

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Curso de Pós-Graduação em Matemática

ESTIMAÇÃO PARA OS PARÂMETROS DE PROCESSOS  
ESTOCÁSTICOS ESTACIONÁRIOS COM CARACTERÍSTICA  
DE LONGA DEPENDÊNCIA

por

DANIELA MÜLLER

Porto Alegre, fevereiro de 1999

Dissertação submetida por DANIELA MÜLLER\* como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dra. Sílvia Regina Costa Lopes

Banca Examinadora:

Dr. Artur Oscar Lopes

Dr. Robin Thomas Clarke

Dr. Valdério Anselmo Reisen

Data de Defesa: 22 de fevereiro de 1999.

JFR85  
SISTEMAS DE BIBLIOTECAS  
BIBLIOTECA SETORIAL DE MATEMÁTICA

---

\* Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

*ao meu filho  
Henrique*

UFRRS  
SISTEMAS DE BIBLIOTECAS  
BIBLIOTECA SETORIAL DE MATEMÁTICA

## AGRADECIMENTOS

Agradeço, especialmente, à Profa. Sílvia, pela orientação, dedicação ao trabalho e apoio nos estudos;

ao Prof. Valdério Reisen, pela colaboração na realização deste trabalho;

aos Professores do Curso de Pós-Graduação em Matemática pela disponibilidade e atenção;

as amigas Bárbara e Simone pela grande amizade, companheirismo e cumplicidade nestes anos de muito estudo;

as amigas Ana Paula e Zeliane pela amizade e excelente convívio;

aos colegas da Pós-Graduação, pelo companheirismo nestes anos;

à Izabel, secretária do curso, pela disponibilidade, carinho e paciência;

aos bolsistas do LCPM, pelo auxílio e amizade;

a minha família pelo carinho, grande incentivo e confiança. Principalmente ao meu filho Henrique pelo amor e infinita compreensão aceitando a minha ausência;

a Deus, que sempre esteve ao meu lado em cada passo desta jornada.

## RESUMO

Estudos recentes em séries temporais direcionam-se àquelas que apresentam característica de longa dependência, ou seja, séries temporais nas quais a dependência entre observações distantes não é desprezível. Neste trabalho, analisamos o modelo  $ARFIMA(p, d, q)$ , para  $d \in (0, 0; 0, 5)$ , que apresenta a característica de longa dependência. Como estimativas para o grau de diferenciação  $d$  consideramos os estimadores obtidos através da função periodograma, da função periodograma suavizado e da função de máxima verossimilhança sugerida por Whittle, comparando a variância e o erro quadrático médio destes estimadores através de diversas simulações.

## ABSTRACT

Recent work on time series analysis is concerned with the property of long memory, that is, time series in which the dependence between distant observations is not negligible. In this work we analyze the  $ARFIMA(p, d, q)$  model, for  $d \in (0.0; 0.5)$ , that has the property of long memory. We consider estimators for the degree of differencing  $d$  based on the periodogram function, on the smoothed periodogram function, and on the maximum likelihood function suggested by Whittle. Through several simulations we compare the variance and the mean squared error for these estimators.

## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS</b>	<b>3</b>
2.1	CONCEITOS BÁSICOS	3
2.2	MÉDIA, AUTOCOVARIÂNCIA E AUTOCORRELAÇÃO AMOSTRAL	7
2.3	ANÁLISE ESPECTRAL DE PROCESSOS ESTACIONÁRIOS	9
<b>3</b>	<b>MODELOS <i>ARMA</i>, <i>ARIMA</i> E <i>ARFIMA</i> PARA SÉRIES TEMPORAIS</b>	<b>13</b>
3.1	O MODELO <i>ARMA</i> ( $p, q$ )	13
3.2	O MODELO <i>ARIMA</i> ( $p, d, q$ )	14
3.3	O MODELO <i>ARFIMA</i> ( $p, d, q$ )	15
<b>4</b>	<b>ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS EM MODELOS <i>ARFIMA</i></b>	<b>21</b>
4.1	ESTIMAÇÃO DE $d$ USANDO A FUNÇÃO PERIODOGRAMA	21
4.2	ESTIMAÇÃO DE $d$ USANDO A FUNÇÃO PERIODOGRAMA SUAVIZADO	23
4.3	ESTIMADOR DA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA	27
4.3.1	O EMV GAUSSIANO EXATO	28
4.3.2	O EMV APROXIMADO DE WHITTLE	29
<b>5</b>	<b>SIMULAÇÕES E CONCLUSÕES</b>	<b>39</b>
5.1	SIMULAÇÕES	39
5.2	RESULTADOS PARA O MODELO <i>ARFIMA</i> ( $1, d, 0$ )	42
5.3	RESULTADOS PARA O MODELO <i>ARFIMA</i> ( $0, d, 1$ )	50
5.4	RESULTADOS PARA O MODELO <i>ARFIMA</i> ( $1, d, 0$ ) QUANDO AUMENTAMOS O TAMANHO DA SÉRIE TEMPORAL	54

5.5	RESULTADOS PARA OS ESTIMADORES DOS PARÂMETROS $\phi_1$ E $\theta_1$ . . . . .	62
5.6	RESULTADOS PARA O MODELO <i>ARFIMA</i> (1;0,1;0) . . . . .	64
5.7	CONCLUSÕES . . . . .	66
	<b>APÊNDICE A.</b> . . . . .	<b>67</b>
	<b>BIBLIOGRAFIA</b> . . . . .	<b>73</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Uma série temporal é um conjunto de observações, cada uma registrada em um tempo específico  $t$ . Uma série temporal discreta é obtida quando o conjunto  $T$  de tempos no qual as observações são feitas, é um conjunto discreto. Séries temporais contínuas são obtidas quando observações são registradas continuamente sobre algum intervalo de tempo.

Uma característica importante de uma série temporal, considerada neste trabalho, é a longa dependência, ou seja, a correlação entre observações distanciadas não é desprezível, mesmo por um longo período de tempo, pois apresenta um decaimento lento de forma hiperbólica.

Existe na literatura diversos modelos para modelagem de séries temporais. Consideramos os seguintes: Modelo Autoregressivo Média Móvel denotado por  $ARMA(p, q)$ ; Autoregressivo Integrado Média Móvel denotado por  $ARIMA(p, d, q)$  onde  $d$  é conhecido como grau de diferenciação do modelo e o modelo  $ARIMA(p, d, q)$  fracionário, ou  $ARFIMA(p, d, q)$ , que é uma generalização do modelo  $ARIMA(p, d, q)$ , com  $d$  assumindo valores fracionários, onde consideramos  $d \in (0, 0; 0, 5)$ .

O objetivo deste trabalho é estimar os parâmetros do modelo  $ARFIMA(p, d, q)$ . Para estimar o parâmetro  $d$  consideramos os seguintes métodos de estimação: o método para estimar  $d$  usando a função periodograma, o método para estimar  $d$  usando a função periodograma suavizado e o método da máxima verossimilhança aproximado de Whittle. O último método fornece também os estimadores para os coeficientes dos polinômios autoregressivo e média móvel, de graus  $p$  e  $q$  respectivamente.

No segundo capítulo apresentamos alguns conceitos básicos em séries temporais, os quais serão utilizados e citados nos capítulos posteriores.

No terceiro capítulo apresentamos os modelos  $ARMA(p, q)$ ,  $ARIMA(p, d, q)$  e, com enfoque especial, o modelo  $ARFIMA(p, d, q)$  com respectivas definições e propriedades.

No quarto capítulo, analisamos os três diferentes estimadores, já citados anteriormente, para os parâmetros do modelo  $ARFIMA(p, d, q)$ , quando  $d \in (0, 0; 0, 5)$ .

No quinto capítulo, comparamos os estimadores propostos no capítulo anterior, através de simulações, para os parâmetros dos modelos  $ARFIMA(1, d, 0)$  e  $ARFIMA(0, d, 1)$ , quando  $d \in (0, 0; 0, 5)$ . E apresentamos as conclusões.



No apêndice A, analisamos graficamente a função de verossimilhança com a aproximação sugerida por Whittle.

## 2 ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS

Apresentamos, neste capítulo, alguns conceitos fundamentais que são necessários à compreensão de modelos em séries temporais discutidos neste trabalho. Começamos com uma simples introdução de processos estocásticos e apresentamos a média, variância e as funções de autocovariância e autocorrelação de um processo estocástico, que nos fornecem informações sobre a estrutura de dependência do processo. Também discutimos a estimação da média e das funções de autocovariância e autocorrelação.

### 2.1 CONCEITOS BÁSICOS

**DEFINIÇÃO 2.1.1:** Um *processo estocástico* é uma família de variáveis aleatórias  $\{X_t; t \in T\}$  todas elas definidas em um mesmo espaço de probabilidades  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , onde  $\Omega$  é o espaço amostral,  $\mathcal{A}$  é uma  $\sigma$ -álgebra,  $\mathbb{P}$  é uma medida de probabilidade e  $T \neq \emptyset$  é um conjunto de índices.

**DEFINIÇÃO 2.1.2:** Para um processo estocástico  $\{X_t; t \in T\}$  a *média do processo* é definida por

$$\mathbb{E}(X_t) = \mu_t, \quad t \in T,$$

a *variância do processo* é dada por

$$\sigma_t^2 = \mathbb{E}(X_t - \mu_t)^2, \quad t \in T,$$

a *função de autocovariância* entre quaisquer duas variáveis aleatórias  $X_s$  e  $X_t$  é dada por

$$\gamma_X(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}[(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)], \quad s, t \in T$$

e a função de autocorrelação entre quaisquer duas variáveis aleatórias  $X_s$  e  $X_t$  é

$$\rho_X(s, t) = \frac{\gamma_X(s, t)}{\sqrt{\sigma_s^2 \sigma_t^2}}, \quad s, t \in T.$$

**DEFINIÇÃO 2.1.3:** Um processo estocástico  $\{X_t\}_{t \in T}$  é dito ser *fortemente estacionário* se as distribuições conjuntas de  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$  e  $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_k+h})$  são as mesmas qualquer que seja  $k$  um inteiro positivo e para todo  $t_1, t_2, \dots, t_k, h \in T$ .

Neste trabalho analisamos processos que satisfazem condições de estacionariedade fraca definida a seguir.

**DEFINIÇÃO 2.1.4 :** Um processo estocástico  $\{X_t\}_{t \in T}$  é dito ser *fracamente estacionário* se

- i)  $\mathbb{E}(X_t) = \mu$ , uma constante independente de  $t$ ,
- ii)  $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$ , para todo  $t \in T$ ,
- iii)  $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r + t, s + t)$ , para quaisquer  $r, s, t \in T$ .

#### Observações:

a) Para os processos estocásticos  $\{X_t\}_{t \in T}$  que satisfazem as três condições na Definição 2.1.4 acima, suprimimos a palavra ‘*fracamente*’ e denotamos somente *processos estocásticos estacionários*.

b) Neste trabalho, consideramos o conjunto de índices  $T$  como sendo o conjunto dos inteiros  $\mathbb{Z}$ . Se  $t \in T = \{1, 2, \dots, n\}$  então  $\{X_t\}_{t=1}^n$  é dito ser uma *Série Temporal*. Portanto, uma série temporal é um conjunto de observações de um fenômeno onde cada observação é registrada num tempo específico  $t$ .

c) Existe um importante caso no qual estacionaridade implica em estacionaridade forte. Se o processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo Gaussiano, isto é, as funções de distribuição conjunta de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  são todas normais multivariadas, então  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dito ser fortemente estacionário. Sabemos também que todo processo fortemente estacionário é ergódico. Uma análise mais detalhada pode ser encon-

trada em Brockwell e Davis (1987) e Karlin e Taylor (1975). Trabalhamos, no capítulo 4, com processos Gaussianos.

d) Para processos estacionários, a média  $\mu_t = \mu$  é constante e, consequentemente,  $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$ . Igualmente, se  $\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$  então  $\sigma_t^2 = \sigma^2$ , para todo  $t \in \mathbb{Z}$ , é também constante.

e) Podemos observar que para processos estacionários, para quaisquer inteiros  $r, s$  e  $k \in \mathbb{Z}$  temos,

$$\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r + k, s + k)$$

e

$$\rho_X(r, s) = \rho_X(r + k, s + k), \quad \text{para quaisquer } r, s, k, \in \mathbb{Z}.$$

Considerando  $r = t - k$  e  $s = t$  temos,

$$\gamma_X(r, s) = \gamma_X(t - k, t) = \gamma_X(t, t + k) \equiv \gamma_X(k)$$

e

$$\rho_X(r, s) = \rho_X(t - k, t) = \rho_X(t, t + k) \equiv \rho_X(k).$$

Então, para um processo estacionário com os dois primeiros momentos finitos as funções de autocovariância e de autocorrelação entre  $X_t$  e  $X_{t+k}$  dependem somente da diferença  $k$ .

f) Para um processo estacionário  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  a função de autocovariância  $\gamma_X(k)$  e a função de autocorrelação  $\rho_X(k)$  apresentam as seguintes propriedades:

i)  $\gamma_X(0) = \text{Var}(X_t)$  e  $\rho_X(0) = 1$ .

ii)  $|\gamma_X(k)| \leq \gamma_X(0)$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

iii)  $|\rho_X(k)| \leq 1$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

iv)  $\gamma_X(k) = \gamma_X(-k)$  e  $\rho_X(k) = \rho_X(-k)$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Ou seja,  $\gamma_X(k)$  e  $\rho_X(k)$  são ambas funções simétricas em relação a origem  $k = 0$ .

Definimos agora a função de autocorrelação parcial de um processo estacionário  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , que nos fornece importantes informações sobre a estrutura de dependência do processo. Ou seja, analisamos a correlação entre

$X_t$  e  $X_{t+k}$  após a remoção das dependências lineares das variáveis intermediárias  $X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+k-1}$ .

**DEFINIÇÃO 2.1.5 :** A *função de autocorrelação parcial* de um processo estocástico estacionário  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  com função de autocovariância  $\gamma_X(\cdot)$  tal que  $\gamma_X(k) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ , é definida pelos coeficientes  $\phi_{kj}$ , para  $j = 1, \dots, k$  e  $k \in \mathbb{N} - \{0\}$  obtidos na representação da projeção, denotada por  $\mathcal{P}_{\overline{\text{sp}}(X_1, X_2, \dots, X_k)}(\cdot)$ , de  $X_{k+1}$  no subespaço fechado gerado pelas observações anteriores, denotado por  $\overline{\text{sp}}(X_1, X_2, \dots, X_k)$ , e dada por

$$\mathcal{P}_{\overline{\text{sp}}(X_1, X_2, \dots, X_k)}(X_{k+1}) = \sum_{j=1}^k \phi_{kj} X_{k+1-j}.$$

Os coeficientes  $\phi_{kj}$  são obtidos solucionando o sistema de equações

$$\langle X_{k+1} - \mathcal{P}_{\overline{\text{sp}}(X_1, X_2, \dots, X_k)}(X_{k+1}), X_j \rangle = 0, \text{ para } j = 1, \dots, k,$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno definido no espaço de Hilbert  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  dado por  $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY)$ . Para a definição de uma aplicação projeção  $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$  definida no subespaço fechado  $\mathcal{M} \subset L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , ver Brockwell e Davis (1987, capítulo II).

Obtemos assim

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_X(1) & \rho_X(2) & \cdots & \rho_X(k-1) \\ \rho_X(1) & 1 & \rho_X(1) & \cdots & \rho_X(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_X(k-1) & \rho_X(k-2) & \rho_X(k-3) & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_X(1) \\ \rho_X(2) \\ \vdots \\ \rho_X(k) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

para todo  $k \geq 1$ , onde  $\rho_X(i)$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ , são as funções de autocorrelações de ordem  $i$  do processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ .

A *função de autocorrelação parcial de ordem  $k$*  do processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , denotada por  $\phi_{kk}$ , é unicamente determinada pela expressão (2.1).

Uma análise mais detalhada desta definição pode ser encontrada em Brockwell e Davis (1987).

## 2.2 MÉDIA, AUTOCOVARIÂNCIA E AUTOCORRELAÇÃO AMOSTRAL

Um processo estacionário é caracterizado por sua média  $\mu$ , variância  $\sigma^2$ , funções de autocovariância  $\gamma_X(k)$  e de autocorrelação  $\rho_X(k)$  e função de autocorrelação parcial de ordem  $k$   $\phi_{kk}$ . A seguir definimos os estimadores naturais, ou seja, os estimadores obtidos pelo método dos momentos para os parâmetros  $\mu$ ,  $\sigma^2$ ,  $\gamma_X(k)$ ,  $\rho_X(k)$  e  $\phi_{kk}$  de um processo estacionário  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  onde

- i)  $\mathbb{E}(X_t) = \mu$ ,
- ii)  $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$
- iii)  $\text{Cov}(X_t, X_{t+k}) = \gamma_X(k)$ ,

considerando  $n$  observações  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de um processo estocástico estacionário  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ .

**DEFINIÇÃO 2.2.1:** O estimador para a média  $\mu = \mathbb{E}(X_t)$ , pelo método dos momentos, é a *média amostral*

$$\bar{X} = \frac{\sum_{t=1}^n X_t}{n}, \quad (2.2)$$

onde  $\bar{X}$  é um estimador não viciado e consistente da média  $\mu$  pois  $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu$  e  $\text{Var}(\bar{X}) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

**DEFINIÇÃO 2.2.2:** O estimador para a função de autocovariância  $\gamma_X(k)$ , pelo método dos momentos, é a *função de autocovariância amostral* dada por

$$\hat{\gamma}_X(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X}) \quad (2.3)$$

ou

$$\tilde{\gamma}_X(k) = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X}), \quad (2.4)$$

onde  $\bar{X}$  é a média amostral. Em geral,  $\tilde{\gamma}_X(k)$  tem menor vício, apesar de ter maior variância do que  $\hat{\gamma}_X(k)$ . Neste trabalho, utilizamos a função de autocovariância amostral  $\hat{\gamma}_X(k)$  dada pela expressão (2.3) acima. O quociente  $n$  é preferível ao quociente  $n-k$  porque desta forma  $\hat{\gamma}_X(k)$  é definida não negativa, e quando comparamos o erro quadrático médio de  $\hat{\gamma}_X(k)$  e  $\tilde{\gamma}_X(k)$  concluímos que, quando  $k$  é pequeno existe uma pequena diferença entre os dois estimadores e quando  $k$  é grande o vício de  $\hat{\gamma}_X(k)$  é compensado pela menor variância (ver Priestley (1981)).

Conseqüentemente, da expressão (2.3) derivamos que um estimador para a variância do processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , pelo método dos momentos, é dado por

$$\hat{\gamma}_X(0) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2, \quad (2.5)$$

onde  $\bar{X}$  é a média amostral.

**DEFINIÇÃO 2.2.3:** A função de autocorrelação amostral de ordem  $k$  é dada por

$$\hat{\rho}_X(k) = \frac{\hat{\gamma}_X(k)}{\hat{\gamma}_X(0)}, \quad \text{para todo } |k| < n,$$

onde  $\hat{\gamma}_X(k)$  é dado pela expressão (2.3) e  $\hat{\gamma}_X(0)$  pela expressão (2.5).

**DEFINIÇÃO 2.2.4:** A função de autocorrelação parcial amostral de ordem  $k$   $\hat{\phi}_{kk}$  é obtida substituindo  $\rho_X(k)$  por  $\hat{\rho}_X(k)$  na equação (2.1). Um método recursivo partindo de  $\hat{\phi}_{11} = \hat{\rho}_X(1)$  para encontrar  $\hat{\phi}_{kk}$  é (ver Box et al. (1995)) dado por

$$\hat{\phi}_{k+1,k+1} = \frac{\hat{\rho}_X(k+1) - \sum_{j=1}^k \hat{\phi}_{kj} \hat{\rho}_X(k+1-j)}{1 - \sum_{j=1}^k \hat{\phi}_{kj} \hat{\rho}_X(j)} \quad (2.6)$$

e  $\hat{\phi}_{k+1,j} = \hat{\phi}_{kj} - \hat{\phi}_{k+1,k+1} \hat{\phi}_{k,k+1-j}$ , para todo  $j = 1, 2, \dots, k$ .

Uma análise mais detalhada das definições (2.3.1), (2.3.2), (2.3.3) e (2.3.4) podem ser encontradas em Wei (1990).

Definimos agora, o processo ruído branco, que será utilizado nos capítulos posteriores.

**DEFINIÇÃO 2.2.5 :** Um processo  $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é chamado um *processo ruído branco* se é um conjunto de variáveis aleatórias com distribuição fixada, com média constante  $\mathbb{E}(\epsilon_t) = \mu_\epsilon$ , usualmente assumida ser zero, variância constante  $Var(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$  e função de autocovariância  $\gamma_\epsilon(k) = Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t+k}) = 0$ , para todo  $k \neq 0$ .

**Observações :**

a) Um processo ruído branco é dito *Gaussiano* se sua distribuição conjunta é normal multivariada.

b) Consideramos, neste trabalho, o processo ruído branco  $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  como sendo um processo Gaussiano com média zero.

## 2.3 ANÁLISE ESPECTRAL DE PROCESSOS ESTACIONÁRIOS

A representação espectral de um processo estacionário  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  essencialmente decompõe  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  em uma soma de componentes senoidais com coeficientes aleatórios não correlacionados. Em conjunto com esta decomposição existe uma decomposição correspondente para a função de autocorrelação. A análise de processos estacionários pela sua representação espectral é denominada de análise de séries temporais no domínio da frequência. Enquanto que a análise do processo pela sua função de autocovariância é denominada de análise no domínio do tempo. Estas duas análises estão relacionadas pois a função densidade espectral e a função de autocovariância formam um par pela transformada de Fourier. Apresentamos, nesta seção, a função densidade espectral de um processo e suas propriedades. Também apresentamos as definições da função periodograma e periodograma suavizado, que são estimadores da função densidade espectral de um processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ . Uma análise detalhada deste assunto pode ser encontrada em Brockwell e Davis (1987).



**DEFINIÇÃO 2.3.1:** Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo estocástico estacionário com função de autocovariância de ordem  $k$   $\gamma_X(k)$  absolutamente convergente, isto é,  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma_X(k)| < \infty$ . A *função densidade espectral* de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dada por

$$\begin{aligned} f_X(w) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_X(k) e^{-iwk} \\ &= \frac{1}{2\pi} [\gamma_X(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_X(k) \cos(wk)], \quad \text{para todo } w \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Considerando as propriedades

- i)  $\gamma_X(k) = \gamma_X(-k)$
- ii)  $\cos(-wk) = \cos(wk)$  e  $\sin(wk) = -\sin(-wk)$ ,

então a função densidade espectral  $f_X(w)$ , dada por (2.7), tem as seguintes importantes propriedades (ver Wei (1990)):

- i)  $f_X(w)$  é uma função real contínua não negativa, isto é,

$$|f_X(w)| = f_X(w), \quad \text{para todo } w \in [-\pi, \pi],$$

- ii)  $f_X(w) = f_X(-w)$ ,  $w \in [-\pi, \pi]$ .

**DEFINIÇÃO 2.3.2:** Para um conjunto de  $n$  observações  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de um processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  a *função periodograma* é definida por

$$I(w) = 2[\hat{\gamma}_X(0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\gamma}_X(k) \cos(wk)], \quad \text{para todo } w \in [-\pi, \pi],$$

onde  $\hat{\gamma}_X(k)$  é a função de autocovariância amostral do processo definida pela expressão (2.3) e  $\hat{\gamma}_X(0)$  é a variância amostral do processo definida pela expressão (2.5).

Considere

$$I^*(w) = \frac{I(w)}{4\pi} = \frac{1}{2\pi} [\hat{\gamma}_X(0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\gamma}_X(k) \cos(wk)], \quad \text{para todo } w \in [-\pi, \pi]. \quad (2.8)$$

**Observações:**

a) Dizemos que  $I^*(w)$  é o estimador da função  $f_X(w)$ , pelo método dos momentos.

b) Utilizamos  $I^*(w)$  por ser um estimador não viciado da função densidade espectral.

c) Consideramos, daqui por diante,  $I^*(w)$  como a função periodograma a qual passará a ser denotada por  $I(w)$ .

Como a função periodograma não é um estimador consistente da função densidade espectral  $f_X(w)$ , foram analisados estimadores alternativos que tivessem a propriedade de consistência (ver Priestley (1981)). Na próxima definição apresentamos um estimador consistente para a função densidade espectral, a função periodograma suavizado, que utilizamos, no Capítulo 4, para a estimativa de parâmetros em modelos  $ARFIMA(p, d, q)$ .

**DEFINIÇÃO 2.3.3:** A função periodograma suavizado, denotada por  $f_s(w)$ , é um estimador consistente da função densidade espectral  $f_X(w)$  e é dada por

$$f_s(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \lambda(k) \hat{\gamma}_X(k) \cos(wk), \quad w \in [-\pi, \pi], \quad (2.9)$$

onde  $\lambda(k)$  é uma função de ponderação conhecida como *janela* e  $\hat{\gamma}_X(k)$  é a função de autocovariância amostral do processo definida pela expressão (2.3). Diferentes formas da função  $\lambda(k)$  são sugeridas na literatura de análise de séries temporais. Neste trabalho, utilizamos sempre a *janela de Parzen* que é dada por

$$\lambda(k) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{k}{\eta}\right)^2 + 6\left(\frac{|k|}{\eta}\right)^3, & \text{se } |k| \leq \frac{\eta}{2} \\ 2\left(1 - \frac{|k|}{\eta}\right)^3, & \text{se } \frac{\eta}{2} < |k| \leq \eta \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.10)$$

onde  $\eta$  é o *ponto de truncamento* da janela e  $\eta = n^\beta$ , com tamanho amostral  $n$  e  $0 < \beta < 1$ .

### 3 MODELOS ARMA, ARIMA E ARFIMA PARA SÉRIES TEMPORAIS

Neste capítulo introduzimos uma classe extremamente importante de modelos, para processos estocásticos  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , definidos em termos de equações de coeficientes lineares constantes.

#### 3.1 O MODELO ARMA( $p, q$ )

**DEFINIÇÃO 3.1.1:** Sejam  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo estocástico e  $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  o processo ruído branco dado pela Definição 2.3.5. O processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dito ser um *processo autoregressivo média móvel de ordem  $p$  e  $q$* , denotado por ARMA( $p, q$ ), se satisfaz a equação

$$\Phi(\mathcal{B})X_t = \Theta(\mathcal{B})\epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (3.1)$$

onde  $\mathcal{B}$  é o operador “backward” definido por  $\mathcal{B}(X_t) = X_{t-1}$  e  $\Phi(\mathcal{B})$  e  $\Theta(\mathcal{B})$  são polinômios de ordem  $p$  e  $q$ , respectivamente, dados por

$$\Phi(\mathcal{B}) = 1 - \phi_1\mathcal{B} - \phi_2\mathcal{B}^2 - \dots - \phi_p\mathcal{B}^p \quad (3.2)$$

e

$$\Theta(\mathcal{B}) = 1 - \theta_1\mathcal{B} - \theta_2\mathcal{B}^2 - \dots - \theta_q\mathcal{B}^q, \quad (3.3)$$

onde  $\phi_i, i \in \{1, 2, \dots, p\}$  e  $\theta_j, j \in \{1, 2, \dots, q\}$ , são constantes reais.

**Observações:**

a) Se as raízes da equação  $\Phi(\mathcal{B}) = 0$  estão fora do círculo unitário o processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , definido por (3.1), é dito ser *estacionário* e se as raízes da equação  $\Theta(\mathcal{B}) = 0$  estão fora do círculo unitário então o processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dito ser *inversível* ou *causal*.

b) Um processo  $ARMA(p, q)$  *inversível* ou *causal* admite solução estacionária única dada por

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}, \text{ para todo } t \in \mathbb{Z},$$

sempre que a seqüência de constantes  $\{\psi_j\}_{j \geq 0}$  é tal que  $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ .

c) Assumimos que as equações  $\Phi(\mathcal{B}) = 0$  e  $\Theta(\mathcal{B}) = 0$ , onde  $\Phi(\mathcal{B})$  é dado por (3.2) e  $\Theta(\mathcal{B})$  por (3.3), não possuem raízes em comum.

Apresentamos na Definição 2.4.1 a função densidade espectral de um processo estacionário. Derivamos agora, através do Teorema 3.1.1, a função densidade espectral de um processo  $ARMA(p, q)$ .

**TEOREMA 3.1.1:** *Se  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo  $ARMA(p, q)$  (não necessariamente causal ou inversível) dado pela expressão (3.1), onde  $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é o processo ruído branco dado pela Definição 2.3.5 e os polinômios  $\Phi(\mathcal{B})$  e  $\Theta(\mathcal{B})$  definidos, respectivamente, em (3.2) e (3.3) não possuem raízes em comum e  $\Phi(\mathcal{B})$  não possui raízes no círculo unitário, então  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  tem função densidade espectral  $f_X(w)$  dada por*

$$f_X(w) = \frac{\sigma_\epsilon^2 |\Theta(e^{-iw})|^2}{2\pi |\Phi(e^{-iw})|^2}, \quad -\pi \leq w \leq \pi, \quad (3.4)$$

onde  $\sigma_\epsilon^2 = \text{Var}(\epsilon_t)$ .

Uma prova deste teorema pode ser encontrada em Brockwell e Davis (1987).

### 3.2 O MODELO $ARIMA(p, d, q)$

Definimos anteriormente uma importante classe de modelos  $ARMA$  para representação de Séries Temporais. Uma generalização desta classe, é apresentada pelo processo  $ARIMA$ , isto é, processo no qual, depois de diferenciado, resulta em um processo  $ARMA$ . O modelo  $ARIMA(p, d, q)$  foi introduzido por Box e Jenkins (ver Box et. al. (1995)) e tem sido vastamente aplicado na análise de Séries

Temporais. Detalhes e referências sobre estes processos podem ser encontrados em Box et al. (1995), Priestley (1981) e Brockwell e Davis (1987).

**DEFINIÇÃO 3.2.1:** Se  $d$  é um inteiro não negativo, então  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dito ser um *processo autoregressivo integrado média móvel de ordem*  $(p, d, q)$  se é dado por

$$\Phi(\mathcal{B})\mathcal{U}_t = \Phi(\mathcal{B})(1 - \mathcal{B})^d X_t = \Theta(\mathcal{B})\epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (3.5)$$

onde  $\mathcal{U}_t = (1 - \mathcal{B})^d X_t$  é um processo  $ARMA(p, q)$ , os polinômios  $\Phi(\mathcal{B})$  e  $\Theta(\mathcal{B})$  são definidos, respectivamente, em (3.2) e (3.3) e  $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é o processo ruído branco dado pela Definição 2.3.5. O valor constante  $d$  é denominado *parâmetro ou grau de diferenciação* do processo  $ARIMA(p, d, q)$ .

### 3.3 O MODELO $ARFIMA(p, d, q)$

O modelo  $ARFIMA(p, d, q)$  é denominado *processo geral com diferenciação fracionária* quando o parâmetro  $d$  (*grau de diferenciação*) assume valores não inteiros. Uma característica importante deste modelo é a propriedade de longa dependência, quando  $d \in (0, 0; 0, 5)$ , caracterizada pela função de autocorrelação decair lentamente de uma forma hiperbólica e a função densidade espectral tender a infinito quando a frequência aproxima-se de zero. E pequena ou curta dependência, quando  $d \in (-0, 5; 0, 0)$ ; neste caso, a função de autocorrelação decai geometricamente e a função densidade espectral tende a zero quando a frequência aproxima-se de zero.

**DEFINIÇÃO 3.3.1:** Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo estacionário dado por

$$\Phi(\mathcal{B})(1 - \mathcal{B})^d X_t = \Theta(\mathcal{B})\epsilon_t, \quad d \in (-0, 5; 0, 5), \quad (3.6)$$

onde o termo  $(1 - \mathcal{B})^d$  é definido pela expansão binomial

$$(1 - \mathcal{B})^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-\mathcal{B})^k = 1 - d\mathcal{B} - \frac{d}{2!}(1 - d)\mathcal{B}^2 - \frac{d}{3!}(1 - d)(2 - d)\mathcal{B}^3 \dots$$

O processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , definido pela expressão (3.6), é dito ser um *processo autoregressivo média móvel com diferenciação fracionária* com parâmetros  $p$ ,  $d$  e  $q$  e é denotado por  $ARFIMA(p, d, q)$ .

Apresentamos abaixo dois teoremas, onde no Teorema 3.3.1 obtemos a função densidade espectral do processo  $ARFIMA(p, d, q)$  e no Teorema 3.3.2 a função de autocovariância do processo junto com a prova do mesmo.

**TEOREMA 3.3.1** (Hosking (1981)): *Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo  $ARFIMA$  definido pela expressão (3.6). Sejam  $\Phi(\mathcal{B})$  e  $\Theta(\mathcal{B})$  polinômios definidos, respectivamente, em (3.2) e (3.3) tais que não possuem raízes em comum e as raízes das equações  $\Phi(\mathcal{B}) = 0$  e  $\Theta(\mathcal{B}) = 0$  estão fora do círculo unitário. Seja  $d \in (-0, 5; 0, 5)$ . Então,*

a)  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é inversível, com as representações Média Móvel (MA) e Autoregressivo (AR) dadas por

$$MA : X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \epsilon_{t-k} \quad (3.7)$$

e

$$AR : \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k X_{t-k} = \epsilon_t, \quad (3.8)$$

onde  $\psi_k$  e  $\pi_k$  são coeficientes de  $\mathcal{B}^k$  na expansão dos polinômios

$$\Psi(\mathcal{B}) = \frac{\Theta(\mathcal{B})}{\Phi(\mathcal{B})}(1 - \mathcal{B})^{-d} \quad e \quad \Pi(\mathcal{B}) = \frac{\Phi(\mathcal{B})}{\Theta(\mathcal{B})}(1 - \mathcal{B})^d.$$

b) *Seja  $\mathcal{U}_t = (1 - \mathcal{B})^d X_t$ . Se  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo estacionário e inversível, então podemos escrever (3.6) como*

$$\Phi(\mathcal{B})\mathcal{U}_t = \Theta(\mathcal{B})\epsilon_t.$$

*Seja  $Y_t = \frac{\Phi(\mathcal{B})}{\Theta(\mathcal{B})} X_t$ . Então  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo  $ARFIMA(0, d, 0)$  com função densidade espectral dada por*

$$f_Y(w) = \left[ 2 \operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right) \right]^{-2d}, \quad \text{para } -\pi \leq w \leq \pi.$$

A função de autocovariância do processo  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dada por

$$\gamma_Y(k) = \begin{cases} \frac{(-2d)!}{[(-d)!]^2}, & k=0 \\ \frac{(-1)^k (-2d)!}{(k-d)!(-k-d)!} = \frac{(k-1+d)}{(k-d)} \gamma_Y(k-1), & k \geq 1. \end{cases}$$

E a função densidade espectral de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dada por

$$\begin{aligned} f_X(w) &= f_U(w) \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{w}{2} \right) \right]^{-2d} \\ &= \frac{\sigma_\epsilon^2 |\Theta(e^{-iw})|^2}{2\pi |\Phi(e^{-iw})|^2} \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{w}{2} \right) \right]^{-2d}, \text{ para todo } -\pi \leq w \leq \pi. \end{aligned} \quad (3.9)$$

A prova destes resultados pode ser encontrada em Brockwell e Davis (1987) e Hosking (1981).

**TEOREMA 3.3.2** (Sowell (1991)): *Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo ARFIMA( $p, d, q$ ) com função densidade espectral dada por*

$$f_X(w) = \frac{\sigma_\epsilon^2 |\Theta(e^{-iw})|^2}{2\pi |\Phi(e^{-iw})|^2} \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{w}{2} \right) \right]^{-2d}, \text{ para todo } -\pi \leq w \leq \pi,$$

onde as raízes do polinômio  $\Phi(\mathcal{B})$ , definido por (3.2), são assumidas fora do círculo unitário e as raízes do polinômio  $\Theta(\mathcal{B})$ , definido por (3.3), são simples. Então, a função de autocovariância deste processo é dada por

$$\gamma_X(h) = \sigma_\epsilon^2 \sum_{l=-q}^q \sum_{j=1}^p \Psi(l) \xi_j C(d, p+l-h, \rho_j)$$

onde

$$C(d, s, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{\rho^{2p}}{(1 - \rho e^{-iw})} - \frac{1}{(1 - \rho^{-1} e^{-iw})} \right] \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{w}{2} \right) \right]^{-2d} e^{-iws} dw,$$

$$\xi_j = \left[ \rho_j \prod_{i=1}^p (1 - \rho_i \rho_j) \prod_{m \neq j} (\rho_j - \rho_m) \right]^{-1}, \text{ com } |\rho_j| < 1 \text{ para todo } j = 1, 2, \dots, p$$



e

$$\Psi(l) = \sum_{s=\max[0,l]}^{\min[q,q-l]} \theta_s \theta_{s-l}, \text{ para todo } l \in \{-q, -q+1, \dots, q\}.$$

Demonstração: Através do Teorema de Herglotz (ver Brockwell e Davis (1987)) podemos representar a função de autocovariância de ordem  $h$  por

$$\gamma_X(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f_X(w) e^{iwh} dw, \quad (3.10)$$

onde  $f_X(w)$  é dada pela expressão (3.9). Substituindo a expressão de  $f_X(w)$  em (3.10) temos

$$\gamma_X(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_\epsilon^2 \frac{|\Theta(e^{-iw})|^2}{|\Phi(e^{-iw})|^2} \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{w}{2} \right) \right]^{-2d} e^{iwh} dw.$$

Como as raízes do polinômio  $\Phi(\mathcal{B})$  são assumidas fora do círculo unitário, o polinômio  $\Phi(x)$  pode ser escrito por

$$\Phi(x) = \prod_{j=1}^p (1 - \rho_j x), \text{ onde } |\rho_j| < 1 \text{ para todo } j = 1, 2, \dots, p.$$

Então,

$$\begin{aligned} |\Phi(e^{-iw})|^2 &= \Phi(e^{-iw})\Phi(e^{iw}) = \prod_{j=1}^p (1 - \rho_j e^{-iw}) \prod_{j=1}^p (1 - \rho_j e^{iw}) \\ &= \prod_{j=1}^p (1 - \rho_j e^{-iw})(1 - \rho_j e^{iw}). \end{aligned}$$

Logo,

$$|\Phi(e^{-iw})|^{-2} = \prod_{j=1}^p \frac{1}{(1 - \rho_j e^{-iw})(1 - \rho_j e^{iw})} = e^{-iwp} \prod_{j=1}^p \frac{1}{(1 - \rho_j e^{-iw})(e^{-iw} - \rho_j)}. \quad (3.11)$$

Como as raízes do polinômio  $\Phi(\mathcal{B})$  são simples usamos a decomposição em frações parciais para reescrever a expressão (3.11) e encontramos a seguinte igualdade

$$e^{-iwp} \prod_{j=1}^p \frac{1}{(1 - \rho_j e^{-iw})(e^{-iw} - \rho_j)} = \sum_{j=1}^p e^{-iwp} \xi_j \left[ \frac{\rho_j^{2p}}{(1 - \rho_j e^{-iw})} - \frac{1}{(1 - \rho_j^{-1} e^{-iw})} \right]$$

onde

$$\xi_j = \left[ \rho_j \prod_{i=1}^p (1 - \rho_i \rho_j) \prod_{m \neq j} (\rho_j - \rho_m) \right]^{-1}.$$

Deste modo podemos escrever a função densidade espectral de  $\{\mathcal{U}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  como

$$f_{\mathcal{U}}(w) = \frac{\sigma_{\epsilon}^2}{2\pi} |\Theta(e^{-iw})|^2 \sum_{j=1}^p e^{-iwp} \xi_j \left[ \frac{\rho_j^{2p}}{(1 - \rho_j e^{-iw})} - \frac{1}{(1 - \rho_j^{-1} e^{-iw})} \right].$$

O polinômio  $\Theta(e^{-iw})$  é de ordem finita e cada elemento de  $|\Theta(e^{-iw})|^2$  pode ser escrito como um polinômio em  $e^{-iw}$  com valores positivos e negativos dos expoentes. Então,

$$\begin{aligned} |\theta(e^{-iw})|^2 &= \theta(e^{-iw}) \theta(e^{iw}) \\ &= \left( \sum_{l=0}^q \theta_l e^{-iwl} \right) \left( \sum_{s=0}^q \theta_s e^{iws} \right) \\ &= \sum_{l=0}^q \sum_{s=0}^q \theta_l \theta_s e^{-iw(l-s)} \\ &= \sum_{l=-q}^q \sum_{s=\max\{0, l\}}^{\min\{q, q-l\}} \theta_s \theta_{s-l} e^{-iwl} = \sum_{l=-q}^q \Psi(l) e^{-iwl}, \end{aligned}$$

onde

$$\Psi(l) = \sum_{s=\max\{0, l\}}^{\min\{q, q-l\}} \theta_s \theta_{s-l}.$$

Então, novamente, a função densidade espectral do processo  $\{\mathcal{U}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  pode ser escrita por

$$f_u(w) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} \sum_{l=-q}^q \Psi(l) e^{-iwl} \sum_{j=1}^p e^{-iwp} \xi_j \left[ \frac{\rho_j^{2p}}{(1 - \rho_j e^{-iw})} - \frac{1}{(1 - \rho_j^{-1} e^{-iw})} \right].$$

Logo, podemos reescrever a função densidade espectral de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , definida pela expressão (3.9), por

$$f_X(w) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} \sum_{l=-q}^q \sum_{j=1}^p \Psi(l) \xi_j \left[ \frac{\rho_j^{2p}}{(1 - \rho_j e^{-iw})} - \frac{1}{(1 - \rho_j^{-1} e^{-iw})} \right] \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{w}{2} \right) \right]^{-2d} e^{-iw(l+p)}. \quad (3.12)$$

Esta é a forma geral da função densidade espectral para um processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  que é gerado por um modelo *ARFIMA*( $p, d, q$ ) onde as raízes do polinômio  $\Phi(\mathcal{B})$  são simples. Portanto,  $\gamma_X(h)$  pode ser calculada substituindo (3.12) em (3.10)

$$\begin{aligned} \gamma_X(h) &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l=-q}^q \sum_{j=1}^p \Psi(l) \xi_j \left[ \frac{\rho_j^{2p}}{(1 - \rho_j e^{-iw})} - \frac{1}{(1 - \rho_j^{-1} e^{-iw})} \right] \\ &\quad \times \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{w}{2} \right) \right]^{-2d} e^{-iw(l+p-h)} dw. \end{aligned}$$

Definindo

$$C(d, s, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{\rho^{2p}}{(1 - \rho e^{-iw})} - \frac{1}{(1 - \rho^{-1} e^{-iw})} \right] \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{w}{2} \right) \right]^{-2d} e^{-iws} dw,$$

a função de autocovariância do processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  pode ser escrita por

$$\gamma_X(h) = \sigma_\epsilon^2 \sum_{l=-q}^q \sum_{j=1}^p \Psi(l) \xi_j C(d, p+l-h, \rho_j).$$

## 4 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS EM MODELOS *ARFIMA*

Existem vários métodos na literatura para estimar o parâmetro  $d$  no modelo  $ARFIMA(p, d, q)$ . Neste capítulo analisamos a estimação do parâmetro  $d$  através do método da regressão utilizando a função periodograma (ver Definição 2.4.2), o método da regressão utilizando a função periodograma suavizado (ver Definição 2.4.3) e o método da Máxima Verossimilhança, mais precisamente, o estimador de Máxima Verossimilhança aproximado de Whittle. Os dois primeiros métodos estimam somente o parâmetro  $d$  enquanto que o método da Máxima Verossimilhança estima simultaneamente todos os parâmetros do modelo  $ARFIMA(p, d, q)$ . Uma análise detalhada destes estimadores pode ser encontrada em Reisen (1993) e Beran (1994).

### 4.1 ESTIMAÇÃO DE $d$ USANDO A FUNÇÃO PERIODOGRAMA

O método para a estimação do parâmetro de diferenciação  $d$  através da função periodograma (ver Definição 2.4.2) foi introduzido por Geweke e Porter-Hudak (1983) e baseia-se na função densidade espectral de um processo  $ARFIMA(p, d, q)$ , reescrita de modo a assemelhar-se a uma equação de regressão linear simples.

Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo  $ARFIMA(p, d, q)$ , com  $d \in (-0, 5; 0, 5)$ , representado pela expressão (3.6), e função densidade espectral dada por

$$f_X(w) = f_U(w) \left[ 2 \operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right) \right]^{-2d}, \quad -\pi \leq w \leq \pi \quad (4.1)$$

onde  $f_U(w)$  é a função densidade espectral do processo  $U_t = (1 - B)^d X_t$ , para todo  $t \in \mathbb{Z}$ .

Aplicando o logaritmo em (4.1) obtemos

$$\begin{aligned}
\ln f_X(w) &= \ln f_U(w) + \ln \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{w}{2} \right) \right]^{-2d} \\
&= \ln f_U(w) - d \ln \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{w}{2} \right) \right]^2.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Acrescentando o termo  $\ln f_U(0)$  em ambos os lados da expressão (4.2) obtemos

$$\ln f_X(w) = \ln f_U(0) + \ln \left( \frac{f_U(w)}{f_U(0)} \right) - d \ln \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{w}{2} \right) \right]^2. \tag{4.3}$$

Substituindo  $w$  pelas frequências  $w_j = \frac{2\pi j}{n}$ , para  $j \in \{0, 1, \dots, \frac{n}{2}\}$ , e adicionando  $\ln I(w_j)$  na expressão (4.3), onde  $I(\cdot)$  é a função periodograma dada pela Definição 2.4.2, tem-se

$$\ln I(w_j) = \ln f_U(0) + \ln \left( \frac{f_U(w_j)}{f_U(0)} \right) + \ln \left( \frac{I(w_j)}{f_X(w_j)} \right) - d \ln \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{w_j}{2} \right) \right]^2. \tag{4.4}$$

Se o valor máximo para  $j$ , digamos  $g(n)$ , é escolhido da forma  $g(n) = n^\alpha$  para algum  $\alpha \in (0, 1)$  fixo (observe que, neste caso,  $\frac{g(n)}{n} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ ) e se  $w_j$  é próximo de zero, digamos,  $w_j \leq w_{g(n)}$  onde  $w_{g(n)}$  é pequeno, então o termo  $\ln \left( \frac{f_U(w_j)}{f_U(0)} \right)$  é desprezível comparado com os outros termos à direita na expressão (4.4), e obtemos uma equação aproximada dada por

$$\ln I(w_j) \simeq \ln f_U(0) + \ln \left( \frac{I(w_j)}{f_X(w_j)} \right) - d \ln \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{w_j}{2} \right) \right]^2. \tag{4.5}$$

A expressão (4.5) é da forma de uma equação de regressão linear simples dada por

$$y_j = a + bx_j + e_j, \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, g(n)$$

onde  $y_j = \ln I(w_j)$ ;  $a = \ln f_U(0) - c$ ,  $c = \mathbb{E} \left\{ -\ln \left( \frac{I(w_j)}{f_X(w_j)} \right) \right\}$ ;  $b = -d$ ;

$x_j = \ln \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{w_j}{2} \right) \right]^2$  e  $e_j = \ln \left( \frac{I(w_j)}{f_X(w_j)} \right) + c$ , onde  $e_j$  são variáveis aleatórias independentes tendo distribuição aproximada Gumble com média  $-0,577216$  e variância  $\frac{\pi^2}{6}$ .

Através do método de mínimos quadrados da regressão de  $y_1, y_2, \dots, y_{g(n)}$  em  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , o estimador de  $d$ , denotado por  $\hat{d}_p$ , é dado por

$$\hat{d}_p = -\frac{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x}) y_j}{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2},$$

onde  $\bar{x}$  é a média de  $x_j = \ln \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{w_j}{2} \right) \right]^2$ , para  $j = 1, 2, \dots, g(n)$ .

O estimador  $\hat{d}_p$  tem as seguintes propriedades

- i)  $\mathbb{E}(\hat{d}_p) = d$ ,
- ii)  $\operatorname{Var}(\hat{d}_p) = \frac{\pi^2}{6 \sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2}$ .

Uma análise mais detalhada sobre o estimador  $\hat{d}_p$  pode ser encontrada em Reisen (1994).

#### Observações:

- a) Neste trabalho consideramos  $g(n) = n^\alpha$ , onde  $\alpha = 0,5$  (ver Reisen (1994)).
- b) A função periodograma é considerada um estimador não consistente da função densidade espectral (ver Priestley (1981)).

## 4.2 ESTIMAÇÃO DE $d$ USANDO A FUNÇÃO PERIODOGRAMA SUAVIZADO

O método para a estimação do parâmetro de diferenciação  $d$  através da função periodograma suavizado (ver Definição 2.4.3) foi proposto por Reisen (1994). Com o objetivo de melhorar o método da regressão descrito na seção anterior, um estimador consistente e não viciado de  $f_X(w)$  é utilizado no método de estimação no lugar da função periodograma simples. Reisen (1994) sugere substituir a função periodograma simples pela função periodograma suavizado, dado pela Definição 2.4.3, na equação de regressão dada pela expressão (4.5).

Inicialmente, apresentamos alguns resultados teóricos da função periodograma suavizado, importantes na construção do estimador de  $d$ .

Considere a função periodograma suavizado,

$$f_s(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \lambda(k) \hat{\gamma}_X(k) \cos(kw), \text{ para todo } w \in [-\pi, \pi]. \quad (4.6)$$

Podemos escrever a expressão (4.6) em termos da função periodograma na forma da seguinte integral

$$f_s(w) = \int_{-\pi}^{\pi} W_n(\theta) I(w - \theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} W_n(w - \theta) I(\theta) d\theta, \quad (4.7)$$

onde

$$W_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \lambda(k) e^{-ik\theta}$$

é a transformada de Fourier da janela  $\lambda(k)$  definida por (2.10),  $I(\cdot)$  é dado pela expressão (2.7) e a função  $\lambda(k)$  é escolhida de tal forma que a sua transformada de Fourier  $W_n(\theta)$  satisfaça as seguintes condições

- i)  $\int_{-\pi}^{\pi} W_n(\theta) d\theta = 1$ , para todo  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ,
- ii)  $W_n(\theta) = W_n(-\theta)$  e  $W_n(\theta) \geq 0$ , para todo  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ,
- iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} W_n^2(\theta) d\theta = 0$ , para todo  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .

A expressão (4.7) pode ser aproximada pela soma discreta

$$f_s(w) = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} W_n(w - w_k) I(w_k), \text{ para todo } w \in [-\pi, \pi], \quad (4.8)$$

onde  $w_k = \frac{2\pi k}{n}$ , para todo  $k \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}$ .

A função  $f_s(w)$ , com as condições i) - iii) dadas acima, apresenta as seguintes propriedades assintóticas (ver Priestley (1981)):

a)  $\mathbb{E}(f_s(w)) \simeq f_X(w)$ , para todo  $w \in [-\pi, \pi]$ . Portanto,  $f_s(w)$  é um estimador assintoticamente não viciado para  $f_X(w)$ .

b)  $Var(f_s(w)) \simeq (1 + \delta) \left(\frac{2\pi}{n}\right) f_X^2(w) \int_{-\pi}^{\pi} W_n^2(\theta) d\theta$ , ou

$$Var(f_s(w)) \simeq (1 + \delta) f_X^2(w) \frac{1}{n} \sum_{s=-(n-1)}^{n-1} \lambda_n^2(s), \text{ para } w \in [-\pi, \pi],$$

onde

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{para } w = 0, \pm\pi \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, pela condição iii) acima, concluímos que  $f_s(w)$  é um estimador consistente para  $f_X(w)$ , pois  $Var(f_s(w)) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

c)  $Cov(f_s(w_1), f_s(w_2)) = 0$ , para todo  $w_1 \neq w_2$ . Portanto, o estimador da função densidade espectral é assintoticamente não correlacionado em frequências distintas  $w_1, w_2$ .

Podemos reescrever a janela de Parzen definida em (2.10) na forma de parâmetro de escala dada por

$$\lambda(k) = l\left(\frac{k}{\eta}\right).$$

Temos

$$l(u) = \begin{cases} 1 - 6u^2 + 6|u|^3, & \text{se } |u| \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - |u|)^3, & \text{se } \frac{1}{2} < |u| \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde  $l(u)$  é definido como o “Lag Window Generator”, que é uma função real contínua definida no domínio  $-1 < u < 1$ , com  $l(0) = 1$  e  $l(-u) = l(u)$ . O parâmetro  $\eta$ , que aparece na expressão de  $\lambda(k)$  em forma de parâmetro de escala, conhecido como *ponto de truncamento*, é função do tamanho amostral  $n$  e é escolhido ser da forma  $\eta = n^\beta$ , para algum  $\beta \in (0, 1)$  fixo. Observe que  $\frac{\eta}{n} \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$  e  $\eta \rightarrow \infty$ . Logo, a expressão (2.10) pode ser escrita na forma

$$f_s(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\eta}^{\eta} l\left(\frac{k}{\eta}\right) \hat{\gamma}_X(k) \cos(wk), \text{ para } w \in [-\pi, \pi]. \quad (4.9)$$

Neste caso, a expressão para a  $Var(f_s(w))$  é dada por

$$\frac{n}{\eta} Var(f_s(w)) \simeq (1 + \delta) f_X^2(w) \int_{-1}^1 l^2(u) du, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$



e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\eta} \text{Cov}(f_s(w_1), f_s(w_2)) = 0, \quad \text{para } w_1 \neq \pm w_2.$$

A variância assintótica de  $f_s(w)$  é dada por

$$\text{Var}(f_s(w)) \simeq \begin{cases} 0,539285 \frac{\eta}{n} f_X^2(w), & \text{se } w \neq 0, \pi \\ 1,07856 \frac{\eta}{n} f_X^2(w), & \text{se } w = 0, \pi, \end{cases}$$

onde  $\int_{-1}^1 l^2(u) du = 0,539285$ .

As variáveis  $\frac{f_s(w_j)}{f_X(w_j)}$ , que aparecem na expressão (4.11) abaixo, possuem assintoticamente a distribuição Qui-quadrado (ver Priestley (1981)), com grau de liberdade  $\nu = 3,708617 \frac{\eta}{n}$ . A variável aleatória  $\ln \left( \frac{f_s(w_j)}{f_X(w_j)} \right)$  possui distribuição assintótica normal com média zero e variância dada por

$$\text{Var} \left[ \ln \left( \frac{f_s(w_j)}{f_X(w_j)} \right) \right] \simeq \begin{cases} 0,539285 \frac{\eta}{n}, & w_j \neq 0, \pi \\ 1,078856 \frac{\eta}{n}, & w_j = 0, \pi. \end{cases} \quad (4.10)$$

Retornamos a expressão (4.4), substituindo a função periodograma  $I(w_j)$  pela função periodograma suavizado  $f_s(w)$ , obtendo assim

$$\ln f_s(w_j) = \ln f_U(0) + \ln \left( \frac{f_U(w_j)}{f_U(0)} \right) + \ln \left( \frac{f_s(w_j)}{f_X(w_j)} \right) - d \ln [2 \text{sen}(\frac{w_j}{2})]^2. \quad (4.11)$$

Restringindo o domínio de  $j$  para  $j = 1, 2, \dots, g(n)$ , onde  $g(n)$  é análogo ao escolhido anteriormente, podemos reescrever a expressão (4.11) como

$$\ln f_s(w_j) \simeq \ln f_U(0) + \ln \left( \frac{f_s(w_j)}{f_X(w_j)} \right) - d \ln [2 \text{sen}(\frac{w_j}{2})]^2. \quad (4.12)$$

A expressão (4.12) é também uma equação de regressão linear simples da forma

$$y_j = a + bx_j + e_j, \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, g(n),$$

onde  $y_i = \ln f_s(w_j)$ ;  $x_j = \ln [2 \operatorname{sen}(\frac{w_j}{2})]^2$ ;  $e_j = \ln \left( \frac{f_s(w_j)}{f_x(w_j)} \right)$ ;  $b = -d$  e  $a = \ln f_u(0)$ .

O estimador de  $d$ , obtido pelo método da regressão utilizando a função periodograma suavizado com a janela de Parzen é denotado por  $\hat{d}_{sp}$  e é dado por

$$\hat{d}_{sp} = - \frac{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x}) y_j}{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2},$$

onde  $\bar{x}$  é a média dos  $x_j = \ln [2 \operatorname{sen}(\frac{w_j}{2})]^2$  para todo  $j = 1, 2, \dots, g(n)$ .

O estimador  $\hat{d}_{sp}$  tem as seguintes propriedades

i)  $\mathbb{E}(\hat{d}_{sp}) = d$ ,

ii)  $Var(\hat{d}_{sp}) = 0,53928 \frac{\eta}{n \sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2}$ , onde o valor  $0,53928 \frac{\eta}{n}$  é a variância

assintótica de  $e_j = \ln \left( \frac{f_s(w_j)}{f_x(w_j)} \right)$ , para  $w_j \neq 0, \pi$  (ver expressão (4.10)).

### 4.3 ESTIMADOR DA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

O estudo do estimador de máxima verossimilhança (*EMV*) para observações dependentes é vasto e reúne diversos resultados na literatura. Para modelos *ARFIMA*( $p, d, q$ ) o trabalho de Sowell (1991,1992) apresenta resultados para o Estimador de Máxima Verossimilhança Exato e Dahlhaus (1989) apresenta resultados para o Estimador de Máxima Verossimilhança utilizando a aproximação sugerida por Whittle. Fox e Taquq (1986) apresentam condições que permitem que o *EMV* para seqüências com forte dependência seja consistente e tenha distribuição assintótica normal. Tais condições são satisfeitas pelos processos *ARFIMA*( $p, d, q$ ), segundo Dahlhaus (1989).

### 4.3.1 O EMV GAUSSIANO EXATO

Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo estacionário com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Seja  $f_X(w)$  a função densidade espectral caracterizada por um vetor de parâmetros finito-dimensional desconhecido

$$v = (\sigma^2, d, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q).$$

Assumimos que a função densidade espectral de uma família paramétrica de densidades é dada por  $f_X(w) = f_X(w; v)$ , onde  $v \in \Upsilon \subset \mathbb{R}^m$ ,  $m = p + q + 2$  é a dimensão do vetor  $v$  e  $\Upsilon$  é o espaço de parâmetros. Estimativas para o vetor  $v$  são obtidas através de uma série temporal  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Suponha que  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo Gaussiano linear causal e inversível. Então, a função de distribuição conjunta de  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  é dada por

$$h(x; v) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma_n(v)|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} x' [\Sigma_n(v)]^{-1} x}, \quad (4.13)$$

com  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$ , onde  $x'$  denota o vetor transposto do vetor  $x$  e  $\Sigma_n(v)$  é a matriz quadrada  $n \times n$ , cujos elementos são a função de autocovariância, dada por

$$\Sigma_n(v) = [\gamma_X(j-l)]_{j,l=1}^n.$$

O logaritmo da função de verossimilhança é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x; v) &= \ln h(x; v) \\ &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |\Sigma_n(v)| - \frac{1}{2} x' [\Sigma_n(v)]^{-1} x. \end{aligned} \quad (4.14)$$

O Estimador de Máxima Verossimilhança de  $v$  é obtido maximizando a função  $\mathcal{L}(x; v)$  com respeito ao vetor de parâmetros  $v$ . Sob algumas condições de regularidade, que serão analisadas na Seção 4.3.2, este problema de maximização pode ser reformulado em termos da primeira derivada parcial. O Estimador de Máxima Verossimilhança é a solução do sistema de  $m$  equações dadas por

$$\frac{\partial}{\partial \hat{v}_j} \mathcal{L}(x; \hat{v}) = 0, \quad \text{para } j \in \{1, 2, \dots, m\},$$

isto é,

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \hat{v}_j} \ln |\Sigma_n(\hat{v})| - \frac{1}{2} x' \left( \frac{\partial}{\partial \hat{v}_j} [\Sigma_n(\hat{v})]^{-1} \right) x = 0. \quad (4.15)$$

Para obter a solução de (4.3) temos que calcular muitos prováveis valores de  $v$ . Isto pode ser custoso em termos de tempo e de CPU, principalmente se a dimensão de  $v$  for grande ou se o tamanho amostral for grande. Finalmente, o cálculo da inversa da matriz de autocovariâncias é muito difícil de ser obtido. Uma alternativa para resolver as equações de máxima verossimilhança exata, dadas pela expressão (4.15), é maximizar uma aproximação para a função de verossimilhança obtida em (4.14). Para isto analisamos, na próxima seção, a aproximação sugerida por Whittle (ver Beran (1994)).

### 4.3.2 O EMV APROXIMADO DE WHITTLE

Nesta seção apresentamos a aproximação sugerida por Whittle, que é feita em relação aos termos dependentes de  $v$  na expressão da função de verossimilhança dada por (4.14):  $\ln |\Sigma_n(v)|$  e  $x' [\Sigma_n(v)]^{-1} x$ . Analisamos cada um destes termos separadamente.

i) Aproximação para  $\ln |\Sigma_n(v)|$ .

Considere a aproximação

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Sigma_n(v)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f_X(w; v) dw.$$

Esta igualdade pode ser encontrada em Grenander e Szegö (1958). Substituindo  $\ln |\Sigma_n(v)|$  na expressão (4.14) por

$$\frac{n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f_X(w; v) dw,$$

obtemos assim a aproximação para o primeiro termo dependente de  $v$ .

ii) Aproximação para  $x' [\Sigma_n(v)]^{-1} x$ .

Considere a definição a seguir.

**DEFINIÇÃO 4.3.2.1:** Seja  $A(v) = [a(j-l)]_{j,l=1}^n$  uma matriz  $n \times n$  com elementos

$$a(j-l) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f_X(w, v)} e^{iw(j-l)} dw. \quad (4.16)$$

A matriz  $A(v)$  é assintoticamente a inversa da matriz de função de autocovariância  $\Sigma_n(v)$  como mostra o lema a seguir (ver Beran (1994)).

**LEMA 4.3.2.1:** Sejam

$$A_{\infty}(j, l) = a(j-l), \quad j, l \in \mathbb{N} - \{0\}$$

e

$$\Sigma_{\infty}(j, l) = \gamma(j-l), \quad j, l \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

Defina a matriz identidade infinita-dimensional  $I_{\infty}$  por

$$I_{\infty}(j, l) = \delta(j-l), \quad \text{para } j, l \in \mathbb{N} - \{0\},$$

onde  $\delta(s) = 1$ , para  $s = 0$ , e  $\delta(s) = 0$ , caso contrário. Defina também os produtos  $\Sigma_{\infty}A_{\infty}$  e  $A_{\infty}\Sigma_{\infty}$  por

$$[\Sigma_{\infty}A_{\infty}]_{(j,l)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Sigma_{\infty}(j, k)A_{\infty}(k, l)$$

e

$$[A_{\infty}\Sigma_{\infty}]_{(j,l)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{\infty}(j, k)\Sigma_{\infty}(k, l).$$

Então,  $A_{\infty}$  é a matriz inversa da matriz  $\Sigma_{\infty}$  de modo que

$$\Sigma_{\infty}A_{\infty} = A_{\infty}\Sigma_{\infty} = I_{\infty}.$$

Utilizando o Lema 4.3.2.1 acima para a expressão (4.14), temos que a inversa assintótica de  $\Sigma_n(v)$  é  $A_n(v)$ . Obtemos assim, uma aproximação para o segundo termo dependente de  $v$  (ver Beran (1994)).

Podemos então reescrever a expressão (4.14) como

$$\mathcal{L}^*(x; v) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f_X(w; v) dw - \frac{1}{2} x' A_n(v) x.$$

Observe que somente os dois últimos termos dependem de  $v$ . Um estimador aproximado de  $v$  é obtido ao se minimizar a função

$$L(x; v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f_X(w; v) dw + \frac{x' A_n(v) x}{n} \quad (4.17)$$

com respeito a  $v$ . Minimizar a função dada por (4.17) é equivalente a resolver o sistema de equações dado por

$$\frac{\partial}{\partial \hat{v}_j} L(x; \hat{v}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Deste modo, utilizar o método da Máxima Verossimilhança para estimar  $v$ , significa minimizar a expressão (4.17) com relação a  $v$ . Assim são escolhidos os valores de  $v$  que maximizam a expressão (4.14), denominado estimador de Máxima Verossimilhança e denotado por  $\hat{v}$ .

#### Observações:

a) O estimador de Máxima Verossimilhança de  $d$  será denotado por  $\hat{d}_W$ .

b) Fox e Taqu (1986) aplicam o método da máxima verossimilhança com a aproximação sugerida por Whittle (1953) para estimar  $v$  e  $\sigma^2$  maximizando a função

$$h(x; v; \sigma^2) \simeq \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp\left\{ -\frac{Z' A_n(v) Z}{2n\sigma} \right\},$$

onde  $Z'$  é o vetor transposto do vetor  $Z = (X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})$ ,  $\bar{X}$  é a média amostral. Maximizar a função  $h(x; v; \sigma^2)$  é equivalente a escolher  $\hat{v}$  que minimiza

$$\sigma_n^2 = \frac{Z' A_n(v) Z}{n}.$$

E também utilizando o fato que

$$\sigma_n^2(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I_n(w)}{f_X(w; v)} dw,$$

onde

$$I_n(w) = \frac{|\sum_{k=1}^n e^{iwk}(X_k - \bar{X})|^2}{2\pi n}, \quad (4.18)$$

é a função periodograma definida para as observações  $(X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})$ .

c) Uma prova para a consistência do estimador  $\hat{v}$  onde  $\sigma^2$  é a primeira componente do vetor  $v$  pode ser encontrada em Dahlhaus (1989).

A seguir serão dadas as condições de regularidade e teoremas que estabelecem a consistência e a distribuição assintótica normal do estimador de máxima verossimilhança aproximado de Whittle.

### Estrutura para os Teoremas:

Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo estacionário Gaussiano com média  $\mu$  e função densidade espectral  $\sigma^2 f_X(w; v)$ , onde  $\mu, \sigma^2 > 0$  e o vetor  $v \in \Upsilon \subset \mathbb{R}^m$  é formado pelos parâmetros desconhecidos. Assumimos que a função  $f_X(w; v)$  é normalizada, de tal forma que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f_X(w; v) dw = 0, \quad \text{para } v \in \Upsilon.$$

E a função de autocovariância de  $X_t$  é dada por

$$\mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)] = \sigma_0^2 \gamma_X(k; v_0) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwk} f_X(w; v) dw,$$

onde  $\sigma_0^2$  e  $v_0$  são considerados os verdadeiros valores dos parâmetros.

A seguir serão dadas as condições de regularidade sob as quais o estimador aproximado de Whittle é consistente e tem distribuição assintótica normal.

### Condições de Regularidade:

Dizemos que a função densidade espectral  $f_X(w; v)$  satisfaz as condições (1)-(6), a seguir, se existir  $0 < \alpha(v) < 1$  tal que para cada  $\delta > 0$

(1)  $g(v) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln f_X(w; v) dw$  pode ser diferenciada duas vezes sob o sinal da integral.

(2)  $f_X(w; v)$  é contínua para todo  $(w, v)$ ,  $v \neq 0$ . O inverso da função  $f_X(w; v)$ , denotado por  $f_X^{-1}(w; v)$ , isto é,

$$f_X^{-1}(w; v) = \frac{1}{f_X(w; v)},$$

é uma função contínua para todo  $(w; v)$  e

$$f_X(w; v) = O(|w|^{-\alpha(v)-\delta}), \quad \text{quando } w \rightarrow 0.$$

(3)  $\frac{\partial}{\partial v_j} f_X^{-1}(w; v)$  e  $\frac{\partial^2}{\partial v_k \partial v_j} f_X^{-1}(w; v)$  são contínuas para todo  $(w, v)$ .

$$\frac{\partial}{\partial v_j} f_X^{-1}(w; v) = O(|w|^{\alpha(v)-\delta}), \quad \text{quando } w \rightarrow 0, \quad \text{para todo } j = 1, \dots, m$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial v_k \partial v_j} f_X^{-1}(w; v) = O(|w|^{\alpha(v)-\delta}), \quad \text{quando } w \rightarrow 0, \quad \text{para todo } j, k = 1, \dots, m.$$

(4)  $\frac{\partial}{\partial w} f_X(w; v)$  é contínua para todo  $(w, v)$ ,  $w \neq 0$ , e

$$\frac{\partial}{\partial w} f_X(w; v) = O(|w|^{-\alpha(v)-\delta-1}), \quad \text{quando } w \rightarrow 0.$$

(5)  $\frac{\partial^2}{\partial w \partial v_j} f_X^{-1}(w; v)$  é contínua para todo  $(w, v)$ ,  $w \neq 0$ , e

$$\frac{\partial^2}{\partial w \partial v_j} f_X^{-1}(w; v) = O(|w|^{\alpha(v)-\delta-1}), \quad \text{quando } w \rightarrow 0, \quad \text{para todo } j = 1, \dots, m.$$

(6)  $\frac{\partial^3}{\partial^2 w \partial v_j} f_X^{-1}(w; v)$  é contínua para todo  $(w, v)$ ,  $w \neq 0$ , e

$$\frac{\partial^3}{\partial^2 w \partial v_j} f_X^{-1}(w; v) = O(|w|^{\alpha(v)-\delta-1}), \quad \text{quando } w \rightarrow 0, \quad \text{para todo } j = 1, \dots, m.$$

Os teoremas e proposição, enunciados a seguir (ver Fox e Taquq (1986)), estabelecem sob quais condições o estimador aproximado de Whittle é consistente e tem distribuição assintótica normal.



**TEOREMA 4.3.2.1:** Se  $f_X(w; v)$  satisfaz as condições (2) e (4), então com probabilidade 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{v}_n = v_0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\sigma}_n^2 = \sigma_0^2,$$

onde  $v_0$  e  $\sigma_0^2$  são os verdadeiros valores dos parâmetros  $v$  e  $\sigma^2$ , estimados por  $\hat{v}_n$  e  $\hat{\sigma}_n^2$ , respectivamente.

**PROPOSIÇÃO 4.3.2.1:** Sejam  $f_X(w)$  e  $g(w)$  funções reais e simétricas cujos conjuntos de descontinuidades tem medida de Lebesgue nula. Suponha que existem  $\alpha < 1$  e  $\beta < 1$ , tais que  $\alpha + \beta < \frac{1}{2}$  e tal que para cada  $\delta > 0$

$$f_X(w) = O(|w|^{-\alpha(v)-\delta}), \quad \text{quando } w \rightarrow 0,$$

e

$$g(w) = O(|w|^{-\beta-\delta}), \quad \text{quando } w \rightarrow 0.$$

Se  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo estacionário Gaussiano com média zero e função densidade espectral  $f_X(w)$ , então

$$\sqrt{n} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} I_n(w) g(w) dw - \mathbb{E} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} I_n(w) g(w) dw \right] \right\}$$

onde  $I_n(w)$  é a função periodograma dada pela expressão (4.18), tende em distribuição para uma variável aleatória normal com média zero e variância dada por

$$4\pi \int_{-\pi}^{\pi} [f_X(w) g(w)]^2 dw.$$

**TEOREMA 4.3.2.2:** Se as condições (1)-(6) são satisfeitas então o vetor aleatório  $\sqrt{n}(\hat{v}_n - v_0)$  converge em distribuição para um vetor aleatório com distribuição normal com média  $\mu$  e matriz de autocovariância  $4\pi W^{-1}(v_0)$ , onde  $W(v_0)$  é uma matriz de ordem  $m \times m$  cujos elementos são dados por

$$w_{jk}(v) = \int_{-\pi}^{\pi} f_X(w; v) \frac{\partial^2}{\partial v_j \partial v_k} f_X^{-1}(w; v) dw, \quad \text{para todo } j, k \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Demonstração: Denote  $\alpha(v_0)$  por  $\alpha_0$ . Defina  $m_n = \mathbb{E} \frac{\partial}{\partial v} \sigma_n^2(v_0)$  e  $m_{n,j} = \mathbb{E} \frac{\partial}{\partial v_j} \sigma_n^2(v_0)$  como sendo a  $j$ -ésima coordenada de  $m_n$ . Considere a variável aleatória

$$\begin{aligned}
Y_n &= \sum_{j=1}^m c_j \left[ \frac{\partial}{\partial v_j} \sigma_n^2(v_0) - m_{n,j} \right] \\
&= \sum_{j=1}^m c_j \left[ \frac{\partial}{\partial v_j} \frac{Z' A_n(v_0) Z}{n} - m_{n,j} \right] \\
&= \sum_{j=1}^m c_j \left[ \frac{\partial}{\partial v_j} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I_n(w)}{f_X(w; v_0)} dw - m_{n,j} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \sum_{j=1}^m c_j \frac{\partial}{\partial v_j} f_X^{-1}(w; v_0) \right] I_n(w) dw - \sum_{j=1}^m c_j m_{n,j}, \quad (4.19)
\end{aligned}$$

onde  $c_1, c_2, \dots, c_m$  são constantes fixas.

Sob a condição de regularidade (3), a função entre colchetes na expressão (4.19) é  $O(|w|^{\alpha_0 - \delta})$ , quando  $w \rightarrow 0$ , para todo  $\delta > 0$ . Aplicando a Proposição 4.3.2.1 com

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_0, \\
\beta &= -\alpha_0, \\
f_X(w) &= \sigma_0^2 f_X(w; v_0),
\end{aligned}$$

e

$$g(w) = \sum_{j=1}^m c_j \frac{\partial}{\partial v_j} f_X^{-1}(w; v_0),$$

concluimos que  $\sqrt{n} Y_n$  tende em distribuição, quando  $n \rightarrow \infty$ , para uma variável aleatória normal com média zero e variância  $s^2$  dada por

$$\begin{aligned}
s^2 &= \frac{\sigma_0^4}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_X^2(w; v_0) \left[ \sum_{j=1}^m c_j \frac{\partial}{\partial v_j} f_X^{-1}(w; v_0) \right]^2 dw \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m c_j c_k \frac{\sigma_0^4}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_X^2(w; v_0) \left( \frac{\partial}{\partial v_j} f_X^{-1}(w; v_0) \right) \left( \frac{\partial}{\partial v_k} f_X^{-1}(w; v_0) \right) dw.
\end{aligned}$$

Utilizando o Lema 3 de Fox e Taqqu (1986), se valem as condições (1), (2) e (3) então

$$w_{jk}(v_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\partial}{\partial v_j} f_X^{-1}(w; v_0) \right) \left( \frac{\partial}{\partial v_k} f_X^{-1}(w; v_0) \right) f_X^2(w; v_0) dw,$$

para todo  $j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$

Obtemos então

$$s^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m c_j c_k \frac{\sigma_0^4}{\pi} w_{jk}(v_0).$$

Como  $c_1, \dots, c_m$  são constantes arbitrárias, mostramos que

$$\sqrt{n} \left( \frac{\partial}{\partial v} \sigma_n^2(v_0) - m_n \right)$$

tende em distribuição para um vetor aleatório normal com média  $\mu$  e matriz de autocovariâncias  $\frac{\sigma_0^4}{\pi} W(v_0)$ . Segundo o Lema 2 de Fox e Taqqu (1986), se  $\{b_n\}$  é uma seqüência de constantes tendendo a  $\infty$ ,  $\frac{\partial}{\partial v} \sigma_n^2(v)$  é um vetor com  $j$ -ésima componente igual a  $\frac{\partial}{\partial v_j} \sigma_n^2(v)$  e se valem as condições (2) - (4) e  $Y$  é um vetor aleatório, tal que

$$b_n \frac{\partial}{\partial v} \sigma_n^2(v_0) \xrightarrow{D} Y, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

onde  $\xrightarrow{D}$  significa convergência em distribuição, então  $b_n(\hat{v}_n - v_0)$  tende para  $\frac{-2\pi}{\sigma_0^2} W^{-1}(v_0) Y$ , em distribuição, quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, o Teorema 4.3.2.2 segue do Lema 2 de Fox e Taqqu (1986) se mostrarmos que sob as condições do Teorema 4.3.2.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} m_{n,l} = 0, \text{ para todo } l = 1, 2, \dots, m.$$

Para provar isto, defina

$$\mu_{n,l} = \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial v_l} f_X^{-1}(w; v_0) \tilde{I}_n(w) dw \right\},$$

onde  $\tilde{I}_n(w)$  é a função periodograma definida pela expressão (4.18) quando consideramos a média  $\mu$  ao invés de  $\bar{X}$ .

Segue do Lema 8.1 de Fox e Taqqu (1986) que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(m_{n,l} - \mu_{n,l}) = 0$ . Então, é suficiente mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mu_{n,l} = 0, \text{ para todo } l = 1, \dots, m. \quad (4.20)$$

Temos que

$$\mu_{n,l} = \frac{1}{(2\pi)^2 n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n e_{j-k}(v_0) \mathbb{E}(X_j - \mu)(X_k - \mu),$$

onde

$$e_k \equiv e_k(v) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i w k} \frac{\partial}{\partial v_l} f_X^{-1}(w; v) dw.$$

Denote também  $\gamma_X(k) \equiv \gamma_X(k; v_0)$ . Então

$$\mu_{n,l} = \frac{\sigma_0^2}{(2\pi)^2 n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n e_{j-k} \gamma_X(j-k).$$

Note que  $e_k \gamma_X(k)$  é o  $k$ -ésimo coeficiente do Fourier da convolução

$$h(w) = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\partial}{\partial v_l} f_X^{-1}(\lambda; v_0) \right) f_X(\lambda - w; v_0) d\lambda.$$

Note também que

$$\begin{aligned} h(0) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\partial}{\partial v_l} f_X^{-1}(\lambda; v_0) \right) f_X(\lambda; v_0) d\lambda \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial v_l} \ln f_X(\lambda; v_0) d\lambda = 0, \end{aligned}$$

onde a igualdade  $h(0) = 0$  foi obtida utilizando a condição de regularidade (1) junto com a normalização da função densidade espectral  $f_X(w; v)$  assumida na Estrutura para os Teoremas.

Para provar (4.20), observe que pelo Lema 4 de Fox e Taqqu (1986), se valem as condições de regularidade (2) e (4), então para todo  $\delta > 0$

$$\gamma_X(k; v) = O(k^{\alpha(v)-1-\delta}), \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Observe ainda que pelo Lema 5 de Fox e Taqqu (1986), se as condições de regularidade (3), (5) e (6) valem, então para todo  $\delta > 0$  e para todo  $l = 1, 2, \dots, m$ ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{iwk} \frac{\partial}{\partial v_l} f_X^{-1}(w; v) dw = O(k^{-\alpha(v)-1+\delta}), \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Observe também que pelos Lemas 4 e 5 de Fox e Taquq (1986), existe  $\delta \in (0, \frac{1}{2})$  tal que

$$e_k \gamma_X(k) = O(k^{-\frac{1}{2}-2\delta}), \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (4.21)$$

Observe também que  $e_k \gamma_X(k)$  é o  $k$ -ésimo coeficiente de Fourier da função  $h(\cdot)$ , de tal forma que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k \gamma_X(k) = h(0) = 0. \quad (4.22)$$

Temos então

$$\begin{aligned} \frac{(2\pi)^2}{\sigma_0^2} \sqrt{n} \mu_{n,l} &= \sqrt{n} \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n e_{j-k} \gamma_X(j-k)}{n} \\ &= \sqrt{n} \sum_{|k|<n} e_k \gamma_X(k) \left(1 - \frac{k}{n}\right) \\ &= n^{\frac{1}{2}} \sum_{|k|<n} e_k \gamma_X(k) - n^{-\frac{1}{2}} \sum_{|k|<n} k e_k \gamma_X(k). \end{aligned}$$

Pela expressão (4.22), o primeiro termo na igualdade acima é igual a  $-n^{\frac{1}{2}} \sum_{|k|\geq n} e_k \gamma_X(k)$ , o qual é  $O(k^{-\frac{1}{2}-2\delta})$ , por (4.21). O segundo termo também na igualdade acima é  $O(k^{-\frac{1}{2}-2\delta})$  por (4.21). Estes termos tendem a zero, quando  $n \rightarrow \infty$ , estabelecendo a igualdade (4.20). Isto completa a prova do Teorema 4.3.2.2.

**TEOREMA 4.3.2.3:** *Se  $\{X_t - \mu\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo ARFIMA( $p, d, q$ ) com média zero e  $d \in (-0,5; 0,5)$ , então valem os Teoremas 4.3.2.1 e 4.3.2.2.*

As demonstrações dos teoremas, da proposição e dos lemas citados na demonstração do Teorema 4.3.2.2 são encontradas em Fox e Taquq (1986).

## 5 SIMULAÇÕES E CONCLUSÕES

Neste capítulo apresentamos os resultados para os estimadores dos parâmetros do modelo  $ARFIMA(p, d, q)$ , analisados neste trabalho, através de simulações em programa FORTRAN. O objetivo é comparar os estimadores de  $d$ , parâmetro ou grau de diferenciação, usando a função periodograma ( $\hat{d}_p$ ), usando a função periodograma suavizado ( $\hat{d}_{sp}$ ) e utilizando a função de máxima verossimilhança com a aproximação sugerida por Whittle ( $\hat{d}_W$ ).

Para os estimadores  $\hat{d}_p$  e  $\hat{d}_{sp}$  usamos na equação de regressão dadas pelas expressões (4.5) e (4.12), respectivamente, a função  $g(n) = n^\alpha$ , com  $\alpha = 0,5$ . Na função periodograma suavizado consideramos o ponto de truncamento na janela de Parzen (ver expressão (4.9))  $\eta = n^\beta$ , com  $\beta = 0,9$ . Utilizamos os valores  $\alpha = 0,5$  e  $\beta = 0,9$  considerando o trabalho apresentado por Reisen (1994), que analisa os estimadores de  $d$  através da função periodograma e função periodograma suavizado analisando variações de  $\alpha$  e  $\beta$ .

### 5.1 SIMULAÇÕES

As amostras do modelo  $ARFIMA(p, d, q)$  são geradas através do programa FORTRAN, onde utilizamos um algoritmo sugerido por Hosking (1994). Este método é considerado como um método de simulação aproximado para gerar amostras do modelo  $ARFIMA(p, d, q)$ .

O modelo  $ARFIMA(p, d, q)$ , dado pela expressão  $\Phi(\mathcal{B})(1 - \mathcal{B})^d X_t = \Theta(\mathcal{B})\epsilon_t$ , é reescrito na forma

$$\Phi(\mathcal{B})X_t = \Theta(\mathcal{B})Y_t, \text{ onde } (1 - \mathcal{B})^d Y_t = \epsilon_t.$$

Primeiramente geramos amostras de tamanho  $n$  do processo ruído branco  $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  Gaussiano com variância  $\sigma_\epsilon^2 = 1$ , através de rotinas do IMSL (FORTRAN) e, a seguir, amostras do processo  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , ou seja, amostras do modelo  $ARFIMA(0, d, 0)$  através do algoritmo de Hosking (ver Hosking (1984)). Uma vez gerada as amostras do processo  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , geramos as amostras de um processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  que segue o modelo  $ARFIMA(p, d, q)$ , através das equações recursivas

$$X_t = \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j} - \sum_{j=1}^q \theta_j Y_{t-j} + Y_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Tendo sido gerada a série temporal  $\{X_t\}_{t=1}^n$ , estimamos  $d$  através do método baseado na função periodograma (ver expressão (4.5)), do método baseado na função periodograma suavizado (ver expressão (4.12)) e método de máxima verossimilhança aproximado de Whittle (ver expressão (4.17)).

Para o estimador  $\hat{d}_W$  utilizamos a expressão

$$\tilde{L}(x; v) = \frac{2}{n} \sum_j^{n^*} \ln f_X(w_j; v) + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n^*} \frac{I(w_j)}{f_X(w_j; v)}, \quad (5.1)$$

onde as frequências de Fourier  $w_j = \frac{2\pi j}{n}$  são calculadas para  $j = 1, 2, \dots, n^*$  e  $n^*$  denota a parte inteira de  $\frac{n-1}{2}$ , isto é,  $n^* = \left[ \frac{n-1}{2} \right]$ .

A expressão (5.1) aproxima a expressão dada por (4.17) (ver Beran (1994)).

No programa em linguagem FORTRAN consideramos três variações para obter o EMV aproximado de Whittle:

1º) A função periodograma é calculada através de rotina em linguagem FORTRAN elaborada por Reisen (1998). O estimador obtido é denotado por  $\hat{d}_{W_1}$ .

2º) A função periodograma é calculada utilizando a subrotina PFFT do Microsoft IMSL Mathematical and Statistical Libraries. O estimador obtido é denotado por  $\hat{d}_{W_2}$ .

3º) A função periodograma é suavizada através da janela de Parzen dada pela expressão (2.10). O estimador obtido é denotado por  $\hat{d}_{W_3}$ .

Observamos, durante as simulações feitas, que a subrotina BCONF, que minimiza a função de verossimilhança aproximada de Whittle, para determinadas séries geradas, não conseguia encontrar o mínimo da função. Desta maneira, para encontrar o mínimo da função de verossimilhança, para um conjunto de séries geradas para um mesmo modelo, o programa é rodado diversas vezes até encontrar um conjunto de séries geradas no qual a subrotina BCONF consegue obter um mínimo para a função de verossimilhança. Este problema se mostrou mais evidente quando o tamanho da série é pequeno. A medida que aumentamos o tamanho da série a subrotina BCONF não encontra problemas na minimização. Para obter uma solução para este problema plotamos a função de máxima verossimilhança aproximada de Whittle para analisar o seu comportamento (ver apêndice A) e verificamos que quanto maior o tamanho da série melhor o comportamento da função de máxima verossimilhança aproximada de Whittle tornando possível à subrotina BCONF minimizar a função.

Os resultados das simulações são mostrados em tabelas usando as seguintes notações:

- $n$  indica o tamanho amostral, ou seja, o número de termos da série temporal;

- RE indica o número de replicações;

- $i$  indica a variação dos cinco estimadores analisados: estimador de  $d$  utilizando a função periodograma ( $i = p$ ); estimador de  $d$  utilizando a função periodograma suavizado ( $i = sp$ ); EMV aproximado de Whittle quando a função periodograma é calculada através de rotina elaborada por Reisen (1998) ( $i = W_1$ ); EMV aproximado de Whittle quando o cálculo do periodograma é feito pela rotina do IMSL ( $i = W_2$ ) e EMV aproximado de Whittle quando a função periodograma é suavizada ( $i = W_3$ );

- $\hat{d}_i$  indicam os cinco estimadores para o parâmetro  $d$ ;

- $\overline{\hat{b}(\hat{d}_i)}$  é a média dos vícios estimados dos estimadores  $\hat{d}_i$  das replicações

e

$$\overline{\hat{b}(\hat{d}_i)} = \frac{\sum_{j=1}^n (\hat{d}_{ij} - d_i)}{n};$$

- $\overline{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$  é a média das variâncias estimadas dos estimadores  $\hat{d}_i$  das replicações

$$\overline{\widehat{var}(\hat{d}_i)} = \frac{\sum_{j=1}^n (\hat{d}_{ij} - d_i)^2}{n};$$

- $\overline{\widehat{emq}(\hat{d}_i)}$  é a média dos erros quadráticos médios estimados dos estimadores  $\hat{d}_i$  das replicações e

$$\overline{\widehat{emq}(\hat{d}_i)} = \overline{\widehat{var}(\hat{d}_i)} + \left[ \overline{\hat{b}(\hat{d}_i)} \right]^2.$$

### Observação:

Para as simulações consideramos somente os modelos  $ARFIMA(1, d, 0)$  e  $ARFIMA(0, d, 1)$ , quando  $d \in (0, 0; 0, 5)$ . Quando o modelo é um  $ARFIMA(1, d, 0)$ , consideramos  $d \in \{0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4\}$  e os valores de  $\phi_1 \in \{-0, 9; -0, 8; -0, 6; -0, 5; -0, 3; -0, 2; -0, 1; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 5; 0, 6; 0, 8; 0, 9\}$  para o coeficiente de primeira ordem no polinômio  $\Phi(\mathcal{B})$  definido pela expressão (3.2). Quando o modelo é um  $ARFIMA(0, d, 1)$  consideramos  $d \in \{0, 1; 0, 2\}$  e os valores de  $\theta_1 \in \{-0, 9; -0, 8; -0, 6; -0, 5; -0, 3; -0, 2; -0, 1; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 5; 0, 6; 0, 8; 0, 9\}$  para o coeficiente de primeira ordem no polinômio  $\Theta(\mathcal{B})$  definido pela expressão (3.3).



## 5.2 RESULTADOS PARA O MODELO $ARFIMA(1, d, 0)$

Simulamos amostras do modelo  $ARFIMA(1; d; 0)$  onde  $d = 0,1; 0,2; 0,3$  e  $0,4$  e os valores  $\phi_1 \in \{-0,9; -0,8; -0,6; -0,5; -0,3; -0,2; -0,1; 0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 0,6; 0,8; 0,9\}$  para o coeficiente de primeira ordem no polinômio  $\Phi(B)$  definido pela expressão (3.2), com o objetivo de comparar os estimadores  $\hat{d}_i$  para diferentes valores de  $d$  e  $\phi_1$ .

**Tabela 5.2.1:** Estimadores  $\hat{d}_i$ , com seu respectivo vício, variância e erro quadrático médio, para o modelo  $ARFIMA(1; 0, 1; 0)$ , quando  $\phi_1 \in \{-0,9; -0,8; -0,6; -0,5; -0,3; -0,2; -0,1\}$ ,  $RE = 100$  e  $n = 300$ .

$\phi_1$	$i$	$p$	$sp$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
-0.9	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0392	-0.0783	0.0008	-0.0134	-0.0212
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0522	0.0276	0.0035	0.0031	0.0029
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0532	0.0334	0.0034	0.0032	0.0034
-0.8	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0341	-0.0499	0.0062	-0.0054	-0.0113
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0389	0.0247	0.0035	0.0029	0.0027
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0397	0.0334	0.0035	0.0030	0.0028
-0.6	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0217	-0.0653	-0.0146	-0.0144	-0.0191
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0397	0.0248	0.0048	0.0048	0.0025
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0397	0.0288	0.0049	0.0050	0.0049
-0.5	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0077	-0.0615	-0.0062	-0.0059	-0.0129
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0354	0.0187	0.0035	0.0035	0.0036
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0351	0.0223	0.0035	0.0035	0.0037
-0.3	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0254	-0.0237	-0.0094	-0.0093	-0.0187
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0586	0.0322	0.0056	0.0056	0.0057
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0587	0.0324	0.0056	0.0056	0.0060
-0.2	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0290	-0.0575	-0.0114	-0.0113	-0.0222
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0611	0.0296	0.0068	0.0068	0.0067
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0613	0.0327	0.0069	0.0069	0.0072
-0.1	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0290	-0.0614	-0.0101	-0.0099	-0.0192
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0573	0.0261	0.0076	0.0076	0.0073
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0576	0.0297	0.0077	0.0077	0.0077

Analisando a Tabela 5.2.1 verificamos que tanto a variância como o erro quadrático médio dos estimadores  $\hat{d}_{W_1}$ ,  $\hat{d}_{W_2}$  e  $\hat{d}_{W_3}$  são menores do que os estimadores  $\hat{d}_p$  e  $\hat{d}_{sp}$ . Observe também que  $\hat{d}_p$  possui a maior variância e o maior erro quadrático médio. Observamos que a variância e o erro quadrático médio dos estimadores  $\hat{d}_{W_1}$ ,  $\hat{d}_{W_2}$  e  $\hat{d}_{W_3}$  aumentam quando  $\phi_1$  cresce.

**Tabela 5.2.2:** Estimadores  $\hat{d}_i$ , com seu respectivo vício, variância e erro quadrático médio, para o modelo  $ARFIMA(1; 0, 1; 0)$ , quando  $\phi_1 \in \{0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 5; 0, 6; 0, 8; 0, 9\}$ ,  $RE = 100$  e  $n = 300$ .

$\phi_1$	i	p	sp	$W_1$	$W_2$	$W_3$
0.1	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0044	-0.0439	-0.0280	-0.0276	-0.0394
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0528	0.0275	0.0224	0.0225	0.0181
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0528	0.0291	0.0230	0.0231	0.0194
0.2	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0241	-0.0341	-0.0255	-0.0234	-0.0305
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0385	0.0264	0.0385	0.0368	0.0290
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0387	0.0273	0.0387	0.0373	0.0297
0.3	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0086	-0.0390	0.0082	0.0143	-0.0253
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0331	0.0214	0.0532	0.0580	0.0548
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0331	0.0227	0.0527	0.0576	0.0549
0.5	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0377	-0.0138	-0.0372	-0.0273	-0.0557
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0435	0.0258	0.0321	0.0303	0.0303
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0445	0.0258	0.0329	0.0308	0.0331
0.6	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.1226	0.0622	0.1581	0.1813	0.1686
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0324	0.0206	0.0503	0.0548	0.0564
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0471	0.0243	0.0748	0.0872	0.0843
0.8	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.1900	0.1226	0.1961	0.2019	0.1582
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0534	0.0267	0.0630	0.0603	0.0535
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.1192	0.0625	0.1008	0.1005	0.0781
0.9	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.4675	0.4282	0.2840	0.2709	0.2762
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0428	0.0288	0.0266	0.0298	0.0276
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.2609	0.2119	0.1070	0.1030	0.1037

Para a Tabela 5.2.2 o desempenho dos estimadores  $\hat{d}_{W_1}$ ,  $\hat{d}_{W_2}$  e  $\hat{d}_{W_3}$  piora a medida que  $\phi_1$  cresce e isto também observa-se para  $\hat{d}_p$  e  $\hat{d}_{sp}$ . O estimador que

apresenta menor variância e menor erro quadrático médio é  $\hat{d}_{sp}$ , com exceção do modelo quando  $\phi_1 = 0.9$ .

O comportamento dos estimadores  $\hat{d}_i$  para as Tabelas 5.2.1 e 5.2.2 se mantém o mesmo que para as Tabelas de 5.2.3 a 5.2.5.

**Tabela 5.2.3:** Estimadores  $\hat{d}_i$ , com seu respectivo vício, variância e erro quadrático médio, para o modelo  $ARFIMA(1; 0, 2; 0)$ , quando  $\phi_1 \in \{-0, 9; -0, 8; -0, 6; -0, 5; -0, 3; -0, 2; -0, 1\}$ ,  $RE = 100$  e  $n = 300$ .

$\phi_1$	$i$	$p$	$sp$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
-0.9	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0011	-0.0551	0.0070	-0.0042	-0.0123
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0371	0.0253	0.0035	0.0034	0.0032
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0371	0.0253	0.0036	0.0033	0.0034
-0.8	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0152	-0.0524	-0.0047	-0.0089	-0.0192
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0346	0.0203	0.0037	0.0029	0.0033
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0348	0.0228	0.0036	0.0030	0.0036
-0.6	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0518	-0.0967	-0.0034	-0.0033	-0.0122
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0469	0.0287	0.0050	0.0053	0.0043
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0491	0.0377	0.0049	0.0050	0.0044
-0.5	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0113	-0.0727	-0.0178	-0.0178	-0.0247
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0673	0.0311	0.0044	0.0044	0.0041
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0674	0.0361	0.0047	0.0047	0.0047
-0.3	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0283	-0.0377	-0.0129	-0.0128	-0.0236
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0475	0.0277	0.0052	0.0052	0.0053
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0483	0.0288	0.0054	0.0054	0.0058
-0.2	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0115	-0.0408	-0.0154	-0.0121	-0.0226
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0454	0.0271	0.0066	0.0081	0.0074
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0526	0.0290	0.0068	0.0082	0.0079
-0.1	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0389	-0.0290	-0.0067	-0.0064	-0.0173
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0516	0.0285	0.0085	0.0084	0.0087
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0526	0.0290	0.0084	0.0085	0.0089

**Tabela 5.2.4:** Estimadores  $\hat{d}_i$ , com seu respectivo vício, variância e erro quadrático médio, para o modelo  $ARFIMA(1; 0, 2; 0)$ , quando  $\phi_1 \in \{0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 5; 0, 6; 0, 8; 0, 9\}$ ,  $RE = 100$  e  $n = 300$ .

$\phi_1$	i	p	sp	$W_1$	$W_2$	$W_3$
0.1	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0473	-0.0321	0.0128	-0.0012	-0.0176
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0386	0.0227	0.0182	0.0138	0.0148
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0405	0.0235	0.0183	0.0136	0.0150
0.2	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0151	-0.0318	0.0382	0.0391	0.0112
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0402	0.0244	0.0394	0.0412	0.0294
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0404	0.0252	0.0404	0.0424	0.0293
0.3	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0330	-0.0217	0.0951	0.0936	0.0743
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0353	0.0229	0.0422	0.0352	0.0427
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0361	0.0231	0.0508	0.0436	0.0535
0.5	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0759	0.0241	-0.0086	-0.0132	-0.0355
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0341	0.0257	0.0250	0.0258	0.0248
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0395	0.0260	0.0249	0.0258	0.0258
0.6	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0974	0.0438	0.0982	0.1465	0.1379
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0472	0.0266	0.0361	0.0392	0.0341
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0562	0.0283	0.0454	0.0541	0.0528
0.8	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.2517	0.1952	0.1671	0.1869	0.1554
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0533	0.0304	0.0282	0.0249	0.0292
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.1161	0.0682	0.0558	0.0597	0.0531
0.9	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.5085	0.4288	0.2114	0.1363	0.0853
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0364	0.0237	0.1109	0.0722	0.0437
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.2946	0.2073	0.1527	0.0901	0.0506

**Tabela 5.2.5:** Estimadores  $\hat{d}_i$ , com seu respectivo vício, variância e erro quadrático médio, para o modelo  $ARFIMA(1; 0, 3; 0)$ , quando  $\phi_1 \in \{-0, 9; -0, 8; -0, 6; -0, 5; -0, 3; -0, 2; -0, 1\}$ ,  $RE = 100$  e  $n = 300$ .

$\phi_1$	i	p	sp	$W_1$	$W_2$	$W_3$
-0.9	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0198	-0.0618	0.0103	-0.0091	-0.0147
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0596	0.0345	0.0032	0.0029	0.0028
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0598	0.0379	0.0034	0.0030	0.0030
-0.8	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0082	-0.0491	0.0400	0.0389	0.0313
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0426	0.0304	0.0115	0.0159	0.0178
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0426	0.0325	0.0130	0.0130	0.0127
-0.6	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0041	-0.0527	0.0242	0.0135	0.0135
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0346	0.0216	0.0082	0.0083	0.0083
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0346	0.0241	0.0087	0.0091	0.0085
-0.5	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0037	-0.0528	0.0090	0.0052	0.0078
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0454	0.0287	0.0073	0.0061	0.0085
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0454	0.0312	0.0076	0.0062	0.0085
-0.3	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0257	-0.0346	0.0078	0.0081	-0.0026
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0433	0.0281	0.0044	0.0044	0.0047
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0435	0.0291	0.0044	0.0045	0.0047
-0.2	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0408	-0.0175	0.0209	0.0199	0.0070
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0444	0.0314	0.0066	0.0063	0.0062
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0462	0.0314	0.0069	0.0066	0.0062
-0.1	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0382	-0.0381	0.0146	0.0148	0.0021
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0223	0.0071	0.0071	0.0071	0.0079
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0345	0.0235	0.0072	0.0072	0.0077

Para as Tabelas 5.2.3 a 5.2.5, o comportamento dos estimadores  $\hat{d}_i$  é análogo ao das tabelas anteriores, ou seja, a medida que  $\phi_1$  cresce a variância e o erro quadrático médio aumentam. Os estimadores  $\hat{d}_{W_1}$ ,  $\hat{d}_{W_2}$  e  $\hat{d}_{W_3}$  apresentam menor variância e menor erro quadrático médio do que os estimadores  $\hat{d}_p$  e  $\hat{d}_{sp}$ , quando  $\phi_1$  é negativo.

**Tabela 5.2.6:** Estimadores  $\hat{d}_i$ , com seu respectivo vício, variância e erro quadrático médio, para o modelo  $ARFIMA(1; 0, 3; 0)$ , quando  $\phi_1 \in \{0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 5; 0, 6; 0, 8; 0, 9\}$ ,  $RE = 100$  e  $n = 300$ .

$\phi_1$	i	p	sp	$W_1$	$W_2$	$W_3$
0.1	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0001	-0.0492	0.0426	0.0625	0.0178
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0369	0.0214	0.0176	0.0175	0.0177
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0369	0.0236	0.0193	0.0212	0.0179
0.2	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0267	-0.0899	0.0610	0.0448	0.0055
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0540	0.0304	0.0253	0.0251	0.0375
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0542	0.0382	0.0288	0.0269	0.0372
0.3	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0048	-0.0670	-0.0357	-0.0320	-0.0572
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0361	0.0237	0.0320	0.0303	0.0316
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0361	0.0279	0.0330	0.0311	0.0346
0.5	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0524	-0.0113	0.0552	0.0723	0.0423
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0533	0.0350	0.0260	0.0234	0.0322
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0555	0.0348	0.0288	0.0284	0.0337
0.6	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0754	0.0070	0.0221	0.0234	-0.0085
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0344	0.0219	0.0329	0.0335	0.0303
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0397	0.0217	0.0331	0.0338	0.0302
0.8	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.2569	0.1963	0.1060	0.1159	0.0961
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0477	0.0283	0.0159	0.0139	0.0140
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.1132	0.0665	0.0270	0.0272	0.0231
0.9	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.5360	0.4526	0.0872	0.0861	0.0901
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0550	0.0319	0.0165	0.0176	0.0153
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.3413	0.2364	0.0239	0.0248	0.0234

Para a Tabela 5.2.6, podemos verificar uma alteração em relação ao comportamento dos estimadores  $\hat{d}_i$  quando  $\phi_1 \in \{0.1, 0.2, 0.5, 0.8\}$ . Para estes valores de  $\phi_1$  os estimadores  $\hat{d}_{W_1}$ ,  $\hat{d}_{W_2}$  e  $\hat{d}_{W_3}$  tiveram a sua variância e seu erro quadrático médio diminuídos. A partir da Tabela 5.2.8 observamos este comportamento dos estimadores  $\hat{d}_{W_1}$ ,  $\hat{d}_{W_2}$  e  $\hat{d}_{W_3}$  para todos os valores de  $\phi_1$ .

**Tabela 5.2.7:** Estimadores  $\hat{d}_i$ , com seu respectivo vício, variância e erro quadrático médio, para o modelo  $ARFIMA(1; 0, 4; 0)$ , quando  $\phi_1 \in \{-0, 9; -0, 8; -0, 6; -0, 5; -0, 3; -0, 2; -0, 1\}$ ,  $RE = 100$  e  $n = 300$ .

$\phi_1$	i	p	sp	$W_1$	$W_2$	$W_3$
-0.9	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0121	-0.0432	0.0326	-0.0433	-0.0505
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0435	0.0283	0.0020	0.0027	0.0024
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0436	0.0299	0.0031	0.0046	0.0050
-0.8	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0085	-0.0360	0.0484	-0.0027	-0.0044
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0382	0.0247	0.0045	0.0031	0.0024
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0382	0.0257	0.0068	0.0030	0.0024
-0.6	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0192	-0.0619	0.0386	0.0312	0.0266
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0373	0.0276	0.0054	0.0038	0.0036
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0373	0.0312	0.0068	0.0048	0.0043
-0.5	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0166	-0.0564	0.0248	0.0264	0.0206
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0434	0.0290	0.0045	0.0041	0.0042
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0435	0.0319	0.0050	0.0048	0.0046
-0.3	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0054	-0.0742	0.0206	0.0209	0.0130
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0487	0.0349	0.0074	0.0074	0.0080
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0487	0.0402	0.0078	0.0078	0.0082
-0.2	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0557	-0.0246	0.0338	0.0339	0.0262
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0473	0.0329	0.0055	0.0054	0.0057
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0499	0.0298	0.0066	0.0066	0.0063
-0.1	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0171	-0.0505	0.0277	0.0184	0.0146
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0423	0.0231	0.0072	0.0070	0.0074
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0425	0.0255	0.0079	0.0073	0.0075

**Tabela 5.2.8:** Estimadores  $\hat{d}_i$ , com seu respectivo vício, variância e erro quadrático médio, para o modelo  $ARFIMA(1; 0, 4; 0)$ , quando  $\phi_1 \in \{0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 5; 0, 6; 0, 8; 0, 9\}$ ,  $RE = 100$  e  $n = 300$ .

$\phi_1$	i	p	sp	$W_1$	$W_2$	$W_3$
0.1	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0251	-0.0412	0.0562	0.0409	0.0506
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0507	0.0290	0.0035	0.0131	0.0036
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0508	0.0304	0.0065	0.0147	0.0062
0.2	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0145	-0.0489	0.0453	0.0429	0.0461
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0535	0.0352	0.0132	0.0166	0.0133
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0536	0.0372	0.0151	0.0183	0.0154
0.3	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0252	-0.0367	0.0549	0.0451	0.0450
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0371	0.0187	0.0055	0.0066	0.0054
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0374	0.0198	0.0084	0.0085	0.0075
0.5	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0672	-0.0075	0.0487	0.0491	0.0288
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0482	0.0296	0.0074	0.0070	0.0092
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0522	0.0294	0.0097	0.0094	0.0100
0.6	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0911	0.0210	0.0642	0.0697	0.0579
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0359	0.0294	0.0059	0.0046	0.0072
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0438	0.0251	0.0096	0.0095	0.0105
0.8	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.2221	0.1694	0.0511	0.0441	0.0394
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0499	0.0294	0.0080	0.0086	0.0085
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0988	0.0578	0.0105	0.0105	0.0100
0.9	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.4823	0.4255	0.0222	0.0174	0.0125
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0413	0.0250	0.0128	0.0199	0.0093
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.2736	0.2058	0.0132	0.0122	0.0094



### 5.3 RESULTADOS PARA O MODELO $ARFIMA(0, d, 1)$

Para o modelo  $ARFIMA(0, d, 1)$  simulamos amostras onde  $d$  assume somente os valores 0,1 e 0,2. As Tabelas, a seguir, apresentam resultados para o modelo  $ARFIMA(0, d, 1)$  quando  $d \in \{0,1; 0,2\}$  e quando  $\theta_1$  o coeficiente de primeira ordem no polinômio  $\Theta(\mathcal{B})$  definido pela expressão (3.3) assume os valores dados pelo conjunto  $\{-0,9; -0,8; -0,6; -0,5; -0,3; -0,2; -0,1; 0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 0,6; 0,8; 0,9\}$ .

**Tabela 5.3.1:** Estimadores  $\hat{d}_i$ , com seu respectivo vício, variância e erro quadrático médio, para o modelo  $ARFIMA(0; 0, 1; 1)$ , quando  $\theta_1 \in \{-0,9; -0,8; -0,6; -0,5; -0,3; -0,2; -0,1\}$ ,  $RE = 100$  e  $n = 300$ .

$\theta_1$	$i$	$p$	$sp$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
-0.9	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0084	-0.0284	-0.0162	-0.0102	-0.0154
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0439	0.0231	0.0052	0.0041	0.0041
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0439	0.0236	0.0054	0.0042	0.0043
-0.8	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0188	-0.0699	-0.0067	-0.0057	-0.0125
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0337	0.0233	0.0032	0.0031	0.0032
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0337	0.0280	0.0032	0.0032	0.0034
-0.6	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0040	-0.0303	-0.0038	-0.0037	-0.0123
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0414	0.0221	0.0031	0.0031	0.0031
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0414	0.0228	0.0031	0.0031	0.0033
-0.5	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0029	-0.0399	0.0045	0.0046	-0.0021
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0533	0.0231	0.0039	0.0039	0.0038
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0533	0.0245	0.0039	0.0039	0.0038
-0.3	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0064	-0.0355	0.0060	0.0061	-0.0032
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0514	0.0287	0.0037	0.0037	0.0037
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0514	0.0297	0.0038	0.0038	0.0037
-0.2	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0015	-0.0443	0.0057	0.0058	-0.0045
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0436	0.0261	0.0055	0.0055	0.0053
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0436	0.0278	0.0054	0.0055	0.0053
-0.1	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0146	-0.0517	-0.0163	-0.0162	-0.0285
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}$	0.0496	0.0226	0.0048	0.0048	0.0047
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0498	0.0251	0.0050	0.0051	0.0055

Observamos que, na tabela acima, o comportamento dos estimadores é praticamente o mesmo dos apresentados na Tabela 5.2.1 para o modelo  $ARFIMA(1; 0, 1; 0)$ . Os estimadores  $\hat{d}_{W_1}$ ,  $\hat{d}_{W_2}$  e  $\hat{d}_{W_3}$  apresentam menor variância e menor erro quadrático médio. O mesmo ocorre para a Tabela 5.3.3.

**Tabela 5.3.2:** Estimadores  $\hat{d}_i$ , com seu respectivo vício, variância e erro quadrático médio, para o modelo  $ARFIMA(0; 0, 1; 1)$ , quando  $\theta_1 \in \{0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 5; 0, 6; 0, 8; 0, 9\}$ ,  $RE = 100$  e  $n = 300$ .

$\theta_1$	i	$p$	$sp$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
0.1	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0249	-0.0527	0.0099	0.0103	-0.0045
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0466	0.0277	0.0139	0.0140	0.0127
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0468	0.0302	0.0138	0.0140	0.0126
0.2	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0168	-0.0441	0.0060	0.0065	-0.0256
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0466	0.0252	0.0223	0.0222	0.0114
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0468	0.0269	0.0221	0.0221	0.0120
0.3	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0199	-0.0642	0.0032	0.0036	-0.0222
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0426	0.0286	0.0238	0.0238	0.0200
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0426	0.0325	0.0235	0.0236	0.0203
0.5	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0626	-0.0998	-0.0026	-0.0020	-0.0425
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0606	0.0369	0.0402	0.0404	0.0296
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0639	0.0464	0.0398	0.0400	0.0311
0.6	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0690	-0.1233	-0.0408	-0.0404	-0.0751
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0386	0.0200	0.0253	0.0253	0.0283
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0430	0.0351	0.0267	0.0267	0.0283
0.8	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.2928	-0.3023	-0.3819	-0.4293	-0.3884
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0673	0.0318	0.0711	0.0543	0.0571
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.1523	0.1229	0.2163	0.2381	0.2074
0.9	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.4745	-0.4975	-0.4735	-0.4733	-0.4897
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0459	0.0195	0.0864	0.0864	0.0708
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.2706	0.2667	0.3099	0.3097	0.3101

Em contraste com as estimativas apresentadas na Tabela 5.2.2 onde todos os estimadores apresentam valores para  $\hat{d}_i$  muito acima de 0,1 quando  $\phi_1 \in \{0, 8; 0, 9\}$ , observamos que na Tabela 5.3.2 as estimativas para o parâmetro  $d$  são

inferiores a 0,1, atingindo valores negativos com variância e erro quadrático médio elevados. O outro caso analisado, quando  $d=0.2$ , como pode ser observado na Tabela 5.3.4, apresenta este mesmo comportamento.

**Tabela 5.3.3:** Estimadores  $\hat{d}_i$ , com seu respectivo vício, variância e erro quadrático médio, para o modelo  $ARFIMA(0; 0, 2; 1)$ , quando  $\theta_1 \in \{-0, 9; -0, 8; -0, 6; -0, 5; -0, 3; -0, 2; -0, 1\}$ ,  $RE = 100$  e  $n = 300$ .

$\theta_1$	$i$	$p$	$sp$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
-0.9	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0180	-0.0653	-0.0098	-0.0089	-0.0029
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0303	0.0182	0.0029	0.0022	0.0024
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0303	0.0223	0.0030	0.0023	0.0023
-0.8	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0056	-0.0479	0.0028	0.0002	-0.0051
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0425	0.0275	0.0032	0.0032	0.0030
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0425	0.0295	0.0032	0.0033	0.0030
-0.6	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0249	-0.0497	0.0015	0.0016	-0.0073
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0365	0.0251	0.0041	0.0041	0.0042
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0386	0.0265	0.0041	0.0041	0.0043
-0.5	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0030	-0.0597	-0.0037	-0.0036	-0.0116
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0407	0.0217	0.0044	0.0045	0.0043
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0407	0.0251	0.0044	0.0044	0.0044
-0.3	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0482	-0.0232	0.0062	0.0063	-0.0030
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0382	0.0168	0.0051	0.0051	0.0051
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0402	0.0171	0.0051	0.0051	0.0051
-0.2	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0095	-0.0494	-0.0071	-0.0070	-0.0186
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0351	0.0239	0.0056	0.0056	0.0053
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0351	0.0261	0.0056	0.0056	0.0056
-0.1	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0099	-0.0567	0.0026	0.0029	-0.0113
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0430	0.0213	0.0086	0.0086	0.0079
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0430	0.0243	0.0085	0.0085	0.0086

**Tabela 5.3.4:** Estimadores  $\hat{d}_i$ , com seu respectivo vício, variância e erro quadrático médio, para o modelo  $ARFIMA(0; 0, 2; 1)$ , quando  $\theta_1 \in \{0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 5; 0, 6; 0, 8; 0, 9\}$ ,  $RE = 100$  e  $n = 300$ .

$\theta_1$	$i$	$p$	$sp$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
0.1	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0099	-0.0567	0.0026	0.0029	-0.0113
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0430	0.0213	0.0086	0.0086	0.0079
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0430	0.0243	0.0085	0.0085	0.0080
0.2	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0117	-0.0499	0.0001	0.0006	-0.0207
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0340	0.0235	0.0147	0.0148	0.0130
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0341	0.0257	0.0146	0.0147	0.0133
0.3	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0244	-0.1044	-0.0131	-0.0128	-0.0368
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0373	0.0215	0.0161	0.0162	0.0131
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0375	0.0320	0.0161	0.0161	0.0144
0.5	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0234	-0.0728	0.0109	0.0118	-0.0224
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0434	0.0255	0.0285	0.0288	0.0269
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0435	0.0314	0.0284	0.0287	0.0272
0.6	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.1085	-0.1431	-0.0425	-0.0416	-0.0775
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0511	0.0291	0.0381	0.0381	0.0351
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0624	0.0493	0.0396	0.0395	0.0407
0.8	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.2347	-0.2761	-0.2071	-0.2070	-0.2166
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0511	0.0229	0.0381	0.0381	0.0351
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.1066	0.1061	0.1028	0.1027	0.1036
0.9	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.4814	-0.5289	-0.5036	-0.5035	-0.5294
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0449	0.0229	0.0856	0.0864	0.0707
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.3024	0.2790	0.3383	0.3384	0.3504

## 5.4 RESULTADOS PARA O MODELO $ARFIMA(1, d, 0)$ QUANDO AUMENTAMOS O TAMANHO DA SÉRIE TEMPORAL

As Tabelas 5.4.1 a 5.4.8 apresentam resultados para o modelo  $ARFIMA(1, d, 0)$  quando aumentamos o tamanho da série temporal para  $n = 500$ , com o objetivo de comparar o comportamento dos estimadores quando aumentamos o tamanho amostral.

**Tabela 5.4.1:** Estimadores  $\hat{d}_i$ , com seu respectivo vício, variância e erro quadrático médio, para o modelo  $ARFIMA(1; 0, 1; 0)$ , quando  $\phi_1 \in \{-0, 9; -0, 8; -0, 6; -0, 5; -0, 3; -0, 2; -0, 1\}$ ,  $RE = 100$  e  $n = 500$ .

$\phi_1$	$i$	$p$	$sp$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
-0.9	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\hat{d}_i}$	-0.0074	-0.0307	0.0143	0.0012	-0.0037
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\hat{d}_i^2}$	0.0300	0.0206	0.0017	0.0016	0.0015
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\hat{d}_i^2}$	0.0300	0.0213	0.0019	0.0016	0.0015
-0.8	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\hat{d}_i}$	-0.0184	-0.0638	0.0101	-0.0041	-0.0073
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\hat{d}_i^2}$	0.0320	0.0191	0.0025	0.0018	0.0018
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\hat{d}_i^2}$	0.0320	0.0229	0.0026	0.0018	0.0019
-0.6	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\hat{d}_i}$	0.0013	-0.0638	-0.0059	-0.0058	-0.0110
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\hat{d}_i^2}$	0.0319	0.0186	0.0026	0.0026	0.0025
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\hat{d}_i^2}$	0.0319	0.0199	0.0026	0.0026	0.0026
-0.5	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\hat{d}_i}$	-0.0157	-0.0615	-0.0121	-0.0102	-0.0152
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\hat{d}_i^2}$	0.0337	0.0179	0.0023	0.0023	0.0023
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\hat{d}_i^2}$	0.0338	0.0215	0.0025	0.0025	0.0026
-0.3	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\hat{d}_i}$	-0.0196	-0.0543	-0.0041	-0.0041	-0.0106
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\hat{d}_i^2}$	0.0416	0.0227	0.0025	0.0025	0.0025
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\hat{d}_i^2}$	0.0416	0.0254	0.0025	0.0025	0.0026
-0.2	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\hat{d}_i}$	-0.0003	-0.0491	-0.0039	-0.0038	-0.0115
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\hat{d}_i^2}$	0.0339	0.0194	0.0035	0.0035	0.0036
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\hat{d}_i^2}$	0.0339	0.0216	0.0034	0.0035	0.0037
-0.1	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\hat{d}_i}$	-0.0077	-0.0464	-0.0055	-0.0053	-0.0128
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{\hat{d}_i^2}$	0.0210	0.0382	0.0039	0.0039	0.0040
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{\hat{d}_i^2}$	0.0379	0.0229	0.0039	0.0039	0.0041

**Tabela 5.4.2:** Estimadores  $\hat{d}_i$ , com seu respectivo vício, variância e erro quadrático médio, para o modelo  $ARFIMA(1; 0, 1; 0)$ , quando  $\phi_1 \in \{0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 5; 0, 6; 0, 8; 0, 9\}$ ,  $RE = 100$  e  $n = 500$ .

$\phi_1$	i	p	sp	$W_1$	$W_2$	$W_3$
0.1	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0162	-0.0391	-0.0172	-0.0170	-0.0269
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0331	0.0207	0.0058	0.0057	0.0060
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0333	0.0221	0.0060	0.0060	0.0067
0.2	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0082	-0.0482	-0.0230	-0.0170	-0.0369
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0373	0.0185	0.0111	0.0126	0.0121
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0373	0.0207	0.0115	0.0128	0.0133
0.3	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0315	-0.0068	0.0397	0.0636	0.0211
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0320	0.0169	0.0380	0.0462	0.0431
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0327	0.0167	0.0392	0.0499	0.0432
0.5	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0558	0.0103	0.1987	0.1864	0.2006
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0241	0.0157	0.0538	0.0533	0.0538
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0270	0.0157	0.0927	0.0876	0.0936
0.6	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0312	-0.0086	0.2584	0.1751	0.1389
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0292	0.0184	0.0440	0.0509	0.0634
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0299	0.0183	0.1103	0.0871	0.0823
0.8	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.1552	0.1400	0.2103	0.2613	0.2397
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0285	0.0170	0.0413	0.0361	0.0379
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0523	0.0365	0.0852	0.1040	0.0950
0.9	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.4036	0.3507	0.2977	0.3007	0.3137
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0247	0.0160	0.0300	0.0281	0.0263
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.1873	0.1389	0.1184	0.1183	0.1246

Observamos que para as Tabelas 5.4.1 e 5.4.2 a variância e o erro quadrático médio estão menores em relação às Tabelas 5.2.1 e 5.2.2. Mas as estimativas para valores de  $\phi_1$  próximos de um não são boas.

**Tabela 5.4.3:** Estimadores  $\hat{d}_i$ , com seu respectivo vício, variância e erro quadrático médio, para o modelo  $ARFIMA(1; 0, 2; 0)$ , quando  $\phi_1 \in \{-0, 9; -0, 8; -0, 6; -0, 5; -0, 3; -0, 2; -0, 1\}$ ,  $RE = 100$  e  $n = 500$ .

$\phi_1$	i	p	sp	$W_1$	$W_2$	$W_3$
-0.9	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0091	-0.0596	0.3918	0.4939	0.4496
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0286	0.0200	0.1922	0.1842	0.1966
	$\frac{eqm(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0286	0.0217	0.2101	0.1995	0.2129
-0.8	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0072	-0.0452	0.0709	0.0709	0.0553
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0282	0.0193	0.0182	0.0242	0.0283
	$\frac{eqm(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0282	0.0212	0.0231	0.0290	0.0311
-0.6	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0108	-0.0336	0.0085	0.0099	-0.0045
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0450	0.0252	0.0050	0.0057	0.0027
	$\frac{eqm(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0451	0.0260	0.0050	0.0057	0.0027
-0.5	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0086	-0.0446	-0.0010	-0.0009	-0.0084
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0300	0.0210	0.0028	0.0027	0.0018
	$\frac{eqm(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0300	0.0228	0.0027	0.0028	0.0019
-0.3	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0080	-0.0521	0.0010	0.0028	-0.0056
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0284	0.0184	0.0031	0.0038	0.0032
	$\frac{eqm(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0284	0.0210	0.0031	0.0039	0.0032
-0.2	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0035	-0.0521	-0.0086	-0.0086	-0.0154
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0281	0.0167	0.0035	0.0036	0.0035
	$\frac{eqm(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0287	0.0184	0.0036	0.0036	0.0038
-0.1	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0141	-0.0421	-0.0058	-0.0057	-0.0139
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0235	0.0170	0.0032	0.0032	0.0033
	$\frac{eqm(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0238	0.0186	0.0033	0.0033	0.0035

**Tabela 5.4.4:** Estimadores  $\hat{d}_i$ , com seu respectivo vício, variância e erro quadrático médio, para o modelo  $ARFIMA(1; 0, 2; 0)$ , quando  $\phi_1 \in \{0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 5; 0, 6; 0, 8; 0, 9\}$ ,  $RE = 100$  e  $n = 500$ .

$\phi_1$	$i$	$p$	$sp$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
0.1	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0161	-0.0501	-0.0058	-0.0057	-0.0139
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0341	0.0208	0.0083	0.0083	0.0086
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0341	0.0231	0.0084	0.0083	0.0090
0.2	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0094	-0.0357	-0.0169	-0.0162	-0.0207
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0326	0.0195	0.0142	0.0138	0.0086
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0326	0.0206	0.0143	0.0139	0.0090
0.3	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0170	-0.0151	-0.0198	-0.0199	-0.0348
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0315	0.0165	0.0119	0.0119	0.0124
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0315	0.0165	0.0112	0.0122	0.0135
0.5	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0034	-0.0392	-0.0419	-0.0436	-0.0651
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0423	0.0234	0.0207	0.0208	0.0200
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0423	0.0247	0.0222	0.0226	0.0241
0.6	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0365	-0.0082	0.0035	0.0037	-0.0013
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0403	0.0242	0.0166	0.0167	0.0155
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0412	0.0240	0.0165	0.0166	0.0156
0.8	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.1742	0.1408	0.1783	0.1863	0.1743
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0381	0.0226	0.0234	0.0243	0.0251
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0681	0.0422	0.0594	0.0588	0.0553
0.9	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.3829	0.3336	0.1779	0.1622	0.1672
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0421	0.0187	0.0231	0.0241	0.0229
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.1883	0.1298	0.0545	0.0503	0.0507

Para as Tabelas 5.4.3, 5.4.4 notamos que a variância e o erro quadrático médio dos estimadores diminuíram em relação às Tabelas 5.2.3 e 5.2.4.



**Tabela 5.4.5:** Estimadores  $\hat{d}_i$ , com seu respectivo vício, variância e erro quadrático médio, para o modelo  $ARFIMA(1; 0, 3; 0)$ , quando  $\phi_1 \in \{-0, 9; -0, 8; -0, 6; -0, 5; -0, 3; -0, 2; -0, 1\}$ ,  $RE = 100$  e  $n = 500$ .

$\phi_1$	i	p	sp	$W_1$	$W_2$	$W_3$
-0.9	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0284	-0.0736	0.0879	0.0646	0.0397
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0267	0.0186	0.0282	0.0581	0.0570
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0272	0.0239	0.0357	0.0618	0.0581
-0.8	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0011	-0.0395	0.0805	0.0797	0.0728
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0395	0.0243	0.0093	0.0096	0.0098
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0395	0.0256	0.0160	0.0159	0.0151
-0.6	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0231	-0.0710	0.0267	0.0167	0.0184
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0269	0.0191	0.0083	0.0059	0.0075
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0271	0.0240	0.0089	0.0061	0.0078
-0.5	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0061	-0.0476	0.0088	0.0061	0.0059
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0402	0.0255	0.0041	0.0035	0.0046
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0402	0.0275	0.0042	0.0035	0.0047
-0.3	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0091	-0.0307	0.0103	0.0118	0.0045
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0326	0.0233	0.0030	0.0034	0.0030
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0326	0.0241	0.0031	0.0035	0.0031
-0.2	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0399	-0.0205	-0.0010	0.0002	-0.0066
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0299	0.0146	0.0028	0.0031	0.0031
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0312	0.0149	0.0027	0.0031	0.0032
-0.1	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0254	-0.0131	0.0189	0.0255	0.0064
	$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0248	0.0173	0.0072	0.0087	0.0063
	$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0252	0.0173	0.0075	0.0093	0.0063

Observamos que na Tabela 5.4.5, ao contrário da Tabela 5.2.5, a variância e o erro quadrático médio dos estimadores  $\hat{d}_{W_1}$ ,  $\hat{d}_{W_2}$  e  $\hat{d}_{W_3}$  aumentou quando  $\phi_1 = -0.9$ .

**Tabela 5.4.6:** Estimadores  $\hat{d}_i$ , com seu respectivo vício, variância e erro quadrático médio, para o modelo  $ARFIMA(1; 0, 3; 0)$ , quando  $\phi_1 \in \{0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 5; 0, 6; 0, 8; 0, 9\}$ ,  $RE = 100$  e  $n = 500$ .

$\phi_1$	$i$	$p$	$sp$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
0.1	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0073	-0.0379	0.0739	0.0912	0.0734
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0240	0.0186	0.0131	0.0133	0.0137
	$\frac{eqm(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0240	0.0198	0.0184	0.0215	0.0190
0.2	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0049	-0.0492	0.0814	0.0990	0.0856
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0238	0.0140	0.0142	0.0126	0.0229
	$\frac{eqm(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0238	0.0163	0.0207	0.0224	0.0301
0.3	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0291	-0.0258	0.0964	0.0797	0.0632
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0315	0.0217	0.0202	0.0235	0.0334
	$\frac{eqm(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0320	0.0222	0.0300	0.0297	0.0341
0.5	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0114	-0.0229	0.0720	0.0760	0.0435
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0346	0.0248	0.0235	0.0245	0.0319
	$\frac{eqm(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0347	0.0251	0.0284	0.0301	0.0336
0.6	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0926	0.0398	0.1130	0.1027	0.0909
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0290	0.0168	0.0179	0.0183	0.0190
	$\frac{eqm(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0373	0.0182	0.0305	0.0287	0.0272
0.8	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.1518	0.0994	0.1096	0.0947	0.0986
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0332	0.0166	0.0142	0.0145	0.0145
	$\frac{eqm(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0559	0.0286	0.0261	0.0234	0.0242
0.9	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.3790	0.3377	0.0989	0.0884	0.1050
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0381	0.0190	0.0131	0.0132	0.0134
	$\frac{eqm(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.1329	0.1814	0.0281	0.0209	0.0243

**Tabela 5.4.7:** Estimadores  $\hat{d}_i$ , com seu respectivo vício, variância e erro quadrático médio, para o modelo  $ARFIMA(1; 0, 4; 0)$ , quando  $\phi_1 \in \{-0, 9; -0, 8; -0, 6; -0, 5; -0, 3; -0, 2; -0, 1\}$ ,  $RE = 100$  e  $n = 500$ .

$\phi_1$	$i$	$p$	$sp$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
-0.9	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0274	-0.0139	0.0323	-0.0354	0.0272
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0225	0.0152	0.0065	0.0062	0.0069
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0229	0.0152	0.0074	0.0074	0.0077
-0.8	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0306	-0.0206	0.0410	0.0336	0.0273
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0220	0.0158	0.0042	0.0049	0.0044
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0227	0.0161	0.0059	0.0060	0.0052
-0.6	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0131	-0.0465	0.0336	0.0434	0.0380
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0286	0.0206	0.0031	0.0031	0.0033
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0287	0.0225	0.0044	0.0050	0.0047
-0.5	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0006	-0.0620	0.0246	0.0265	0.0230
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0289	0.0173	0.0034	0.0034	0.0036
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0289	0.0210	0.0040	0.0042	0.0042
-0.3	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0349	-0.0234	0.0281	0.0286	0.0209
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0274	0.0216	0.0026	0.0027	0.0025
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0286	0.0219	0.0035	0.0035	0.0030
-0.2	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0076	-0.0335	0.0273	0.0252	0.0158
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0302	0.0168	0.0038	0.0040	0.0037
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0302	0.0178	0.0046	0.0046	0.0040
-0.1	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0003	-0.0526	0.0335	0.0303	0.0248
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0282	0.0181	0.0044	0.0042	0.0044
	$\frac{\widehat{eqm}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0282	0.0207	0.0055	0.0051	0.0057

**Tabela 5.4.8:** Estimadores  $\hat{d}_i$ , com seu respectivo vício, variância e erro quadrático médio, para o modelo  $ARFIMA(1; 0, 4; 0)$ , quando  $\phi_1 \in \{0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 5; 0, 6; 0, 8; 0, 9\}$ ,  $RE = 100$  e  $n = 500$ .

$\phi_1$	i	$p$	$sp$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
0.1	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0017	-0.0139	0.0477	0.0441	0.0413
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0302	0.0180	0.0045	0.0059	0.0053
	$\frac{eqm(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0302	0.0192	0.0067	0.0078	0.0070
0.2	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0033	-0.0373	0.0449	0.0477	0.0460
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0307	0.0180	0.0068	0.0065	0.0062
	$\frac{eqm(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0307	0.0199	0.0087	0.0088	0.0083
0.3	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0163	-0.0457	0.0596	0.0355	0.0281
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0325	0.0208	0.0143	0.0143	0.0117
	$\frac{eqm(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0324	0.0218	0.0078	0.0155	0.0124
0.5	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0717	0.0190	0.0582	0.0678	0.0462
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0293	0.0183	0.0056	0.0056	0.0063
	$\frac{eqm(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0301	0.0171	0.0090	0.0102	0.0089
0.6	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0848	0.0367	0.0726	0.0763	0.0678
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0232	0.0159	0.0043	0.0037	0.0050
	$\frac{eqm(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0301	0.0171	0.0095	0.0096	0.0096
0.8	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.2096	0.1453	0.0611	0.0671	0.0461
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0292	0.0182	0.0064	0.0048	0.0077
	$\frac{eqm(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0729	0.0392	0.0101	0.0093	0.0098
0.9	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.3803	0.3371	0.0135	0.0420	0.0334
	$\frac{\widehat{var}(\hat{d}_i)}{eqm(\hat{d}_i)}$	0.0356	0.0202	0.0097	0.0071	0.0074
	$\frac{eqm(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.1799	0.1336	0.0098	0.0088	0.0085

Observamos, através das Tabelas 5.4.1 a 5.4.8, que quando aumentamos o tamanho da amostral de  $n = 300$  para  $n = 500$ , a variância e o erro quadrático médio dos estimadores melhora significativamente, mas mantém-se as características observadas nas tabelas anteriores, no qual verificamos que os estimadores  $\hat{d}_{W_1}$ ,  $\hat{d}_{W_2}$  e  $\hat{d}_{W_3}$  tem melhor desempenho do que  $\hat{d}_p$  e  $\hat{d}_{sp}$ . Esta mesma conclusão é verificada em Moura (1997). Enquanto que, entre os estimadores  $\hat{d}_p$  e  $\hat{d}_{sp}$ , o segundo apresenta menor variância e menor erro quadrático médio do que  $\hat{d}_p$ , como já havia sido verificado por Reisen (1994). E em alguns casos, observados anteriormente,  $\hat{d}_{sp}$  tem

menor variância e menor erro quadrático médio do que os estimadores  $\hat{d}_{W_1}$ ,  $\hat{d}_{W_2}$  e  $\hat{d}_{W_3}$ .

Mais informações sobre a influência do tamanho da amostra na função de verossimilhança aproximada de Whittle pode ser encontrada no Apêndice A.

## 5.5 RESULTADOS PARA OS ESTIMADORES DOS PARÂMETROS $\phi_1$ E $\theta_1$

O método de máxima verossimilhança aproximado de Whittle também estima os parâmetros  $\phi_1$  e  $\theta_1$  dos modelos  $ARFIMA(1, d, 0)$  e  $ARFIMA(0, d, 1)$ . Apresentamos, nesta seção, algumas tabelas que nos mostram os resultados das simulações realizadas para a estimação dos parâmetros  $\phi_1$  e  $\theta_1$ .

Os resultados das simulações são mostrados usando as seguintes notações:

- $i$  indica a variação dos estimadores analisados: estimadores de  $\phi_1$  e  $\theta_1$  utilizando EMV aproximado de Whittle quando a função periodograma é calculada através de rotina elaborada por Reisen (1998) ( $i = W_1$ ); EMV aproximado de Whittle quando o cálculo do periodograma é feito pela rotina do IMSL ( $i = W_2$ ) e EMV aproximado de Whittle quando a função periodograma é suavizada através da janela de Parzen dada pela expressão (2.10) ( $i = W_3$ );

- $\hat{\phi}_i$  indicam os três estimadores para o parâmetro  $\phi_1$
- $\hat{\theta}_i$  indicam os três estimadores para o parâmetro  $\theta_1$
- $\overline{\hat{b}(\hat{\phi}_i)}$  é a média dos vícios estimados dos estimadores  $\hat{\phi}_i$  das replicações.
- $\overline{\hat{b}(\hat{\theta}_i)}$  é a média dos vícios estimados dos estimadores  $\hat{\theta}_i$  das replicações.
- $\overline{\widehat{var}(\hat{\phi}_i)}$  é a média das variâncias estimadas dos estimadores  $\hat{\phi}_i$  das replicações.
- $\overline{\widehat{var}(\hat{\theta}_i)}$  é a média das variâncias estimadas dos estimadores  $\hat{\theta}_i$  das replicações.

As Tabelas 5.5.1 a 5.5.4 apresentam resultados para os estimadores  $\hat{\phi}_i$  quando  $\phi_1 \in \{-0,5; -0,2; 0,2; 0,5\}$ .

**Tabela 5.5.1:** Estimadores  $\hat{\phi}_i$ , com seu respectivo vício e variância, para o modelo  $ARFIMA(1;0,1;0)$ , quando  $\phi_1 = -0.2$  e  $n = 500$ .

i	$W_1$	$W_2$	$W_3$
$\frac{\hat{b}(\hat{\phi}_i)}{\widehat{var}(\hat{\phi}_i)}$	0.0010	0.0079	0.0161
$\widehat{var}(\hat{\phi}_i)$	0.0075	0.0069	0.0072

**Tabela 5.5.2:** Estimadores  $\hat{\phi}_i$ , com seu respectivo vício e variância, para o modelo  $ARFIMA(1;0,1;0)$ , quando  $\phi_1 = 0.2$  e  $n = 500$ .

i	$W_1$	$W_2$	$W_3$
$\frac{\hat{b}(\hat{\phi}_i)}{\widehat{var}(\hat{\phi}_i)}$	0.0273	0.0279	0.0309
$\widehat{var}(\hat{\phi}_i)$	0.0386	0.0376	0.0302

**Tabela 5.5.3:** Estimadores  $\hat{\phi}_i$ , com seu respectivo vício e variância, para o modelo  $ARFIMA(1;0,1;0)$ , quando  $\phi_1 = -0.5$  e  $n = 500$ .

i	$W_1$	$W_2$	$W_3$
$\frac{\hat{b}(\hat{\phi}_i)}{\widehat{var}(\hat{\phi}_i)}$	-0.0092	-0.0070	-0.0218
$\widehat{var}(\hat{\phi}_i)$	0.0100	0.0096	0.0220

**Tabela 5.5.4:** Estimadores  $\hat{\phi}_i$ , com seu respectivo vício e variância, para o modelo  $ARFIMA(1;0,1;0)$ , quando  $\phi_1 = 0.5$  e  $n = 500$ .

i	$W_1$	$W_2$	$W_3$
$\frac{\hat{b}(\hat{\phi}_i)}{\widehat{var}(\hat{\phi}_i)}$	-0.0625	-0.0181	-0.0478
$\widehat{var}(\hat{\phi}_i)$	0.0285	0.0247	0.0346

Observamos que o comportamento dos estimadores para o parâmetro  $\phi_1$  e  $\theta_1$  é idêntico ao observado para o parâmetro  $d$ . Ou seja, a variância é menor quando o parâmetro  $\phi_1$  é negativo. Sendo que entre os três estimadores para  $\phi_1$  o que apresenta melhores resultados é  $\hat{\phi}_{W_2}$ .

As Tabelas 5.5.5 e 5.5.6 apresentam resultados para os estimadores  $\hat{\theta}_i$  quando  $\theta_1 \in \{-0,1; 0,1\}$ .

**Tabela 5.5.5:** Estimadores  $\hat{\theta}_i$ , com seu respectivo vício e variância, para o modelo  $ARFIMA(0;0,1;1)$ , quando  $\theta_1 = -0.1$  e  $n = 500$ .

i	$W_1$	$W_2$	$W_3$
$\frac{\hat{b}(\hat{\theta}_i)}{\widehat{var}(\hat{\theta}_i)}$	-0.0280	-0.0279	-0.0365
$\widehat{var}(\hat{\theta}_i)$	0.0086	0.0086	0.0085

**Tabela 5.5.6:** Estimadores  $\hat{\theta}_i$ , com seu respectivo vício e variância, para o modelo  $ARFIMA(0;0,1;1)$ , quando  $\theta_1 = 0.1$  e  $n = 500$ .

i	$W_1$	$W_2$	$W_3$
$\frac{\hat{b}(\hat{\theta}_i)}{\widehat{var}(\hat{\theta}_i)}$	0.0179	0.0183	0.0059
$\widehat{var}(\hat{\theta}_i)$	0.0196	0.0197	0.0178

Observamos que para o parâmetro  $\theta_1$  a variância é menor quando  $\theta_1$  é negativo. Os estimadores  $\hat{\theta}_{W_1}$ ,  $\hat{\theta}_{W_2}$  e  $\hat{\theta}_{W_3}$  apresentaram resultados bastante próximos para  $\bar{\theta}_i$  e a variância.

## 5.6 RESULTADOS PARA O MODELO $ARFIMA(1;0,1;0)$

Apresentamos os resultados para os parâmetros do modelo  $ARFIMA(1;0,1;0)$ , através de simulações, quando  $\phi_1 = -0,3$  para séries temporais

de tamanho  $n=300$ ,  $n=500$  e  $n=700$  e para  $RE=100$ ,  $RE=200$  e  $RE=300$ . O objetivo é comparar os estimadores de  $\hat{d}_i$  quando aumentamos o número de replicações e o tamanho amostral.

**Tabela 5.6.1:** Estimadores  $\hat{d}_i$ , com seu respectivo vício, variância e erro quadrático médio, para o modelo  $ARFIMA(1; 0, 1; 0)$ , quando  $\phi_1 = -0,3$ .

$RE$	$n$	$i$	$p$	$sp$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
100	300	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0254	-0.0237	-0.0094	-0.0093	-0.0187
		$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0586	0.0322	0.0056	0.0056	0.0057
		$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0587	0.0324	0.0056	0.0056	0.0060
	500	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0196	-0.0543	-0.0041	-0.0041	-0.0106
		$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0416	0.0227	0.0025	0.0025	0.0025
		$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0416	0.0254	0.0025	0.0025	0.0026
	700	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0096	-0.0210	0.0000	-0.0007	-0.0050
		$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0234	0.0130	0.0019	0.0019	0.0019
		$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0234	0.0133	0.0019	0.0019	0.0019
200	300	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0196	-0.0698	-0.0064	-0.0063	-0.0156
		$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0500	0.0262	0.0054	0.0054	0.0053
		$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0502	0.0309	0.0054	0.0054	0.0055
	500	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	0.0151	-0.0321	-0.0099	-0.0098	-0.0151
		$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0285	0.0173	0.0027	0.0027	0.0027
		$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0285	0.0183	0.0028	0.0028	0.0029
	700	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0052	-0.0349	-0.0021	-0.0020	-0.0062
		$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0280	0.0163	0.0018	0.0018	0.0018
		$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0280	0.0175	0.0018	0.0018	0.0018
300	300	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0021	-0.0621	-0.0103	-0.0103	-0.0190
		$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0413	0.0246	0.0053	0.0053	0.0053
		$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0413	0.0284	0.0054	0.0054	0.0057
	500	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0277	-0.0605	-0.0054	-0.0053	-0.0114
		$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0348	0.0190	0.0026	0.0026	0.0026
		$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0355	0.0226	0.0026	0.0027	0.0028
	700	$\frac{\hat{b}(\hat{d}_i)}{\widehat{var}(\hat{d}_i)}$	-0.0022	-0.0394	-0.0025	-0.0025	-0.0068
		$\widehat{var}(\hat{d}_i)$	0.0220	0.0136	0.0017	0.0017	0.0017
		$\widehat{eqm}(\hat{d}_i)$	0.0220	0.0151	0.0017	0.0018	0.0018



Observamos que, quando aumentamos o número de replicações, as mudanças nas estimativas não são significativas ficando isto mais evidente para os estimadores  $\hat{d}_{W_1}$ ,  $\hat{d}_{W_2}$  e  $\hat{d}_{W_3}$ . Observamos que tanto a variância como o erro quadrático médio diminuem à medida que o tamanho amostral aumenta. Podemos concluir que o número de replicações não altera significativamente os resultados, enquanto que o aumento do tamanho amostral faz com que os estimadores apresentem significativa melhora. Para os estimadores  $\hat{d}_{W_1}$ ,  $\hat{d}_{W_2}$  e  $\hat{d}_{W_3}$  este resultado é reforçado com a análise apresentada no Apêndice A.

## 5.7 CONCLUSÕES

Através dos resultados para os estimadores  $\hat{d}_i$  apresentados nas Tabelas da Seção 5.2, Seção 5.3 e Seção 5.4, podemos concluir que os estimadores  $\hat{d}_{W_1}$ ,  $\hat{d}_{W_2}$  e  $\hat{d}_{W_3}$ , em geral, apresentam menor variância e menor erro quadrático médio do que os estimadores  $\hat{d}_p$  e  $\hat{d}_{sp}$ . Notamos também que este resultado é mais evidente quando  $\phi_1$  e  $\theta_1$  assumem valores negativos, enquanto que para valores de  $\phi_1$  e  $\theta_1$  próximos de um as estimativas não são boas.

Entre os estimadores  $\hat{d}_p$  e  $\hat{d}_{sp}$  o de menor variância e menor erro quadrático médio é sempre  $\hat{d}_{sp}$ . Entre os estimadores  $\hat{d}_{W_1}$ ,  $\hat{d}_{W_2}$  e  $\hat{d}_{W_3}$ , apesar de não apresentarem diferenças significativas, o que apresenta menor variância e menor erro quadrático médio, com maior frequência, é  $\hat{d}_{W_3}$  obtido através do método EMV aproximado de Whittle quando a função periodograma é suavizada pelo uso da janela de Parzen (ver expressões (5.1) e (2.10)).

Observamos, através da Tabela 5.6.1, que o tamanho amostral faz com que a variância e o erro quadrático médio dos estimadores  $\hat{d}_i$  diminuam, e o aumento das replicações praticamente não tem influência nas estimativas.

## APÊNDICE A

Neste apêndice, analisamos graficamente a função de verossimilhança dada pela expressão (4.17), utilizando o aplicativo Mathematica. Para esta análise fixamos o modelo  $ARFIMA(1, d, 0)$  mantendo como variável somente o grau de diferenciação  $d$ , e comparamos o comportamento da função quando aumentamos o tamanho da série.

Vamos mostrar que à medida que o tamanho amostral cresce a função de verossimilhança a ser minimizada, tem seu mínimo cada vez mais próximo do valor correto a ser estimado.

As Figuras A.1 a A.4 representam a função de verossimilhança de Whittle, dada pela expressão (5.1), para séries temporais geradas a partir do modelo  $ARFIMA(1, d, 0)$  quando  $d = 0,2$  e  $\phi_1 = -0,2$ .

Verificamos através da Figura A.1 que para um tamanho amostral  $n = 20$ , para  $d \in (-0,5; 0,5)$ , o valor mínimo da função representada pela expressão (4.17) não foi localizado. Para esta série temporal os valores encontrados para o parâmetro  $d$  pelos estimadores de Whittle foram:

- $\hat{d}_{W_1} = 0,5000$
- $\hat{d}_{W_2} = 0,5000$
- $\hat{d}_{W_3} = 0,5000$ .

Enquanto que para a Figura A.2, para um tamanho amostral  $n = 50$ , observamos que a função atinge um mínimo no intervalo  $(-0,5; 0,5)$ . Mas este mínimo ainda não está próximo de  $d = 0,2$ . Para esta série temporal os valores encontrados para o parâmetro  $d$  pelos estimadores de Whittle foram:

- $\hat{d}_{W_1} = 0,1295$
- $\hat{d}_{W_2} = 0,1343$
- $\hat{d}_{W_3} = 0,1165$ .

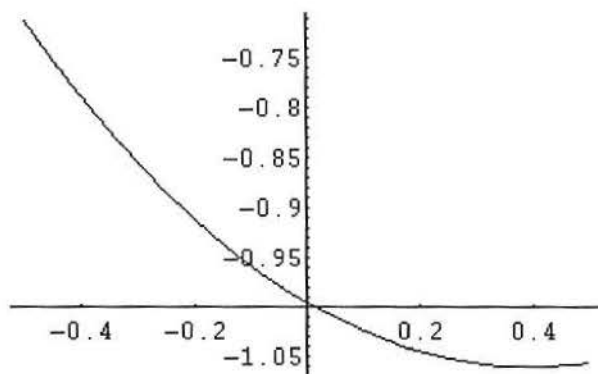


Figura A.1: Para uma série temporal de tamanho  $n=20$

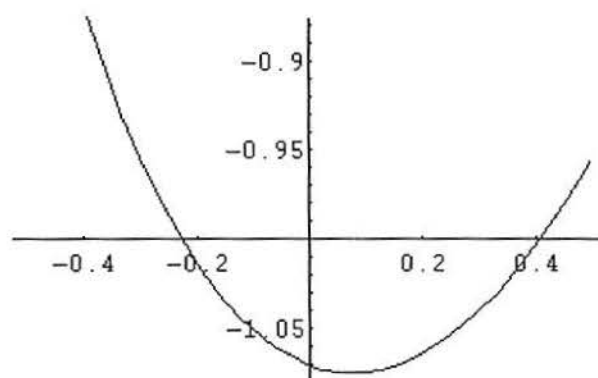


Figura A.2: Para uma série temporal de tamanho  $n=50$

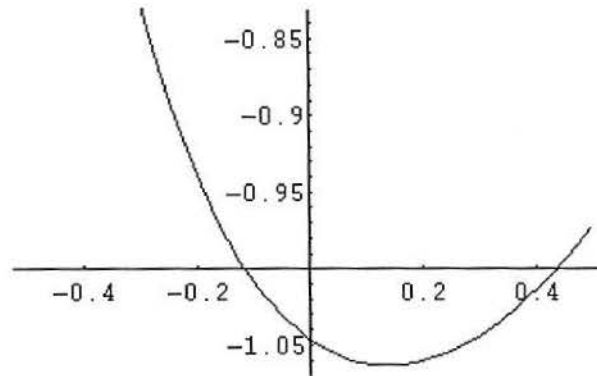


Figura A.3: Para uma série temporal de tamanho  $n=100$

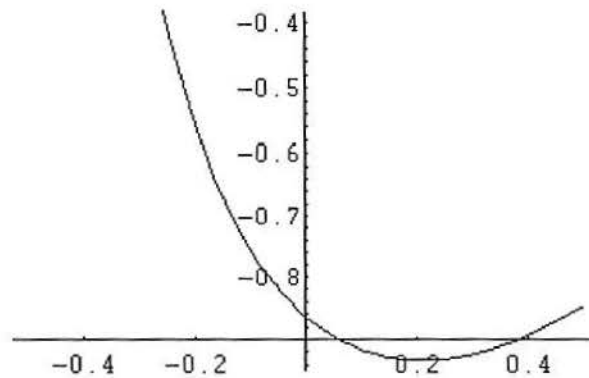


Figura A.4: Para uma série de temporal tamanho  $n=300$

Aumentando o tamanho da amostra para  $n = 100$  e  $n = 300$  verificamos pelas, Figuras A.3 e A.4 que, em ambos os casos, a função de máxima verossimilhança de Whittle tem um mínimo no intervalo  $(-0,5; 0,5)$  e está bastante próximo do parâmetro  $d = 0,2$ , evidenciando-se quando  $n = 300$ . Para estas séries temporais os valores encontrados para o parâmetro  $d$  pelos estimadores de Whittle foram:

Para  $n = 100$ :

- $\hat{d}_{W_1} = 0,1694$
- $\hat{d}_{W_2} = 0,2186$
- $\hat{d}_{W_3} = 0,2087$

Para  $n = 300$ :

- $\hat{d}_{W_1} = 0,2185$
- $\hat{d}_{W_2} = 0,1712$
- $\hat{d}_{W_3} = 0,1622$

As Figuras A.5 a A.8, a seguir, representam a função de máxima verossimilhança de Whittle para séries temporais geradas a partir de um modelo  $ARFIMA(1, d, 0)$  com  $d = 0,3$  e  $\phi_1 = 0,3$ .

Igualmente à análise feita para o modelo anterior, verificamos através da Figura A.5 que, para  $d \in (-0,5; 0,5)$ , o valor mínimo da função representada pela expressão (4.17) não foi localizado. Para esta série temporal os valores encontrados para o parâmetro  $d$  pelos estimadores de Whittle foram:

- $\hat{d}_{W_1} = 0,5000$
- $\hat{d}_{W_2} = 0,5000$
- $\hat{d}_{W_3} = 0,5000$ .

Analisando a Figura A.6 verificamos que, para um tamanho amostral  $n = 50$ , a função atinge um mínimo no intervalo  $(-0,5; 0,5)$ . Mas este mínimo ainda não está próximo de  $d = 0,3$ . Para esta série temporal os valores encontrados para o parâmetro  $d$  pelos estimadores de Whittle foram:

- $\hat{d}_{W_1} = 0,3312$
- $\hat{d}_{W_2} = 0,3364$
- $\hat{d}_{W_3} = 0,2347$ .

Aumentando o tamanho da amostra para  $n = 100$  e  $n = 300$  verificamos, pelas Figuras A.7 e A.8, que, em ambos os casos, a função de máxima verossimilhança tem um mínimo no intervalo  $(-0,5; 0,5)$  e está bastante próximo do parâmetro  $d = 0,3$  quando  $n = 300$ . Para estas séries temporais os valores encontrados para o parâmetro  $d$  pelos estimadores de Whittle foram:

Para  $n = 100$ :

- $\hat{d}_{W_1} = 0,2402$
- $\hat{d}_{W_2} = 0,2417$
- $\hat{d}_{W_3} = 0,2336$

Para  $n = 300$ :

- $\hat{d}_{W_1} = 0,3630$
- $\hat{d}_{W_2} = 0,3656$
- $\hat{d}_{W_3} = 0,3669$

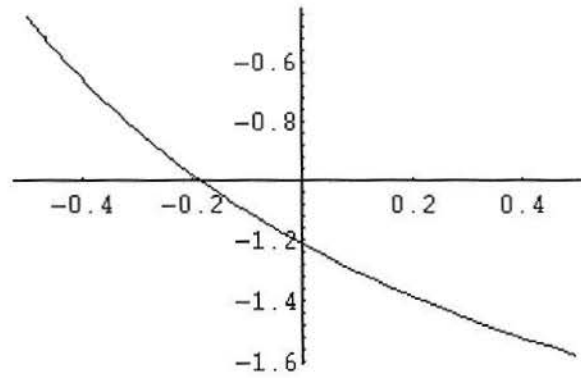


Figura A.5: Para uma série temporal de tamanho  $n=20$

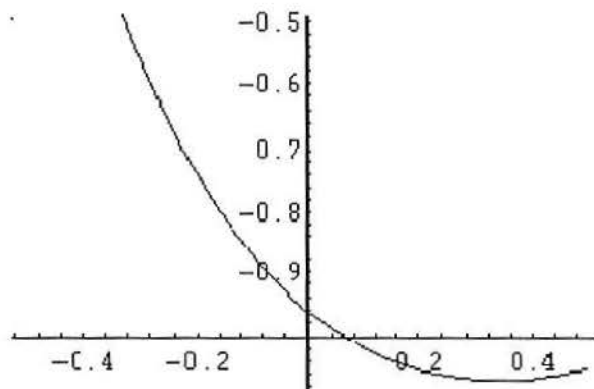


Figura A.6: Para uma série temporal de tamanho  $n=50$

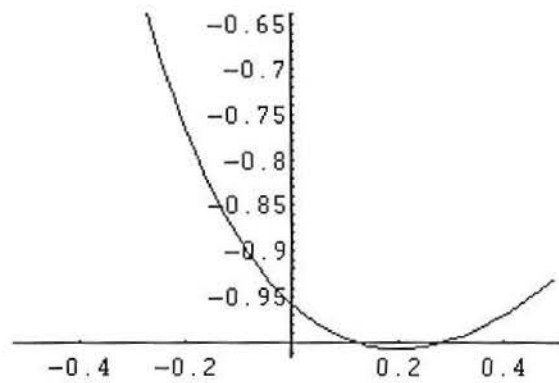


Figura A.7: Para uma série temporal de tamanho  $n=100$

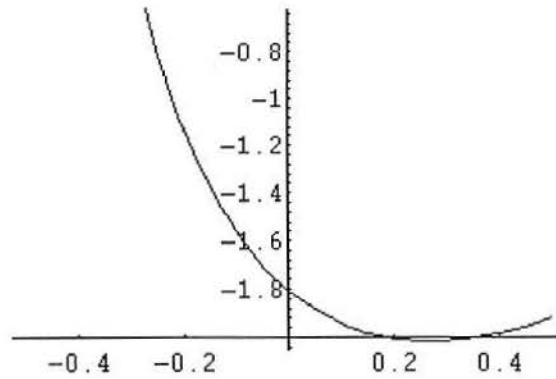


Figura A.8: Para uma série temporal de tamanho  $n=300$

Para obter estimativas para o parâmetro  $d$  através do estimador de máxima verossimilhança de Whittle, necessitamos encontrar um ponto de mínimo no intervalo  $(-0,5;0,5)$  para a função de verossimilhança. Através da análise das Figuras A.1 a A.8 podemos concluir que melhor será o comportamento da função de verossimilhança, no intervalo  $(-0,5;0,5)$ , quanto maior for o tamanho amostral.

Também podemos verificar que o ponto de mínimo da função aproxima-se melhor do parâmetro  $d$  para as Figuras A.3 e A.4, que representam a função de verossimilhança do modelo  $ARFIMA(1;0,2;0)$  e  $\phi_1 = -0.2$ , do que para as Figuras A.7 e A.8, que representam a função de verossimilhança do modelo  $ARFIMA(1;0,3;0)$  e  $\phi_1 = 0,3$ , confirmando o desempenho dos estimadores  $\hat{d}_{W_1}$ ,  $\hat{d}_{W_2}$  e  $\hat{d}_{W_3}$  já verificados nos resultados apresentados nas tabelas do Capítulo 5.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Beran, J. (1994). *Statistics for Long-Memory Processes*. Chapman e Hall, New York.
- [2] Box, G.E.P., Jenkins, G.M. e Reinsel, G.C. (1995). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Prentice Hall, New Jersey.
- [3] Brockwell, P.J. e Davis, R.A. (1987). *Time Series: Theory and Methods*. Springer-Verlag, New York.
- [4] Dahlhaus, R. (1989). Efficient parameter estimation for self-similar processes. *Annals of Statistics*, Vol. **17**, No. 4, 1749-1766.
- [5] Fox, R. e Taqqu, S. (1986). Large-Sample properties of estimates for strongly stationary gaussian time series. *Annals of Statistics*, Vol. **14**, No. 2, 517-532.
- [6] Geweke, J. e Porter-Hudak, S. (1983). The estimation and application of long-memory time series models. *J. Time Series Analysis*, No. 4, 221-238.
- [7] Grenander, U. e Szegő G. (1958). *Toeplitz forms and their application*. Univ. of California Press, Berkeley.
- [8] Hosking, J.R.M. (1981). Fractional Differencing. *Biometrika*, Vol. **68**, 165-176.
- [9] Hosking, J.R.M. (1984). Modelling persistence in hidrological time series using fractional differencing. *Water Resources Research*, Vol. **20**. No. 12, 1898-1908.
- [10] Karlin, S. e Taylor, H.M. (1975). *A First Course in Stochastic Processes*. Academic Press, San Diego.
- [11] Moura, C.B. (1997). *Comparação de estimadores do parâmetro de longa memória do modelo ARFIMA(p,d,q)*. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, Brasil.
- [12] Priestley, M.B (1981). *Spectral Analysis in Time Series*. Academic Press. New York.
- [13] Reisen, V.A. (1994). Estimation of the Fractional Difference Parameter in the  $ARIMA(p, d, q)$  model using the Smoothed Periodogram. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **15**, No. 3, 335-350.



- [14] Reisen, V.A. (1998). *Programa para Estimar os Parâmetros do Modelo ARFIMA(p,d,q)*. Relatório Técnico, PRPPG-CCE, Universidade Federal do Espírito Santo.
- [15] Sowell, F. (1991). Maximum likelihood estimation of stationary univariate fractionally integrated time series models. *Journal of Econometrics*, Vol. **53**, 165-188.
- [16] Sowell, F. (1992). Modeling long-run behavior with the fractional ARIMA model. *Journal of Monetary Economics*, Vol. **29**, 277-302.
- [17] Wei, W. (1990). *Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Methods*. Addison Wesley, New York.
- [18] Whittle, P. (1953). Estimation and information in stationary time series. *Arkiv Mathematics*, Vol. **2**, 423-434.