\left[X^{1+\dots+p}\, b_p^{\alpha^{1+\dots+(p-1)}} \dots b_2^{\alpha} b_1\right] =$$

$$= X^{1+\dots+(p+1)}\, b_{p+1}^{\alpha^{1+\dots+p}}\, b_p^{\alpha^{1+\dots+(p-1)}} \dots b_2^{\alpha} b_1 . \qquad \square$$

Corolário 1.1.3

Sejam $i, m \in \mathbb{N}$ e $b_i \in B$, $\forall i$. Nestas condições

$$(X^i b_i)^m = X^{mi}\, b_i^{\alpha^{(m-1)i}} \dots b_i^{\alpha^{2i}}\, b_i^{\alpha} b_i$$

Demonstração

É imediata, desde que se faça, no Lema 1.1.2, $1 = 2 = \dots = m = i$.

Lema 1.1.4

Seja $\{b_i\}_{0 \leq i \leq n}$ uma família de elementos de B e $m \in \mathbb{N}$. Nestas condições

$$(b_0 + Xb_1 + \dots + X^n b_n)^m = \sum_{i_1,\dots,i_m=0}^{n} X^{i_1+\dots+i_m}\, b_{i_m}^{\alpha^{i_1+\dots+i_{m-1}}} \dots b_{i_2}^{\alpha^{i_1}}\, b_{i_1} .$$

Demonstração

É imediato que $(b_0 + Xb_1 + \ldots + X^n b_n)^m$ será soma de todos os termos do tipo $(X^{i_m} b_{i_m}) \ldots (X^{i_2} b_{i_2})(X^{i_1} b_{i_1})$ onde $0 \leq i_1, \ldots, i_m \leq n$. Portanto, aplicando o Lema 1.1.2 obtemos a expressão desejada. $\square$

§ 2 ANÉIS DE POLINÔMIOS TIPO DERIVAÇÃO

Seja B um anel com unidade.

Definição 1.2.1

Uma aplicação $D: B \to B$ é dita uma Derivação de B se as seguintes propriedades são verificadas para quaisquer dois elementos a e b de B:

$$\text{(i)} \quad D(a+b) = D(a) + D(b)$$

$$\text{(ii)} \quad D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

Observemos que a condição (i) equivale a afirmar que D é um homomorfismo da estrutura de grupo subjacente ao anel B.

A seguir estabelecemos algumas propriedades das Derivações.

Proposição 1.2.2

Seja D uma derivação de B. Então,

(a) $D(1) = 0$

(b) O conjunto $B_0 = \{a \in B \mid D(a) = 0\}$ é um subanel de B tal que $1 \in B_0$

(c) $D^n(ab) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D^i(a) D^{n-i}(b)$, $\forall a \in B$, $\forall b \in B$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração

(a) Se assumirmos $a = b = 1$ na relação (ii) da Definição 1.2.1, temos que $D(1) = D(1).1 + 1D(1) = 2D(1)$. Logo, $D(1) = 0$.

(b) A demonstração é uma conseqüência imediata da Definição de Derivação.

(c) Para $n = 1$ temos que $D(ab) = D(a)b + aD(b) = $ $= \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} D^i(a) D^{1-i}(b)$. Assumamos que a igualdade se verifique $\forall n$ tal que $n < p$.

$$D^{p+1}(ab) = D\left[D^p(ab)\right] = D\left[\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} D^i(a) D^{p-i}(b)\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} D^{i+1}(a) D^{p-i}(b) + \sum_{i=0}^{p} D^i(a) D^{p-i+1}(b) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \binom{p+1}{i} D^i(a) D^{p-i+1}(b) + \binom{p+1}{p+1} D^{p+1}(a) D^0(b) + \binom{p+1}{0} D^0(a) D^p(b) =$$

$$= \sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i} D^i(a) D^{p+1-i}(b) \ . \qquad \square$$

Seja B um anel com unidade e D uma derivação de B. Anotemos por $B[X,D]$ o conjunto de todas as somas finitas $\sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ com $b_i \in B$ para $0 \leqslant i \leqslant n$. Definimos uma adição em $B[X,D]$ de modo análogo a definida em $B[X]$. É imediato que $(B[X,D],+)$ é um grupo comutativo.

O Teorema seguinte é o resultado central deste parágrafo.

Teorema 1.2.3

Existe uma única estrutura de anel sobre $B[X,D]$ tal que $bX = Xb + D(b)$, $\forall b \in B$ e $X^i X^j = X^{i+j}$, $\forall i,j \geqslant 0$.

Demonstração

Seja $f = \sum_{i=0}^{m} X^i a_i$ e $g = \sum_{j=0}^{m} X^j b_j$ dois elementos arbitrários de $B[X,D]$. Definimos uma multiplicação em $B[X,D]$ por

$$fg = \left(\sum_{i=0}^{m} X^i a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} X^j b_j\right) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{j} X^{i+k}\binom{j}{k} D^{j-k}(a_i) b_j \qquad [1.6]$$

Em particular, temos que para $f = X^i a_i$ e $g = X^j b_j$

$$(X^i a_i)(X^j b_j) = \sum_{k=0}^{j} X^{i+k}\binom{j}{k} D^{j-k}(a_i) b_j \qquad [1.7]$$

Então,

$$bX^j = \sum_{k=0}^{j} X^k \binom{j}{k} D^{j-k}(b) \qquad \forall b \in B,\ \forall j \geqslant 0 \qquad [1.8]$$

e

$$X^i . X^j = \sum_{k=0}^{j} X^{i+k} \binom{j}{k} D^{j-k}(1) = X^{i+j} \qquad \forall i,j \geq 0 \qquad [1.9]$$

Vejamos, então, que com a multiplicação definida por [1.6] $(B[X,\alpha],+,\cdot)$ tem uma estrutura de anel com unidade.

Da relação [1.6] obtemos que

$$\left[(X^i b)(X^j c)\right](Xa) = \left[\sum_{k=0}^{j} X^{i+k}\binom{j}{k}D^{j-k}(b)c\right](Xa) = \sum_{k=0}^{j} X^{i+k}\binom{j}{k}D^{j-k+1}(b)ca +$$

$$+ \left[\sum_{k=0}^{j} X^{i+k}\binom{j}{k}D^{j-k}(b)D(c)\right]a + \left[\sum_{k=0}^{j} X^{i+k+1}\binom{j}{k}D^{j-k}(b)c\right]a =$$

$$= X^i\left[D^{j+1}(b)c + D^j(b)D(c)\right]a + \sum_{k=0}^{j-1} X^{i+k+1}\left[\binom{j+1}{k+1}D^{j-k}(b)c +\right.$$

$$\left. + \binom{j}{k+1}D^{j-k-1}(b)D(c)\right]a + X^{i+j+1}\, bca .$$

Por outro lado,

$$(X^i b)\left[(X^j c)(Xa)\right] = X^i b X^{j+1} ca + X^i b X^j D(c)a = \sum_{k=0}^{j+1} X^{i+K}\binom{j+1}{k}D^{j+1-k}(b)ca +$$

$$+ \sum_{k=0}^{j} X^{i+k}\binom{j}{k}D^{j-k}(b)D(c)a = X^i\left[D^{j+1}(b)c + D^j(b)D(c)\right]a +$$

$$+ \sum_{k=0}^{j-1} X^{i+k+1}\left[\binom{j+1}{k+1}D^{j-k}(b)c + \binom{j}{k+1}D^{j-k-1}(b)D(c)\right]a + X^{i+j+1}bca.$$

Logo, $[(X^i b)(X^j c)](Xa) = (X^i b)[(X^j c)(Xa)]$ $\forall i,j \geq 0$, o que equivale a afirmar que para quaisquer dois elementos $f(X)$, $h(X) \varepsilon B[X,D]$ temos que $[f(X)h(X)](Xa) = f(X)[h(X)Xa]$ uma vez que esta última expressão é soma de produtos do tipo acima.

Assumamos que $\forall f(X), h(X) \varepsilon B[X,D]$, $[f(X)h(X)]X^{k-1}a = f(X)[h(X)X^{k-1}a]$. Como, pela relação [1.6],

$$X^{k-1}(Xa) = \sum_{h=0}^{1} X^{k-1+h}\binom{1}{h}D^{1-h}(1)a = X^{k-1+1}a = X^{k}a$$

temos que, para quaisquer $f(X)$, $h(X) \varepsilon B[X,D]$, anotando $G(X) = f(X)h(X)$ e $H(X) = h(X)X^{k-1}$,

$$\begin{aligned}
\left[f(X)h(X)\right](X^{k}a) &= G(X)(X^{k}a) = G(X)\left[X^{k-1}(Xa)\right] = \\
&= \left[G(X)X^{k-1}\right](Xa) = \left[\left(f(X)h(X)\right)X^{k-1}\right](Xa) = \\
&= \left[f(X)\left(h(X)X^{k-1}\right)\right](Xa) = \left[f(X)\left(H(X)\right)\right](Xa) = \\
&= f(X)\left[H(X)Xa\right] = f(X)\left[\left(h(X)X^{k-1}\right)Xa\right] = \\
&= f(X)\left[h(X)X^{k}a\right].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\forall f(X), h(X) \varepsilon B[X,D] \ , \ \forall k \varepsilon \mathbb{N} \ , \ [f(X)h(X)]X^{k}a = f(X)[h(X)X^{k}a] \qquad [1.10]$$

Estamos agora em condições de provar a associatividade da multiplicação.

De fato, utilizando a relação [1.7], temos que

$$fg = \sum_{i,j=0}^{m} \sum_{k=0}^{j} X^{i+k} \binom{j}{k} D^{j-k}(a_i) b_j = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} (X^i a_i)(X^j a_j) \qquad [1.11]$$

Como, em particular, por [1.10] a multiplicação é associativa para elementos do tipo $X^i a_i$ e, por [1.11], o produto de elementos arbitrários de $B[X,D]$ é uma soma finita de produtos do tipo acima, a associatividade da multiplicação é, então, verificada facilmente.

A distributividade é satisfeita. De fato, se

$$f = \sum_{i=0}^{m} X^i a_i \quad , \qquad g = \sum_{j=0}^{m} X^j b_j \quad , \qquad h = \sum_{k=0}^{m} X^k c_k$$

temos, pela relação [1.6] que

$$f[g+h] = \left[\sum_{i=0}^{m} X^i a_i\right]\left[\sum_{j=0}^{m} X^j (b_j + c_j)\right] = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{j} X^{i+k} \binom{j}{k} D^{j-k}(a_i)(b_j + c_j) =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{m} \sum_{k=0}^{j} X^{i+k} \binom{j}{k} D^{j-k}(a_i) b_j + \sum_{i,j=0}^{m} \sum_{k=0}^{j} X^{i+k} \binom{j}{k} D^{j-k}(a_i) c_j = fg + fh\,.$$

A unidade em $B[X,D]$ é dada por $1 = X^0.1$.

Reciprocamente, se $B[X,D]$ tem uma estrutura de anel tal que $bX = Xb + D(b)$ e $X^i X^j = X^{i+j}$ $\forall i,j \geq 0$, então o produto de dois elementos arbitrários $f = \sum_{i=0}^{m} X^i a_i$ e $g = \sum_{j=0}^{m} X^j b_j$ é dado por

$$fg = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{j} X^{i+k} \binom{j}{k} D^{j-k}(a_i) b_j\,.$$

De fato, por indução sobre j demonstra-se facilmente a relação [1.8] e, utilizando-se a distributividade e a associatividade da multiplicação obtemos que:

$$fg = \left(\sum_{i=0}^{m} X^i a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} X^j b_j\right) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} X^i (a_i X^j) b_j =$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} X^i \left[\sum_{k=0}^{j} X^k \binom{j}{k} D^{j-k}(a_i)\right] b_j =$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{j} X^{i+k}\binom{j}{k} D^{j-k}(a_i) b_j . \qquad \square$$

O anel $B[X,D]$ definido no Teorema anterior será denominado Anel de Polinômios Tipo Derivação.

§ 3 ALGUNS RESULTADOS ADICIONAIS

Seja $*$ um automorfismo α de B ou uma derivação D de B.

Dado um polinômio mônico $f(X) \in B[X,*]$, se $f(X)$ pertence ao centro de $B[X,*]$ então o ideal

$$f(X)B[X,*] = \{f(X)g(X) \mid g(X) \in B[X,*]\}$$

é um ideal bilateral. De fato, dado $p(X) \in f(X)B[X,*]$, é claro que para qualquer $h(X) \in B[X,*]$ temos que $p(X)h(X) \in f(X)B[X,*]$. Por outro lado, como $p(X) = f(X)g(X)$ para algum elemento $g(X)$ de $B[X,*]$ temos que $h(X)p(X) = h(X)f(X)g(X) = f(X)h(X)g(X) \in f(X)B[X,*]$.

Utilizaremos as Definições seguintes nos resultados centrais deste parágrafo.

Definição 1.3.1

Seja $f(X) \in B[X,*]$ um polinômio mônico arbitrário. $f(X)$ é dito um GERADOR MÔNICO se o ideal gerado por $f(X)$ é um ideal bilateral de $B[X,*]$.

Por exemplo, como vemos acima, se $f(X)$ é um polinômio mônico central, então é um gerador mônico.

Definição 1.3.2

Um ideal bilateral T de $B[X,*]$ é dito PRINCIPAL se $T = f(X)B[X,*]$, para algum gerador mônico $f(X)$.

O seguinte Lema estabelece uma condição necessária e suficiente para que um polinômio seja um gerador mônico.

Lema 1.3.3

Seja $f(X) = X^m + X^{m-1}b_{m-1} + \ldots + Xb_1 + b_0$ um elemento de $B[X,*]$.

(1) Se $* = \alpha$ então $f(X)$ é um gerador mônico se e somente se

(i) $b_i b^{\alpha^m} = b^{\alpha^i} b \qquad b \in B, \quad \forall i$ tal que $0 \leq i \leq m-1$

(ii) $b_{m-i}^{Id-\alpha} = b_{m-i-1} b_{m-1}^{Id-\alpha} \qquad \forall i$ tal que $2 \leq i \leq m$

$b_0 b_{m-1}^{Id-\alpha} = 0$

onde Id indica a aplicação Identidade de B e $b_j^{Id-\alpha}$ denota o elemento de B que se obtém ao aplicar a aplicação $Id-\alpha$ em b_j.

(2) Se $* = D$ então são equivalentes as condições:

(a) $f(X)$ é um gerador mônico

(b) $f(X)$ é central

(c) (i) $b_i b = \binom{m}{i} D^{m-i}(b) + \binom{m-1}{i} D^{m-i-1}(b) b_{m-1} + \ldots +$
$+ bb_i$, $b \in B$, $\forall i$ tal que $0 \leqslant i \leqslant m-1$

(ii) $D(b_i) = 0$, $\forall i$ tal que $0 \leqslant i \leqslant m-1$.

Demonstração

(1) $f(X) = X^m + X^{m-1} b_{m-1} + \ldots + X b_1 + b_0$ será um gerador mônico se e somente se o ideal $f(X)B[X,\alpha]$ for bilateral. Isto equivale a afirmar que dado $p(X) \in f(X)B[X,\alpha]$, para todo $h(X) \in B[X,\alpha]$ deverá existir $k(X) \in B[X,\varepsilon]$ tal que $h(X)p(X) = f(X)k(X)$ (uma vez que, por definição, $p(X)h(X) \in f(X)B[X,\alpha]$, $\forall h(X) \in B[X,\alpha]$). É evidente que é suficiente considerar $p(X) = f(X)$ com $h(X) = b$ e $h(X) = X$.

Então, $f(X)$ será um gerador mônico se e somente se existirem $u(X)$ e $v(X)$ elementos de $B[X,\alpha]$ tal que

$$bf(X) = f(X)u(X) \quad \text{e} \quad Xf(X) = f(X)v(X)$$

Como o grau do polimônio mônico $Xf(X)$ é $m+1$, o polinômio $v(X)$ deve ser mônico e de grau 1. Portanto, $v(X) = X + c$. Como o grau do polinômio $bf(X)$ é m, o polinômio $u(X)$ deve ser de grau 0. Além disso, como

$$\begin{cases} bf(\ ) = X^m b^{\alpha^m} + X^{m-1} b^{\alpha^{m-1}} b_{m-1} + \ldots + Xb^{\alpha} b_1 + bb_0 \\ Xf(X) = X^{m+1} + X^m b_{m-1} + \ldots + X^2 b_1 + Xb_0 \end{cases} \qquad [1.11]$$

temos que, necessariamente, $b^{\alpha^m} = u(X)$. Portanto, $f(X)$ será um gerador mônico se e somente se

$$\begin{cases} bf(X) = f(X)b^{\alpha^m} = X^m b^{\alpha^m} + X^{m-1} b_{m-1} b^{\alpha^m} + \ldots + Xb_1 b^{\alpha^m} + b_0 b^{\alpha^m} \\ Xf(x) = f(X)(X+c) = X^{m+1} + X^m b_{m-1}^{\alpha} + \ldots + X^2 b_1^{\alpha} + Xb_0^{\alpha} + X^m c + \ldots + Xb_1 c + b_0 c \end{cases} \qquad [1.12]$$

Comparando as relações [1.11] e [1.12] obtemos que $f(X) = X^m + X^{m-1} b^{m-1} b_{m-1} + \ldots + Xb_1 + b_0$ será um gerador mônico se e somente se

$$\begin{cases} b_i b^{\alpha^m} = b^{\alpha^i} b_i \ , \quad \forall b \in B \ , \quad \forall i \text{ tal que } 0 \leq i \leq m-1 \\ b_{m-1} = b_{m-1}^{\alpha} + c \\ b_{m-i} = b_{m-i}^{\alpha} + b_{m-i+1} c \\ b_0 c = 0 \end{cases} \qquad [1.13]$$

Utilizando [1.13] temos que

$$\begin{cases} b_0 b_{m-1}^{Id-\alpha} = b_0 \left[b_{m-1}^{\alpha} + c - b_{m-1}^{\alpha} \right] = b_0 c = 0 \\ b_{m-i}^{Id-\alpha} = b_{m-i}^{\alpha} + b_{m-i+1} c - b_{m-i}^{\alpha} = b_{m-i+1} c \\ b_{m-i-1} \cdot b_{m-1}^{Id-\alpha} = b_{m-i-1} \left[b_{m-1}^{\alpha} + c - b_{m-1}^{\alpha} \right] = b_{m-i-1} c \end{cases} \qquad [1.14]$$

Portanto, de [1.13] e [1.14], concluímos que $f(x) = X^m + X^{m-1}b_{m-1} + \dots + b_0$ é um gerador mônico se e somente se

$$(i)\quad b_i b^{\alpha^m} = b^{\alpha^i} b_i\ ,\quad \forall b \in B,\quad \forall i \text{ tal que } 0 \leq i \leq m-1$$

$$(ii)\quad b_{m-i}^{Id-\alpha} = b_{m-i-1} b_{m-1}^{Id-\alpha} \qquad \forall i \text{ tal que } 2 \leq i \leq m$$

$$b_0 b_{m-1}^{Id-\alpha} = 0$$

(2) Fazendo-se considerações análogas às anteriores temos que $f(X)$ será um gerador mônico se e somente se $bf(X) = f(X)b$ e $Xf(X) = f(X)(X+c)$, para algum $c \in B$. Isto equivale a afirmar que

$$\begin{cases} bf(X) = X^m b + X^{m-1} b_{m-1} b + \dots + b_0 b \\ Xf(X) = X^{m+1} + X^m b_{m-1} + X^{m-1} D(b_{m-1}) + \dots + X^2 b_1 + D(b_1) + \\ \qquad + X b_0 + D(b_0) + X^m c + \dots + b_0 c\ . \end{cases} \qquad [1.15]$$

Além disso

$$\begin{cases} bf(X) = \sum\limits_{i=0}^{m} X^i \binom{m}{i} D^{m-i}(b) + \dots + \sum\limits_{i=0}^{1} X^i \binom{1}{i} D^{1-i}(b) b_1 + b b_0 \\ Xf(x) = X^{m+1} + X^m b_{m-1} + \dots + X^2 b_1 + X b_0 \end{cases} \qquad [1.16]$$

Comparando as relações [1.15] e [1.16] obtemos que $f(X)$ é um gerador mônico se e somente se

$$\begin{cases} b_i b = \binom{m}{i} D^{m-i}(b) + \binom{m-1}{1} D^{m-1-i}(b) b_{m-1} + \ldots + b b_i \\ c = 0 \quad e \quad D(b_i) = 0 \end{cases} \qquad [1.17]$$

Portanto, as condições (a) e (c) são equivalentes. Para mostrar que (a) implica (b), basta observar que por [1.17], $c = 0$. Logo, se (a) se verifica então $bf(X) = f(X)b$ e $Xf(X) = f(X)X$, isto é, $f(X)$ é central.

Finalmente, como foi observado anteriormente, (b) implica (a). □

Para demonstrar o Teorema abaixo necessitaremos da seguinte definição.

Definição 1.3.4

Um anel B é dito SIMPLES se os únicos ideais bilaterais de B são os triviais.

Observemos que dado um anel arbitrário B, com unidade, e um polinômio mônico $f(X) \in B[X,*]$, temos que para todo $p(X)$ de $B[X,*]$ existem $r(X)$, $q(X) \in B[X,*]$ tal que $p(X) = f(X)q(X) + r(X)$, onde $gr(r(X)) < gr(f(X))$ ou $r(X) = 0$. A demonstração deste teorema do algorítmo da divisão é feita por indução sobre o grau de $p(X)$, como no caso usual, e é essencial na prova o fato de que $f(X)$ é mônico.

Teorema 1.3.5

Seja B um anel simples. Então, todo ideal bilateral de de $B[X,*]$ é principal.

Demonstração

Seja $T \neq (0)$ um ideal bilateral de $B[X,*]$ e $g(X) = X^m b_m + X^{m-1} b_{m-1} + \ldots + b_0 \in B[X,*]$ um polinômio de mínimo grau que pertence a T.

Seja I o conjunto definido por

$$I = \left\{ b \in B \mid \exists h(X) \in T \text{ tal que } h(X) = X^m b + X^{m-1} b_{m-1} + \ldots + b_0 \right\} \cup \{0\}$$

Como $b_m \in I$, temos que I é não nulo. I é um ideal bilateral de B. De fato, se b e b' são dois elementos de I, então, é imediato que b + b' também está em I. Além disso, dado $b \in I$ e $a \in B$, arbitrários, temos que existe $h(X) \in T$ tal que $h(X) = X^m b + X^{m-1} b_{m-1} + \ldots + b_0$. Então,

$$h(X)a = X^m ba + X^{m-1} b_{m-1} a + \ldots + b_0 a \in T$$

e

$$a^{\alpha^{-m}} h(X) = X^m ab + X^{m-1} a^{\alpha} b_{m-1} + \ldots + a^{\alpha^{-m}} b \in T$$

Logo, $ab \in I$ e $ba \in I$.

Como B é simples e $I \neq (0)$ temos que $I = B$. Logo, a unidade está em I e, conseqüentemente, existe um polinômio mônico f(X) em T de grau $m = gr(g(X))$.

Como anteriormente observamos, sendo f(X) mônico, para um elemento arbitrário $h(X) \in T$ existem r(X) e q(X) elementos de

$B[X,*]$ tal que $h(X) = f(X)q(X) + r(X)$ e $gr(r(X)) < gr(f(X))$ ou $r(X) = 0$. Como $h(X) \varepsilon T$ e $f(X) \varepsilon T$ temos que $g(X) - f(X)q(X) \varepsilon T$. Logo, $r(X) \varepsilon T$. Portanto, pelo caráter minimal do $gr(f(X))$, $r(X)$ deve ser nulo. Logo, $T = f(X)B[X,*]$. $\square$

Definição 1.3.6

Um polinômio mônico $f(X) \varepsilon B[X,*]$ é dito IRREDUTÍVEL se $f(X)$ não possui fatores mônicos próprios além da unidade.

Observemos que sendo $f(X)$ mônico, não pode admitir fatores constantes diferentes da unidade. Além disso, decorre imediatamente da definição que se $f(X)$ é um polinômio mônico não irredutível, então existem $h(X)$, $g(X) \varepsilon B[X,*]$ tal que $f(X) = h(X)g(X)$ onde $0 < gr(h(X)) < gr(f(X))$.

Definição 1.3.7

Um polinômio mônico $f(X) \varepsilon B[X,*]$ é dito FRACAMENTE IRREDUTÍVEL se todo ideal bilateral gerado por qualquer fator mônico próprio de $f(X)$ é o próprio anel $B[X,*]$.

O Teorema seguinte estabelece uma condição necessária e suficiente para que um ideal bilateral principal de $B[X,*]$, com B anel simples, seja maximal.

Teorema 1.3.8

Seja B um anel simples. Um ideal bilateral de $B[X,*]$ é maximal se e somente se seu gerador mônico é fracamente irredutível.

Demonstração

Seja T um ideal bilateral maximal de $B[X,*]$, $f(X)$ seu gerador mônico e $g(X)$ um fator mônico próprio de $f(X)$. Consideremos I o ideal bilateral gerado por $g(X)$.

Pela observação feita acima, como $g(X)$ é fator próprio de $f(X)$, temos que $0 \leq gr(g(X)) < gr(f(X))$. Então, $f(X)B[X,*] \subsetneq g(X)B[X,*] \subset I$. De fato, se $f(X)B[X,*] = g(X)B[X,*]$, então deveria existir $h(X) \in B[X,*]$ tal que $f(X)h(X) = g(X)$, o que é uma contradição.

Sendo T maximal, segue, então, que $I = B[X,*]$, o que mostra que $f(X)$ é fracamente irredutível.

Reciprocamente, seja $f(X)$ gerador mônico, fracamente irredutível, do ideal bilateral T. Seja $\mathcal{Q}$ um ideal bilateral de $B[X,*]$ tal que $T \subsetneq \mathcal{Q}$. Mostraremos que, nestas condições, $\mathcal{Q} = B[X,*]$. Como $\mathcal{Q}$ é principal, tem um gerador mônico $g(X)$. Sendo $f(X) \in T \subsetneq \mathcal{Q}$ temos que $g(X)$ divide $f(X)$. Logo, existe $p(X)$ de $B[X,*]$ tal que $f(X) = g(X)p(X)$. Mais ainda, $0 \leq gr(g(X)) < gr(f(X))$, pois, em caso contrário, teríamos $g(X) = f(X)$ e $T = \mathcal{Q}$. Portanto, $g(X)$ é um fator mônico próprio de $f(X)$. Como $f(X)$ é fracamente irredutível, então $\mathcal{Q} = B[X,*]$, o que mostra que T é maximal. $\square$

CAPÍTULO II

AUTOMORFISMOS DE ANÉIS DE POLINÔMIOS TIPO AUTOMORFISMO

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos por Rimmer | 8 |.

O § 1 trata, essencialmente, de caracterizar os automorfismos do Anel $B[X,\alpha]$ que deixam fixos os elementos de B, onde B é um anel arbitrário e α um automorfismo qualquer de B. Esta caracterização é obtida com o Teorema 2.1.1.

Gilmer | 4 | determinou os automorfismos de $B[X]$, para B um anel comutativo, e Coleman e Enochs | 1 | resolveram o mesmo problema para B um anel arbitrário. Estes resultados podem ser obtidos a partir do Teorema 2.1.1, desde que se tome o automorfismo α como a identidade em B.

No § 2 ficam determinados os automorfismos entre Anéis de Polinômios Tipo Automorfismo cujos anéis subjacentes são isomorfos.

§ 1 OS AUTOMORFISMOS DE $B[X,\alpha]$

O Teorema seguinte desempenha um papel fundamental neste parágrafo.

Teorema 2.1.1

Seja B um anel com unidade, $\{b_i\}_{0\leq i\leq n}$ uma família de elementos de B e α um automorfismo de B. Então, existe um homomorfismo de anéis $\phi: B[X,\alpha] \to B[X,\alpha]$ tal que $\phi|_B = Id$ e $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ se e somente se

$$b_i b^{\alpha} = b^{\alpha^i} b_i \ , \quad \forall b \in B \ , \quad \forall i \text{ tal que } 0 \leq i \leq n \qquad [2.1]$$

Neste caso, ϕ é único.

Demonstração

Seja ϕ um B-homomorfismo tal que $\phi|_B = Id$ e $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$.

Como $\phi(bX) = \phi(b)\phi(X) = b\phi(X)$ e $bX = Xb^{\alpha}$, temos que $b\phi(X) = \phi(X)b^{\alpha}$. Logo

$$b\left(\sum_{i=0}^{n} X^i b_i\right) = \left(\sum_{i=0}^{n} X^i b_i\right) b^{\alpha}$$

Portanto

$$\sum_{i=0}^{n} X^i b^{\alpha^i} b_i = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i b^{\alpha} \ ,$$

o que equivale a afirmar que

$$b_i b^{\alpha} = b^{\alpha^i} b_i \ , \quad \forall i \text{ tal que } 0 \leq i \leq n \ .$$

Antes de mostrarmos a recíproca do Teorema, provemos a unicidade de ϕ. Para tal, basta observar que $B[X,\alpha]$ é um B-módulo livre à direita com a B-base $\{1,X,X^2,\ldots,X^n,\ldots\}$. Portanto, se anotarmos $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i = \beta$, temos que $\phi(1) = 1$, $\phi(X^2) = \phi(X)^2 = \beta^2$, ..., $\phi(X^n) = \phi(X)^n = \beta^n$, ...

Logo, dado um elemento genérico $f(X) \in B[X,\alpha]$,

$$f(X) = \sum_{i=0}^{m} X^i a_i \;, \qquad \phi\left[f(X)\right] = \phi\left[\sum_{i=0}^{m} X^i a_i\right] = \sum_{i=0}^{m} \phi(X)^i a_i = \sum_{i=0}^{m} \beta^i a_i \;.$$

Reciprocamente, seja $\{b_i\}_{0\leq i\leq n}$ uma família de elementos de B que verifica [2.1] e seja

$$\phi : B[X,\alpha] \to B[X,\alpha] \qquad \text{tal que} \quad \phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i \;.$$

Como já observamos acima, para definir ϕ num elemento arbitrário $f(X) = \sum_{j=0}^{m} X^j a_j \in B[X,\alpha]$ basta definir ϕ nos elementos da B-base $\{1,X,\ldots,X^n,\ldots\}$ de $B[X,\alpha]$. Seja, então,

$$\phi(X^j) = \phi(X)^j = \left[\sum_{i=0}^{n} X^i b_i\right]^j \qquad \forall j \geq 0 \qquad [2.2]$$

Por linearidade, definimos

$$\phi\left(f(X)\right) = \phi\left[\sum_{j=0}^{m} X^j a_j\right] = \sum_{j=0}^{m} \phi(X)^j a_j = \sum_{j=0}^{m} \left[\sum_{i=0}^{n} X^i b_i\right]^j a_j \;.$$

Fazendo, na relação [2.2] $j=0$ e $j=1$, teremos, respectivamente, $\phi|_B = \mathrm{Id}$ e $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$. De fato,

$$\phi(1) = \left[\sum_{i=0}^{n} X^i b_i\right]^0 = 1 \quad \text{e, conseqüentemente,}$$

$$\phi(b) = b\ ,\ \forall b \in B,\ e\quad \phi(X) = \left[\sum_{i=0}^{n} X^i b_i\right]^1 = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i\ .$$

Mostremos que $\phi : B[X,\alpha] \to B[X,\alpha]$ assim definida é um homomorfismo de anéis. Para tal, observemos primeiramente que, utilizando a relação [2.1] temos:

$$d\phi(X)^i = \phi(X)^i d^{\alpha^i} \qquad \forall d \in B\ ,\quad \forall i \qquad [2.3]$$

De fato, para $i = 1$,

$$d\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} dX^i b_i = \sum_{i=0}^{n} X^i d^{\alpha^i} b_i = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i d^{\alpha} = \phi(X) d^{\alpha}$$

Assumamos que $d\phi(X)^k = \phi(X)^k d^{\alpha^k}$, $\forall d \in B$. Então,

$$\begin{aligned} d\phi(x)^{k+1} &= \left(d\phi(X)^k\right)\phi(X) = \left(\phi(X)^k d^{\alpha^k}\right)\phi(X) = \phi(X)^k\left(d^{\alpha^k}\phi(X)\right) = \\ &= \phi(X)^k\left(\phi(X) d^{\alpha^{k+1}}\right) = \phi(X)^{k+1}\ d^{\alpha^{k+1}}\ . \end{aligned}$$

Sejam, f e g elementos de $B[X,\alpha]$ dados por

$$f(X) = \sum_{i=0}^{m} X^i a_i \qquad\qquad g(X) = \sum_{j=0}^{m} X^j d_j$$

Então,

$$b_i^{\alpha^p} B = B b_i^{\alpha^p} \qquad \forall p \in N \;, \quad \forall i \text{ tal que } 0 < i \leq n$$

Analogamente, utilizando o Lema 2.1.2 podemos mostrar que $s_i B = Bs_i$, $\forall i$ tal que $0 < i < n$. Então, vê-se facilmente que

$$Bb_{r_1} b_{r_2}^{\alpha} \cdots b_{r_{i-1}}^{\alpha^{i-2}} b_{r_i}^{\alpha^{i-1}} s_i = b_{r_1} b_{r_2}^{\alpha} \cdots b_{r_{i-1}}^{\alpha^{i-2}} b_{r_i}^{\alpha^{i-1}} s_i B \;.$$

Lema 2.1.6

Seja $\phi : B[X,\alpha] \to B[X,\alpha]$ o B-homomorfismo induzido por $\phi(X) = X + X^2 b_2 + \ldots + X^n b_n$. Assumamos que ϕ seja sobrejetor e $\{s_i\}_{0 \leq i \leq n}$ seja uma família de elementos de B tal que $X = \sum_{i=0}^{m} \phi(X)^i s_i$.

Nestas condições, $b_{r_1} b_{r_2}^{\alpha} \cdots b_{r_{i-1}}^{\alpha^{i-2}} b_{r_i}^{\alpha^{i-1}} s_i \in N$, para $1 < i \leq m$, $1 < r_j < n$ com $\sum_{j=1}^{i} r_j > 2$.

Demonstração

Primeiramente notemos que, pela observação acima, bastará mostrar que $b_{r_1} b_{r_2}^{\alpha} \cdots b_{r_{i-1}}^{\alpha^{i-2}} b_{r_i}^{\alpha^{i-1}} s_i$ é um elemento nilpotente de B. Faremos a demonstração por indução sobre $k = \sum_{j=1}^{i} r_j$.

Como $X = \sum_{i=0}^{m} \phi(X)^i s_i$ o coeficiente de X^{mn}, que se obtém exclusivamente do termo $(X^n b_n)^m s_m$, deve ser nulo. Além disso, pelo Corolário 1.1.3,

$$(X^n b_n)^m s_m = X^{mn} b_n b_n^{\alpha} \cdots b_n^{\alpha^{m-1}} s_m \;.$$

Portanto, $b_n b_n^{\alpha} \ldots b_n^{\alpha^{m-1}} s_m = 0$, o que mostra que o Lema é verdadeiro para $\sum_{j=1}^{i} r_j = k = mn$, uma vez que $\sum_{j=1}^{i} r_j = mn$ implica que $i = m$ e $r_j = n, \forall j$, sendo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq r_j \leq n$.

Assumamos que $b_{r_1} b_{r_2}^{\alpha} \ldots b_{r_i}^{\alpha^{i-1}} s_i$ seja nilpotente, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq r_j \leq n$ para $1 \leq j \leq i$ tal que $\sum_{j=1}^{i} r_j > k$, onde $2 \leq k \leq mn$.

Seja $\{r_j\}_{1 \leq r_j \leq n}$ uma família de elementos de B tal que $1 \leq r_j \leq n$ para $1 \leq j \leq i$, $1 \leq i \leq m$ com $\sum_{j=1}^{i} r_j = k$.

Consideremos a expressão

$$X = \sum_{i=0}^{m} \phi(X)^i s_i = \sum_{i=0}^{m} (X + X^2 b_2 + \ldots + X^n b_n)^i s_i \ .$$

Fixado i, entre 0 e m, temos que

$$(X + X^2 b_2 + \ldots + X^n b_n)^i s_i = (X d_{i,1} + X^2 d_{i,2} + \ldots + X^k d_{i,k} + \ldots + X^{ni} d_{i,ni})\, s_i \ ,$$

onde

$$d_{i,k} = \sum_{h_1 + \ldots h_i = k} b_{h_1} b_{h_2}^{\alpha} \ldots b_{h_i}^{\alpha^{i-1}}$$

Portanto, para $0 \leq k \leq m$, o coeficiente de X^k em $\sum_{i=0}^{m} \phi(X)^i s_i$ é dado por

$$\sum_{j=0}^{m} d_{j,k} s_j$$

Como $X = \sum_{i=0}^{m} \phi(X)^i s_i$, temos que

$$0 = \sum_{j=0}^{m} d_{j,k} s_j = d_{i,k} s_i + \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{m} d_{j,k} s_j =$$

$$= b_{r_1} b_{r_2}^{\alpha} \cdots b_{r_{i-1}}^{\alpha^{i-2}} b_{r_i}^{\alpha^{i-1}} s_i + \beta s_i + \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{m} d_{j,k} s_j ,$$

onde β indica a soma dos termos $b_{h_1} b_{h_2}^{\alpha} \cdots b_{h_i}^{\alpha^{i-1}} s_i$ para $(h_1,\ldots,h_i) \neq (r_1,r_2,\ldots,r_i)$. Portanto,

$$\left.\begin{array}{l} b_{r_1} b_{r_2}^{\alpha} \cdots b_{r_{i-1}}^{\alpha^{i-2}} b_{r_i}^{\alpha^{i-1}} s_i + \sum\limits_{j=0}^{m} t_j s_j = 0 , \quad \text{onde} \\ \\ \text{se } j \neq i, \text{ então } \quad t_j = \sum \left\{ b_{h_1} \cdots b_{h_j}^{\alpha^{j-1}} \,\middle|\, h_1 + \ldots + h_j = k \right\} \text{ e} \\ \\ \text{se } j = i, \text{ então } \quad t_i = \sum \left\{ b_{h_1} \cdots b_{h_i}^{\alpha^{i-1}} \,\middle|\, h_1 + \ldots + h_i = k \text{ e} \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left. (h_1, \ldots, h_i) \neq (r_1, \ldots r_i) \right\} . \end{array}\right\} \quad [2.14]$$

Consideremos um dos termos $b_{c_1} \cdots b_{c_j}^{\alpha^{j-1}} s_j$ cuja soma é igual a $t_j s_j$, para algum $0 \leq j \leq m$.

Seja $q = (b_{r_1} \cdots b_{r_i}^{\alpha^{i-1}} s_i)(b_{c_1} \cdots b_{c_j}^{\alpha^{j-1}} s_j)(b_{r_1} \cdots b_{r_i}^{\alpha^{i-1}} s_i)$

Assim como observação feita anteriormente ao Lema 2.1.6, pode-se mostrar facilmente que $Bq = qB$.

Examinemos as possibilidades:

1ª) existe $1 \leqslant e \leqslant \min(i,j)$ tal que $c_e > r_e$

2ª) $\forall 1 \leqslant e \leqslant \min(i,j)$ vale a relação $c_e \leqslant r_e$

Se ocorre a primeira possibilidade, então

$$q \in \left(b_{r_1} b_{r_2}^{\alpha} \ldots b_{r_{e-1}}^{\alpha^{e-2}}\right) B b_{c_e}^{\alpha^{e-1}} B \left(b_{r_{e+1}}^{\alpha^{e}} \ldots b_{r_i}^{\alpha^{i-1}} s_i\right) =$$

$$= b_{r_1} \ldots b_{r_{e-1}}^{\alpha^{e-2}} b_{c_e}^{\alpha^{e-1}} \ldots b_{r_i}^{\alpha^{i-1}} s_i B \ .$$

Como $(r_1 + \ldots + r_{e-1}) + c_e + (r_{e+1} + \ldots + r_i) > k$ (uma vez que $c_e > r_e$ e $\sum_{j=1}^{i} r_j = k$) temos que pela hipótese de indução

$$b_{r_1} \ldots b_{r_{e-1}}^{\alpha^{e-2}} b_{c_e}^{\alpha^{e-1}} \ldots b_{r_i}^{\alpha^{i-1}} s_i$$

é nilpotente. Conseqüentemente pelo Lema 2.1.5 temos que $q \in N$.

Se a segunda possibilidade se verifica, então como $\sum_{t=1}^{j} c_t = k = \sum_{t=1}^{i} r_t$, vem que $j \geqslant i$. Mas, se $j = i$, então $(c_1,\ldots,c_j) = (r_1,\ldots,r_i)$ o que é uma contradição. Portanto, temos que $j > i$. Logo, existe $1 \leqslant e \leqslant i$ tal que $c_t = r_t$, $\forall t$ tal que $1 \leqslant t \leqslant e$ e $c_e < r_e$. Então podemos escrever que

$$q \in Bb_{r_1} \ldots b_{r_e}^{\alpha^{e-1}} Bb_{r_{e+1}}^{\alpha^{e}} \ldots b_{r_j}^{\alpha^{j-1}} s_j B = Bb_{r_1} \ldots b_{r_e}^{\alpha^{e-1}} b_{c_{e+1}}^{\alpha^{e}} \ldots b_{c_j}^{\alpha^{j-1}} s_j$$

Como $(r_1 + \ldots + r_e) + (c_{e+1} + \ldots + c_j) > k$ (pois estamos supondo $c_e \leqslant b_e$), então, pela hipótese de indução podemos afirmar que $q \in N$.

Multiplicando a equação [2.14] à esquerda e à direita por $b_{r_1} b_{r_2}^{\alpha} \ldots b_{r_i}^{\alpha^{i-1}} s_i$, obtemos que

$$\left(b_{r_1} b_{r_2}^{\alpha} \ldots b_{r_i}^{\alpha^{i-1}} s_i\right)^3 + \sum_{j=0}^{m} \left(b_{r_1} \ldots b_{r_i}^{\alpha^{i-1}} s_i\right) t_j s_j \left(b_{r_1} \ldots b_{r_i}^{\alpha^{i-1}} s_i\right) = 0$$

Sendo $q \in N$ temos que

$$\sum_{j=0}^{m} \left(b_{r_1} \ldots b_{r_i}^{\alpha^{i-1}} s_i\right) t_j s_j \left(b_{r_1} \ldots b_{r_i}^{\alpha^{i-1}} s_i\right) \in N$$

Logo, pelo Lema 2.1.5 segue que $\left(b_{r_1} b_{r_2}^{\alpha} \ldots b_{r_i}^{\alpha^{i-1}} s_i\right)^3$ é nilpotente, o que completa a prova. $\square$

Teorema 2.1.7

Seja $\phi : B[X,\alpha] \to B[X,\alpha]$ a aplicação tal que $\phi(X) = X + X^2 b_2 + \ldots + X^n b_n$ e $\phi|_B = Id$. Então, são equivalentes:

(a) ϕ é um B-epimorfismo

(b) ϕ é um B-automorfismo

(c) a família $\{b_i\}_{0 \leq i \leq n}$ satisfaz

(i)' $b_i b^{\alpha} = b^{\alpha^i} b_i$, $\forall b \in B$, $\forall i$ tal que $2 \leq i \leq n$

(ii)' b_i é nilpotente (equivalentemente, $b_i \in N$), $\forall i$ tal que $2 \leq i \leq n$

Demonstração

Mostremos primeiramente que (a) implica (c). Seja ϕ um B-epimorfismo.

É imediato, pelo Teorema 2.1.1, que (i)' é verificada. Para mostrar que (ii)' é verificada, basta observar que, sendo ϕ um epimorfismo, existe uma família $\{s_i\}_{0\leq i\leq m}$ de elementos de B tal que $X = \sum_{i=0}^{m} \phi(X)^i s_i$. Além disso, da definição da ϕ, igualando os coeficientes de primeiro grau, vem que $s_1 = 1$. Portanto, aplicando o Lema 2.1.6 para $i = 1$, temos que b_j é nilpotente, $\forall j$ tal que $2 \leq j \leq n$.

Assumamos, agora, (c) e mostremos (b).

Seja T_1 o ideal gerado por $S_1 = \left\{ b_j^{\alpha^r} \mid 2 \leq j \leq n,\ r \in \mathbb{Z} \right\}$ e T_2 o ideal gerado por $S_2 = \left\{ b_j^{\alpha^r} \mid 2 \leq j \leq n,\ 0 \leq r \leq n-1 \right\}$.

Então, T_2 é um ideal nilpotente. De fato, por (ii)', b_j é nilpotente, $\forall j$ tal que $2 \leq j \leq n$, e, por (i)', $b_j^{\alpha^r} B = B b_j^{\alpha^r}$. Logo, pelo Corolário 0.2.2, temos que $\sum_{\substack{2\leq j\leq n \\ 0\leq r\leq n-1}} b_j^{\alpha^r} B$ é nilpotente e, conseqüentemente, T_2 é nilpotente, isto é, $T_2 \subset N$.

Sejam $b_{j_1}^{\alpha^{r_1}}$ e $b_{j_2}^{\alpha^{r_2}}$ elementos quaisquer de S_1. Como (i)' se verifica, temos que

$$b_{j_2}^{\alpha^{r_2}} b_{j_1}^{\alpha^{r_1}} = b_{j_2}^{\alpha^{r_2+j_1-j_1}} b_{j_1}^{\alpha^{r_1}} = \left(b_{j_2}^{\alpha^{r_2-j_2}}\right)^{\alpha^{j_1}} b_{j_1}^{\alpha^{r_1}} = b_{j_1}^{\alpha^{r_1}} b_{j_2}^{\alpha^{r_2-j_1+1}} =$$

$$= \left(b_{j_1}^{\alpha^{r_1-j_2}}\right)^{\alpha^{j_2}} b_{j_2}^{\alpha^{r_2-j_1+1}} = b_{j_2}^{\alpha^{r_2-[j_1-1]}} b_{j_1}^{\alpha^{r_1-[j_2-1]}}$$

Por outro lado, o mesmo produto $b_{j_2}^{\alpha^{r_2}} b_{j_1}^{\alpha^{r_1}}$ pode ser expresso por

$$b_{j_2}^{\alpha^{r_2}} b_{j_1}^{\alpha^{r_1}} = b_{j_2}^{\alpha^{r_2}} \left(b_{j_1}^{\alpha^{r_1-1}}\right)^{\alpha} = \left(b_{j_1}^{\alpha^{r_1-1}}\right)^{\alpha^{j_2}} b_{j_2}^{\alpha^{r_2}} = b_{j_1}^{\alpha^{r_1-1+j_2}} b_{j_2}^{\alpha^{r_2}} =$$

$$= b_{j_1}^{\alpha^{r_1-1+j_2}} \left(b_{j_2}^{\alpha^{r_2-1}}\right)^{\alpha} = \left(b_{j_2}^{\alpha^{r_2-1}}\right)^{\alpha^{j_1}} b_{j_1}^{\alpha^{r_1-1+j_2}} =$$

$$= b_{j_2}^{\alpha^{r_2+[a_1-1]}} b_{j_1}^{\alpha^{r_1+[j_2-1]}}$$

Repetindo o processo tantas vezes quantas se fizer necessário, podemos obter que pelo menos um dos expoentes pode ser tomado entre 0 e n-1.

Portanto, $T_1^2 \subseteq T_2$ e, conseqüentemente, T_1 também é nilpotente.

Seja

$$g_1(X) = \phi(X) - \sum_{i=2}^{n} \phi(X)^i b_i = X + X^2 b_2 + \ldots + X^n b_n -$$

$$- \left[X + X^2 b_2 + \ldots + X^n b_n\right]^2 s_2 - \ldots - \left[X + X^2 b_2 + \ldots + X^n b_n\right]^n s_n$$

Simplificando a expressão acima temos que

$$g_1(X) = X - \sum_{i=2}^{m_1} X^i s_{i,1}, \quad \text{com } s_{i,1} \in T_1^2,$$

uma vez que os coeficientes de X^i serão soma de produtos do ti po $(X^k b_k)(X^j b_j) = X^{k+j} b_k^{\alpha^j} b_j$, com $b_k \neq 1$ e $b_j \neq 1$.

Seja

$$g_2(X) = g_1(X) - \sum_{i=2}^{m_1} \left[g_1(X)\right]^i s_{i,1} .$$

Então, $g_2(X)$ pode ser escrito na forma:

$$g_2(X) = X - \sum_{i=2}^{m_2} X^i s_{i,2} , \quad \text{com } s_{i,2} \in T_1^4 ,$$

por uma observação análoga à do caso anterior.

Continuando o processo, definimos, por indução,

$$g_j(X) = g_{j-1}(X) - \sum_{i=2}^{m_{j-1}} \left[g_{j-1}(X)\right]^i s_{i,j-1}$$

Então,

$$g_j(X) = X - \sum_{i=2}^{m_j} X^i s_{i,j} , \quad \text{com } s_{i,j} \in T_1^{2j} .$$

Como T_1 é nilpotente, existe $t \geq 1$ tal que $T_1^{2t} = (0)$ e, conseqüentemente, $\sum_{i=2}^{m_t} X^i s_{i,t} = 0$. Isto significa que $g_t(X) = X$. Como $g_t(X)$ é uma combinação linear de potências de $\phi(X)$, temos, $X \in \operatorname{Im} \phi$. Portanto, ϕ é um B-epimorfismo.

Mostremos agora que ϕ é injetora.

Seja, então, $f = \sum_{i=0}^{m} X^i r_i$ um elemento arbitrário de $B[X,\alpha]$

tal que $\phi(f)=0$. Temos, pois, que

$$\sum_{i=0}^{m} (X + X^2b_2 + \ldots + X^nb_n)^i r_i = 0$$

Igualando os coeficientes na relação acima temos que $r_0=0$. Como o coeficiente de X do segundo membro é r_1, também temos que $r_1=0$. Portanto, a expressão reduz-se a

$$\sum_{i=2}^{m} (X + X^2b_2 + \ldots + X^nb_n)^i r_i = 0$$

Como o coeficiente de X^2, que é nulo, é r_2, temos que $r_2=0$.

Então, por indução, é fácil mostrar que $f=0$. Logo, ϕ é um B-automorfismo de $B[X,\alpha]$ e a condição (b) é verificada.

Finalmente, como trivialmente (b) implica (a), a demonstração do Teorema está completa. $\square$

Estamos agora em condições de demonstrar o Teorema central deste parágrafo.

Teorema 2.1.8

Seja B um anel com unidade e α um automorfismo de B. Então, as seguintes condições são equivalentes:

(a) A aplicação $\phi: B[X,\alpha] \to B[X,\alpha]$ induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ é um B-automorfismo.

(b) A aplicação $\phi: B[X,\alpha] \to B[X,\alpha]$ induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ é um B-epimorfismo.

(c) A família $\{b_i\}_{0 \leq i \leq n}$ de elementos de B satisfaz

(i) $b_i b^{\alpha} = b^{\alpha^i} b_i$, $\forall b \in B$, $\forall i$ tal que $0 \leq i \leq n$

(ii) $b_1 \in U(Z(B))$

(iii) b_i é nilpotente, $\forall i$ tal que $2 \leq i \leq n$.

Demonstração

Mostremos primeiramente que (b) implica (c). Seja, $\phi: B[X,\alpha] \to B[X,\alpha]$ o B-epimorfismo induzido por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$. Pelo Teorema 2.1.1, temos que (i) se verifica; pelo Lema 2.1.4, $b_1 \in (Z(B))$, isto é, (ii) se verifica. A condição (iii) também é verificada. De fato, como a condição (iii) do Lema 2.1.4 se verifica, pelo Teorema 2.1.7 temos que b_i é nilpotente, $\forall i$ tal que $2 \leq i \leq n$.

Assumamos agora que a condição (c) se verifique.

De (i) e (iii) segue a parte (b) do Teorema 2.1.7, isto é, a aplicação induzida por $X \to X + X^2 b_2 + \ldots + X^n b_n$ é um B-automorfismo. Este fato, acrescido das condições (i) (para $i = 0$) e (ii) constituem-se nas hipóteses do Lema 2.1.4. Portanto, ϕ é um B-automorfismo e, conseqüentemente, (c) implica (a).

Como, por definição, (a) implica (b), temos que as três condições são equivalentes. $\square$

Os resultados de Gilmer |4|, Coleman e Enochs |1| po dem ser obtidos como corolário do Teorema acima.

Corolário 2.1.9

Seja B um anel e $\{b_i\}_{0 \leq i \leq n}$ uma família de elementos de B. Então, as seguintes condições são equivalentes:

(a) A aplicação $\phi: B[X] \to B[X]$ induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ é um B-automorfismo.

(b) A aplicação $\phi: B[X] \to B[X]$ induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ é um B-epimorfismo.

(c) A família $\{b_i\}_{0 \leq i \leq n}$ de elementos de B satisfaz

(i) $b_i \in Z(B)$, $\forall i$ tal que $0 \leq i \leq n$

(ii) $b_1 \in U(B)$

(iii) b_i é nilpotente, $\forall i$ tal que $i \geq 2$.

Demonstração

Para mostrar a equivalência entre as três condições, basta considerar, no Teorema acima, $\alpha = Id$. $\square$

§ 2 OS ISOMORFISMOS DE $A[X,\alpha]$ EM $B[X,\beta]$

Sejam A e B dois anéis, ψ um isomorfismo de A em B e α e β automorfismos de A e B, respectivamente. Neste parágrafo determinaremos condições necessárias e suficientes para que exis ta um isomorfismo de anéis $\phi: A[X,\alpha] \to B[X,\alpha]$ tal que $\phi|_A = \psi$, isto é, tal que ϕ estenda ψ. Finalmente, determinaremos condições necessárias e suficientes para que a aplicação induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ estenda ψ a um isomorfismo de anéis $\phi: A[X,\alpha] \to B[X,\beta]$.

Dado um elemento $r \in U(B)$, denotaremos por i_r o automorfismo interno de B definido por $i_r(b) = r^{-1}br$, $\forall b \in B$.

Lema 2.2.1

Sejam A e B anéis, $\psi: A \to B$ um isomorfismo, α e β automorfismo de A e B respectivamente e $\{b_i\}_{0 \leq i \leq n}$ uma família de elementos de B. Se a aplicação $\phi: A[X,\alpha] \to B[X,\beta]$ definida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ é um homomorfismo de anéis que estende ψ, então

$$a^{\beta^i \psi} b_i = b_i a^{\psi\alpha} \quad , \quad \forall a \in A \ , \ \forall i \text{ tal que } 0 \leq i \leq n \ .$$

Demonstração

Seja $c \in A$.

$$\phi(Xc) = \phi(X)\phi(c) = \left(\sum_{i=0}^{n} X^i b_i\right) c^{\psi} = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i c^{\psi} \qquad \text{e}$$

$$\phi\left(c^{\alpha^{-1}} X\right) = \phi\left(c^{\alpha^{-1}}\right)\phi(X) = c^{\psi\alpha^{-1}} \left(\sum_{i=0}^{n} X^i b_i\right) = \sum_{i=0}^{n} X^i c^{\beta^i \psi\alpha^{-1}} b_i$$

Como $Xc = c^{\alpha^{-1}} X$, igualando os coeficientes das relações acima temos que

$$c^{\beta^i \psi\alpha^{-1}} b_i = b_i c^{\psi} \qquad \forall c \in A \qquad \forall i \text{ tal que } 0 \leqslant i \leqslant n$$

Então, pondo $a = c^{\alpha^{-1}}$, obtemos que

$$a^{\beta^i \psi} b_i = b_i a^{\psi\alpha}, \quad \forall a \in A; \quad \forall i \text{ tal que } 0 \leqslant i \leqslant n . \qquad \square$$

Teorema 2.2.2

Sejam A e B anéis, $\psi: A \to B$ um isomorfismo, α e β automorfismos de A e B respectivamente. Então, existe um isomorfismo de anéis $\theta: A[X,\alpha] \to B[X,\beta]$ que estende ψ se e somente se existe $r \in U(B)$ tal que $\psi\alpha\psi^{-1} = i_r\beta$.

Demonstração

Seja $r \in U(B)$ tal que $\psi\alpha\psi^{-1} = i_r\beta$ e seja $\theta: A[X,\alpha] \to B[X,\beta]$ a aplicação definida por $\theta(X) = Xr$ e $\theta(a) = \psi(a)$, $a \in A$.

θ é um homomorfismo de anéis. De fato, analogamente ao feito no Teorema 2.1.1 pode-se mostrar, por indução sobre o grau de f, que $\theta(fg) = \theta(f)\theta(g)$. Para tal, basta observar que, utilizando a relação $\psi\alpha\psi^{-1} = i_r\beta$, temos que

$$\theta(aX) = \theta(Xa^{\alpha}) = Xr(\psi\alpha)(a) = Xr(i_r\beta\psi)(a) =$$

$$= X(\beta\psi)(a)r = \psi(a)Xr = \theta(a)\theta(X) .$$

Para mostrar a injetividade de θ observemos primeiramente que, por indução, demonstra-se facilmente que

$$\theta(X^k) = X^k r^{\beta^{k-1}} \cdots r^{\beta} r \ , \qquad \forall k \in N \ .$$

Seja $f = \sum_{i=0}^{m} X^i a_i \in A[X,\alpha]$ tal que $\theta(f) = 0$. Então, pela relação acima, vem que

$$\sum_{i=0}^{m} \theta(X)^i \theta(a_i) = \sum_{i=0}^{m} X^i r^{\beta^{i-1}} \cdots r^{\beta} r \ \psi(a_i) = 0 \ .$$

Como r é inversível, segue que $\forall i$, $0 \leqslant i \leqslant m$, $\psi(a_i) = 0$. Sendo ψ um isomorfismo, temos que $a_i = 0$, $\forall i$ tal que $0 \leqslant i \leqslant m$. Além disso, θ é sobrejetora, uma vez que o elemento $X\psi^{-1}(r^{-1})$ de $A[X,\alpha]$ é tal que $\theta[X\psi^{-1}(r^{-1})] = \theta(X)\psi(\psi^{-1}(r)) = X$. Portanto, $X \in \mathrm{Im}\theta$ e, conseqüentemente, qualquer combinação linear de potências de X também está na imagem de θ. Logo, θ é um isomorfismo de anéis que estende ψ.

Reciprocamente, seja $\theta : A[X,\alpha] \to B[X,\beta]$ um isomorfismo de anéis tal que $\theta|_A = \psi$. Como $\theta(X) \in B[X,\beta]$, existe uma família $\{b_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de elementos de B tal que $\theta(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$, e uma família $\{a_i\}_{0 \leqslant i \leqslant m}$ de elementos de A tal que $\theta\left[\sum_{i=0}^{m} X^i a_i\right] = X$. Então,

$$\sum_{i=0}^{m} \left[\theta(X)\right]^i \psi(a_i) = X \qquad [2.15]$$

Como mostramos no parágrafo anterior, o coeficiente de X em $\left[\theta(X)\right]^i$ é dado por

$$\sum_{j=0}^{i-1} (b_0^{\beta})^{i-1-j} b_1 b_0^j$$

Portanto, igualando os coeficientes da relação [2.15] temos que

$$\sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{i-1} b_0^{\beta^{i-1-j}} b_1 b_0^{j}\right) a_i^{\psi} = 1$$

Utilizando a relação acima e o Lema anterior para o caso particular de $i = 1$, obtemos que

$$1 = \sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{i-1} b_0^{\beta^{i-1-j}} b_1 b_0^{j}\right) a_i^{\psi} = \sum_{i=0}^{m} b_1\left[\sum_{j=0}^{i-1}\left[\psi\alpha\psi^{-1}(b_0)\right]^{i-1-j} b_0 a_i^{\psi}\right]$$

Isto mostra que b_1 é um elemento inversível à esquerda. Finalmente, como no Lema anterior, fazendo $i = 1$ temos que $b_1 a^{\psi\alpha} = a^{\beta\psi} b_1$, obtemos que $b_1 \in U(B)$. Para mostrar que $\psi\alpha\psi^{-1} = i_{b_1}\beta$, basta observar que da relação acima decorre que

$$\psi\alpha\psi^{-1}(b) = b_1^{-1}\beta\psi\left(\psi^{-1}(b)\right)b_1 = b_1^{-1}\beta(b)b_1 = i_{b_1}\beta(b) \qquad \forall b \in B \ ,$$

com o que a demonstração fica completa. $\square$

Observemos que no Teorema acima somente utilizamos o fato de θ ser um epimorfismo para mostrar a relação $\psi\alpha\psi^{-1} = i_{b_1}\beta$.

Teorema 2.2.3

Sejam A e B dois anéis e $\psi: A \to B$ um isomorfismo. Sejam α e β automorfismos de A e B, respectivamente. Então, são equivalentes as condições:

(a) A aplicação induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ estende ψ a um isomorfismo de anéis $\phi: A[X,\alpha] \to B[X,\beta]$.

(b) A aplicação induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ estende a um epimorfismo de anéis $\phi: A[X,\alpha] \to B[X,\beta]$.

(c) A família $\{b_i\}_{0 \leq i \leq n}$ de elementos de B satisfaz

(i) $a^{\beta^i \psi} b_i = b_i a^{\psi\alpha}$, $\forall a \in A$, $\forall i$ tal que $0 \leq i \leq n$.

(ii) $b_1 \in U(B)$.

(iii) b_i é nilpotente, $\forall i$ tal que $2 \leq i \leq n$.

<u>Demonstração</u>

Assumamos que a aplicação induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ estende ψ a um epimorfismo de anéis $\phi: A[X,\alpha] \to B[X,\beta]$.

Pelo Teorema 2.2.2, $b_1 \in U(B)$ e $\psi\alpha\psi^{-1} = i_{b_1}\beta$. Além disso, a aplicação $\theta: A[X,\alpha] \to B[X,\beta]$ definida por $\theta(X) = Xb_1$ e $\theta(a) = \psi(a)$, $\forall a \in A$ é um isomorfismo de anéis.

Seja $\delta: B[X,\beta] \to B[X,\beta]$ definida por $\delta = \phi\theta^{-1}$. Então $\delta(X) = \phi\theta^{-1}(X) = \phi(Xb_1^{-1}) = \sum_{i=0}^{m} X^i b_i b_1^{-1}$.

O seguinte diagrama comutativo é representativo da situação.

$$\begin{tikzcd}
A[X,\alpha] \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\theta"'] & & B[X,\beta] \\
& B[X,\beta] \arrow[ur, "\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

Como ϕ é um epimorfismo de anéis e θ um automorfismo de anéis, temos que δ é um epimorfismo de anéis. Além disso, $\delta|_B =$ $= Id$ pois se $b \in B$, $\delta(b) = \phi\theta^{-1}(b) = \phi(\psi^{-1}(b)) = \psi\psi^{-1}(b) = b$. Portanto, δ satisfaz a condição (b) do Teorema 2.1.1, isto é, a família $\{b_0b_1^{-1}, 1, b_2b_1^{-1}, \ldots, b_nb_1^{-1}\}$ é tal que

(1) $b_ib_1^{-1}b^{\beta} = b^{\beta^i}b_ib_1^{-1}$, $\forall b \in B$, $\forall i$ tal que $0 \leq i \leq n$.

(2) $b_ib_1^{-1}$ é nilpotente, $\forall i$ tal que $2 \leq i \leq n$.

Além disso, pelo Lema 2.2.1, a condição (i) é verificada. Mostremos agora que (iii) se verifica.

Seja $2 \leq i \leq n$. Como $b_ib_1^{-1}$ é nilpotente, existe um natural N_i tal que $(b_ib_1^{-1})^{N_i} = 0$. Sendo $a^{\beta^i\psi}b_i = b_ia^{\psi\alpha}$, $\forall a \in A$, $\forall i$ tal que $0 \leq i \leq n$, e $b_1^{-1} \in U(B)$, temos que b_i é nilpotente. Portanto, (b) implica (c).

Assumamos agora que (c) se verifique. Observemos que da condição (i) vem que $\psi\alpha = i_{b_1}\beta\psi$. Portanto, estamos nas condições do Teorema 2.2.2 e podemos garantir que a aplicação $\theta : A[X,\alpha] \to$ $\to B[X,\beta]$ definida por $\theta(X) = Xb_1$ e $\theta(a) = \psi(a)$, $\forall a \in A$ é um isomorfismo de anéis.

A família $\{b_0b_1^{-1}, 1, b_2b_1^{-1}, \ldots, b_nb_1^{-1}\}$ verifica as três condições do Teorema 2.1.8. De fato, utilizando as relações $\psi\alpha =$ $= i_{b_1}\beta\psi$ e $a^{\beta^i\psi}b_i = b_ia^{\psi\alpha}$, e anotando $b = \psi(a)$, temos que

$$b_ib_1^{-1}b^{\beta} = b_ib_1^{-1}a^{\beta\psi} = b_ib_1^{-1}a^{i_{b_1}^{-1}\psi\alpha} = b_ia^{\psi\alpha}b_1^{-1} = a^{\beta^i\psi}b_ib_1^{-1} = b^{\beta^i}b_ib_1^{-1}$$

Logo, (i) do Teorema 2.1.8 se verifica. A condição (ii) é verificada trivialmente e a condição (iii) é obtida a partir da relação $a^{\beta^i\psi}b_i = b_i a^{\psi\alpha}$ e do fato de b_i ser nilpotente.

Portanto, se $\delta : B[X,\beta] \to B[X,\beta]$ é a aplicação induzida por $\delta(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i b_1^{-1}$, então δ é um B-automorfismo de $B[X,\beta]$.

Como $\phi = \delta\theta$, ϕ é um automorfismo de anéis. Logo, (c) implica (a).

Como trivialmente (a) implica (b), a prova fica completa. $\square$

CAPÍTULO III

AUTOMORFISMOS DE ANÉIS DE POLINÔMIOS TIPO DERIVAÇÃO

Neste capítulo desenvolvemos os resultados obtidos no trabalho realizado por M.Ferrero e K.Kishimoto |3|. Os autores estudaram os B-automorfismos de $B[X,D]$ que deixam fixos os elementos de B, onde D é uma derivação arbitrária em B.

No §1 apresentamos alguns resultados introdutórios. O Teorema central deste parágrafo dá a caracterização dos B-homomorfismos de $B[X,D]$.

No §2 desenvolvemos os teoremas centrais deste capítulo. Nele é estudado o caso de anéis de característica zero.

No §3 são analisadas algumas caracterizações dos B-automorfismos de $B[X,D]$ para um anel B arbitrário, sob certas restrições.

§ 1 ALGUMAS RELAÇÕES ENTRE COEFICIENTES NILPOTÊNCIA

O Teorema seguinte estabelece condições necessárias e suficientes para que a aplicação $\phi:B[X,D]\to B[X,D]$ induzida por $\phi(X)=\sum_{i=0}^{n} X^i b_i$, com $b_i\in B$ seja um B-homomorfismo.

Teorema 3.1.1

Seja B um anel com unidade, $\{b_i\}_{0\leq i\leq n}$ uma família de ele memtos de B e D uma derivação em B. Então, existe um homomorfismo de anéis $\phi : B[X,D] \to B[X,D]$ tal que $\phi|_B = Id$ e $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ se e somente se

$$\begin{cases} (i)\ b_0 b + D(b) = \sum_{i=0}^{n} D^i(b) b_i \quad \forall b \in B \\ (ii)\ b_h b = \sum_{i=h}^{n} \binom{i}{h} D^{i-h}(b) b_i \quad \forall b \in B,\ \forall h \text{ tal que } 1 \leq h \leq n \end{cases} \quad [3.1]$$

Neste caso, ϕ é único.

<u>Demonstração</u>

Seja ϕ um B-homomorfismo tal que $\phi|_B = Id$ e $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$. Então,

$$b\phi(X) = \phi(bX) = \phi\left[Xb + D(b)\right] = \phi(X)b + D(b) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i b + D(b) \ .$$

Por outro lado, utilizando a expressão [1.8] demonstrada no Teorema 1.2.3, temos que

$$b\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} bX^i b_i = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} X^j \binom{i}{j} D^{i-j}(b) b_i$$

Comparando os coeficientes das duas relações concluimos que:

para $j = 0$, $\sum_{i=0}^{n} D^i(b) b_i = b_0 b + D(b)$, $\forall b \in B$

para $j = h \geq 1$, $\sum_{i=h}^{n} \binom{i}{h} D^{i-h}(b) b_i = b_h b$, $\forall b \in B$, $\forall h$ tal que $1 \leq h \leq n$.

Portanto, [3.1] se verifica.

Antes de mostrarmos a recíproca do Teorema provemos a unicidade de ϕ. Para tal, basta observar, analogamente ao feito no capítulo anterior para $B[X,\alpha]$, que $B[X,D]$ é um B-módulo livre à direita com a B-base $\{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$. Portanto, se anotarmos $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i = \beta$, temos que $\phi(X) = 1$, $\phi(X^2) = \phi(X)^2 = \beta^2, \dots, \phi(X^n) = \phi(X)^n = \beta^n, \dots$.

Logo, dado um elemento arbitrário $f(X) \in B[X,D]$,

$$f(X) = \sum_{i=0}^{m} X^i a_i \ , \quad \phi\Big(f(X)\Big) = \phi\left[\sum_{i=0}^{m} X^i a_i\right] = \sum_{i=0}^{m} \phi(X)^i a_i = \sum_{i=0}^{m} \beta^i a_i$$

Reciprocamente, seja $\{b_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ uma família de elementos de B que verifica [3.1] e definamos $\phi : B[X,D] \to B[X,D]$ da seguinte maneira:

Como já observamos acima, para definir ϕ num elemento arbitrário $f(X) = \sum_{j=0}^{m} X^j a_j \in B[X,D]$ basta definir ϕ nos elementos da B-base $\{1, X, \dots, X^n, \dots\}$ de $B[X,D]$. Seja,

$$\phi(X^j) = \phi(X)^j = \left[\sum_{i=0}^{n} X^i b_i\right]^j \ , \quad \forall j \geqslant 0 \ . \qquad [3.2]$$

e, por linearidade,

$$\phi\Big(f(X)\Big) = \phi\left[\sum_{j=0}^{m} X^j a_j\right] = \sum_{j=0}^{m} \phi(X)^j a_j = \sum_{j=0}^{m} \left[\sum_{i=0}^{n} X^i b_i\right]^j a_j \ .$$

Fazendo, na relação [3.2], $j = 0$ e $j = 1$, obtemos, respectivamen te, $\phi|_B = Id$ e $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$.

Utilizando a relação [1.8] temos que

$$d\phi(X)^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \phi(X)^k D^{j-k}(d) \ , \quad \forall d \in B \ , \quad \forall j \in N \qquad [3.3]$$

De fato, para $j = 1$

$$d\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} dX^i b_i = \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{k=0}^{i} X^k \binom{i}{k} D^{i-k}(d) \right] b_i =$$

$$= db_0 + \sum_{k=0}^{1} X^k \binom{1}{k} D^{1-k}(d) b_1 + \ldots + \sum_{k=0}^{n} X^n \binom{n}{k} D^{n-k}(d) b_n =$$

$$= db_0 + \binom{1}{0} D(d) b_1 + \ldots + \binom{n}{0} D^n(d) b_n + X\binom{1}{1} db_1 + \ldots +$$

$$+ X\binom{n}{1} D^{n-1}(d) b_n + \ldots + X^n \binom{n}{n} db_n = db_0 + D(d) b_1 + \ldots +$$

$$+ D^n(d) b_n + X\left[\binom{1}{1} db_1 + \ldots + \binom{n}{1} D^{n-1}(d) b_n\right] + \ldots + X^n \binom{n}{n} db_n =$$

$$= b_0 d + D(d) + Xb_1 d + X^2 b_2 d + \ldots + X^n b_n d = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i d + D(d) =$$

$$= \phi(X) d + D(d) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} \phi(X)^k D^{1-k}(d) \ .$$

Assumamos que

$$d\phi(X)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \phi(X)^k D^{p-k}(d) \ , \quad \forall d \in B \ .$$

Então,

Mostraremos, agora, por indução sobre o grau de h, que

$$\phi\left[h(X)g(X)\right] = \phi\left[h(X)\right]\phi\left[g(X)\right] .$$

Se o grau de h(X) é zero, a relação acima é verificada. Mostraremos este fato fazendo indução sobre o grau de g(X). Para h(X)= = b ε B e g(X) = Xa temos que:

$$b\phi(Xa) = b \sum_{i=0}^{n} X^i b_i a = \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{i} X^j \binom{i}{j} D^{i-j}(b)\right] b_i a = \phi(X)ba + D(b)a$$

e $\quad \phi(bXa) = \phi(Xba) + D(b)a = \phi(X)ba + D(b)a$

Portanto, para $h(X) = b \in B$ e $g(X) = Xa$, a relação se verifica.

Assumamos que $\phi\left[bg(X)\right] = b\phi\left[g(X)\right]$, $\forall g(X) \in B\left[X,D\right]$ tal que $grg(X) \leqslant p$ e seja agora $g(X) = X^{p+1}a_{p+1} + f(X)$, com $f(X) \in B\left[X,D\right]$ e $grf(X) \leqslant p$.

Pela relação [3.3],

$$b\phi\left[X^{p+1}a_{p+1}\right] = b\phi(X)^{p+1}a_{p+1} = \sum_{j=0}^{p+1} \phi(X)^j \binom{p+1}{j} D^{p+1-j}(b)a_{p+1} .$$

Por outro lado

$$\phi\left[bX^{p+1}a_{p+1}\right] = \phi\left[\sum_{j=0}^{p+1} X^j \binom{p+1}{j} D^{p+1-j}(b)a_{p+1}\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{p+1} \phi(X)^j \binom{p+1}{j} D^{p+1-j}(b)a_{p+1}$$

Logo, utilizando as relações acima e a hipótese de indução temos que

$$\phi\left[bg(X)\right] = \phi\left[bX^{p+1}a_{p+1} + bf(X)\right] = \phi\left[bX^{p+1}a_{p+1}\right] + \phi\left[bf(X)\right] =$$

$$= b\phi\left[X^{p+1}a_{p+1}\right] + b\phi\left[f(X)\right] = b\phi\left[X^{p+1}a_{p+1} + f(X)\right] =$$

$$= b\phi\left[g(X)\right] .$$

Assumamos que para toda $h(X) = X^ib$, com $i \leqslant p$, e para qualquer $g(X) \in B[X,D]$, $\phi\left[(X^ib)g(X)\right] = \phi\left[X^ib\right]\phi\left[g(X)\right]$. Então,

$$\phi\left[(X^{p+1}b)g(X)\right] = \phi\left[X^{p+1}b\right]\phi\left[g(X)\right] .$$

De fato, pondo $g(X) = X^mc_m + \ldots + c_0$ temos que

$$\phi\left[X^{p+1}b\right]\phi\left[g(X)\right] = \left(\phi(X)^{p+1}b\right)\left(\phi\left[g(X)\right]\right)$$

Por outro lado, utilizando-se a hipótese de indução, e a relação [3.3] vem que:

$$\phi\left[\left(X^{p+1}b\right)\left(g(X)\right)\right] = \phi\left[X^p\left(Xbg(X)\right)\right] = \phi\left[X^pX\left[\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}X^j\binom{i}{j}D^{i-j}(b)c_i\right]\right] =$$

$$= \phi(X^p)\phi\left[X\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}X^j\binom{i}{j}D^{i-j}(b)c_i\right] = \phi(X^p)\phi(X)\phi\left[\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}X^j\binom{i}{j}D^{i-j}(b)c_i\right] =$$

$$= \phi(X)^{p+1}\left[\sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\phi(X)^jD^{i-j}(b)\right)c_i\right] = \phi(X)^{p+1}\left[\sum_{i=0}^{m}\left(b\phi(X)^i\right)c_i\right] =$$

$$= \phi(X)^{p+1}b\phi\left[g(X)\right] .$$

Logo, para todo $i \geq 1$ e qualquer $g(X) \in B[X,D]$ temos que

$$\phi\left[X^i b\, g(X)\right] = \phi\left[X^i b\right]\phi\left[g(X)\right] .$$

Com isto fica completa a demonstração, uma vez que todo elemento $h(X) \in B[X,D]$ é soma de termos do tipo $X^i a_i$ e ϕ é linear. $\square$

O Lema 3.1.2 e o Lema 3.1.3 estabelecem algumas relações importantes entre derivações de ordem superior a um e os coeficientes.

Lema 3.1.2

Seja $\phi: B[X,D] \to B[X,D]$ o B-homomorfismo induzido por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$. Nestas condições

$$D^h(b_i)b = \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} D^{j-i}(b) D^h(b_j) , \qquad \forall b \in B,\ \forall i,\ 1 \leq i \leq n \quad \forall h \geq 1 \qquad [3.4]$$

Demonstração

O Lema é verdadeiro para $h = 1$. De fato,

$$D(b_i b) = D(b_i)b + b_i D(b) = D(b_i)b + \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} D^{j-i}\left[D(b)\right] b_j =$$

$$= D(b_i)b + \sum_{j=i}^{n} D^{j-i+1}(b) b_j .$$

Por outro lado, utilizando a condição (ii) da Proposição 1.2.5 podemos escrever que:

$$D(b_i b) = D\left[\sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} D^{j-i}(b) b_j\right] =$$

$$= \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} D^{j-i+1}(b) b_j + \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} D^{j-i}(b) D(b_j) .$$

Comparando as duas igualdades temos que

$$D(b_i)b = \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} D^{j-i}(b) D(b_j) .$$

Assumamos que $D^m(b_i)b = \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} D^{j-i}(b) D^m(b_j)$ $\forall m,\ m \leq k$. Então,

$$D^{k+1}(b_i)b = D\left[D^k(b_i)b\right] - D^k(b_i)D(b) =$$

$$= D\left[\sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} D^{j-i}(b) D^k(b_j)\right] - D^k(b_i)D(b) =$$

$$= \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} D^{j-i+1}(b) D^k(b_j) + \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} D^{j-i}(b) D^{k+1}(b_j) -$$

$$- \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} D^{j-i+1}(b) D^k(b_j) = \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} D^{j-i}(b) D^{k+1}(b_j) \quad \square$$

<u>Lema 3.1.3</u>

Seja $\phi : B[X,D] \to B[X,D]$ o B-homomorfismo induzido por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$. Se ϕ é um B-automorfismo e $\{c_i\}_{0 \leq i \leq m}$ é a família de elementos de B tal que $\phi^{-1}(X) = \sum_{i=0}^{m} X^i c_i$, então

$$D^h(b_i)c_jb = \sum_{\ell=j}^{m} \sum_{k=i}^{n} \binom{\ell}{j}\binom{k}{i} D^{k+\ell-i-j}(b)D^h(b_k)c_\ell \qquad [3.5]$$

Demonstração

Como ϕ^{-1} é um B-homomorfismo, pelo Teorema 3.1.1, temos que

$$c_0b + D(b) = \sum_{\ell=0}^{m} D\ (b)c_\ell\ , \quad \forall b \in B \qquad (i)'$$

$$c_jb = \sum_{\ell=j}^{m} \binom{\ell}{j} D^{\ell-j}(b)c_\ell\ , \qquad \forall b \in B,\ \forall j,\ j \geq 1 \qquad (ii)'$$

Portanto, para $i,j \geq 1$ pelo Lema anterior, temos que

$$D^h(b_i)c_jb = D^h(b_i)\left[\sum_{\ell=j}^{m} \binom{\ell}{j} D^{\ell-j}(b)c_\ell\right] =$$

$$= \sum_{\ell=j}^{m} \left[\binom{\ell}{j} D^h(b_i)D^{\ell-j}(b)c_\ell\right] =$$

$$= \sum_{\ell=j}^{m} \binom{\ell}{j} \left[\sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} D^{k-i}\ D^{\ell-j}(b)\ D^h(b_k)\right] c_\ell =$$

$$= \sum_{\ell=j}^{m} \sum_{k=i}^{n} \binom{\ell}{j}\binom{k}{i} D^{k+\ell-i-j}(b)D^h(b_k)c_\ell\ . \qquad \square$$

Lema 3.1.4

$D^n(x^j) \in B \times B$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq n$.

Demonstração

Para $n = 1$ e $j > 1$ temos que

$$D(x^j) = D\left[x.x^{j-1}\right] = D(x)x^j + xD(x^{j-1}) \in BxB$$

Assumamos que $D^k(x^j) \in BxB$, $\forall k < p$, $\forall j > k$. Seja j arbitrário tal que $j > p$. Então, pela Proposição 1.2.2,

$$D^p(x^j) = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} D^i(x) D^{p-i}(x^{j-1}) \ .$$

Nesta soma, para $i = 0$ temos a parcela $xD^p(x^{j-1})$, que é um elemento de BxB.

Para $\forall i$ tal que $1 \leq i \leq p$, $p-i \leq p-1 < j-1$. Então, pela hipótese de indução, $D^i(x)D^{p-i}(x^{p-1}) \in BxB$, $\forall i \geq 1$. Logo, $D^p(x^j) \in BxB$, o que completa a demonstração. $\square$

Seja N o radical de Noether do anel B. Dizemos que a característica do anel B é zero se $nb = 0$ implica $b = 0$, para $b \in B$ e n um inteiro não nulo.

Com as notações acima, enunciamos o seguinte Lema:

Lema 3.1.5

Seja B um anel de característica zero e D uma derivação em B. Se $x \in N$, então $D(x)$ é um elemento nilpotente de B.

Demonstração

Observemos, primeiramente, que pela Proposição 1.2.2,

$\forall a \in B$, $\forall b \in B$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$D^n(ab) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D^i(a) D^{n-i}(b) .$$

Pondo $a = x$ e $b = x^{j-1}$, com $j > 1$ temos que

$$D^n(x^j) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D^i(x) D^{n-i}(x^{j-1}) , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $x \in N$, existe um ideal bilateral nilpotente J tal que $x \in J$. Conseqüentemente, pelo Lema anterior, para $j > n$, $D^n(x^j) \in BxB \subset J$.

Por indução mostraremos que $D^n(x^n) = n!\, D(x)^n + \alpha_n$, com $\alpha_n \in J$.

Para $n = 2$ a igualdade se verifica, pois

$$D^2(x^2) = D\left[D(x.x)\right] = 2D(x)^2 + D^2(x)x + xD^2(x) = 2!D(x)^2 + \alpha_2$$

onde $\alpha_2 = D^2(x)x + xD^2(x) \in J$.

Assumamos que $D^{n-1}(x^{n-1}) = (n-1)!\left[D(x)\right]^{n-1} + \alpha_{n-1}$ com $\alpha_{n-1} \in J$. Então,

$$D^n(x^n) = D\left[D^{n-1}(x^n)\right] = D\left[\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} D^i(x) D^{n-1-i}(x^{n-1})\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} D^{i+1}(x) D^{n-1-i}(x^{n-1}) + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} D^i(x) D^{n-i}(x^{n-1}) =$$

$$= D(x)D^{n-1}(x^{n-1}) + \binom{n-1}{1} D(x) D^{n-1}(x^{n-1}) + \alpha$$

com α uma soma de termos que contém potências de x ou expressões do tipo $D^k(x^j)$ com $j > k$. Conseqüentemente, $\alpha \in J$.

Usando a hipótese de indução temos que

$$D^n(x^n) = D(x)\left[(n-1)!D(x)^{n-1} + a_{n-1} + n(n-1)!D(x)^{n-1} + b_{n-1}\right] + \alpha ,$$

com α, a_{n-1}, $b_{n-1} \in J$.

Pondo $\alpha_n = \alpha + D(x)a_{n-1} + D(x)b_{n-1} \in J$, vem que

$$D^n(x^n) = n!D(x)^n + \alpha_n .$$

Portanto, escolhendo $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$, obtemos que

$$0 = D^n(x^n) = n!D(x)^n + \alpha_n .$$

Logo, $n!D(x)^n = -\alpha_n \in N$, e, conseqüentemente, existe $u \in \mathbb{N}$ tal que $0 = (-\alpha_n)^u = (n!)^u D(x)^{nu}$. Como a característica de B é zero, temos, então, que $D(x)^{nu} = 0$, o que mostra que $D(x)$ é nilpotente. □

Voltemos a considerar o sistema $S = \{d_{ij} \in B \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$ do capítulo 0, onde cada $d_{ij} \in S$ satisfaz a relação [0.1], isto é,

$$d_{ij}b \in \sum_{\substack{p \geq i \\ q \geq j}} Bd_{pq} , \quad \forall b \in B$$

Observemos que para h fixo, a expressão [3.5] garante que pondo $d_{ij} = D^h(b_i)c_j$, o conjunto $S = \{d_{ij} | 0 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ satisfaz a relação [0.1].

Lema 3.1.6

Seja B um anel de característica zero, D uma derivação em B e $S = \{d_{ij} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ um conjunto que satisfaz [0.1]. Se d_{pq} é um elemento nilpotente, para todo par de inteiros (p,q) tal que $p + q \geq k$, então $D(d_{pq}) \in N$.

Demonstração

Pela relação [0.1] $D(d_{pq})b$ pode ser expresso por:

$$D(d_{pq})b = D(d_{pq}b) - d_{pq}D(b) =$$

$$= D \sum_{\substack{r \geq p \\ s \geq q}} b_{rs} d_{rs} - \sum_{\substack{r \geq p \\ s \geq q}} c_{rs} d_{rs}$$

onde b_{rs} e c_{rs} são elementos de B. Portanto,

$$D(d_{pq})b = \sum_{\substack{r \geq p \\ s \geq q}} \left[D(b_{rs}) - c_{rs}\right] d_{rs} + \sum_{\substack{r \geq p \\ s \geq q}} b_{rs} D(d_{rs})$$

onde a primeira parcela é um elemento de $B_k = \sum_{p+q \geq k} Bd_{pq}$ e a segunda pertence a $\sum_{s+r \geq p+q} BD(d_{rs})$. Logo,

$$D(d_{pq})b \in B_k + \sum_{r+s \geq p+q} BD(d_{rs}) = J .$$

Observemos que J é um ideal bilateral, uma vez que, da expressão de $D(d_{pq})b$ acima, pode-se concluir que $\forall r$, $\forall s$ tal que $r+s \geq p+q$ e $\forall b \in B$, $D(d_{rs})b \in J$.

Vamos mostrar que J é um ideal bilateral nilpotente, o que completará a demonstração.

Como, por hipótese, d_{pq} é nilpotente, pelo Lema 0.2.1 temos que $d_{pq} \in N$. Aplicando, então, o Lema 3.1.5 segue que $D(d_{pq})$ é nilpotente para todo par de inteiros (p,q) tal que $p+q \geq k$.

Além disso, afirmar que $D(d_{pq})b \in B_k + \sum_{r+s \geq p+q} BD(d_{rs})$ implica que no espaço quociente $B|_{B_k}$, $\overline{D(d_{pq})b} \in \sum_{r+s \geq p+q} \overline{BD(d_{rs})}$. Portanto, $\bar{J} = \sum_{r+s > p+q} \overline{BD(d_{rs})}$ é um ideal bilateral nilpotente.

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{J}^n = (\bar{0})$. Então, $J^n \subset B_k$ e, como B_k é nilpotente (pelo Lema 0.2.1) J é nilpotente. $\square$

<u>Corolário 3.1.7</u>

Seja B um anel de característica zero e $\{b_i\}_{1 \leq i \leq n}$ uma família de elementos de B que satisfaz

$$b_i b = \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} D^{j-i}(b) b_j \qquad \forall i, \quad i \geq 1, \quad \forall b \in B$$

$$b_0 b + D(b) = \sum_{j=0}^{n} D^j(b) b_j \qquad \forall b \in B$$

Suponhamos que cada b_i é nilpotente, $\forall i$ tal que $i \geq 2$. Então cada forma diferencial $D^j(b_i)$ está em N, se $j \geq 0$ e $i \geq 2$.

Demonstração

Como $b_i b = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{i} D^{j-i}(b)b_j$, temos que $b_i b \in \sum_{j \geq i} Bb_j$. Pondo $b_i = d_{i_1}, \forall i \quad 2 \leq i \leq n$ e observando $b_i = d_{i_1}$ é nilpotente segue (pelo Lema 0.2.1) que $b_i \in N \quad \forall i \geq 2$.

Assumamos que $D^j(b_i) \in N \quad \forall i \geq 2$ e $j = h-1$. Como $D^h(b_i) = D\left[D^{h-1}(b_i)\right]$, pelo Lema anterior temos que $D^h(b_i) \in N$. □

Lema 3.1.8

Sejam $\{b_i\}_{0 \leq i \leq n}$ e $\{c_j\}_{0 \leq j \leq m}$ famílias de elementos de B que satisfazem [3.5]. Se $b_i c_j$ é nilpotente para $i + j \geq h$, $i \geq 1$, $j \geq 1$, então cada elemento da forma $D^{j_1}(b_{i_1}) \ldots D^{j_k}(b_{i_k})c_\ell$ está em N, para $k > 1$, $i_t \geq 0$, $t = 1,2,\ldots,k$ e $\text{máx}\{i_1,i_2,\ldots,i_k\} + \ell \geq h$, $\ell \geq 1$ e $\text{máx}\{i_1,\ldots,i_k\} \geq 1$.

Demonstração

Primeiramente mostremos que $D^j(b_i)c_\ell \in N$, $\forall j$, $\forall i$, $\forall \ell$, desde que $i + \ell \geq h$.

Para $j = 0$ a afirmação é válida, uma vez que $b_i c_\ell$ é nilpotente e pela relação [3.6] $b_i c_\ell b \in \sum_{u+v \geq i+\ell} Bb_u c_v$. Portanto, utilizando o Lema 0.2.1 temos que $b_i c_\ell \in N$, desde que $i + \ell \geq h$.

Assumamos que $D^j(b_i)c_\ell \in N$, $\forall j$, $j \leq p$ e $i + \ell \geq h$. Então,

$$\left[D^{p+1}(b_i)c_\ell\right]^2 = D\left[D^p(b_i)c_\ell\right] D^{p+1}(b_i)c_\ell - D^p(b_i)D(c_\ell)D^{p+1}(b_i)c_\ell$$

Como, pela hipótese de indução, $D^p(b_i)c_\ell \in N$ e $b_i c_\ell b \in \sum_{u+v \geq i+\ell} B b_u c_v$ temos que $D\left[D^p(b_i)c_\ell\right] \in N$.

Resta mostrar que $D^p(b_i)D(c_\ell)D^{p+1}(b_i)c_\ell \in N$.

Utilizando a expressão obtida no Lema 0.2.1 temos que

$$D^p(b_i)D(c_\ell)D^{p+1}(b_i) = \sum_{r=i}^{n} \binom{r}{i} D^{r-i}\left[D(c_\ell)D^{p+1}(b_i)\right] D^p(b_r)$$

Portanto,

$$D^p(b_i)D(c_\ell)D^{p+1}(b_i)c_\ell = \sum_{r=i}^{n} \binom{r}{i} D^{r-i}\left[D(c_\ell)D^{p+1}(b_i)\right] D^p(b_r)c_\ell \in N$$

E, por conseguinte, $D^{p+1}(b_i)c_\ell$ é um elemento nilpotente, desde que $i+\ell \geq h$. Como ele verifica a relação [3.5], está em N. Logo, fica mostrado que $D^j(b_i)c_\ell \in N \quad \forall j, \forall i, \forall \ell, \ i+\ell \geq h$.

Para completar a prova é suficiente observar que,

$$\forall d \in B, \qquad D^j(b_i)dc_\ell = \sum_{r=i}^{n} \binom{r}{i} D^{r-i}(d)D^j(b_r)c_\ell \in N \qquad \square$$

O Corolário 3.1.7 e o Lema 3.1.8 são válidos no caso de B ser um anel de característica $p \neq 0$, desde que a derivação D verifique a condição "se $x \in N$ então $D(x)$ é nilpotente", uma vez que a hipótese da característica de B ser zero foi utilizada somente no Lema 3.1.5.

Um exemplo da situação acima é obtido quando D é uma derivação interna, isto é, quando existe $b \in B$ tal que $D = I_b$, onde, $\forall x \in B$, $I_b(x) = bx - xb$. De fato, se $x \in N$ então existe um ideal bilateral nilpotente $J \subseteq B$ tal que $x \in J$. Então xb e bx pertencem a J e, conseqüentemente, $I_b(x) = bx - xb \in J$. Logo, $I_b(x)$ é nilpotente.

Observemos, também, que o Corolário 3.1.7 é trivialmente verdadeiro quando B é um anel arbitrário, desde que $D(b_i) = 0$ para $i = 2,3,\ldots,n$.

§ 2 AUTOMORFISMOS DE $B[X,D]$

O Lema 3.2.1 examina uma situação particular de um dos Teoremas centrais deste Capítulo, onde a família $\{b_i\}_{0 \leq i \leq n}$ é $\{b_0, b_1, 0, \ldots, 0\}$. Observemos que neste caso a relação [3.1](ii) equivale a $b_1 \in Z(B)$.

Lema 3.2.1

Seja $\phi : B[X,D] \to B[X,D]$ o B-homomorfismo induzido por $\phi(X) = b_0 + Xb_1$. Então ϕ é um B-automorfismo se e somente se a família $\{b_0, b_1\}$ de elementos de B satisfaz:

(a) $b_0 b + D(b) = \sum_{i=0}^{1} D^i(b) b_i$ e $b_1 \in Z(B)$

(b) $b_1 \in U(B)$

Demonstração

Assumamos que ϕ seja um B-automorfismo. Seja $\{c_i\}_{0 \leq i \leq m}$ a família de elementos de B tal que $\phi^{-1}(X) = \sum_{i=0}^{m} X^i c_i$. Como,

$$X = Id(X) = \phi^{-1}\phi(X) = \phi^{-1}(b_0 + Xb_1) = b_0 + \sum_{i=0}^{m} X^i c_i b_1$$

igualando os coeficientes de 1º grau na relação acima obtemos que $c_1 b_1 = 1$. Além disso, pelo Teorema 3.1.1, temos que

$$b_1 b = \sum_{i=1}^{1} \binom{i}{1} D^{i-1}(b) b_i = bb_1$$

$$b_0 b + D(b) = \sum_{i=0}^{1} D^i(b) b_i$$

Portanto, $b_1 \in Z(B)$ e conseqüentemente, também $b_1 \in U(B)$. Logo, as condições (a) e (b) são verificadas.

Reciprocamente, seja $\{b_0, b_1, 0, \ldots, 0\}$ uma família de elementos de B que satisfaz (a) e (b). Definamos $\phi(X) = b_0 + Xb_1$ e $\phi'(X) = -b_0 b_1^{-1} + Xb_1^{-1}$. Pelo Teorema 3.1.1, ϕ e ϕ' são B-homomorfismos, pois a família $\{b_0, b_1, 0, \ldots, 0\}$ verifica a condição (a). Sendo,

$$\phi\phi'(X) = \phi\left[-b_0 b_1^{-1} + Xb_1^{-1}\right] = b_0 - b_0 b_1^{-1} b_1 + Xb_1^{-1} b_1 = X \quad \text{e}$$

$$\phi'\phi(X) = \phi'\left[b_0 + Xb_1\right] = -b_0 b_1^{-1} + b_0 b_1^{-1} + Xb_1 b_1^{-1} = X ,$$

temos que ϕ é um B-automorfismo de $B[X,D]$. $\square$

Assumamos a partir de agora e por todo este parágrafo, que B seja um anel de característica zero.

Seja $\phi: B[X,D] \to B[X,D]$ o B-homomorfismo definido por

$\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ com $n \geq 2$. Assumamos que ϕ seja um B-automorfismo. Neste caso, $\phi^{-1}(X) = \sum_{j=0}^{m} X^j c_j$ e podemos supor que $m \geq 2$, uma vez que $n \geq 2$. De fato, se $m = 1$, então $\phi^{-1}(X) = c_0 + Xc_1$ e, conforme mostramos no Lema anterior, $\phi(X)$ será dada por $\phi(X) = -c_0 c_1^{-1} + Xc_1^{-1} =$ $= b_0 + Xb_1$. Portanto, $n = 1$, o que é uma contradição.

Com estas hipóteses, e utilizando-se as notações acima, provaremos o

Lema 3.2.2

$b_i c_j$ é um elemento nilpotente de B, $\forall i$, $\forall j$, tal que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ e $i + j \geq 3$.

Demonstração

Consideremos a relação

$$X = \phi\phi^{-1}(X) = \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{n} X^i b_i \right)^j c_j$$

Se denotarmos os coeficientes do polinômio $\sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{n} X^i b_i \right)^j c_j$ por $(d_i)_{0 \leq i \leq nm}$, temos que $d_1 = 1$ e todos os demais d_i são nulos.

Observemos também que na expansão de $(b_0 + Xb_1 + \ldots + X^n b_n)^h$, o termo $X^{i_1} b_{i_1} X^{i_2} b_{i_2} \ldots X^{i_h} b_{i_h}$ pode ser expresso como uma soma do tipo $\sum_{k=i_1}^{i_1+\ldots i_h} X^k \ell_k$, onde ℓ_k é uma combinação linear de elementos $\Delta_h^{j_1,\ldots,j_h}(b_{i_1},\ldots,b_{i_h})$ com coeficientes inteiros onde

$$\Delta_h^{j_1,\ldots,j_h}\left(b_{i_1},\ldots,b_{i_h}\right) = D^{j_1}\left(b_{i_1}\right)D^{j_2}\left(b_{i_2}\right)\ldots\ D^{j_h}\left(b_{i_h}\right) \qquad [3.6]$$

Conseqüentemente, d_k também é uma combinação linear de $\Delta h^{j_1,\ldots,j_h}(b_{i_1},\ldots,b_{i_h})$ com coeficientes inteiros. Além disso, é imediato que $d_{nm} = b_n^m c_m$.

O Lema é verdadeiro para $i = n$ e $j = m$, uma vez que do fato de b_n e c_m serem centrais (o que se obtém pelo Teorema 3.1.1) decorre que $0 = d_{nm} = b_n^m c_m$. Logo, $b_n^m c_m^m = (b_n c_m)^m = 0$ e, conseqüentemente $b_n c_m$ é nilpotente.

Assumamos que $b_i c_j$ seja nilpotente, $\forall i \geq 1$, $\forall j \geq 1$ tal que $i + j \geq k + 1$, com $k \geq 3$.

Sejam p e q inteiros tais que $p + q = k$, $p \geq 1$, $q \geq 1$

Na expansão de $(b_0 + Xb_1 + \ldots + X^n b_n)^h c_h$, para $h = q$ temos que o coeficiente de X^{pq} é do tipo $b_p^q c_q + \alpha$, onde α é uma combinação linear de produtos do tipo $\Delta_q^{j_1,\ldots,j_q}(b_{i_1},\ldots,b_{i_q})c_q$ com $i_t > p$ para algum i_t. Pelo Lema 3.1.8, α é um elemento de N.

Se $h \neq q$ o coeficiente de X^{pq} é uma combinação linear do tipo $\Delta_h^{j_1,\ldots,j_h}(b_{i_1},\ldots,b_{i_h})c_h$.

Como $d_{pq} = 0$ temos que

$$0 = d_{pq} = b_p^q c_q + \alpha + \beta \qquad [3.7]$$

onde β é constituído de termos do tipo anterior. Então, podemos escrever β como uma combinação linear da forma:

$$\beta = \sum_{h>q} \sum_{i_1,\dots,i_h} u_{i_1,\dots,i_h} \Delta_h^{j_1,\dots,j_h}\left(b_{i_1},\dots,b_{i_h}\right)c_h +$$

$$+ \sum_{h<q} \sum_{i_1,\dots,i_h} v_{i_1,\dots,i_h} \Delta_h^{j_1,\dots,j_h}\left(b_{i_1},\dots,b_{i_h}\right)c_h$$

onde $u_{i_1,\dots,i_h}$, $v_{i_1,\dots,i_h}$ são números inteiros.

Multiplicando [3.7] por $b_p^q c_q$ obtemos

$$0 = (b_p^q c_q)^2 + \sum_{h>q} \sum_{i_1,\dots,i_h} u_{i_1,\dots,i_h} \Delta_h^{j_1,\dots,j_h}\left(b_{i_1},\dots,b_{i_h}\right)c_h b_p^q c_q +$$

$$+ \sum_{h<q} \sum_{i_1,\dots,i_h} v_{i_1,\dots,i_h} \Delta_h^{j_1,\dots,j_h}\left(b_{i_1},\dots,b_{i_h}\right)c_h b_p^q c_q + \gamma$$

onde $\gamma = \alpha b_p^q c_q \in N$.

Observemos que se $h > q$ então $h + p \geq k + 1$ e, neste caso,

$$c_h b_p^q = (c_h b_p) b_p^{q-1} = \left(\sum_{r=h}^{m} \binom{r}{h} D^{r-h}(b_p) c_r\right) b_p^{q-1} \in N$$

Por outro lado, se $h < q$, como $i_1 + \ldots + i_h \geq pq$, no termo correspondente existe t tal que $i_t > p$. Então,

$$\Delta_h^{j_1,\ldots,j_h}\left(b_{i_1},\ldots,b_{i_h}\right)c_h b_p^q c_q \in N ,$$

uma vez que $i_t + q \geq k+1$. Portanto, $(b_p^q c_q)^2 \in N$ e consequentemente $b_p^q c_q$ é nilpotente. Além disso, temos que

$$c_q b_p = \sum_{h=q}^{m} \binom{h}{q} D^{h-q}(b_p)c_q = b_p c_q + \sum_{h=q+1}^{m} \binom{h}{q} D^{h-q}(b_p)c_q = b_p c_q + \mu$$

com $\mu \in N$ (pois μ contém termos com soma de índices maior que $p+q$).

Consideremos o anel quociente B/N. Em B/N temos que $\overline{c}_q\overline{b}_p = \overline{b}_p\overline{c}_q$ (pois $\mu \in N$) e $(\overline{b}_p\overline{c}_q)^s = \overline{b}_p^s\overline{c}_q^s$ $\forall s \geq 0$.

Se $(b_p^q c_q)^t = 0$, então $(\overline{b}_p^q\overline{c}_q)^t = \overline{0}$. Logo, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $(\overline{b}_p\overline{c}_q)^r = \overline{0}$. Isto significa que $(b_p c_q)^r \in N$, donde segue a nilpotência de $b_p c_q$. $\square$

<u>Lema 3.2.3</u>

b_1 e c_1 são elementos inversíveis de B.

<u>Demonstração</u>

Consideremos a relação

$$X = \phi\,\phi^{-1}(X) = \sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{n} X^i b_i\right)^j c_j$$

Examinando o coeficiente do termo de grau um, temos que ele é da forma $b_1c_1 + \alpha$, com α uma combinação linear de termos do tipo $D^{j_1}(b_{i_1}) \dots D^{j_h}(b_{i_h})c_h$ com $h \geq 2$. Além disso, existe $t \in N$ tal que $i_t \geq 1$.

Pelo Lema 3.1.8, $\alpha \in N$. Da relação acima decorre que $b_1c_1 + \alpha = 1$, isto é, $b_1c_1 = (1-\alpha)$. Como $\alpha \in N$, então α é nilpotente. Conseqüentemente $(1-\alpha)$ é inversível (se p é o índice de nilpotência de α, então $(1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^{p-1}) = 1$ e $(1+\alpha+\dots+\alpha^{p-1})(1-\alpha) = 1$). Portanto, temos que

$$b_1c_1(1-\alpha) = 1$$

$$\text{e} \qquad (1-\alpha)^{-1}b_1c_1 = 1$$

o que mostra que b_1 tem um inverso à direita e c_1 um inverso à esquerda.

Por um raciocínio análogo para a relação

$$X = \phi^{-1}\phi(X) = \phi^{-1} f(X) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} X^j c_j\right)^i b_i$$

obtemos que c_1 é inversível à direita e b_1 à esquerda, o que completa a demonstração. $\square$

<u>Corolário 3.2.4</u>

b_i é nilpotente $\forall i,\ 2 \leq i \leq n$

Demonstração

Para $i \geq 2$ temos que $b_i c_1$ é nilpotente, uma vez que, sendo $i+1 \geq 3$, estamos nas condições do Lema 3.2.2. Mostremos primeiramente que $\forall r \in N$, $(b_i c_1)^r = b_i^r c_1^r + \alpha_r$ com $\alpha_r \in N$.

Para $t = 2$ a afirmação é verdadeira, pois

$$(b_i c_1)^2 = b_i \left[\sum_{k=1}^{m} \binom{k}{1} D^{k-1}(b_i) c_k \right] c_1 =$$

$$= b_1^2 c_1^2 + b_i \sum_{k=2}^{m} \binom{k}{1} D^{k-1}(b_i) c_k c_1 =$$

$$= b_i^2 c_1^2 + \alpha_2 , \qquad \text{com } \alpha_2 \in N$$

Assumamos que $\forall p < t$,

$$(b_i c_1)^p = b_i^p c_1^p + \alpha_p , \qquad \text{com } \alpha_p \in N$$

$$(b_i c_1)^t = (b_i c_1)^{t-1} (b_i c_1) = b_i^{t-1} c_1^{t-1} b_i c_1 + \alpha_{t-1} b_i c_1 =$$

$$= b_i^{t-1} c_1^{t-1} b_i c_1 + \alpha, \qquad \text{com } \alpha \in N$$

Como

$$b_i^{t-1} c_1^{t-1} b_i c_1 = b_i^{t-1} \left[\sum_{k=1}^{m} \binom{k}{1} D^{k-1}(b_i) c_k^{t-1} \right] c_1 =$$

$$= b_i^t c_1^t + b_i^{t-1} \sum_{k=2}^{m} \binom{k}{1} D^{k-1}(b_i) c_k^{t-1} c_1 ,$$

pondo

$$\alpha_t = \alpha + b_i^{t-1} \sum_{k=2}^{m} \binom{k}{1} D^{k-1}(b_i) c_k^{t-1} c_1$$

segue que $(b_i c_1)^t = b_i^t c_1^t + \alpha_t$, com $\alpha_t \in N$.

Seja o anel quociente B/N. Seja $s \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{b}_i^s \overline{c}_1^s = \overline{0}$ em B/N. Como $\overline{c}_1$ é inversível deve ocorrer necessariamente que $b_i^s \in N$, $\forall i \geqslant 2$ e isso completa a demonstração. $\square$

Estamos agora em condições de demonstrar um dos resultados centrais deste capítulo.

Teorema 3.2.5

Se a aplicação $\phi: B[X,D] \to B[X,D]$ induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ é um B-automorfismo de $B[X,D]$ então a família $\{b_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ satisfaz as seguintes condições:

(a) $b_0 b + D(b) = \sum_{j=0}^{n} D^j(b) b_j \quad \forall b \in B$

$$b_i b = \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} D^{j-i}(b) b_j \quad \forall b \in B, \forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$$

(b) $b_1 \in U(B)$

(c) b_i é nilpotente, $\forall i \quad 2 \leqslant i \leqslant n$

Demonstração

Assumamos que ϕ definida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ é um B-automorfismo de $B[X,D]$.

Pelo Teorema 3.1.1, a condição (a) se verifica. A inversibilidade de b_1 é garantida pelo Lema 3.2.3 e a condição (c) é obtida pelo Corolário 3.2.4. $\square$

Seja $\{b_i\}_{0\leq i\leq n}$ uma família de elementos de B que satisfaz as condições (a) e (b) do Teorema 3.2.5.

Seja $Y = (X - b_0)b_1^{-1} \in B[X,D]$. Para todo $b \in B$ pela condição (a)), vale a relação:

$$bY = b(X - b_0)b_1^{-1} = \left[Xb + D(b) - bb_0\right]b_1^{-1}$$

$$= \left[Xb + \sum_{i=1}^{n} D^i(b)b_i - b_0 b\right]b_1^{-1} = \left[X - b_0\right]bb_1^{-1} + \sum_{i=1}^{n} D^i(b)b_i b_1^{-1} =$$

$$= Yb_1 bb_1^{-1} + \sum_{i=1}^{n} D^i(b)b_i b_1^{-1} .$$

Portanto,

$$bY = Y\rho(b) + E(b) \qquad \text{onde} \quad \rho(b) = b_1 bb_1^{-1},\ \forall b \in B \qquad [3.8]$$

$$\text{e} \quad E(b) \text{ é uma } (\rho,1) \text{ derivação.}$$

Consideremos a família $\{1, Y, Y^2, \ldots, Y^n, \ldots\}$ e mostremos que ela é linearmente independente sobre B. Seja $\sum_{i=0}^{n} Y^i c_i = 0$. Portanto, $\sum_{i=0}^{n} \left[(X - b_0)b_1^{-1}\right]^i c_i = 0$.

O coeficiente de X^n é dado por $(b_1^{-1})^n c_n$ e tal coeficien te é nulo. Portanto, $c_n = 0$ e a expressão acima reduz-se a

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[(X - b_0)b_1^{-1}\right]^i c_i = 0$$

O coeficiente de X^{n-1}, que é nulo, é dado por $(b_1^{-1})^{n-1}c_{n-1}$ e, portanto, $c_{n-1} = 0$.

Repetindo o processo n-1 vezes obtemos que $c_i = 0$, $\forall i$, $0 \leq i \leq n$. Portanto, $\left\{ \sum_{i=0}^{h} Y^i c_i \mid c_i \in B \right\}$ é um subanel de $B[X,D]$. Como $Y = Xb_1^{-1} - b_0 b_1^{-1}$ segue que $X = Yb_1 - b_0$ e, conseqüentemente $\left\{ \sum_{i=0}^{h} Y^i c_i \mid c_i \in B \right\}$ reproduz todo o anel $B[X,D]$, uma vez que qualquer elemento de $B[X,D]$ sendo combinação linear de potências de X, será combinação linear (à direita) de potências de Y, conforme mostra a relação [3.8].

Com as notações acima, estamos em condições de provar o seguinte resultado:

Proposição 3.2.6

Seja $\{b_i\}_{0 \leq i \leq n}$ uma família de elementos de B que satisfaz as condições (a), (b) e (c) do Teorema 3.2.5. Então, a aplicação $\phi: B[X,D] \to B[X,D]$ induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ é um B-monomorfismo.

Demonstração

Pelo Teorema 3.1.1, ϕ é um B-homomorfismo. Para mostrar a injetividade de ϕ basta provar que se $\phi\left(\sum_{i=0}^{m} Y^i c_i\right) = 0$, então, $c_i = 0$, $\forall i$ tal que $0 \leqslant i \leqslant m$. Como,

$$\phi(X) = b_0 + Xb_1 + \ldots + X^n b_n \quad \text{e}$$

$$\phi(Y) = \phi(Xb_1^{-1} - b_0 b_1^{-1}) = \left[\phi(X) - b_0\right] b_1^{-1} ,$$

então,

$$\phi(Y) = Xd_1 + X^2 d_2 + \ldots + X^n d_n \quad \text{com} \quad d_i = b_i b_1^{-1} .$$

Seja

$$0 = \sum_{i=0}^{m} \phi(Y)^i c_i = \sum_{i=0}^{m} (X + X^2 d_2 + \ldots + X^n d_n)^i c_i$$

Observemos que explicitando a relação acima vem que

$$0 = c_0 + (X + X^2 d_2 + \ldots + X^n d_n) c_1 +$$

$$+ (X + X^2 d_2 + \ldots + X^n d_n)^2 c_2 + \ldots + (X + X^2 d_2 + \ldots + X^n d_n)^m c_m$$

e, então, é imediato que $c_0 = c_1 = 0$.

Basta, portanto, resolver o sistema dado por

$$\sum_{i=2}^{m} (X + X^2 d_2 + \ldots + X^n d_n)^i c_i = 0$$

Como $b_i \in N$, temos que $d_i = b_i b_1^{-1} \in N$. Além disso, sendo

$$D^j(d_i) = D^j(b_i b_1^{-1}) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} D^{j-k}(b_i) D^k(b_1^{-1}) ,$$

pelo Corolário 3.1.7, segue-se que $D^j(d_i) \in N$, $\forall j \geq 0$. Portanto, é fácil ver que $c_0 = 0$, $c_1 = 0$ e

$$\alpha_{i2}c_2 + \ldots + (1 - \alpha_{ii})c_i + \ldots + \alpha_{im}c_m = 0 \qquad \forall i \text{ tal que } 2 \leq i \leq m,$$

onde $\alpha_{ij} \in N$.

O Lema que se segue mostrará que o sistema acima admite somente a solução trivial, de onde decorrerá a injetividade de ϕ.

<u>Lema 3.2.7</u>

O sistema linear

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}X_j = 0 \qquad 1 \leq i \leq m \qquad [3.9]$$

onde $a_{ij} \in N$ para $i \neq j$ e $a_{ii} - 1 \in N$ para $i = 1,\ldots,n$, admite somente a solução trivial em B.

<u>Demonstração</u>

Como $a_{mm} = 1 + (a_{mm} - 1)$ e $a_{mm} - 1 \in N$ temos que a_{mm} é inversível. Portanto, na equação obtida de [3.9] para $j = m$ temos que

$$X_m = -a_{mm}^{-1}\left[a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \ldots + a_{mm-1}X_{m-1}\right] = \sum_{j=1}^{m-1} - a_{mm}^{-1}a_{mj}X_j \; .$$

Substituindo a expressão de X_m em cada uma das equações de [3.9] obtemos um sistema similar ao [3.9] com (m-1) equações e (m-1) incógnitas.

Procedendo indutivamente, obtemos, finalmente, uma equação do tipo $cx_1 = 0$, onde $c - 1 \in N$. Como $c = 1 + (c-1)$ e $(c-1) \in N$, temos que c é inversível. Portanto, $x_1 = 0$.

Substituindo x_1 na equação anterior, obtemos $x_2 = 0$ e assim sucessivamente. Deste modo, podemos concluir que o sistema [3.9] admite somente a solução trivial. □

Para demonstrar a recíproca do Teorema 3.2.5, será necessário uma condição mais forte que a condição (c). Assumamos, pois, que $\{b_i\}_{0\leq i\leq n}$ satisfaça as condições (a), (b) e (c) do Teorema 3.2.5 e seja N_k o ideal gerado por $\{D^j(b_i) \mid 2\leq i\leq n \text{ e } j\geq k\}$. É imediato que N_k é um nilideal mas, em princípio, não podemos garantir que N_k seja um ideal nilpotente. Uma vez que N_0 pode ser expresso como soma de N_k, para algum k, com um ideal gerado por uma família finita de ideais do tipo $BD(b_i)$ com $2 \leq i \leq n$ temos que N_0 é um ideal nilpotente se e somente se N_k é nilpotente, para algum k.

Seja, pois, (c)' a condição:

(c)' N_0 é um ideal nilpotente

Estamos, então, em condições de provar o seguinte Teorema:

Teorema 3.2.8

Seja $\{b_i\}_{0\leq i\leq n}$ uma família de elementos de B que satisfaz as condições (a) e (b) do Teorema 3.2.5 e a condição (c)'. Então, a aplicação $\phi: B[X,D] \to B[X,D]$ induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ é um B-automorfismo.

Demonstração

Como a condição (c)' trivialmente implica a condição (c) do Teorema 3.2.5, pela Proposição 3.2.6 temos que ϕ é um B-monomorfismo. Resta, pois, provar a sobrejetividade de ϕ.

Seja,

$$Y = (X - b_0)b_1^{-1} \quad \text{e} \quad g_1(X) = g(Y) - \sum_{j=2}^{n} \phi(Y)^j d_j$$

com

$$\phi(Y) = X + X^2 d_2 + \ldots + X^n d_n \quad \text{e} \quad d_i = b_i b_1^{-1} \quad \forall i,\ i \geq 2 \ .$$

Explicitando $g_1(X)$ temos que

$$g_1(X) = (X + X^2 d_2 + \ldots + X^n d_n) -$$

$$- (X + X^2 d_2 + \ldots + X^n d_n)^2 d_2 - \ldots - (X + X^2 d_2 + \ldots + X^n d_n)^n d_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X^i d_i - \sum_{j=2}^{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} X^i d_i \right)^j d_j \right] \quad \text{com } d_1 = 1 \text{ e } d_i = b_i b_1^{-1},\ \forall i \geq 2$$

O coeficiente de X^s em $\left(\sum_{i=1}^{n} X^i d_i\right)^h d_h$ é uma soma de formas diferenciais de $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Anotemos tal soma por $\Lambda_h^{(s)}$. Em particular $\Lambda_h^{(h)}$ é soma de d_h e das demais. Anotemos $\Lambda_h^{(h)} - d_h$ por $\Gamma_h^{(h)}$. Então,

$$\begin{aligned} g_1(X) = X &+ X^2\left[-\Gamma_2^{(2)}d_2 - \Lambda_3^{(2)}d_3 - \ldots - \Lambda_n^{(2)}d_n\right] + \\ &+ X^3\left[-\Lambda_2^{(3)}d_2 - \Gamma_3^{(2)}d_3 - \ldots - \Lambda_n^{(3)}d_n\right] + \ldots + \\ &+ X^n\left[-\Lambda_2^{(n)}d_2 - \Lambda_3^{(n)}d_3 - \ldots - \Gamma_n^{(n)}d_n\right] + \ldots + \\ &+ X^t\left[-\Lambda_2^{(t)}d_2 - \Lambda_3^{(t)}d_3 - \ldots - \Lambda_n^{(t)}d_n\right] \end{aligned}$$

para algum $t \geqslant n$.

Seja $s_{k,1}$ o coeficiente de X^k em $g_1(X)$, isto é,

$$s_{k,1} = \begin{cases} -\Lambda_2^{(2)}d_2 - \ldots - \Gamma_k^{(k)}d_k - \ldots - \Lambda_n^{(k)}d_n\,, & \text{se } 2 \leqslant k \leqslant n \\ -\sum\limits_{j=2}^{n} \Lambda_j^{(k)}d_j & \text{se } k > n\,. \end{cases}$$

Portanto, $s_{k,1} \in N_0^2$. Além disso, $g_1(X) \in \mathrm{Im}\phi$.

Seja,

$$g_2(X) = g_1(X) - \sum_{j=2}^{t} \phi(Y)^j s_{j,1}\,.$$

Fazendo considerações análogas obtemos que

$$g_2(X) = X + X^2 s_{2,2} + X^3 s_{3,2} + \ldots + X^n s_{n,2} \qquad \text{com } s_{k,2} \in N_0^3 \text{ e } g_2(X) \in \mathrm{Im}\phi$$

Definamos, então, por indução

$$g_m(X) = g_{m-1}(X) - \sum_{j=2}^{u} \phi(Y)^j s_{j,m-1}$$

$$= X + X^2 s_{2,m} + \ldots + X^v s_{v,m} \qquad \text{com } s_{k,m} \in N_0^{m+1}$$

Como N_0 é nilpotente, existe um $r \in \mathbb{N}$ tal que $g_r(X) = X$. Como $g_j(X) \in \mathrm{Im}\phi$ para todo j, temos que $X \in \mathrm{Im}\phi$, o que completa a demonstração. $\square$

O corolário que se segue examina situações particulares nas quais a recíproca do Teorema 3.2.5 se verifica.

Corolário 3.2.9

Seja B um anel de característica zero e D uma derivação em B. Se B ou D satisfizerem uma das condições seguintes:

(1) B é noetheriano
(2) $D^m = 0$ para algum $m \in \mathbb{N}$
(3) Todo elemento nilpotente de B é central (por exemplo, B comutativo).

então a aplicação $\phi: B[X,D] \to B[X,D]$ induzida por $\phi(X) = b_0 + Xb_1 + \ldots + X^n b_n$ é um B-automorfismo se e somente se a família $\{b_i\}_{0 \leq i \leq n}$ satisfaz as condições (a), (b) e (c) do Teorema 3.2.5.

Assumamos que todo elemento nilpotente de B seja central. Se a família $\{b_i\}_{0\leq i\leq n}$ de elementos de B satisfaz (a), (b) e (c) do Teorema 3.2.5 e todo elemento nilpotente de B é central, então a condição (c') do Teorema 3.2.8 é verificada. De fato, neste caso, $b_i \in Z(B)$, $\forall i$ tal que $2\leq i\leq n$. Como, $D(Z(B)) \subset Z(B)$, temos, pela condição (a), que

$$0 = D^s(b_{n-1})b - bD^s(b_{n-1}) = \binom{n}{n-1}D(b)D^s(b_n) \ , \quad \forall b \in B, \ \forall s \geq 0$$

Então, $D^r(b)D^s(b_n) = 0$, $\forall b \in B$, $\forall r \geq 1$, $\forall s \geq 0$. Em particular, $D^r(b_j)D^s(b_n) = 0$, $\forall j$ tal que $2\leq j\leq n$.

Assumamos que $D^r(b_j)D^s(b_k) = 0$, $\forall j$ tal que $2\leq j\leq n$, $\forall r\geq 1$, $\forall s\geq 0$ e $m\leq k\leq n$, $m>2$. Então,

$$D^s(b_{m-2})D^r(b_j) = D^r(b_j)D^s(b_{m-2}) + \binom{m-1}{m-2}D^{r+1}(b_j)D^s(b_{m-1}) +$$

$$+ \sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m-2}D^{r+k+2-m}(b_j)D^s(b_k) \ ,$$

$\forall j$ tal que $2\leq j\leq n$, $\forall r\geq 0$, $\forall s\geq 0$. Portanto, $D^r(b_j)D^s(b_{m-1}) = 0$, $\forall j$ tal que $2\leq j\leq n$, $\forall r\geq 1$, $\forall s\geq 0$. Conseqüentemente $D^r(b_j)D^s(b_{m-1}) = 0$ $\forall i,j$ tal que $2\leq i,j\leq n$, $\forall r\geq 1$, $\forall s\geq 0$.

Então, como N_0^2 é gerado por todos os produtos $D^h(b_j)D^k(b_i)$ com $2\leq i,j\leq n$, $h\geq 0$, $k\geq 0$, temos que N_0^2 é gerado por $\{b_jb_i \mid 2\leq i,j\leq n \text{ e } j\leq i\}$. Conseqüentemente, N_0 é nilpotente. Portanto, pelo Teorema 3.2.8 temos que a aplicação $\phi: B[X,D] \to B[X,D]$ induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ é um B-automorfismo, o que completa a prova. $\square$

Demonstração

Se a aplicação $\phi:B[X,D] \to B[X,D]$ induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ é um B-automorfismo, então, pelo Teorema 3.2.5 a família $\{b_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ de elementos de B satisfaz as condições (a), (b) e (c) deste Teorema.

Assumamos que B seja noetheriano. Se a família $\{b_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ satisfaz as condições (a), (b) e (c) do Teorema 3.2.5 e B é um anel noetheriano, então a condição (c)' do Teorema 3.2.8 é verificada. De fato, se B é noetheriano, pelo Teorema 0.1.9, todo nilideal bilateral de B é nilpotente. Em particular, o nilideal N_0, gerado por $\{D^j(b_i) \mid 2 \leqslant i \leqslant n \text{ e } j \geqslant 0\}$ é nilpotente. Portanto, aplicando o Teorema 3.2.8, obtemos que a aplicação $\phi:B[X,D] \to B[X,D]$ induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ é um B-automorfismo.

Assumamos que $D^m = 0$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Se a família $\{b_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ satisfaz (a), (b) e (c) do Teorema 3.2.5 e $D^m = 0$ para algum $m \in \mathbb{N}$, então a condição (c)' do Teorema 3.2.8 é verificada. De fato, sob estas condições $N_0 = \sum_{j=0}^{m-1} M_j$, onde $\forall j$ tal que $0 \leqslant j \leqslant m-1$, $M_j = D^j(b_2)B + \ldots + D^j(b_n)B$ é nilpotente (conforme vimos no § 1). Portanto, N_0, que é uma soma finita de ideais nilpotentes, é nilpotente.

Portanto, pelo Teorema 3.2.8, temos que a aplicação $\phi:B[X,D] \to B[X,D]$ induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ é um B-automorfismo.

§ 3 ALGUNS RESULTADOS ADICIONAIS

Neste parágrafo assumamos que B é um anel arbitrário. O Teorema a seguir caracteriza os B-automorfismos de $B[X,D]$, desde que se faça algumas restrições sobre a estrutura do anel.

Teorema 3.3.1

Seja B um anel tal que $N = (0)$. Então a aplicação $\phi: B[X,D] \to B[X,D]$ induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ é um B-automorfismo se e somente se a família $\{b_i\}_{0 \leq i \leq n}$ de elementos de B satisfaz as condições (a) e (b) do Teorema 3.2.5 e (c)" $b_i = 0$, $\forall i$ tal que $i \geq 2$.

Demonstração

Assumamos que (a), (b) e (c)" se verifiquem. Então, pelo Lema 3.2.1, ϕ é um B-automorfismo.

Reciprocamente, seja ϕ um B-automorfismo. Seja,

$$\phi^{-1}(X) = \sum_{i=0}^{m} X^i c_i$$

Utilizando o mesmo raciocínio do Lema 3.2.2, temos que $b_n c_m$ é nilpotente. Além disso, como

$$b_n c_m b \in B b_n c_m \qquad \forall b \in B$$

segue-se que $b_n c_m$ satisfaz a condição [0.1]. Logo, pelo Lema 0.2.1, $b_n c_m \in N = (0)$. Portanto, $b_n c_m = 0$.

Se assumirmos que $b_i c_j = 0$ para $i + j \geqslant h$, refazendo a demonstração do Lema 3.1.8 obtemos que $D^{j_1}(b_{i_1}) \ldots D^{j_k}(b_{i_k})c_\ell = 0$ para $k \geqslant 1$, $j_t \geqslant 0$, $t = 1, 2, \ldots k$ e $\max\{i_2, \ldots, i_k\} + \ell \geqslant h$. E, de fato, podemos mostrar que $b_i c_j = 0$, $\forall i, 0 \leqslant i \leqslant n$ e $\forall j, 0 \leqslant j \leqslant m$ tal que $i + j \geqslant 3$, bastando, para tal, reproduzir o raciocínio feito na demonstração do Lema 3.2.2.

Da relação

$$X = \phi\, \phi^{-1}(X) = \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{n} X^i b_i \right)^j c_j$$

obtemos que $b_1 c_1 + \alpha = 1$, onde α é uma combinação linear de termos do tipo $D^{j_1}(b_{i_1}) \ldots D^{j_h}(b_{i_h})c_h$ com $h \geqslant 2$. Utilizando o mesmo processo aplicado no Lema 3.1.8 concluimos que $\alpha = 0$ e, portanto, b_1 é inversível à direita e c_1 à esquerda.

Analogamente obtemos que b_1 admite inverso à esquerda e c_1 à direita. Logo, b_1 e c_1 são inversíveis e, em conseqüência, $b_i = 0$, $\forall i$, $i \geqslant 2$.

A derivação D de B pode ser estendida a uma derivação $\tilde{D}$ de $B[X,D]$ tal que $\tilde{D}(b) = D(b)$ $\forall b \in B$ e $\tilde{D}(X) = 0$. Para tal, basta definir $\tilde{D}: B[X,D] \to B[X,D]$ por $\tilde{D}\left(\sum_{i=0}^{m} X^i a_i\right) = \sum_{i=0}^{m} X^i D(a_i)$, onde $\sum_{i=0}^{m} X^i a_i$ é um elemento arbitrário de $B[X,D]$. Pode-se mostrar facilmente que a aplicação $\tilde{D}$ assim definida é uma derivação em $B[X,D]$.

Com as notações acima, mostremos o seguinte resultado:

Teorema 3.3.2

A aplicação $\phi: B[X,D] \to B[X,D]$ induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ é um B-automorfismo tal que $\phi\tilde{D} = \tilde{D}\phi$ se e somente se a família $\{b_i\}_{0 \leq i \leq n}$ de elementos de B satisfaz as condições (a), (b) e (c) do Teorema 3.2.5 e

(d) $D(b_i) = 0 \quad \forall i$ tal que $0 \leq i \leq n$

Demonstração

Observemos primeiramente que a condição (d) é equivalente a condição $\phi\tilde{D} = \tilde{D}\phi$. De fato, se $D(b_i) = 0$, então

$$\tilde{D}\phi(X) = \tilde{D}\left[\sum_{i=0}^{n} X^i b_i\right] = \sum_{i=0}^{n} X^i D(b_i) = 0$$

Por outro lado, trivialmente $\phi\tilde{D}(X) = 0$. Portanto, $\phi\tilde{D}(X) = \tilde{D}\phi(X)$. Além disso, $\phi\tilde{D}(b) = \phi D(b) = D(b) = D(\phi(b)) = \tilde{D}\phi(b) \quad \forall b \in B$.

Seja $f = \sum_{i=0}^{m} X^i a_i$ um elemento arbitrário de $B[X,D]$.

$$\tilde{D}\phi(f) = \tilde{D}\phi\left(\sum_{i=0}^{m} X^i a_i\right) = \tilde{D}\left(\sum_{i=0}^{m} \phi(X)^i a_i\right) = \sum_{i=0}^{m} \phi(X)^i D(a_i)$$

Por outro lado

$$\phi\tilde{D}(f) = \phi\tilde{D}\left(\sum_{i=0}^{m} X^i a_i\right) = \phi\left(\sum_{i=0}^{m} X^i D(a_i)\right) = \sum_{i=0}^{m} \phi(X)^i D(a_i) \ .$$

Portanto, se $D(b_i) = 0$, então $\phi\tilde{D} = \tilde{D}\phi$.

Reciprocamente, se $\phi\tilde{D}(X) = \tilde{D}\phi(X)$, então $\sum_{i=0}^{n} X^i D(b_i) = 0$. Igualando os coeficientes da relação acima obtemos que $D(b_i) = 0$ $\forall i$ tal que $0 \leq i \leq n$.

Assumamos que as condições (a), (b), (c) e (d) se verifiquem. Sendo $D(b_i) = 0$ $\forall i$ tal que $0 \leq i \leq n$, temos que o ideal N_0, gerado por $\{D^j(b_i) \mid 2 \leq i \leq n \text{ e } j \geq 0\}$ reduz-se ao ideal gerado pela família $\{b_i\}_{2 \leq i \leq n}$. Logo, N_0 é um ideal nilpotente e a condição (c)' do Teorema 3.2.8 é verificada. Além disso, conforme observamos no § 1, se a condição (d) é satisfeita, então a derivação D verifica a propriedade: "se $x \in N$ então $D(x)$ é um elemento nilpotente de B".

Portanto, os resultados obtidos no § 2 podem ser aplicados aqui e, desta forma, pode-se facilmente demonstrar o Teorema. $\square$

CAPÍTULO IV

ISOMORFISMOS DE $A[X,\partial]$ EM $B[X,D]$

Sejam A e B anéis, $\psi : A \to B$ um isomorfismo de anéis, ∂ e D derivações de A e B, respectivamente. Neste capítulo apresentamos alguns resultados sobre a determinação dos isomorfismos ϕ de $A[X,\partial]$ em $B[X,D]$ que estendem ψ, obtidos pela autora com a colaboração de M.Ferrero.

Ao longo deste capítulo, utilizaremos a notação I_a para indicar a derivação interna de A definida por $I_a(x) = ax - xa$, $\forall x \in A$.

<u>Proposição 4.1.1</u>

Sejam A e B anéis, $\psi : A \to B$ isomorfismos de anéis, ∂ e D derivações de A e B, respectivamente. Então, existe um homomofismo de anéis $\phi : A[X,\partial] \to B[X,D]$ que estende ψ se e somente se existe uma família $\{b_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de elementos de B tal que

$$\begin{cases} I_{b_0}(b) = -\psi\partial\psi^{-1}(b) + \sum\limits_{i=1}^{n} D^i(b)b_i \ , \quad \forall b \in B \\[2ex] I_{b_h}(b) = \sum\limits_{i=h+1}^{n} \binom{i}{h} D^{i-h}(b)b_i \ , \quad \forall b \in B, \forall h \text{ tal que } 1 \leqslant h \leqslant n-1 \\[2ex] b_n \in Z(B) \end{cases} \qquad [4.1]$$

Neste caso, $\phi : A[X,\partial] \to B[X,D]$ é dada por $\phi(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} X^i b_i$.

Demonstração

Suponhamos que exista $\phi: A[X,\partial] \to B[X,D]$ homomorfismo tal que $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ e $\phi|_A = \psi$. Então, se $a \in A$,

$$\phi(aX) = \psi(a)\left[\sum_{i=0}^{n} X^i b_i\right] = \sum_{i=0}^{n} \psi(a) X^i b_i = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} X^k \binom{i}{k} D^{i-k}\big(\psi(a)\big) b_i \ .$$

Reordenando esta última expressão obtemos que

$$\phi(aX) = \sum_{i=0}^{n} D^i \psi(a) b_i + X\left[\sum_{i=1}^{n} \binom{i}{1} D^{i-1} \psi(a) b_i\right] + \ldots +$$

$$+ X^h \sum_{i=h}^{n} \binom{i}{h} D^{i-h} \psi(a) b_i + \ldots + X^n \binom{n}{n} \psi(a) b_n \ .$$

Por outro lado,

$$\phi(aX) = \phi\big(Xa + \partial(a)\big) = \phi(X)\psi(a) + \psi\partial(a) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i \psi(a) + \psi\partial(a) \ .$$

Igualando os coeficientes das relações acima obtemos que

$$\begin{cases} b_0\psi(a) + \psi\partial(a) = \sum_{i=0}^{n} D^i \psi(a) b_i \\ b_1\psi(a) = \psi(a) b_1 + \sum_{i=2}^{n} \binom{i}{1} D^{i-1} \psi(a) b_i \\ \vdots \\ b_h\psi(a) = \psi(a) b_h + \sum_{i=h+1}^{n} \binom{i}{h} D^{i-h} \psi(a) b_i \\ \vdots \\ b_n\psi(a) = \psi(a) b_n \end{cases}$$

Então, pondo $b = \psi(a)$, temos que

$$\begin{cases} b_0 b - b b_0 = -\psi\partial\psi^{-1}(b) + \sum\limits_{i=1}^{n} D^i(b) b_i \ , \ \forall b \in B \\ b_h b - b b_h = \sum\limits_{i=h+1}^{n} \binom{i}{h} D^{i-h}(b) b_i \ , \ \forall b \in B, \forall h \text{ tal que } i \leq h \leq n-1 \\ b_n b = b b_n \ , \ \forall b \in B \end{cases}$$

Reciprocamente, suponhamos que as relações [4.1] são verificadas. Seja $\phi : A[X,\partial] \to B[X,D]$ a aplicação definida por $\phi(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} X^i b_i$. Então,

$$\phi(aX) = \phi\Big(Xa + \partial(a)\Big) = \phi(X)\psi(a) + \psi\partial(a) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i \psi(a) + \psi\partial(a) .$$

Por outro lado, conforme acima mostramos

$$\phi(a)\phi(X) = \psi(a) \sum_{i=0}^{n} X^i b_i = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} X^k \binom{i}{k} D^{i-k}\psi(a) b_i .$$

Portanto, utilizando [4.1] obtemos que $\phi(aX) = \phi(a)\phi(X)$.

A demonstração de que $\phi(fg) = \phi(f)\phi(g)$, para quaisquer elementos arbitrários f e g de $A[X,\partial]$, pode ser feita por indução sobre o grau de f, considerando-se a relação acima mostrada, de modo análogo ao feito no Capítulo II. $\square$

Observemos que as relações [4.1] podem ser expressas do seguinte modo:

$$\begin{cases} b_0 b + \psi\partial\psi^{-1}(b) = \sum_{i=0}^{n} D^i(b)b_i \ , & \forall b \in B \\ b_h b = \sum_{i=h}^{n} \binom{i}{h} D^{i-h}(b)b_i \ , & \forall b \in B, \forall h \text{ tal que } 1 \leqslant h \leqslant n \end{cases} \qquad [4.1]'$$

e, portanto, as relações [4.1] são semelhantes (e generalizam) as relações [3.1] do capítulo anterior.

Corolário 4.1.2

Seja A um anel e ∂ e D derivações de A. Então, existe um homomorfismo de anéis $\phi: A[X,\partial] \to A[X,D]$ tal que $\phi|_A = Id$ se e somente se existe uma família $\{a_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de elementos de A tal que

$$\begin{cases} I_{a_0}(a) = -\partial(a) + \sum_{i=1}^{n} D^i(a)a_i \ , & \forall a \in A \\ I_{a_h}(a) = \sum_{i=h+1}^{n} \binom{i}{h} D^{i-h}(a)a_i \ , & \forall a \in A, \forall h \text{ tal que } 1 \leqslant h \leqslant n-1 \\ a_n \in Z(A) \end{cases} \qquad [4.2]$$

Neste caso, $\phi: A[X,\partial] \to A[X,D]$ é dada por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i a_i$.

Demonstração

Para provar o corolário, basta tomar, na Proposição anterior, $A = B$ e $\psi = Id$. $\square$

Lema 4.1.3

Sejam A e B anéis, $\psi: A \to B$ um isomorfismo, ∂ e D derivações de A e B, respectivamente. Então, $\mu: A[X,\partial] \to A[X,D]$ definida por $\mu(X) = X$ induz um isomorfismo que estende ψ se e somente se $\psi\partial = D\psi$.

Demonstração

Assumamos que $\mu: A[X,\partial] \to B[X,D]$ definida por $\mu(X) = X$ seja um isomorfismo que estende ψ. Então,

$$\mu(aX) = \psi(a)X = X\psi(a) + D\psi(a) \qquad \text{e}$$

$$\mu\big(Xa + \partial(a)\big) = X\psi(a) + \psi\partial(a)$$

Igualando os coeficientes das relações acima vem que

$$D\psi(a) = \psi\partial(a) \qquad \forall a \in A$$

Portanto, $D\psi = \psi\partial$.

Reciprocamente suponhamos que $\psi\partial = D\psi$ e seja $\mu: A[X,\partial] \to B[X,D]$ a aplicação definida por $\mu(X) = X$ e $\phi(a) = \psi(a)$, $\forall a \in A$. Então,

$$\mu(aX) = \mu\big(Xa + \partial(a)\big) = \mu(Xa) + \psi\partial(a) = X\psi(a) + \psi\partial(a) \ .$$

Por outro lado, como $\psi\partial = D\psi$, temos que

$$\mu(a)\mu(X) = \psi(a)X = X\psi(a) + D\psi(a) = X\psi(a) + \psi\partial(a) \ .$$

Portanto, $\mu(aX) = \mu(a)\mu(X)$, $\forall a \in A$.

Utilizando-se a relação acima, analogamente ao feito an teriormente, mostra-se (por indução sobre o grau de f) que para quaisquer dois elementos f e g de $A[X,\partial]$,

$$\mu(fg) = \mu(f)\mu(g) \ .$$

Portanto, μ é um homomorfismo. Vejamos que μ é injetora. De fato, se $f = \sum_{i=0}^{m} X^i c_i \in A[X,\partial]$ é tal que $\mu(f)=0$, então $\sum_{i=0}^{m} X^i \psi(c_i) = 0$.

Igualando os coeficientes desta última relação obtemos que $\psi(c_i)=0$, i tal que $0 \leqslant i \leqslant m$. Como ψ é um isomorfismo, é imediato que $c_i = 0$, i tal que $0 \leqslant i \leqslant m$.

A sobrejetividade de μ é imediata, pois $X \in \mathrm{Im}\phi$ e, conseqüentemente, todo elemento de $B[X,D]$ está na imagem de μ. Portanto, μ é um isomorfismo que estende ψ. $\square$

Corolário 4.1.4

Sejam A e B anéis, $\psi: A \to B$ um isomorfismo, D uma derivação de B. Então, existe $\psi: A[X,\psi^{-1}D\psi] \to B[X,D]$ isomorfismo de anéis tal que $\mu(X) = X$ e $\mu|_A = \psi$.

Demonstração

É imediato que $d = \psi^{-1}D\psi$ é uma derivação de A tal que $\psi d = D\psi$. Portanto, é suficiente aplicar o Lema anterior. $\square$

Proposição 4.1.5

Sejam A e B anéis, $\psi: A \to B$ um isomorfismo, ∂ e D derivações de A e B, respectivamente. Então, as seguintes condições são equivalentes:

(a) Existe uma família $\{b_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ de elementos de B tal que a aplicação $\phi:A[X,\partial] \to B[X,D]$ induzida por $(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ é um isomorfismo que estende ψ.

(b) Existe uma família $\{a_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ de elementos de A tal que a aplicação $\phi':A[X,\partial] \to A[X,\psi^{-1}D\psi]$ induzida por $\phi'(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i a_i$ é um isomorfismo tal que $\phi'|_A = Id$.

Mais ainda, a correspondência $\phi \longleftrightarrow \phi'$ dada pondo acima $b_i = \psi(a_i)$, $\forall i$ é uma correspondência biunívoca, e o seguinte diagrama é comutativo (onde $\mu(X) = X$ e $\mu|_A = \psi$).

$$\begin{tikzcd} A[X,\partial] \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\phi'"'] & & B[X,D] \\ & A[X,\psi^{-1}D\psi] \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

Demonstração

Pelo Corolário anterior, existe $\mu:A[X,\psi^{-1}D\psi] \to B[X,D]$, isomorfismo de anéis, tal que $\mu(X) = X$ e $\mu|_A = \psi$. Assumamos que a condição (a) se verifique e seja $\phi':A[X,\partial] \to A[X,\psi^{-1}D\psi]$ definida por $\phi' = \mu^{-1}\phi$. Então,

$$\phi'(X) = \mu^{-1}\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i \psi^{-1}(b_i)$$

Anotando $\psi^{-1}(b_i) = a_i$ e utilizando o fato de ϕ e μ serem isomor fismos, temos que $\phi'(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i a_i$ é um isomorfismo de anéis. Além disso,

$$\phi'(a) = \mu^{-1}\phi(a) = \mu^{-1}\psi(a) = \psi^{-1}\psi(a) = a \ , \quad \forall a \in A,$$

isto é, $\phi'|_A = Id$.

Reciprocamente, seja $\phi':A[X,\partial] \to A[X,\psi^{-1}D\psi]$ um isomorfismo tal que $\phi'(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i a_i$ e $\phi'|_A = Id$ e seja $\phi:A[X,\partial] \to B[X,D]$ definida por $\phi = \mu\phi'$. De modo análogo à parte anterior, pondo $b_i = \psi(a_i)$, $\forall i$, demonstra-se que (a) é verificada. $\square$

A Proposição anterior mostra que o problema de caracterizar os isomorfismos ϕ de $A[X,\partial]$ em $B[X,D]$ tais que $\phi|_A = \psi$ pode ser reduzido à caracterização dos isomorfismos de $A[X,\partial]$ em $A[X,\psi^{-1}D\psi]$ que deixam fixos os elementos de A. A seguir estudaremos os isomorfismos de $A[X,\partial]$ em $A[X,D]$ que deixam fixos os elementos de A, com ∂ e D duas derivações diferentes de A.

Utilizaremos o símbolo a^r para indicar a aplicação definida por $a^r(x) = xa$, $\forall x \in A$, e Int(A) para indicar o conjunto das derivações internas do anel A. Se D é uma derivação de A e $a \in Z(A)$, a^rD é a derivação de A definida por $a^rD(x) = D(x)a$, $\forall x \in A$.

Seja (*) a seguinte condição:

$$\text{Existe } a_1 \in U(Z(A)) \text{ tal que } a_1^rD - \partial \in Int(A) \qquad (*)$$

Observemos que se a condição (*) é verificada, então existe uma família $\{a_0,a_1\}$ de elementos de A tal que $a_1 \in U(Z(a))$ e $a_1^rD - \partial = I_{a_0}$. A família $\{a_0,a_1\}$ será denominada uma solução da equação da con dição (*).

Com as notações acima demonstraremos o seguinte Lema:

Lema 4.1.6

Seja A um anel, ∂ e D derivações de A. Se a condição (*) é verificada então existe $\phi: A[X,\partial] \to A[X,D]$ isomorfismo de anéis tal que $\phi(X) = a_0 + Xa_1$, $\phi|_A = Id$, onde $\{a_0, a_1\}$ é uma solução da equação da condição (*).

Demonstração

Como (*) se verifica, temos que existe uma família $\{a_0, a_1\}$ de elementos de A tal que $a_0a - aa_0 = D(a)a_1 - \partial(a)$, $\forall a \in A$. Portanto, $a_0a + \partial(a) = aa_0 + D(a)a_1$, com $a_1 \in U(Z(A))$. Logo, as relações [4.2] são verificadas e, conseqüentemente, pelo Corolário 4.1.2, a aplicação $\phi: A[X,\partial] \to A[X,D]$ induzida por $\phi(X) = a_0 + Xa_1$ é um homomorfismo.

Para mostrar que ϕ é um isomorfismo, consideremos a aplicação $\phi': A[X,D] \to A[X,\partial]$ induzida por $\phi(X) = -a_0a_1^{-1} + Xa_1^{-1}$. Considerando-se que $a_0a - aa_0 = D(a)a_1 - \partial(a)$, $\forall a \in A$, e que $a_1 \in U(Z(A))$, multiplicando-se a igualdade acima por $a_1^{-1} \in U(Z(A))$ obtemos que

$$-a_0a_1^{-1}a + D(a) = -aa_0a_1^{-1} + \partial(a)a_1^{-1}, \quad \forall a \in A$$

Portanto, a família $\{-a_0a_1^{-1}, a_1^{-1}\}$ verificada as relações [4.2] e, conseqüentemente $\phi': A[X,D] \to A[X,\partial]$ é um homomorfismo.

Além disso,

$$\phi\phi'(X) = \phi\left[-a_0a_1^{-1} + Xa_1^{-1}\right] = -a_0a_1^{-1} + (a_0 + Xa_1)a_1^{-1} =$$

$$= -a_0a_1^{-1} + a_0a_1^{-1} + Xa_1a_1^{-1} = X \qquad \text{e}$$

$$\phi'\phi(X) = \phi'\left[a_0 + Xa_1\right] = a_0 + (-a_0a_1^{-1} + Xa_1^{-1})a_1 = X\ .$$

Portanto, $\phi:A[X,\partial] \to A[X,D]$ é um isomorfismo de anéis tal que $\phi|_A = Id$. $\square$

Reciprocamente podemos provar o seguinte Lema:

Lema 4.1.7

Seja A um anel, ∂ e D derivações de A. Se existe um isomorfismo $\phi:A[X,\partial] \to A[X,D]$ tal que $\phi(X) = a_0 + Xa_1$ e $\phi|_A = Id$, então a condição (*) é verificada e $\{a_0,a_1\}$ é uma solução da equação da condição (*).

Demonstração

Seja $\phi:A[X,\partial] \to A[X,D]$ um isomorfismo tal que $\phi(X) = a_0 + Xa_1$ e $\phi|_A = Id$. Então, pelas relações [4.2], $a_1^rD - \partial = I_{a_0} \in Int(A)$ e $a_1 \in Z(A)$.

Seja $\phi^{-1}(X) = c_0 + Xc_1$. Então,

$$X = \phi\left(\phi^{-1}(X)\right) = c_0 + (a_0 + Xa_1)c_1 = c_0 + a_0c_1 + Xa_1c_1\ .$$

Igualando os coeficientes obtemos que $a_1c_1 = 1$. Logo, $a_1 \in U\left(Z(A)\right)$. $\square$

Seja A um anel arbitrário, ∂ e D derivações de A e $\{a_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ uma família de elementos de A. Consideremos as seguin tes condições:

(A) $\{a_i\}_{0<i\leq n}$ satisfaz o sistema [4.2]

(B) $a_1 \in U(A)$

(C) a_i é nilpotente, $\forall i$ tal que $2 \leq i \leq n$

(C') O ideal N_0 gerado por $\{D^j(a_i),\ j \in N,\ i \geq 2\}$ é nilpotente.

Observemos que se a condição (*) é verificada e se a família $\{a_0, a_1\}$ de elementos de A é uma solução da equação da condição (*), então $\{a_0, a_1\}$ satisfaz (A), (B) e (C') ($n = 1$ e $a_i = 0$, $i \geq 2$). É interessante observar que as condições (B), (C) e (C') coincidem com as condições (b), (c) e (c') dos Teoremas 3.2.5 e 3.2.8 do capítulo anterior.

Observação 4.1.8

Fixada uma derivação ∂ de A, o Teorema 3.2.5 do capítulo anterior estabelece condições necessárias para que $\phi: A[X,\partial] \to A[X,\partial]$ seja um isomorfismo de anéis tal que $\phi|_A = Id$.

Seja $\phi: A[X,\partial] \to A[X,D]$ um isomorfismo tal que $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i a_i$ e $\phi|_A = Id$ e seja $\{c_i\}_{0\leq i\leq m}$ a família de elementos de A tal que $\phi^{-1}(X) = \sum_{i=0}^{m} X^i c_i$. Então, pelo Corolário 4.1.2, temos que

$$a_i a = \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} D^{j-i}(a) a_j \ , \quad \forall a \in A, \ \forall i \text{ tal que } 1 \leq i \leq n \ .$$

Analogamente, considerando-se $\phi^{-1}: B[X,D] \to B[X,\partial]$ temos que

$$c_k a = \sum_{\ell=k}^{m} \binom{\ell}{k} \partial^{\ell-k}(a) c_\ell \ , \quad \forall a \in A, \ \forall k \text{ tal que } 1 \leq k \leq m \ .$$

Combinando as relações acima obtemos que

$$a_i c_j a = a_i \sum_{\ell=j}^{m} \binom{\ell}{j} \partial^{\ell-j}(a) c_\ell = \sum_{k=i}^{n} \sum_{\ell=j}^{m} \binom{k}{i}\binom{\ell}{j} D^{k-i}\left(\partial^{\ell-j}(a)\right) a_k c_\ell$$

e, analogamente,

$$c_i a_j a = \sum_{k=i}^{m} \sum_{\ell=j}^{n} \binom{k}{i}\binom{\ell}{j} \partial^{k-i}\left(D^{\ell-j}(a)\right) c_k a_\ell \ .$$

De modo similar ao feito nos Lemas 3.1.2 e 3.1.3, temos que

$$D^h(a_i)a = \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} D^{k-i}(a) D^h(a_k) \ , \quad \forall a \in A, \ \forall h \geq 0$$

e

$$D^h(a_i) c_j a = \sum_{k=i}^{n} \sum_{\ell=j}^{m} \binom{k}{i}\binom{\ell}{j} D^{k-i}\left(\partial^{\ell-j}(a)\right) D^h(a_k) c_\ell \ ,$$

$\forall a \in A$, $\forall i$ tal que $1 \leq i \leq n$, $\forall j$ tal que $1 \leq j \leq m$. Assumamos agora que a característica de A é 0 e seja N o radical de Noether de A.

Das relações acima e dos Lemas de nilpotência do capítulo anterior (Lemas 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6 e Corolário 3.1.7) resulta, analogamente ao Lema 3.1.8, o seguinte resultado:

"Se $a_i c_j$ e $a_j c_i$ são elementos nilpotentes, $\forall i + j \geq h$, $i \geq 1$, $j \geq 1$, então cada forma diferencial $D^{j_1}(a_{i_1}) \dots D^{j_k}(a_{i_k}) c_\ell$

está em N, e $\partial^{j_1}(c_{i_1}) \ldots \partial^{j_k}(c_{i_k})a_\ell$ está em N, para $k \geq 1$, $j_t \geq 0$, $t = 1,2,\ldots,k$ e $\max\{i_1,\ldots,i_k\} + \ell \geq h$".

Então, podemos obter o seguinte teorema:

Teorema 4.1.9

Seja A um anel de característica 0, ∂ e D derivações de A. Se a aplicação $\phi: A[X,\partial] \to A[X,D]$ induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i a_i$ é um isomorfismo, então a família $\{a_i\}_{0 \leq i \leq n}$ de elementos de A satisfaz as seguintes condições:

(A) $a_0 a + \partial(a) = \sum_{j=0}^{n} D^j(a)a_j \;, \quad \forall a \in A$

$a_i a = \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} D^{j-i}(a)a_j \;, \quad \forall a \in A, \forall i$ tal que $1 \leq i \leq n$

(B) $a_1 \in U(A)$

(C) a_i é nilpotente, $\forall i$ tal que $2 \leq i \leq n$.

Demonstração

Pelo Corolário 4.1.2, como ϕ é um homomorfismo, temos que a condição (A) se verifica. Para obter as condições (B) e (C) procederemos como no capítulo anterior:

Das relações

$$X = \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{n} X^i a_i \right)^j c_j \quad \text{e} \quad X = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} X^j c_j \right)^i a_i$$

podemos mostrar, por indução, que $a_i c_j$ e $c_j a_i$ são nilpotentes, $\forall i \geqslant 1$, $\forall j \geqslant 1$, com $i + j \geqslant 3$. De fato, analogamente ao feito no Lema 3.2.2, obtém-se que $a_n c_m$ e $c_m a_n$ são nilpotentes. Se assumirmos que $a_i c_j$ e $c_j a_i$ são nilpotentes, $\forall i \geqslant 1$ e $\forall j \geqslant 1$ com $i + j \geqslant k + 1$, $k \geqslant 3$, então cada forma diferencial $D^j(a_i)dc_\ell \in N$, se $i + \ell \geqslant k + 1$ e $\partial^j(c_i)da_\ell \in N$, se $i + \ell \geqslant k + 1$, onde d é um elemento arbitrário de A.

Seja $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, $p + q = k$. Como no Lema 3.2.2, obtemos que $a_p^q c_q$ é nilpotente, pois para $h > q$, $c_h a_p \in N$. Mais ainda, como

$$a_p c_q a_p = a_p^2 c_q + \sum_{r>q} \binom{r}{q} a_p \partial^{r-q}(a_p) c_r ,$$

temos que

$$\bar{a}_p \bar{c}_q \bar{a}_p = \bar{a}_p^2 \bar{c}_q \quad \text{em} \quad B/N , \qquad [4.3]$$

uma vez que $a_p \partial^{r-q}(a_p) c_r \in N$ para $r > q$.

Se $(a_p^q c_q)^t = 0$, da relação [4.3] é fácil ver que $\bar{a}_p^{qt} \bar{c}_q^t = 0$ em B/N e, conseqüentemente, $\bar{a}_p^{qt} \bar{c}_q^{qt} = 0$. Aplicando a relação [4.3] temos, então, que $(\bar{a}_p \bar{c}_q)^{qt} = 0$, o que mostra que $(a_p c_q)^{qt} \in N$. Logo, $a_p c_q$ é nilpotente. Analogamente, por simetria, $c_p a_q$ é nilpotente.

Utilizando os resultados anteriores, obtém-se, como no Lema 3.2.3, que a_1 e c_1 são elementos inversíveis.

Para completar a prova é suficiente, então, repetir a demonstração do Corolário 3.2.4, observando que, pela relação [4.3], se $i \geq 2$ para cada $t \in N$

$$(\bar{a}_i \bar{c}_1)^t = \bar{a}_i^t \bar{c}_1^t \quad \text{em} \quad B/N \; . \qquad \square$$

Reciprocamente, temos o seguinte Toerema:

Teorema 4.1.10

Seja A um anel de característica 0, ∂ e D derivações de A. Se as condições (A), (B) e (C') se verificam, então $\phi : A[X,\partial] \to A[X,D]$ induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i a_i$ é um isomorfismo de anéis tal que $\phi|_A = Id$.

Demonstração

Seja $\phi : A[X,\partial] \to A[X,D]$ a aplicação induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i a_i$. Como a condição (A) é verificada, aplicando o Corolário 4.1.2, temos que ϕ é um homomorfismo.

Seja $Y = (X - a_0)a_1^{-1} \in A[X,\partial]$. Então, como na observação que antecede a Proposição 3.2.6 é fácil mostrar que $A[X,\partial]$ é anel dos polinômios na indeterminada Y, com coeficientes em A e $\{1, Y, \ldots, Y^n, \ldots\}$ é um conjunto linearmente independente.

As demonstrações dos Lemas 3.2.6, 3.2.7 e do Teorema 3.2.8 valem aqui sem modificações pois os cálculos são sempre realizados no contradomínio de ϕ, a saber, $A[X,D]$. Portanto, ϕ é um isomorfismo. $\square$

Corolário 4.1.11

Sejam A e B anéis de característica 0, $\psi:A \to B$ um isomorfismo de anéis, ∂ e D derivações de A e B, respectivamente. Se a aplicação $\phi:A[X,\partial] \to B[X,D]$ é um isomorfismo de anéis que estende ψ e $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$, então

$$(\bar{A}) \begin{cases} b_0 b = -\psi\partial\psi^{-1}(b) + \sum_{i=0}^{n} D^i(b) b_i \ , \quad \forall b \in B \\ b_h b = \sum_{i=h+1}^{n} \binom{i}{h} D^{i-h}(b) b_i \ , \quad \forall b \in B, \ \forall h \text{ tal que } 1 \leq h \leq n-1 \\ b_n \in Z(B) \end{cases}$$

$(\bar{B})$ $b_1 \in U(B)$

$(\bar{C})$ b_i é nilpotente, $\forall i$ tal que $2 \leq i \leq n$.

Demonstração

Seja $\phi:A[X,\partial] \to B[X,D]$ um isomorfismo induzido por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ tal que $\phi|_A = \psi$. Então, pela Proposição 4.1.5, existe $\phi':A[X,\partial] \to A[X,\psi^{-1}D\psi]$ isomorfismo de anéis tal que $\mu\phi' = \phi$, onde $\mu:A[X,\psi^{-1}D\psi] \to B[X,D]$ é o isomorfismo dado por $\mu(X) = X$ e $\mu(a) = \psi(a)$, $\forall a \in A$.

Como $\phi'(X) = \psi^{-1}\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i \psi^{-1}(b_i)$, pelo Teorema 4.1.9 temos que a família $\{\psi^{-1}(b_i)\}_{0 \leq i \leq n}$ de elementos de A satisfaz (A), (B) e (C). Aplicando ψ, temos $(\bar{B})$ e $(\bar{C})$, e $(\bar{A})$ segue diretamente da Proposição 4.1.1. $\square$

Anotaremos, a partir de agora, por (A') a seguinte condição:

"A família $\{b_i\}_{0\leq i\leq n}$ de elementos de B satisfaz o sistema [4.1] da Proposição 4.1.1. (A')

Com as notações acima, temos o seguinte resultado:

Corolário 4.1.12

Sejam A e B anéis de característica 0, $\psi:A\to B$ um isomorfismo de anéis, ∂ e D derivações de A e B, respectivamente. Se a família $\{b_i\}_{0\leq i\leq n}$ de elementos de B satisfaz (A'), (B) e (C') do Teorema 4.1.10, então a aplicação $\phi:A[X,\partial]\to B[X,D]$ induzida por $\phi(X)=\sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ é um isomorfismo de anéis que estende ψ.

Demonstração

Observemos primeiramente que se a família $\{b_i\}_{0\leq i\leq n}$ de elementos de B verifica (A'), (B) e (C') então, pela Proposição 4.1.1 a aplicação ϕ é um homomorfismo.

Além disso, a família $\{a_i\}_{0\leq i\leq n}$ de elementos de A definida por $a_i=\psi^{-1}(b_i)$ verifica (A), (B) e (C'), uma vez que ψ é um isomorfismo. Portanto, aplicando o Teorema 4.1.10 temos que $\phi':A[X,\partial]\to A[X,\psi^{-1}D\psi]$ induzida por $\phi'(X)=\sum_{i=0}^{n} X^i a_i$ é um isomorfismo de anéis tal que $\phi|_A=\mathrm{Id}$. Então, pela Proposição 4.1.5,

$\phi: A[X,\partial] \to B[X,D]$ definida por $\phi = \mu\phi'$ (onde $\mu: A[X,\psi^{-1}D\psi] \to B[X,D]$ é o isomorfismo dado por $\mu(X) = X$ e $\mu(a) = \psi(a)$, $\forall a \in A$) é um isomorfismo que estende ψ.

Finalmente, para completar a demonstração basta observar que

$$\phi(X) = \mu\phi'(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i\psi(a_i) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i . \qquad \square$$

Corolário 4.1.13

Sejam A e B anéis de característica 0, ∂ e D derivações de A e B, respectivamente, $\psi: A \to B$ um isomorfismo. Se B ou D satisfizerem uma das condições seguintes:

(1) B é noetheriano

(2) $D^m = 0$ para algum $m \in \mathbb{N}$

então a aplicação $\phi: A[X,\partial] \to B[X,D]$ induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ é um isomorfismo de anéis que estende ψ se e somente se a família $\{b_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de elementos de B satisfaz as condições (A'), (B) e (C) do Teorema 4.1.9.

Demonstração

Como no capítulo anterior, é fácil ver que, neste caso, as hipóteses [4.1], (B) e (C) são equivalentes às condições (A'), (B) e (C'). O corolário segue, então, dos Teoremas 4.1.9 e 4.1.10. $\square$

Seja A um anel arbitrário e seja

$$N^* = \left\{x \in A \mid x \text{ é nilpotente central}\right\}$$

Se D é uma derivação de A e $a^r D$ é a derivação de A definida por $a^r D(x) = D(x)a$, $\forall x \in A$, indiquemos por (H) a seguinte condição

$$\left\{a^r D \mid a \in N^*\right\} \cap \mathrm{Int}(A) = (0) \qquad \text{(H)}$$

Observemos que (H) é verificada, por exemplo, quando D é a derivação nula e quando $N^* = (0)$, pois neste caso $\{a^r D \mid a \in N^*\} = (0)$. (H) também é válida quando A é um anel comutativo, pois neste caso $\mathrm{Int}(A) = (0)$.

Teorema 4.1.14

Seja A um anel de característica 0, ∂ e D derivações de A. Assumamos que a condição (H) se verifique. Então, existe $\phi : A[X,\partial] \to A[X,D]$ isomorfismos de anéis tal que $\phi|_A = Id$ se e somente a condição (*) é verificada. Neste caso, $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i a_i$ induz um tal isomorfismo se e somente se $\{a_0, a_1\}$ é uma solução da equação da condição (*), a_i é nilpotente central e $a_i^r D = 0$, $\forall i \geq 2$.

Demonstração

Assumamos que existe $\phi : A[X,\partial] \to A[X,D]$ isomorfismo de anéis tal que $\phi|_A = Id$. Seja $\{a_i\}_{0 \leq i \leq n}$ a família de elementos de A tal que $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i a_i$.

Pelo Teorema 4.1.9 temos que a família $\{a_i\}_{0 \leq i \leq n}$ satisfaz (A), (B) e (C'), isto é, as relações [4.2] se verificam, $a_1 \in U(A)$ e a_i é nilpotente, $\forall i$ tal que $2 \leq i \leq n$. Tomando-se, em [4.2], $h = n-1$, temos que

$$I_{a_{n-1}} = n\, a_n^r D$$

Como a_n é nilpotente central e, por hipótese a condição (H) é verificada, temos que $I_{a_{n-1}} = 0$. Logo a_{n-1} é nilpotente central. Além disso, como a característica de A é 0, $a_n^r D = 0$.

Suponhamos $h \geq 1$ e que $\forall k$ tal que $h < k \leq n$, $a_k \in Z(A)$ e $a_{k+1}^r D = 0$ e mostremos, por indução, que $a_h \in Z(A)$ e $a_{h+1}^r D = 0$.

Pelas relações [4.2] temos que

$$I_{a_h}(a) = \sum_{i=h+1}^{n} \binom{i}{h} D^{i-h}(a) a_i \ , \quad \forall a \in A \ .$$

Portanto,

$$I_{a_h} = \sum_{i=h+1}^{n} \binom{i}{h} a_i^r D^{i-h}$$

Pela hipótese de indução, $a_i^r D^{i-h} = 0$, $\forall i > h+1$ e a expressão acima reduz-se a

$$I_{a_h} = \binom{h+1}{h} a_{h+1}^r D \ .$$

Além disso, a_{h+1} é nilpotente central. Logo $I_{a_h} = 0$ e, conseqüentemente, $a_h \in Z(A)$ e $a_{h+1}^r D = 0$. Portanto, $a_1 \in U\big(Z(A)\big)$ e a_i é nilpotente central tal que $a_i^r D = 0$ para $i \geq 2$. Finalmente, como

$I_{a_0} = -\partial + \sum_{i=1}^{n} a_i^r D = a_1^r D - \partial$, a condição (*) é verificada e $\{a_0, a_1\}$ é uma solução de sua equação.

Reciprocamente, seja $\{a_0, a_1\}$ uma solução da equação da condição (*) e $\{a_i\}_{2 \leq i \leq n}$ uma família de nilpotentes centrais tal que $a_i^r D = 0$. Seja $\phi: A[X, \partial] \to A[X, D]$ a aplicação induzida por $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i a_i$ e tal que $\phi|_A = Id$. Como $\{a_0, a_1\}$ é uma solução da equação da condição (*), temos que $I_{a_0} = a_1^r D - \partial$. Como $a_i^r D = 0$, $\forall i \geq 2$, a relação acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$I_{a_0}(a) = -\partial(a) + \sum_{i=1}^{n} D^i(a) a_i \quad , \quad \forall a \in A .$$

As demais igualdades de [4.2] decorrem, como é fácil ver, do fato de $a_i^r D = 0$, $\forall i \geq 2$ e $a_j \in Z(A)$, $\forall j \geq 1$. Portanto, a condição (A) do Teorema 4.1.10 é verificada. Além disso, $a_1 \in U\big(Z(A)\big)$ e, conseqüentemente, a condição (B) do Teorema 4.1.10 se verifica.

Seja N_0 o ideal gerado por $\{D^j(a_i),\ j \geq 0,\ i \geq 2\}$ e M_0 o ideal gerado por $\{a_i\}_{2 \leq i \leq n}$. Então, $M_0^2 = N_0^2$. De fato, os elementos de N_0^2 são combinações lineares de elementos da forma $D^k(a_i)D^\ell(a_j)$, com $i,j \geq 2$ e $k,\ell \geq 0$. Se um dos expoentes k ou ℓ é nulo (mas não ambos), então $D^k(a_i)D^\ell(a_j) = 0$ (pois $a_i^r D = 0$ e $a_i \in Z(A)$, para $i \geq 2$) Se $k \geq 1$ e $\ell = 1$, então

$$0 = D\left[D^{k-1}(a_i)a_j\right] = D^k(a_i)a_j + D^{k-1}(a_i)D(a_j) .$$

Como $D^k(a_i)a_j = 0$, segue então que $D^{k-1}(a_i)D(a_j) = 0$, $\forall k \geq 1$.

Assumamos que $\forall \ell < p$, $\forall k \geq 1$, $D^k(a_i)D^\ell(a_j) = 0$. Então,

$$0 = D\left[D^{k-1}(a_i)D^{p-1}(a_j)\right] = D^k(a_i)D^{p-1}(a_j) + D^{k-1}(a_i)D^p(a_j)$$

Como, pela hipótese de indução, $D^k(a_i)D^{p-1}(a_j) = 0$, temos que $D^{k-1}(a_i)D^p(a_j) = 0$. Portanto, todos os produtos da forma $D^k(a_i)D^\ell(a_j)$ com $k,\ell > 0$ e $i,j \geq 2$ são nulos. Conseqüentemente, $M_0^2 = N_0^2$ e, do fato de M_0 ser nilpotente decorre que a condição (C') do Teorema 4.1.10 se verifica. Logo, ϕ é um isomorfismo. □

Corolário 4.1.15

Sejam A e B anéis de característica 0, $\psi: A \to B$ um isomorfismo, ∂ e D derivações de A e B, respectivamente. Assumamos que para o par (B,D) a condição (H) do Teorema 4.1.14 se verifique. Então, existe $\phi: A[X,\partial] \to B[X,D]$ isomorfismo de anéis tal que $\phi|_A = \psi$ se e somente se existe $b_1 \in U(B)$ tal que

$$b_1^r D - \psi\partial\psi^{-1} \in \mathrm{Int}(B) .$$

Neste caso, $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i b_i$ induz um tal isomorfismo se e somente se $\{b_0, b_1\}$ é uma solução da equação $b_1^r D - \psi\partial\psi^{-1} = I_{b_0}$ e b_i é nilpotente central tal que $b_i^r D = 0$, $\forall i \geq 2$.

Demonstração

Vejamos primeiro que se N^* é o conjunto de nilpotentes centrais de A, então

$$\left\{x^r \psi^{-1} D\psi \mid x \in N^*\right\} \cap \mathrm{Int}(A) = (0) .$$

De fato, se $t = I_a \in \{x^r\psi^{-1}D\psi \mid x \in N^*\}$, existe um nilpotente central y de A tal que para cada $c \in A$,

$$t(c) = \psi^{-1}D\psi(c)y = ac - ca .$$

Pondo $c = \psi^{-1}(b)$ e aplicando ψ temos que

$$\psi t\psi^{-1}(b) = D(b)\psi(y) = \psi(a)b - b\psi(a) , \quad \forall b \in B .$$

Portanto, $\psi(y)^rD = I_{\psi(a)}$, onde $\psi(y)$ é um nilpotente central de B. Como, por hipótese, $I_{\psi(a)} = 0$ temos que $\psi(a) \in Z(B)$ e, conseqüentemente $t = 0$.

Assumamos que existe $\phi: A[X,\partial] \to B[X,D]$ isomorfismo de anéis tal que $\phi|_A = \psi$. Seja $\{b_i\}_{0 \leq i \leq n}$ a família de elementos de B tal que $\phi(X) = \sum_{i=0}^{n} X^ib_i$. Então, pela Proposição 4.1.5, existe $\phi': A[X,\partial] \to A[X,\psi^{-1}D\psi]$ isomorfismo de anéis tal que $\phi' = \mu^{-1}\phi$, onde $\mu: A[X,\psi^{-1}D\psi] \to B[X,D]$ é o isomorfismo dado por $\mu(X) = X$ e $\mu(a) = \psi(a)$, $\forall a \in A$.

Pelo Teorema 4.1.14,

$$\psi^{-1}(b_1)^r\psi^{-1}D\psi - \partial = I_{\psi^{-1}(b_0)} , \quad \psi^{-1}(b_1) \in U\big(Z(A)\big) \quad e \quad \psi^{-1}(b_i)$$

é nilpotente central tal que $\psi^{-1}(b_i)^r\psi^{-1}D\psi = 0$ para $i \geq 2$.

Aplicando ψ nas relações acima obtemos que

$$b_1^rD - \psi\partial\psi^{-1} = I_{b_0} , \quad b_1 \in U\big(Z(B)\big) \quad e \quad b_i$$

é nilpotente central tal que $b_i^rD = 0$ para $i \geq 2$.

Reciprocamente, sejam $b_0 \in B$, $b_1 \in U(Z(B))$ tal que $b_1^r D - \psi\partial\psi^{-1} = I_{b_0}$ e b_i nilpotentes centrais tal que $b_i^r D = 0$ para $i \geq 2$. Então,

$$\psi^{-1}(b_1) \in U(Z(A)) \ , \quad \psi^{-1}(b_1)^r \psi^{-1} D\psi - \partial = I_{\psi^{-1}(b_0)} \quad \text{e} \quad \psi^{-1}(b_i)$$

é nilpotente central tal que $\psi^{-1}(b_i)^r \psi^{-1} D\psi = 0$ para $i \geq 2$. Portanto, aplicando o Teorema 4.1.14 e a observação acima temos que a aplicação $\Phi' : A[X,\partial] \to A[X,\psi^{-1}D\psi]$ tal que $\phi'(X) = \sum_{i=0}^{n} X^i \psi^{-1}(b_i)$ é um isomorfismo. Para completar a prova é suficiente aplicar a Proposição 4.1.5. $\square$

BIBLIOGRAFIA

|1| COLEMAN, D.B. e ENOCHS, D.J. - Isomorphic polynomial rings, Proc. of the A.M.S., vol. 27, nº 2 (1971), 247-252.

|2| CURTIS, C. e REINER, I. - Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, New York (1962).

|3| FERRERO, M. e KISHIMOTO, K. - On Automorphisms of Skew Polynomial Rings of Derivation Type (submetido à publicação).

|4| GILMER JR., R.W. - R-automorphisms of R[X], Proc. London Math. Soc. (3), vol. 18 (1968), 328-336.

|5| JATEGAONKAR, A.V. - Left Principal Ideal Rings, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, nº 123 (1970).

|6| ORE, O. - Theory of Non-Commutative Polynomials, Am. of Math. S., vol. 34 (1933), 480-508.

|7| RIBENBOIM, P. - Rings and Modules, Interscience Tracts In Pure And Applied Mathematics, nº 24 (1969).

|8| RIMMER, M. - Isomorphisms Between Skew Polynomial Rings, J. Austral. Math. Soc. 25 (Series A) (1978), 314-321.