

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

UMA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO NA
ARTÉRIA CARÓTIDA

por

SANI DE CARVALHO

Dissertação submetida como requisito parcial

para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada.

Prof. Dr. Álvaro Luiz de Bortoli

ORIENTADOR

Porto Alegre, dezembro de 1998.

51 : 612.15
C331s

Carvalho, Sani de

Uma simulação numérica do escoamento na artéria carótida / Sani de Carvalho. -- Porto Alegre : UFRGS, 1998.
87 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Matemática. Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, 1998. Bortoli, Álvaro Luiz de, orient.
Inclui bibliografia.

1. Matemática Aplicada : Medicina : Circulação Arterial. 2. Matemática Aplicada : Medicina : Pressão Sanguínea : Medições. I. Bortoli, Álvaro de, orient. II. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Matemática. Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada. III. Título

(Catalogação na fonte: João Leonel dos Santos Schardong, CRB 10/1223)

Assuntos/cabeçalhos para classificação:

1. Matemática Aplicada : Medicina : Circulação Arterial - CDU 51 : 612.133
2. Matemática Aplicada : Medicina : Pressão Sanguínea - CDU 51 : 612.14
3. Matemática Aplicada : Medicina : Fluxo Sanguíneo - CDU 51 : 612.15

Cabeçalhos para indexação (palavras-chave):

1. Biomatemática
2. Fluxo Sanguíneo
3. Artéria Carótida

AGRADECIMENTOS

À Deus..., pela vida.

Ao Professor Álvaro Luiz de Bortoli pelo valioso apoio e incentivo na realização deste trabalho.

De forma especial agradeço ao meu esposo Silvio Luiz Rutz da Silva pelo carinho, colaboração, compreensão e amor dedicados a mim, o qual sempre me incentivou a continuar à lutar para obtenção de conquistas.

Aos Professores Rudnei Dias da Cunha, Waldir Roque Leite, Maria Cristina Varriale e Mark Thompson agradeço à confiança que em mim depositaram.

Agradeço com carinho pela grande amizade dos colegas Carol, Dago, Manuela, Denise, Cristiane, Alessandro, Rafael Munhoz, Rafael Silveira, Fernando, Evandro, Pablo, Eduardo, Andréia, Sânzara, Lessa, Ana Cristina e outros que porventura tenha esquecido.

Agradeço ao Dr. Jorge Pinto Ribeiro que propôs algumas de suas "preciosas horas" para esclarecer minhas dúvidas.

Ao Fabrício, Ney, Moacir do Setor de Recursos Computacionais.

Agradeço aos meus pais Carlos e Detinha e irmãos Simone e Michael pelo incentivo na realização deste trabalho.

Aos colegas da Biblioteca da Matemática pela atenção e colaboração.

Aos colegas da Pós-Graduação em Matemática pela amizade.

Ao CNPq.

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada e aprovada em sua forma final, pelo Orientador e pela Banca Examinadora do Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada.

Orientador: *Álvaro Luiz de Bortoli*

Dr. Eng. UFSC DLR- TU

Banca Examinadora:

Dr. Mark Thompson (CPGMAp-UFRGS)

Dr. Paulo Ricardo A. Zingano (CPGMAI-UFRGS)

Dr. Argimiro Secchi (Engenharia Química-UFRGS)

Dr. Jorge Pinto Ribeiro (Serviço de Cardiologia-HCPA)

Ao meu querido esposo Silvio com muito amor.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo obter uma metodologia para a simulação do escoamento no interior da bifurcação da artéria carótida. Como a análise completa deste tipo de fluxo não é uma tarefa óbvia, simplificações quanto ao fluido e método numérico são necessárias.

Desta forma, o escoamento analisado no presente trabalho, no interior da artéria carótida, é considerado como sendo bidimensional, incompressível, viscoso, em regime permanente, com paredes rígidas e newtoniano com viscosidade e massa específica um pouco superiores a da água. Estas hipóteses são baseadas no fato de que o sangue para altas taxas de cisalhamento, como as encontradas na artéria carótida, comporta-se como um fluido newtoniano incompressível semelhante a água; o que não ocorre para baixas taxas de cisalhamento como em algumas outras artérias ou veias do corpo humano.

Adota-se, neste caso, o método de diferenças finitas para a formulação incompressível, onde as equações de conservação da quantidade de movimento são utilizadas para obter os componentes do vetor velocidade e a equação da continuidade juntamente com a quantidade do movimento para obter a pressão, baseado no processo de integração temporal de Runge-Kutta de três estágios e com aproximação espacial de segunda ordem. Emprega-se ainda coordenadas generalizadas devido à forma geométrica da carótida ser complexa. Cuidados adicionais são tomados na aplicação das condições de contorno.

Resultados numéricos são apresentados para três geometrias: um duto simples, uma artéria carótida e um duto com obstrução (ressalto). O escoamento no interior do duto visa a verificação do código confeccionado pois este problema possui solução analítica. Com o mesmo código analisa-se regiões que apresentam distúrbios do fluxo, com a presença de recirculação e aumento da tensão de cisalhamento, no interior da artéria carótida, e por fim analisa-se a influência do número de Reynolds, variando entre 100 e 500, para um modelo de estenose (estreitamento) no interior de um duto.

Observações importantes como redução da velocidade na região de bifurcação e na região do sinus da artéria carótida são verificadas podendo auxiliar a prática da medicina na detecção e/ou prevenção de doenças como aterosclerose que são causas de morte principalmente em adultos.

ABSTRACT

The goal of the present work is to obtain a numerical methodology for the flow simulation through a carotid artery bifurcation. As the complete numerical flow analysis is not easy and obvious, simplifications related to the fluid and the numerical method are necessary (or indispensable).

In this way, the flow situation is considered to be two-dimensional, incompressible, viscous, steady state, with rigid walls and for a Newtonian fluid with density and viscosity slightly greater than for the water. These hypothesis are based on the fact that the blood, submitted to high strain deformations, as in the carotid artery, behaves as a Newtonian incompressible fluid (it seems like water); what does not occur at many other parts of the human body.

In order to solve this flow problem the finite difference method based on the incompressible formulation is employed. In this method the momentum equations are used to obtain the velocity vector components and the continuity equation, together with the momentum equations, to obtain the pressure. This numerical technique is based on the three stages Runge-Kutta time stepping scheme for a second order spatial discretization. Body fitted coordinates are used due to the geometry complexity of the carotid artery. Additional care has to be taken with the implementation of boundary conditions.

Numerical results are obtained for three geometries: a duct, a carotid artery and a blocked duct. The simple duct flow was analyzed because of its geometrical simplicity and in order to verify the code written in cartesian and generalized coordinates. With the same code the carotid artery flow with recirculation zones and high strain rates was analysed and finally the flow into a blocked duct for Reynolds numbers between 100 and 500 (a stenosis model) was analysed.

Important observations as the decrease of velocity at the bifurcation region and in the sinus of the internal carotid artery are obtained which can help medical practice in the detection and/or prevention of diseases like the atherosclerosis which kills mainly adults.

ÍNDICE

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
ÍNDICE	iii
LISTA DE FIGURAS E TABELAS	v
LISTA DE SÍMBOLOS	vii
1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - Estruturação do trabalho	3
2 - FLUIDODINÂMICA E HEMODINÂMICA: CONCEITOS FUNDAMENTAIS	4
2.1 - Importância do estudo do fluxo sanguíneo na artéria carótida	4
2.1.1 - Localização anatômica da artéria carótida	6
2.2 - Fundamentos para simulação do fluxo sanguíneo	7
2.3 - Conceitos fundamentais em mecânica dos fluidos	10
2.3.1 - Classificação dos fluidos	12
2.3.2 - Características e propriedades do sangue	17
2.3.3 - Relação entre a fluidodinâmica e a hemodinâmica	22
2.3.4 - Quantidade de fluxo sanguíneo	26
2.3.5 - Mecanismo do fluxo do sangue nos vasos sanguíneos	27
3 - RESTRIÇÕES DO MODELO, EQUAÇÕES GOVERNANTES E MÉTODOS DE SOLUÇÃO.....	31
3.1 - Restrições para a construção do modelo	31
3.2 - Equações governantes para escoamentos incompressíveis	33

3.2.1 - Equações de Navier-Stokes	34
3.2.2 - Equação para a pressão	35
3.3 - Métodos de solução das equações governantes.....	36
4 - PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO	38
4.1 - Obtenção da malha computacional	39
4.2 - Aproximação espacial das equações governantes	44
4.3 - Condições de contorno e iniciais	47
4.4 - Solução das equações aproximadas	48
4.5 - Condições de convergência	50
5 - RESULTADOS NUMÉRICOS	55
5.1 - escoamento num duto	56
5.2 - escoamento na artéria carótida	57
5.2.1 - Análise do fluxo na artéria carótida comum (ACC)	61
5.2.2 - Análise do fluxo na artéria carótida interna (ACI)	62
5.2.3 - Análise do fluxo na artéria carótida externa (ACE)	64
5.2.4 - Influência do número de Reynolds na bifurcação da artéria carótida	66
5.3 - escoamento sobre o ressalto	69
6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS	75
6.1 - Conclusões	75
6.1.1 - Duto simples	76
6.1.2 - Artéria carótida	76
6.1.3 - Ressalto	78
6.2 - Sugestões para futuros trabalhos	79
7 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	80

LISTA DE FIGURAS E TABELAS

FIGURAS:

Figura 2.1 - Localização anatômica da artéria carótida humana.	7
Figura 2.2 - Escoamento entre placas paralelas.	11
Figura 2.3 - Taxa x tensão de cisalhamento para fluidos independentes do tempo.	14
Figura 2.4 - Viscosidade x taxa de cisalhamento para fluidos independentes do tempo.	15
Figura 2.5 - Fluido tixotrópico cisalhado para tempos variáveis.	16
Figura 2.6 - Efeito do hematócrito na viscosidade.	18
Figura 2.7 - Relação entre a viscosidade aparente do sangue com o diâmetro do tubo.	19
Figura 2.8 - Efeito Bernouilli aplicado ao movimento de uma asa e de uma hemácia.	20
Figura 2.9 - Redução da viscosidade do sangue com a velocidade de cisalhamento.	21
Figura 2.10 - Relação entre a pressão e o fluxo em tubos rígidos e vasos sanguíneos	24
Figura 2.11 - Experiência de Marey.	25
Figura 2.12 - Relações entre pressão, resistência e fluxo sanguíneo.	27
Figura 2.13 - Fluxo laminar completamente desenvolvido.	28
Figura 2.14 - Transição de fluxo laminar para turbulento.	29
Figura 4.1 - Plano físico e transformado.	41
Figura 4.2 - Geometria da artéria carótida.	44
Figura 4.3 - Condições de contorno e iniciais da artéria carótida.	48

Figura 5.1 - Malha computacional para o duto, 24 x 11 pontos.	56
Figura 5.2 - Vetores velocidade para o escoamento no duto.	57
Figura 5.3 - Malha computacional da artéria carótida.	58
Figura 5.4 - Vetores velocidade na bifurcação da artéria carótida, $Re=250$	60
Figura 5.5 - Perfil de velocidade axial na entrada da ACC para fluxo estável, $Re = 250$	61
Figura 5.6 - Vetores velocidade na entrada da ACI para fluxo estável, $Re = 250$	62
Figura 5.7 - Perfil de velocidade axial na saída da ACI para fluxo estável, $Re = 250$	63
Figura 5.8 - Vetores velocidade na entrada da ACE para fluxo estável, $Re = 250$	64
Figura 5.9 - Perfil de velocidade axial na saída da ACE para fluxo estável, $Re = 250$	65
Figura 5.10 - Vetores velocidade na região do sinus (bulbo) para fluxo estável, $Re = 400$	67
Figura 5.11 - Linhas de corrente na artéria carótida.	68
Figura 5.12 - Linhas de corrente na artéria carótida [Bharadvaj-1982].	68
Figura 5.13 - Malha computacional para o ressalto, 56 x 28 pontos.	70
Figura 5.14 - Campo de velocidade do escoamento no ressalto, $Re = 100$	71
Figura 5.15 - Vetores velocidade do escoamento no ressalto, $Re = 300$	72
Figura 5.16 - Campo de velocidade do escoamento no ressalto, $Re = 500$	72
Figura 5.17 - Influência do Re no tamanho da recirculação.	73
Figura 5.18 - Convergência da pressão para o ressalto, $Re=500$	74

TABELAS:

Tabela 4.1 - Coeficientes do método de Runge-Kutta.	50
--	----

LISTA DE SÍMBOLOS

A	→	área.
F	→	força.
h	→	tamanho do intervalo (malha).
i, j	→	índices dos pontos na malha.
J	→	jacobiano da transformação de coordenadas.
p	→	pressão.
P_i	→	pressão na parte inferior.
P_s	→	pressão na parte superior.
Δp	→	diferença de pressão.
Q	→	vazão.
R	→	resistência.
Re	→	número de Reynolds.
S_n	→	solução numérica.
S_v	→	solução verdadeira.
t	→	tempo.
u	→	componente do vetor velocidade na direção x .
v	→	componente do vetor velocidade na direção y .
V	→	velocidade média.
V_i	→	velocidade na parte inferior.
V_s	→	velocidade na parte superior.
\vec{W}	→	vetor das variáveis conservativas.

x, y → sistema de coordenadas.

SÍMBOLOS ESPECIAIS:

$\alpha_1, \dots, \alpha_5$ → coeficientes dos estágios do método de Runge-Kutta.

ε → erro da solução.

$\dot{\gamma}$ → taxa de deformação.

λ → módulo de rigidez.

μ → viscosidade.

μ_a → viscosidade aparente.

μ_o → viscosidade de referência.

μ_p → viscosidade plástica.

μ_∞ → viscosidade constante.

η → y no sistema de coordenadas generalizadas.

ρ → massa específica.

τ → tensão de cisalhamento.

$f(\tau)$ → função tensão de cisalhamento.

τ_y → tensão de escoamento.

ξ → x no sistema de coordenadas generalizadas.

Δ → incremento.

1 - INTRODUÇÃO

O estudo das ciências biológicas, médicas e biomédicas está se tornando cada vez mais quantitativo em seus aspectos experimentais e teóricos, refletindo o uso, nesses campos de pesquisa, dos conceitos fundamentais desenvolvidos em Física, Química e Matemática [Okuno et al-1982]. Dentre as áreas citadas uma das que vem alcançando grande importância e avanço é a Biomatemática que utiliza-se de procedimentos matemáticos para a elaboração de modelos de fenômenos biológicos.

A utilização de modelos tem sido comum na medicina especialmente para a compreensão dos fenômenos relacionados à fisiologia humana e com grande destaque para a Biofluidodinâmica, que tem como um dos seus objetos de estudo o fluxo sanguíneo, em função, principalmente, do crescente aumento do índice de doenças cardiovasculares.

As doenças cardiovasculares, especialmente as de origem ateroscleróticas, são causadoras de morte entre adultos sendo que a compreensão dos fatores mecânicos envolvidos em sua gênese e evolução têm sido objeto de inúmeras pesquisas numéricas [Wille-1980; Lazzaretti-1996, Fergenbaum-1998].

O progresso dos computadores e o desenvolvimento de algoritmos eficientes para a simulação de escoamentos têm permitido uma grande quantidade de trabalhos em dinâmica dos

fluidos computacional com aplicação prática. Acredita-se que é possível auxiliar as investigações médicas estendendo os conhecimentos de dinâmica dos fluidos computacional para a análise biofluidodinâmica e, especialmente, para o estudo do fluxo sanguíneo.

O fluxo sanguíneo deve ser investigado para que se possa melhor discutir a influência dos diversos fatores relacionados a aterosclerose e as regiões de incidência destas lesões. Uma vez compreendido o comportamento do fluxo, pode-se comparar a relação existente entre estas lesões e o padrão de fluxo local, para que as mesmas possam ser diagnosticadas pela detecção de distúrbios na velocidade do fluxo. No presente trabalho escolheu-se a bifurcação da artéria carótida para análise do escoamento através de uma simulação numérica. As ramificações arteriais se constituem num local anatômico particular para o estudo do fluxo sanguíneo afim de obter um melhor entendimento da dinâmica de fluxo local e a sua relação com a aterosclerose.

Este trabalho resulta de uma simulação computacional [Carvalho et al.-1998] baseada em um modelo simplificado da artéria carótida com o objetivo de discutir alguns conceitos básicos e necessários para a compreensão do comportamento do fluxo sanguíneo. As hipóteses adotadas são de escoamento bidimensional, incompressível, viscoso, regime permanente, paredes rígidas e newtoniano com viscosidade e massa específica um pouco superiores a da água. Adota-se o processo de integração temporal de Runge-Kutta para o escoamento incompressível, resolvendo as equações de Navier-Stokes pelo método de diferenças finitas com aproximações espaciais de segunda ordem.

Neste sentido, deseja-se contribuir para o desenvolvimento e afirmação da Matemática Aplicada e Computacional como instrumento gerador de conhecimento, aplicado a uma área distinta ao campo de ação da Matemática que é a Medicina.

1.1 - ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO.

Seguindo a introdução apresentada neste capítulo, discute-se no capítulo 2 uma abordagem dos fenômenos relacionados à fisiologia humana, localização anatômica da artéria carótida, bem como conceitos fundamentais de dinâmica dos fluidos, características do sangue e relações entre a hemodinâmica e a fluidodinâmica.

As equações governantes utilizadas para o estudo do fluxo sanguíneo e métodos de solução são apresentadas no capítulo 3. Dando prosseguimento, no capítulo 4 discute-se o procedimento de solução, a obtenção da malha computacional e a transformação do sistema de coordenadas. Descreve-se a aproximação espacial das equações governantes e o procedimento de integração temporal de Runge-Kutta. Na seqüência, discute-se os critérios e as condições de convergência para os métodos incompressíveis.

Os resultados numéricos são apresentados no capítulo 5 onde mostra-se, inicialmente, aqueles obtidos para uma geometria simples como um duto, cuja implementação propiciou enriquecimento dos conceitos básicos para a realização do estudo em geometrias mais complexas. Apresenta-se, na seqüência, os resultados obtidos da simulação do escoamento na artéria carótida. Mostra-se também um estudo de fluxo em um modelo bidimensional de segmento de uma artéria com estenose, através de escoamento sobre um ressalto. Testes numéricos são realizados para números de Reynolds variando entre 100 e 500 para verificar a influência na região do ressalto.

Finalizando, apresentam-se as conclusões relativas aos resultados obtidos bem como acerca da eficiência do método numérico utilizado e aponta-se algumas sugestões para trabalhos futuros seguido pelas referências bibliográficas utilizadas neste trabalho.

2 - FLUIDODINÂMICA E HEMODINÂMICA: CONCEITOS FUNDAMENTAIS

O sistema circulatório do corpo humano é, basicamente, um sistema fluido. Não causa surpresa que os projetos de substitutos do sangue, de corações e pulmões artificiais, de auxiliares mecânicos de respiração e de outros dispositivos do gênero se baseiem nos princípios de dinâmica dos fluidos.

Para uma melhor compreensão dos fenômenos relacionados à fisiologia humana apresenta-se uma abordagem fenomenológica de alguns conceitos fundamentais de fluidos e dinâmica dos fluidos para, posteriormente, usar estes conceitos na interpretação do escoamento de fluxos sanguíneos.

2.1 - IMPORTÂNCIA DO ESTUDO DO FLUXO SANGÜÍNEO NA ARTÉRIA CARÓTIDA

Em razão do crescente aumento do índice de doenças cardiovasculares que acometem um grande número de indivíduos, há preocupação na compreensão dos fatores precursores destas doenças. As doenças de origem aterosclerótica são grandes causas de morte entre os adultos e os mecanismos envolvidos na sua formação sempre foram objeto de

inúmeras pesquisas. Uma vez evoluido o conhecimento sobre a aterosclerose, isto nos permitiria atingir metas tais como a sua prevenção e a possibilidade de sua regressão, reduzindo a incidência e a gravidade das manifestações clínicas da doença aterosclerótica [Lazzaretti-1996].

Neste sentido, é importante definir que o termo “endurecimento das artérias” envolve uma perda de elasticidade (arteriosclerose) nos vasos sanguíneos que transportam sangue do coração para todas as partes do corpo. Adicionalmente, estas artérias, muitas vezes, tem um acúmulo de placas (gorduras) bloqueando o fluxo sanguíneo (aterosclerose) [Fergenbaum -1998].

As artérias do corpo podem ser afetadas pelo endurecimento de suas paredes, o que causa vários sintomas, pois isto impede o fluxo do sangue para o corpo. O endurecimento ou engrossamento das artérias que alimentam o coração (artérias coronárias) pode levar à ataques do coração; no pescoço podem causar dor e dificuldade para caminhar. O endurecimento das artérias é um processo muito abrangente e progressivo. Muitas vezes, os sintomas não aparecem até que a doença esteja bastante avançada [Lazzaretti-1996].

O estreitamento e engrossamento de artérias têm efeitos dramáticos sobre a pressão sanguínea, a resistência e o fluxo sanguíneo. A resistência aumenta quando o raio do vaso diminui; portanto a fricção do fluido na parede do vaso aumenta. Além desses fatores a circulação do fluxo sanguíneo é reduzida. O desenvolvimento de uma placa (estenose) deforma a parede endotelial (camada de células que reveste internamente as estruturas do aparelho circulatório), aumentando o fluxo turbulento e a resistência. O endurecimento da parede arterial aumenta a resistência ao fluxo, havendo um acréscimo na pressão sanguínea e perda da elasticidade da parede arterial. Portanto, o coração precisa trabalhar mais para bombear o sangue, causando alargamento das artérias. Isto pode conduzir à várias doenças

cardiovasculares, como infarto agudo no miocárdio e, no cérebro, o acidente vascular cerebral [Fergenbaum -1998].

Para poder discutir a influência destes fatores, deve-se investigar a mecânica do fluxo sanguíneo nas regiões de incidência das lesões ateroscleróticas. Uma vez compreendido o comportamento do fluxo nesta região, pode-se comparar a relação existente entre estas lesões e o padrão de fluxo local, para que estas possam ser diagnosticadas pela detecção de distúrbios na velocidade do fluxo, que é ainda influenciada pela elasticidade dos tubos.

2.1.1 - LOCALIZAÇÃO ANATÔMICA DA ARTÉRIA CARÓTIDA

Uma apresentação da caracterização e localização da artéria carótida, escopo de nosso estudo, faz-se necessária para estabelecer o vínculo com a análise do fluxo e para que a mesma se torne mais expressiva.

As artérias carótidas comuns servem como suprimento principal para a cabeça e o pescoço. Elas diferem em comprimento e origem, sendo que a artéria carótida comum esquerda varia em origem mais do que a direita. Um pouco superior à laringe as artérias carótidas comuns bifurcam-se em artéria carótida externa e interna como pode-se observar na figura 2.1. A extremidade onde o fluxo se divide é muitas vezes denominado de cume (vértice) [Willians-1995].

A artéria carótida interna irriga a maior parte do cérebro, olhos, órgãos acessórios, fronte e, em parte, o nariz. Esta artéria é caracterizada por um alargamento denominado seio carotídeo ou sinus (bulbo). O seio carotídeo é uma pequena dilatação da artéria carótida interna imediatamente acima da bifurcação da artéria carótida comum nos ramos da artéria carótida externa e interna [Gardner-1980; Willians- 1995].

A artéria carótida externa supre o exterior da cabeça, a face e a maior parte do pescoço. Ela diminui rapidamente de tamanho (diâmetro) devido aos seus muitos ramos. Na criança esta artéria é menor que a carótida interna, mas nos adultos, as duas são quase do mesmo tamanho [Gardner-1980; Willians - 1995].

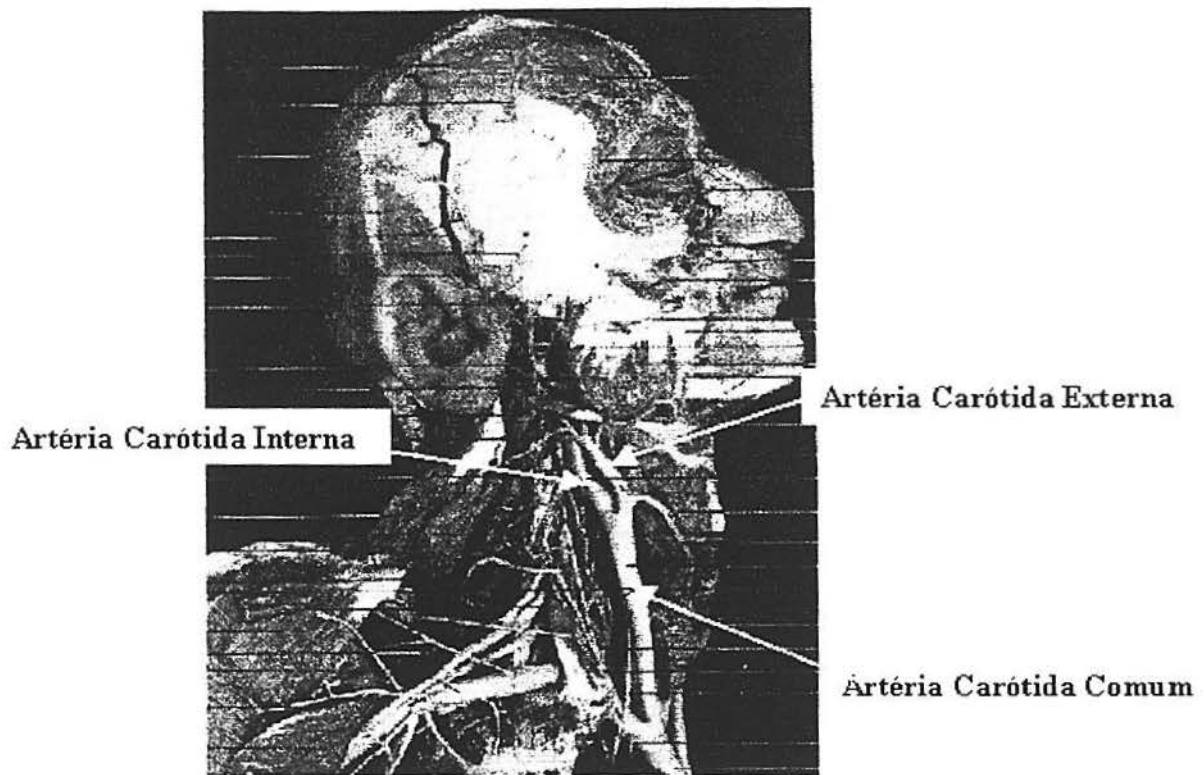


Figura 2.1 - Localização anatômica da artéria carótida humana.

A geometria da artéria carótida humana tem grande variação interindividual. Para a construção do modelo para a simulação do fluxo os dados foram baseados nos parâmetros geométricos dados por Liepsch [1990].

2.2 – FUNDAMENTOS PARA A SIMULAÇÃO DO FLUXO SANGÜÍNEO

Na análise do fluxo sangüíneo em dinâmica dos fluidos, utiliza-se de um modo geral três processos: medidas em vivo, modelos mecânicos e modelos matemáticos. A utilização dos três métodos é recomendável, pois estes têm vantagens e desvantagens, ou seja,

possuem faixas de validade complementares. A vantagem mais evidente de um modelo numérico é que os parâmetros de entrada (geometria, frequência, etc) não estão sujeitos a erros experimentais. Mas, infelizmente, o mesmo não pode ser dito dos parâmetros de saída, pois a maioria dos modelos matemáticos são complexos. Outro aspecto importante é que nenhum modelo matemático de fluxo sanguíneo é exato no sentido físico; a validade da resposta é naturalmente dependente de quais efeitos foram incluídos no modelo ou quais hipóteses foram adotadas [Liepsch – 1990].

O modelamento matemático do fluxo de sangue é baseado na hipótese de que a cinemática e a dinâmica de qualquer “partícula infinitesimal” são governadas por equações diferenciais parciais do fluxo contínuo do fluido, o que assegura a concordância do fluido com as leis do movimento e a lei da conservação da massa. Estas relacionam a velocidade do fluido e a pressão, suas taxas de variação no espaço e no tempo e a tensão viscosa [Liepsch – 1990].

Por exemplo, o modelo reológico viscoso mais simples é aquele da viscosidade constante: o do fluido newtoniano incompressível. As equações diferenciais parciais para este fluido são chamadas de equações de Navier-Stokes. Elas são em número de três adicionadas da equação de conservação da massa e tem como parâmetros desconhecidos as três componentes do vetor velocidade e a pressão. Para o modelo matemático completo, além das equações diferenciais parciais, as quais descrevem o comportamento local de um fluido, necessita-se aplicar condições de contorno e iniciais. Estas condições resultam do modelamento da condição física relacionada à geometria e a história do fluxo [Liepsch – 1990].

A simulação numérica é uma forma de modelagem que, na realidade, utiliza modelos mais precisos, mas menos tratáveis pela aritmética convencional. A maioria dos métodos numéricos substituem o modelo matemático contínuo original por um descontínuo qualquer, pela fragmentação da geometria do problema dentro de um número finito de pontos

na malha (elementos, volumes, nós, etc) e o tempo em pequenos intervalos descontínuos. Um bom método numérico pode produzir resultados adequados quando o número de pontos na malha e os níveis de tempo são aumentados [Liepsch – 1990].

Sabe-se, portanto, que os fatores mais importantes que conduzem à necessidade de métodos numéricos mais sofisticados e um programa computacional mais elaborado para a modelagem matemática e simulação computacional do fluxo são geometrias complicadas (variadas), tridimensionalidade, movimento das paredes do vaso, fluxo pulsátil e comportamento não newtoniano do sangue. Métodos numéricos modernos e “hardwares” sofisticados são capazes de representar adequadamente fluxos sobre geometrias tridimensionais complicadas, mas exigem alto tempo e memória computacional. A pulsatilidade do fluxo, especialmente na presença de paredes flexíveis, aumenta grandemente a exigência de recursos computacionais.

A análise completa de um fluxo pulsátil, como o fluxo sangüíneo, é extremamente complexa. O coração é uma bomba complicada, e o seu comportamento é afetado por inúmeros fatores físicos e químicos. O ciclo cardíaco consiste de um período de relaxamento chamado diástole, seguido por um período de contração denominado sistole. A contração cardíaca promove a energia necessária para impulsionar o sangue através do circuito vascular (energia potencial); cada sistole ventricular impulsiona aproximadamente 70ml de sangue para dentro da aorta, produzindo uma pressão de pulso (diferença entre as pressões sistólica e diastólica), que é transmitida ao resto do sistema arterial, que se propaga em direção à microcirculação, onde se realiza o intercâmbio que é a principal finalidade do sistema circulatório [Brum-1989; Aires-1991].

Os vasos sangüíneos são condutos elásticos com múltiplas ramificações e cujas dimensões variam continuamente. O sangue é uma suspensão de partículas, que apresenta caráter complexo quanto à análise. Apesar desses fatores complicantes, pode-se obter

considerável compreensão quando se aplicam a ele os princípios básicos da hidrostática e da hidrodinâmica e quando se considera, numa primeira aproximação, o fluxo como não pulsátil. Ao estudarmos as leis que regem o equilíbrio e o movimento do sangue, ou seja, a hemodinâmica, devemos considerar as condições que determinam o carácter de uma corrente que se produz em tubos elásticos [Berne-1988].

Como em nosso estudo vamos considerar o fluxo sangüíneo através de tubos rígidos, é necessário conhecer os principais fatores que influenciam o movimento dos líquidos e discutir os implementos básicos de hidrodinâmica que tem relação com a hemodinâmica [Houssay-1984].

Pode-se verificar que os vasos sangüíneos não são tubos rígidos e o sangue não é um líquido perfeito, mas um sistema de duas fases: líquido e células. Quando tratamos o fluxo sangüíneo em tubos rígidos estamos interessados na compreensão do que se passa no organismo, na validade desses conceitos para o sistema circulatório, bem como as aplicações e utilidade das informações para a prática médica [Gunong-1969].

2.3 - CONCEITOS FUNDAMENTAIS EM MECÂNICA DOS FLUIDOS

Podemos definir como fluido uma substância que se deforma continuamente quando submetida a uma tensão de cisalhamento. O termo fluido abrange tanto líquidos como gases, que são substâncias que não possuem forma definida como os sólidos, podendo adquirir a forma dos recipientes que os contém. Quando submetidas a forças apropriadas, essas substâncias fluem [Aris-1962; Batchelor-1967; Marion-1979; Okuno et al.-1982; Streeter-1982; Anderson et al.-1984].

Nos líquidos forças intermoleculares mantêm as moléculas unidas de modo a formar um volume, mas não uma forma definida. Os líquidos têm baixa compressibilidade e

sua massa específica varia pouco com a temperatura e menos ainda com a pressão. Na maioria das situações os líquidos podem ser considerados incompressíveis. Apenas em algumas situações, como a propagação do som nos líquidos, é necessário considerar a sua compressibilidade [Okuno et al.-1982].

Os gases consistem de moléculas em movimento que colidem entre si, tendendo a se dispersar de maneira a não ter volume ou forma definida. Como as forças de ligação entre as moléculas de um gás são menores do que aquelas que agem num líquido, os gases ocupam o volume total do recipiente que o contém; são altamente compressíveis e sua massa específica varia com a temperatura e com a pressão [Hughes-1974; Okuno et al.-1982].

Uma das características existentes no escoamento de fluidos é a viscosidade. Esta pode ser definida como a força volumétrica de atrito interno que aparece no deslizamento das camadas de um fluido, originando tensões tangenciais. Para melhor compreendermos este efeito vamos considerar a figura 2.2, onde existe um líquido homogêneo entre duas placas paralelas, uma estacionária (inferior) e outra móvel (superior) [Okuno et al.-1982; Streeter-1982].

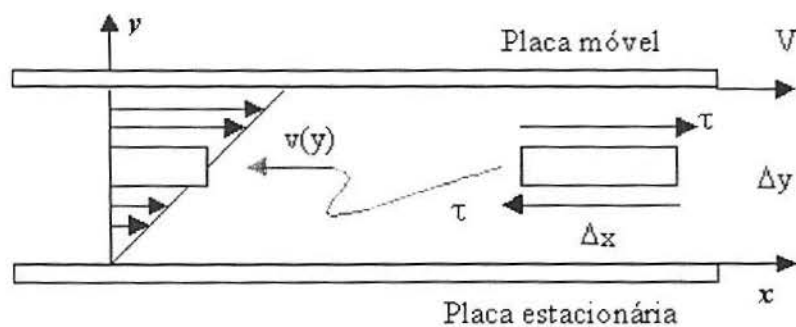


Figura 2.2 - Escoamento entre placas paralelas [Hughes-1974].

Entre todas as propriedades, a viscosidade requer grande consideração no estudo de escoamentos. A viscosidade é a propriedade através da qual o fluido oferece resistência ao cisalhamento, ou seja, quando camadas adjacentes de um fluido estão se

movendo umas em relação às outras, o movimento é impedido pela força de cisalhamento que tende a reduzir suas velocidades relativas. Pode-se verificar que a velocidade da placa superior é proporcional à força aplicada, ou seja, o gradiente de velocidade é proporcional a força de cisalhamento e a constante de proporcionalidade é a viscosidade [Hughes-1974; Streeter-1982; Anderson-1984].

Observando este exemplo pode-se afirmar que o fluido entre as placas é o elemento cisalhante para a diferença de velocidade entre elas sendo a força aplicada denominada força de cisalhamento. A molécula de fluido em contato com a placa estacionária tem a mesma velocidade da placa, isto é, não há deslizamento, enquanto que a molécula de fluido que está junto à placa móvel tem a velocidade desta. A velocidade para qualquer molécula entre as placas depende da distância das moléculas à placa inferior; quanto maior a distância y maior a velocidade (variação linear). A inclinação da reta determina a viscosidade.

Fluidos onde a tensão de cisalhamento τ se relaciona linearmente com a taxa de deformação $\dot{\gamma}$ pela viscosidade μ , que é dado por

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (2.1)$$

são denominados de newtonianos.

2.3.1 - CLASSIFICAÇÃO DOS FLUIDOS

Os fluidos que não obedecem a relação linear entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação, como observada para fluidos newtonianos, recebem a designação genérica de fluidos não newtonianos. Embora as propriedades destes fluidos não permitam uma análise precisa como a desenvolvida para newtonianos, o fluxo de um fluido não newtoniano possui algumas características interessantes e úteis [Hughes-1974].

Os fluidos não newtonianos, podem ser classificados em [Hughes-1974; Damask-1978; Streeter-1982]:

- (a) Fluidos não newtonianos independentes do tempo - quando a taxa de cisalhamento é função única, mas não linear da tensão de cisalhamento;
- (b) Fluidos não newtonianos dependentes do tempo - quando apresentam relações mais complexas entre tensão e taxa de deformação;
- (c) Fluidos viscoelásticos - quando apresentam características sólidas e líquidas e exibem recuperação elástica parcial após a deformação.

Para o fluido não newtoniano independente do tempo, temos a seguinte relação entre tensão e taxa de deformação:

$$\dot{\gamma} = f(\tau) \quad (2.2)$$

Um fluido newtoniano é simplesmente um caso especial em que a função $f(\tau)$ é linear, sendo também chamado de fluido não newtoniano viscoso puro. A maioria dos fluidos não newtonianos está provavelmente nesta categoria sendo representada por três tipos distintos, [Hughes -1974; Joseph - 1990] como podemos observar na figura 2.3. Estes podem ser classificados como plásticos de Bingham, fluidos pseudoplásticos e dilatantes.

Os plásticos de Bingham exibem tensão de escoamento com taxa de cisalhamento nula, seguida por uma relação linear entre tensão e taxa de deformação (taxa de cisalhamento). As características desses fluidos são definidas por duas constantes: a tensão de escoamento τ_y , aquela a ser superada para o início do escoamento, e a viscosidade plástica μ_p , que é a inclinação da parte linear da curva. A equação básica do plástico de Bingham é, então, dada por [Hughes-1974; Damask-1978; Ferguson-1991]:

$$\tau = \tau_y + \mu_p \dot{\gamma} \quad (2.3)$$

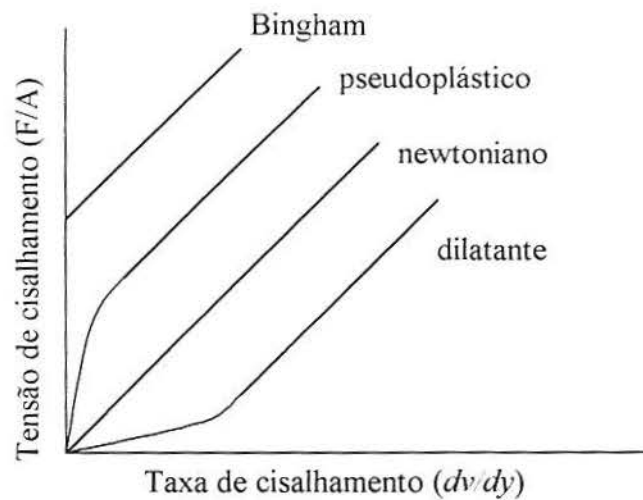


Figura 2.3 - Taxa x tensão de cisalhamento para fluidos independentes do tempo [Damask 1978].

Os fluidos pseudoplásticos são caracterizados por uma inclinação progressivamente decrescente da curva tensão de cisalhamento versus taxa de deformação. Essa inclinação foi definida como viscosidade aparente, que é dada por (figura 2.3):

$$\mu_a = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (2.4)$$

Para taxas de cisalhamento elevadas de fluidos reais, a viscosidade aparente é constante e igual a μ_s , e a relação tensão-deformação torna-se linear, como se verifica na figura 2.3. Fluidos deste tipo são freqüentemente emulsões com partículas assimétricas. Quando imóveis as partículas são casualmente orientadas, mas, quando o fluxo começa, elas se alinham na direção do fluxo de modo que seus eixos estão na média numa orientação uniforme com a direção do fluxo. A viscosidade aparente diminui à medida que elas se alinham e eventualmente torna-se constante. Exemplos de fluidos com este tipo de comportamento são soluções de altos polímeros e o sangue [Hughes-1974; Okuno et al.-1982; Streeter-1982].

Fluidos dilatantes são semelhantes aos pseudoplásticos e geralmente não têm tensão de escoamento, mas à medida que a taxa de cisalhamento aumenta, sua viscosidade se eleva (figura 2.4). Esses fluidos (suspensões concentradas) são menos comuns que os

pseudoplásticos. Os fluidos dilatantes escoam facilmente com baixa viscosidade e pequenas taxas de deformação, mas comportam-se como sólido à medida que a taxa de deformação cresce. Exemplos de fluidos com este tipo de comportamento são o cimento úmido e a areia movediça [Hughes-1974; Damask-1978].

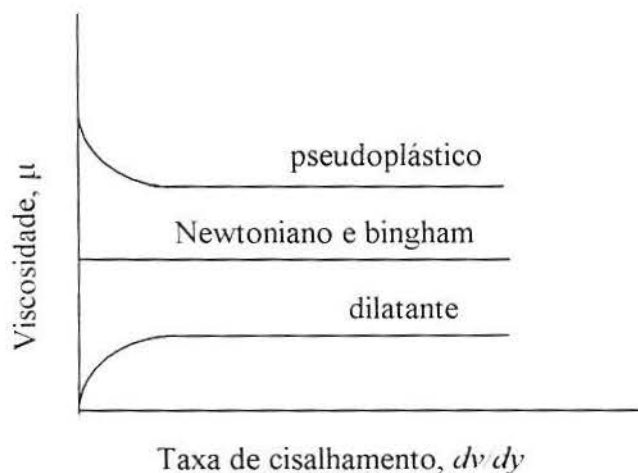


Figura 2.4 - Viscosidade x taxa de cisalhamento para fluidos independentes do tempo [Damask-1978].

Alguns fluidos são mais complexos que os descritos anteriormente e a viscosidade aparente não depende apenas da taxa de deformação, mas também do tempo de aplicação do cisalhamento. Nesses fluidos a taxa de cisalhamento não é função única da tensão de cisalhamento. A taxa de cisalhamento depende do tempo ou da história da tensão anterior do fluido. Estes são os fluidos dependentes do tempo e podem ser classificados em duas classes gerais: fluidos tixotrópicos e reopéticos [Damask-1978].

A tensão de cisalhamento decresce com o tempo quando o fluido é tixotrópico. A consistência ou viscosidade aparente dos fluidos tixotrópicos (por exemplo a tinta de impressão) depende do período de aplicação da tensão de cisalhamento assim como da taxa de deformação. Quando o fluido é cisalhado em estado estacionário ele se quebra (em escala molecular), mas a reconstituição estrutural aumenta com o tempo. Atinge-se, eventualmente,

uma situação de equilíbrio em que a taxa de fratura (quebra) é igual à de reconstituição. Se parar a tensão de cisalhamento, o fluido se reconstitui pouco a pouco e eventualmente readquire a sua consistência original.

A figura 2.5 mostra o comportamento da tensão “versus” deformação para um fluido tixotrópico imediatamente após o cisalhamento e depois de ficar parado por tempos variáveis. A curva inicial é indicada nesta figura como newtoniana, mas poderia ser não newtoniana.

Nos fluidos reopéticos, por outro lado, a tensão de cisalhamento aumenta com o tempo. O comportamento é oposto ao do tixotrópico. Um exemplo simples de formação da estrutura por cisalhamento é a batida e o endurecimento da clara de ovo, embora este não seja provavelmente um fluido reopético verdadeiro. Muitas substâncias perdem a sua propriedade reopética com taxas de cisalhamento extremamente altas e podem se comportar como fluidos tixotrópicos.

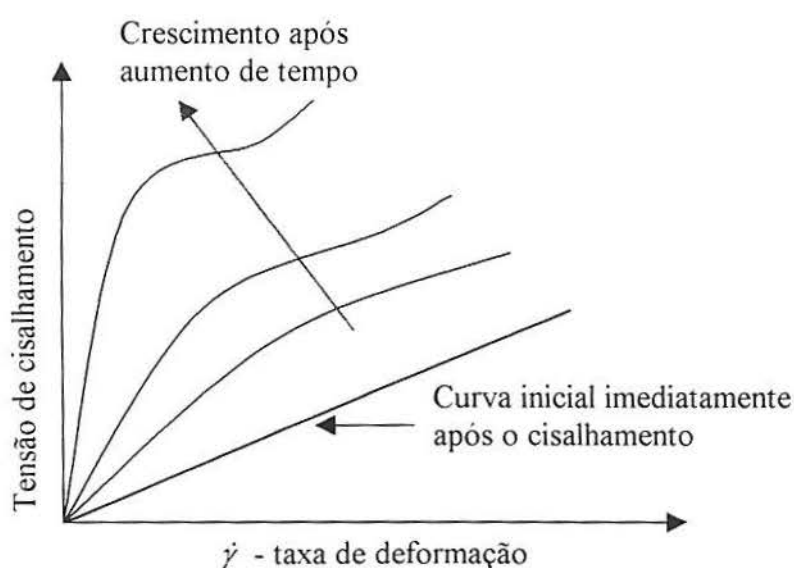


Figura 2.5 - Fluido tixotrópico cisalhado para tempos variáveis [Hughes-1974].

O material viscoelástico apresenta propriedades elásticas e viscosas. Seu tipo mais simples é o newtoniano, que obedece à lei de Hooke para a parte elástica [Hughes-1974].

Assim temos:

$$\dot{\gamma} = \tau/\mu_0 + \dot{\epsilon}/\lambda \quad (2.5)$$

onde λ é um módulo de rigidez. No escoamento permanente tem-se a relação $\dot{\gamma} = \tau/\mu_0$ e o fluido comporta-se como newtoniano. Mas, se a tensão de cisalhamento muda, nota-se o efeito elástico. Para este tipo de fluido a tensão de cisalhamento pode não ser função apenas do gradiente de velocidade (o mesmo que taxa de deformação por cisalhamento), mas também da deformação ordinária.

2.3.2 - CARACTERÍSTICAS E PROPRIEDADES DO SANGUE

No presente trabalho toma-se o sangue como fluido de interesse. O parâmetro determinante da viscosidade deste pseudoplástico é a concentração de células que é dada pelo hematócrito, ou seja, a porcentagem do volume sangüíneo ocupado por glóbulos vermelhos [Gunong-1969; Aires-1991].

Reologicamente, o sangue é uma suspensão de partículas (hemácias, leucócitos, plaquetas e glóbulos lipídicos) numa solução coloidal de proteínas. A solução proteica (plasma) é bastante homogênea e, para todos os efeitos, pode ser considerada como newtoniana [Guyton-1996]. O plasma isolado tem viscosidade de aproximadamente 1,2 a 1,3 vezes superior à da água, sendo o sangue aproximadamente 2,4 vezes mais viscoso do que o plasma [Friedman-1976; Rothe-1976].

O hematócrito pode variar de 0 a 100% (concentração de células no sangue), sendo para um adulto normal, aproximadamente 40%. Para sangue normal, com 40% de

hematócrito, a viscosidade corresponde a 3 centipoises. Se aumentarmos a porcentagem de hematócrito, a viscosidade do sangue aumenta alcançando um valor máximo de 10 centipoises. Se diminuirmos a porcentagem de hematócrito observamos o valor mínimo de aproximadamente 1,5 centipoises, o que corresponde à viscosidade do plasma como ilustra a figura 2.6 [Guyton-1996].

Outros fatores podem afetar a viscosidade sanguínea como a concentração e os tipos de proteínas plasmáticas, embora esses efeitos sejam geralmente menos importantes em relação ao efeito do hematócrito.

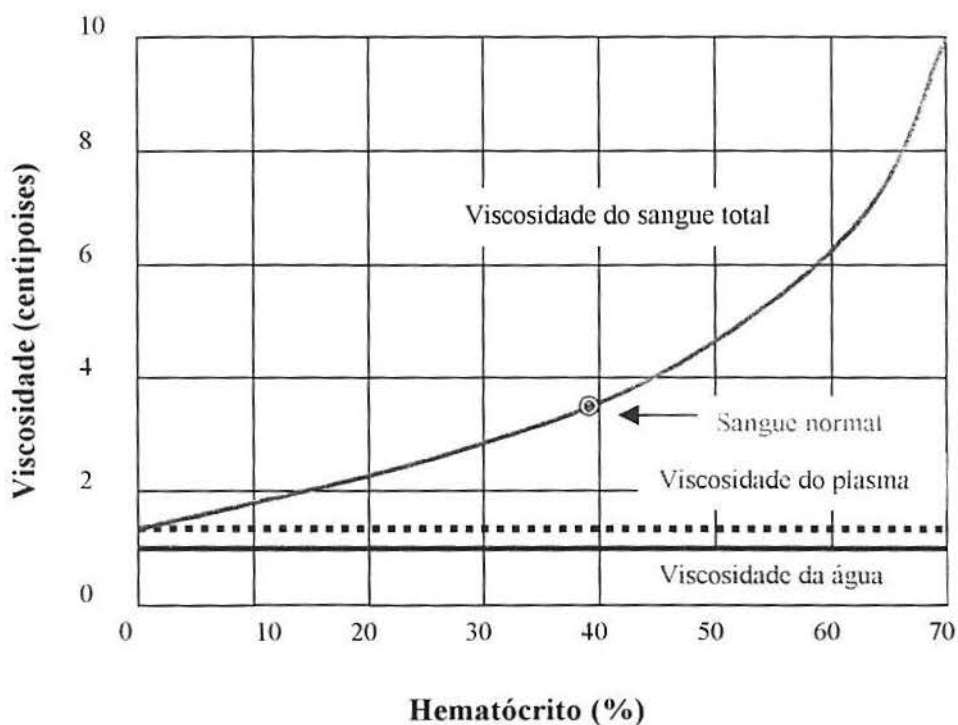


Figura 2.6 - Efeito do hematócrito na viscosidade [Guyton-1996].

A velocidade do fluxo pode influenciar a viscosidade do sangue porque, embora o mesmo se comporte como um líquido newtoniano em condições fisiológicas normais, em toda a rede vascular, sob algumas condições de fluxo quase estagnado, a viscosidade do sangue aumenta [Guyton-1996]. Como o fluxo não é linearmente proporcional à pressão

impulsora, o sangue é não newtoniano, e as relações entre tensão e taxa de cisalhamento são denominadas viscosidades aparentes.

Portanto, considerando-se as propriedades reológicas de uma suspensão como o sangue, o termo viscosidade não tem significado único. Os termos viscosidade anômala e aparente são aplicados freqüentemente ao valor da viscosidade, obtido para o sangue sob condições de medidas particulares. A figura 2.7 mostra que a viscosidade aparente do sangue é praticamente constante para tubos de diâmetro maior que 0,3 mm; abaixo desse diâmetro a viscosidade decresce [Berne-1988].

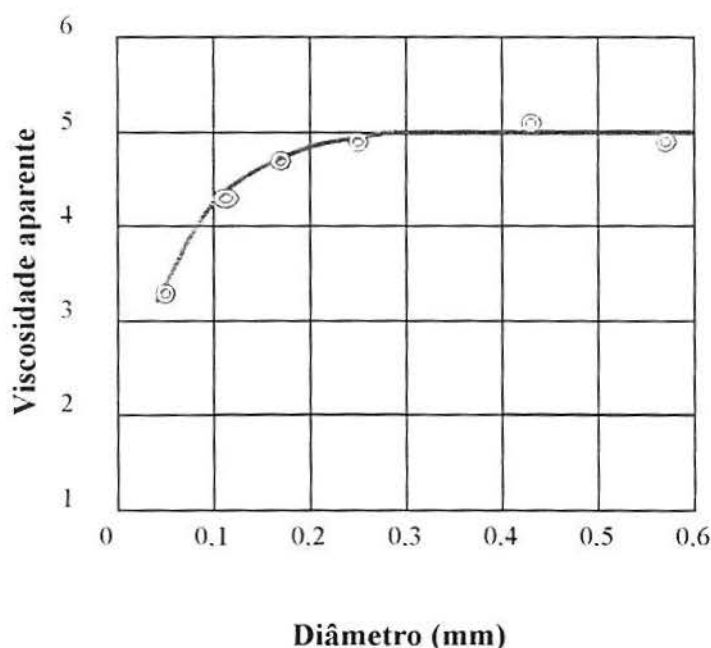


Figura 2.7 - Relação entre a viscosidade aparente do sangue com o diâmetro do tubo [Berne-1988].

Como os vasos da microcirculação possuem diâmetros menores que 0,3 mm, supõe-se que a viscosidade aparente do sangue reduza nesses vasos [Berne-1988]. A influência do diâmetro do tubo sobre a viscosidade aparente é atribuída, em parte, à alteração da composição real do sangue enquanto o mesmo flui por vasos pequenos. As alterações da

composição do sangue ocorrem provavelmente devido a axialização das hemácias, o que significa que nos grandes vasos as hemácias tendem a correr concentradas no eixo do tubo [Berne-1988].

A explicação mais provável para o fenômeno é o efeito asa, ou efeito Bernoulli como ilustrado na figura 2.8, onde pode-se comparar o movimento de uma asa em vôo ao de uma hemácia. A forma da asa faz com que a trajetória do ar por cima seja mais longa e, portanto, a velocidade maior que por baixo. Esta conversão de energia potencial em cinética faz com que a pressão em cima da asa seja menor que em baixo, o que sustenta o vôo [Berne-1988].

O gradiente de velocidades, maior no eixo que na parede, gera uma diferença de pressão, maior na parede que no eixo, o que tende a deslocar a hemácia em direção ao eixo do tubo. A axialização das hemácias tem pelo menos duas consequências:

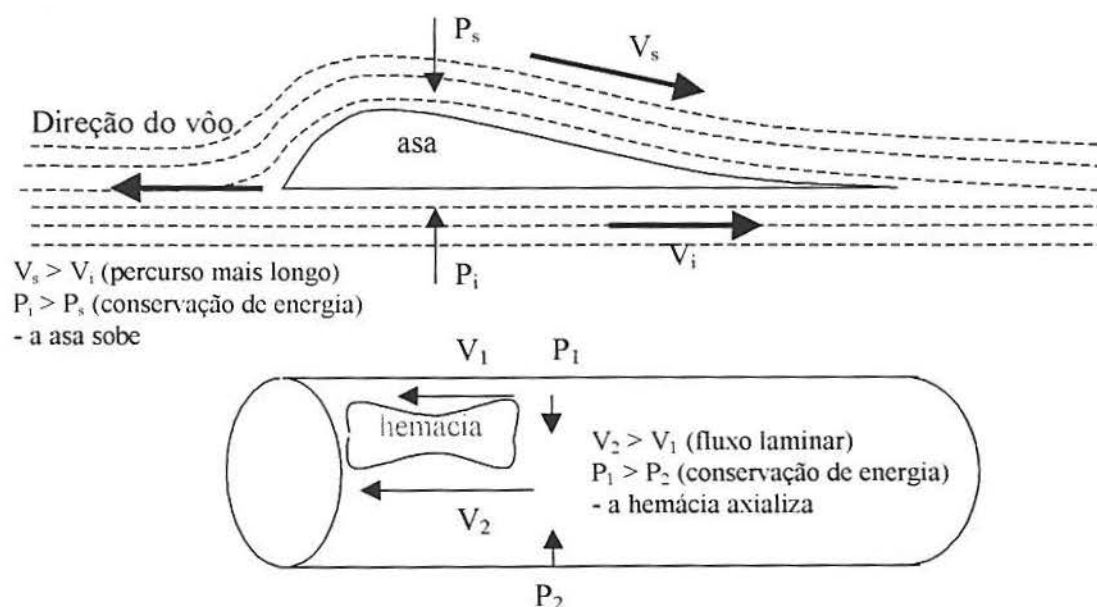


Figura 2.8 - Efeito Bernoulli aplicado ao movimento de uma asa e de uma hemácia [Berne-1988].

- (a) a viscosidade do sangue em movimento num vaso grande não é constante; conseqüentemente, o perfil de velocidade é achatado e menor que o previsto no eixo junto à parede;
- (b) o sangue que penetra nas primeiras ramificações de uma artéria tem hematócrito menor que o sangue que vai para as últimas ramificações.

O efeito da velocidade do fluxo sobre a viscosidade aparente do sangue é ilustrado na figura 2.9, onde se observa que a viscosidade do sangue diminui com o aumento da velocidade do fluxo (ou de cisalhamento) num fenômeno denominado *fluidificação por cisalhamento*.

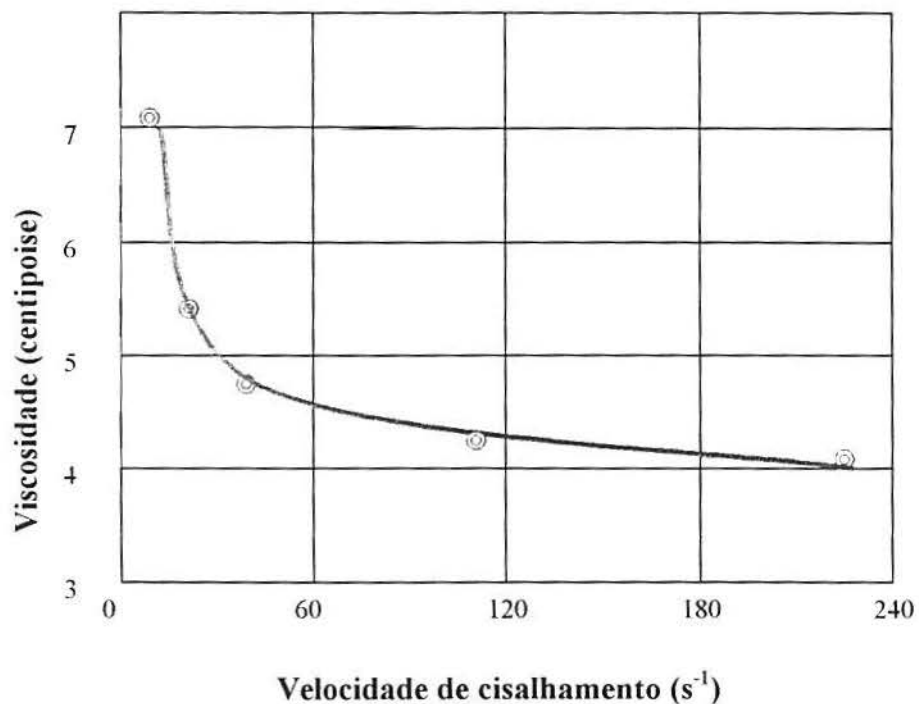


Figura 2.9 - Redução da viscosidade do sangue com a velocidade de cisalhamento [Berne-1988].

A maior tendência de eritrócitos (glóbulos vermelhos) de se acumular na lâmina axial com maiores velocidades de fluxo é parcialmente responsável por esse comportamento

não newtoniano. Porém, com velocidades de cisalhamento muito baixas, as células em suspensão tendem a formar agregados, que aumentam a viscosidade. Essa tendência de agregação diminui com o aumento do fluxo, produzindo a diminuição da viscosidade aparente [Berne-1988].

A tendência para a agregação com fluxo baixo depende da concentração plasmática das grandes moléculas protéicas, principalmente do fibrinogênio (proteína plasmática envolvida na formação de coágulos). Por essa razão, as alterações da viscosidade sanguínea com a velocidade de cisalhamento são muito mais acentuadas quando a concentração de fibrinogênio é elevada [Berne-1988].

2.3.3 - RELAÇÃO ENTRE A FLUIDODINÂMICA E A HEMODINÂMICA

No sistema circulatório, o movimento do sangue ocorre nos vasos sanguíneos, que são representados por uma série de “tubos” ramificados com paredes elásticas. Ao estudarmos as leis que regem o equilíbrio e o movimento do sangue, ou seja, a hemodinâmica, devemos considerar as condições que determinam o carácter de uma corrente que se produz em tubos do tipo mencionado. Deve-se conhecer os principais fatores que influem no movimento dos líquidos e discutir os implementos básicos da fluidodinâmica que têm relação com a hemodinâmica.

Frente a uma corrente contínua o comportamento de tubos elásticos não difere, em essência, de tubos rígidos [Houssay-1984]. Quando o líquido entra no sistema, sob uma determinada pressão, as paredes do tubo elástico se dilatam e, a partir deste momento, o movimento da corrente ocorre nas mesmas condições que nos tubos rígidos. Ao contrário, se a corrente não é contínua, mas ritmicamente interrompida, a elasticidade tangencial altera de

maneira decisiva. A influência das paredes elásticas se faz sentir no ritmo da corrente, no volume do líquido que atravessa o sistema e na formação de ondas.

Quando o líquido entra ritmicamente num tubo rígido, o jato que sai pelo outro extremo apresenta as mesmas flutuações rítmicas que na entrada. Do tubo não sai líquido a não ser quando entra líquido pelo outro lado e ao se interromper a sua saída. No caso de um sistema de tubos elásticos só se observa um comportamento semelhante quando o comprimento total é pequeno, em comparação com os diâmetros, pois o sistema se comporta como se estivesse formado por tubos rígidos [Houssay-1984].

Ao contrário, se o comprimento dos tubos é suficientemente grande para que o sistema ofereça uma resistência apreciável à corrente e, sobretudo, se a porção terminal for mais estreita que a inicial, o comportamento é diferente. Nesses casos a corrente entrante dilata o tubo. Ao interromper o ingresso de líquido, a parede elástica recupera a sua forma de repouso e exerce pressão sobre a coluna líquida que se encontra em seu interior, e, portanto, o líquido continua saindo até que as paredes terminem a sua contração. Se, no entanto, o ritmo da corrente entrante for de frequência suficiente, a elasticidade do tubo a transforma em um jato praticamente contínuo, no qual as variações de velocidade são mínimas [Houssay-1984].

A elasticidade parietal (elasticidade relativa à parede) dos vasos sanguíneos é de importância fundamental na função circulatória do sangue. O coração faz entrar sangue nas artérias em forma rítmica; as paredes vasculares se dilatam durante a sístole e se contraem durante a diástole, de modo que seu conteúdo progride em direção as partes mais periféricas [Houssay-1984].

Em tubos rígidos a relação entre pressão e fluxo de um líquido homogêneo é linear, o que não ocorre nos vasos sanguíneos "in vivo" [Gunong-1969]. Quando se diminui a pressão num vaso sanguíneo pequeno, chega-se ao ponto no qual o fluxo de sangue pára apesar da pressão não ter chegado a zero, como podemos observar na figura 2.10. Isto

demonstra que há necessidade de diferença de pressão para forçar os glóbulos vermelhos através dos capilares. Além disso, os vasos são envolvidos por tecido que exerce uma pressão pequena, mas definida, sobre os vasos. A pressão na qual o fluxo pára é chamada pressão crítica de oclusão [Gunong-1969].

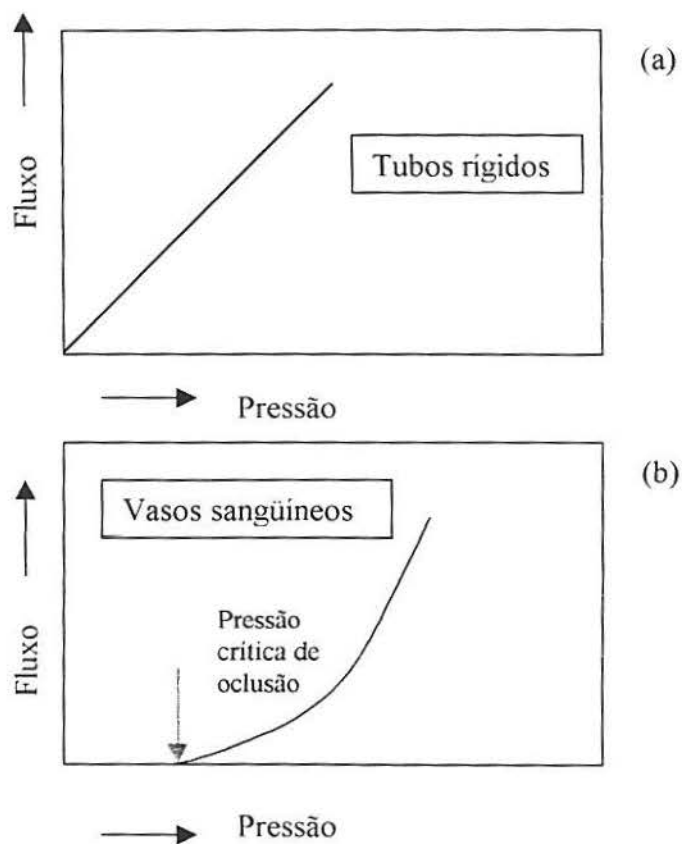


Figura 2.10 - Relação entre a pressão e o fluxo em: (a) tubos rígidos; (b) vasos sangüíneos [Gunong-1969].

Para exemplificar a importância da elasticidade arterial para o trabalho cardíaco, verifica-se aqui o experimento realizado por Marey [Cabral-1958]. Em sua experiência, como se observa na figura 2.11, ele considera um frasco colocado sobre um suporte, onde parte um tubo não elástico, que apresenta uma bifurcação. A cada ramo desta unem-se dois tubos de mesmo comprimento e diâmetro, sendo o tubo "A" de vidro e o tubo "B" de borracha. Uma alavanca "C" permite interromper o fluxo do líquido vindo do frasco, abaixo da bifurcação, de

modo que o líquido escoar intermitente para os dois tubos. Duas provetas recolhem o líquido nas extremidades dos tubos. Com a alavanca faz-se aproximadamente duas interrupções por segundo e observa-se que o escoamento no tubo rígido (vidro) é intermitente, enquanto que no tubo elástico (borracha) é contínuo. O volume de líquido recolhido pelas provetas, num mesmo tempo, é maior no tubo de borracha devido à sua elasticidade, pois este armazena líquido, dilatando-se no intervalo de duas interrupções da alavanca “C”. Ao contrário, por lhe faltar elasticidade, o tubo de vidro não envia líquido para a periferia durante as pausas com a alavanca “C” e o processo de escoar se torna intermitente.

Assim ocorre no sistema circulatório. Durante a sistole, o coração ejeta nas artérias o sangue por elas armazenado graças à sua elasticidade, para que a irrigação dos tecidos não cesse durante a pausa cardíaca ou diástole [Cabral-1958].

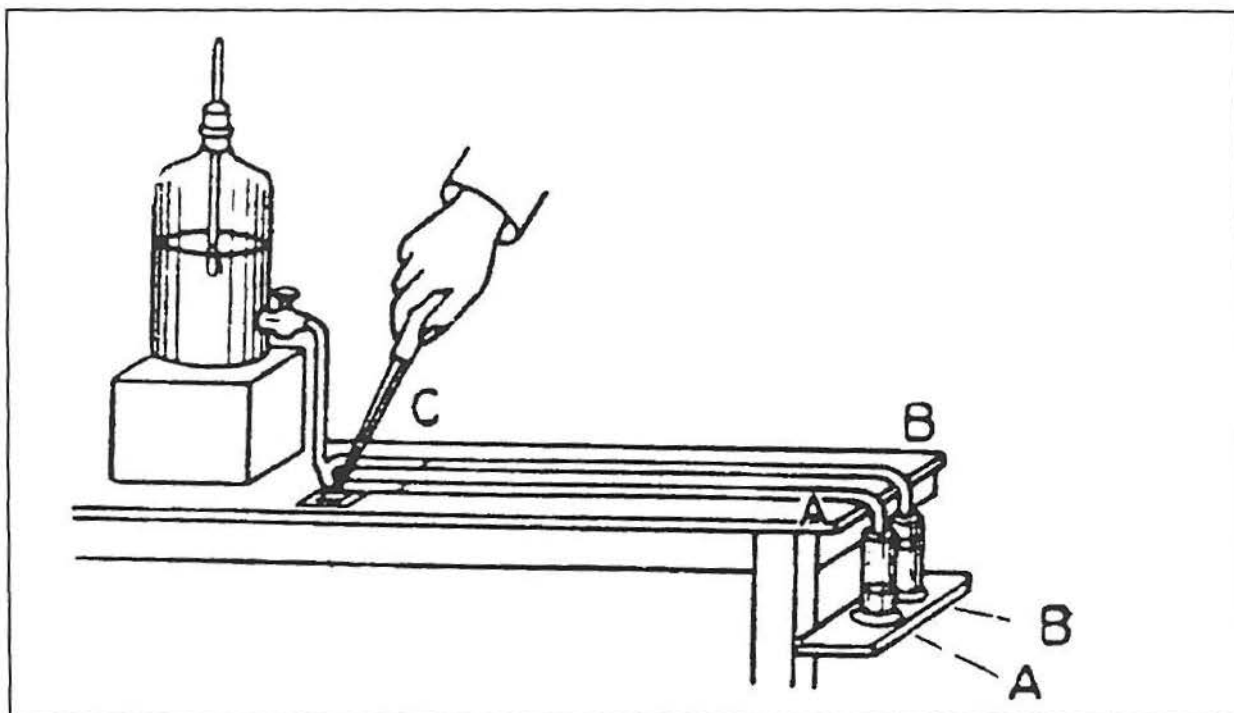


Figura 2.11 - Experiência de Marey [Cabral-1958].

Como verificamos, as artérias são vasos elásticos capazes de armazenar grande energia. A energia cinética do sangue deforma as paredes elásticas das artérias, convertendo

energia cinética em energia potencial. Podemos, então, prever que quanto mais elásticos os vasos sanguíneos, menor será a velocidade do sangue. Como exemplo, na aterosclerose é diminuída a elasticidade arterial e a aorta funciona como um tubo rígido, exigindo do coração enorme esforço para enviar o sangue.

2.3.4 - QUANTIDADE DE FLUXO SANGÜÍNEO

Para poder entender as características do fluxo sanguíneo é importante definir o seu conceito. O fluxo corresponde a uma medida em volume na unidade de tempo (cm^3/s), enquanto que a velocidade reflete o deslocamento do líquido no tempo (m/s), existindo uma relação direta entre o fluxo e o deslocamento. Quando uma quantidade de sangue passa por um dado ponto da circulação este mecanismo é denominado fluxo sanguíneo. Geralmente, esta quantidade é expressa em mililitros ou litros por minuto.

Os mecanismos que levam à determinação da quantidade de fluxo sanguíneo num vaso são mediados por dois fatores: (1) a diferença de pressão entre as duas extremidades do vaso, que é a força que empurra o sangue através deste e (2) o impedimento ao fluxo através do vaso, que se denomina resistência. A análise dessas relações, considerando um segmento de vaso localizado em qualquer lugar do sistema circulatório pode ser verificada através da figura 2.12, onde P_1 representa a pressão na origem do vaso e P_2 a pressão na outra extremidade [Guyton-1996]. Através destes dados, o fluxo através do vaso pode ser calculado usando a expressão:

$$Q = \frac{\Delta P}{R} \quad (2.6)$$

onde Q é o fluxo sanguíneo, ΔP é a diferença de pressão ($P_1 - P_2$) entre as duas extremidades do vaso e R é a resistência [Guyton-1996].

A lei da continuidade do fluxo nos indica que, apesar das sucessivas transformações do número de vasos que forma cada setor, por qualquer secção transversal completa do sistema circulatório, a mesma quantidade de sangue passa em intervalos iguais. Assim, resulta que a quantidade de líquido que entra por um extremo deve ser igual à que sai pelo outro extremo e à que circula por determinado setor do mesmo tubo. Aplicado à circulação do sangue, este princípio nos indica que a quantidade de sangue que entra no circuito sistêmico (expulso pelo ventrículo esquerdo) é igual a quantidade que sai do circuito venoso.

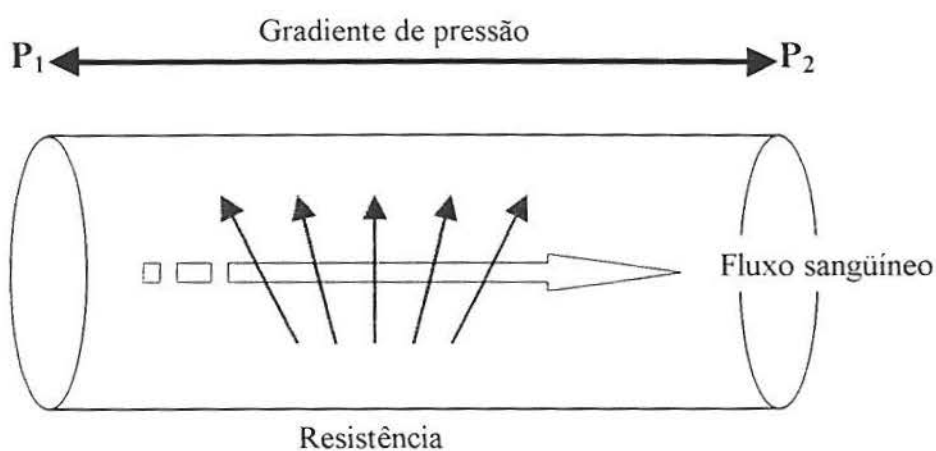


Figura 2.12 - Relações entre pressão, resistência e fluxo sanguíneo

[Guyton-1996].

2.3.5 - MECANISMO DO FLUXO DO SANGUE NOS VASOS SANGÜÍNEOS

O mecanismo através do qual o sangue flui nos vasos sangüíneos é interessante. Devido à sua capilaridade, uma parte do sangue (a que está em contato com a superfície interna dos vasos) adere-se fortemente às paredes e não toma parte alguma no movimento da corrente. O sangue ao movimentar-se, na camada vizinha justaposta às paredes, atrita-se com

esta e perde uma parte considerável de sua velocidade. Atrito análogo ocorre entre todas as camadas vizinhas, de maneira que o sangue não se move com sua velocidade máxima a não ser no centro do vaso, enquanto as camadas periféricas fluem tanto mais lentamente quanto mais próximas se encontram das paredes.

As partículas do líquido que num determinado instante se encontram em uma linha reta perpendicular às paredes do vaso formarão, portanto, uma curva convexa na direção em que a corrente se move. Se o líquido flui de forma estável e contínua, em camadas laminares (mesma distância da parede) e a porção central do líquido permanece no centro do vaso, este é um fluxo laminar. Este tipo de fluxo é o que apresenta o sangue em condições normais [Houssay-1984]. No fluxo laminar completamente desenvolvido o perfil de velocidade longitudinal é parabólico como apresenta a figura 2.13 e semelhante ao da água.

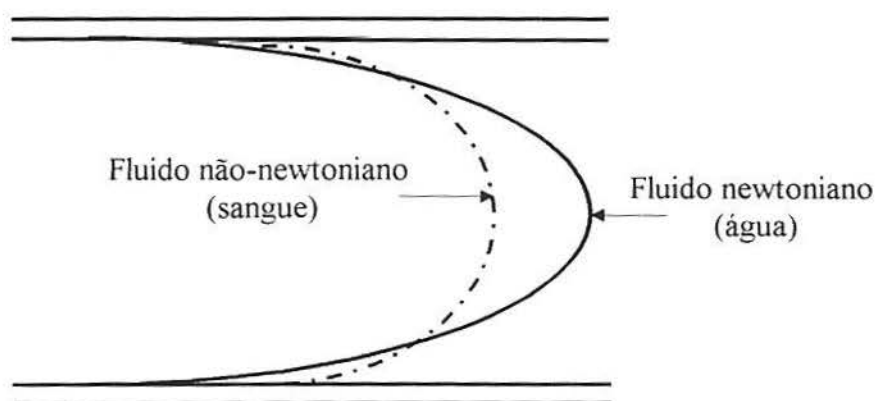


Figura 2.13 - Fluxo laminar completamente desenvolvido [Adaptado de Westerhof-1993].

Entretanto, se a velocidade do sangue se torna muito grande como quando ele passa por uma obstrução num vaso, ou faz uma curva brusca ou passa por uma superfície áspera, o fluxo se torna turbulento. Um tal exemplo é o que podemos observar na figura 2.14, onde o fluxo é laminar na entrada do tubo mas, quando o diâmetro do tubo diminui

abruptamente, a velocidade do fluido aumenta chegando a condição crítica. Isto introduz no líquido forças locais e irregulares, chamadas vórtices ou turbilhões, que aumentam a resistência ao movimento. O fluxo deixa de ser laminar e se torna turbulento.

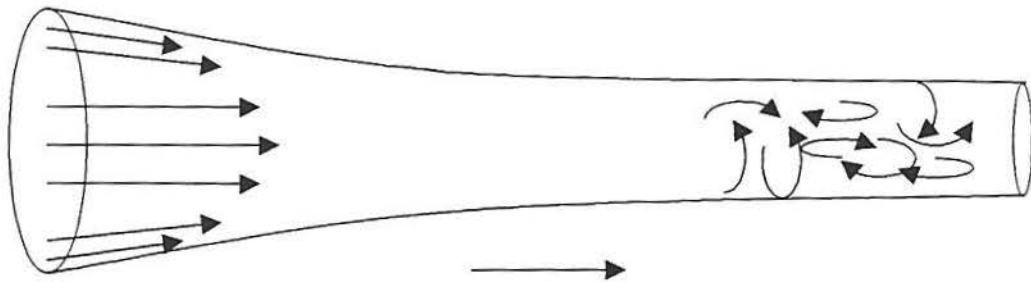


Figura 2.14 - Transição de fluxo laminar para turbulento [Damask-1978].

Introd.

Pode-se prever se um fluxo será laminar ou turbulento através do número de Reynolds Re . Este número adimensional representa a relação entre as forças de inércia e viscosas e é representado por:

$$Re = \frac{\rho \cdot V \cdot d}{\mu} \quad (2.7)$$

onde, d é o diâmetro do vaso, V é a velocidade média, ρ é a massa específica e μ é a viscosidade. A turbulência é provável quando o número de Re excede um valor crítico de aproximadamente 2000 num tubo. Como a massa específica do sangue é razoavelmente constante, os fatores que tendem a causar turbulência são o aumento na taxa do fluxo sanguíneo, tal como ocorre no exercício; uma diminuição na viscosidade sanguínea, conforme observado na anemia; ou uma diminuição no raio do vaso sanguíneo, como ocorre com válvulas estenóticas (obstrução) [Guyton-1996].

Nas porções proximais da aorta e da artéria pulmonar o número de Re pode subir a alguns milhares durante a fase de ejeção rápida pelos ventrículos; isto causa considerável turbulência na aorta proximal e na artéria pulmonar, por exemplo, onde muitas

condições são apropriadas para tal, tais como: (1) alta velocidade do sangue; (2) natureza pulsátil do fluxo; (3) alteração súbita no diâmetro do vaso e (4) grande diâmetro do vaso. Em pequenos vasos, no entanto, o número de Re quase nunca é suficientemente alto para causar turbulência. Portanto, para produzir determinado fluxo, uma bomba como o coração deve trabalhar consideravelmente muito mais, se houver desenvolvimento de turbulência [Guyton-1996].

Estes aspectos preliminares foram selecionados com o objetivo de facilitar o esclarecimento e o embasamento para avaliar as características do fluido empregadas neste estudo. A partir destes dados segue-se as restrições empregadas para a construção do modelo bem como a sua validade.

3 - RESTRIÇÕES DO MODELO, EQUAÇÕES GOVERNANTES E MÉTODOS DE SOLUÇÃO

3.1 - RESTRIÇÕES PARA A CONSTRUÇÃO DO MODELO

O estudo do fluxo sanguíneo na bifurcação da artéria carótida não é simples devido a uma série de fatores como a geometria complexa da ramificação, natureza do fluxo pulsátil, distensibilidade da parede arterial e características não newtonianas do sangue. Estes fatores foram escritos em ordem de importância para a ramificação da artéria carótida, isto é, a influência dominante no campo do fluxo é a geometria, enquanto a menos significativa é o efeito não newtoniano do sangue (na bifurcação da artéria carótida). Portanto, as simplificações realizadas neste estudo são aceitáveis e todas têm seus fundamentos [Brecht-1973; Zamir and Roach-1973].

Outro aspecto importante é que o comportamento não newtoniano do sangue introduz complicações de análise principalmente para o nível do modelo matemático básico do fluxo do fluido. Informações disponíveis sobre o fluxo em bifurcações arteriais são escassas, uma vez que o fenômeno não é facilmente acessível a qualquer análise matemática rigorosa ou medida experimental exata. A dificuldade em ambos os casos é o grande número de variáveis envolvidas. No entanto, o sangue é uma suspensão de partículas que exibe comportamento não-newtoniano para baixa taxa de cisalhamento. Para altas taxas de

cisalhamento, como geralmente encontradas na artéria carótida, o sangue se comporta como um fluido newtoniano incompressível [Zamir and Roach-1973; Roach-1977; Liepsch-1986].

Sabe-se que a viscosidade do sangue varia e que isto é muito importante quando o diâmetro do vaso é menor que 1mm [Guyton-1996]. Como, as artérias aqui consideradas são comparativamente grandes (6mm-8mm) e, portanto, o número de Reynolds não varia muito na região da bifurcação quando tratamos a viscosidade do sangue como constante, porém superior a da água [Zamir and Roach-1973].

Parece inevitável que, a fim de fazer qualquer progresso no todo, alguns fatores envolvidos devem ser inicialmente ignorados e, então, reintroduzidos gradual e sistematicamente quando a investigação progride. Portanto, decidimos começar a análise do fluxo em um modelo de bifurcação cuidadosamente simplificado, com a confiança que os resultados poderão não somente proporcionar as bases para o estudo dos modelos mais sofisticados de fluxo de sangue, mas também ser comparados com outros estudos em vitro e em vivo já realizados [Roach-1977].

Para uma análise prévia do fluxo sangüíneo em uma bifurcação é importante distinguir os efeitos primários, os quais devem ser incluídos na análise e os efeitos secundários, que podem ser ignorados pelo menos inicialmente. Desta forma, podemos considerar algumas simplificações sobre a natureza do fluxo sangüíneo em bifurcações arteriais.

Outra informação importante é que o fluxo sangüíneo em um sistema cardiovascular é pulsátil. A pulsatilidade do sangue tem uma função importante no estudo do fluxo em artérias, mas a aceitação da análise considerando o fluxo como estável é boa. Na artéria carótida comum e interna as velocidades características tem demonstrado que o fluxo durante a sístole (período de contração do ciclo cardíaco) é mais rápido e relativamente

constante, de modo que a hipótese de fluxo estável é bastante realística para parte do ciclo cardíaco [Roach-1977, Liepsch- 1986].

Adicionalmente, a partir de estudos experimentais realizados tem-se que o raio dos vasos sanguíneos (artérias) tendem a variar aproximadamente 5%. Portanto, a dilatação transiente da parede arterial, depois da sístole, é relativamente pequena e esse efeito sobre a estabilidade do fluxo pode ser considerado desprezível quando comparado com efeitos do pico da velocidade média do sangue. A partir desta informação, considera-se aqui as paredes rígidas (duto, artéria) [Brech-1973; Zamir and Roach-1973]. Como verificamos, todas as considerações têm a sua justificativa e são necessárias para proporcionar os princípios básicos para o estudo de modelos mais sofisticados.

3.2 - EQUAÇÕES GOVERNANTES PARA ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS

A natureza segregada do processo de solução, onde as equações são resolvidas uma a uma até obter a convergência, requer que cada variável tenha uma equação evolutiva para ser avançada. Se a massa específica não varia significativamente com a pressão, como é o caso de fluidos incompressíveis, é importante obter um campo de pressão que seja consistente com as velocidades. Desta forma, é necessário obter uma equação para a pressão.

O desafio é determinar esse campo de pressões que, quando inserido nas equações do movimento, origine um campo de velocidades que satisfaça a equação da conservação da massa. O que se pode dizer é que o fato da massa específica não variar com a pressão fortalece o acoplamento entre a pressão e a velocidade, causando dificuldades para a solução numérica do sistema de equações. Necessita-se tratar o acoplamento pressão-velocidades uma vez que o sistema é resolvido segregadamente. Então, substitui-se as velocidades como função da pressão na equação da conservação da massa e obtém-se a

equação para a pressão. Esta formulação é denominada incompressível [Patankar-1981; Degrez-1992; Maliska-1995].

Existem, atualmente, diversos métodos para tratar deste acoplamento. O objetivo de todos é criar uma equação para a pressão que permita que o processo iterativo avance, observando a conservação da massa, embora na realidade a pressão varie relativamente pouco [Hirsch-1990].

3.2.1 – EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Baseado em todos os fatores anteriormente mencionados faz-se as hipóteses que o sangue possui um comportamento semelhante ao de um fluido newtoniano com viscosidade e massa específica um pouco superiores a da água quando o fluxo ocorre no interior da artéria carótida, o que comprovadamente é uma boa aproximação.

As equações governantes para o escoamento de um fluido viscoso, newtoniano, incompressível, bidimensional e sem forças de corpo são as equações de Navier-Stokes e da continuidade que em suas variáveis primitivas são dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

onde u e v são as componentes do vetor velocidade nas direções x e y respectivamente, p é a pressão, ρ é a massa específica e μ é a viscosidade cinemática do fluido.

As incógnitas a serem calculadas em cada ponto da malha são a pressão e as duas componentes do vetor de velocidade. Entretanto, a pressão não aparece na equação da continuidade e deve-se obter uma equação para a avaliá-la [Gresho-1987; Hirsch-1990].

3.2.2 –EQUAÇÃO PARA A PRESSÃO

Para a obtenção de uma equação para a pressão um procedimento alternativo ao indicado em 3.2 é gerar uma equação adicional a partir das equações de quantidade de movimento e continuidade. Isto pode ser feito considerando as equações de Navier-Stokes escritas na forma adimensional:

$$u_t + uu_x + vu_y = -p_x + \frac{1}{\text{Re}}(u_{xx} + u_{yy}) \quad (3.4)$$

$$v_t + uv_x + vv_y = -p_y + \frac{1}{\text{Re}}(v_{xx} + v_{yy}) \quad (3.5)$$

Verifica-se aqui ser o número de Reynolds o adimensional que caracteriza este escoamento através de uma análise por semelhança.

Uma equação de Poisson para a pressão é obtida pela diferenciação da equação (3.4) em relação a x e (3.5) em relação a y e adição destas, resultando [Gresho-1987]:

$$\nabla^2 p = -\left[(u^2)_{xx} + (uv)_{xy} + (v^2)_{yy} \right] - D_t + \frac{1}{\text{Re}}(D_{xx} + D_{yy}) \quad (3.6)$$

sendo o termo D definido como:

$$D = u_x + v_y \quad (3.7)$$

que representa a continuidade (equação 3.3).

No contínuo e em regime permanente $D = 0$; mas, devido às aproximações ou iterações incompletas durante a obtenção da solução numérica da equação de Poisson, erros

são acumulados e $D_{i,j} \neq 0$. O fato de omitir D em (3.6) não gera somente inexatidão, mas uma instabilidade nas equações da quantidade de movimento. Uma vez incluindo D podemos eliminar esta instabilidade. O termo D_t , a ser avaliado por qualquer método, é usado por u_t e v_t , forçando $D_{i,j}^{t+\Delta t} = 0$. Desta forma, o termo temporal nas equações da quantidade de movimento é mantido por questões de estabilidade numérica.

3.3 - MÉTODOS DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

Para aplicar um método de solução para o sistema de equações tem-se que discretizar o domínio, ou seja, distribuir um certo número de pontos no espaço onde a solução será avaliada (obtida) e aproximar as equações diferenciais transformando-as em um sistema de equações algébricas. A partir deste ponto recorre-se à técnicas de solução das equações algébricas.

Esse processo é feito através da aproximação das equações assumindo que a solução tem forma polinomial entre os pontos adjacentes da malha. Assim, as equações diferenciais são transformadas em expressões algébricas que envolvem a função incógnita. A maneira de obter essas equações algébricas é que caracteriza o tipo de método numérico. Entre os métodos disponíveis para o tratamento dessas equações tem-se o de volumes finitos, elementos finitos, elementos de contorno e diferenças finitas. Existem muitas discussões a respeito da eficiência de cada um destes métodos, mas cada um possui as suas vantagens e desvantagens.

O método de elementos finitos consiste em aproximar as equações governantes via combinações de funções de interpolação. O domínio completo é discretizado sem sobreposição de elementos. Este método possui vantagens como a versatilidade quanto a modelagem geométrica, com o uso de malhas não estruturadas, permitindo que geometrias

complexas possam ser aproximadas, mas falha no tratamento dos termos convectivos presentes nas equações de quantidade de movimento, admitindo geralmente apenas aproximação espacial de primeira ordem [Maliska-1995; De Bortoli-1997; Santos-1998].

O método de volumes finitos pode ser obtido pela realização de balanços da propriedade envolvida (massa, quantidade de movimento, etc.) no volume elementar, ou partindo da equação diferencial na forma conservativa, integrando-a sobre o volume de controle no espaço e no tempo. A solução é encontrada para pontos nodais que estão no centro do volume (esquema centrado) ou nos vértices do polígono (ou poliedro em 3D). Uma das vantagens do método de volumes finitos é a realização do balanço de massa sobre os volumes de controle, o que não é normalmente feito em elementos finitos e diferenças finitas.

O método de diferenças finitas consiste em aproximar as derivadas por expressões providas de expansões em série de Taylor. Este método teve todo o seu desenvolvimento baseado nos sistemas coordenados ortogonais, como o cartesiano, o cilíndrico e o esférico. Por isso muitos ainda o vinculam unicamente à malhas cartesianas, equivocadamente, uma vez que ele pode ser aplicado a qualquer tipo de malha, mesmo a não estruturada usada em elementos finitos e/ou volumes finitos [Maliska-1995].

Na verdade, todos estes métodos tendem a um objetivo comum: a solução de escoamentos sobre geometrias complexas; conservação das propriedades localmente e economia de tempo computacional [De Bortoli-1997]. Após descrever-se as vantagens de cada método, não faz sentido argumentar qual é o melhor método. O que se tem, na prática, são diferentes graus de experiência dos diversos métodos para diferentes problemas e diferentes usuários.

4 - PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO

Após citação e justificação das restrições empregadas no modelo, descreve-se o procedimento de solução para o estudo do fluxo sanguíneo na artéria carótida, considerando-o como laminar, estável, newtoniano e incompressível. Este tipo de fluxo é matematicamente descrito pelas equações de Navier-Stokes [Schlichting-1960; Chorin-1967; Chorin-1968].

Não é de conhecimento da autora a existência de soluções fechadas para estas equações no caso de geometrias e condições de contorno gerais (complexas). Para geometrias complexas, como a bifurcação da artéria carótida, aproximações numéricas tem sido aplicadas. As possibilidades de escolha do método numérico para a presente aplicação são muitas, com suas vantagens e desvantagens já mencionadas por outros autores [Caro and Gerald-1969; Brech-1973; Zamir and Roach-1973; Roach-1977; Wille-1980; Bharadvaj-1982; Liepsch-1982; Zarins et al.-1983; Reneman-1985; Liepsch-1986; Perktold-1986; Van de Vosse-1987; Lonsdale et al.-1988; Rindt-1988; Hayes et al.-1989; Liepsch-1990; Degrez et al.-1992].

Para a presente aplicação o método de diferenças finitas é usado. Uma das vantagens deste método é que o sistema de equações aproximadas obtido pode ser de segunda ordem ou ordem superior. Além disso, o mesmo possui simplicidade matemática e estrutura favorável permitindo a obtenção da solução numérica de forma eficiente (econômica), tanto na aproximação espacial como temporal das equações governantes.

4.1 – OBTENÇÃO DA MALHA COMPUTACIONAL

Na aproximação espacial, o método mais simples (não o menos trabalhoso) para gerar um sistema de coordenadas é fazê-lo manualmente. Este consiste em usar um papel milimetrado, desenhar a geometria e os pontos para traçar as linhas coordenadas. As interseções destas linhas dão as coordenadas (x,y) desejadas. Uma vez obtida a malha deve-se fornecer ao computador os pontos da interseção das linhas. Isto não é viável para geometrias bi e tridimensionais complexas, onde prefere-se o uso de métodos automáticos [Anderson et al.-1984].

Existem muitos métodos automáticos disponíveis na literatura para geração de malhas. Fundamentalmente, eles podem ser classificados em algébricos e diferenciais. Os métodos algébricos empregam diferentes tipos de interpolação e são versáteis e rápidos. Os métodos diferenciais empregam equações diferenciais; são mais gerais, mas, apresentam tempo de computação sensivelmente maior e são mais elaborados matematicamente [Maliska-1995].

As dificuldades para desenvolver métodos gerais para a solução de problemas definidos em geometrias complexas, utilizando sistemas coordenados ortogonais, como o cartesiano, o cilíndrico, o esférico e outros, são fáceis de perceber. Mesmo usando diferenças finitas e elementos finitos, onde não existe a necessidade da realização de balanços, fica difícil aplicar as condições de contorno, pois é necessária a determinação das métricas junto à fronteira e os pontos nodais internos ao domínio.

A solução é obtida no interior do domínio onde as fronteiras representam a situação; em geral uma delas é uma superfície sólida, relacionada a algum dispositivo ou veículo. As possibilidades de escolha da posição dos pontos discretos onde a solução será calculada e a forma de aplicação das leis da conservação nessa malha são diversas, com vantagens e desvantagens associadas a cada uma [Santos-1998].

Podemos salientar que a escolha da natureza da malha é muito importante no desenvolvimento de um modelo numérico em coordenadas generalizadas. As malhas poderão ser de natureza estruturada e não estruturada. As malhas estruturadas são obtidas sobre um sistema de coordenadas, para a qual há uma regra aparente de formação, onde cada ponto desta pode ser localizado por uma seqüência de índices ordenados. As principais vantagens de uma malha estruturada são conexão entre os pontos estabelecida por uma regra, facilidade de implementação computacional e solução de sistemas lineares facilitada [De Bortoli-1997].

As malhas não estruturadas são geradas sem regra aparente com o sistema de coordenadas. Cada elemento, ponto ou volume, possui uma identificação própria não existindo uma estrutura simples. As vantagens de uma malha não estruturada são facilidade de concentração nas regiões desejadas e menor número de volumes (pontos) no domínio [De Bortoli-1997].

A solução de um sistema de equações diferenciais pode ser grandemente simplificada através de uma malha bem construída. O processo de geração de malhas é que determina o mapeamento o qual transforma os pontos da malha do domínio físico no domínio transformado.

Mas, em alguns casos, é impossível encontrar uma transformação de coordenadas capaz de mapear o domínio físico num domínio computacional simplificado (retângulo). Neste caso, um artifício muito utilizado é a subdivisão do domínio em diversos blocos, onde cada um pode ser transformado. Nas interfaces dos blocos a solução deve ser transferida de maneira semelhante à aplicação das condições de contorno, que será discutida no item 4.4. Como as malhas estruturadas são obtidas de um sistema de coordenadas generalizado, permite-se encontrar a transformação entre o sistema cartesiano (x,y) , que é o domínio físico, e o sistema generalizado (ξ,η) , que é o domínio transformado ou computacional, conforme mostra a figura 4.1. Plano ou domínio físico é aquele para o qual a

geometria do problema com a discretização coincidente com a fronteira é referenciada no plano $\{x,y,t\}$, enquanto que o plano transformado é a representação da geometria no novo sistema de coordenadas (ξ,η,t) .

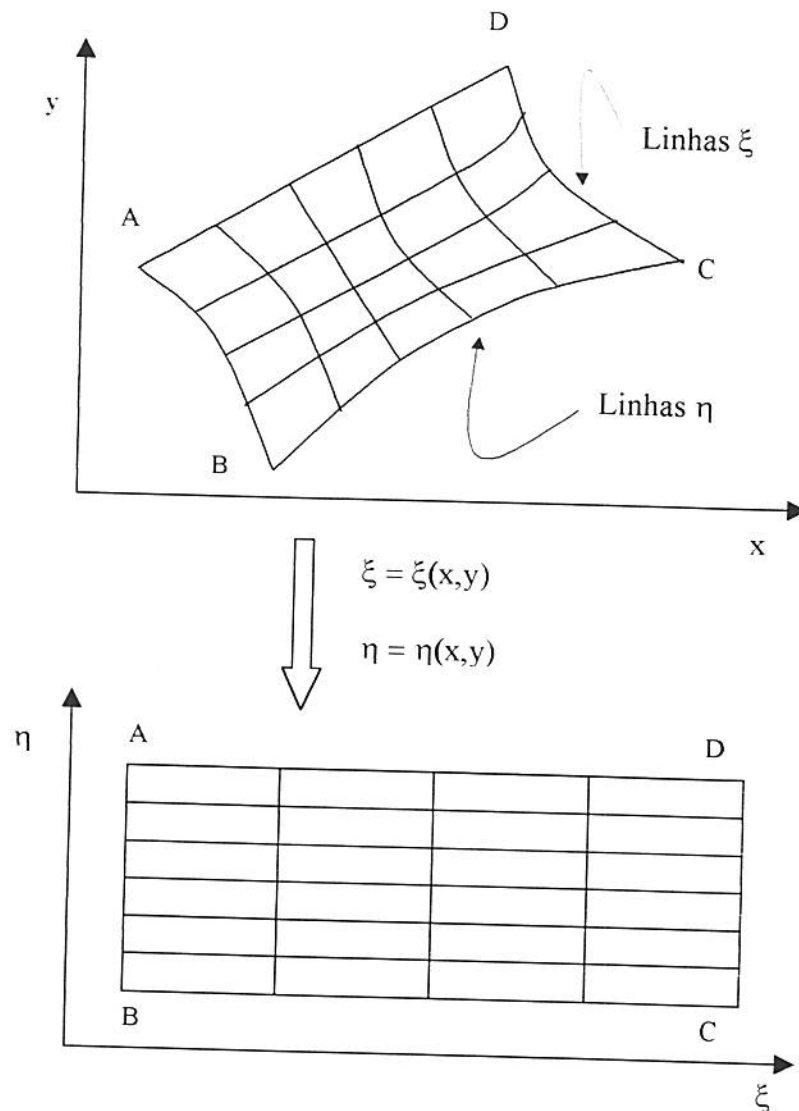


Figura 4.1 - Plano físico e transformado [Maliska-1995].

Os métodos de aproximação polinomial são mais eficientes se aplicados em coordenadas cartesianas com espaçamento constante. Entretanto, a maioria das aplicações de interesse ocorrem em domínios complexos, como por exemplo, a geometria considerada neste trabalho (artéria carótida). Portanto, é conveniente transformar o domínio físico, geralmente não retangular, em um domínio computacional cartesiano onde os pontos da malha são

igualmente espaçados. É importante salientar que independente da geometria do plano físico (figura 4.1), a geometria no plano transformado adotado será do tipo retangular com dimensões unitárias para $\Delta\xi$ e $\Delta\eta$ (figura 4.1) [Anderson et al.-1984; Degrez et al.-1992].

Esta transformação facilita a aplicação das condições de contorno e permite alinhar uma das coordenadas à superfície de interesse. A relação entre o espaço físico e o computacional, em duas dimensões, é dada por:

$$\xi = \xi(x, y) \quad (4.1)$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad (4.2)$$

Pela regra da cadeia as derivadas parciais podem ser transformadas da seguinte maneira

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (4.4)$$

As métricas da transformação ou relações de comprimentos no espaço físico e transformado, ξ_x , ξ_y , η_x e η_y são facilmente definidas a partir das dimensões no espaço físico.

Comparando as relações diferenciais (4.5)

$$\begin{aligned} d\xi &= \xi_x dx + \xi_y dy \\ d\eta &= \eta_x dx + \eta_y dy \end{aligned} \quad (4.6)$$

com as da transformação inversa

$$dx = x_\xi d\xi + x_\eta d\eta \quad (4.7)$$

$$dy = y_\xi d\xi + y_\eta d\eta \quad (4.8)$$

conclui-se que as relações entre elas são dadas por:

$$\xi_x = Jy_\eta \quad (4.9)$$

$$\xi_y = -Jx_\eta \quad (4.10)$$

$$\eta_x = -Jy_\xi \quad (4.11)$$

$$\eta_y = Jx_\xi \quad (4.12)$$

onde J é o Jacobiano da transformação; uma relação entre as áreas em cada um dos espaços para problemas bidimensionais

$$J = \frac{1}{x_{\xi}y_{\eta} - y_{\xi}x_{\eta}} \quad (4.13)$$

Usando as relações (4.3) e (4.4) nas equações (3.1) a (3.2) obtém-se as equações de Navier-Stokes em coordenadas generalizadas conforme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta_x \right) + v \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta_y \right) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial p}{\partial \eta} \eta_x \right) + \\ + \frac{\mu}{\rho} \left[\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial v}{\partial \eta} \eta_x \right) + v \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial v}{\partial \eta} \eta_y \right) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial p}{\partial \eta} \eta_y \right) + \\ + \frac{\mu}{\rho} \left[\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi_x^2 + \xi_y^2 \\ \beta &= \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y \\ \gamma &= \eta_x^2 + \eta_y^2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

A equação para a pressão em coordenadas generalizadas assume a forma:

$$\nabla^2 p = \alpha \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} = P \quad (4.17)$$

onde os termos de P são dados por

$$\begin{aligned}
-\rho \left[(uv)_{,xy} + 2(vv)_{,yy} \right] = & \\
-\rho \left[\xi_x^2 (uv)_{,\xi\xi} + 2\xi_x \eta_x (uv)_{,\xi\eta} + \eta_x^2 (uv)_{,\eta\eta} + \right. & \quad (4.18) \\
+ 2 \left(\xi_x \xi_y (uv)_{,\xi\xi} + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) (uv)_{,\xi\eta} + (uv)_{,\eta\eta} \eta_x \eta_y \right) + & \\
\left. + \xi_y^2 (vv)_{,\xi\xi} + 2\xi_y \eta_y (vv)_{,\xi\eta} + (\eta_y)^2 (vv)_{,\eta\eta} \right] &
\end{aligned}$$

$$u_x + v_y = u_{,\xi} \xi_x + u_{,\eta} \eta_x + v_{,\xi} \xi_y + v_{,\eta} \eta_y$$

As derivadas de segunda ordem de $(u_x + v_y)$ são obtidos de forma semelhante.

Como podemos observar na figura 4.2, a geometria da artéria carótida é complexa na região da bifurcação, com um alargamento no sinus (bulbo) da entrada da artéria carótida interna seguido por estreitamento na saída da carótida interna, o que indica a necessidade de uma transformação de coordenadas. Preferiu-se, no mapeamento da artéria carótida, utilizar uma discretização estruturada e um sistema de coordenadas generalizadas.

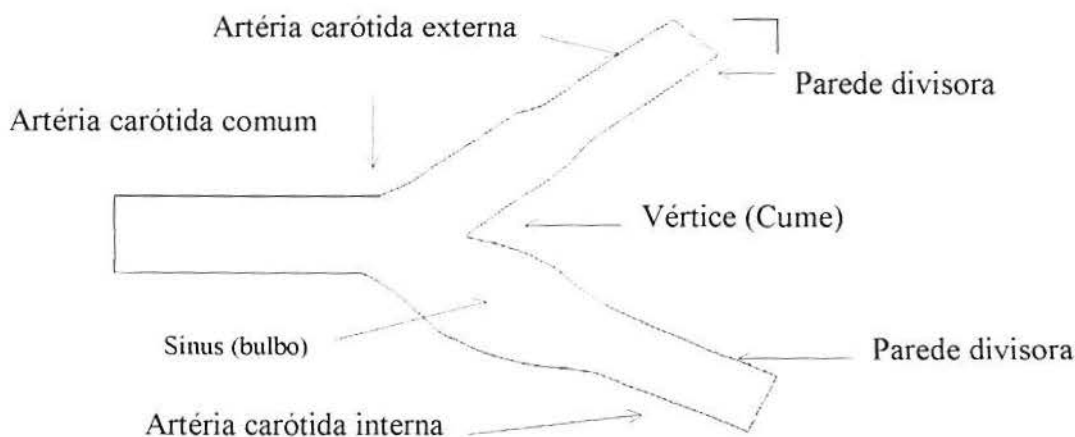


Figura 4.2 - Geometria da artéria carótida.

4.2 - APROXIMAÇÃO ESPACIAL DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

As aproximações espaciais implementadas aqui são em diferenças finitas de segunda ordem (centrais). Para facilitar, considera-se as equações (3.4) e (3.5) escritas em na forma adimensional como

$$\frac{\widehat{c}u}{\widehat{c}t} = E_1(u, v) - F_1(p) \quad (4.19)$$

$$\frac{\widehat{c}v}{\widehat{c}t} = E_2(u, v) - F_2(p) \quad (4.20)$$

respectivamente. Desta maneira, aproximando os termos das derivadas espaciais E_1 e E_2 em diferenças centrais obtém-se:

$$E_1(u, v) = -u_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} - v_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} + \quad (4.21)$$

$$+ \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right)$$

$$E_2(u, v) = -u_{i,j} \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} - v_{i,j} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} + \quad (4.22)$$

$$+ \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right)$$

A aproximação para F_1 e F_2 é feita em diferenças centrais, uma vez que o seu efeito é de caráter elíptico (propagação em todas as direções). Assim, a aproximação é colocada na forma

$$F_1(p) = \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (4.23)$$

$$F_2(p) = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (4.24)$$

A aproximação espacial da equação para a pressão é apresentada considerando-a escrita na forma

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\rho \left[(uu)_{xx} + 2(uv)_{xy} + (vv)_{yy} \right] - \rho (u_x + v_y)_t + \quad (4.25)$$

$$+ \rho v \left[(u_x + v_y)_{xx} + (u_x + v_y)_{yy} \right]$$

$$= b^p$$

Os termos do lado esquerdo da equação (4.25) em diferenças finitas são escritos como:

$$\frac{\hat{c}^2 p}{\hat{c}x^2} + \frac{\hat{c}^2 p}{\hat{c}y^2} = \frac{p_{i-1,j} - 2p_{i,j} + p_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,j-1} - 2p_{i,j} + p_{i,j+1}}{\Delta y^2} \quad (4.26)$$

Considerando os termos do lado direito da equação (4.25) a aproximação em diferenças finitas é dada por:

$$\begin{aligned} -\rho \left[(uu)_{xx} + 2(uv)_{xy} + (vv)_{yy} \right] = & -\rho \left[\frac{u_{i-1,j}^2 - 2u_{i,j}^2 + u_{i+1,j}^2}{\Delta x^2} + \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{v_{i-1,j-1} + v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1} - v_{i+1,j+1}}{4\Delta x \Delta y} \right) + \frac{v_{i,j+1}^2 - 2v_{i,j}^2 + v_{i,j-1}^2}{\Delta y^2} \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

Ainda aproximando os termos b^p tem-se:

$$\begin{aligned} -\rho (u_x + v_y)_t = & -\rho \left[\left(\frac{\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y}}{\Delta t} \right)^{n+1} - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y}}{\Delta t} \right)^n \right] \\ = & -\frac{\rho}{2\Delta x \Delta y \Delta t} \left[(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \Delta y + (v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) \Delta x \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

Este resultado foi possível uma vez que o termo $(u_x + v_y)^{t+\Delta t}$ foi feito igual a zero, pois a conservação da massa deve ser igual a zero para qualquer tempo. No entanto, o termo temporal $(u_x + v_y)^t$ é mantido por questões de estabilidade numérica. E finalmente, aproximando o último termo de b^p , tem-se:

$$\begin{aligned} \rho v \left[(u_x + v_y)_{xx} + (u_x + v_y)_{yy} \right] = & \rho v \left[d_{xx} + d_{yy} \right] = \\ = & \rho v \left[\frac{d_{i-1,j} - 2d_{i,j} + d_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{d_{i,j+1} - 2d_{i,j} + d_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Paralela à aproximação espacial, os métodos de avanço no tempo, além de afetarem a ordem de aproximação temporal do algoritmo, são de grande importância na obtenção da estabilidade numérica. Nos procedimentos usados para obtenção da solução das equações governantes dos problemas de escoamento, são inúmeros os métodos a serem empregados aliados a adequada implementação das condições de contorno.

4.3 – CONDIÇÕES DE CONTORNO E INICIAIS

A aplicação das condições de contorno em um determinado problema físico é uma das partes mais importantes na simulação numérica, pois exige-se o conhecimento adequado do problema. Deve-se saber escolher corretamente as condições de contorno, de tal forma que estas não destruam a qualidade da solução desejada [Maliska-1995].

As equações (4.14) e (4.15) apresentadas governam o escoamento de fluido com as simplificações já indicadas. Para obter uma solução única, admitindo que a solução desse sistema de equações diferenciais parciais existe, é necessário aplicar condições de contorno e iniciais. Estas são relações impostas sobre as fronteiras que em geral relacionam os valores das variáveis de estado do fluido na fronteira com os valores no interior da malha.

Para o escoamento interno, bidimensional como estudado na artéria carótida, foram usadas condições para os campos de velocidade e pressão. As condições de contorno aplicadas aqui são, como mostra a figura 4.3:

- (i) nas paredes: fluxo nulo em u (direção horizontal) e v (direção vertical);
- (ii) na entrada: extrapolação das velocidades u (direção horizontal) e v (direção vertical) e pressão especificada (pressão inicial);
- (iii) nas saídas: extrapolação das velocidades u (direção horizontal) e v (direção vertical) e pressão prescrita (obtida através de relação de fluxos).

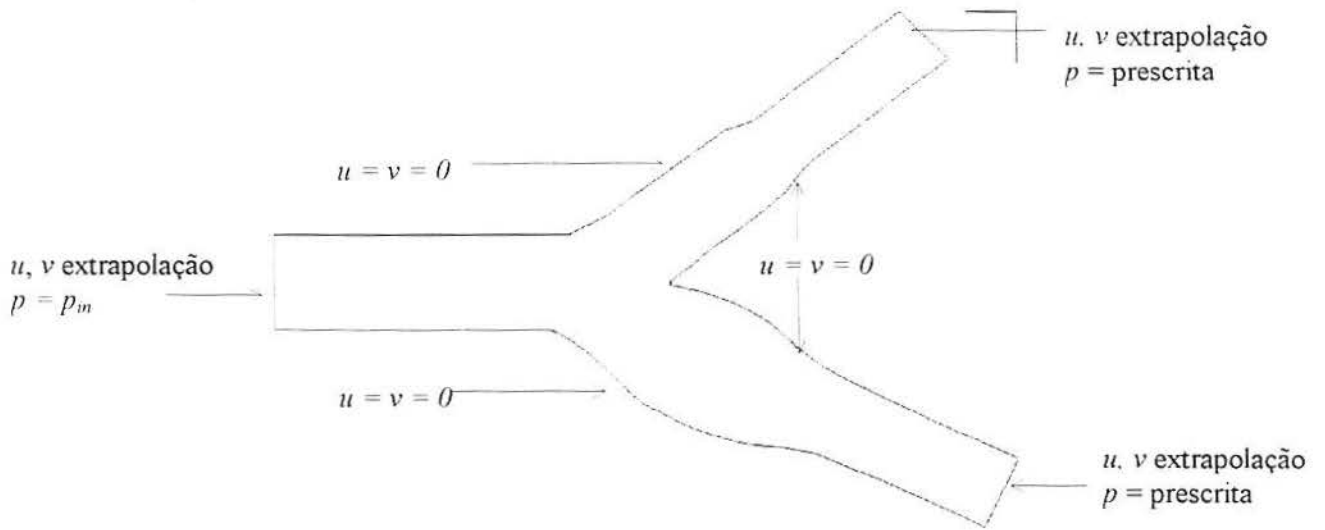


Figura 4.3 - Condições de contorno e iniciais da artéria carótida.

Para a geometria da artéria carótida as condições iniciais consideradas aqui foram

$$u = u_m \cdot \cos \theta$$

$$v = v_m \cdot \sin \theta$$

onde θ é o ângulo considerado.

As condições de contorno para o duto simples e com obstrução são semelhantes só que nestes casos tem-se apenas uma saída.

4.4 - SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES APROXIMADAS

Uma vez transformado o domínio físico para o computacional e aplicadas as condições de contorno, obtém-se a solução do sistema de equações diferenciais aproximadas integrando-as no tempo.

O procedimento utilizado é baseado no processo de integração temporal de Runge-Kutta. Este é um método iterativo o qual consiste na aplicação repetitiva de um

algoritmo mais simples (Jacobi). Como a maioria dos métodos iterativos, este origina uma solução correta somente como limite de uma seqüência, mesmo desconsiderando os erros de arredondamento. Para ser útil o procedimento deve convergir, mas só é considerado efetivo se a convergência for rápida [Cabuk-1992].

O método de Runge-Kutta é usado porque os seus coeficientes podem ser selecionados de forma a obter soluções de alta precisão (temporal), otimizando as características de amortecimento do erro da solução. Mais de dois estágios são usados com a finalidade de estender a região de estabilidade. Um esquema Runge-Kutta simplificado que requer menos memória computacional é dado por [Kroll and Jain-1987; De Bortoli-1994].

$$\begin{aligned}\vec{W}_{i,j}^{(0)} &= \vec{W}_{i,j}^{(n)} \\ \vec{W}_{i,j}^{(k)} &= \vec{W}_{i,j}^{(0)} - \alpha_k \Delta t \vec{R}_{i,j}^{(k-1)} \\ \vec{W}_{i,j}^{(n-1)} &= \vec{W}_{i,j}^{(k)}\end{aligned}\quad k=1,2,\dots,m=5 \quad (4.30)$$

onde

$$R_{i,j}^{(k)} = Q_{i,j}^{(k)} - D_{i,j}^{(k)}$$

Os termos apresentados no esquema de Runge-Kutta simplificado, para o sistema de equações escrito na forma genérica $\frac{d\vec{W}_{i,j}}{dt} = -\vec{R}_{i,j}$ como em (3.1) e (3.2), representam:

\vec{Q} → vetor fluxo convectivo

\vec{W} → vetor das variáveis características

n → passo de tempo anterior

$n+1$ → passo de tempo atual

α → coeficiente dos estágios de Runge-Kutta

\vec{R} → vetor resíduo

$k \rightarrow$ estágios de Runge-Kutta

$D \rightarrow$ termos dissipativos

Alguns esquemas de segunda ordem eficientes são dados pelos coeficientes (mostrados na tabela 4.1)

3 estágios	$\alpha_1 = 1/2$	$\alpha_2 = 1/2$	$\alpha_3 = 1$		
4 estágios	$\alpha_1 = 1/4$	$\alpha_2 = 1/3$	$\alpha_3 = 1/2$	$\alpha_4 = 1$	
5 estágios	$\alpha_1 = 1/4$	$\alpha_2 = 1/6$	$\alpha_3 = 3/8$	$\alpha_4 = 1/2$	$\alpha_5 = 1$

O número de estágios usados no presente trabalho é três, pois demonstrou ser adequado para a obtenção da solução.

4.5 - CONDIÇÕES DE CONVERGÊNCIA

Quando estamos trabalhando com sistemas de equações não lineares, como as de Navier-Stokes resolvidas em forma segregada, onde acoplamentos delicados estão presentes, é muito difícil provar matematicamente que uma aproximação numérica é estável e convergente. Seria ótimo se soubéssemos a priori todos os parâmetros adequados (dimensão da malha, intervalo de tempo, coeficientes de relaxação, etc) para que as aproximações numéricas dos problemas acoplados e não lineares fossem estáveis e convergentes. Por não ter esses parâmetros é que simular numericamente, além de exigir bom conhecimento da física do problema, requer experiência para encontrar os parâmetros que levem o processo iterativo à convergência.

Um dos requisitos fundamentais de uma aproximação numérica é que ela reproduza a equação diferencial quando o tamanho da malha tende a zero. Isto é, os erros de truncamento devem tender a zero quando o número de pontos da malha tender ao infinito. A aproximação numérica que possuir essa característica é dita *consistente* [Kroll and Jain-1987]. Portanto, as equações aproximadas devem tender às equações diferenciais, quando os espaçamentos da malha tenderem a zero.

Outra característica desejada é que a solução numérica obtida seja a solução das equações aproximadas. Aqui diversos fatores interferem, tais como erros de arredondamento que vão se multiplicando e podem até instabilizar o procedimento de solução; dificuldades de tratamento de acoplamentos entre as variáveis, fazendo com que algumas variáveis evoluam mais rapidamente que outras, etc.

Dentre as análises de estabilidade encontradas na literatura tem-se a de Fourier ou Von Neumann. A aplicação desta análise para problemas modelo consiste em escrever a solução da equação governante como:

$$S_n = S_v + \varepsilon \quad (4.31)$$

onde S_v é a solução verdadeira, S_n é a solução numérica e ε é o erro da solução [Anderson et al. -1984].

Consistência e estabilidade são condições necessárias e suficientes para a *convergência*. A solução numérica é convergente quando é estável e tende para a solução das equações diferenciais quando a malha é refinada [Maliska-1995].

Como pode-se observar a solução numérica de problemas de fluxo contém algumas imprecisões, que são definidas pelo critério de convergência. É comum estabelecer um critério que seja pequeno o suficiente, para desconsiderar estas imprecisões [De Bortoli-1994].

O critério usado para interromper a execução do programa não é uma decisão fácil. Existem problemas que possuem convergência lenta como é o caso da simulação na artéria carótida e, caso a execução seja interrompida por um critério mal escolhido, pode-se ainda estar longe da solução do problema. Por outro lado, às vezes, utiliza-se um critério muito severo, que mantém o programa iterando sem necessidade [Maliska-1995].

A escolha do critério é fácil quando os limites de variação da função são conhecidos, sendo até um critério de erro absoluto eficiente. Quando, entretanto, não se conhecem a ordem de grandeza e a faixa de variação do campo a ser determinado, a tarefa é mais difícil. O uso da pressão como critério de convergência, para problemas incompressíveis, deve-se ao fato da pressão sempre variar. Um campo de pressões pode variar, por exemplo, entre 10^{-3} e 10^{-4} e um critério de convergência relativo, como o de costume usado, pode manter um programa sendo executado, quando o que interessa do ponto de vista físico (vazão e tensão de cisalhamento) está já com variações extremamente pequenas. Este é o perigo de se fazer critérios relativos em campos que possuem valores pequenos [Maliska-1995].

Para exemplificar as definições acima considera-se que $U(x, t)$ seja a solução aproximada de uma equação diferencial, resolvida passo a passo na direção t . O efeito de erros, ou mais provavelmente erros de arredondamento, pode substituir $U(x_0, t_0)$ por $[U(x_0, t_0) + \varepsilon]$ para o ponto (x_0, t_0) na malha. Se o procedimento de solução é continuado com o valor $[U(x_0, t_0) + \varepsilon]$ sem novos erros sendo introduzidos e se para os pontos subsequentes o valor $U^*(x, t)$ é obtido, então denotamos por $[U^*(x, t) - U(x, t)]$ o desvio da solução resultante do erro ε para todo (x_0, t_0) [Gresho-1987; Ames-1992].

Quando erros são cometidos ou introduzidos em mais de um ponto, surgem desvios cumulativos, que não são somados, exceto em problemas lineares. Se δ é o erro máximo absoluto, isto é, $[|\varepsilon(x, t)| < \delta]$ e h é o tamanho do intervalo (da malha), então o procedimento é dito ser estável em relação ao ponto se a divergência cumulativa tende a zero

quando $\delta \rightarrow 0$ e não aumenta mais rapidamente do que para algumas potências de h^{-1} quando $h \rightarrow 0$. Quando a solução continua correspondente permanece limitada a um processo de diferenças finitas dentro da faixa $[0 < x < 1, t > 0]$ esta é denominada instável em relação a um passo, se para uma malha fixa e uma condição de contorno homogênea fixa há distúrbios iniciais para os quais a solução de diferenças finitas $U_{i,j}$ torna-se ilimitada como para $j \rightarrow \infty$ [Gresho-1987; Ames-1992].

Um segundo conceito fundamental, o da convergência, é freqüentemente relacionado com a instabilidade. Para exemplificar esta idéia já introduzida anteriormente, considere a equação diferencial parcial:

$$\begin{aligned} L(u) = 0 & \quad \text{em } D & (4.32) \\ u = g & \quad \text{sobre } \Gamma \end{aligned}$$

onde Γ é o contorno de D (domínio). Em associação com (4.25) existe um processo de diferenças finitas, cuja malha, não importando a configuração, depende de certos parâmetros, como o tamanho do intervalo. Supõe-se que existe somente um h (tamanho da malha), e descreve-se o problema de diferenças finitas como

$$\begin{aligned} L_h(U) = 0 & \quad \text{em } D & (4.33) \\ U = g_h & \quad \text{em } \Gamma \end{aligned}$$

Assim, pode-se dizer que o método de diferenças finitas converge se $U(P)$ converge para a solução $u(P)$, com o mesmo valor de contorno, quando $h \rightarrow 0$ [Ames-1992].

Todos os aspectos descritos explicam a cautela que se deve ter na escolha dos critérios de convergência, pois os mesmos são necessários em diversos níveis dentro de um programa de simulação; mas, principalmente para cessar os cálculos, quando as variáveis convergiram. No entanto, durante o processo de teste do programa os critérios usados devem ser “frouxos” para evitar tempo de computação desnecessário [Maliska-1995].

Baseado no que foi exposto, o critério de convergência utilizado assume a forma para o residuo da pressão ε :

$$\varepsilon \geq \frac{p - p_0}{p_m} \quad (4.34)$$

onde p é a pressão local, p_0 a pressão na iteração anterior (local) e p_m pressão inicial de referência.

5 - RESULTADOS NUMÉRICOS

A arte de simular numericamente qualquer problema físico requer a harmonia entre o uso do computador, a busca dos erros de programação e a correta interpretação dos resultados. Desta forma, para o sucesso na preparação, uso e execução de um programa computacional, exige-se conhecimento da física do problema, das técnicas numéricas, entre muitos outros fatores existentes.

Na realização de um trabalho computacional em dinâmica dos fluidos recomenda-se começar com um programa simples; uma geometria simples em coordenadas cartesianas. Não é recomendável, inicialmente, incorporar todos os tipos de condições de contorno possíveis e para todas as situações. É aconselhável fazer um programa enxuto, sobre o qual se tenha controle absoluto (solução analítica) se possível e se saiba procurar erros com o conhecimento da física do fenômeno.

A possibilidade de trabalhar com geometrias simples permite a aplicação de conceitos fundamentais visando a aquisição do embasamento necessário para o estudo de modelos mais sofisticados. Uma vez simulado o fluxo numa geometria simples tem-se os fundamentos necessários para tratar o fluxo numa geometria mais sofisticada (complexa).

Nesta linha de conduta, os procedimentos iniciais visaram a familiarização com os processos utilizados para a confecção e análise de um código computacional aplicado e foram realizados testes de escoamento num duto. Para a visualização das malhas

computacionais e dos campos de velocidade apresentados na forma de figuras neste trabalho utilizou-se o programa *Visual* desenvolvido no Instituto de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS [Justo-1998].

5.1 - ESCOAMENTO NUM DUTO

Este estudo foi realizado utilizando-se o sistema em coordenadas cartesianas, no qual foi considerado um escoamento laminar, incompressível, permanente, plenamente desenvolvido e bidimensional. Para a obtenção dos resultados numéricos, desenvolveu-se um programa escrito em linguagem FORTRAN em coordenadas cartesianas e generalizadas.

A figura 5.1 apresenta a malha computacional de 24 x 11 nós utilizados. Devido à simplicidade geométrica não há a necessidade de concentração de células em uma determinada região de interesse específico, uma vez que o escoamento na entrada do duto já é considerado plenamente desenvolvido.



Figura 5.1 - Malha computacional para o duto, 24 x 11 pontos.

O procedimento numérico utilizado para a obtenção da solução do escoamento no interior do duto é o mesmo descrito no capítulo 4.1. Identifica-se, novamente, que a aplicação das condições de contorno para esta geometria foram:

- a) Nas paredes: exige-se condição de fluxo nulo, onde as velocidades u (direção x) e v (direção y) são nulas e portanto iguais a zero;
- b) Na entrada e saída: as velocidades u (direção x) e v (direção y) são impostas inicialmente e depois extrapoladas e o gradiente de pressão Δp é imposto;

O campo de velocidades do escoamento plenamente desenvolvido no interior do duto, assim como suas características, são apresentadas na figura 5.2. Pode-se observar que os resultados obtidos estão em concordância com os apresentados na literatura [Bejan-1984], pois os termos viscosos considerados e presentes na equação de Navier-Stokes, são explicitados pelo perfil de velocidades parabólico, ou seja, velocidade nula na parede e maior no centro do duto, embora como condição inicial tenha-se tomado o perfil de velocidade uniforme no interior do mesmo. A magnitude dos vetores está associada à distância em relação à linha ordenada.

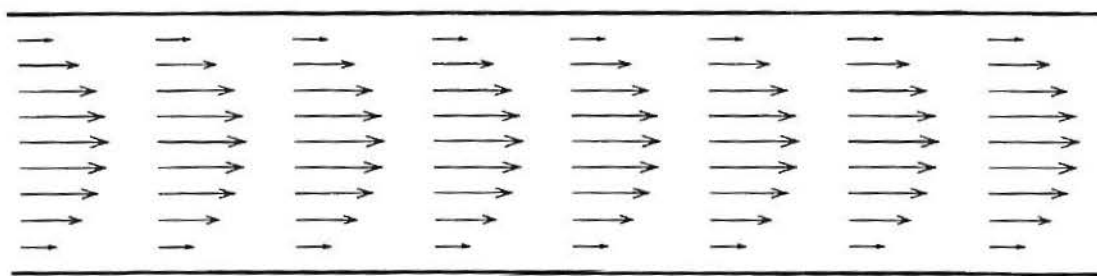


Figura 5.2 - Vetores velocidade para o escoamento no duto.

Observe-se que o escoamento não apresenta complexidade para análise por se tratar de uma geometria simples. O código utilizado para obtenção deste resultado numérico foi escrito também em coordenadas generalizadas, cujo procedimento, descrito em 4.1, visa o estudo do fluxo no interior da artéria carótida.

5.2 - ESCOAMENTO NA ARTÉRIA CARÓTIDA

Após a verificação do código no cálculo do escoamento no interior do duto, partiu-se para a aplicação do modelo para o escoamento na artéria carótida. O procedimento numérico para obtenção da malha computacional para esta geometria foi apresentado no capítulo 4.1. Pode-se observar claramente através da figura 5.3 que a bifurcação da artéria

carótida possui geometria irregular, principalmente na região do sinus (bulbo) o que se constitui num fator que eleva a complexidade do escoamento, como também observado por muitos outros autores [Lynn-1971; Chen-1973; Zamir-1973; Kandarpa and Davids-1976; Roach-1977; Bharadvaj-1982; Liepsch-1982; Zarins et al.-1983; Reneman-1985; Liepsch-1986, Perktold and Hilbert-1986; Rindt et al.-1987, Liepsch-1990; Hunt-1993].

As características mais relevantes observadas na geometria da bifurcação da artéria carótida, que contribuem na complexidade quanto à análise do escoamento, são:

- efeitos de curvatura nas junções das artérias carótidas comum - interna e comum - externa;
- alargamento do diâmetro na entrada da artéria carótida interna (sinus) que abruptamente se estreita na saída;
- assimetria quanto às ramificações das artérias carótidas interna e externa;
- pequeno alargamento do diâmetro na entrada da artéria carótida externa seguida por um estreitamento na saída;

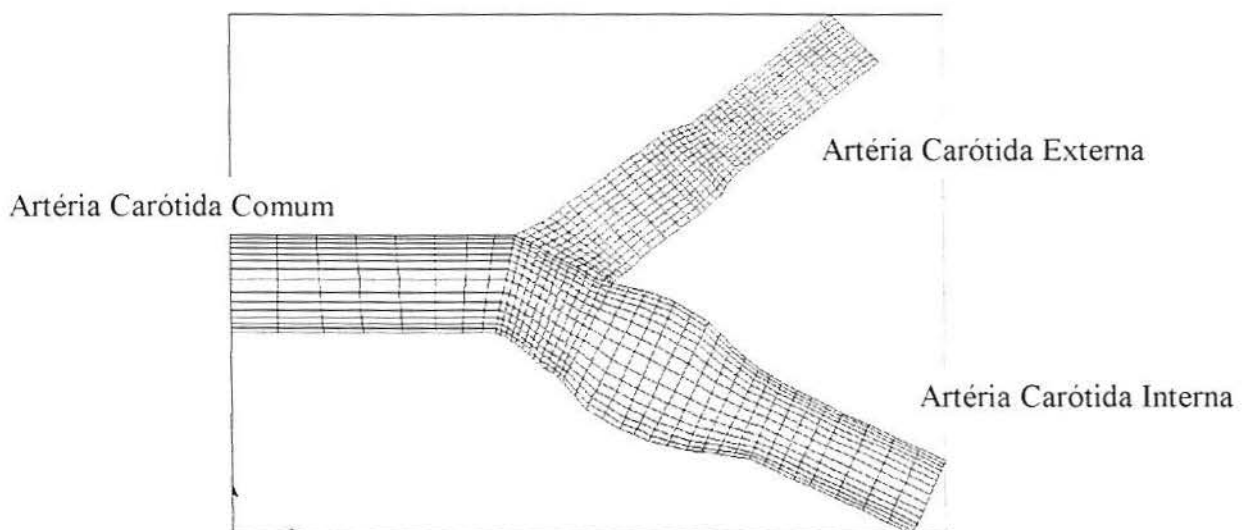


Figura 5.3 - Malha computacional da artéria carótida: externa 53 x 13 pontos; interna 41 x 15 nós.

Na obtenção da malha para a geometria desta artéria foram necessários vários refinamentos. Inicialmente tinha-se 35x13, 41x13 e 53x13 nós na carótida interna e 25x9 e 41x15 nós na carótida externa. Deste refino verificou-se otimização da solução obtida quando comparada com os resultados das malhas menos refinadas.

Assume-se que a geometria da bifurcação está posicionada de modo que idealmente exista simetria de fluxo no plano horizontal. A metade superior da bifurcação corresponde àquela parte do modelo que está acima do plano de simetria e o fluxo na artéria carótida comum ocorre da esquerda para a direita. É importante salientar que houve necessidade de maior concentração das células na região da bifurcação e no sinus (bulbo) da carótida interna para melhor detectar as características do escoamento nesta região de interesse. Além disso, a transferência das variáveis entre a artéria carótida comum/interna e externa foi feita por três células na junção destas malhas.

Para a análise dos resultados da simulação do escoamento, cujo procedimento numérico foi explicitado em 4.1, mostra-se inicialmente os vetores velocidade na geometria completa como ilustra a figura 5.4, para $Re=250$ com relação de fluxo de 40% e 60% para as carótidas externa e interna, respectivamente. O número de Reynolds é usado como parâmetro adimensional para descrever o escoamento do fluido. Apesar de não serem apresentados neste trabalho, outros testes foram realizados com diferentes relações de taxa de fluxo para observar as variações no comportamento do escoamento no interior da artéria carótida.

Observa-se que o fluxo na artéria carótida é bastante complexo, sendo que o sinus (bulbo) da carótida interna causa a principal influência no fluxo e contribui para a acentuada diferença na complexidade do escoamento entre as carótidas externa e interna como também foi observado por outros autores [Bharadvaj-1982].

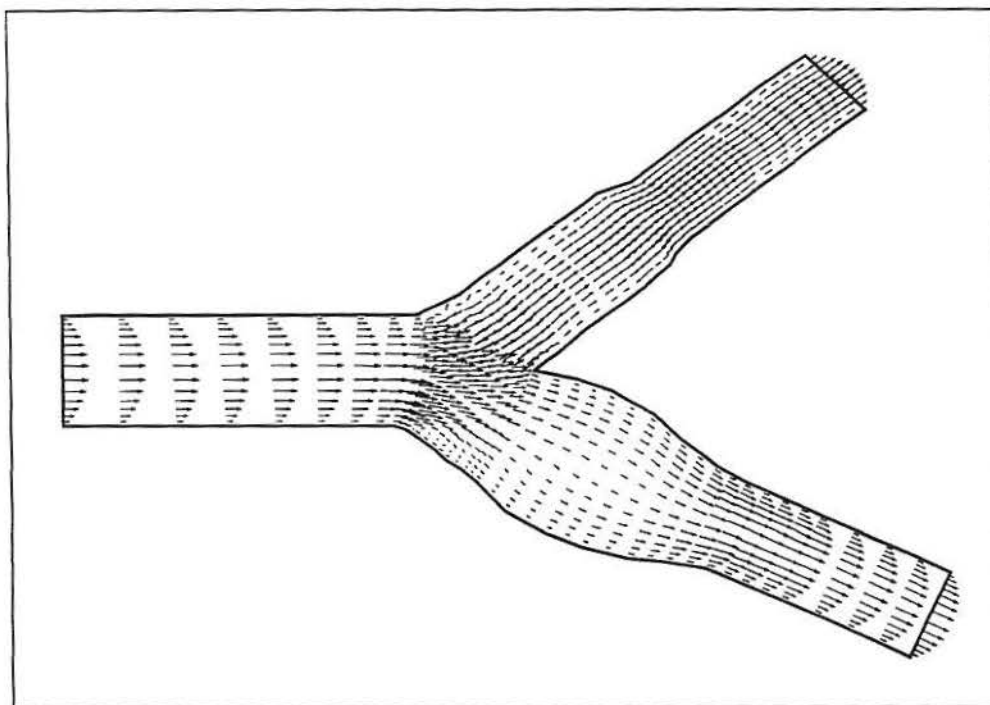


Figura 5.4 - Vetores velocidade na bifurcação da artéria carótida, $Re=250$.

Analisando-se o escoamento na entrada da artéria carótida comum na figura 5.4, observa-se que o perfil de velocidade axial é plenamente desenvolvido (parabólico) não havendo influência da bifurcação. Próximo à bifurcação e paredes as velocidades diminuem devido à influência do alargamento da artéria carótida comum, resultando em pequenos gradientes de velocidade para estas paredes. Esta redução de velocidade prossegue dentro das ramificações subsequentes levando à separação do fluxo [Steenhoven-1988].

Quando o fluido entra nas ramificações tem-se maior complexidade na análise do escoamento, como na entrada da artéria carótida interna. Nela observa-se uma região de fluxo reverso na parede não divisora da junção das artérias carótidas comum-interna, que é função de sua geometria divergente [Rindt and Steenhoven-1988; Steenhoven-1988].

Quanto ao campo de velocidades na artéria carótida externa, este apresenta um gradiente de velocidade maior próximo à parede divisora da região de bifurcação e valores

relativamente baixos no lado da parede não divisora, mas não houve surgimento de uma região de fluxo reverso, como observado no sinus da carótida interna [Bharadvaj-1982].

Na seqüência, visando avaliar as características do escoamento e obter uma melhor compreensão das condições de fluxo em estudo, apresentam-se regiões específicas da artéria carótida com as suas características diferenciadas.

5.2.1 - ANÁLISE DO FLUXO NA ARTÉRIA CARÓTIDA COMUM (ACC)

O comportamento do escoamento na entrada da artéria carótida comum pode ser observado na figura 5.5, que apresenta as seguintes características [Steenhoven-1988]:

- perfil de velocidade parabólico, formado por fluxo laminar plenamente desenvolvido;
- simetria do perfil de velocidades quanto ao plano de bifurcação horizontal;
- gradientes de velocidade relativamente constantes para ambas às paredes;

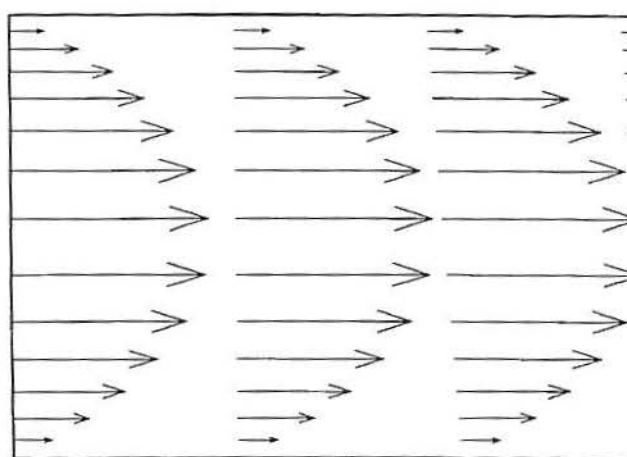


Figura 5.5 - Perfil de velocidade axial na entrada da ACC para fluxo estável,

Re=250.

5.2.2 - ANÁLISE DO FLUXO NA ARTÉRIA CARÓTIDA INTERNA (ACI)

O escoamento na entrada da artéria carótida interna apresenta comportamento complexo conforme mostra a figura 5.6, onde se observa [Rindt and Steenhoven-1988; Steenhoven-1988]:

- redução de velocidade devido à região de alargamento do sinus (bulbo);
- região de fluxo reverso com baixas velocidades na parede não divisora do sinus (bulbo), que é um efeito de sua geometria (junção das artérias carótida comum e interna);
- velocidades maiores na parede divisora (influência do vértice de bifurcação quando o fluxo é dividido);
- perfil de velocidade assimétrico com relação ao plano horizontal;
- mudança de velocidade axial em direção à parede divisora, devido ao efeito de forças centrífugas.

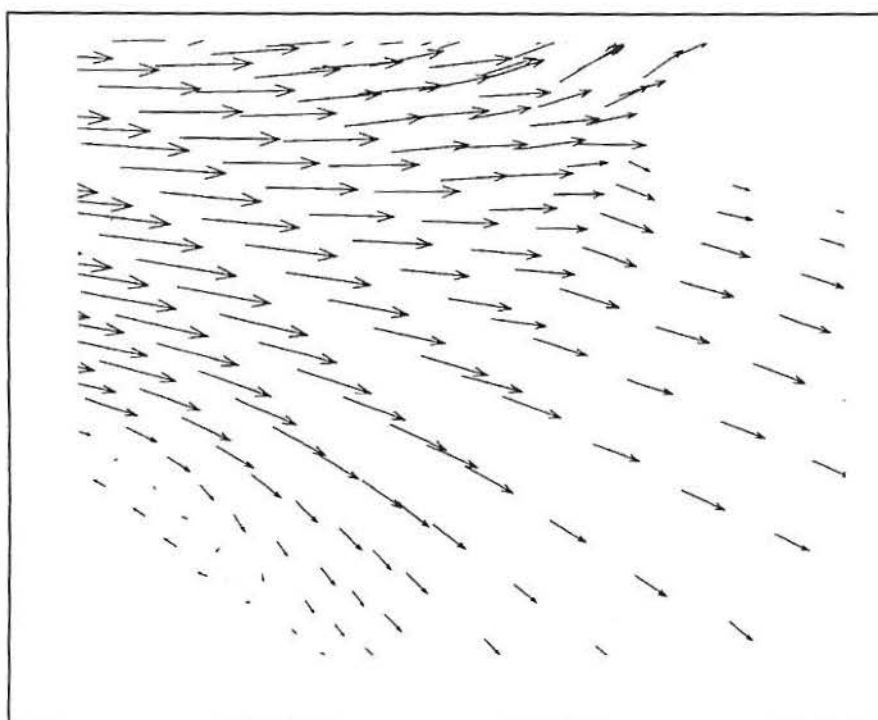


Figura 5.6 - Vetores velocidade na entrada da ACI para fluxo estável, $Re=250$.

A região de fluxo reverso se deve possivelmente à geometria do bulbo apresentar um diâmetro maior que o da artéria carótida comum, uma situação que favorece à recirculação. Esta afirmação é confirmada nos trabalhos de pesquisa realizados por Reneman [1985].

Na saída da artéria carótida interna, conforme mostra a figura 5.7, o escoamento apresentou as seguintes características gerais e de comum acordo com a literatura [Zamir and Roach-1973; Feuerstein et al.-1976; Reneman-1985; Steenhoven-1988; Hunt-1993]:

- aumento da velocidade; devido a redução do diâmetro;
- ausência de região de fluxo reverso;
- perfil de velocidade parabólico, com velocidades aumentando das paredes para o centro;
- perfil de velocidade simétrico em relação ao eixo de simetria;
- altos gradientes de velocidade para ambas as paredes;

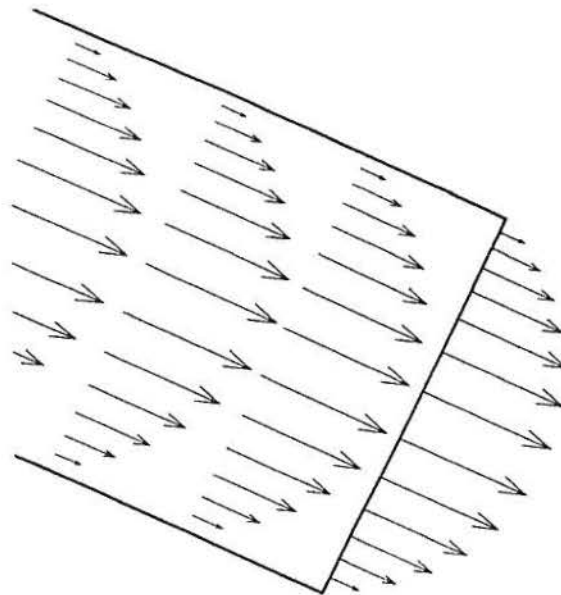


Figura 5.7 - Perfil de velocidade axial na saída da ACI para fluxo estável, $Re=250$.

5.2.3 - ANÁLISE DO FLUXO NA ARTÉRIA CARÓTIDA EXTERNA (ACE)

Na análise do escoamento na entrada da artéria carótida externa, figura 5.8, podemos salientar como características observadas [Wille-1980; Bharadvaj-1982; Reneman-1985; Liepsch-1990; Hunt-1993;]:

- velocidades maiores na parede divisora (influência do vértice de bifurcação quando o fluxo é dividido);
- velocidades menores na parede não divisora; que é um efeito de sua geometria (junção das artérias carótida comum e externa);
- ausência de fluxo reverso;
- assimetria no perfil de velocidades com relação ao eixo;

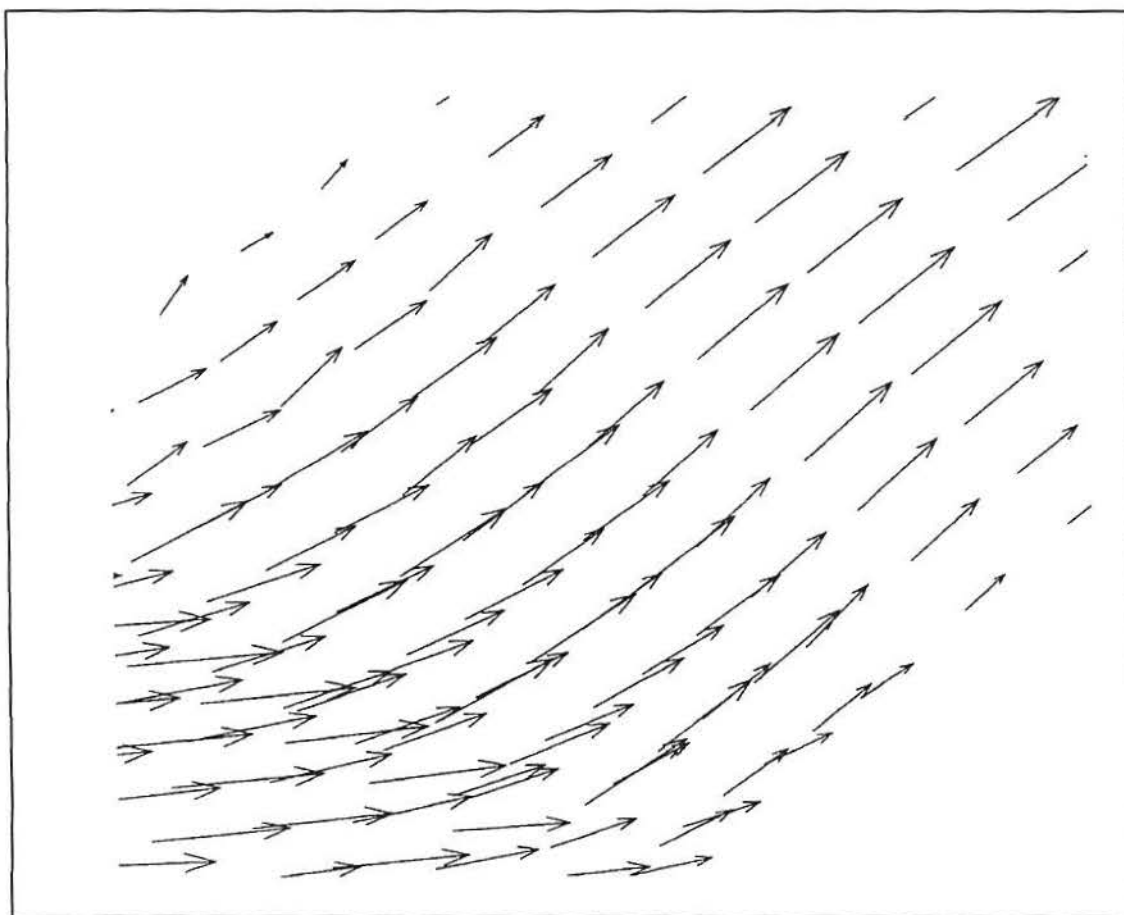


Figura 5.8 - Vetores velocidade na entrada da ACE para fluxo estável, $Re=250$.

Pode-se verificar que o escoamento na entrada da artéria carótida externa não apresenta complicações para análise como verificada na entrada da artéria carótida interna. Existe uma redução da velocidade axial na entrada da artéria carótida externa que é uma forte influência da razão de divisão do fluxo [Caro and Gerald-1969; Bharadvaj-1982].

Na saída da artéria carótida externa, figura 5.9, o campo de velocidades apresentou como características [Zamir and Roach-1973; Reneman-1985; Steenhoven-1988; Hunt-1993]:

- aumento da velocidade devido à redução do diâmetro do vaso;
- ausência de fluxo reverso;
- perfil de velocidade parabólico com velocidades maiores no centro do vaso

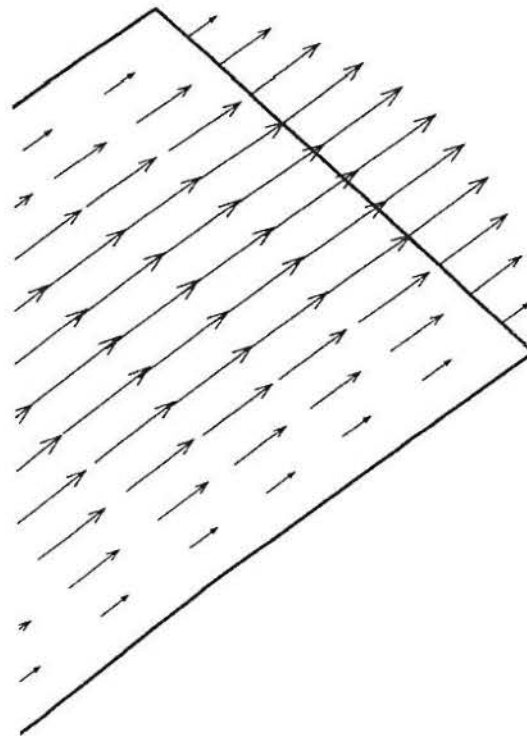


Figura 5.9 - Perfil de velocidade axial na saída da ACE para fluxo estável, $Re=250$.

5.2.4 - INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE REYNOLDS NA BIFURCAÇÃO DA ARTÉRIA CARÓTIDA

O número de Reynolds tem sido muito usado por biólogos para normalizar condições de fluxo pulsátil [Roach- 1977]. Com o objetivo de avaliar as características do escoamento para as variações do número de Reynolds e seu aspecto fisiológico sobre a anatomia da bifurcação da artéria carótida, foi simulado o escoamento para $Re=400$ [Wille-1980].

Os resultados encontrados para número de Reynolds nas artérias carótidas comum e externa apresentaram características semelhantes àquelas verificadas para $Re=250$, já mencionados; portanto não se justifica a necessidade de visualizá-los novamente. A principal característica observada foi na entrada da artéria carótida interna, na região do sinus (bulbo). Portanto, a ênfase para a análise particular e comparativa do escoamento será dada à região do sinus (bulbo), uma vez que uma variação significativa da solução com o número de Reynolds situou-se aqui conforme verificado por outros autores usando outros métodos para obter a solução [Lynn-1971; Zamir and Roach-1973; Deshpande-1976; Reneman-1985; Rindt et al.-1987; Steenhoven-1988; Hunt-1993]. As características observadas para o número de $Re=400$, foram formação de vórtices, extensão na região de fluxo reverso, redução da tensão de cisalhamento e velocidade maior quando comparado àquela verificada para $Re=250$, uma vez que estes efeitos estão em função do aumento do número de Reynolds, conforme ilustra a figura 5.10.

É importante salientar que a extensão da região de fluxo reverso na artéria carótida interna pode ser mais pronunciada se, ao aumentarmos o número de Reynolds, diminuirmos a taxa de fluxo através desta artéria, uma vez que a taxa de fluxo no ciclo cardíaco, obviamente falando de fluxo pulsátil, não é constante. Como a taxa de divisão de fluxo aqui foi fixada de 40 e 60% para as artérias carótidas externa e interna, respectivamente,

a extensão da região de fluxo reverso não foi tão pronunciada, mesmo com as variações do número de Reynolds $Re=250$ e $Re=400$. Este efeito de extensão da região de fluxo reverso, figura 5.10, seria mais perceptível com variação também da taxa de divisão de fluxo. Mas, como considera-se o fluxo estável não apresenta-se outras variações da taxa de fluxo referentes as artérias carótidas externa e interna. Na literatura pode-se encontrar resultados (visualizações) de fluxo reverso em relação as variações do número de Reynolds e taxas de fluxo [Bharadvaj-1982; Rodkiewicz-1983; Zarins et al.-1983].

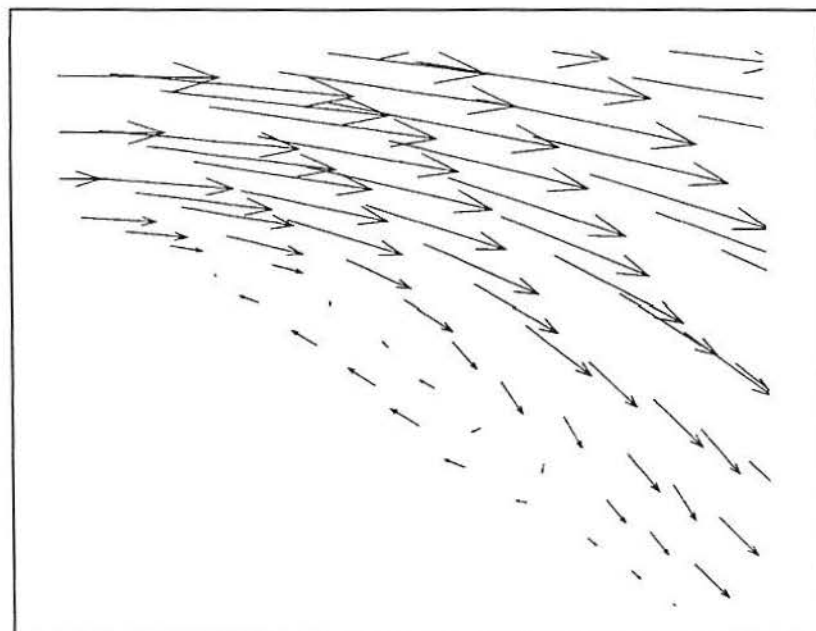


Figura 5.10 - Vetores velocidade na região do sinus (bulbo) para fluxo estável, $Re=400$.

A figura 5.11 mostra as linhas de corrente e os vetores velocidade obtidos para o escoamento no interior da artéria carótida. Verifica-se claramente a separação do fluxo entre as artérias carótidas interna e externa, assim como a diminuição da velocidade na região do sinus carotídeo. Pode-se verificar ainda a região de recirculação na entrada do bulbo da artéria carótida interna.

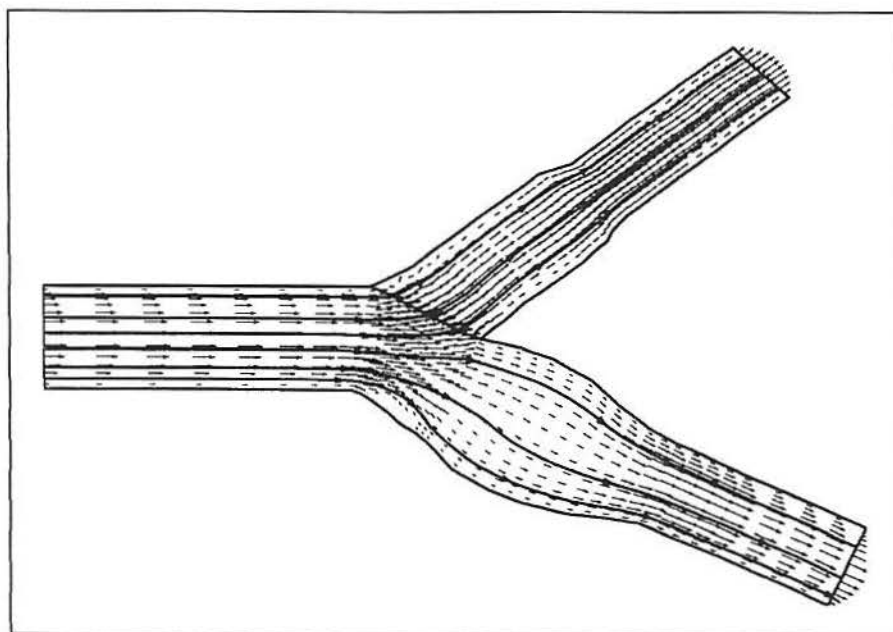


Figura 5.11 - Linhas de corrente na artéria carótida.

Finalmente, a figura 5.12 mostra as linhas de corrente obtidas por Bharadvaj [1982] $Re = 200$ para o escoamento no interior da artéria carótida [Hunt-1993]. Embora o número de Reynolds não seja o mesmo, as características do escoamento laminar são praticamente as mesmas e a semelhança no fluxo é observada.

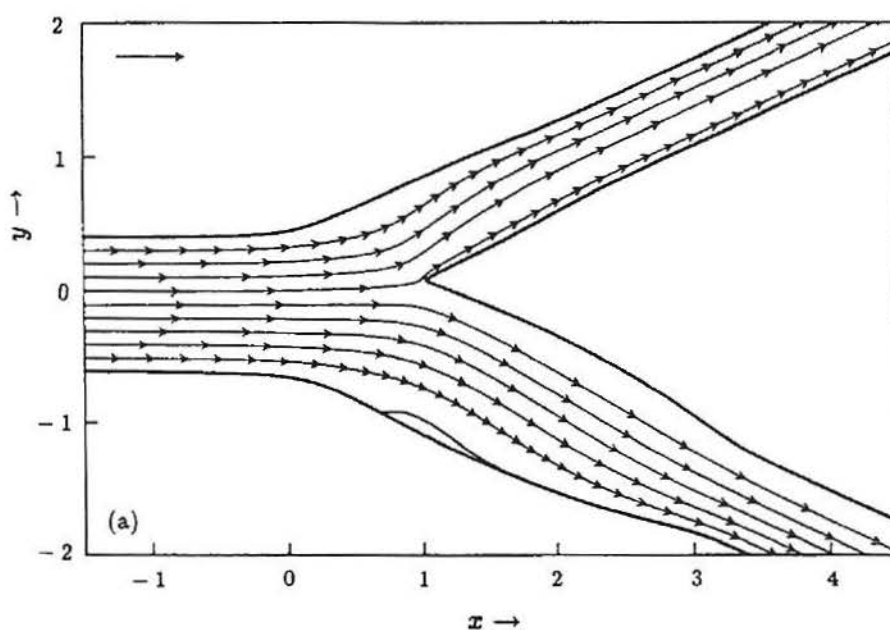


Figura 5.12 - Linhas de corrente na artéria carótida [Bharadvaj-1982]

5.3 - ESCOAMENTO SOBRE O RESSALTO

Para finalizar, apresenta-se o escoamento no interior do duto com uma obstrução (estreitamento). Este foi escolhido visando avaliar o método numérico para fluxos complexos, com fortes zonas de recirculação. Outro aspecto a ser considerado é que o fluxo bidimensional sobre um passo quadrado (ressalto) pode ser considerado como um modelo de estenose bidimensional, do qual informações valiosas sobre as propriedades do fluxo para a estenose arterial podem ser obtidas.

É de conhecimento que a estenose é um fenômeno relacionado à aterosclerose, que é uma doença que acomete as artérias, sendo uma das suas causas o estreitamento (obstrução) [Lazzaretti-1996]. O estudo de escoamentos em ressaltos, estenoses ou em dutos com obstruções tem sido objeto de muitas investigações [Zamir and Roach-1973; Deshpande and Giddens-1976; Padmanabhan-1980; Wille-1980; Rindt et al.-1987; Reneman-1985; Steenhoven-1988; Hunt-1993]. Na obtenção da malha computacional, visando ter maior versatilidade na obtenção da solução, preferiu-se trabalhar em coordenadas generalizadas. Para captar as características do escoamento na região da obstrução (estreitamento) do resalto optou-se por um número maior de células (refinamento).

O modelo considerado na figura 5.13 considera uma geometria retangular, com um passo quadrado de comprimento e altura unitários provocando uma zona de obstrução de 25%. A malha contém 56 x 28 pontos distribuídos de forma a melhor representar as regiões de grande variação de velocidade, e, como consequência, variações na tensão de cisalhamento. Estas regiões ocorrem, naturalmente, nas proximidades do resalto.

O procedimento numérico utilizado para a simulação do fluxo sobre o resalto foi semelhante ao mencionado no capítulo 4.1. As condições de contorno empregadas para esta geometria foram:

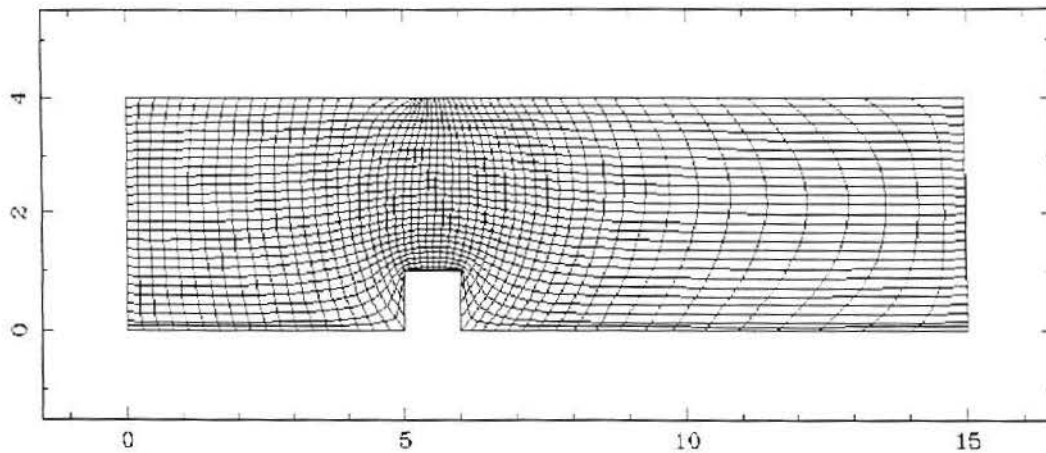


Figura 5.13 - Malha computacional para o ressalto, 56 x 28 pontos.

- a) Nas paredes: exige-se condição de fluxo nulo, onde as velocidades u (direção x) e v (direção y) são nulas e portanto iguais a zero;
- b) Na entrada e saída: as velocidades u (direção x) e v (direção y) são extrapoladas e o gradiente de pressão Δp é imposto;

O campo de velocidades obtido no escoamento sobre o ressalto, figura 5.14, para $Re=100$ apresenta as seguintes características:

- aumento de velocidade na região da obstrução (estreitamento);
- região de fluxo reverso (recirculação) após o ressalto;
- redução da velocidade na saída

Sabe-se de estudos experimentais que a extensão axial da zona de fluxo reverso (recirculação) em geometrias com obstruções aumenta quase que proporcionalmente com o número de Reynolds.

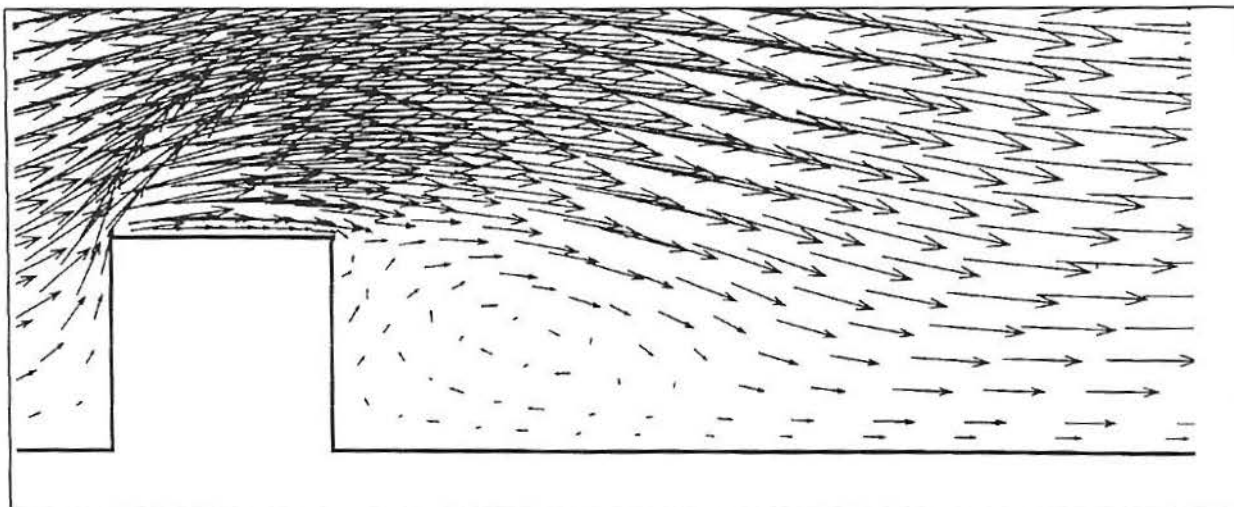


Figura 5.14 - Campo de velocidade do escoamento sobre o ressalto, $Re=100$.

A separação do escoamento no canto do ressalto resulta numa zona de recirculação atrás do ressalto. A severidade da obstrução (estenose) tem um efeito significativo com variação do número de Reynolds e isto influi no tamanho da região de recirculação. Em termos de número de Reynolds o fluxo reverso ocorre cedo para várias estenoses, e, além disso, sua região apresenta diferenças para modelos com a mesma área de redução [Liepsh-1982; Huang et al.-1995]. Para número de Reynolds elevados transição para a turbulência é observada no recolamento do escoamento. Verifica-se que a transição para a turbulência não é observada para $h < 0.4D$ e $Re_{ch} < 520$. Para analisar este efeito observa-se as características da região de obstrução com a variação do número de Reynolds, $Re=300$ e $Re=500$, sobre o ressalto, conforme mostram as figuras 5.15 e 5.16, respectivamente.

É importante salientar que o fluxo estável através de uma estenose assimétrica (como considerada aqui) com 25% de redução de área, continua laminar e estável para número de Reynolds até 1000 [Van de Vosse-1987]. Portanto, um parâmetro conveniente para descrever as características do fluxo como uma função do número de Reynolds é o comprimento da região de fluxo reverso.

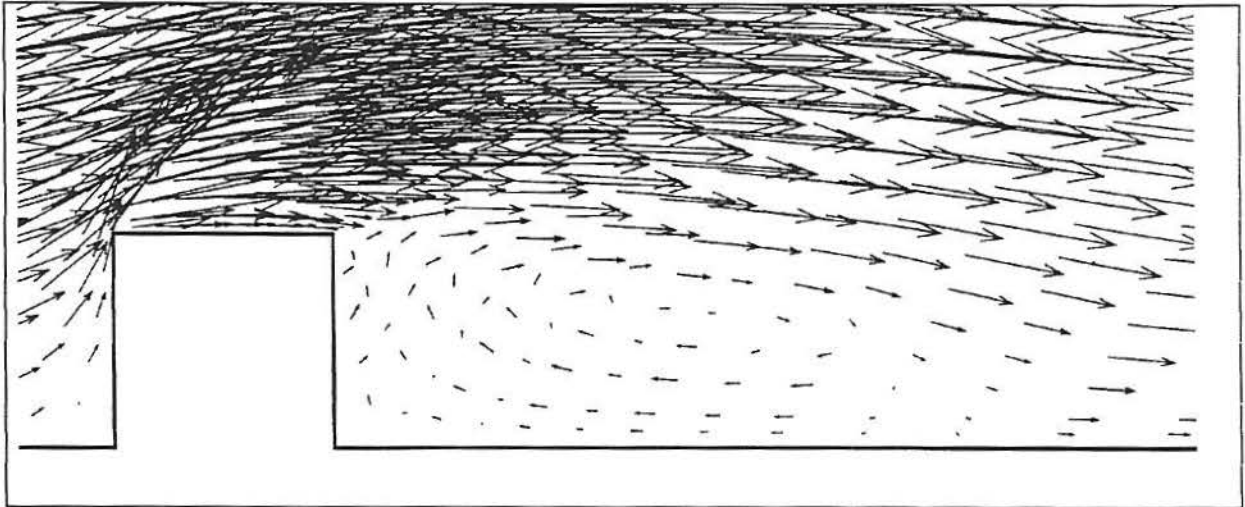


Figura 5.15 - Vetores velocidade do escoamento sobre o ressalto, $Re=300$.

Observando os resultados verifica-se que estes aumentam proporcionalmente com o número de Reynolds, $Re=100$ e 300 , respectivamente [Brech and Bellhouse-1973; Chen-1973; Zamir and Roach-1973; Deshpande-1976; Padmanabhan-1980; Wille-1980; Reneman-1985; Rindt et al.-1987; Steenhoven-1988; Hunt-1993].

A figura 5.16 ilustra o efeito do perfil de velocidade e o tamanho da região de fluxo reverso para $Re=500$.

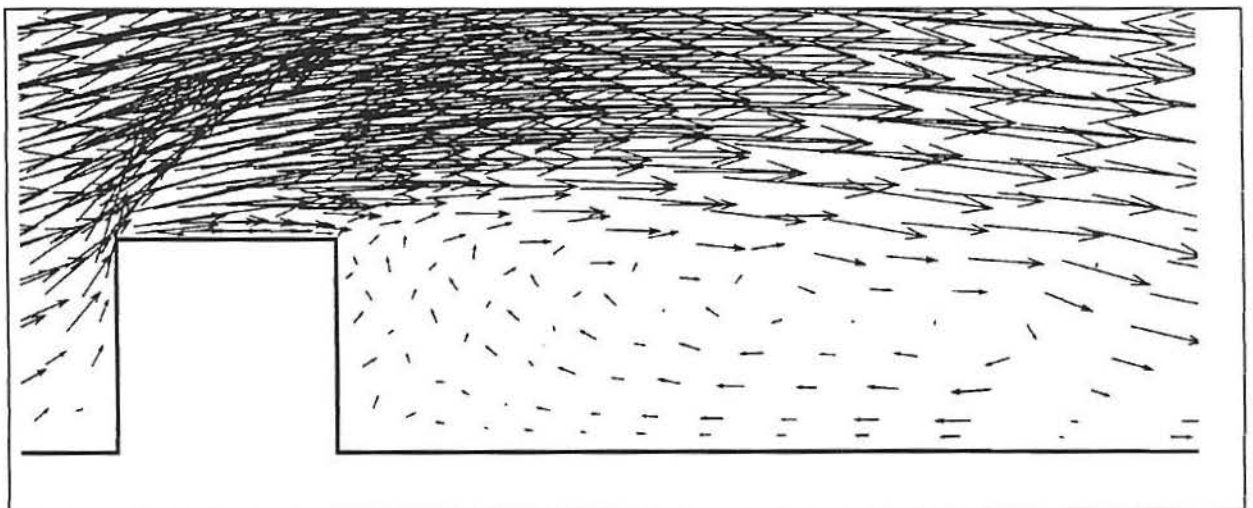


Figura 5.16 - Campo de velocidade do escoamento sobre o ressalto, $Re=500$.

Pode-se observar nos resultados obtidos do escoamento sobre o ressalto para $Re=100$ a $Re= 500$ que o importante a ser considerado quanto ao escoamento é a região de obstrução. Nesta se verifica que a extensão da região de fluxo reverso aumenta quase que proporcionalmente com o número de Reynolds. Portanto, conclui-se que o número de Reynolds é o parâmetro determinante da região de fluxo reverso.

A figura 5.17 mostra a influência do número de Reynolds no tamanho da região de recirculação [Van de Vosse-1987].

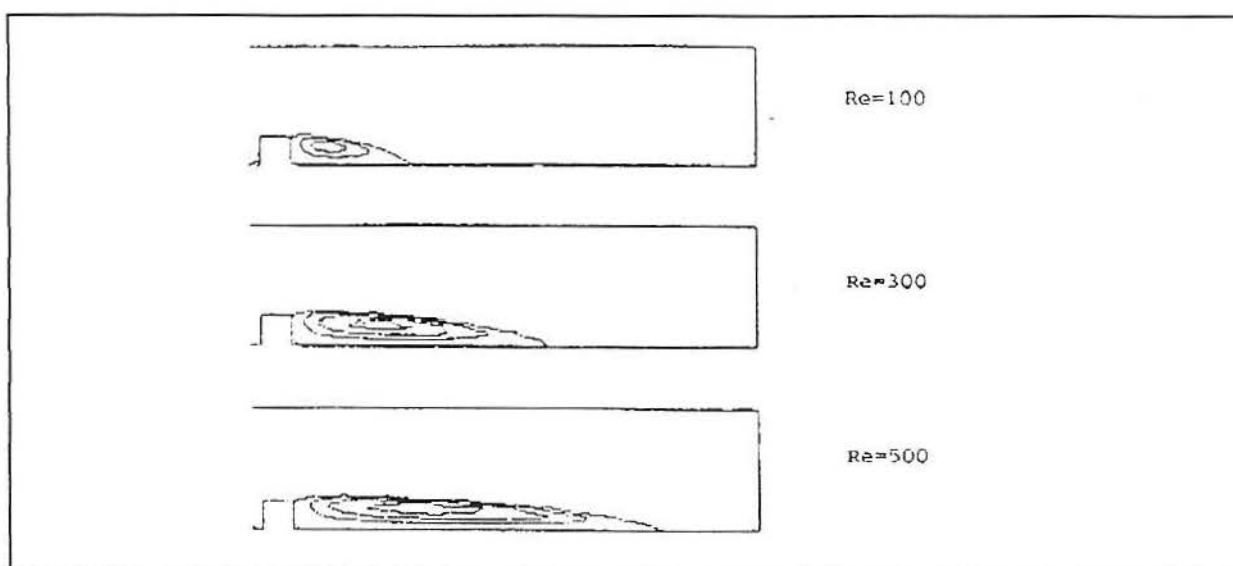


Figura 5.17 - Influência do número de Re no tamanho da recirculação [Van de Vosse-1987].

Finalmente, a figura 5.18 mostra a taxa de convergência da pressão para $Re=500$ num gráfico em forma logarítmica. Observa-se, claramente, que o resíduo da pressão cai lentamente, o que se deve ao escoamento ser incompressível. Apesar de ser necessário um grande número de iterações, a solução tem sido obtida em poucos minutos em estações de trabalho no laboratório do IM da UFRGS.

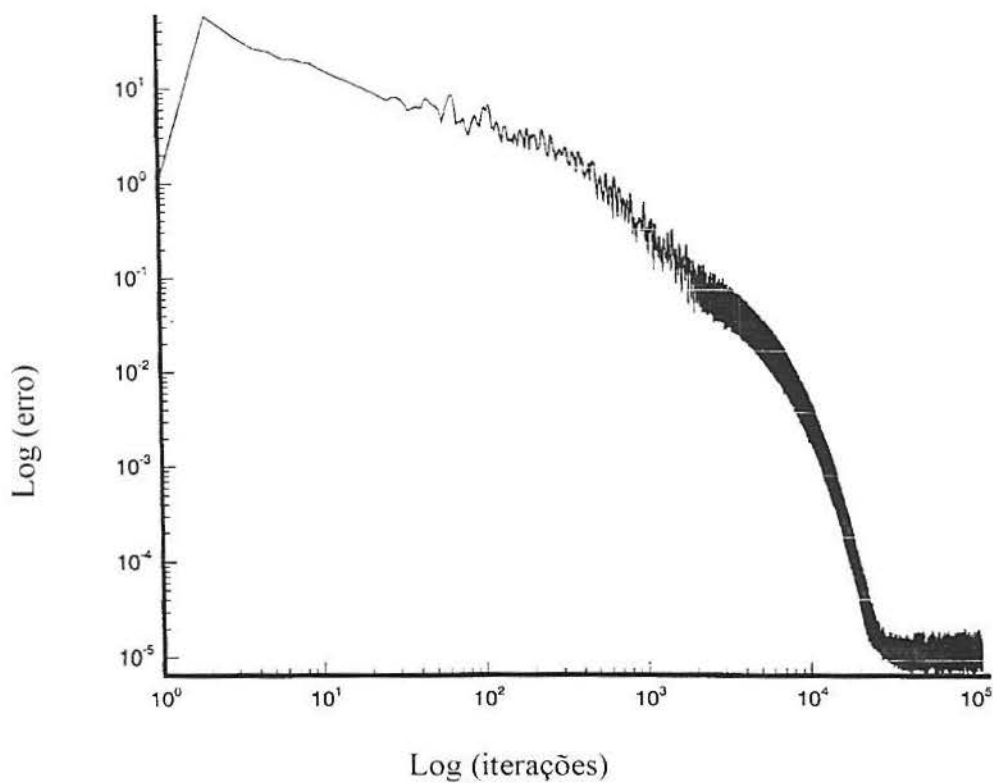


Figura 5.18 - Convergência da pressão para o ressalto, $Re=500$.

Na seqüência apresenta-se as conclusões obtidas do presente trabalho, referentes ao escoamento no interior do duto, da artéria carótida e no modelo (de estenose) do escoamento num duto contendo uma obstrução.

6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

6.1 - CONCLUSÕES

O presente trabalho teve por objetivo obter uma metodologia para a simulação do fluxo no interior da artéria carótida considerando o escoamento como bidimensional, incompressível, viscoso, regime permanente, paredes rígidas e newtoniano.

Sabe-se, no entanto, que o sangue é uma suspensão de partículas que exhibe comportamento não newtoniano para baixas taxas de cisalhamento. Para altas taxas de cisalhamento, como geralmente encontradas na artéria carótida, o sangue se comporta como um fluido newtoniano incompressível com massa específica e viscosidade pouco superiores a da água, o que justifica a utilização do presente modelo com as suas aproximações em diferenças finitas. Foram descritas as aproximações espaciais e temporais da formulação incompressível utilizada onde as equações de conservação da quantidade de movimento são usadas para obter as componentes do vetor velocidade e a pressão é obtida através de uma equação auxiliar originada entre as equações da continuidade e conservação da quantidade de movimento.

O emprego de coordenadas generalizadas permite que esta metodologia possa ser estendida para aplicações de cálculo de fluxo sobre geometrias ainda mais complexas que as apresentadas; adicionalmente as aproximações espaciais utilizadas foram de segunda

ordem. Foram tomados cuidados especiais na aplicação das condições de contorno, na entrada e saída das geometrias em estudo, pois isto facilita a obtenção de soluções convergentes e fisicamente consistentes. Explicação para o fato é que a pressão varia pouco para os escoamentos incompressíveis apresentados e, com isso, o campo de velocidade tem mais liberdade para se ajustar, o que realmente acontece na natureza. mas o que é muito complexo para se analisar matematicamente para equações tão complexas quanto as de Navier-Stokes. Descreve-se, a seguir, as conclusões específicas para cada problema analisado.

6.1.1 - DUTO SIMPLES

Um duto possui simplicidade geométrica e apresenta solução analítica cujo perfil é do tipo parabólico [Schlichting-1960; Bejan-1984]. As soluções encontradas estão de acordo com o esperado e permitem concluir que:

- i. Para o escoamento plenamente desenvolvido não há necessidade de refino da malha tanto na direção das paredes do duto, assim como nas extremidades do mesmo.
- ii. Não há nenhum tipo de recirculação e/ou perturbação.
- iii. A velocidade do fluxo é praticamente constante ao longo do duto pois a perda de carga é muito pequena e o perfil é simétrico em relação ao eixo.

6.1.2 - ARTÉRIA CARÓTIDA

Os resultados encontradas para o escoamento no interior da artéria carótida comum, externa e interna permitem concluir que:

- i. Há concordância com os dados encontrados na literatura, obtidos por outros autores e métodos de solução, [Lynn et al. - 1971; Kandarpa and Davids- 1976; Liepsch - 1982; Bharadvaj - 1982; Reneman - 1985; Liepsch - 1986; Rindt et al.- 1987; Van de Vosse - 1987].

- ii. Apesar da geometria da artéria carótida possuir um contorno irregular, a técnica usada em diferenças finitas obteve bons resultados em coordenadas generalizadas.
- iii. Na análise do campo de velocidades na artéria carótida comum, próximo à bifurcação, observou-se que a velocidade diminui ao penetrar nas artérias ramificadas.
- iv. Na artéria carótida comum os perfis de velocidade nas secções transversais não apresentam diferenças significativas com o perfil de velocidade plenamente desenvolvido. Como a artéria carótida se divide assimetricamente, escoamento reverso ocorre na artéria carótida interna e um grande decréscimo da tensão é observado nesta, o que propicia o depósito de placas e gorduras e formação de estenose.
- v. O sinus da artéria carótida interna é uma região que exerce influência na complexidade do fluxo. Verifica-se que no sinus, as velocidades são muito baixas, efeito atribuído à região de alargamento (bulbo) resultando na formação de região de fluxo reverso.
- vi. A artéria carótida externa apresentou uma pequena região de baixa velocidade no lado da parede não divisora, mas não apresenta tanta complexidade para análise como a artéria carótida interna. Habitualmente, o fluxo é mais lento junto as paredes e mais veloz no centro do vaso.
- vii. Os perfis de velocidade axial e as tensões na parede da artéria carótida externa mostraram, globalmente, as mesmas características que as encontradas na artéria carótida interna.
- viii. Comparando o campo de velocidades no modelo da bifurcação com os locais de envolvimento aterosclerótico, observou-se que as zonas de preferência para doenças são coincidentes com as regiões de baixo ou fluxo axial reverso.
- ix. A análise bidimensional fornece informações qualitativas de características importantes da velocidade axial e tensão de cisalhamento na parede.

6.1.3 - RESSALTO

Para finalizar, o modelo de estenose empregado consiste na presença do ressalto no interior do duto e os resultados obtidos nos permitem verificar/concluir que:

- i. A velocidade do fluxo aumenta na região onde existe obstrução (estreitamento) ou ressalto. O local mais interessante para análise é a região imediatamente após a obstrução. Neste local o jato de alta pressão e velocidade "se espalha" formando um segmento de velocidade relativamente baixa e produzindo uma região de fluxo reverso, onde o fluido se move em várias direções e com velocidades variadas. Na entrada do ressalto as velocidades não apresentam indicação de fluxo perturbado; as partículas do fluido estão na mesma direção.
- ii. Os resultados obtidos aqui constituem fonte importante de subsídios para uma melhor compreensão do ambiente no qual a estenose se desenvolve.

Esta simulação, para o estudo do fluxo sanguíneo, melhora o conhecimento de padrões de fluxo estável e proporciona uma base para o entendimento do campo esperado em fluxo pulsátil (mais complexo).

O procedimento numérico utilizado neste trabalho apresenta bons resultados em comparação com os obtidos por outros métodos numéricos existentes na literatura, onde os autores apresentam estudo similar a este, com as mesmas simplificações e empregando outros métodos numéricos como o de volumes finitos e elementos finitos. Alguns autores consideram ainda a geometria como simétrica [Zamir and Roach-1973; Feuerstein et al.-1976; Wille-1980; Hayes and Nandakumar-1989; Hunt-1993].

6.2 - SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Com o objetivo de enriquecer o estudo do fluxo na artéria carótida as simplificações consideradas aqui [Carvalho et al.], como por exemplo fluxo estável, paredes rígidas, viscosidade constante, fluido newtoniano e escoamento bidimensional, podem ser reintroduzidas aos poucos, pois os conceitos adquiridos sobre o comportamento do fluxo, após o desenvolvimento deste trabalho, auxilia a realização de estudos mais complexos.

A experiência indicou que é preferível usar o método de Runge-Kutta de três estágios pelo menor esforço computacional necessário e pela estabilidade numérica apresentada, sendo a comparação entre os resultados numéricos do presente trabalho com resultados numéricos ou experimentais de outros autores encorajadores.

Por todos estes motivos, o presente trabalho contribui para a solução do complexo problema de análise do fluxo sanguíneo no interior da artéria carótida. Entretanto, muitos trabalhos ainda devem ser realizados no sentido de melhor entender os fenômenos pertencentes a este fluxo e fazer experimentação em laboratório, fornecendo informações mais completas que poderão auxiliar médicos em sua prática na prevenção e/ou detecção de doenças como a aterosclerose, que acomete milhões de pessoas nos dias de hoje.

7 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AIRES, M.M. *Fisiologia*. Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, pp. 361-367, 1991.
- AMES, W. F. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 3rd ed.. Academic Press, San Diego, USA, 1992.
- ANDERSON, D. A., TANNEHIL, J.C., PLETCHER, R.H. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Mc Graw-Hill, New York, 1984.
- ARIS, R. *Vectores, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Prentice-Hall, Canada. 1962.
- BATCHELOR, G.K. *Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, New York. 1967.
- BEJAN, A. *Convection Heat Transfer*. John Wiley & Sons, New York, 1984
- BERNE, R.B. *Hemodinâmica*. In: *Fisiologia*. University of Virginia, School of Medicine, pp. 130-147, 1988.
- BERNE, R.B. *Hemodinâmica e a Física da Circulação*. In: *Fisiologia*. University of Virginia, School of Medicine, pp. 361-372, 1988.

- BHARADVAJ, B. K. *Steady Flow in a Model of the Human Carotid Bifurcation. Part I - Flow Visualization.* Journal of Biomechanics, vol.15, pp. 349-362, 1982.
- BHARADVAJ, B. K. *Steady Flow in a Model of the Human Carotid Bifurcation. Part II - Laser Doppler Anemometer Measurements.* Journal Biomechanics, vol.15, pp. 363-378, 1982.
- BRECH, R. and BELLHOUSE, B. J. *Flow in Branching Vessels* Cardiovascular Research, vol.7, pp. 593-600, 1973.
- BRUM, O.F.. *Angiologia Básica.* Editorial BYK, pp.1-40, 1989.
- CABRAL, N.. *Physica Médica.* Guanabara Koogan, Porto Alegre, pp. 81-91, 1958.
- CABUK, H., SUNG, C.H., MODI, V. *Explicit Runge-Kutta Method for Three-Dimensional Internal Incompressible Flows.* Journal American Institute of Aeronautics and Astronautics, vol. 30, pp. 2024-2031, 1992.
- CARO, C. G., GERALD, J.M. *Arterial Wall Shear Distribution of Early Artheroma in Man.* Nature, 223, pp.1159-1161, 1969.
- CARVALHO, S., DE BORTOLI, A .L., RIBEIRO, J.P. *Simulação do Fluxo Sangüíneo na Bifurcação da Artéria Carótida Humana. XXI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional -CNMAC, Caxambu-Mg., 1998.*
- CARVALHO, S., DE BORTOLI, A .L., RIBEIRO, J.P. *"Numerical Carotid Artery Flow Simulation based on Runge Kutta Time- Stepping Schemes"*, (a ser publicado).
- CHEN, R.Y. *Flow in the Entrance Region at Low Reynolds Numbers.* Journal of Fluids Engineering, vol. 72, pp.153-158, 1973.

- CHORIN, A. J. *A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow problems*. Journal of the Computational Physics, vol.2, pp. 12-26, 1967.
- CHORIN, A. J. *Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations*. Mathematics Computational. vol. 22, pp. 745-762, 1968.
- DAMASK, A.C.. *Medical Physics*. Academic Press, New York, 1978.
- DE BORTOLI, A. L.. *Solution of Incompressible Flow Using Compressible Flow Solvers*. DLR-IB 129 Institut für Entwurfsaerodynamik, Braunschweig, Deutschland, 1994.
- DE BORTOLI, A. L.. *Dinâmica dos Fluidos Computacional*. Porto Alegre, 1997.
- DEGREZ, G., ANDERSON, J. D., GRUNDMANN, R., DICK, E.. Introduction to Computational Fluid Dynamics, Lecture series of von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1992.
- DESHPANDE, M.D. and GIDDENS, D.P.. *Steady Laminar Flow Through Modelled Vascular Stenoses*. Journal Biomechanics, vol. 9, pp. 165-174, 1976.
- FERGENBAUM, J. <http://www.science.mcmaster.ca/Biology/4s03/ART.HTM>, 1998.
- FERGUSON, J. *Applied Fluid Rheology*. Elsevier Science Publishers LTD, England, pp. 27-38, 1991.
- FEUERESTEIN, I. A., MASRY, O.A. and ROUND, G.F. *Arterial Bifurcation Flows - Effects of Flow Rate and Area Ratio*. Canadian Journal of Physiology and Pharmacology, vol. 54, pp. 795-808, 1976.
- FRIEDMAN, J.J. *Propriedades Funcionais do Sangue*. In: *Fisiologia*. Ed. E.E. Selkurt, 39^oed., Guanabara Koogan - Rio de Janeiro, pp. 196-201, 1976.

- GARDNER, W.D. and OSBURN, W.A.. *Anatomia do Corpo Humano*. 2^aed., Atheneu, São Paulo, pp. 349-350, 1980.
- GRESHO, P. M. and SANI, R. L.. *On Pressure Boundary Conditions for the Incompressible Navier-Stokes*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 7, pp. 1111-1145, 1987.
- GUNONG, W.F.. *Fisiologia Médica* Lange Medical Publications, pp. 455-471, 1969.
- GUYTON, A.C.. *Física do Sangue, Fluxo Sangüíneo e Pressão: Hemodinâmica*. In: *Fisiologia Humana*. Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, pp. 178-188, 1996.
- GUYTON, A.C.. *A Circulação Sistêmica*. In: *Fisiologia Humana*. Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, pp. 189-198, 1996.
- HAYES, R.E., NANDAKUMAR, K. *Steady Laminar in a 90° Degree Planar Branch*. Computers and Fluids, vol. 17, pp. 537-553, 1989.
- HIRSCH, C.. *Numerical Computational of Internal and External Flows*. John Wiley & Sons Ltd. England, vol 2, 1990.
- HOUSSAY, B.A.. *Fisiologia Humana*. 5^aed., Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, pp. 270-278, 1984.
- HOUSSAY, B.A.. *Fisiologia Humana*. 5^aed., Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, pp. 173-200, 1984.
- HUANG, H., MODI, V.J. and SEYMOUR, B.M. *Fluid Mechanics of Stenosed Arteries*. International Journal of Engineering Sciences, vol. 5, pp. 1-21, 1995.

- HUGHES, W.F.. *Dinâmica Dos Fluidos*. Coleção Schaum, McGraw-Hill, São Paulo, pp. 319-334, 1974.
- HUNT, R.. *The Numerical Solution of the Flow in a General Bifurcating Channel at Moderately High Reynolds Number Using Boundary-Fitted Co-Ordinates, Primitive Variables and Newton Iteration*. International Journal For Numerical Methods In Fluids, vol. 17, pp. 711-729, 1993.
- JOSEPH, D.D.. *Fluid Dynamics of Viscoelastic Fluids*. In: *Applied Mathematics Sciences 84*. Springer-Verlag, New York, pp 35-38, 1990.
- JUSTO, D.A.R. *Visual 1.2 for Windows 95*, UFRGS, Porto Alegre, 1998.
- KANDARPA, K. and DAVIDS, N. *Analysis of the Fluid Dynamic Effects on Atherogenesis at Branching Sites*. Journal of Biomechanics, vol. 9, pp. 735-741, 1976.
- KROLL, N.,JAIN, R.K. *Solution of Two-Dimensional Euler Equations -Experiência with a Finite Volume Code*. Forschungsbericht, DFVLR-FB 8741, Braunschweig, 1987.
- LAZZARETTI, R. S. *Estenose Carotídea Hemodinamicamente Significativa e Assintomática em Indivíduos com Obstrução Grave: Prevalência e Fatores de Risco*. Dissertação de mestrado, Faculdade de Medicina, UFRGS, Porto Alegre, 1996.
- LIEPSCH., and MORAVEC, C.S. *Measurement and Calculations of Laminar Flow in a Ninety Degree Bifurcation*. Journal Biomechanics, vol. 15, pp. 473-485, 1982.
- LIEPSCH., D. W. *Flow in Tubes and Arteries - A Comparison*. Biorheology, vol. 23, pp. 395-433, 1986.

- LIEPSCH, D. W.: *Blood Flow in Large Arteries: Applications to Atherogenesis and Clinical Medicine*. Monogr. Atheroscler. Basel, Karger, 1990.
- LONSDALE, G., BRAMLEY, J.S. ,and SLOAN, D. M. *A Nonlinear Multigrid Algorithm and Boundary-Fitted Coordinates for the Solution of a Two-Dimensional Flow in a Branching Channel*. Journal of Computational Physics, vol. 78, pp. 1-14, 1988.
- LYNN, N.S., FOX, V.G .and ROSS, L.W. *Computational of Fluid-Dynamical Contributions to Atherosclerosis at Arterial Bifurcations*. Biorheology, vol. 9, pp. 61-66, 1971
- MARION, J.B. *General Physics with Bioscience Essays*. John Wiley and Sons, New York. pp.158-161, 1979.
- MALISKA, C. R.. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. Ao Livro Técnico e Científico – LTC, Rio de Janeiro, 1995.
- OKUNO, E., CALDAS, I.L.,CHOW,C. *Física para Ciências Biológicas e Biomédicas*. Harbra Ltda, São Paulo, 1982.
- PADMANABHAN, N.. *Mathematical Model of Arterial Stenosis*. Medical and Biological Engineering and Computing, vol. 18, pp. 281-286, 1980.
- PATANKAR, S.V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York, 1981.
- PERKTOLD, K., HILBERT, D.. *Numerical Simulation of Pulsatile Flow in a Carotid Bifurcation Model*. Journal Biomedical Eng., vol. 8, pp. 193-199, 1986.

- RENEMAN, R. S. *Flow Velocity Patterns in and Distensibility of the Carotid Artery Bulb in Subjects of Various Ages*. *Circulation*, vol. 71, pp. 500-509, 1985.
- RINDT, F. N., VOSSE, F.N.d, STEENHOVEN, A.A.V. and JANSSEN, J.P. *A Numerical and Experimental Analysis of the Flow Field in a Two-Dimensional Model of the Human Carotid Artery Bifurcation*. *Journal Biomechanics*, vol. 20, pp. 499-509, 1987.
- RINDT, C.C.M. and STEENHOVEN, A.A.V. *An Experimental Analysis of the Flow Field in a Three-Dimensional Model of the Human Carotid Artery Bifurcation*. *Journal of Biomechanics*, vol. 21, pp. 985-991, 1988.
- ROACH, M. R.. *Biophysical Analyses of Blood Vessel Walls and Blood Flow*. *Annual Review of Physiology*, vol.39, pp.51-71, 1977.
- RODKIEWICZ, C.M.. *Arteries and Arterial Blood Flow*. CLSM, Udine, pp.58-75, 1983.
- ROTHER, C.F. Hidrodinâmica, In: *Fisiologia*. Ed. E.E. Selkurt, 39^o ed., Guanabara Koogan Rio de Janeiro, pp. 281-301, 1976.
- SANTOS, L.C. *XXI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC*, Caxambu, MG, 1998.
- SCHLICHTING, H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, New York, 1960.
- STEENHOVEN, A.A.V.. *Experimental and Numerical Analysis of Carotid Artery Blood Flow*. In: *Blood Flow in Large Arteries: Applications to Atherogenesis and Clinical Medicine*. Monogr. Atheroscler. Basel, Karger, vol. 15, pp. 250-260, 1988.

STREETER, V.L.. *Mecânica dos Fluidos*. McGraw - Hill, São Paulo, pp. 8-12, 1982.

VAN DE VOSSE, F. N.. *Numerical Analysis of Carotid Artery Flow*. PhD Thesis, University of Technology, Eindhoven, 1987.

WESTERHOF, N.. *The Physics of Heart and Circulation*. IOP Publishing Ltda, London, 1993.

WILLE, S.. *Pressure and Flow in Arterial Stenoses Simulated in Mathematical Models*. Applied Mathematics Modelling, vol. 4, pp. 483-488, 1980.

WILLE, S.. *Pressure and Flow in Two Dimensional Numerical Bifurcation Models*. Applied Mathematics Modelling, vol. 4, pp. 351-356, 1980.

WILLIAMS, P.L.. *Anatomia*. London, pp. 686-700, 1995.

ZAMIR, M., R. ROACH, M.G. *Blood Flow Downstream of a Two-Dimensional Bifurcation*. Journal of Theoretical Biology, vol. 42, pp. 33-48, 1973.

ZARINS, C.K., GIDDENS, D.P., BHARADVAJ, B.K, SOTTIURAI, V.S., MABON, R.F. AND GVAGOV,S. *Carotid Bifurcation Atherosclerosis*. Circulation Research, vol. 53, pp. 502-514, 1983.