

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA**

**CÁLCULO DA ESPESSURA DE BLINDAGEM PELA COMBINAÇÃO  
DOS MÉTODOS  $LTS_N$  E DECOMPOSIÇÃO**

**por**

**Roselice Parmegiani Chies**

**Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Matemática Aplicada**

**Porto Alegre**

**1996**

# CÁLCULO DA ESPESSURA DE BLINDAGEM PELA COMBINAÇÃO DOS MÉTODOS $LTS_N$ E DECOMPOSIÇÃO

por

Roselice Parmegiani Chies

Dissertação submetida ao corpo Docente do curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Matemática Aplicada

Área de Concentração: Engenharia Matemática e Matemática Industrial

Orientador: Prof. Dr. Marco Túllio M. B. de Vilhena

Aprovada por:

Prof. Dr. Cláudio Graça

Depto. de Física - UFSM

Profª. Dra. Liliane B. Barichello

CPGMAp - UFRGS

Prof. Dr. Volnei Borges

DENUC - UFRGS

Prof. Dr. Jorge Zabadal

DEQUI - UFRGS

Profª. Dra. Liliane B. Barichello

Coordenadora do CPGMAp

Porto Alegre, 22 de agosto de 1996.

## AGRADECIMENTOS

Ao prof. Dr. Marco Túllio M. B. de Vilhena pela dedicação, amizade e, principalmente, pelo incentivo.

Aos doutores Elaine Streck, Volnei Borges e Augusto Cardona e ao mestre Jacques Brancher pela ajuda e pelas valiosas dicas.

À amiga Regine, companheira de todas as horas, por compartilhar os momentos alegres e difíceis.

Ao prof. Dr. Oclide Dotto e às colegas de Caxias do Sul pelo estímulo no início do curso, pelo auxílio e pelo carinho.

Aos meus familiares por acreditarem e me apoiarem nas horas de dúvida.

Ao meu esposo Roque pela paciência, compreensão e amor.

## RESUMO

Neste trabalho apresenta-se uma nova maneira de calcular a espessura de blindagem de uma placa plana homogênea pela combinação dos métodos  $LTS_N$  e Decomposição. No método da Decomposição o termo não-linear é aproximado pelos polinômios  $A_n$  e  $\tilde{A}_n$ . É também empregada a formulação  $LTS_N$  para resolver problemas de grandes espessuras. Simulações numéricas para a espessura de blindagem são apresentadas usando as formulações  $LTS_2$  e  $LTS_4$  considerando, respectivamente, cinco e dois termos da solução em série do método da Decomposição.

**ABSTRACT**

In this work is proposed a new approach to evaluate the shielding thickness of a homogeneous slab by combination the  $LTS_N$  and Decomposition methods. In the Decomposition method, the non-linear term is approximated by the  $A_n$  and  $\tilde{A}_n$  polynomials. It is also used the  $LTS_N$  formulation to solve large thickness problems. Numerical simulations for the shielding thickness are reported employing the  $LTS_2$  and  $LTS_4$  formulations and considering, respectively, five and two terms of the series solution from the Decomposition method.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{A}_N(s)$	Matriz $LTS_N$ unidimensional
$\mathbf{A}_N^{-1}(s)$	Matriz inversa da matriz $\mathbf{A}_N(s)$
$A_n$ e $\tilde{A}_n$	Polinômios do Método da Decomposição
$A_{ij}$	Elementos da matriz dos cofatores de $\mathbf{A}_N(s)$
B	Fator de Build-up
$\det \mathbf{A}_N(s)$	Determinante da matriz $\mathbf{A}_N(s)$
D	Dose absorvida
$\dot{D}$	Taxa de dose absorvida
$\dot{D}_o$	Taxa de dose sem blindagem
$DLTS_N$	Espessura de blindagem calculada pela combinação dos métodos $LTS_N$ e Decomposição utilizando os polinômios $A_n$
$D_tLTS_N$	Espessura de blindagem calculada pela combinação dos métodos $LTS_N$ e Decomposição utilizando os polinômios $\tilde{A}_n$
E	Energia da radiação (nêutrons ou fótons)
$f_m$	Fluxo angular de partículas incidentes na fronteira $x = 0$ da placa
F	Operador diferencial ordinário não linear
$g_m$	Fluxo angular de partículas incidentes na fronteira $x = X$ da placa
H	Dose equivalente
$\mathbf{I}_N$	Matriz identidade de ordem N
$\underline{j}(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$	Corrente angular de partículas na posição $\underline{r}$ e direção $\underline{\Omega}$ , com energia E e no tempo t
$J(\underline{r}, E, t)$	Corrente de partículas na posição $\underline{r}$ com energia E e no tempo t

L	Operador diferencial ordinário linear
L	Operador íntegro-diferencial associado à equação de transporte unidimensional
M	Fator de peso para o cálculo da dose equivalente
N	Número de pontos de Quadratura de Gauss para o cálculo da integral da equação de transporte unidimensional
$n(\underline{r}, E, t)$	Densidade de partículas na posição $\underline{r}$ , com energia E e no tempo t
$N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$	Densidade angular de partículas na posição $\underline{r}$ e direção $\underline{\Omega}$ , com energia E e no tempo t
$P_i$	Matrizes da formulação analítica de $\mathbf{A}_N^{-1}(s)$
QI	Fator de Qualidade
$Q(x, \mu)$	Fonte de partículas em x, na direção $\mu$
$Q_m(x)$	Fonte de partículas em x, na direção $\mu_m$
$\hat{Q}(s)$	Vetor fonte transformado
$Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$	Fonte de partículas na posição $\underline{r}$ e direção $\underline{\Omega}$ , com energia E e no tempo t
$Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E)$	Fonte de partículas na posição $\underline{r}$ e direção $\underline{\Omega}$ , com energia E
$\underline{r}$	Vetor posição
s	Parâmetro complexo
$s_k$	Raízes do determinante de $\mathbf{A}_N(s)$
$\underline{v}$	Vetor velocidade
x	Variável espacial na geometria da placa
X	Espessura da placa plana

$\beta_k$	Coefficiente da formulação analítica de $\psi_m(x)$
$\delta_{ij}$	Delta de Kroenecker
$\mu$	Direção da partícula espalhada
$\mu'$	Direção da partícula incidente
$\mu_a$	Coefficiente de atenuação de massa
$\mu_c$	Coefficiente de atenuação linear Compton total
$\mu_f$	Coefficiente de atenuação linear do Efeito Fotoelétrico
$\mu_p$	Coefficiente de atenuação linear da Formação de Par
$\mu_k$	Direções discretas, raízes do polinômio de Legendre de grau N
$\mu_o$	Coefficiente de atenuação linear
$\bar{\nu}(\underline{r}, E')$	Número médio de partículas produzidas por uma fissão em $\underline{r}$ causada por uma partícula de energia $E'$
$\rho$	Densidade
$\sigma_c(\underline{r}, E)$	Seção de choque de espalhamento elástico de partículas na posição $\underline{r}$ e energia $E$
$\sigma_f(\underline{r}, E)$	Seção de choque de fissão de partículas na posição $\underline{r}$ e energia $E$
$\sigma_i(\underline{r}, E)$	Seção de choque de espalhamento inelástico de partículas na posição $\underline{r}$ e energia $E$
$\sigma_s(\mu' \rightarrow \mu)$	Seção de choque de espalhamento
$\sigma_s(\underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E)$	Seção de choque de espalhamento de partículas com direção $\underline{\Omega}'$ e energia $E'$ para a direção $\underline{\Omega}$ com energia $E$
$\sigma_{s0}$	Seção de choque diferencial de espalhamento de ordem zero
$\sigma_{s1}$	Seção de choque diferencial de espalhamento de primeira ordem

$\sigma_t$	Seção de choque total
$\sigma_t(\underline{r}, E)$	Seção de choque total de partículas na posição $\underline{r}$ e energia E
$\sigma_\gamma(\underline{r}, E)$	Seção de choque de captura radioativa de partículas na posição $\underline{r}$ e energia E
$\phi(x)$	Fluxo escalar de partículas
$\phi(\underline{r}, E, t)$	Fluxo escalar de partículas na posição $\underline{r}$ , com energia E e no tempo t
$\chi$	Exposição de raios X ou $\gamma$
$\dot{\chi}$	Taxa de exposição
$\psi(x, \mu)$	Fluxo angular de partículas em x, na direção $\mu$
$\psi(X, \mu)$	Fluxo angular de partículas em X, na direção $\mu$
$\psi_m(x)$	Fluxo angular de partículas em x, na direção $\mu_m$
$\psi_m(X)$	Fluxo angular de partículas em X na direção $\mu_m$
$\underline{\psi}(x)$	Vetor fluxo angular
$\hat{\underline{\psi}}(s)$	Vetor fluxo angular transformado
$\underline{\psi}(0)$	Vetor fluxo angular em $x = 0$
$\psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$	Fluxo angular de partículas na posição $\underline{r}$ e direção $\underline{\Omega}$ , com energia E e no tempo t
$\psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E)$	Fluxo angular de partículas na posição $\underline{r}$ e direção $\underline{\Omega}$ , com energia E
$\omega_k$	Pesos da Quadratura de Gauss
$\underline{\Omega}$	Vetor unitário que indica a direção da partícula
$\mathcal{L}$	Transformada de Laplace
$*$	Convolução
$\hat{\phantom{x}}$	Notação para a transformada de Laplace

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	1
<b>2. MÉTODO <math>LTS_N</math> PARA UM GRUPO</b> .....	4
2.1 Aproximação $S_N$ .....	4
2.2 O Método $LTS_N$ .....	6
<b>3. O MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO</b> .....	14
3.1 Introdução .....	14
3.2 Descrição do Método .....	14
<b>4. CÁLCULO DA ESPESSURA DE BLINDAGEM PELOS MÉTODOS     <math>LTS_N</math> E DECOMPOSIÇÃO</b> .....	21
4.1 Introdução .....	21
4.2 Cálculo da Espessura de Blindagem .....	23
<b>5. RESULTADOS NUMÉRICOS</b> .....	28
<b>6. CONCLUSÃO</b> .....	34
<b>7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	36
<b>APÊNDICES</b>	
<b>APÊNDICE A</b>	
Aspectos físicos relevantes no cálculo da espessura de blindagem.....	41
Interação da radiação com a matéria .....	42
Coeficientes de atenuação linear e de atenuação de massa .....	45
Unidades de doses de Radiação .....	46
Proteção contra as radiações externas .....	50

**APÊNDICE B**

A equação do transporte - Definições e Notações .....	54
Derivação da Equação de Transporte de partículas .....	59
Equação de Transporte para um grupo de energia .....	63

**APÊNDICE C**

Expressões utilizadas para o cálculo dos polinômios $A_n$ e $\tilde{A}_n$ .....	66
---	----

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 - Cálculo da espessura de blindagem de uma placa plana pelos métodos DLTS <sub>2</sub> e D <sub>t</sub> DLTS <sub>2</sub> .....	29
Tabela 5.2 - Resultados numéricos dos métodos DLTS <sub>2</sub> e D <sub>t</sub> DLTS <sub>2</sub> para a espessura exata $X = 100 \left( \frac{\text{g}}{\text{cm}^2} \right)$ com o número de termos da solução variando de um a cinco .....	29
Tabela 5.3 - Cálculo da espessura de blindagem de uma placa plana pelos métodos DLTS <sub>4</sub> e D <sub>t</sub> DLTS <sub>4</sub> .....	30
Tabela 5.4 - Cálculo da espessura de blindagem de uma placa plana pelos métodos DLTS <sub>2</sub> e D <sub>t</sub> DLTS <sub>2</sub> considerando diferentes decomposições .....	31
Tabela 5.5 - Cálculo da espessura de blindagem de uma placa plana pelos métodos DLTS <sub>4</sub> e D <sub>t</sub> DLTS <sub>4</sub> considerando diferentes decomposições .....	32

## 1. INTRODUÇÃO

O objetivo do projeto de blindagens consiste na redução da intensidade do campo de radiação, em locais onde existem fontes emissoras de radiação, para garantir que os limites primários anuais de dose equivalente não ultrapassem os valores estabelecidos em norma. Neste sentido, são interpostos entre as fontes e o local de trabalho materiais com características atenuadoras de radiação, denominados blindagens. O projeto de blindagem compreende três fases: a primeira consiste na definição detalhada da fonte de radiação; a segunda, na determinação do campo de radiação na blindagem e a terceira abrange o cálculo do fluxo de radiação emergente da blindagem que atinge o local de interesse.

O cálculo do fluxo de radiação emergente da blindagem é obtido pela solução da equação íntegro-diferencial de transporte de partículas. Esta, porém, é muito complexa e, devido a este fato, só é possível encontrar soluções analíticas para problemas unidimensionais. Os métodos atualmente usados em teoria do transporte linear dividem-se entre os probabilísticos, que são capazes de executar uma simulação real do problema, e os determinísticos, que resolvem-no de forma aproximada. Dentre os métodos determinísticos, citamos os métodos  $F_N$  [ 1 ],  $SGF-S_N$  [ 2 ],  $LTP_N$  [ 3 ],  $LTW_N$  [ 4 ],  $LTCh_N$  [ 4 ],  $LTA_N$  [ 4 ],  $LTLD_N$  [ 4 ] e  $LTS_N$  [ 5, 6, 7 ].

Tendo em vista que o interesse neste trabalho reside no cálculo da espessura de blindagem em forma analítica pelo método  $LTS_N$ , faremos, a seguir, uma descrição do mesmo. O método  $LTS_N$  [ 5, 6, 7 ] resolve de forma analítica a aproximação  $S_N$  da equação de transporte unidimensional. Esta formulação é obtida pela aplicação da transformada de Laplace nas equações de ordenada discreta ( equações  $S_N$  ) com o domínio estendido adequadamente.

Resulta, deste procedimento, um sistema de equações lineares que deve ser resolvido em termos do fluxo angular transformado. Invertendo-se este último, obtém-se o fluxo angular através do método de inversão por expansão de Heaviside.

O método  $LTS_N$  já foi aplicado a problemas de transporte homogêneos e heterogêneos unidimensionais em geometria plana e com espalhamento anisotrópico [ 5, 6, 7, 8 ], para modelos de um grupo de energia, multigrupo e problemas inversos [ 7, 9, 10, 11 ]. Foi também estendido a problemas de transporte estacionários em duas e três dimensões e em domínios convexos bidimensionais [ 12, 13, 14, 15 ] e a problemas de transporte sem simetria azimutal e problemas dependentes do tempo [ 16 ]. Além disso, foi feito um estudo comparativo entre os métodos que resolvem a equação  $S_N$  de maneira exata [ 17 ].

Uma vez determinado o fluxo na blindagem pelo método  $LTS_N$ , a espessura é obtida pelo método da Decomposição [ 18, 19, 20 ] proposto por Adomian para resolver equações diferenciais não-lineares. Este método consiste na decomposição do operador diferencial em termos lineares e não-lineares, e na expansão dos termos não-lineares em polinômios  $A_n$  e  $\tilde{A}_n$ . Desta forma, é obtida uma solução em série sem linearização dos termos não-lineares.

Recentemente, o método da Decomposição foi aplicado na solução da equação de ordenadas discretas [ 21 ] e também na solução da equação transcendental associada ao modelo de solidificação de Schwarz [ 22, 23 ]. No modelo de Schwarz, a equação transcendental para a constante de solidificação é colocada em forma adequada para a aplicação do método. Como consequência deste procedimento a solução para o problema torna-se completamente analítica.

Neste trabalho, apresenta-se uma solução analítica para o cálculo da espessura de blindagem para uma fonte genérica de radiação utilizando, primeiramente, a formulação

$LTS_N$  para o cálculo do fluxo escalar e, após, o método da Decomposição para resolver a equação transcendental resultante.

Para atingir este objetivo, no capítulo 2 são deduzidas as equações  $S_N$  e é apresentado o método  $LTS_N$  para a resolução da equação do transporte para um grupo de energia, com espalhamento anisotrópico linear. No capítulo 3, é detalhado o método da Decomposição, bem como a aplicação do mesmo em equações transcendentais. No capítulo 4, discute-se aspectos relacionados com a otimização do custo, peso e espessura de blindagem; também mostra-se como a espessura é calculada combinando os métodos  $LTS_N$  e Decomposição. No capítulo 5, são apresentadas simulações numéricas e, finalmente, no capítulo 6, discussões e comentários sobre os resultados encontrados.

## 2. MÉTODO $LTS_N$ PARA UM GRUPO

### 2.1 Aproximação $S_N$

As equações de ordenada discreta (equações  $S_N$ ) consistem em uma aproximação da equação de transporte linear quando o termo integral é aproximado pelo esquema da Quadratura de Gauss. Nesta seção, mostra-se como são obtidas estas equações para problemas de transporte com simetria planar, um grupo de energia e espalhamento anisotrópico linear.

Para tal, considera-se a equação de transporte:

$$\mu \frac{d}{dx} \psi(x, \mu) + \sigma_t \psi(x, \mu) = \int_{-1}^1 \sigma_s (\mu' \rightarrow \mu) \psi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu) \quad (2.1.1)$$

Definindo o operador  $L$  associado à equação unidimensional de transporte como:

$$L [\psi(x, \mu)] = \left[ \mu \frac{d}{dx} + \sigma_t - \int_{-1}^1 \sigma_s (\mu' \rightarrow \mu) (\cdot) d\mu' \right] \psi(x, \mu) \quad (2.1.2)$$

onde:

- $\psi(x, \mu)$  é o fluxo angular de partículas na direção  $\mu$ ;
- $\sigma_t$  é a seção de choque total;

-  $\sigma_s (\mu' \rightarrow \mu)$  é seção de choque diferencial de espalhamento.

Então, a equação (2.1.1) é reescrita como:

$$L \psi(x, \mu) = Q(x, \mu) \quad (2.1.3)$$

Aplicando o método da colocação na variável  $\mu$  na equação (2.1.3), tem-se:

$$\int_{-1}^1 v L \psi d\mu = \int_{-1}^1 v Q d\mu \quad (2.1.4)$$

onde a função teste  $v$  é escolhida como a função generalizada Delta de Dirac e os pontos de colocação  $\mu_m$  são as raízes do Polinômio de Legendre de N-ésimo grau. Assim sendo, obtém-se:

$$\mu_m \frac{d}{dx} \psi(x, \mu_m) + \sigma_t \psi(x, \mu_m) - \int_{-1}^1 \sigma_s (\mu' \rightarrow \mu_m) \psi(x, \mu') d\mu' = Q(x, \mu_m) \quad (2.1.5)$$

Considerando a seguinte aproximação para a seção de choque diferencial:

$$\sigma_s (\mu' \rightarrow \mu) = \frac{1}{2} (\sigma_{s0} + 3\sigma_{s1} \mu \mu') \quad (2.1.6)$$

e aplicando a Quadratura de Gauss no termo integral da equação (2.1.5), resulta a equação de ordenada discreta  $S_N$  para o caso de espalhamento anisotrópico linear, ou seja:

$$\mu_m \frac{d}{dx} \psi_m(x) + \sigma_t \psi_m(x) = \frac{1}{2} \left[ \sigma_{s0} \sum_{k=1}^N \omega_k \psi_k(x) + 3 \mu_m \sigma_{s1} \sum_{k=1}^N \omega_k \mu_k \psi_k(x) \right] + Q_m(x) \quad (2.1.7)$$

para  $m=1, \dots, N$ , em que :

- $\psi_m(x) = \psi(x, \mu_m)$  é o fluxo angular na direção  $\mu_m$ ;
- $\sigma_{s0}$  e  $\sigma_{s1}$  são as componentes de ordem zero e um da seção de choque diferencial de espalhamento;
- $Q_m(x) = Q(x, \mu_m)$  é o termo de fonte ;
- $\mu_k$  são as raízes do polinômio de Legendre de ordem  $N$ ;
- $\omega_k$  são os respectivos pesos da quadratura de Gauss.

## 2.2 O Método $LTS_N$

A seguir, será exemplificado o método  $LTS_N$  através da resolução do problema  $S_N$  para um meio homogêneo com espalhamento anisotrópico linear, considerando o modelo de um grupo, dado pela equação (2.1.7) e sujeito às condições de contorno:

$$\psi_m(0) = f_m \quad , \quad \mu_m > 0 \quad (2.2.1a)$$

e

$$\psi_m(X) = g_m \quad , \quad \mu_m < 0 \quad (2.2.1b)$$

com  $m = 1, \dots, N$ ,  $N$  par,  $0 \leq x \leq X$ , onde  $f_m$  e  $g_m$  são os fluxos incidentes na fronteira do domínio.

Aplicando-se a transformada de Laplace à equação (2.1.7), obtém-se o seguinte sistema linear :

$$\mathbf{A}_N(s) \underline{\hat{\psi}}(s) = \underline{\psi}(0) + \underline{\hat{Q}}(s) \quad (2.2.2)$$

onde adota-se a seguinte notação:  $\hat{f} = \mathcal{L}\{f(x); x \rightarrow s\}$ . A matriz  $\mathbf{A}_N(s)$  é dada por :

$$\left[ \begin{array}{cccc} s + \frac{\sigma_t}{\mu_1} - \frac{\sigma_{s0}\omega_1}{2\mu_1} - \frac{3}{2}\sigma_{s1}\omega_1\mu_1 & -\frac{\sigma_{s0}\omega_2}{2\mu_1} - \frac{3}{2}\sigma_{s1}\omega_2\mu_2 & \dots & -\frac{\sigma_{s0}\omega_N}{2\mu_1} - \frac{3}{2}\sigma_{s1}\omega_N\mu_N \\ -\frac{\sigma_{s0}\omega_1}{2\mu_2} - \frac{3}{2}\sigma_{s1}\omega_1\mu_1 & s + \frac{\sigma_t}{\mu_2} - \frac{\sigma_{s0}\omega_2}{2\mu_2} - \frac{3}{2}\sigma_{s1}\omega_2\mu_2 & \dots & -\frac{\sigma_{s0}\omega_N}{2\mu_2} - \frac{3}{2}\sigma_{s1}\omega_N\mu_N \\ \vdots & & & \vdots \\ -\frac{\sigma_{s0}\omega_1}{2\mu_N} - \frac{3}{2}\sigma_{s1}\omega_1\mu_1 & -\frac{\sigma_{s0}\omega_2}{2\mu_N} - \frac{3}{2}\sigma_{s1}\omega_2\mu_2 & \dots & s + \frac{\sigma_t}{\mu_N} - \frac{\sigma_{s0}\omega_N}{2\mu_N} - \frac{3}{2}\sigma_{s1}\omega_N\mu_N \end{array} \right] \quad (2.2.3)$$

com:

$$\underline{\hat{\psi}}(s) = \text{col} [\hat{\psi}_1(s) \quad \hat{\psi}_2(s) \quad \dots \quad \hat{\psi}_N(s)], \quad (2.2.4)$$

$$\underline{\psi}(0) = \text{col} [\psi_1(0) \quad \psi_2(0) \quad \dots \quad \psi_N(0)] \quad (2.2.5)$$

e

$$\underline{\hat{Q}}(s) = \text{col} \begin{bmatrix} \hat{q}_1(s) & \hat{q}_2(s) & \dots & \hat{q}_N(s) \\ \mu_1 & \mu_2 & & \mu_N \end{bmatrix} \quad (2.2.6)$$

Barichello [ 7 ], explorando a estrutura da matriz  $LTS_N$  descrita em (2.2.3), obteve expressões analíticas para o determinante de  $A_N(s)$ :

$$\det A_N(s) = \prod_{k=1}^N \left( s + \frac{\sigma_t}{\mu_k} \right) - \sum_{k=1}^N \left\{ \left[ \frac{\sigma_{s0}\omega_k}{2\mu_k} + \frac{3}{2}\sigma_{s1}\omega_k\mu_k \right] \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \left( s + \frac{\sigma_t}{\mu_l} \right) \right\} + \quad (2.2.7)$$

$$\frac{3}{4}\sigma_{s0}\sigma_{s1} \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \left\{ \omega_k\omega_l\mu_l \left( \frac{1}{\mu_k} - \frac{1}{\mu_l} \right) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k,l}}^N \left( s + \frac{\sigma_t}{\mu_m} \right) \right\}$$

e para os cofatores de  $A_N(s)$ , dados por:

$$A_{ij} = \left[ \frac{\sigma_{s0}\omega_i}{2\mu_j} + \frac{3}{2}\sigma_{s1}\omega_i\mu_i \right] \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^N \left( s + \frac{\sigma_t}{\mu_k} \right) - \frac{3}{4}\sigma_{s0}\sigma_{s1} \cdot \quad (2.2.8)$$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^N \left\{ \omega_i\omega_k \left[ \frac{\mu_k}{\mu_j} + \frac{\mu_i}{\mu_k} - \frac{\mu_i}{\mu_j} - 1 \right] \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i,j,k}}^N \left( s + \frac{\sigma_t}{\mu_l} \right) \right\} ,$$

para  $i \neq j$  e por:

$$\begin{aligned}
A_{ii} = & \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \left( s + \frac{\sigma_t}{\mu_k} \right) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \left\{ \left[ \frac{\sigma_{s_0} \omega_k}{2\mu_k} + \frac{3}{2} \sigma_{s_1} \omega_k \mu_k \right] \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i, k}}^N \left( s + \frac{\sigma_t}{\mu_l} \right) \right\} + \\
& \frac{3}{4} \sigma_{s_0} \sigma_{s_1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i, k}}^N \left\{ \omega_k \omega_l \mu_l \left( \frac{1}{\mu_k} - \frac{1}{\mu_l} \right) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k, l, i}}^N \left( s + \frac{\sigma_t}{\mu_m} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Então, baseando-se no cálculo da matriz adjunta, a inversa de  $\mathbf{A}_N(s)$  pode ser escrita como:

$$\mathbf{A}_N^{-1}(s) = \frac{s^{N-1} \mathbf{P}_{N-1} + s^{N-2} \mathbf{P}_{N-2} + \dots + s \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_0}{\det \mathbf{A}_N(s)} \tag{2.2.10}$$

onde as matrizes  $\mathbf{P}_i$  ( $i = 0, \dots, N-1$ ) são tais que :

$$\mathbf{P}_{N-1} = \mathbf{I}_N \tag{2.2.11}$$

com  $\mathbf{I}_N$  sendo a matriz Identidade de ordem  $N$  e os elementos de  $\mathbf{P}_{N-k-1}$  ( $k = 1, \dots, N-1$ ) dados pelas expressões abaixo:

$$p_{ij}^{N-k-1} = V_{ij} Y_k - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i, j}}^N R_{ijl} Z_k, \tag{2.2.12}$$

para  $i \neq j$  e por:

$$p_{ii}^{N-k-1} = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^k \prod \left( \frac{\sigma_l}{\mu_m} \right) - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N H_l S_k + (1 - \delta_{1k}) \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i,l}}^N U_{lm} T_k \quad (2.2.13)$$

com:

$$S_k = \begin{cases} 1 & \text{quando } k = 1 \\ \sum \prod \left( \frac{\sigma_l}{\mu_m} \right)_{m \neq i,l} & \end{cases}, \quad (2.2.14)$$

$$T_k = \begin{cases} 1 & \text{quando } k = 2 \\ \sum \prod \left( \frac{\sigma_l}{\mu_p} \right)_{p \neq i,l,m} & \end{cases}, \quad (2.2.15)$$

$$Y_k = \begin{cases} 1 & \text{quando } k = 1 \\ \sum \prod \left( \frac{\sigma_l}{\mu_m} \right)_{m \neq i,j} & \end{cases} \quad (2.2.16)$$

e

$$Z_k = \begin{cases} 1 & \text{quando } k=2 \\ \sum \prod_{m \neq i, j, l}^{k-2} \left( \frac{\sigma_l}{\mu_m} \right) & \end{cases} \quad (2.2.17)$$

Os parâmetros  $H_l$ ,  $U_{lm}$ ,  $V_{ij}$  e  $R_{ijl}$ , por sua vez, são dados por :

$$H_l = \frac{\sigma_{s_0} \omega_l}{2\mu_l} + \frac{3}{2} \sigma_{s_1} \omega_l \mu_l, \quad (2.2.18)$$

$$U_{lm} = \frac{3}{4} \sigma_{s_0} \sigma_{s_1} \omega_l \omega_m \mu_m \left[ \frac{1}{\mu_l} - \frac{1}{\mu_m} \right], \quad (2.2.19)$$

$$V_{ij} = \frac{\sigma_{s_0} \omega_j}{2\mu_j} + \frac{3}{2} \sigma_{s_1} \omega_j \mu_j \quad (2.2.20)$$

e

$$R_{ijl} = \frac{3}{4} \sigma_{s_0} \sigma_{s_1} \omega_j \omega_l \left[ \frac{\mu_l}{\mu_j} - 1 + \frac{\mu_j}{\mu_l} - \frac{\mu_j}{\mu_i} \right] \quad (2.2.21)$$

ficando, assim, determinada a matriz  $\mathbf{A}_N^{-1}(s)$ . Observa-se que a notação  $\sum \prod^k$  indica o somatório de todos os produtos de  $k$  termos do tipo  $(\sigma_l / \mu_m)$ . O número de termos deste somatório será dado pela combinação de  $n$  elementos  $k$  a  $k$ , com  $n = 1, \dots, N-1$ .

Desta forma, a solução para o problema (2.2.2) é escrita como :

$$\underline{\hat{\psi}}(s) = \frac{s^{N-1}\mathbf{P}_{N-1} + s^{N-2}\mathbf{P}_{N-2} + \dots + s\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_0}{\det \mathbf{A}_N(s)} (\underline{\psi}(0) + \underline{\hat{Q}}(s)) , \quad (2.2.22)$$

e a formulação  $LTS_N$  para o problema (2.1.7) é então dada por:

$$\underline{\psi}(x) = \left\{ \sum_{k=1}^N \beta_k \exp(s_k x) \right\} \underline{\psi}(0) + \left\{ \sum_{k=1}^N \beta_k \exp(s_k x) \right\} * \underline{Q}(x) \quad (2.2.23)$$

onde o asterisco denota convolução e:

$$\beta_k = \left[ \frac{s_k^{N-1}\mathbf{P}_{N-1} + \dots + s_k\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_0}{\frac{d}{ds} [\det \mathbf{A}_N(s)]_{s=s_k}} \right] \quad (2.2.24)$$

é uma matriz de ordem  $(N \times N)$ , sendo  $s_k$  as raízes do determinante da matriz  $\mathbf{A}_N(s)$ .

O vetor fluxo angular  $\underline{\psi}(x)$  não pode ser determinado diretamente de (2.2.23), pois somente as  $N/2$  primeiras componentes do vetor  $\underline{\psi}(0)$  são conhecidas. Contudo, aplicando-se na equação (2.2.23) as condições de contorno em  $x = X$ , dadas por (2.2.1b), pode-se reconstruir as  $N/2$  componentes restantes do vetor  $\underline{\psi}(0)$ . Assim sendo, uma solução analítica, denominada  $LTS_N$ , é obtida para o problema (2.1.7) dado pela equação (2.2.23). O fluxo escalar é então obtido por integração numérica do fluxo angular na variável  $\mu$ , usando

Quadratura de Gauss. A generalização para o modelo de multigrupo foi obtida por Vilhena e Barichello [ 9 ].

Tendo em vista a dificuldade de inversão da matriz  $LTS_N$  pelo método descrito para  $N > 24$ , recentemente foi proposto por Brancher et alii [ 24 ] um método recursivo de inversão desta matriz para  $N$  grande. A idéia deste método para o caso isotrópico consiste em modificar a matriz  $LTS_N$ , para  $N$  arbitrário, através de operações elementares, de tal forma que a matriz resultante possua uma estrutura especial quando vista como uma matriz bloco. Faz-se a primeira componente desta ser a matriz  $LTS_{N-1}$ , assim sendo, obtém-se uma forma recursiva entre as matrizes  $LTS_N$  e  $LTS_{N-1}$ . Este procedimento já foi estendido ao caso anisotrópico.

### 3. O MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO

#### 3.1 Introdução

O método da decomposição proposto por Adomian [ 18, 19, 20 ] fornece aproximações analíticas para uma grande classe de equações não-lineares, sem que sejam necessárias linearizações, perturbações ou métodos de discretização, que geralmente provocam um trabalho exaustivo de computação numérica. Desta forma, a solução encontrada pelo método é fisicamente mais realista, no sentido de que não há necessidade de se fazer simplificações ou suposições restritivas para resolver o problema. A solução obtida por decomposição é uma série infinita na qual os termos são facilmente calculados pelo motivo da não linearidade ser bem descrita pelos polinômios de Adomian. Convém ressaltar que uma aproximação com  $n$  termos serve como solução e, em geral, são obtidos resultados numéricos precisos considerando poucos termos da série.

#### 3.2 Descrição do método

Com o objetivo de descrever o método da Decomposição, considere-se a equação diferencial:

$$Fu(t) = g(t) \tag{3.2.1}$$

onde  $F$  representa um operador diferencial ordinário não-linear, envolvendo termos lineares e não-lineares e  $g$  representa uma função qualquer. O termo linear é decomposto em uma soma de operadores  $L+R$ , onde  $L$  é facilmente inversível e  $R$  é a parte restante do operador linear. Por conveniência,  $L$  pode ser tomado como a derivada de mais alta ordem. Assim, a equação (3.2.1) pode ser escrita como:

$$Lu + Ru + Nu = g \quad , \quad (3.2.2)$$

onde  $Nu$  representa o termo não-linear e resolvendo a equação para  $Lu$ , tem-se:

$$Lu = g - Ru - Nu \quad (3.2.3)$$

Como o operador  $L$  é inversível, a equação pode ser escrita da seguinte forma::

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad , \quad (3.2.4)$$

onde  $L^{-1}$  denota a inversa do operador  $L$ . Para exemplificar, se  $L$  é um operador diferencial de primeira ordem, então  $L^{-1}$  é um operador integral simples, ou seja:

$$L^{-1}Lu(t) = u(t) - u(t_0) \quad ; \quad (3.2.5)$$

se  $L$  é um operador diferencial de segunda ordem,  $L^{-1}$  é um operador de integração dupla, isto é:

$$L^{-1}Lu(t) = u(t) - u(t_0) - (t - t_0)u'(t_0) \quad (3.2.6)$$

e assim sucessivamente.

Para problemas de valor inicial (e problemas de contorno também) integrais indefinidas são usadas e as constantes são avaliadas a partir das condições dadas. Resolvendo a equação (3.2.4) em  $u$  e considerando  $L$  um operador diferencial de segunda ordem, tem-se:

$$u = A + Bt + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (3.2.7)$$

onde:

$$A = u(t_0) - t_0 u'(t_0) \quad (3.2.7a)$$

e

$$B = u'(t_0) \quad (3.2.7b)$$

Expandindo termo  $Nu$  na série  $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ , onde os elementos  $A_n$  são os polinômios determinados por Adomian, e a função  $u$  na série  $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$  e, ainda,

tomando  $u_0$  como :

$$u_0 = A + Bt + L^{-1}g \quad (3.2.8)$$

pode-se reescrever a equação (3.2.7) da seguinte forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.2.9)$$

Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ u_2 &= -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1 \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Os polinômios  $A_n$  são gerados, para cada não-linearidade, de forma que  $A_0$  dependa somente de  $u_0$ ,  $A_1$  dependa somente de  $u_0$  e  $u_1$  e assim por diante. Se a série

$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$  converge, a soma parcial até o  $n$ -ésimo termo,  $\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ , será a solução

aproximada desde que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \sum_{i=0}^{\infty} u_i = u$ , por definição.

Duas formulações tem sido desenvolvidas para os polinômios  $A_n$ : um conjunto designado como  $A_n$  e outro por  $\tilde{A}_n$ . Considere-se uma equação, em que  $u(x)$  é a solução contendo o termo não-linear :

$$Nu \equiv f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n \quad (3.2.11)$$

Expandindo a função  $f(u)$  em série de Taylor em termos de  $u_0(x)$ , tem-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n = f(u_0) + (u - u_0) \frac{d}{du_0} f(u_0) + \frac{(u - u_0)^2}{2!} \frac{d^2}{du_0^2} f(u_0) + \dots \quad (3.2.12)$$

e os polinômios  $\tilde{A}_n$  são definidos por:

$$\tilde{A}_0 = f(u_0)$$

$$\tilde{A}_1 = u_1 \frac{d}{du_0} f(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} \frac{d^2}{du_0^2} f(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} \frac{d^3}{du_0^3} f(u_0) + \dots$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_2 = & u_2 \frac{d}{du_0} f(u_0) + \frac{u_2^2}{2!} \frac{d^2}{du_0^2} f(u_0) + \dots \\ & + u_1 u_2 \frac{d^2}{du_0^2} f(u_0) + \frac{1}{2} (u_1^2 u_2 + u_2^2 u_1) \frac{d^3}{du_0^3} f(u_0) + \dots \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

⋮

e assim sucessivamente.

Por sua vez, os polinômios  $A_n$  são gerados de forma que a soma dos subíndices de cada termo de  $A_n$  é igual a  $n$ . Assim:

$$A_0 = f(u_0)$$

$$A_1 = u_1 \frac{d}{du_0} f(u_0)$$

$$A_2 = u_2 \frac{d}{du_0} f(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} \frac{d^2}{du_0^2} f(u_0) \quad (3.2.14)$$

$$A_3 = u_3 \frac{d}{du_0} f(u_0) + u_1 u_2 \frac{d^2}{du_0^2} f(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} \frac{d^3}{du_0^3} f(u_0)$$

⋮

e assim sucessivamente. Foi mostrado por Cherrualt [ 25 ] que as duas formulações são convergentes sendo que a formulação (3.2.13) é chamada de forma acelerada por ser sua convergência mais rápida.

Para aplicação do método da Decomposição na resolução de equações transcendentais [ 22, 23 ], é necessário escrever a equação na forma:

$$u = c + f(u) \quad (3.2.15)$$

onde  $u$  é a solução procurada. O motivo para este procedimento reside no fato de considerar  $u_0$  igual a constante  $c$ . Como consequência, a função conhecida  $f(u)$  pode ser expandida em termos dos polinômios  $A_n$  e  $\tilde{A}_n$ , avaliados em  $u_0$ .

Assim sendo, a solução da equação transcendental (3.2.15) pode ser expressa em termos dos polinômios  $\tilde{A}_n$  como:

$$u = c + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n \quad (3.2.16)$$

e, em termos dos polinômios  $A_n$ , como:

$$u = c + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.2.17)$$

## 4. CÁLCULO DA ESPESSURA DE BLINDAGEM PELOS MÉTODOS $LTS_N$ E DECOMPOSIÇÃO

### 4.1 Introdução

A principal preocupação no desenho e projeto de blindagens é a redução da radiação a níveis toleráveis no exterior da mesma. Porém, questões referentes à otimização de custo, preço e espessura são também de grande interesse. Blindagens para o transporte de materiais radioativos ou para equipamentos móveis de produção de radiação não devem ser demasiado pesadas pois a baixa massa é essencial em suas aplicações. Por outro lado, uma blindagem de pequena espessura pode ser desejável nos casos em que se pretende reduzir tamanho e custo, como também na construção de blindagens para equipamentos ou, ainda, para maximizar a densidade do fluxo num feixe externo à mesma [ 26 ].

A blindagem pode também atuar como um membro estrutural, sendo assim, deve suportar tensões mecânicas devido a seu próprio peso. O calor gerado pela absorção da radiação ou transmitido pela fonte pode provocar tensões térmicas, desidratação (como no concreto) e danos nos materiais. Dependendo do uso, os materiais de blindagem podem necessitar de proteção contra corrosão, reações químicas e danos causados pela radiação para sua maior durabilidade.

As fontes de íons e elétrons são facilmente blindadas por materiais de baixa densidade. Os elétrons são blindados por poucos milímetros de qualquer material sólido ou líquido, mas um elemento com baixo número atômico é preferível para minimizar a geração de penetração

da radiação de frenamento. Qualquer radiação de frenamento gerada pode ser atenuada por chumbo, ferro ou outros materiais usados na blindagem de raios  $\gamma$ .

Os materiais mais comuns para blindar fontes de raios X e  $\gamma$  são chumbo e ferro mas o tungstênio e o urânio exaurido podem ser usados (num custo mais alto) se uma blindagem de menor espessura for solicitada. O concreto e até mesmo a água têm sido usados quando o peso e a espessura não interessam.

Os nêutrons térmicos são facilmente absorvidos em poucos milímetros de materiais com altas seções de choque de absorção de nêutrons, tal como o boro, que pode estar na forma de carboneto de boro ou boro solúvel composto. Um ou dois milímetros de cádmio também absorvem aproximadamente todos os nêutrons térmicos, todavia este material possui duas desvantagens: um baixo ponto de fusão e a emissão de raios  $\gamma$  pela captura radioativa.

A blindagem para nêutrons rápidos é mais difícil. Eles são freqüentemente acompanhados por raios  $\gamma$  provenientes tanto da fonte como gerados por nêutrons de captura, ou ainda pelo espalhamento inelástico na blindagem. O espalhamento inelástico ajuda a moderar os nêutrons e o hidrogênio é o elemento que melhor os atenua. Alguns materiais comuns na blindagem de nêutrons são a água, polietileno, concreto e lítio hidratado.

Os elementos para atenuação de raios  $\gamma$  e nêutrons podem ser misturados de modo a formar uma mistura homogênea que irá se constituir no material de blindagem. Assim, por exemplo, o minério de ferro ou o ferro velho podem ser usados como agregados para o concreto pesado ou de alta densidade, com melhor atenuação de raios  $\gamma$  do que o concreto comum. Contudo, blindagens mais finas ou menos pesadas podem ser feitas usando camadas de um atenuador denso de raios gama e um atenuador menos denso de nêutrons. Como exemplo de blindagens formadas por duas camadas pode-se citar: ferro-água, chumbo-polietileno, ferro-concreto e outros. O peso é reduzido ao se colocar o material denso próximo

à fonte e, por outro lado, a produção de raios  $\gamma$  secundários no material denso pode ser reduzida colocando-se algum material atenuador de nêutrons entre ela e a fonte.

Uma vez escolhidos os materiais, um processo iterativo de cálculo de dose de nêutrons rápidos, de raios  $\gamma$  primários e raios  $\gamma$  secundários é necessário para otimizar a espessura da lâmina e minimizar o peso ou a espessura total.

Neste trabalho, propomos a otimização da espessura de blindagem ao invés de outro funcional como o tipo de material, o peso ou o custo.

## 4.2 Cálculo da Espessura de Blindagem

Para a determinação da espessura de blindagem calcula-se o fluxo resolvendo o seguinte problema de ordenadas discretas:

$$\mu_m \frac{d}{dx} \psi_m(x) + \sigma_t \psi_m(x) = \frac{1}{2} \left[ \sigma_{s0} \sum_{k=1}^N \omega_k \psi_k(x) + 3\mu_m \sigma_{s1} \sum_{k=1}^N \omega_k \mu_k \psi_k(x) \right] \quad (4.2.1)$$

com  $0 \leq x \leq X$  e sujeito às condições de contorno:

$$\psi_m(0) = f_m, \quad \mu_m > 0 \quad (4.2.1a)$$

$$\psi_m(X) = 0, \quad \mu_m < 0 \quad (4.2.1b)$$

A solução para o problema (4.2.1) para o fluxo angular em  $x = X$  é dada por:

$$\psi_m(X) = \sum_{k=1}^N \beta_{mk} \exp(s_k X) \quad (4.2.2)$$

onde  $\beta_{mk}$  é o m-ésimo elemento do vetor  $\beta_k \underline{\psi}(0)$ , que depende da espessura  $X$ , o qual está definido na seção 2.2.

O fluxo escalar é obtido por integração numérica do fluxo angular na variável  $\mu$  pelo esquema de Quadratura de Gauss, ou seja:

$$\phi(X) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \psi(X, \mu) d\mu = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \omega_m \psi_m(X) \quad (4.2.3)$$

Assim, sendo a taxa de dose definida como:

$$\dot{D} = \mu_a E \phi \quad (4.2.4)$$

onde  $\mu_a$ ,  $E$ ,  $\phi$  são, respectivamente, o coeficiente de atenuação de massa, a energia do feixe incidente e o fluxo de nêutrons ou fótons, pode-se determinar expressões que relacionem a espessura  $X$  da placa e a taxa de dose absorvida.

Desta forma, substituindo (4.2.3) em (4.2.4), usando o resultado da equação (4.2.2) e rearranjando os termos, resultam as seguintes equações transcendentais para a espessura  $X$ :

$$(I) \text{ para } \frac{2\dot{D}}{\omega_1} > 1 \text{ e } s_1 > 0:$$

(observe-se que  $s_1$  é qualquer uma das raízes positivas do determinante da matriz  $LTS_N$ )

$$\exp(s_1 X) = \frac{2\dot{D}}{\omega_1} \left\{ \frac{1}{\mu_a E \beta_{11}} - \frac{1}{2\dot{D}\beta_{11}} \left[ \sum_{m=2}^N \omega_m \beta_{m1} \exp(s_1 X) + \sum_{m=1}^N \omega_m \sum_{k=2}^N \beta_{mk} \exp(s_k X) \right] \right\} \quad (4.2.5)$$

(II) para  $\frac{2\dot{D}}{\omega_1} < 1$  e  $s_2 < 0$ :

(observe-se que  $s_2$  é qualquer uma das raízes negativas do determinante da matriz  $LTS_N$ )

$$\exp(s_2 X) = \frac{2\dot{D}}{\omega_1} \left\{ \frac{1}{\mu_a E \beta_{12}} - \frac{1}{2\dot{D}\beta_{12}} \left[ \sum_{m=2}^N \omega_m \beta_{m2} \exp(s_2 X) + \sum_{m=1}^N \omega_m \left( \beta_{m1} \exp(s_1 X) + \sum_{k=3}^N \beta_{mk} \exp(s_k X) \right) \right] \right\} \quad (4.2.6)$$

Convém salientar que outro tipo de decomposição poderia ser feito. Na discussão dos resultados apresenta-se um comentário sobre a inexistência de unicidade da mesma.

Para a aplicação do método da Decomposição deve-se escrever as equações transcendentais acima na forma da equação (3.2.15). Assim procedendo, no caso (I) tem-se, para  $X_0$  e  $f(X)$ , respectivamente:

$$X_0 = \frac{1}{s_1} \ln \left( \frac{2\dot{D}}{\omega_1} \right) \quad (4.2.7)$$

$$f(X) = \frac{1}{s_1} \ln \left\{ \frac{1}{\mu_a E \beta_{11}} - \frac{1}{2\dot{D}\beta_{11}} \left[ \sum_{m=2}^N \omega_m \beta_{m1} \exp(s_1 X) + \sum_{m=1}^N \omega_m \sum_{k=2}^N \beta_{mk} \exp(s_k X) \right] \right\} \quad (4.2.8)$$

e para o caso ( II ), tem-se:

$$X_0 = \frac{1}{s_2} \ln \left( \frac{2 \dot{D}}{\omega_1} \right) \quad (4.2.9)$$

$$f(X) = \frac{1}{s_2} \ln \left\{ \frac{1}{\mu_a E \beta_{12}} - \frac{1}{2 \dot{D} \beta_{12}} \left[ \sum_{m=2}^N \omega_m \beta_{m2} \exp(s_2 X) + \sum_{m=1}^N \omega_m \left( \beta_{m1} \exp(s_1 X) + \sum_{k=3}^N \beta_{mk} \exp(s_k X) \right) \right] \right\} \quad (4.2.10)$$

É importante mencionar que a separação do problema em dois casos é feita pois observa-se que há convergência do método quando toma-se a constante  $X_0$  com valor positivo. Finalmente, expandindo  $f(X)$  descrito pelas equações (4.2.8) e (4.2.10) em termos dos polinômios  $\tilde{A}_n$  e  $A_n$ , resultam as seguintes formulações para o cálculo da espessura de blindagem:

( i ) em termos de  $\tilde{A}_n$  :

$$X = X_0 + \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \dots \quad (4.2.11)$$

( i i ) em termos de  $A_n$  :

$$X = X_0 + A_0 + A_1 + A_2 + \dots \quad (4.2.12)$$

em que  $\tilde{A}_n$  e  $A_n$  são descritos em (3.2.13) e (3.2.14), respectivamente. Denota-se o primeiro método de solução para a espessura de blindagem como  $D_tLTS_N$  e o segundo como  $DLTS_N$ .

## 5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Seja o problema (4.2.1) para uma placa plana homogênea, com os parâmetros de seção de choque dados por:  $\sigma_t = 1,0 \text{ (cm}^{-1}\text{)}$ ,  $\sigma_{s0} = 0,99 \text{ (cm}^{-1}\text{)}$  e  $\sigma_{s1} = 0,80 \text{ (cm}^{-1}\text{)}$ ; as condições de contorno definidas em (4.2.1a) e (4.2.1b) da forma:  $\psi_m(0) = 1,0 \left( \frac{\text{fotons}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}} \right)$  para  $\mu_m > 0$  e  $\psi_m(X) = 0 \left( \frac{\text{fotons}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}} \right)$  para  $\mu_m < 0$  e, ainda, o valor do coeficiente de atenuação de massa e a energia do feixe incidente, definidos no apêndice A, dados por:

$$\mu_a = 1 \left( \frac{\text{cm}^2}{\text{g}} \right) \text{ e } E = 1 \text{ Mev.}$$

Na tabela 5.1 são apresentados valores para a espessura, calculados pelas expressões (4.2.11) e (4.2.12), para diferentes valores de taxa de dose (caso II), considerando-se os métodos DLTS<sub>2</sub> e D<sub>l</sub>LTS<sub>2</sub> (combinação do método da Decomposição com a formulação LTS<sub>2</sub>), bem como os respectivos erros percentuais em relação à espessura exata. Estes resultados são obtidos tomando-se cinco termos da solução em série. Observa-se que as taxas de dose utilizadas foram calculadas pela formulação LTS<sub>2</sub> pois, considerando-se valores unitários para a energia e para o coeficiente de atenuação de massa, a taxa de dose iguala-se ao fluxo.

Tabela 5.1- Cálculo da espessura de blindagem de uma placa plana pelos métodos DLTS<sub>2</sub> e D<sub>1</sub>LTS<sub>2</sub>

Taxa de dose $\left(\frac{\text{Mev}}{\text{g.s}}\right)$	X exato $\left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^2}\right)$	DLTS <sub>2</sub>	erro (%)	D <sub>1</sub> LTS <sub>2</sub>	erro (%)
$0.62129 \times 10^{-2}$	50	50.2768	0.55	50.1528	0.30
$0.12918 \times 10^{-3}$	100	100.2776	0.28	100.1534	0.15
$0.26865 \times 10^{-5}$	150	150.2773	0.18	150.1532	0.10
$0.55795 \times 10^{-7}$	200	200.2390	0.12	200.1101	0.06

Analisando-se os resultados para a espessura de blindagem apresentados na tabela 5.1 observa-se que, quando são considerados cinco termos no método da Decomposição, os resultados obtidos pelos métodos propostos são razoavelmente coincidentes.

Por outro lado, na tabela 5.2, para um valor de taxa de dose de  $0.12918 \times 10^{-3} \left(\frac{\text{Mev}}{\text{g.s}}\right)$ , a qual corresponde a espessura exata  $X=100 \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^2}\right)$ , é feito um estudo comparativo dos resultados numéricos obtidos pelos métodos DLTS<sub>2</sub> e D<sub>1</sub>LTS<sub>2</sub>, com o número de termos da solução em série variando de um até cinco.

Tabela 5.2- Resultados numéricos dos métodos DLTS<sub>2</sub> e D<sub>1</sub>LTS<sub>2</sub> para a espessura exata

$X=100 \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^2}\right)$  com o número de termos da solução variando de um a cinco

Número de termos	DLTS <sub>2</sub>	erro (%)	D <sub>1</sub> LTS <sub>2</sub>	erro (%)
1	106.6511	6.65	106.6511	6.65
2	102.2832	2.28	102.2832	2.28
3	101.0296	1.03	100.8710	0.87
4	100.5185	0.52	100.3520	0.35
5	100.2776	0.28	100.1534	0.15

Observa-se que o método  $D_1LTS_2$  produz resultados com menor número de termos para uma dada precisão.

Para analisar o efeito do aumento da ordem de Quadratura na precisão dos resultados apresenta-se na tabela 5.3 as espessuras obtidas com a combinação do método da Decomposição e a formulação  $LTS_4$ . O procedimento é análogo ao anterior e considera-se apenas dois termos da solução em série. As taxas de dose utilizadas correspondem aos fluxos calculados pela formulação  $LTS_4$ .

Tabela 5.3- Cálculo da espessura de blindagem de uma placa plana pelos métodos  $DLTS_4$  e  $D_1LTS_4$

Taxa de dose $\left(\frac{\text{Mev}}{\text{g} \cdot \text{s}}\right)$	X exato $\left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^2}\right)$	$DLTS_4$	erro (%)	$D_1LTS_4$	erro (%)
$0.58499 \times 10^{-2}$	50	50.0705	0.14	50.0705	0.14
$0.12353 \times 10^{-3}$	100	100.0708	0.07	100.0708	0.07
$0.26089 \times 10^{-5}$	150	150.0708	0.05	150.0708	0.05
$0.55098 \times 10^{-7}$	200	200.0708	0.04	200.0708	0.04

Verifica-se que os resultados obtidos pelos dois métodos, neste caso, são coincidentes.

Finalmente, como a decomposição proposta neste trabalho não é única, apresenta-se nas tabelas 5.4 e 5.5 os resultados obtidos para a espessura de blindagem, considerando-se outras decomposições, e utilizando os métodos  $DLTS_2$  e  $D_1LTS_2$ ,  $DLTS_4$  e  $D_1LTS_4$  com os respectivos erros percentuais em relação à espessura exata.

Tabela 5.4 - Cálculo da espessura de blindagem de uma placa plana pelos métodos DLTS<sub>2</sub> e D<sub>1</sub>DLTS<sub>2</sub> considerando diferentes decomposições.

X exato $\left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^2}\right)$	$X_0$	DLTS <sub>2</sub>	erro (%)	D <sub>1</sub> DLTS <sub>2</sub>	erro (%)
50	$\frac{1}{s_2} \ln(\dot{D})$	50.8406	1.68	50.4622	0.92
	$\frac{1}{s_2} \ln\left(\frac{\dot{D}}{\omega_1}\right)$	50.8406	1.68	50.4622	0.92
	$\frac{1}{s_2} \ln(2 \dot{D})$	50.2768	0.55	50.1528	0.30
	$\frac{1}{s_2} \ln\left(\frac{2 \dot{D}}{\omega_1}\right)$	50.2768	0.55	50.1528	0.30
100	$\frac{1}{s_2} \ln(\dot{D})$	100.8421	0.84	100.4633	0.46
	$\frac{1}{s_2} \ln\left(\frac{\dot{D}}{\omega_1}\right)$	100.8421	0.84	100.4633	0.46
	$\frac{1}{s_2} \ln(2 \dot{D})$	100.2776	0.28	100.1534	0.15
	$\frac{1}{s_2} \ln\left(\frac{2 \dot{D}}{\omega_1}\right)$	100.2776	0.28	100.1534	0.15
150	$\frac{1}{s_2} \ln(\dot{D})$	150.8419	0.56	150.4632	0.31
	$\frac{1}{s_2} \ln\left(\frac{\dot{D}}{\omega_1}\right)$	150.8419	0.56	150.4632	0.31
	$\frac{1}{s_2} \ln(2 \dot{D})$	150.2773	0.18	150.1532	0.10
	$\frac{1}{s_2} \ln\left(\frac{2 \dot{D}}{\omega_1}\right)$	150.2773	0.18	150.1532	0.10
200	$\frac{1}{s_2} \ln(\dot{D})$	200.8254	0.41	200.4273	0.21
	$\frac{1}{s_2} \ln\left(\frac{\dot{D}}{\omega_1}\right)$	200.8254	0.41	200.4273	0.21
	$\frac{1}{s_2} \ln(2 \dot{D})$	200.2390	0.12	200.1101	0.06
	$\frac{1}{s_2} \ln\left(\frac{2 \dot{D}}{\omega_1}\right)$	200.2390	0.12	200.1101	0.06

Tabela 5.5 - Cálculo da espessura de blindagem de uma placa plana pelos métodos DLTS<sub>4</sub> e D<sub>1</sub>LTS<sub>4</sub> considerando diferentes decomposições.

X exato $\left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^2}\right)$	$X_0$	DLTS <sub>4</sub>	erro (%)	D <sub>1</sub> LTS <sub>4</sub>	erro (%)
50	$\frac{1}{s_2} \ln(\dot{D})$	50.3432	0.69	50.3432	0.69
	$\frac{1}{s_2} \ln\left(\frac{\dot{D}}{\omega_1}\right)$	50.2722	0.54	50.2722	0.54
	$\frac{1}{s_2} \ln(2 \dot{D})$	50.2104	0.42	50.2104	0.42
	$\frac{1}{s_2} \ln\left(\frac{2 \dot{D}}{\omega_1}\right)$	50.0705	0.14	50.0705	0.14
100	$\frac{1}{s_2} \ln(\dot{D})$	100.3450	0.34	100.3450	0.34
	$\frac{1}{s_2} \ln\left(\frac{\dot{D}}{\omega_1}\right)$	100.2738	0.27	100.2738	0.27
	$\frac{1}{s_2} \ln(2 \dot{D})$	100.2118	0.21	100.2118	0.21
	$\frac{1}{s_2} \ln\left(\frac{2 \dot{D}}{\omega_1}\right)$	100.0708	0.07	100.0708	0.07
150	$\frac{1}{s_2} \ln(\dot{D})$	150.3449	0.23	150.3449	0.23
	$\frac{1}{s_2} \ln\left(\frac{\dot{D}}{\omega_1}\right)$	150.2736	0.18	150.2736	0.18
	$\frac{1}{s_2} \ln(2 \dot{D})$	150.2116	0.14	150.2116	0.14
	$\frac{1}{s_2} \ln\left(\frac{2 \dot{D}}{\omega_1}\right)$	150.0708	0.05	150.0708	0.05
200	$\frac{1}{s_2} \ln(\dot{D})$	200.3450	0.17	200.3450	0.17
	$\frac{1}{s_2} \ln\left(\frac{\dot{D}}{\omega_1}\right)$	200.2737	0.14	200.2737	0.14
	$\frac{1}{s_2} \ln(2 \dot{D})$	200.2117	0.10	200.2117	0.10
	$\frac{1}{s_2} \ln\left(\frac{2 \dot{D}}{\omega_1}\right)$	200.0708	0.04	200.0708	0.04

Os resultados para a espessura de blindagem podem ser melhorados aumentando-se a ordem de quadratura e o número de termos da série. O cálculo de inversão da matriz  $LTS_N$  bem como o método de inversão do fluxo angular transformado foram desenvolvidos no software Mathematica e num microcomputador PC-486. Nestas condições só foi possível trabalhar com  $N$  até quatro, devido a limitações de memória. Acredita-se que esta dificuldade será superada utilizando-se a formulação  $LTS_N$  com  $N$  grande proposta por Brancher et alii [ 24 ].

## 6. CONCLUSÃO

Acredita-se que o objetivo desse trabalho foi atingido uma vez que, pela combinação dos Métodos  $LTS_N$  e Decomposição, foi possível obter uma expressão analítica para a espessura de blindagem de uma placa plana homogênea. Observando que a formulação  $LTS_N$  foi estendida a problemas heterogêneos de multigrupo, a generalização do método para estes casos é imediata. A importância deste resultado é ressaltada pelo fato de que, utilizando-se os núcleos de transformação, é possível aplicá-lo a outras geometrias de interesse, por exemplo, cilíndricas e esféricas [ 27 ] .

Deve-se acrescentar à analiticidade da solução os bons resultados obtidos para a espessura de blindagem, apresentados nas tabelas 5.1, 5.2 e 5.3, tanto para os polinômios  $A_n$  como  $\tilde{A}_n$ , uma vez que, usando a formulação  $LTS_2$ , foi possível encontrar a espessura de blindagem com erro máximo de 0,55 %, considerando cinco termos da série. O erro diminuiu para 0,14 % quando é usada a formulação  $LTS_4$  com apenas dois termos. Sob o ponto de vista da engenharia este método torna-se atrativo porque gera resultados com precisão desejada e com pequeno número de termos da solução em série.

É importante observar que a decomposição descrita pelas equações (4.2.5) e (4.2.6) não é única, conforme já foi comentado. Tentou-se outras, do tipo, colocar em evidência  $\dot{D} / \omega_1$ ,  $2 \dot{D}$ ,  $\dot{D}$ , e verificou-se que, tanto para aproximação  $LTS_2$  como para a aproximação  $LTS_4$ , os melhores resultados para a espessura de blindagem foram obtidas com a decomposição proposta.

Conclui-se que, tendo sido provada a convergência do método  $LTS_N$  [ 28 ] e a do método da Decomposição [ 25 ] , o erro da solução encontrado para a espessura de

blindagem pelo método proposto pode ser controlado, aumentando-se tanto a ordem de quadratura como o número de termos da série.

Como trabalho futuro pretende-se utilizar a formulação  $LTS_N$  com  $N$  grande para calcular a espessura de blindagem com modelo de multigrupo.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. GARCIA, R. D. M. A Review of the facile ( $F_N$ ) Method in Particle Transport Theory. **Transport Theory and Statistical Physics**, v. 14, n. 4, p. 391- 435, 1985.
2. BARROS, R. & LARSEN, E. W. A Numerical Method for One-Group Slab Geometry Discrete Ordinate Problems With no Spatial Truncation Error. **Nuclear Science and Engineering**, v.104, p. 199 - 208, 1990.
3. STRECK, E. E. **Solução Analítica para a Aproximação  $P_N$  da Equação de Transporte Linear Unidimensional**. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1993.
4. CARDONA, A. V. **Método Genérico de Solução Analítica para Aproximações da Equação Linear de Transporte**. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1996.
5. VILHENA, M. T. & BARICHELLO, L. B. A New Analytical Approach to Solve the Neutron Transport Equation. **Kerntechnik**, v. 56, n. 5, p. 334 - 336, 1991.
6. BARICHELLO, L. B. & VILHENA, M. T. A General Approach to One-Group, One Dimensional Transport Equation. **Kerntechnik**, v. 58, n. 3, p. 182 - 184, 1993.
7. BARICHELLO, L. B. **Formulação Analítica para Solução do Problema de Ordenada Discreta Unidimensional**. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1992.
8. OLIVEIRA, J. V. P. ; AGOSTINI, M. N.; BARICHELLO, L. B.; VILHENA, M. T. Formulação Analítica para solução do Problema de Ordenada Discreta Unidimensional

- de Transporte de Nêutrons com Espalhamento Anisotrópico. **Anais do IX ENFIR- Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica**, p. 72 - 77, Caxambú, M.G., 1993.
9. VILHENA, M. T. & BARICHELLO, L. B. An Analytical Solution for the Multigroup Slab Geometry Discrete Ordinate Problem. **J. Transport Theory and Statistical Physics**, 24(9), p. 1337-1352, 1995.
10. BARICHELLO, L. B. & VILHENA, M. T. Um problema Inverso em Transporte de Nêutrons e Radiação. **Anais do IX ENFIR - Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica**, Caxambú, M. G., p. 22 - 24, 1993.
11. SOUZA, S. I. S. **Determinação de Parâmetros Radiantes pelos Métodos  $LTS_N$  e  $LTP_N$  para Geometria Planar**. Dissertação de Mestrado pelo Programa de Pós- Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1993.
12. ZABADAL, J.; VILHENA, M. T. ; BARICHELLO, L. B. Solução da Equação de Ordenada Discreta em Duas Dimensões pelo Método  $LTS_N$ . **Anais do IX ENFIR - Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica**, Caxambú, M. G., p. 90 - 92, 1993.
13. ZABADAL, J.; VILHENA, M. T. ; BARICHELLO, L. B. Solution of the Three-Dimensional One-Group Discrete Ordinates Problem by the  $LTS_N$  Method. **Annals of Nuclear Energy**, v. 22, n. 2, p. 131 - 134, 1995.
14. ZABADAL, J.; VILHENA, M. T.; BARICHELLO, L. B. An Analytical Solution For the Two- Dimensional Discrete Ordinate Problem In a Convex Domain. **Progress in Nuclear Energy**, em impressão.

15. ZABADAL, J. **Solução Analítica da Equação de Ordenadas Discreta Multidimensional**. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1994.
16. SEGATTO, C. F. **Formulação  $LTS_N$  para Problemas de Transporte sem Simetria Azimutal e Problemas Dependentes do Tempo**. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1995
17. SEGATTO, C. F.; BARICHELLO, L. B. ; VILHENA, M. T. Estudo Comparativo de Métodos de Solução da Aproximação  $S_N$  da Equação de Transporte Linear. **Anais do XVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**, Vitória, E. S., 1994.
18. ADOMIAN, G. Analytic Solutions for Nonlinear Equation. **Applied Mathematics and Computation**, n. 26, p. 77-88, 1985.
19. ADOMIAN, G. A Review of the Decomposition Method in Applied Mathematics. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 135, p 501-544, 1988.
20. ADOMIAN, G. **Nonlinear Stochastic Operator Equation** . Academic Press, Orlando, 1986.
21. VARGAS, R. M. F. & VILHENA, M. T. Analytical Solution of the Discrete Ordinates Problem by the Decomposition Method. Em impressão na revista **Annals of Nuclear Energy**.
22. BRANCHER, J. D. ; VILHENA, M. T ; ZARO, M. A. O Método da Decomposição aplicado à solidificação: solução analítica do Modelo de Schwarz. **Anais do V Encontro Nacional de Ciências Térmicas e II Simpósio de Engenharia Térmica**, São Paulo, p. 277- 280, 1994.

23. BRANCHER, J. D. **Solução Analítica para o cálculo da constante de solidificação do Modelo de Resfriamento de Schwarz**. Dissertação de Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1994.
24. BRANCHER, J.; CARDONA, A.V.; VILHENA, M.T. Recursive Method to Invert the  $LTS_N$  Matrix. Em impressão na revista **Progress in Nuclear Energy**.
25. CHERRUALT, Y. **Convergence of Adomian's Method**. Medimat, Univesité Paris VI, 1988.
26. PROFIO, Edward A. **Radiation Shielding and Dosimetry**. A. Wiley - Interscience Publication, 1986.
27. GLOYNA, E. F & LEDBETTER, J. O. **Principles of Radiological Health**. Marcel Decker, Inc. ,New York, 1969.
28. PAZOS, R. P. & VILHENA, M. T. **Convergence of the  $LTS_N$  Method: An Approach of  $C_0$ -Semigroup**, em impressão.
29. DUDERSTADT, J. & MARTIN, W. **Transport Theory**. New York, John Wiley & Sons, 1975.
30. BELL, G. L. & GLASSTONE, S. **Nuclear Reactor Theory**. Litton Educational Publishing, Inc. , 1970.
31. DUDERSTADT, J. & HAMILTON, L. J. **Nuclear Reactor Analysis**. New York, John Wiley & Sons, 1976.
32. TAIT, J. H. **Neutron Transport Theory**. Green and Co Ltd, London, 1964.
33. OKUNO, E. **Radiação, Efeitos, Riscos e Benefícios**. Harbra, 1988.
34. TAUHATA, L. & ALMEIDA, E. S. **Radiações Nucleares: Usos e Cuidados**. CNEN, 2a. edição, 1984.

35. VILHENA, M. T. & BORGES, V. O uso dos métodos LTSN e Decomposição no cálculo de Blindagens. **Simpósio sobre Integração Regional na Energia Nuclear**, Rio de Janeiro, 1995.
36. LAMARSH, J. R. **Introduction to Nuclear Reactor Theory**. Addison - Wesley Publishing Company, Inc. , 1966.
37. CEMBER, H. **Introduction to Health Physics**. Pergamon Press, Oxford, 1969.
38. BITELLI, T. **Dosimetria e Higiene das Radiações**. Editora do Grêmio Politécnico, São Paulo, 1982.

## APÊNDICE A

### Aspectos físicos relevantes no cálculo da espessura de blindagem

Radiação é uma forma de energia emitida por uma fonte e que se propaga de um ponto a outro sob forma de partículas com ou sem carga elétrica, ou sob a forma de ondas eletromagnéticas. Como exemplo de radiações podemos citar: calor, luz, ondas de rádio e TV, radiação ultravioleta, raios X, raios  $\gamma$ , partículas  $\alpha$ , partículas  $\beta$ , ....

Os efeitos danosos das radiações ionizantes sobre os materiais e os organismos vivos foram conhecidos pouco tempo depois da descoberta da radioatividade. Estes efeitos, produzidos quando uma porção de matéria viva ou inanimada é atravessada por radiações, iniciam-se pela ionização de átomos ou moléculas na região afetada. A ionização é o mecanismo pelo qual a radiação arranca direta ou indiretamente um elétron de um átomo, que se transforma em um íon positivo. Este processo pode produzir reações químicas prejudiciais à vida da célula. O acúmulo e a extensão destes efeitos pode vir a prejudicar a saúde ou integridade do organismo vivo.

O conhecimento dos prejuízos causados pelas radiações resultou no aparecimento de medidas e formas alternativas de proteção, dentre elas, a blindagem. Nos últimos anos, esforços consideráveis têm sido dispendidos no sentido de desenvolver métodos analíticos e técnicas mais avançadas para contornar problemas de blindagens e obter dados experimentais pertinentes ao seu planejamento.

## Interação da radiação com a matéria

Pode-se distinguir dois tipos de radiação: a radiação corpuscular e a eletromagnética. A radiação corpuscular é constituída de partículas carregadas ou não e a eletromagnética é formada por ondas eletromagnéticas. A radiação corpuscular, formada por partículas carregadas, é chamada de diretamente ionizante, pois as cargas elétricas das partículas podem produzir ionização direta; a radiação eletromagnética e a formada por partículas sem carga são denominadas de indiretamente ionizantes, devido ao fato de as partículas responsáveis pela ionização não pertencerem ao feixe de radiação incidente.

As radiações diretamente ionizantes incluem partículas  $\alpha$ , partículas  $\beta$ , prótons, íons pesados, dêuterons e fragmentos de fissão. Estas partículas carregadas perdem energia ao interagir com os elétrons orbitais ou com os núcleos dos átomos que compõem o material que atravessam. Há dois processos importantes envolvendo a interação com elétrons orbitais: excitação atômica ou molecular, com emissão de luz resultante da desexcitação e ionização que envolve a ejeção de um elétron orbital, resultando na criação de um par iônico.

As partículas alfa são núcleos de hélio constituídos de 2 prótons e 2 nêutrons e são emitidas de núcleos de elementos pesados como urânio, tório, polônio e rádio na desintegração nuclear. Perdem energia por ionização, arrancando elétrons do meio e formando íons. Estas partículas possuem ionização específica bastante alta (grande número de pares iônicos por milímetro de trajetória), o que resulta em poder de penetração extremamente limitado e são facilmente blindadas por alguns centímetros de ar ou materiais de baixa densidade.

As partículas beta são elétrons (beta menos) e pósitrons (beta mais) emitidas de núcleos leves ou de massa intermediária que possuem um excesso de nêutrons ou prótons em relação à sua estrutura estável. Também perdem energia pelas ionizações que causam no meio material que atravessam. Porém, sendo mais leves que outras partículas (por exemplo as partículas  $\alpha$ ), sua velocidade para uma determinada energia é muito maior e seu poder de ionização é muito menor.

Os fragmentos de fissão, por sua vez, são íons carregados de átomos de número de massa médio, com alta energia cinética, oriundos da fissão nuclear. A perda de energia destes fragmentos através da matéria ocorre quase que totalmente por ionização. Apesar das energias cinéticas destes fragmentos serem muito grandes, suas velocidades iniciais não são tão altas devido à sua massa, então, a ionização decresce ao longo da trajetória, o que não ocorre com partículas  $\alpha$  ou prótons.

Por outro lado, as radiações indiretamente ionizantes interagem com a matéria, dando lugar a radiações secundárias, que são ionizantes e perdem energia por colisões com os elétrons ou com os núcleos atômicos. Incluem alguns tipos de radiações eletromagnéticas ( $\gamma$  ou X) e nêutrons.

Os raios X e raios  $\gamma$  diferem quanto a origem, ou seja, enquanto os raios gama provêm do núcleo atômico ou da aniquilação de partículas, os raios X têm sua origem fora do núcleo. Um núcleo instável pode passar a outro mais estável liberando energia na forma de radiação gama. Porém, quando elétrons rápidos colidem com certos materiais, parte de sua energia, ou toda ela, é convertida em fótons de raios X, neste caso denominados radiação de frenamento. A penetrabilidade dos raios  $\gamma$  ou X é muito maior devido ao seu caráter ondulatório, e sua

absorção depende do tipo de interação que provoca. Há vários processos que caracterizam a interação da radiação  $\gamma$  ou X com a matéria. Estes processos dependem da energia da radiação e do meio material que ela atravessa. Quando o fóton ( $\gamma$  ou X ) interage com a matéria, sua energia é transferida para esta por uma variedade de mecanismos alternativos, sendo que os três (efeitos secundários) mais importantes são:

- 1) Efeito Fotoelétrico
- 2) Efeito Compton
- 3) Formação de par

O efeito fotoelétrico é caracterizado pela transferência total da energia de radiação  $\gamma$  ou X (que desaparece) a um único elétron orbital, que é então expelido do átomo absorvedor (processo de ionização). Este elétron expelido do átomo poderá perder a energia recebida do fóton, produzindo ionização em outros átomos.

Quando a energia da radiação  $\gamma$  ou X cresce, o espalhamento Compton torna-se mais freqüente que o efeito fotoelétrico. No efeito Compton, predominante em energias intermediárias, o fóton incidente é espalhado por um elétron periférico, que recebe parcialmente a energia do fóton incidente. O fóton espalhado terá uma energia menor e uma direção diferente da incidente.

A produção de par ocorre somente quando fótons de energia igual ou superior a 1,02 Mev passam próximo a núcleos de elevado número atômico. Neste caso, a radiação  $\gamma$  ou X interage com o núcleo e desaparece, dando origem a um par elétron-pósitron através da reação:

$$\gamma \rightarrow e^{-} + e^{+} + \text{energia cinética} \quad (\text{A.1})$$

O pósitron, após transmitir por colisões sua energia cinética ao meio, volta a se combinar com um elétron e dá origem a dois fótons. A produção de par é predominante para energias elevadas e para elementos de grande número atômico.

As interações das partículas carregadas e dos fótons com a matéria se processam, predominantemente, com os elétrons orbitais. Como os nêutrons não tem carga elétrica e nem campo elétrico capaz de interagir com os elétrons orbitais, as interações se processam predominantemente com os núcleos. Uma interação nuclear pode alterar a energia e direção do nêutron (espalhamento) ou pode resultar numa absorção pelo núcleo. O espalhamento pode ser elástico, e a energia do sistema é conservada, ou inelástico, e uma parte da energia cinética é transformada em energia de excitação. A absorção de um nêutron pode resultar na emissão de um ou mais raios gama, partículas carregadas e, às vezes, um ou mais nêutrons. Assim, todas as interações neutrônicas, exceto o espalhamento, produzem uma fonte secundária de irradiação.

### **Coefficientes de atenuação linear e de atenuação de massa**

A atenuação da radiação eletromagnética se deve principalmente aos processos fotoelétrico, Compton e formação de par e o coeficiente de atenuação linear total,  $\mu_0$ , será a soma dos coeficientes de atenuação dos processos individuais:

$$\mu_0 = \mu_c + \mu_f + \mu_p \quad (\text{A.2})$$

onde  $\mu_c$  é o coeficiente de atenuação linear Compton total (espalhamento e absorção), que é a probabilidade do fóton ser espalhado para fora do feixe por um absorvedor. É também uma medida da fração de energia total removida do feixe por centímetro de absorvedor, se o feixe for homogêneo;  $\mu_f$  é o coeficiente de atenuação linear do efeito fotoelétrico, definido como o número de fótons primários de um feixe incidente que são removidos do mesmo por segundo para cada lâmina de material e  $\mu_p$  é o coeficiente de atenuação linear da formação de par.

Assim,  $\mu_0$  é uma medida do número de fótons primários que sofrem interações e constitui a seção de choque macroscópica para a interação da radiação eletromagnética com a matéria.

O coeficiente de atenuação de massa,  $\mu_a$ , é dado por:

$$\mu_a = \frac{\mu_0}{\rho} \quad (\text{A.3})$$

e tem dimensões de  $(\text{g}/\text{cm}^2)^{-1}$ , onde  $\rho$  é a densidade do absorvedor.

### **Unidades de doses de radiação**

#### Exposição X ou $\gamma$

A exposição (cuja notação é  $\chi$ ) é uma grandeza que caracteriza o feixe de raios X e  $\gamma$

e mede a quantidade de carga elétrica  $dQ$  produzida por ionização, no ar, por essa radiação, por unidade de massa do ar. Assim:

$$\chi = \frac{dQ}{dm} \quad (\text{A.4})$$

A unidade de exposição é Coulomb por quilograma, isto é,  $\text{C.Kg}^{-1}$ . A unidade especial de exposição é o Roentgen (R), definida por:

$$1 \text{ R} = 2,58 \times 10^{-4} \text{ C.Kg}^{-1} \quad (\text{A.5})$$

A taxa de exposição,  $\dot{\chi}$ , é o quociente de  $d\chi$  por  $dt$ , onde  $d\chi$  é o aumento na exposição no intervalo de tempo  $dt$ , ou seja:

$$\dot{\chi} = \frac{d\chi}{dt} \quad (\text{A.6})$$

### Dose Absorvida

A dose absorvida ( $D$ ) de qualquer radiação ionizante, é a quantidade de energia  $d\bar{\epsilon}$  cedida à matéria pelas partículas ionizantes por unidade de massa. Assim:

$$D = \frac{d\bar{\epsilon}}{dm} \quad (\text{A.7})$$

A unidade de dose absorvida é o Joule por quilograma ( $\text{J.Kg}^{-1}$ ). O nome dessa unidade é Gray (Gy), definido por:

$$1\text{Gy} = 1\text{J.Kg}^{-1} \quad (\text{A.8})$$

A unidade especial de dose absorvida, o rad, satisfaz a seguinte relação:

$$1\text{rad} = 10^{-2} \text{J.Kg}^{-1} = 100 \text{ ergs/g} , \quad (\text{A.9})$$

que se aplica a qualquer radiação, e a qualquer meio material.

A taxa de dose absorvida,  $\dot{D}$  é o quociente de  $dD$  por  $dt$ , onde  $dD$  é o aumento da dose absorvida no intervalo de tempo  $dt$ :

$$\dot{D} = \frac{dD}{dt} \quad (\text{A.10})$$

A unidade da taxa de dose absorvida é  $\text{J.Kg}^{-1}.\text{s}^{-1}$  e:

$$1\text{Gy}.\text{s}^{-1} = 1\text{J.Kg}^{-1}.\text{s}^{-1} \quad (\text{A.11})$$

$$1\text{rad}.\text{s}^{-1} = 10^{-2}\text{J.Kg}^{-1}.\text{s}^{-1}$$

Pode-se também expressar a taxa de dose absorvida como:

$$\dot{D} = \mu_a \cdot E \cdot \phi \quad (\text{A.12})$$

onde  $\mu_a$  é o coeficiente de atenuação de massa (em  $\text{cm}^2$  por grama de ar),  $E$  é a energia da radiação (em MeV) e  $\phi$  é o fluxo de fótons ou nêutrons (partículas por  $\text{cm}^2$  por s).

### Dose equivalente

Para uma mesma dose absorvida o efeito biológico poderá ser maior ou menor, dependendo do tipo de radiação. Levando esse fato em consideração, a dose equivalente é calculada multiplicando-se a dose absorvida por uma fator numérico, chamado fator de qualidade (QI). Este fator considera que quanto maior o número de ionizações produzidas por unidade de comprimento, tanto maior é o dano.

Os valores comumente usados para o fator de qualidade são:

- radiação  $\gamma$  ou X ..... QI = 1
- partículas  $\beta$  ..... QI = 1
- nêutrons térmicos ..... QI = 2,3
- nêutrons energéticos, prótons e partículas  $\alpha$ ..... QI = 20
- íons pesados (produtos de fissão) ..... QI = 20

A dose equivalente H pode ser escrita como:

$$H = D \cdot Ql \cdot M \quad (A.13)$$

onde  $D$  é a dose absorvida,  $Ql$  é o fator de qualidade e  $M$  é um fator de peso que engloba todos os outros fatores que influenciam a dose absorvida.

A unidade de dose equivalente é o Sievert (Sv) e:

$$1 \text{ Sv} = 1 \text{ J} \cdot \text{Kg}^{-1} \quad (A.14)$$

### **Proteção contra as radiações externas**

O termo radiação externa é empregado para qualquer fonte de radiação que esteja fora do corpo humano. Dessa forma a radiação  $\alpha$  não é normalmente encarada como uma fonte de perigo, já que ela não pode penetrar mais que a camada externa da pele. Os perigos são então devidos às radiações  $\beta$ , radiações  $\gamma$ , radiações X ou nêutrons, que podem penetrar até órgãos sensíveis do corpo.

Existem três maneiras básicas de proteger o homem no caso de exposição externa: tempo, distância e blindagem.

a) *Tempo*: a dose acumulada por uma pessoa que trabalha numa área sujeita a uma certa taxa de dose é diretamente proporcional ao tempo que ela permanece nessa área. Esta dose pode, então, ser controlada pela limitação desse tempo. Assim:

$$\text{Dose} = \text{Taxa de dose} \times \text{tempo} \quad (\text{A.15})$$

b) *Distância*: a distância da fonte de radiação protege através de duas formas, quais sejam, absorção e espalhamento pelo ar e atenuação pela geometria. Para uma fonte convencional de radiação, o efeito da geometria é mais importante que a absorção. Seja, por exemplo, uma fonte pontual, que emite radiação uniformemente em todas as direções. O fluxo, que é proporcional à taxa de dose numa distância  $r$  de uma fonte pontual, é inversamente proporcional ao quadrado da distância, ou seja, a radiação decresce com o quadrado da distância.

c) *Blindagem*: geralmente é o método preferível, pois resulta em condições realmente seguras para o trabalho. O tipo de material e a espessura de blindagem necessária dependem do tipo de radiação, da energia da radiação, da atividade da fonte emissora, da distância que o trabalhador ficará da fonte e da taxa de dose equivalente estabelecida no ponto onde ficará o trabalhador.

Partículas  $\alpha$  não apresentam problemas de blindagem, uma vez que são facilmente absorvidas. Uma fina folha de papel é suficiente para blindá-las.

Partículas  $\beta$  são mais penetrantes que as partículas  $\alpha$  e necessitam de uma blindagem de cerca de 10 mm de acrílico para absorção completa. O alumínio e alguns tipos de plásticos também podem ser usados.

Os fótons  $\gamma$  e raios X passam através do material absorvedor, então, sua redução é determinada pela energia da radiação, o meio de absorção e a espessura do absorvedor, ou seja:

$$\dot{D} = \dot{D}_0 e^{-\mu_0 X} \quad (\text{A.16})$$

onde  $\dot{D}_0$  é a taxa de dose sem blindagem,  $\dot{D}$  é a taxa de dose após atravessar uma camada de espessura  $X$  e  $\mu_0$  é o coeficiente de absorção linear do material de blindagem. A proteção mais comumente usada é concreto, água, ferro e chumbo.

Porém, a equação (A.16) pode ser aplicada somente para boas geometrias, ou seja, para feixes colimados e pequenas espessuras, uma vez que todos os fótons que interagem com a blindagem são removidos do feixe.

Para feixes não-colimados ou para uma blindagem muito espessa, esta equação não estima a necessária espessura de blindagem, pois, neste caso, devem ser consideradas as radiações primárias e secundárias. Então, corrige-se a equação (A.16) pelo uso do Fator de Build-up (B). Desta forma, tem-se:

$$\dot{D} = \dot{D}_0 \cdot B \cdot e^{-\mu_0 X} \quad (\text{A.17})$$

O Fator de Build-up pode ser definido como a razão da intensidade da radiação, incluindo a radiação primária e a espalhada, em algum ponto no feixe, pela intensidade da radiação primária somente naquele ponto.

Na blindagem de nêutrons usam-se diversos materiais. Os nêutrons rápidos são melhor atenuados pela interação com núcleos pesados, mas, como a energia decresce, a seção de choque de espalhamento elástico aumenta e são necessários núcleos leves. A melhor proteção

é o concreto que contém muitos núcleos pesados e é rico em núcleos leves de hidrogênio da água de hidratação. A água é também um bom material de blindagem para nêutrons.

## APÊNDICE B

### A Equação do Transporte - Definições e notações

Tendo em vista a validade da derivação da equação de transporte, tanto para nêutrons como para fótons, será deduzida esta equação com a notação usada em física de reatores [ 29 ].

#### Nêutron como uma partícula pontual

Na teoria de transporte, um nêutron é considerado como uma partícula pontual no sentido de que pode ser descrito completamente por sua posição  $\underline{r}$  e velocidade  $\underline{v}$ . O vetor velocidade é frequentemente representado por :

$$\underline{v} = v \underline{\Omega} \tag{B.1}$$

onde  $v (= |\underline{v}|)$  é a grandeza escalar da velocidade e  $\underline{\Omega}$  é um vetor unitário na mesma direção de  $\underline{v}$ .

#### Densidade Angular de Nêutrons ( $N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$ )

É o número provável de nêutrons na posição  $\underline{r}$ , com direção  $\underline{\Omega}$  e energia  $E$  no instante  $t$ , por unidade de volume, por unidade de ângulo sólido, por unidade de energia. Assim,

$N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)dVd\underline{\Omega}dE$  é o número provável de nêutrons no volume  $dV$  em  $\underline{r}$ , tendo direções dentro do ângulo sólido  $d\underline{\Omega}$  em torno de  $\underline{\Omega}$  e energia no intervalo  $dE$  em  $E$ , no tempo  $t$ .

Densidade de nêutrons (  $n(\underline{r}, E, t)$  )

Define-se densidade de nêutrons como:

$$n(\underline{r}, E, t) \equiv \int_{4\pi} N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)d\underline{\Omega} \quad (\text{B.2})$$

onde o símbolo  $4\pi$  representa a integração em todas as direções. A quantidade  $n(\underline{r}, E, t)$  representa o número provável de nêutrons em  $\underline{r}$  com energia  $E$ , no tempo  $t$ , por unidade de volume, por unidade de energia.

Corrente angular de nêutrons (  $\underline{j}(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$  )

A corrente angular de nêutrons é definida como o produto do vetor velocidade pela densidade angular:

$$\underline{j}(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) \equiv \underline{v} N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) \quad (\text{B.3})$$

Fluxo Angular de nêutrons (  $\psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$  )

É definido como o produto do módulo da velocidade pela densidade angular:

$$\psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) \equiv v N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) \quad (\text{B.4})$$

### Fluxo escalar de nêutrons ( $\phi(\underline{r}, E, t)$ )

A integral do fluxo angular sob todas as direções é chamada de fluxo escalar de nêutrons, isto é :

$$\phi(\underline{r}, E, t) = \int_{4\pi} \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) d\underline{\Omega} = \int_{4\pi} v N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) d\underline{\Omega} = v n(\underline{r}, E, t) \quad (\text{B.5})$$

### Corrente de nêutrons ( $J(\underline{r}, E, t)$ )

Define-se a corrente de nêutrons como a integral da corrente angular sob todas as direções:

$$J(\underline{r}, E, t) \equiv \int_{4\pi} \underline{j}(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) d\underline{\Omega} \quad (\text{B.6})$$

### Fontes Independentes

As fontes independentes são fontes de nêutrons que não dependem da densidade de nêutrons do sistema. Elas aparecem por razões outras que não colisões ( por exemplo, fissões espontâneas, ação de raios cósmicos,...) e são representadas pela quantidade  $Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$ , que é definida como a probabilidade, por unidade de tempo, que um nêutron de energia  $E$  apareça em  $\underline{r}$  por unidade de volume, por unidade de ângulo sólido, por unidade de energia.

### Seções de Choque

A quantidade  $\sigma_1(\underline{r}, E)$ , denominada seção de choque macroscópica total, é definida como a probabilidade de reação de um nêutron por unidade de comprimento de trajetória.

A seção de choque macroscópica total é a soma das seções de choque parciais para todos os possíveis tipos de colisões nêutron núcleo. As seções de choque parciais representam geralmente a probabilidade de que um tipo particular de partícula emerge da colisão. Então, definimos:

$\sigma_e(\underline{r}, E)$  seção de choque de espalhamento elástico

$\sigma_i(\underline{r}, E)$  seção de choque de espalhamento inelástico

$\sigma_\gamma(\underline{r}, E)$  seção de choque de captura radioativa

$\sigma_f(\underline{r}, E)$  seção de choque de fissão

Define-se seção de choque diferencial como a probabilidade de que, havendo colisões de determinado tipo (espalhamento, fissão, ...) os nêutrons resultantes tenham determinadas direções e energias. A seção de choque diferencial pode ser representada por:

$$\sigma_x(\underline{r}, E') f_x(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) \quad (\text{B.7})$$

onde  $\sigma_x$  é a seção de choque para uma reação do tipo x para nêutrons de energia  $E'$  e  $f_x(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E)$  é a probabilidade que um nêutron de direção  $\underline{\Omega}'$  e energia  $E'$  tenha uma reação do tipo x, emergindo da colisão um nêutron no intervalo  $d\underline{\Omega}$  em torno de  $\underline{\Omega}$  com energia  $dE$  em  $E$ . Para as colisões com espalhamento elástico ou inelástico, um nêutron emerge para cada nêutron que colide com o núcleo. A probabilidade de transferência pode, conseqüentemente, ser normalizada para a unidade. Então, para espalhamento elástico, a integração sobre todas as direções e energias resulta:

$$\iint f_c(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) d\underline{\Omega} dE = 1, \quad (\text{B.8})$$

e uma expressão similar é aplicada para espalhamento inelástico. Para a captura radioativa e outras reações nas quais nenhum nêutron emerge,  $f$  é zero. Para a fissão, uma boa aproximação resulta ao assumirmos que os nêutrons são emitidos isotropicamente em sistema de laboratório. Assim, é possível escrever:

$$f_{\underline{r}}(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) d\underline{\Omega} dE = \frac{1}{4\pi} v(\underline{r}; E' \rightarrow E) d\underline{\Omega} dE, \quad (\text{B.9})$$

onde  $v(\underline{r}; E' \rightarrow E) dE$  é o espectro de fissão dos nêutrons, ou seja, a probabilidade que uma fissão causada por um nêutron de posição  $\underline{r}$  e energia  $E'$  conduza a um nêutron dentro de  $dE$  sobre  $E$ . Além disso,  $v(\underline{r}; E' \rightarrow E)$  é normalizado e, desta forma:

$$\frac{1}{4\pi} \iint v(\underline{r}; E' \rightarrow E) d\underline{\Omega} dE = \int v(\underline{r}; E' \rightarrow E) dE = \bar{v}(\underline{r}, E') \quad (\text{B.10})$$

onde  $\bar{v}(\underline{r}, E')$  é o número médio de nêutrons produzidos por uma fissão em  $\underline{r}$  causada por um nêutron de energia  $E'$ .

### Taxas de Interação

A seção macroscópica de choque,  $\sigma_x$ , é a probabilidade de que um nêutron sofra uma reação particular, indicada por  $x$ , na unidade de distância. Se  $v$  é a velocidade do nêutron, então  $v\sigma_x$  é a probabilidade correspondente por unidade de tempo. Por isso, se  $N$  é a densidade angular do nêutron, a taxa de interação, em unidades apropriadas, é dada por  $v\sigma_x N$ . Integrando-se a taxa de interação em todas as direções obtemos  $v\sigma_x(\underline{r}, E) n(\underline{r}, E, t)$

que é o número de interações do tipo  $x$  por unidade de volume e de energia na posição  $\underline{r}$  e tempo  $t$  devido a nêutrons com energia  $E$ , na unidade de tempo.

O número de nêutrons por unidade de volume, tendo direções no interior de  $d\underline{\Omega}'$  em torno de  $\underline{\Omega}'$  e energia  $dE'$  em  $E'$  é  $N(\underline{r}, \underline{\Omega}', E', t) d\underline{\Omega}' dE'$ . A taxa de nêutrons por unidade de volume e de tempo, na posição  $\underline{r}$  e tempo  $t$ , na qual tais nêutrons são transferidos por interações do tipo  $x$  para direções finais em  $d\underline{\Omega}$  em torno de  $\underline{\Omega}$  e energias finais  $dE$  em  $E$  é, então:

$$v' \sigma_x(\underline{r}, E') f_x(\underline{r}, \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) N(\underline{r}, \underline{\Omega}', E', t) d\underline{\Omega}' dE' d\underline{\Omega} dE \quad (\text{B.11})$$

### Derivação da Equação de Transporte de partículas

De acordo com a definição dada anteriormente,  $N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) dV d\underline{\Omega} dE$  é o número provável de nêutrons num tempo  $t$  no elemento de volume  $dV$ , tendo energias  $dE$  em torno de  $E$  e direções no interior do ângulo sólido  $d\underline{\Omega}$  em torno de  $\underline{\Omega}$ . Considere-se agora o que acontece para este grupo de nêutrons quando transcorre um intervalo de tempo  $\Delta t$ .

Aqueles nêutrons de energia  $E$  que sofreram uma colisão podem ser considerados como sendo perdidos do grupo enquanto permanecem os que não colidiram. A distância percorrida por um nêutron no tempo  $\Delta t$  é  $v \Delta t$ ; assim, a probabilidade de que um nêutron sofra uma colisão neste tempo é:

$$\sigma_t(\underline{r}, E) v \Delta t \quad (\text{B.12})$$

A probabilidade de que um nêutron não sofra uma colisão neste tempo e que permaneça é, conseqüentemente:

$$1 - \sigma_t(\underline{r}, E) v \Delta t \quad (\text{B.13})$$

Portanto:

$$N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) [1 - \sigma_t(\underline{r}, E) v \Delta t] dV d\underline{\Omega} dE \quad (\text{B.14})$$

é o número de nêutrons que permanecem no grupo. Além disso, alguns nêutrons perdidos podem retornar ao grupo devido a colisões com nêutrons de outros grupos, ou de fontes independentes. Assim:

$$\left[ \iint \sigma_t(\underline{r}, E') f(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) v' N(\underline{r}, \underline{\Omega}', E', t) d\underline{\Omega}' dE' \right] dV d\underline{\Omega} dE \Delta t \quad (\text{B.15})$$

é o número de nêutrons que entram no grupo como resultado de colisões e :

$$Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) dV d\underline{\Omega} dE \Delta t \quad (\text{B.16})$$

é o número de nêutrons que entram no grupo através de fontes.

Adicionando (B.14), (B.15) e (B.16) e eliminando  $dV d\underline{\Omega} dE$ , a densidade angular de nêutrons na posição  $\underline{r} + \underline{\Omega}v \Delta t$  no tempo  $t + \Delta t$  é dado por:

$$N(\underline{r} + \underline{\Omega} v \Delta t, \underline{\Omega}, E, t + \Delta t) = N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) (1 - \sigma_t v \Delta t) + \left[ \iint \sigma_t' f v' N(\underline{r}, \underline{\Omega}', E', t) d\underline{\Omega}' dE' \right] \Delta t + Q \Delta t \quad (\text{B.17})$$

onde:

$$\sigma_t \equiv \sigma_t(\underline{r}, E),$$

$$\sigma_t' f \equiv \sigma_t(\underline{r}, E') f(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) \quad (\text{B.18})$$

e

$$Q \equiv Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$$

Dividindo ambos os lados de (B.17) por  $\Delta t$  e fazendo  $\Delta t \rightarrow 0$ , tem-se:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{N(\underline{r} + \underline{\Omega} v \Delta t, \underline{\Omega}, E, t + \Delta t) - N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)}{\Delta t} \right] + \sigma_t v N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) = \iint \sigma_t' f v' N(\underline{r}, \underline{\Omega}', E', t) d\underline{\Omega}' dE' + Q \quad (\text{B.19})$$

O primeiro termo à esquerda da equação (B.19) é a derivada total em função do tempo da densidade angular e pode ser denotado por  $dN/dt$ , onde  $N$  representa  $N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$ .

Se o termo  $N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t + \Delta t)$  for adicionado e subtraído ao numerador do termo entre colchetes da equação (B.19), duas expressões são obtidas:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t + \Delta t) - N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)}{\Delta t} \right] = \frac{\partial N}{\partial t} \quad (\text{B.20})$$

e

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{N(\underline{r} + \underline{\Omega}v\Delta t, \underline{\Omega}, E, t + \Delta t) - N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t + \Delta t)}{\Delta t} \right] = v\underline{\Omega} \cdot \nabla N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) \quad (\text{B.21})$$

O resultado (B.21) é obtido tomando-se  $\underline{r}$  em coordenadas cartesianas, cujas componentes são  $x, y, z$  e  $\underline{\Omega}$  com componentes  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ . O lado esquerdo da equação (B.21) pode ser escrito como:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{N(x + \Omega_x v\Delta t, y + \Omega_y v\Delta t, z + \Omega_z v\Delta t, \dots) - N(x, y, z, \dots)}{\Delta t} \right] =$$

$$v\Omega_x \frac{\partial N}{\partial x} + v\Omega_y \frac{\partial N}{\partial y} + v\Omega_z \frac{\partial N}{\partial z} = v\underline{\Omega} \cdot \nabla N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) \quad (\text{B.22})$$

Este último termo representa  $v$  vezes a derivada direcional de  $N$  na direção de  $\underline{\Omega}$ .

Fazendo-se os arranjos necessários, a equação (B.19) torna-se:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + v\underline{\Omega} \cdot \nabla N + \sigma_i vN = \iint \sigma'_i f v' N' d\underline{\Omega}' dE' + Q \quad (\text{B.23})$$

onde:

$$\begin{aligned}
 N &\equiv N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) \\
 e \\
 N' &\equiv N(\underline{r}, \underline{\Omega}', E', t)
 \end{aligned}
 \tag{B.24}$$

A equação (B.23) é a forma básica da equação de transporte de nêutrons e pode também ser expressa em termos do fluxo angular  $\psi$ . Então, reescrevendo-a, obtém-se:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \underline{\Omega} \cdot \nabla \psi + \sigma_t \psi = \iint \sigma_t' f \psi' d\underline{\Omega}' dE' + Q
 \tag{B.25}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \psi &= vN \equiv \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) \\
 e \\
 \psi' &= v'N' \equiv \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}', E', t)
 \end{aligned}
 \tag{B.26}$$

### Equação do Transporte para um grupo de energia

A equação do transporte de nêutrons para o fluxo angular independente do tempo, isto é, quando  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  é zero, é dada como:

$$\begin{aligned}
 \underline{\Omega} \cdot \nabla \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E) + \sigma_t(\underline{r}, E) \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E) = \\
 \int_{4\pi} d\underline{\Omega}' \int_0^{\infty} dE' \sigma_s(\underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}', E') + Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E)
 \end{aligned}
 \tag{B.27}$$

onde:

$\sigma_t(\underline{\Omega}, E)$  é a seção de choque total

e

$\sigma_s(\underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E)$  é a seção de choque diferencial de espalhamento.

A forma do termo  $\underline{\Omega} \cdot \nabla \psi$  depende do sistema de coordenadas usado. Em geometria plana, a corrente de partículas só depende de uma coordenada espacial. Então, a derivada direcional  $\underline{\Omega} \cdot \nabla$  reduz-se a :

$$\underline{\Omega} \cdot \nabla \psi(x) = \left( \Omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi(x) = \Omega_x \frac{\partial}{\partial x} \psi \quad (\text{B.28})$$

Por conveniência, escolheu-se o sistema de coordenadas angulares com seu eixo coordenado polar na direção  $x$ . Assim,  $\Omega_x = \cos\theta = \mu$ . A equação (B.27) fica, para a direção  $x$ , igual a:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu, E) + \sigma_t \psi(x, \mu, E) = \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{\infty} dE' \sigma_s(\mu', E' \rightarrow \mu, E) \psi(x, \mu', E') + Q(x, \mu, E) \quad (\text{B.29})$$

A equação do transporte torna-se muito mais simples mediante a suposição de que os nêutrons são monoenergéticos. Desta forma, pode-se reescrever a equação (B.29) sem o termo de energia  $E$ , como:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \sigma_t \psi(x, \mu) = \int_{-1}^1 d\mu' \sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) \psi(x, \mu') + Q(x, \mu) \quad (\text{B.30})$$

Esta é a equação do transporte em geometria planar, independente do tempo, para um grupo de energia.

## APÊNDICE C

### Expressões utilizadas para o cálculo dos polinômios $\tilde{A}_n$ e $A_n$

Para o cálculo dos polinômios  $\tilde{A}_n$  e  $A_n$  definidos em (3.2.13) e (3.2.14), respectivamente, é necessário que sejam computados o valor da  $f(X)$  e de suas derivadas. Apresenta-se, neste apêndice, as expressões obtidas com a formulação LTS<sub>2</sub>, observando-se que os pesos da Quadratura de Gaus,  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , foram omitidos por terem valor unitário.

1. Função  $f(X)$  para  $\frac{2\dot{D}}{\omega_1} < 1$  e  $s_2 < 0$ :

$$f(X) = \frac{1}{s_2} \text{Ln} \left( \frac{1}{\mu_a \cdot E \cdot \beta_{12}(X)} - \frac{P(X)}{2 \cdot \dot{D} \cdot \beta_{12}(X)} \right) \quad (\text{C.1})$$

onde:

$$P(X) = \beta_{11}(X) \exp(s_1 X) + \beta_{21}(X) \exp(s_1 X) + \beta_{22}(X) \exp(s_2 X) \quad (\text{C.2})$$

$$\beta_{11}(X) = \frac{\psi_1(0) \cdot (s_1 - d) + \psi_2(0) \cdot g}{2 \cdot s_1} \quad (\text{C.3})$$

$$\beta_{12}(X) = \frac{\psi_1(0) \cdot (s_2 - d) + \psi_2(0) \cdot g}{2 \cdot s_2} \quad (\text{C.4})$$

$$\beta_{21}(X) = \frac{\psi_2(0) \cdot (s_1 + d) - \psi_1(0) \cdot g}{2 \cdot s_1} \quad (\text{C.5})$$

$$\beta_{22}(X) = \frac{\psi_2(0) \cdot (s_2 + d) - \psi_1(0) \cdot g}{2 \cdot s_2} \quad (\text{C.6})$$

$$\psi_2(0) = \frac{\psi_2(X) + \psi_1(0) \cdot g \cdot [h_1(X) + h_2(X)]}{h_1(X) \cdot (s_1 + d) + h_2(X) \cdot (s_2 + d)} \quad (\text{C.7})$$

$$h_1(X) = \frac{\exp(s_1 X)}{2 \cdot s_1} \quad (\text{C.8})$$

$$h_2(X) = \frac{\exp(s_2 X)}{2 \cdot s_2} \quad (\text{C.9})$$

$$b = \frac{3\sigma_{s1}}{2} \quad (\text{C.10})$$

$$c = \frac{\sigma_{s0}}{2\mu_1} \quad (\text{C.11})$$

$$d = \frac{\sigma_t}{\mu_1} - c - b\mu_1 \quad (\text{C.12})$$

$$g = c - b\mu_1 \quad (\text{C.13})$$

$$s_1 = \frac{\sqrt{4(d^2 - g^2)}}{2} \quad (\text{C.14})$$

$$s_2 = -s_1 \quad (\text{C.15})$$

2. Primeira Derivada da função  $f(X)$

$$\frac{df(X)}{dX} = \frac{R(X)}{Q(X)} \quad (\text{C.16})$$

onde:

$$R(X) = \beta_{12}'(X) \cdot [\mu_a \cdot E \cdot P(X) - 2 \cdot \dot{D}] - \mu_a \cdot E \cdot \beta_{12}(X) \cdot P'(X) \quad (\text{C.17})$$

$$Q(X) = s_2 \beta_{12}(X) [2\dot{D} - \mu_a \cdot E \cdot P(X)] \quad (\text{C.18})$$

$$\begin{aligned} \frac{dP(X)}{dX} = P'(X) = \exp(s_1 X) & \left[ s_1 (\beta_{11}(X) + \beta_{21}(X)) + \beta_{11}'(X) + \beta_{21}'(X) \right] + \\ & \exp(s_2 X) \left[ \beta_{22}'(X) - s_1 \beta_{22}(X) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

$$\frac{d\beta_{11}(X)}{dX} = \beta_{11}'(X) = \frac{\psi_2'(0) \cdot g}{2 \cdot s_1} \quad (\text{C.20})$$

$$\frac{d\beta_{12}(X)}{dX} = \beta_{12}'(X) = \frac{\psi_2'(0) \cdot g}{2 \cdot s_2} \quad (\text{C.21})$$

$$\frac{d\beta_{21}(X)}{dX} = \beta_{21}'(X) = \frac{\psi_2'(0) \cdot (s_1 + d)}{2 \cdot s_1} \quad (\text{C.22})$$

$$\frac{d\beta_{22}(X)}{dX} = \beta_{22}'(X) = \frac{\psi_2'(0) \cdot (s_2 + d)}{2 \cdot s_2} \quad (\text{C.23})$$

$$\frac{d\psi_2(0)}{dX} = \psi_2'(0) = \frac{A(X)}{B(X)} \quad (\text{C.24})$$

$$A(X) = 2 \cdot s_1 \cdot \psi_1(0) \cdot g \cdot \left[ h_1(X) \cdot h_2'(X) - h_2(X) \cdot h_1'(X) \right] - \psi_2(X) \left[ (s_1 + d) \cdot h_1'(X) + (s_2 + d) \cdot h_2'(X) \right] \quad (\text{C.25})$$

$$B(X) = \left[ h_1(X) \cdot (s_1 + d) + h_2(X) \cdot (s_2 + d) \right]^2 \quad (\text{C.26})$$

$$\frac{dh_1(X)}{dX} = h_1'(X) = \frac{\exp(s_1 X)}{2} \quad (\text{C.27})$$

$$\frac{dh_2(X)}{dX} = h_2'(X) = \frac{\exp(s_2 X)}{2} \quad (\text{C.28})$$

4. Segunda Derivada da função  $f(X)$ :

$$\frac{d^2 f(X)}{dX^2} = f''(X) = \frac{Q(X) R'(X) - R(X) Q'(X)}{Q(X)^2} \quad (\text{C.29})$$

onde:

$$\frac{dR(X)}{dX} = R'(X) = \beta_{12}''(X) [\mu_a \cdot E.P(X) - 2.\dot{D}] - \mu_a \cdot E.\beta_{12}(X) P''(X) \quad (C.30)$$

$$\frac{dQ(X)}{dX} = Q'(X) = -s_2 \cdot \mu_a \cdot E.\beta_{12}(X) P'(X) + [2\dot{D} - \mu_a \cdot E.P(X)] \cdot s_2 \cdot \beta_{12}'(X) \quad (C.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2P(X)}{dX^2} = P''(X) = \exp(s_1 X) \left[ 2s_1 (\beta_{11}'(X) + \beta_{21}'(X)) + s_1^2 (\beta_{11}(X) + \beta_{21}(X)) + \right. \\ \left. \beta_{11}''(X) + \beta_{21}''(X) \right] + \exp(s_2 X) \left[ \beta_{22}''(X) - 2s_1 \beta_{22}'(X) + s_1^2 \beta_{22}(X) \right] \end{aligned} \quad (C.32)$$

$$\frac{d^2\beta_{11}(X)}{dx^2} = \beta_{11}''(X) = \frac{\psi_2''(0) \cdot g}{2 \cdot s_1} \quad (C.33)$$

$$\frac{d^2\beta_{12}(X)}{dX^2} = \beta_{21}''(X) = \frac{\psi_2''(0) \cdot g}{2 \cdot s_2} \quad (C.34)$$

$$\frac{d^2\beta_{21}(X)}{dx^2} = \beta_{21}''(X) = \frac{\psi_2''(0) \cdot (s_1 + d)}{2 \cdot s_1} \quad (C.35)$$

$$\frac{d^2\beta_{22}(X)}{dX^2} = \beta_{22}''(X) = \frac{\psi_2''(0) \cdot (s_2 + d)}{2 \cdot s_2} \quad (C.36)$$

$$\frac{d^2 \psi_2(0)}{dX^2} = \psi_2''(0) = \frac{B(X) \cdot A'(X) - A(X) \cdot B'(X)}{B(X)^2} \quad (\text{C.37})$$

$$\begin{aligned} \frac{dA(X)}{dX} = A'(X) = 2 \cdot s_1 \cdot \psi_1(0) \cdot g \cdot & \left[ h_1(X) \cdot h_2''(X) - h_2(X) \cdot h_1''(X) \right] \\ & - \psi_2(0) \left[ (s_1 + d) \cdot h_1''(X) + (s_2 + d) \cdot h_2''(X) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

$$\begin{aligned} \frac{dB(X)}{dX} = B'(X) = 2 \cdot h_1(X) \cdot h_1'(X) \cdot (s_1 + d)^2 + 2 \cdot h_2(X) \cdot h_2'(X) \cdot (s_2 + d)^2 \\ + 2 \cdot (d^2 - s_1^2) \cdot \left[ h_1(X) \cdot h_2'(X) + h_2(X) \cdot h_1'(X) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

$$\frac{d^2 h_1(X)}{dX^2} = h_1''(X) = \frac{s_1 \exp(s_1 X)}{2} \quad (\text{C.40})$$

$$\frac{d^2 h_2(X)}{dX^2} = h_2''(X) = \frac{s_2 \exp(s_2 X)}{2} \quad (\text{C.41})$$

5. Terceira Derivada da função  $f(X)$ :

$$\frac{d^3 f(X)}{dX^3} = f'''(X) = \frac{Q(X)R''(X) - R(X)Q''(X)}{Q(X)^2} - \frac{2Q'(X)(Q(X)R'(X) - R(X)Q'(X))}{Q(X)^3} \quad (\text{C.42})$$

onde:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R(X)}{dX^2} = R''(X) = \beta_{12}'''(X) [\mu_a \cdot E. P(X) - 2 \cdot \dot{D}] + \\ \mu_a \cdot E. [\beta_{12}''(X) P'(X) - \beta_{12}(X) P'''(X) - \beta_{12}'(X) P''(X)] \end{aligned} \quad (C.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q(X)}{dX^2} = Q''(X) = s_2 \beta_{12}''(X) [2 \dot{D} - \mu_a \cdot E. P(X)] - \\ s_2 \cdot \mu_a \cdot E. [\beta_{12}(X) P''(X) + 2 \beta_{12}'(X) P'(X)] \end{aligned} \quad (C.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 P(X)}{dX^3} = P'''(X) = \exp(s_1 X) \left[ 3 s_1 (\beta_{11}''(X) + \beta_{21}''(X)) + 3 s_1^2 (\beta_{11}'(X) + \beta_{21}'(X)) + \right. \\ \left. s_1^3 (\beta_{11}(X) + \beta_{21}(X)) + \beta_{11}'''(X) + \beta_{21}'''(X) \right] + \exp(s_2 X) \cdot \\ \left[ \beta_{22}'''(X) - 3 s_1 \beta_{22}''(X) + 3 s_1^2 \beta_{22}'(X) - s_1^3 \beta_{22}(X) \right] \end{aligned} \quad (C.45)$$

$$\frac{d^3 \beta_{11}(X)}{dX^3} = \beta_{11}'''(X) = \frac{\psi_2'''(0) \cdot g}{2 \cdot s_1} \quad (C.46)$$

$$\frac{d^3 \beta_{12}(X)}{dX^3} = \beta_{12}'''(X) = \frac{\psi_2'''(0) \cdot g}{2 \cdot s_2} \quad (C.47)$$

$$\frac{d^3 \beta_{21}(X)}{dX^3} = \beta_{21}'''(X) = \frac{\psi_2'''(0) \cdot (s_1 + d)}{2 \cdot s_1} \quad (C.48)$$

$$\frac{d^3\beta_{22}(X)}{dX^3} = \beta_{22}'''(X) = \frac{\psi_2'''(0) \cdot (s_2 + d)}{2 \cdot s_2} \quad (C.49)$$

$$\frac{d^3\psi_2(0)}{dX^3} = \psi_2'''(0) = \frac{B(X) \cdot A''(X) - A(X) \cdot B''(X)}{B(X)^2} - \frac{2 \cdot B'(X) \cdot [B(X) \cdot A'(X) - A(X) \cdot B'(X)]}{B(X)^3} \quad (C.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2A(X)}{dX^2} = A''(X) = 2 \cdot s_1 \cdot \psi_1(0) \cdot g \cdot & \left[ h_1(X) \cdot h_2'''(X) + h_2''(X) \cdot h_1'(X) - h_2(X) \cdot h_1'''(X) - \right. \\ & \left. h_1''(X) \cdot h_2'(X) \right] - \psi_2(0) \cdot \left[ (s_1 + d) \cdot h_1'''(X) + (s_2 + d) \cdot h_2'''(X) \right] \end{aligned} \quad (C.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2B(X)}{dX^2} = B''(X) = 2 \cdot (s_1 + d)^2 \cdot & \left[ h_1(X) \cdot h_1''(X) + h_1'(X)^2 \right] + \\ & 2 \cdot (s_2 + d)^2 \cdot \left[ h_2(X) \cdot h_2''(X) + h_2'(X)^2 \right] + \\ & 2 \cdot (d^2 - s_1^2) \cdot \left[ h_1(X) \cdot h_2''(X) + 2 \cdot h_1'(X) \cdot h_2'(X) + h_2(X) \cdot h_1''(X) \right] \end{aligned} \quad (C.52)$$

$$\frac{d^3h_1(X)}{dX^3} = h_1'''(X) = \frac{s_1^2 \exp(s_1 X)}{2} \quad (C.53)$$

$$\frac{d^3h_2(X)}{dX^3} = h_2'''(X) = \frac{s_2^2 \exp(s_2 X)}{2} \quad (C.54)$$