UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

SOBRE A EXISTÊNCIA DE MEDIDAS INVARIANTES PARA APLICAÇÕES MONÓTONAS POR PARTES

Jorge Paulo de Araújo

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Eduardo Brieztke, apresentada ao Instituto de Matemática da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

PORTO ALEGRE
1988

Í N D I C E

RESUMO

A proposta principal desta dissertação é provar a existência de medidas invariante absolutamente contínuas para uma classe de funções monótonas por partes com um número finito de descontinuidade mas o resultado pode ser estendido para funções monótonas por partes com um número infinito de descontinuidades.

O método de prova explora a existência de pontos fixos para o operador de Perron-Frobenius e utiliza o Teorema de Helly e o Teorema Ergódico de Kakutani-Yosida.

ABSTRACT

The main purpose of this dissertation is to prove the existence of invariant absolutely continuous measures for a class of piecewise monotonic functions with a finite number of descontinuities but it can be extended to piecewise monotonic functions with infinite numbers of descontinuities.

The method of the proof explores the existence of fixed points to Perron-Frobenius operator and employs the Helly's Theorem and the Kakutani-Yosida ergodic Theorem.

A relação entre o problema proposto e o operador de Perron-Frobenius é a seguinte: se $f^* \in L_1[0,1]$, f^* é um ponto fixo de P_τ, ou seja, $P_\tau f^* = f^*$, então a medida definida por

$$\mu(A) = \int_A f^* dm$$

é invariante por τ. Por outro lado, se μ é uma medida invariante para τ, absolutamente contínua em relação à Lebesgue, então, pelo Teorema de Radon-Nikodym, existe $f^* \in L_1[0,1]$, tal que para todo conjunto mensurável $A \subseteq [0,1]$,

$$\mu(A) = \int_A f^* dm \quad ,$$

neste caso $P_\tau f^* = f^*$.

A seguir, definimos a classe de funções com a qual trabalhamos.

<u>Definição</u>: Uma aplicação $\tau : [0,1] \to [0,1]$ é dita de classe C^2 por partes se existe uma partição $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = 1$ do intervalo $[0,1]$, tal que a restrição τ_i de τ ao intervalo (a_{i-1}, a_i) é uma função de classe C^2 que pode ser estendida ao intervalo $[a_{i-1}, a_i]$ como uma função de classe C^2. Não exigimos que τ seja contínua nos pontos $a_0, a_1, \ldots, a_p$.

O teorema principal desta monografia estabelece a existência de medidas invariantes absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue para a classe das aplicações τ C^2 por partes tais que $\inf|\tau'| > 1$ e tem por enunciado:

<u>Teorema A</u>

Seja $\tau : [0,1] \to [0,1]$ C^2 por partes e tal que $\inf|\tau'| > 1$.

0) Então, para qualquer $f \in L_1[0,1]$ a seqüência

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_\tau^k f$$

converge na norma do $L_1[0,1]$ para uma função $f^* \in L_1[0,1]$. A função f^* tem as seguintes propriedades:

1) se $f \geq 0$ então $f^* \geq 0$.

2) $\int_0^1 f^* dm = \int_0^1 f dm$.

3) $P_\tau f^* = f^*$.

4) A função f^* é de variação limitada e existe uma constante C , independente da escolha da f inicial tal que:

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f^* < C\|f\| \quad .$$

Por $\overset{1}{\underset{0}{V}}$ designamos a variação de uma função do intervalo [0,1].

O Teorema será generalizado para uma classe de funções mais ampla (Teorema B). Primeiramente, não precisamos ter necessariamente $\inf|\tau'| > 1$, pois podemos substituir esta condição pela existência de um natural n_0 tal que $\inf|(\tau^{n_0})'| > 1$. Neste caso, continuam válidos os mesmos resultados do Teorema A.

Em segundo lugar, estendemos o resultado para uma classe de funções com um conjunto enumerável de descontinuidades.

<u>Definição</u>: Uma aplicação $\tau : [0,1] \to [0,1]$ é dita contavelmente C^2 por partes se existe uma seqüência de intervalos fechados Δ_i , $i = 1,2,\ldots$, dois a dois disjuntos, tal que

$\sum_i m(\Delta_i) = 1$, isto é, $m([0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i) = 0$ e a restrição τ_i de τ ao interior do intervalo Δ_i é C^2 , podendo ser estendida como função C^2 ao Δ_i . No conjunto $[0,1]\setminus \cup\Delta_i$ os valores de τ são arbitrários.

Modificando a prova do Teorema A estabelecemos o

<u>Teorema C</u>

Se $\tau : [0,1] \to [0,1]$ for contavelmente C^2 por partes , $\inf|\tau'| > 2$, $\sup|\tau''| < \infty$ e $\tau_i(\Delta_i) = [0,1]$, exceto para um número finito de intervalos Δ_i , então temos 0), 1), 2), 3) e 4).

Como veremos ao longo do trabalho, caso tenhamos $\tau_i(\Delta_i) = [0,1]$ para todos os intervalos da partição, podemos substituir a restrição $\inf|\tau'| > 2$ por $\inf|\tau'| > 1$ no Teorema C. Obteremos o Teorema D.

Além destes teoremas estabelecemos, através de um exemplo (exemplo 1), a necessidade da hipótese no Teorema A que $\inf|\tau'| > 1$. Existe τ C^2 por partes sem medida invariante absolutamente contínua em relação à Lebesgue quando abandonamos a restrição $\inf|\tau'| > 1$, ou a existência de n_0 natural tal que $\inf|(\tau^{n_0})'| > 1$.

Através de um outro exemplo (exemplo 2), estabelecemos a necessidade no Teorema C da restrição que exige a imagem de τ_i pelo intervalo Δ_i da partição igual ao [0,1], exceto num conjunto finito de intervalos Δ_i . Novamente, apresentamos aplicações contavelmente C^2 por partes não restritas a condição acima que não possuem medida absolutamente contínua invariante.

Na seção 2 estudamos a definição do operador de Perron-Frobenius e analisamos algumas propriedades deste operador. Alguns resultados necessários posteriormente são apresentados e demonstrados.

Na seção 3 provamos o Teorema A. A seguir, apresentamos o exemplo 1.

Na seção 4, demonstramos as generalizações expressas pelos Teoremas B e C e apresentamos o exemplo 2.

SEÇÃO 1

O primeiro grande resultado em Teoria Ergódica foi apresentado em 1931 por G.D. Birkoff, que mostrou que se $T:(X,B,m)\to(X,B,m)$ é uma aplicação que preserva a medida m, onde (X,B,m) é um espaço de medida σ-finito e $f\in L_1(X)$ então $\frac{1}{n}\sum_{L=0}^{n-1} f(T^i(x))$ converge quase sempre (q.s) para uma função $f^*\in L_1(X)$. Se $m(X)<\infty$ então $\int_X f^* dm =$ $= \int_X fdm$. Para obter um resultado aguardado pela Mecânica Estatística, Birkoff teve que colocar uma restrição a mais sobre T. Seja (X,B,m) um espaço de probabilidade, isto é, $m(X)=1$. T é dita ergódica se os únicos subconjuntos invariantes por T em X são os conjuntos de medida nula ou de medida um, isto é, se $T^{-1}(B)=B$, para B subconjunto mensurável de X, então $m(B)=0$ ou $m(B)=1$. Caso T seja ergódica então f^* é constante quase sempre e $f^*=\int_X fdm$ (q.s). Se (X,B,m) é um espaço de probabilidade então $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))=\int_X fdm$ q.s.

Um exemplo ou aplicação simples da Teoria Ergódiga à Teoria dos Números é dada pela aplicação $\tau:[0,1]\to$ $\to[0,1]$ C^2 por partes:

$$\begin{array}{lll} 2x & \text{se} & 0\le x<\frac{1}{2} \\ 2x-1 & \text{se} & \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{array} .$$

O nosso Teorema A assegura a existência de uma medida invariante para τ; aqui não é difícil ver que a própria medida de Lebesgue é invariante por τ. Além disto, τ é ergódica.

Se A é o conjunto dos pontos do intervalo $[0,1]$ que têm uma representação binária única então $m(A) = 1$, m é a medida de Lebesgue.

Seja $X \in A$, e $x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots + \frac{a_n}{2^n} + \dots$ sua representação binária. Então $\tau(x) = \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^{n-1}} + \dots$.

Pelo Teorema de Birkoff, se $\chi_{[\frac{1}{2},1]}$ é a função característica do intervalo $[\frac{1}{2},1]$ então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_{[\frac{1}{2},1]}(\tau^i(x)) = \int_0^1 \chi_{[\frac{1}{2},1]}\, dm = \frac{1}{2} \qquad (q.s)$$

$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_{[\frac{1}{2},1]}(\tau^i(x))$ representa a proporção de 1's que aparecem nos n primeiros dígitos do número X. A conclusão é que a freqüência de 1's na expressão binária de X é $\frac{1}{2}$. Este resultado é conhecido como Teorema de Borel sobre números normais.

A classe de funções para a qual estabelecemos a existência de medidas invariantes não contém apenas aplicações ergódicas como podemos ver neste exemplo simples:

$$\tau(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ -2x+1 & \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

Uma outra aplicação que se adapta ao conjunto das funções estudadas por nós é a aplicação de Gauss $\varphi : [0,1] \to$ $\to [0,1]$ definida por

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$$

onde $\left[\frac{1}{x}\right]$ representa a parte inteira de $\frac{1}{x}$.
A aplicação φ é contavelmente C^2 já que em cada intervalo $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ para $k = 1,2,\ldots$ temos

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - k \quad , \quad \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad .$$

Quando x se aproxima de 1 a derivada em módulo se aproxima de 1, mas já $\varphi^2(x)$ tem derivada em módulo maior que 2.
Se $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$, então $1 \leq \frac{1}{x} < \frac{3}{2}$, portanto $\varphi(x) = \frac{1}{x} - 1 < \frac{1}{2}$.
Como $|\varphi'(x)| = \frac{1}{x^2}$, então $|\varphi'(\varphi(x))| = \frac{1}{(\varphi(x))^2} > 4$, logo $|(\varphi^2)'(x)| = |\varphi'(\varphi(x)).\varphi'(x)| > 4 > 2$.
Se $x \leq \frac{2}{3}$, então $|\varphi'(x)| \geq \frac{9}{4}$, logo $|\varphi'(\varphi(x)).\varphi'(x)| \geq \frac{9}{4} > 2$.

Podemos computar o operador de Perron - Frobenius para esta aplicação

$$P_\varphi f(x) = \frac{d}{dx} \int_{\varphi^{-1}[0,x]} f(s)ds$$

$$P_\varphi f(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\varphi^{-1}(x)} f(s)ds = \sum_{k=1}^{\infty} f(\varphi^{-1}(x)).(\varphi^{-1})'(x) \text{ q.s.}$$

$$P_\varphi f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{x+k}\right) \frac{1}{(x+k)^2} \quad ,$$

isto para toda $f \in L_\infty([0,1])$. $L_\infty([0,1]) \subseteq L_1([0,1])$ é o subespaço das funções f cujo supremo essencial $\|f\|_\infty$ é finito.

Não é difícil lembrar-se que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k+1)} \cdot \frac{1}{(x+k)} = \frac{1}{x+1}$$

A idéia é que a função $f^*(x) = \frac{1}{x+1}$ é ponto fixo de P_φ .
Como veremos sendo f^* ponto fixo de P_φ então a medida definida por

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{1+x}\, dx$$

é invariante por φ .
Colocamos, na verdade, $\mu(A) = \frac{1}{\log 2} \int_A \frac{1}{1+x}\, dx$, para que $\mu([0,1]) = 1$.
A aplicação φ é ergódica (ver ref.[4]).

A aplicação de Gauss é importante pois aparece na expansão em fração contínua do número x com $0 < x < 1$:

$$x = \frac{1}{n_1 + \varphi(x)} = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \varphi^2(x)}} \quad \text{etc} .$$

onde $n_1 = \left[\frac{1}{x}\right]$, $n_2 = \left[\frac{1}{\varphi(x)}\right]$ etc.

Se x é irracional então $\varphi^n(x) \neq 0$, pode-se associar a seqüência $n_1, n_2, \ldots$ ao número x , e provar que:

$$x = \lim_{k\to\infty} \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots \; \cfrac{}{n_{k-1} + \cfrac{1}{n_k}}}}}}$$

Uma pergunta que se pode fazer: com qual freqüência um número k aparece na expansão contínua de x?

Em outras palavras qual o

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_{\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]}(\varphi^i(x)) = ?$$

Pelo Teorema de Birkoff, podemos responder, que em relação a medida μ, para quase todo $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_{\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]}(\varphi^i(x)) = \int_0^1 \chi_{\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]}(x)dx = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{1+x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\log 2} \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} .$$

Como a medida μ e a medida m de Lebesgue são equivalentes, o resultado vale quase sempre em relação a medida de Lebesgue.

SEÇÃO 2

Notaremos o operador T por P_τ, onde $\tau:[0,1] \to [0,1]$ é uma função não singular, mesurável a Lebesgue. O índice τ em P_τ, é para frisar a dependência do operador em relação a função τ. P_τ é definido como:

$$P_\tau : L_1[0,1] \to L_1[0,1]$$

$$P_\tau f = \frac{d}{dx} \int_{\tau^{-1}[0,x]} f dm$$

A seguir analisamos esta definição.

Lema 1

Seja $\tau : [0,1] \to [0,1]$ mensurável. São equivalentes as proposições:

i) se $m(A) = 0$ então $m(\tau^{-1}(A)) = 0$

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que se $m(A) < \delta$ então $m(\tau^{-1}(A)) < \varepsilon$, para todo o mensurável A.

Prova: Provemos que i) implica ii).

Suponhamos que a proposição ii) não seja válida então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que qualquer que seja $n \in N$, $n \geq 1$, existe conjunto mensurável A_n com $m(A_n) < \frac{1}{2^n}$ e $m(\tau^{-1}(A_n)) \geq \varepsilon_0$.

Seja $A = \lim\sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right]$, como

$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq [0,1]$, então $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq 1$. Além disso,

$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $\bigcup_{k=2}^{\infty} A_k$, ... etc é uma seqüência decrescente de mensuráveis então

$$m(A) = \lim_{n\to\infty} m(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$$

mas $m(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots = \frac{1}{2^{n-1}}$

logo $m(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$, ou seja, $m(A) = 0$.

Por outro lado, $\tau^{-1}(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\bigcup_{k=n}^{\infty} \tau^{-1}(A_k)\right]$.

Como $\tau : [0,1] \to [0,1]$ então $\bigcup_{k=1}^{\infty} \tau^{-1}(A_k) \subseteq [0,1]$ portanto $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} \tau^{-1}(A_k)) \leq 1$. Da mesma maneira, então,

$$m(\tau^{-1}(A)) = \lim_{n\to\infty} m(\bigcup_{k=n}^{\infty} \tau^{-1}(A_k))$$

$$m(\tau^{-1}(A)) \geq \limsup_{n\to\infty} m(\tau^{-1}(A_n))$$

$$m(\tau^{-1}(A)) \geq \varepsilon_0 \quad .$$

Ora isto contradiz i) pois $m(A) = 0$ e $m(\tau^{-1}(A)) \geq \varepsilon_0 > 0$. Concluímos, portanto, que i) implica ii).

Provemos que ii) implica i).
Para todo A mensurável, dado $\varepsilon > 0$, por ii), existe $\delta > 0$ tal que se $m(A) < \delta$ então $m(\tau^{-1}(A)) < \varepsilon$. Ora, se $m(A)=0$ então $m(\tau^{-1}(A)) < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ portanto $m(\tau^{-1}(A)) = 0$.

Se $f \in L^1[0,1]$ então expressamos $f = f^+ - f^-$ onde

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) > 0 \end{cases}$$

Lema 2

Seja $\tau : [0,1] \to [0,1]$ mensurável. São equivalentes:

i) se $m(A)=0$ então $m(\tau^{-1}(A))=0$

ii) para toda $f \in L^1[0,1]$ então a aplicação

$$T : [0,1] \to [0,1]$$
$$T(x) = \int_{\tau^{-1}[0,x]} f dm$$

é absolutamente contínua.

i) $\Rightarrow$ ii)

Suponhamos $f \geq 0$. Dado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $\eta > 0$ tal que se $B \subseteq [0,1]$ com $m(B) < \eta$ então $\int_B f dm < \varepsilon$.

Pelo lema 1 existe $\delta > 0$ tal que se $m(A) < \delta$ então $m(\tau^{-1}(A)) < \eta$. Se $0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \ldots \leq s_n < t_n \leq 1$ e $\sum_{j=1}^{n} (t_j - s_j) < \delta$ então $m(\bigcup_{j=1}^{n} (s_j, t_j]) < \delta$ logo $m(\bigcup_{j=1}^{n} \tau^{-1}(s_j, t_j]) < \eta$ de onde temos $\int_{\bigcup_{j=1}^{n} (s_j, t_j]} f dm < \varepsilon$.

Em outros termos,

$$\int_{\bigcup_{j=1}^{n} (s_j, t_j]} f dm = \sum_{j=1}^{n} \int_{\tau^{-1}(s_j, t_j]} f dm = \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{\tau^{-1}[0,t_j]} f dm - \int_{\tau^{-1}[0,s_j]} f dm \right| < \varepsilon$$

ou seja, T é absolutamente contínua.

Para uma função $f \in L^1[0,1]$ que não seja necessariamente positiva ou nula nos utilizamos de f^+ e f^- pois, pelo resultado acima

$$x \in [0,1] \xrightarrow{T_+} \int_{\tau^{-1}[0,x]} f^+ dm \quad \text{e} \quad x \in [0,1] \xrightarrow{T_-} \int_{\tau^{-1}[0,x]} f^- dm$$

são absolutamente contínuas e disto concluímos que

$$T(x) = T_+(x) - T_-(x) = \int_{\tau^{-1}[0,x]} f^+ dm - \int_{\tau^{-1}[0,x]} f^- dm = \int_{\tau^{-1}[0,x]} f dm$$

também é absolutamente contínua.

Provemos agora que ii) $\Rightarrow$ i)

Supondo ii) temos que se $f \equiv 1$ então a aplicação $T(x) = m(\tau^{-1}[0,x))$, $x \in [0,1]$ é absolutamente contínua. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\{(x_i, x_i')\}$ $i = 1,\dots,n$ é uma coleção de intervalos com $\sum_{i=1}^{n} (x_i' - x_i) < \delta$ então $\sum_{i=1}^{n} |T(x_i') - T(x_i)| < \varepsilon$.

Seja $A \subseteq [0,1]$ tal que $m(A) = 0$. Podemos escolher uma coleção de intervalos $I_n = (a_n, b_n)$ com $n = 0,1,2,\dots$ com $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \delta$.

Neste caso $\sum_{n=1}^{N} (b_n - a_n) < \delta$ para todo $N = 1,2,\dots$ então $\sum_{n=1}^{N} |m(\tau^{-1}[0,b_n]) - m(\tau^{-1}[0,a_n])| < \varepsilon$, ou seja, $\sum_{n=1}^{N} m(\tau^{-1}[a_n, b_n]) < \varepsilon$, $\forall N \in \mathbf{N}$.

Logo, $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tau^{-1}(a_n, b_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{-1}(a_n, b_n) \leq \varepsilon$.

Podemos concluir que $\tau^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)) \leq \varepsilon$ e como $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ então $\tau^{-1}(A) \leq \varepsilon$, isto acontece para qualquer $\varepsilon > 0$ logo $\tau^{-1}(A) = 0$.

Os lemas 1 e 2 permitem esclarecer e justificar a definição do operador P_τ. Sendo $T(x) = \int_{\tau^{-1}[0,x]} f\,dm$ absolutamente contínua pelo Teorema de Lebesgue, T' existe quase sempre no intervalo $[0,1]$ e é integrável no mesmo. Podemos, portanto, definir o operador P_τ do $L_1[0,1]$ no $L_1[0,1]$ como $P_\tau f = T'$, isto é, $P_\tau f = \frac{d}{dx} \int_{\tau^{-1}[0,x]} f\,dm$.

A seguir apresentamos uma série de propriedades do operador P_τ essenciais na seqüência do trabalho. Notaremos estas propriedades pelas letras maiúsculas A,B,C,... através das quais citaremos as correspondentes propriedades quando necessário.

A) para todo $x \in [0,1]$, $\int_0^x P_\tau f\,dm = \int_{\tau^{-1}[0,x]} f\,dm$.

Sendo $T(x) = \int_{\tau^{-1}[0,x]} f\,dm$ absolutamente contínua e $T(0) = 0$ então $\int_0^x P_\tau f(s)ds = \int_0^x T'(s)ds = T(x) - T(0) = T(x) = \int_{\tau^{-1}[0,x]} f(s)ds$

Particularizamos este resultado observando que

$$\tau^{-1}[0,1] = [0,1] \quad \text{logo} \quad \int_0^1 P_\tau f\,dm = \int_{\tau^{-1}[0,1]} f\,dm = \int_0^1 f\,dm .$$

B) P_τ é um operador linear.

Se $f_1, f_2 \in L_1[0,1]$ e $P_\tau f_1 = T_1'$ e $P_\tau f_2 = T_2'$

onde $T_1(x) = \int_{\tau^{-1}[0,x]} f_1\,dm$ e $T_2(x) = \int_{\tau^{-1}[0,x]} f_2\,dm$ então

$$P_\tau(cf_1 + f_2)(x) = \frac{d}{dx} \int_{\tau^{-1}[0,x]} (cf_1 + f_2)dm$$

$$= \frac{d}{dx} \left[c \int_{\tau^{-1}[0,x]} f_1\,dm + \int_{\tau^{-1}[0,x]} f_2\,dm \right]$$

$$= \frac{d}{dx}\,[cT_1(x) + T_2(x)]$$
$$= cT_1'(x) + T_2'(x)$$
$$= cP_\tau f_1(x) + P_\tau f_2(x) \qquad \text{(q.s)}$$

Portanto, $P_\tau(cf_1 + f_2) = cP_\tau f_1 + P_\tau f_2$

C) $P_T f \geq 0$ se $f \geq 0$.

Se $x < y$, $x,y \in [0,1]$ então $\tau^{-1}[0,x] \subseteq \tau^{-1}[0,y]$, como $f \geq 0$, temos $T(x) = \int_{\tau^{-1}[0,x]} fdm \leq \int_{\tau^{-1}[0,x]} fdm = T(y)$, ou seja, T é não decrescente. Concluímos disto que $T'(x) = P_\tau f(x) \geq 0$ onde existe.

D) Se $f \in L^1[0,1]$ então $\|P_\tau f\| \leq \|f\|$ onde $\| \; \|$ denota a norma do $L^1[0,1]$.

$$\|P_\tau f\| = \int_0^1 |P_\tau f|\,dm = \int_0^1 |P_\tau(f^+ - f^-)|\,dm$$
$$= \int_0^1 |P_\tau f^+ - P_\tau f^-|\,dm \text{ , por B.}$$
$$\leq \int_0^1 (P_\tau f^+ + P_\tau f^-)\,dm \text{ , por C.}$$
$$\leq \int_0^1 f^+dm + \int_0^1 f^-dm \text{ , por A.}$$
$$\leq \int_0^1 |f|\,dm \text{ ,}$$

ou seja, $\|P_\tau f\| \leq \|f\|$.

E) Do ítem D, concluímos: P_τ é um operador contínuo no $L_1[0,1]$.

F) Qualquer que seja A subconjunto mensurável do intervalo $[a^1]$ temos $\int_A P_\tau fdm = \int_{\tau^{-1}(A)} fdm$. Esta é uma generalização da propriedade (A).

Dada $f \in L^1[0,1]$, $f \geq 0$ temos $P_\tau f \geq 0$ e $P_\tau f \in L^1[0,1]$ portanto para todo o $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $B \subseteq [0,1]$ mensurável e $m(B) < \delta$ então $\int_B P_\tau f dm < \varepsilon$ e $\int_B fdm < \varepsilon$. Pelo lema 1, podemos escolher $\delta' > 0$ tal que se B é mensurável contido no $[0,1]$ com $m(B) < \delta'$ então $m(\tau^{-1}(B)) < \delta$. Se A é um mensurável do $[0,1]$ existe uma família de intervalos I_n , $n = 1,2,\ldots$, disjuntos dois a dois, tal que $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ e $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \setminus A) < \min(\delta, \delta')$.

Destas considerações derivamos $m(\tau^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \setminus A)) < \delta$ e portanto $\int_{\tau^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \setminus A)} fdm < \varepsilon$.

Todavia, $^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \setminus A) = (\;_{n=1}^{\infty} \tau^{-1}(I_n)) \setminus \tau^{-1}(A)$.

E disto concluímos que

$$0 \leq \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} \tau^{-1}(I_n)} fdm - \int_{\tau^{-1}(A)} fdm < \varepsilon \quad . \tag{1}$$

Repetindo a argumentação para $P_\tau f$, novamente, como $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \setminus A) < \delta$ então $\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \setminus A} P_\tau f < \varepsilon$

ou seja,

$$0 \leq \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n} P_\tau fdm - \int_A P_\tau fdm < \varepsilon \quad . \tag{2}$$

Porém $\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} \tau^{-1}(I_n)} fdm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} P_\tau fdm = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n} P_\tau fdm$

Reunindo (1) e (2) obtemos:

$$\left|\int_A P_\tau f dm - \int_{\tau^{-1}(A)} f dm\right| < 2\varepsilon .$$

qualquer que seja o $\varepsilon > 0$. Só podemos ter, então,

$$\int_A P_\tau f dm = \int_{\tau^{-1}(A)} f dm .$$

Se f é qualquer função do $L^1[0,1]$ então

$$\int_{\tau^{-1}(A)} f dm = \int_{\tau^{-1}(A)} f^+ dm - \int_{\tau^{-1}(A)} f^- dm$$

$$= \int_A P_\tau f^+ dm - \int_A P_\tau f^- dm$$

$$= \int_A P_\tau (f^+ - f^-) dm$$

$$= \int_A P_\tau f dm .$$

O resultado é válido em geral.

G) Se $P_\tau f = f$ então a medida $\mu(A) = \int_A f dm$, definida sobre os mensuráveis do intervalo $[0,1]$, é invariante por τ , pois $\mu(A) = \int_A P_\tau f dm = \int_{\tau^{-1}(A)} f dm = \mu(\tau^{-1}(A))$.

Assim, o problema de provar a existência de medidas invariantes absolutamente contínuas pode ser substituído pelo problema de mostrar a existência de pontos fixos para o operador de Perron-Frobenius.

H) Digamos que I tenha uma medida invariante μ absolutamente contínua em relação à Lebesgue, pelo teorema de Radon-Nikodym, existe $f^* \in L^1[0,1]$ tal que $\mu(A) = \int_A f^* dm$ para todo o conjunto mensurável A contido no intervalo $[0,1]$. Como $\mu(\tau^{-1}(A)) = \mu(A)$, ou seja, $\int_{\tau^{-1}(A)} f^* dm = \int_A f^* dm$, e

$\int_{\tau^{-1}(A)} f^* dm = \int_A P_\tau f^* dm$ então $\int_A f^* dm = \int_A P_\tau f^* dm$. Disto concluímos que $\int_0^x f^* dm = \int_0^x P_\tau f^* dm$, então $P_\tau f^* = f^*$ (q.s), isto é, f^* é ponto fixo do operador P_τ . Caso provemos que P_τ não possue pontos fixos além das funções quase sempre nulas é porque τ não possui medida invariante absolutamente contínua em relação à Lebesgue.

Vamos nos deter sobre a composição de funções mensuráveis não singulares. A composição de funções mensuráveis não é necessariamente mensurável como podemos ver no seguinte exemplo: seja $\psi(x) = x + (x)$ para $x \in I = [0,1]$, onde (x) é a função de Cantor. Se C é o conjunto de Cantor, então a função de Cantor é constante sobre cada um dos intervalos que formam o conjunto $I \setminus C$. Concluímos, então, que ψ transforma cada um dos intervalos que constituem o $I \setminus C$ num intervalo de igual comprimento contido no intervalo $[0,2]$. Portanto, temos $m(\psi(I \setminus C)) = m(I \setminus C) = 1$ e disto resulta que $m(\psi(C)) = 1$. Tomando D um conjunto não mensurável contido em $\psi(C)$ então $E = \psi^{-1}(D) \subseteq C$ é um conjunto de medida zero pois $m(C) = 0$. Seja χ_E a função característica do conjunto E . Tanto χ_E é mensurável quanto ψ^{-1} , por ser contínua, todavia $\chi_E \circ \psi^{-1} = \chi_D$ não é mensurável por ser a função característica do conjunto não mensurável D .

No entanto, se temos τ e μ funções mensuráveis a composição $\tau \circ \mu$ é mensurável desde que μ seja não singular. Sendo τ mensurável temos, para todo o $\alpha \in R$, o conjunto $A = \{x \mid [(x) > \alpha\}$ mensurável, logo $A = B \cup N$ onde B é um boreliano e N um conjunto de medida zero. Sendo μ

mensurável não singular então $\mu^{-1}(B)$ é mensurável e $\mu^{-1}(N)$ um conjunto de medida nula, portanto $\mu^{-1}(A) = \{x \mid \tau(\mu(x)) > \alpha\}$ é mensurável pois $\mu^{-1}(A) = \mu^{-1}(B) \cup \mu^{-1}(N)$. Em outras palavras $\{x \mid (\tau \circ \mu)(x) > \alpha\}$ é mensurável, ou seja, $(\tau \circ \mu)$ é uma função mensurável.

I) Se τ e μ são mensuráveis não singulares então $\tau \circ \mu$ é mensurável não singular pois se $A \subseteq [0,1]$ e $m(A) = 0$ então $m[\tau^{-1}(A)] = 0$ o que implica $m(\mu^{-1}(\tau^{-1}(A))) = 0$, isto é, $m((\tau \circ \mu)^{-1}(A)) = 0$. É claro que $P_{\tau\circ\mu}$ está definido. Podemos expressar o operador $P_{\tau\circ\mu}$ através dos operadores P_τ e P_μ, pois

$$\int_0^x P_{(\tau\circ\mu)} f(s)ds = \int_{(\tau\circ\mu)^{-1}[0,x]} f(s)ds$$

$$\int_0^x P_{(\tau\circ\mu)} f(s)ds = \int_{\mu^{-1}(\tau^{-1}[0,x])} f(s)ds$$

$$\int_0^x P_{(\tau\circ\mu)} f(s)ds = \int_{\tau^{-1}[0,x]} P_\mu f(s)ds$$

$$\int_0^x P_{(\tau\circ\mu)} f(s)ds = \int_0^x P_\tau(P_\mu f(s))ds$$

portanto $P_{(\tau\circ\mu)} f = P_\tau(P_\mu(f))$ (q.s.)
de onde $P_{(\tau\circ\mu)} f = P_\tau(P_\mu(f))$, ou seja, $P_{\tau\circ\mu} = P_\tau \circ P_\mu$.
O que vamos utilizar particularmente é que se definimos $\tau^n = \tau \circ \tau \circ \ldots \circ \tau$ onde τ aparece n vezes nesta composição então $P_{\tau^n} = P_\tau^n = P_\tau \circ P_\tau \circ \ldots \circ P_\tau$.

Neste trabalho notaremos as funções de variação limitada de um certo intervalo $[a,b]$ por $BV[a,b]$. A variação de uma função g definida em $[a,b]$ será notada por $\overset{b}{\underset{a}{V}} g$. Se g é de variação limitada em $[a,b]$ e

$P = \{a = x_o < x_1 < \dots < x_k = b\}$ uma partição do intervalo definimos

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{k}\left[g(x_i) - g(x_{i-1})\right]^{+} , \quad \mathbf{N} = \sum_{i=1}^{k}\left[g(x_i) - g(x_{i-1})\right]^{-} \quad \text{e}$$

$\overset{b}{\underset{a}{V}}(g,P) = \sum_{i=1}^{k} |g(x_i) - g(x_{i-1})|$ neste caso ainda definimos

$$P_a^b = \sup_P \mathbf{P} , \quad N_a^b = \sup_P \mathbf{N} \quad \text{e} \quad \overset{b}{\underset{a}{V}}g = \sup_P \overset{b}{\underset{a}{V}}(g,P)$$

Lema 3

Seja $g : [a,b] \subseteq [0,1] \to R$ e seja $\tilde{g} : [0,1] \to R$ definida de tal maneira que $\tilde{g}(x) = g(x)$ se $x \in [a,b]$ e $\tilde{g}(x) = 0$ se $x \notin [a,b]$. Se g é de variação limitada em $[a,b]$ então $\tilde{g}$ é de variação limitada em $[0,1]$ e $\overset{1}{\underset{0}{V}}\tilde{g} \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}g + |g(a)| + |g(b)|$.

Prova: Suponhamos $0 < a < b < 1$ e seja P uma partição qualquer do $[0,1]$. Se tomamos $Q = P \cup \{a,b\}$ esta é uma partição mais fina que P logo:

$$\begin{aligned}\overset{1}{\underset{0}{V}}(\tilde{g},Q) &= \overset{a}{\underset{0}{V}}(\tilde{g},Q) + \overset{b}{\underset{a}{V}}(\tilde{g},Q) + \overset{1}{\underset{b}{V}}(\tilde{g},b) \\ &= |g(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}}(\tilde{g},Q) + |g(b)| \\ &\leq |g(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}}g + |g(b)|\end{aligned}$$

mas $\overset{1}{\underset{0}{V}}(\tilde{g},P) \leq \overset{1}{\underset{0}{V}}(\tilde{g},Q)$ qualquer que seja P partição de $[0,1]$

logo $\overset{1}{\underset{0}{V}}\tilde{g} \leq |g(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}}g + |g(b)|$. É claro que se $a = 0$ ou $b = 0$ um ou os dois dos termos $|g(a)|$ e $|g(b)|$ estão sendo acrescentados em excesso a direita da última desigualdade porém isto a conserva.

Um resultado básico para o presente trabalho é o chamado Princípio da Escolha de Helly publicado em 1921 (ver referência [2]), aqui o apresentamos numa versão adaptada ao uso presente.

Lema 4 (Teorema de Helly)

Seja $f_n \in BV[0,1]$ tal que $\overset{1}{\underset{0}{V}} f_n \leq K$, $\forall n \in \mathbf{N}$ e $f_n(0) = 0$. Então, existe uma subseqüência (f_{n_K}) de (f_n) e existe $f \in BV[0,1]$ com $\overset{1}{\underset{0}{V}} f \leq K$ tal que f_{n_K} converge pontualmente para f em $[0,1]$, isto é, $f_{n_k}(x) \to f(x)$, $\forall x \in [0,1]$.

Provamos o teorema primeiramente para funções não decrescentes. Seja (f_n) uma seqüência de funções não decrescentes de variação limitada tal que $\overset{1}{\underset{0}{V}} f_n \leq K$, $\forall n \in \mathbf{N}$, e ainda $f_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Seja $\{r_n | n = 0, 1, \ldots\}$ uma ordenação do racionais do intervalo $[0,1]$. Temos

$$|f_n(x)| = |f_n(x) - f_n(0)| \leq \overset{1}{\underset{0}{V}} f_n \leq K \quad ,$$

portanto $(f_n(x))$ é uma seqüência limitada para todo $x \in [0,1]$, isto implica, se consideramos $(f_n(r_1))$, que esta seqüência tem uma subseqüência convergente que notaremos por $f_n^1(r_1)$. Tomando $(f_n^1(r_2))$ novamente esta seqüência é limitada e podemos extrair dela uma subseqüência $(f_n^2(r_2))$ convergente. Continuando e aplicando o processo diagonal de Cantor encontramos uma subseqüência de funções $f_n^n(r)$ retirada de f_n tal que $f_n^n(r)$ converge para todo racional do intervalo $[0,1]$.

Sejam $\underline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \inf f_n^n(x) = \sup\limits_n \inf \{f_n^n(x), \ldots\}$

e $\overline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sup f_n^n(x) = \inf\limits_n \sup \{f_n^n(x), \ldots\}$. Estas funções são monótonas não decrescentes em [0,1]. Por exemplo, verifiquemos isto para $\underline{f}$:

$$\text{se} \quad \inf\{f_n^n(x),\dots\} = \alpha_n \quad \text{e} \quad \inf\{f_n^n(y),\dots\} = \beta_n$$

com $x \leq y$, temos $f_n^n(x) \leq f_n^n(y)$, isto implica $\alpha_1 \leq \beta_1$, $\alpha_2 \leq \beta_2$, ...etc. Portanto, $\sup\limits_{k \geq n} \alpha_k \leq \sup\limits_{k \geq n} \beta_k$ ou seja $\underline{f}(x) \leq \underline{f}(y)$.

De maneira análoga se verifica que $\overline{f}$ é não decrescente.

Se $\underline{f}(x) = \overline{f}(x)$, ou seja, se $(f_n^n(x))$ convergir notamos este limite por $f(x) = \underline{f}(x) = \overline{f}(x)$. É óbvio que para r racional do intervalo [0,1] temos $\underline{f}(r) = \overline{f}(r) = f(r)$.

Como $\underline{f}$ e $\overline{f}$ são funções monótonas não decrescentes definidas no intervalo [0,1], o conjunto de descontinuidades de $\underline{f}$ e $\overline{f}$ é finito ou enumerável.

Seja $y \in [0,1]$ um ponto de continuidade de $\underline{f}$ e $\overline{f}$ e (s_n) uma seqüência de racionais convergindo para y . Então $\underline{f}(s_n) \to \underline{f}(y)$ e $\overline{f}(s_n) \to \overline{f}(y)$, mas $\underline{f}(s_n) = \overline{f}(s_n)$ logo $\underline{f}(y) = \overline{f}(y)$.

Ora, isto nos diz que o conjunto

$$\{y \in [0,1] \mid \underline{f}(y) \neq \overline{f}(y)\}$$

é finito ou enumerável.

Seja $\{t_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ uma ordenação deste conjunto.

Repetimos sobre a seqüência (f_n^n) o mesmo procedimento inicial, isto é, retiramos uma subseqüência $(f_n^n)_m^1$ tal que $(f_n^n)_m^1(t_1)$ converge e desta retiramos $(f_n^n)_m^2$ tal que $(f_n^n)_m^2(t_2)$ converge, etc.

O procedimento exposto nos conduz a uma subseqüência (f_{n_k}) de (f_n) convergente pontualmente em $[0,1]$ para uma função $f:[0,1]\to R$. Já que cada f_{n_k} é não decrescente isto acarreta que também f é não decrescente.

Por fim podemos concluir que tendo $f(0)=\lim\limits_{K\to\infty} f_{n_K}(0)=0$, $f(1)=\lim\limits_{K\to\infty} f_{n_K}(1)$ e $f_{n_K}(1)=f_{n_K}(1)-f_{n_K}(0)=\overset{1}{\underset{0}{V}} f_{n_K}\le K$ então $f(1)\le K$ e disto $\overset{1}{\underset{0}{V}} f=f(1)-f(0)\le K$. Em outras palavras $f\in BV[0,1]$ e $\overset{1}{\underset{0}{V}} f\le K$.

Se consideramos as funções de variação limitada em geral do intervalo $[0,1]$ temos

$$f_n(x)=(P_n)_0^x-(N_n)_0^x=f_{1n}(x)-f_{2n}(x)$$

f_{1n} e f_{2n} são não decrescentes e

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f_{1n}=\sup(P_n)_0^1\le\overset{1}{\underset{0}{V}} f_n\le K\ ,$$
$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f_{2n}=\sup(N_n)_0^1\le\overset{1}{\underset{0}{V}} f_n\le K\ .$$

Como temos (f_{1n}) e (f_{2n}) seqüências de funções não decrescentes e $\overset{1}{\underset{0}{V}} f_{1n}$, $\overset{1}{\underset{0}{V}} f_{2n}\le K$, podemos, por exemplo, de (f_{1n}), retirar uma subseqüência $(f_{1n})_K$ convergindo pontualmente no $[0,1]$ para uma função g de variação limitada tal que $\overset{1}{\underset{0}{V}} g\le K$. Passando para a subseqüência $(f_n)_K$ de (f_n) e considerando $(f_{2n})_K$, desta última retiramos $((f_{2n})_K)_L$ convergindo pontualmente no $[0,1]$ para uma função h de variação limitada tal que $\overset{1}{\underset{0}{V}} h\le K$. Em resumo: temos $((f_{1n})_K)_L$ convergindo pontualmente para g e

$((f_{2n})_K)_L$, convergindo pontualmente para h . Para não tornar a notação difícil suponhamos, sem perda de generalidade, (f_{1n}) e (f_{2n}) convergindo pontualmente para g e h respectivamente no intervalo [0,1]. Todavia, $\overset{1}{\underset{0}{V}} f_n = (P_n)_0^1 + (N_n)_0^1 =$ $= f_{1n}(1) + f_{2n}(1) \leq K$ então já que $f_{1n}(1) \to g(1)$ e $f_{2n}(1) \to h(1)$, temos $g(1) + h(1) \leq K$.

Ora isto implica, primeiramente que

$f_n(x) = [f_{1n}(x) - f_{2n}(x)] \to g(x) - h(x)$. Pondo $g(x) - h(x) = f(x)$ temos $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in [0,1]$. Como f_{n1} e f_{2n} são funções não decrescentes então g e h também o são e ainda $f_{1n}(0) = f_{2n}(0) = 0$. Portanto, $g(0) = h(0) = 0$. Temos

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \overset{1}{\underset{0}{V}} (g - h) \leq \overset{1}{\underset{0}{V}} g + \overset{1}{\underset{0}{V}} h = [g(1) - g(0)] + [h(1) - h(0)].$$

Logo $\overset{1}{\underset{0}{V}} f \leq g(1) + h(1) \leq K$.

Se tomarmos uma classe de funções no espaço $L_1[0,1]$, pode ou não existir nesta classe uma função de variação limitada. Como os seguintes exemplos indicam.

Se $f(x) = x$, para $x \in [0,1]$ então $\overset{1}{\underset{0}{V}} f = 1$.

Considerando

$$g(x) = \begin{cases} x \ , \text{ se } \ x \in [0,1]\backslash\{1,\frac{1}{2},\dots\} \\ n \ , \text{ se } \ x = 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots \end{cases}$$

naturalmente $g = f$ (q.s), mas g não é de variação limitada. Por outro lado, considerando:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{n} \ , \text{ se } \ \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} & \text{se } \ n = 1,2,\dots \\ 0 \ , \text{ se } \ x = 0 \end{cases}$$

$f \in L_1[0,1]$, pois $\int_0^1 |f| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n(n+1)} < \infty$, porém f não é de variação limitada. Na classe à qual f pertence em $L_1[0,1]$ nenhuma função é limitada, portanto, nesta classe, nenhuma função é de variação limitada.

Nós diremos que uma classe do $L_1[0,1]$ é de variação limitada quando nela existir uma função de variação limitada. Em outras palavras, para $f \in L_1[0,1]$ diremos que $f \in BV[0,1]$, se existir $g \equiv f(q.s.)$ e $g \in BV[0,1]$. Definiremos a variação de f como o ínfimo do conjunto das variações das funções de variação limitada que estão na classe de f, isto é,

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = K = \inf\{\overset{1}{\underset{0}{V}} g \mid g \quad BV[0,1] \quad e \quad g \equiv f(q.s.)\} .$$

A proposição a seguir mostra que este ínfimo K é a variação de alguma função h tal que $f \equiv h(q.s.)$.

<u>Corolário 1</u>

Seja $f \in L^1[0,1]$. Seja

$$K = \inf\{\overset{1}{\underset{0}{V}} g \mid g \quad BV[0,1] \quad e \quad g \equiv f(q.s.)\} .$$

Então, existe $h \in BV[0,1]$ tal que $h \equiv f(q.s.)$ e $\overset{1}{\underset{0}{V}} h = K$.

<u>Prova</u>: Seja $g_n \in BV[0,1]$ tal que $g_n \equiv f(q.s.)$ e $\overset{1}{\underset{0}{V}} g_n \leq K + \frac{1}{n}$.

Como $\|g_n\| = \|f\|$, então existe $x_n \in [0,1]$ tal que $|g_n(x_n)| \leq \|f\|$. Como $|g_n(x_n) - g_n(0)| \leq \overset{1}{\underset{0}{V}} g_n \leq K + \frac{1}{n} \leq K + 1$, então $|g_n(0)| \leq K + 1 + |g_n(x_n)|$.

Como $(g_n(0))$ é limitada, existe $g_{n_K}(0)$ convergindo, digamos que $g_{n_k}(0) \to a_0$.

Se definimos $\left[g_{n_K} - g_{n_K}(0)\right] = h_{n_K}$, temos

$h_{n_K} = 0$ e $\overset{1}{\underset{0}{V}} h_{n_K} \leq K + \frac{1}{n_K} \leq K + 1$.

Pelo teorema de Helly existe uma subseqüência $(h_{n_{K_\ell}})$ de (h_{n_K}) convergindo pontualmente para uma função g em $[0,1]$ e $\overset{1}{\underset{0}{V}} g \leq K + 1$.

Tomando $K_m \in \mathbf{N}$ adequado temos $\overset{1}{\underset{0}{V}} h_{n_K} \leq K + \frac{1}{m}$ para todo $K \geq K_m$, onde m é um natural arbitrário fixado. Novamente, aplicando o Teorema de Helly, obteremos de $(h_{n_{K_\ell}})$ uma subseqüência convergindo pontualmente, no intervalo $[0,1]$, para uma função, que no caso, é a própria função g e $\overset{1}{\underset{0}{V}} g \leq K + \frac{1}{m}$. Como o número $m \in \mathbf{N}$ foi escolhido arbitrariamente, então $\overset{1}{\underset{0}{V}} g \leq K$.

Finalmente, temos:

$$\left[g_{n_K}(x) - g_{n_K}(0)\right] \to g(x) \text{ , para todo } x \in [0,1]$$

e $g_{n_K}(0) \to a_0$, então $g_{n_K}(x) \to h(x) = [g(x) + a_0]$, mas $g_{n_K} \equiv f(q.s.)$, logo $h \equiv f(q.s.)$.

Como $\overset{1}{\underset{0}{V}} g \leq K$, temos, também, $\overset{1}{\underset{0}{V}} h \leq K$.

Podemos tirar uma conseqüência que usamos a seguir.

Se dada $f \in L_1[0,1]$, existe $g_\varepsilon \in BV[0,1]$ tal que $g_\varepsilon \equiv f(q.s.)$ e $\overset{1}{\underset{0}{V}} g_\varepsilon \leq K + \varepsilon$, então existe $h \in BV[0,1]$ tal que $h \equiv f(q.s.)$ e $\overset{1}{\underset{0}{V}} h \leq K$.

Corolário 2

Seja (f_n) uma seqüência em $L_1[0,1]$ tal que $f_n \xrightarrow{L_1} f$ (indicamos assim a convergência em $L_1[0,1]$).
Seja $K \in \mathbb{R}$ tal que $\overset{1}{\underset{0}{V}} f_n \leq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então existe $g \equiv f$(q.s.) taç que $\overset{1}{\underset{0}{V}} g \leq K$.

Prova: Primeiramente, suponhamos, que $f_n(0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema de Helly, existe uma subseqüência (f_{n_K}) de (f_n) e existe $g \in BV[0,1]$, com $\overset{1}{\underset{0}{V}} g \leq K$, tal que $f_{n_K}(x) \to g(x)$, para todo $x \in [0,1]$. Como $f_{n_K} \xrightarrow{L_1} f$, então existe uma subseqüência $(f_{n_{K_\ell}})$ convergindo pontualmente para f quase-sempre, mas $f_{n_{K_\ell}}(x) \to g(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Então, $f \equiv g$(q.s.).
No caso geral, não temos a restrição: $f_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Como $f_n \xrightarrow{L_1} f$, então existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, temos $\|f_n - f\| < 1$, ou seja, $\|f_n\| < 1 + \|f\|$.
Para cada uma destas funções f_n, existe um ponto $x \in [0,1]$ tal que $|f_n(x_n)| \leq 1 + \|f\|$. Por outro lado, como $\overset{1}{\underset{0}{V}} f_n \leq K$ então $|f_n(0) - f_n(x_n)| \leq \overset{1}{\underset{0}{V}} f_n \leq K$, o que implica $|f_n(0)| \leq K + |f_n(x_n)| \leq (K + 1 + \|f\|)$. Sendo $(f_n(0))$ uma seqüência limitada, podemos determinar uma subseqüência $(f_{n_K}(0))$ convergindo para um ponto a_0.
Reunindo, temos

$$\left[f_{n_K} - f_{n_K}(0)\right] \xrightarrow{L_1} [f - a_0] \; , \; \overset{1}{\underset{0}{V}} \left[f_{n_K} - f_{n_K}(0)\right] = \overset{1}{\underset{0}{V}} f_{n_K} \leq K$$

e $\left[f_{n_K} - f_{n_K}(0)\right](0) = 0$. Pela primeira parte da demonstração, existe $h \equiv (f - a_0)(q.s.)$ tal que $\overset{1}{\underset{0}{V}} h \leq K$. Pondo $g = h + a_0$ então $g \equiv f(q.s.)$ e $\overset{1}{\underset{0}{V}} g \leq K$.

Uma função escada é definida por uma combinação linear finita de funções características de intervalos limitado I_i da reta, ou seja, $\psi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{I_i}$. Estas funções são de variação limitada.

Tomando $f \in L_1[0,1]$, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma função escada ψ, nula fora do intervalo $[0,1]$, tal que $\int_0^1 |f - \psi| dm \leq \varepsilon$. Isto nos diz que o conjunto das funções de variação limitada do intervalo $[0,1]$ é denso no espaço $L_1[0,1]$.

<u>Corolário 3</u>

Seja $P : L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ um operador linear contínuo. Suponhamos que para toda $f \in BV[0,1]$, temos $Pf \in BV[0,1]$, com $\overset{1}{\underset{0}{V}} Pf \leq c\|f\|$, para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Então, $P(L_1[0,1]) \subseteq BV[0,1]$ e $\forall f \in L_1[0,1]$, temos $\overset{1}{\underset{0}{V}} Pf \leq c\|f\|$.

<u>Prova</u>: Dada $f \in L_1[0,1]$, existe $f_n \in BV[0,1]$ tal que $f_n \xrightarrow{L_1} f$. Dado $\varepsilon > 0$, existe N_ε tal que para todo $n \geq N_\varepsilon$, então $\|f_n - f\| < \varepsilon$, portanto, $\|f_n\| < \varepsilon + \|f\|$.
Como $Pf_n \in BV[0,1]$ e $\overset{1}{\underset{0}{V}} Pf_n \leq c\|f_n\|$, então
$\overset{1}{\underset{0}{V}} Pf_n \leq c(\varepsilon + \|f\|)$, para $n \geq N_\varepsilon$.

Por hipótese, P é um operador contínuo, então $Pf_n \to Pf$, logo pelo corolário 2, existe g_ε , tal que $g_\varepsilon \equiv Pf(q.s.)$

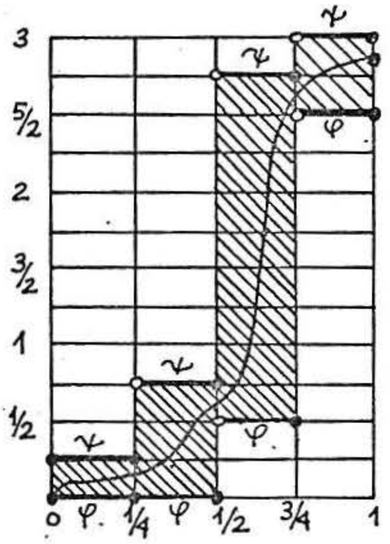
e $\overset{1}{\underset{0}{V}} g_\varepsilon \leq c(\varepsilon + \|f\|)$. Pelo corolário 1, existe $g \equiv f$(q.s.) tal que $\overset{1}{\underset{0}{V}} g \leq c\|f\|$.

Lema 5

Seja $F = \{f \in L^1[0,1] \mid$ existe $g \equiv f$(q.s.) , g é não decrescente e $0 \leq g \leq 3\}$ F é relativamente compacto em $L^1[0,1]$.

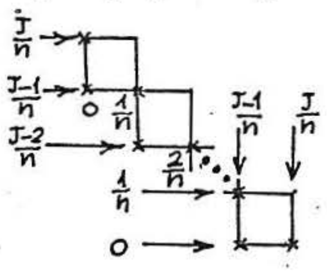
Prova: Seja $f : [0,1] \to [0,3]$ não decrescente.

Dividimos o retângulo $[0,1] \times [0,3]$ em quadrados de lado $\frac{1}{n}$ e construímos funções escadas φ e ψ como definimos abaixo.



Se $Q_1 = \left[0,\frac{1}{n}\right]$, $Q_2 = (\frac{1}{n},\frac{2}{n}]$, ..., $Q_n = (\frac{n-1}{n}, 1)$ tomamos $\alpha_K = \inf\limits_{y \in Q_K} f(y)$ e $\beta_K = \sup\limits_{y \in Q_K} f(y)$ e definimos $\varphi(x) = \max\limits_{0 \leq J \leq 3n} \frac{J}{n}$ tal que $\frac{J}{n} \leq \alpha_K$ e $\psi(x) = \min\limits_{0 \leq J \leq 3n} \frac{J}{n}$ tal que $\frac{J}{n} \geq \beta_K$ para $x \in Q_K$ e $K = 1, \ldots, n$. Em vista disto temos $\varphi \leq f \leq \psi$ e φ e $\psi \in F$, $\|\psi - \varphi\|_1 = \sum$ área dos quadrados hachurados.

Se entendemos por uma diagonal secundária a figura dada por $(\left[0,\frac{1}{n}\right] \times \left[\frac{J-1}{n},\frac{J}{n}\right]) \cup (\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right] \times \left[\frac{J-2}{n},\frac{J-1}{n}\right]) \cup \ldots \cup (\left[\frac{J-1}{n},\frac{J}{n}\right] \times \left[0,\frac{1}{n}\right])$



como no desenho, tem por diagonal secundária no máximo um quadrado hachurado por ser f não decrescente.

Como temos $4n-1$ diagonais secundárias segue que $\|\psi - \varphi\|_1 \le \frac{4n-1}{n^2}$, pois tomamos no máximo por diagonal um quadrado de área $\frac{1}{n^2}$.

Dado $\varepsilon > 0$ escolhemos n tal que $\frac{4n-1}{n^2} < \varepsilon$.

Seja Φ o conjunto de funções definido por:

$$\Phi = \{\varphi = \frac{a_0}{n} \chi_{[0,1]} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{n} \chi_{(\frac{j}{n},1]} \mid a_j \in \mathbf{N} \text{ e } a_0+a_1+\ldots+a_{n-1} \le 3n\}$$

Este conjunto é finito e tal que para $\forall f \in F$ existe $\varphi \in \Phi$ (aquela, por ex., que foi definida anteriormente) tal que $\|f - \varphi\|_1 < \|\psi - \varphi\|_1 \le \frac{4n-1}{n^2} < \varepsilon$.

Ora, isto mostra que F é um conjunto totalmente limitado do $L^1[0,1]$ e em espaços métricos completos esta é uma condição equivalente à compacticidade relativa.

Lema 6

$E = \{f \in L_1[0,1] \mid \|f\| \le 1$ e $\overset{1}{\underset{0}{V}} f \le 1\}$

é relativamente compacto.

Prova: Dada $f \in E$ temos $0 \le P_0^x \le P_0^1 \le \overset{1}{\underset{0}{V}} f = 1$ e $0 \le N_0^x \le N_0^1 \le \overset{1}{\underset{0}{V}} f \le 1$. Também $f(x) - f(0) = P_0^x - N_0^x$ de onde $f(x) = f(0) + P_0^x - N_0^x$. Pondo $f_1(x) = f(0) + P_0^x$ e $f_2(x) = N_0^x$, segue que $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, $x \in [0,1]$.

Sendo $|f(x) - f(0)| \le \overset{1}{\underset{0}{V}} f \le 1$, para todo $x \in [0,1]$, então $|f(0)| - 1 \le |f(x)|$. Se tivéssemos $f(0) > 2$ então $|f(x)| > 1$, para todo $x \in [0,1]$, o que implicaria $\|f\| = \int_0^1 |f| dm > 1$. Como $\|f\| \le 1$, então $f(0) \le 2$.

Temos, então, $f_1(x) = f(0) + P_0^x \leq 3$, $f_2(x) = N_0^x \leq 1$.
Logo, como f_1 e f_2 são não decrescentes, temos que $f_1, f_2 \in F$ onde F é o conjunto definido no lema 4.
Dado $\varepsilon > 0$, existe $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, onde Φ , também, é o conjunto de funções definido no lema 4, tal que

$$\|f_1 - \varphi_1\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad e \quad \|-f_2 + \varphi_2\| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Considerando o conjunto finito Φ' definido por
$\Phi' = \{\varphi_1 - \varphi_2 | \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi\}$ temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\varphi \in \Phi$ tal que $\|f - \varphi\| < \varepsilon$. Isto mostra que E é relativamente compacto.
O conjunto E' definido por

$$E' = \{f \in L_1[0,1] | \|f\| \leq A \quad e \quad \overset{1}{\underset{0}{V}} f \leq B\}$$

também é relativamente compacto como podemos provar pelo uso do lema anterior.
Tomando C positivo tal que $A, B \leq C$ então $\left\|\frac{1}{C} f\right\| \leq 1$ e $\overset{1}{\underset{0}{V}} \frac{1}{C} f \leq 1$, para toda a função pertencente ao conjunto E' .
Pelo lema 5, dado $\varepsilon > 0$ existe $\varphi \in \Phi'$ tal que $\left\|\frac{1}{C}f - \varphi\right\| < \frac{\varepsilon}{C}$ aí $\|f - C\varphi\| < \varepsilon$ onde a função $C\varphi$ pertence ao conjunto finito $\{C\varphi | \varphi \in \Phi'\}$. Isto assegura que E' é totalmente limitado.

Enunciamos, sem demonstração, dois Teoremas que podem ser encontrados em Schwartz (referência [1]).

A envoltória convexa, $CO(A)$ de um subconjunto $A \subseteq L^1[0,1]$ é definida como

$$CO(A) = \bigcap_{A \subseteq K, K \text{ convexo}} K$$

e o fecho convexo é definido como

$$\overline{CO}(A) = \bigcap_{A\subseteq K,\, K \text{ convexo e fechado}} K$$

Facilmente, podemos concluir que o fecho convexo de A é igual ao fecho convexo de $\overline{A}$, onde $\overline{A}$ é o fecho de A, ou seja,

$$\overline{CO}(A) = \overline{CO}(\overline{A})$$

Se K é convexo e $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in R$, por indução podemos provar que $\dfrac{x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n} \in K$.
Disto concluímos que se $x_0, \ldots, x_{n-1} \in A$ então
$\dfrac{x_0 + \ldots + x_{n-1}}{n} \in \overline{CO}(A)$.

Teorema de Mazur (referência [1])

Num espaço de Banach X se $A \subseteq X$ é compacto então $\overline{CO}(A)$ é compacto.
Aplicando o teorema para o nosso caso temos que se A é relativamente compacto então $\overline{A}$ é compacto. Logo, $\overline{CO}(\overline{A})$ é compacto, mas $\overline{CO}(A) = \overline{CO}(\overline{A})$, ou seja, $\overline{CO}(A)$ é compacto.

No espaço vetorial $B(x)$ das aplicações lineares contínuas $T : X \to X$, onde X é espaço de Banach, comumente temos três topologias: a uniforme, a topologia forte dos operadores e a topologia fraca dos operadores.
A topologia uniforme é induzida pela norma

$$\|T\| = \max_{\|X\| \leq 1} \|TX\| .$$

Nesta topologia temos $T_n \to T$ se e só se T_n converge uniformemente para T na bola unitária.

A topologia forte é definida pelo sistema de vizinhanças fundamentais

$$V(T,A,\varepsilon) = \{R \in B(X) \mid \|T(x) - R(X)\| < \varepsilon \text{ , para todo } x \in A\}$$

onde A é um subconjunto finito arbitrário de X e ε é um real positivo qualquer. Nesta topologia $T_n \to T$ se e só se T_n converge pontualmente para T em X, ou seja, $T_n(X) \to T(X)$ para todo o ponto $x \in X$.

A topologia fraca é definida pelas vizinhanças fundamentais

$$V(T,A,B,\varepsilon) = \{R \in B(X) \mid \|f(TX - RX)\| < \varepsilon, \text{ para todo } x \in A \text{ e para todo } f \in B\}$$

onde A é um conjunto finito arbitrário de X, B é um conjunto arbitrário também finito no espaço vetorial dos funcionais lineares contínuos de X em $\mathbf{R}$, e ε é um real positivo qualquer.

Nesta topologia T_n converge para T se e só se $f(T_nX) \to f(TX)$, para todo $x \in X$ e todo f funcional linear de X em $\mathbf{R}$.

Uma seqüência (X_n) em X é dita fracamente convergente se existe $x \in X$ tal que $f(X_n) \to f(X)$ para todo funcional linear contínuo de X em $\mathbf{R}$. O ponto x ŵ chamado o limite fraco de (X_n).. Um conjunto $K \subseteq X$ é dito fracamente seqüencialmente compacto se toda a seqüência $(X_n) \subseteq A$ contém uma subseqüência fracamente convergente.

Se $T : X \to X$ então definimos as médias das iteradas do operador T por

$$A(n) = \frac{1}{n} \sum_{K=0}^{n-1} T^K \quad .$$

Teorema 1 (ver referência [1])

Se a seqüência $(A(n))$ é limitada então ela converge na topologia forte dos operadores se e somente se $\frac{T^n x}{n}$ converge para zero num conjunto denso de X e o conjunto $\{A(n)x\}$ é relativamente seqüencialmente compacto na topologia fraca, para x num conjunto denso de X.

SEÇÃO 3

Antes de demonstrarmos o teorema principal apresentamos um exemplo do operador de Perron-Frobenius com objetivo de tornar mais facilmente compreensível os cálculos no interior da demonstração.

Seja $\tau(x) = \begin{cases} 2x \ , & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{7}{4} - \frac{3}{2}x \ , & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$

$$P\,f(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_{(\tau^{-1}[0,x])\cap[0,\frac{1}{2}]} f(s)ds + \int_{(\tau^{-1}[0,x])\cap[\frac{1}{2},1]} f(s)ds \right]$$

se $0 \leq x < \frac{1}{4}$ então $\tau^{-1}[0,x] = [0,\frac{x}{2}]$ e se $x = \frac{1}{4}$ então $\tau^{-1}[0,\frac{1}{4}] = [0,\frac{1}{8}] \cup \{1\}$ e daí temos se $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$

$$P_\tau f(x) = \frac{d}{dx} \int_{[0,\frac{x}{2}]\cap[0,\frac{1}{2}]} f(s)ds = \frac{1}{2}\, f(\tfrac{x}{2}) \, .$$

Se $\frac{1}{4} < x \leq 1$ então

$$P_\tau f(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_0^{\frac{x}{2}} f(s)ds + \int_{-\frac{2}{3}x+\frac{7}{6}}^{1} f(s)ds\right]$$

$$= \frac{1}{2}\, f(\tfrac{x}{2}) + \tfrac{2}{3} f(-\tfrac{2}{3}x + \tfrac{7}{6}) \, .$$

Concluindo, o operador computado para esta aplicação τ é:

$$P_\tau f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, f(\frac{x}{2}) \ , & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}\, f(\frac{x}{2}) + \frac{2}{3} f(-\frac{2}{3}x + \frac{7}{6}) \ , & \frac{1}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

<u>Teorema A</u>

Seja $\tau : [0,1] \to [0,1]$ C^2 por partes tal que $\inf|\tau'| > 1$.

0) Então, para qualquer $f \in L_1[0,1]$ a seqüência

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_\tau^K f$$

converge na norma do $L_1[0,1]$ para uma função $f^* \in L_1[0,1]$.
A função f^* tem as seguintes propriedades:

1) Se $f \geq 0$ então $f^* \geq 0$.

2) $\int_0^1 f^* dm = \int_0^1 f dm$.

3) $P_\tau f^* = f^*$.

4) A função f^* é de variação limitada e existe uma constante c independente da escolha da f inicial tal que $\overset{1}{\underset{0}{V}} f^* \leq c\|f\|$.

Demonstração:

Se escrevemos $s = \inf|\tau'|$, que por hipótese é maior que 1, podemos escolher N, natural, tal que $s^N > 2$.

É fácil ver que $= \tau^N = \tau \circ \dots \circ \tau$, onde N indica a composição N vezes, é uma função C^2 por partes.

Se denotamos por $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_q = 1$ a partição correspondente a ϕ e por ϕ_i as restrições de aos intervalos $[b_{i-1}, b_i]$ temos que:

$$\phi_i'(x) = (\tau \circ \dots \circ \tau)'(x)$$
$$= \tau'(\tau \circ \dots \tau \circ (x)).\tau'(\tau \circ \dots \circ \tau(x)) \dots \tau'(x)$$

para $x \in [b_{i-1}, b_i]$, onde a derivada τ' aparece N vezes logo $|\ _i'(x)| \geq s^N > 2$.

Vamos, agora, computar o operador de Perron-Frobenius para o caso particular destas funções .
Ao ser $|\phi_i'| > 2$ nos intervalos $[b_{i-1}, b_i]$ temos ϕ_i crescente ou decrescente em cada intervalo destes.

$$P\ f(x) = \frac{d}{dx} \int_{\phi^{-1}[0,x]} f(s)ds$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\int_{\phi^{-1}[0,x]\cap[b_o,b_1]} f(s)ds + \dots + \int_{\phi^{-1}[0,x]\cap[b_{q-1},b_q]} f(s)ds\right]$$

Se designarmos por $J_i = [c_{i-1}, c_i] = {}_i[b_{i-1}, b_i]$ a imagem de $[b_{i-1}, b_i]$ pela restrição ${}_i$ e tomarmos um intervalo $[0,x] \subseteq [0,1]$ a questão que primeiramente surge é a quais dos intervalos $J_1, \dots, J_q$ x pertence. Isto é o que nos perguntamos inicialmente no exemplo anterior.

Digamos que $x \in J_i$, neste caso

$$\int_{\phi^{-1}[0,x]\cap[b_{i-1},b_i]} f(s)ds = \int_{b_{i-1}}^{\phi_i^{-1}(x)} f(s)ds$$

caso ${}_i$ seja crescente no intervalo $[b_{i-1}, b_i]$.

Se por outro lado, ${}_i$ for decrescente no intervalo $[b_{i-1}, b_i]$ então

$$\int_{\phi^{-1}[0,x]\cap[b_{i-1},b_i]} f(s)ds = \int_{\phi_i^{-1}(x)}^{b_i} f(s)ds$$

Se x não pertence a J_i temos duas situações possíveis: $\phi_i^{-1}[0,x] =$ (vazio) ou $\phi_i^{-1}[0,x] = [b_{i-1}, b_i]$. Para obter o operador de Perron-Frobenius devemos derivar o que resulta acima.

$$\frac{d}{dx}\int_{\phi^{-1}[0,x]\cap[b_{i-1},b_i]} f(s)ds = f(\phi_i^{-1}(x))(\phi_i^{-1})'(x) \quad (q.s.)$$

para ϕ_i decrescente,

$$\frac{d}{dx}\int_{\phi^{-1}[0,x]\ [b_{i-1},b_i]} f(s)ds = -f(\phi_i^{-1}(x)).(\phi_i^{-1})'(x) \quad (q.s.)$$

para ϕ_i decrescente, no caso x não pertence à J_i temos

$$\frac{d}{dx}\int_{\phi^{-1}[0,x]\cap[b_{i-1},b_i]} f(s)ds = 0 .$$

Pondo $\phi_i^{-1} = \psi_i$, $\sigma_i = |(\phi_i^{-1})'| = |\psi_i'|$ e indicando por χ_i a função característica do intervalo J_i podemos resumir os resultados acima numa única integral

$$\frac{d}{dx}\int_{\phi^{-1}[0,x]\ [b_{i-1},b_i]} f(s)ds = f(\phi_i^{-1}(x)).|(\phi_i^{-1})'(x)|\lambda_i(x)$$

$$= f(\psi_i(x)).\sigma_i(x).\chi_i(x) .$$

Apenas devemos notar que se $x \notin J_i$ a integral à esquerda é nula e a expressão à direita desprovida de sentido por não significar nada $f(\psi_i(x))$ e $\sigma_i(x)$. Neste caso $\chi_i(x) = 0$, indica, para nós, que a integral à esquerda é nula.

Por fim podemos escrever o operador de Perron-Frobenius que neste caso particular adquire a expressão

$$P\ f(x) = \sum_{i=1}^{q} f(\psi_i(x)).\sigma_i(x)\chi_i(x) . \qquad (1)$$

observemos que como $|\phi_i'(x)| \geq s^N$ e $\sigma_i(x) = |(\phi_i^{-1})'(x)|$ temos $\sigma_i(x) \leq s^{-N}$ para $x \in J_i$ e $i = 1,\ldots,q$.

Obtido o operador na expressão acima vamos mostrar que se $f(x)$ é função de variação limitada sobre $[0,1]$ então $P\ f$ é também de variação limitada e obter uma limitação para esta variação.

Pelo lema 1

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} P_\phi f \leq \sum_{i=1}^{q} \overset{c_i'}{\underset{c_{i-1}}{V}} (f\circ\psi_i).\sigma_i + \sum_{i=1}^{q} |f(\psi_i(c_{i-1}))|.\sigma_i(c_{i-1})$$

$$+ |f(\psi_i(c_i'))|.\sigma_i(c_i')$$

como $\sigma_i(x) \leq S^{-N}$ podemos concluir que

$$\bigvee_0^1 P_\phi f \leq \sum_{i=1}^{q} \bigvee_{c_{i-1}}^{c_i'} (f \circ \psi_i).\sigma_i + S^{-N} \sum_{i=1}^{q} (|f(b_{i-1})| + |f(b_i)|) \qquad (2)$$

Vamos agora avaliar as duas parcelas da soma acima. Primeiramente avaliamos $\sum_{i=1}^{q} \bigvee_{c_{i-1}}^{c_i'} (f \circ \psi_i).\sigma_i$. Seja P uma partição do intervalo J_i ,

$P = \{c_{i-1} = t_o < \ldots < t_{k_i} = c_i'\}$. Então:

$$\bigvee_{c_{i-1}}^{c_i} ((f \circ \psi_i).\sigma_i, P) = \sum_j |(f \circ \psi_i)(t_j).\sigma_i(t_j) - (f \circ \psi_i)(t_{j-1})\sigma_i(t_{j-1})| =$$

$$= \sum_j |(f \circ \psi_i)(t_j).\psi_i'(t_j) - (f \circ \psi_i)(t_{j-1})\psi_i'(t_{j-1})| =$$

$$= \sum_j |(f \circ \psi_i)(t_j).\psi_i'(t_j) - (f \circ \psi_i)(t_j).\ _i'(t_{j-1}) + (f \circ \psi_i)(t_j).\psi_i'(t_{j-1})$$

$$- (f \circ \psi_i)(t_{j-1})\psi_i'(t_{j-1})| =$$

$$= \sum_j |(f \circ \psi_i)(t_j).[\psi_i'(t_j) - \psi_i'(t_{j-1})] + [(f \circ \psi_i)(t_j) - (f \circ \psi_i)(t_{j-1})]\psi_i'(t_{j-1})|$$

segue que

$$\bigvee_{c_{i-1}}^{c_i'} ((f \circ \psi_i).\sigma_i, P) \leq \sum_j |(f \circ \psi_i)(t_j)|.|\psi_i'(t_j) - \psi_i'(t_{j-1})| +$$

$$+ s^{-N} \sum_j |(f \circ \psi_i)(t_j)(t_j) - (f \circ \psi_i)(t_{j-1})|$$

$$\bigvee_{c_{i-1}}^{c_i'} ((f \circ \psi_i).\sigma_i, P) \leq \sum_j |(f \circ \psi_i)(t_j)|.|\psi_i'(t_j) - \psi_i'(t_{j-1})| + s^{-N} \bigvee_{b_{i-1}}^{b_i} f$$

$$\leq \sum_j |(f \circ \psi_i)(t_j).\psi_i''(\overline{t}_j)(t_j - t_{j-1})| + s^{-N} \bigvee_{b_{i-1}}^{b_i} f$$

onde $\overline{t}_j$ está entre t_{j-1} e t_j . Se $K = \dfrac{\text{máx}|\psi_i''|}{\min|\psi_i'|}$ para $i = 1, \ldots, q$ então

$$\overset{c_i'}{\underset{c_{i-1}}{V}} ((f\circ\psi_i).\sigma_i,P) \leq K \sum_j |(f\circ\psi_i)(t_j)\psi_i'(t_j)(t_j-t_{j-1})| + s^{-N} \overset{b_i}{\underset{b_{i-1}}{V}} f$$

Para todo $\varepsilon > 0$, podemos escolher uma partição de J_i tal que

$$\left|\int_{J_i} |f\circ\psi_i|.|\psi_i'|dm - \sum_j |(f\circ\psi_i)(t_j).\psi_i'(t_j)(t_j-t_{j-1})|\right| < \frac{\varepsilon}{k} .$$

Logo

$$\sum_j |(f\circ\psi_i)(t_j).\psi_i'(t_j)(t_j-t_{j-1})| < \frac{\varepsilon}{K} + \int_{J_i} |f\circ\psi_i|.|\psi_i'|dm$$

de onde concluímos que

$$\overset{c_i'}{\underset{c_{i-1}}{V}} ((f\circ\psi_i).\sigma_i,P) \leq \varepsilon + K \int_{J_i} |f\circ\psi_i|.|\psi_i'|dm + s^{-N} \overset{b_i}{\underset{b_{i-1}}{V}} f \quad \forall\varepsilon > 0$$

e portanto que

$$\underset{J_i}{V} (f\circ\psi_i).\sigma_i \leq + K \int_{b_{i-1}}^{b_i} |f|dm + s^{-N} \overset{b_i}{\underset{b_{i-1}}{V}} f \tag{3}$$

Vamos avaliar a segunda parcela da soma. Considerando um intervalo qualquer $[b_{i-1},b_i]$

$$\overset{b_i}{\underset{b_{i-1}}{V}} f \geq |f(b_i) - f(\xi_i)| + |f(\xi_i) - f(b_{i-1})|$$

onde $\xi_i \in [b_{i-1},b_i]$. Então

$$\overset{b_i}{\underset{b_{i-1}}{V}} f \geq |f(b_i)| + |f(b_{i-1})| - 2|f(\xi_i)| \tag{4}$$

Se $d_i = \inf\limits_{[b_{i-1},b_i]} |f|$ e $b = \min\limits_i (b_i - b_{i-1})$ então

$$d_i(b_i - b_{i-1}) \leq \int_{b_{i-1}}^{b_i} |f|dm . \text{ Logo } d_i \leq b^{-1} \int_{b_{i-1}}^{b_i} |f| .$$

Voltando a expressão (4) acima temos

$$|f(b_i)| + |f(b_{i-1})| \leq \overset{b_i}{\underset{b_{i-1}}{V}} f + 2|f(\xi_i)| \quad \forall\xi_i \in [b_{i-1},b_i]$$

logo

$$|f(b_i)| + |f(b_{i-1})| \leq \bigvee_{b_{i-1}}^{b_i} f + 2d_i$$

portanto

$$|f(b_i)| + |f(b_{i-1})| \leq \bigvee_{b_{i-1}}^{b_i} f + 2b^{-1} \int_{b_{i-1}}^{b_i} |f|dm$$

e daí

$$\sum_{i=1}^{q} |f(b_i)| + |f(b_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{q} \bigvee_{b_{i-1}}^{b_i} f + 2b^{-1} \sum_{i=1}^{q} \int_{b_{i-1}}^{b_i} |f|dm$$

ou

$$\sum_{i=1}^{q} |f(b_i)| + |f(b_{i-1})| \leq \bigvee_{0}^{1} f + 2b^{-1} \int_{0}^{1} |f|dm \qquad (5)$$

Reunindo os resultados (2),(3) e (5) acima:

$$\bigvee_0^1 P_{\phi} f \leq K \int_0^1 |f|dm + s^{-N} \bigvee_0^1 f + s^{-N} \bigvee_0^1 f + 2b^{-1} s^{-N} \int_0^1 |f|dm$$

$$\bigvee_0^1 P_{\phi} f \leq (K + 2b^{-1}.s^{-N}) \int_0^1 |f|dm + 2s^{-N} \bigvee_0^1 f \qquad (6)$$

Se $\alpha = (K + s^{-N}2b^{-1})$ e $\beta = 2s^{-N} < 1$ então

$$\bigvee_0^1 P_{\phi} f \leq \alpha \int_0^1 |f| + \beta \bigvee_0^1 f$$

ou

$$\bigvee_0^1 P_{\phi} f \leq \alpha\|f\| + \beta \bigvee_0^1 f \qquad (7)$$

Escrevendo $f_k = P_\tau^k f$ temos

$$f_{Nk} = P_\tau^{Nk} f = P_\tau^N(P_\tau^N(\ldots(P_\tau^N(f))\ldots)$$

onde P_τ^N aparece k vezes, mas $P_\tau^N = P_{\tau^N} = P$ pelo resultado (I). Logo,

$$f_{Nk} = P_\tau^{Nk} = P_{\phi}(P_{\phi}(\ldots(P_{\phi}(f))\ldots)$$

$$f_{Nk} = P_{\phi}^k(f) = P_{\phi}(P_{\phi}^{k-1}(f)) = P_{\phi}(f_{N(k-1)}) \quad .$$

Usando a expressão (7) temos:

$$\bigvee_0^1 f_{Nk} \leq \alpha \| f_{N(k-1)} \| + \beta \bigvee_0^1 f_{N(k-1)} \quad .$$

Como $\|P_\tau f\| \leq \|f\|$, pelo resultado (D) , obtemos $\|P_{N(k-1)} f\| \leq \|f\|$ de onde

$$\bigvee_0^1 f_{Nk} \leq \alpha \|f\| + \beta \bigvee_0^1 f_{N(k-1)} \quad . \tag{8}$$

Façamos alguns cálculos:

$$\bigvee_0^1 f_N \leq \alpha \|f\| + \beta \bigvee_0^1 f$$

$$\bigvee_0^1 f_{N2} \leq \alpha \|f\| + \beta \bigvee_0^1 f_N \leq \alpha \|f\| + \beta(\alpha \|f\| + \beta \bigvee_0^1 f)$$

$$\bigvee_0^1 f_{N2} \leq \alpha \|f\| . [1 + \beta] + \beta^2 \bigvee_0^1 f$$

Na verdade, se supusermos $\forall K \geq 1$ que

$$\bigvee_0^1 f_{NK} \leq \alpha \|f\| . [1 + \beta + \beta^2 + \ldots + \beta^{k-1}] + \beta^k \bigvee_0^1 f$$

vamos obter

$$\bigvee_0^1 f_{N(k+1)} \leq \alpha \|f\| + \beta \bigvee_0^1 f_{Nk} \quad .$$

$$\bigvee_0^1 f_{N(k+1)} \leq \alpha \|f\| + \beta[\alpha \|f\| (1 + \ldots + \beta^{k-1}) + \beta^k \bigvee_0^1 f]$$

$$\bigvee_0^1 f_{N(k+1)} \leq \alpha \|f\| . [1 + \beta + \ldots + \beta^k] + \beta^{k+1} \bigvee_0^1 f$$

Ou seja podemos afirmar que para todo $k \geq 1$ temos

$$\bigvee_0^1 f_{Nk} \leq \alpha \|f\| . [1 + \beta + \ldots + \beta^{k-1}] + \beta^k \bigvee_0^1 f \ .$$

Como $\beta < 1$

$$\bigvee_0^1 f_{Nk} \leq \alpha \|f\| . \frac{1}{1-\beta} + \bigvee_0^1 f \tag{9}$$

Se definirmos o conjunto

$$C = \{P^k f \mid k = 0, 1, \ldots\}$$

o que temos é que

$$\|P^k f\| \leq \|f\| \quad \text{pelo resultado (D)} .$$

e

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} P^k f \leq \alpha(1-\beta)^{-1}\|f\| + \overset{1}{\underset{0}{V}} f \quad .$$

O lema 6 nos assegura que C é relativamente compacto em $L_1[0,1]$.

$$C = \{f, P_{\tau^N}, P_{\tau^{N2}} f, \ldots\}$$

como P_τ é um operador contínuo então os conjuntos

$$P_\tau C = \{P_\tau f, P_{\tau^{N+1}} f, P_{\tau^{N2+1}} f, \ldots\}$$

$$P_{\tau^2} C = \{P_{\tau^2} f, P_{\tau^{N+2}} f, P_{\tau^{N2+2}} f, \ldots\}$$

$$\vdots$$

$$P_{\tau^{N-1}} C = \{P_{\tau^{N-1}} f, P_{\tau^{2N-1}} f, P_{\tau^{3n-1}}, \ldots\}$$

são todos relativamente compactos em $L^1[0,1]$. E disto deduzimos que

$$A = \{f, P_\tau f, P^2{}_\tau f, P^3{}_\tau f, \ldots\} = \bigcap_{k=0}^{N-1} P_{\tau^k} C \quad . \qquad (10)$$

também é relativamente compacto.

Utilizando o teorema de Mazur e os comentários que fizemos com relação a este teorema podemos afirmar que

$\overline{CO}(A) = \overline{CO}\{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$ é compacto, mas

$\{\frac{f_0 + \ldots + f_{n-1}}{n} | n = 1, \ldots\}$ está contido em $\overline{CO}(A)$ logo

$\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k | n = 2, \ldots\}$ é relativamente compacto isto é

$K(f) = \{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_\tau^k f | n = 2, \ldots\}$ é relativamente compacto para toda $f \in BV[0,1]$. (10)

Como a topologia de $L^1[0,1]$ é metrizável, então $K(f)$ é relativamente seqüencialmente compacto para toda função f de variação limitada. Em $L^1[0,1]$, como em qualquer espaço de Banach, a convergência em relação a norma implica a convergência fraca, portanto $K(f)$ é relativamente seqüencialmente compacto em relação à topologia fraca, para qualquer $f \in BV[0,1]$.

Pela propriedade (D) sabemos que $\|P_\tau f\| \leq \|f\|$ o que implica $\left\|\frac{P_\tau^n f}{n}\right\| \leq \frac{\|f\|}{n}$ e portanto $\frac{P_\tau^n f}{n} \to 0$ em L_1.

Se $A(n)f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_\tau^k f$ então pela mesma propriedade c temos $\|A(n)f\| \leq \frac{1}{n}(\|f\| + \ldots + \|f\|) = \frac{n\|f\|}{n} = \|f\|$ e se $\|f\| \leq 1$ então $\|A(n)f\| \leq 1$ ou seja $(A(n))$ é uma seqüência limitada.

Estamos em condição de usar o teorema 1 e concluir que $A(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_\tau^k$ converge na topologia forte dos operadores para um operador $P : L_1[0,1] \to L_1[0,1]$.

$$\text{Se } \frac{P_\tau^0 + P_\tau^1 + \ldots + P_\tau^{n-1}}{n} \xrightarrow{\text{forte}} P$$

$$\text{então } \frac{P_\tau + P_\tau^2 + \ldots + P_\tau^n}{n} \xrightarrow{\text{forte}} P_\tau \circ P$$

$$\text{então } \frac{n+1}{n} \cdot \frac{P_\tau + P_\tau^2 + \ldots + P_\tau^n}{n+1} \xrightarrow{\text{forte}} P_\tau \circ P$$

então

$$-\frac{P_\tau^0}{n} + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{P_\tau^0 + P_\tau + \ldots + P_\tau^n}{n+1} \xrightarrow{\text{forte}} P_\tau \circ P$$

$$\text{mas } \frac{n+1}{n} \frac{P_\tau^0 + P_\tau + \ldots + P_\tau^n}{n+1} \xrightarrow{\text{forte}} P$$

$$\text{e } \frac{P_\tau^0}{n} \xrightarrow{\text{forte}} 0$$

logo $P_\tau \circ P = P$.

Então para toda função $f \in L^1[0,1]$ temos, se $Pf = f^*$

$$P_\tau(f^*) = P_\tau(Pf) = Pf = f^*$$

ou seja f^* é ponto fixo do operador de Perron-Frobenius P_τ .

Como $\|A(n)f\| \leq \|f\|$ para toda $f \in L^1[0,1]$ então $\|Pf\| \leq \|f\|$ para toda $f \in L^1[0,1]$ o que implica ser P um operador contínuo.

Se $f \geq 0$ (q.s.) pela propriedade (c) temos $P_\tau f \leq 0$ (q.s.), portanto $A(n)f \geq 0$ (q.s.) . $A(n)f \xrightarrow{L_1} f^*$, então existe subseqüência $A(n_k)f$ convergindo pontualmente quase sempre para f^* , isto implica que $f^* \geq 0$ (q.s.).

Na propriedade (a) mostramos que $\int_0^1 P_\tau f dm = \int_0^1 f dm$, isto implica que para todo $n \in N$ $\int_0^1 A(n) f dm = \int_0^1 f dm$. Como $A(n)f \xrightarrow{L_1} Pf$ e como $g \in L_1 \mapsto \int_0^1 g dm$ é um funcional linear contínuo em L_1 , então $\int_0^1 A(n) f dm \to \int_0^1 Pf dm$. Como $\int_0^1 A(n) f dm = \int_0^1 f dm$, segue que para toda $f \in L_1[0,1]$ temos $\int_0^1 f dm = \int_0^1 Pf dm$.

Novamente utilizamos a expressão (9):

$$\bigvee_0^1 P_{\tau^N}^k f \leq \frac{\alpha}{1-\beta}\|f\| + \beta^k \bigvee_0^1 f \text{ , isto é,}$$

$$\bigvee_0^1 P_\tau^{kN} f \leq \frac{\alpha}{1-\beta}\|f\| + \beta^k \bigvee_0^1 f \quad ,$$

para toda $f \in BV[0,1]$ e todo $k \in N$.

Quanto as funções $P_{\tau^0} f, P_{\tau^1} f, \ldots, P_{\tau^{N-1}} f$ podemos obter uma limitação de suas variações da mesma maneira que obtivemos anteriormente para $P f$. Se $1 \leq j \leq N-1$, notemos por b_j o menor comprimento dos intervalos da partição referente à τ^j e por $k_j = \dfrac{\text{máx}|[(\tau^j)^{-1}]''|}{\min|[(\tau^j)^{-1}]'|}$.

Como $\inf|\tau'| = s > 0$, então

$$\bigvee_0^1 P_{\tau^j} f \leq (k_j + 2b_j^{-1}s^{-j})\|f\| + 2s^{-j} \bigvee_0^1 f \ .$$

Podemos, portanto, escolher constantes c_1 e c_2 tais que:

$$\bigvee_0^1 P_{\tau^j} f \leq c_1\|f\| + c_2 \bigvee_0^1 f \ ,$$

para $j = 0,1,\ldots,N-1$.

Dado $n \in N$, dividindo n por N, temos, $n = kN + j$, onde $0 \leq j \leq N-1$. Empregando a expressão (9) e a desigualdade anterior, temos:

$$\begin{aligned}\bigvee_0^1 P_\tau^n f = \bigvee_0^1 P_\tau^{Nk+j} f &= \bigvee_0^1 P_\tau^{nk}(P_\tau^j f)\\ &\leq \frac{\alpha}{1-\beta}\|P_\tau^j f\| + \beta^k \bigvee_0^1 P_\tau^j f\\ &\leq \frac{\alpha}{1-\beta}\|f\| + \beta^k(c_1\|f\| + c_2 \bigvee_0^1 f)\\ &\leq \left(\frac{\alpha}{1-\beta} + c_1\beta^k\right)\|f\| + c_2\beta^k \bigvee_0^1 f \ ,\end{aligned}$$

ou seja, $\bigvee_0^1 P_\tau^n f \leq \left(\frac{\alpha}{1-\beta} + c_1\beta^k\right)\|f\| + c_2\beta^k \bigvee_0^1 f$,

para todo $f \in BV[0,1]$ e todo natural $n = Nk + j$ onde $j = 0,1,\ldots,N-1$.

Então,

$$\limsup_{n\to\infty} \bigvee_0^1 P_\tau^n f \leq \frac{\alpha}{1-\beta}\|f\| \ , \tag{11}$$

portanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\bigvee_0^1 P_{\tau^0} f + \ldots + \bigvee_0^1 P_{\tau^{N-1}} f\right] \leq \frac{\alpha}{1-\beta}\|f\| \ .$$

Se $A(n)f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_\tau^k f$ então $\limsup_{n\to\infty} \overset{1}{\underset{0}{V}} A(n)f \leq \frac{\alpha}{1-\beta}\|f\|$,

para toda $f \in BV[0,1]$. Fazemos $\frac{\alpha}{1-\beta} = c$.

Fixando uma função $f \in BV[0,1]$, dado $\varepsilon > 0$, existe N_ε tal que se $n \geq N_\varepsilon$, então $\overset{1}{\underset{0}{V}} A(n)f \leq c\|f\| + \varepsilon$. Mas, $A(n)f \xrightarrow{L_1} f^*$, pelo Corolário 2, existe f_ε^* , tal que $f_\varepsilon^* \equiv f^*$ (q.s.) e $\overset{1}{\underset{0}{V}} f_\varepsilon^* \leq c\|f\| + \varepsilon$. Pelo corolário 1, existe f^{**} tal que $f^{**} = f^*$ (q.s.) e $\overset{1}{\underset{0}{V}} f^{**} \leq c\|f\|$.

Em relação ao operador $P : L_1[0,1] \to [0,1]$ temos que P é contínuo, pois $\|Pf\| \leq \|f\|$ para toda $f \in L_1[0,1]$. Além disto, para toda $f \in BV[0,1]$, temos que $Pf \in BV[0,1]$ e $\overset{1}{\underset{0}{V}} Pf \leq c\|f\|$.

Pelo corolário 3, concluímos que

$P(L_1[0,1]) \subseteq BV[0,1]$ e $\overset{1}{\underset{0}{V}} Pf \leq c\|f\|$, para toda $f \in L_1[0,1]$.

Este último resultado, ou seja, que para todo $f \in L_1[0,1]$ temos

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f^* \leq c\|f\| ,$$

onde c é uma constante que depende apenas de τ , permite concluir que

$$V = \{f^* | P_\tau f^* = f^*\} \subseteq L_1[0,1]$$

é um subespaço vetorial de dimensão finita.

Considerando

$$\overline{B}_1(0) = \{f^* \in V | \|f^*\| \leq 1\} ,$$

temos $\overset{1}{\underset{0}{V}} f^* \leq c$ e $\|f^*\| \leq 1$, pelo lema 6 $\overline{B}_1(0)$ é compacto em $L_1[0,1]$.

Num espaço normado E , se $\overline{B}_1(0) = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ é compacto então $\dim E < \infty$. Então, $\dim V < \infty$.

Exemplo 1

Mostramos através de um exemplo a existência de uma aplicação r , C^2 por partes, para a qual não é válida a hipótese $\inf|r'| > 1$ e não possue medida invariante absolutamente contínua em relação a Lebesgue. Temos $r(0) = 0$ e $r'(0) = 1$. Provamos que $P_r^n f$ converge em medida para zero.

Digamos que existe uma medida μ invariante por r absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue. Então, pelo Teorema de Radon-Nikodym existe f^* tal que $\forall A \subseteq [0,1]$ mensurável temos $\mu(A) = \int_A f^* dm$.

Neste caso $\mu([0,x]) = \int_0^x f^* dm = \mu(r^{-1}[0,x]) = \int_{r^{-1}[0,x]} f^* dm$ de onde temos $\frac{d}{dx} \int_{r^{-1}[0,x]} f^* dm = f^*$ ou seja $P_r f^* = f^*$.

Vamos provar que qualquer que seja $f \in L^1[0,x]$ a seqüência $P_r^n f$ converge na norma do L^1 para zero. Ora isto nos diz que $f^* \equiv 0$ quase sempre e portanto não existe, excessão a trivial nula, medida como a μ acima.

Primeiramente vamos definir r :

$$r(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} , & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 , & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Para esta aplicação r o operador de Perron-Frobenius computado resulta:

$$P_r f(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_0^{\frac{x}{x+1}} f(s)ds + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x+1}{2}} f(s)ds\right]$$

$$= \frac{1}{(1+x)^2} f\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right) \qquad (1)$$

Seja $f_0 \equiv 1$ e definimos $g_n(x) = xf_n(x)$ onde $f_{n+1} = P_r f_n$.
Neste caso $g_0(x) \equiv x$.

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{(1+x)^2} f_n\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{2} f_n\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right) \qquad (2)$$

$$xf_{n+1}(x) = \frac{1}{1+x}\,\frac{x}{1+x} f_n\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{x}{1+x}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right) f_n\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$g_{n+1}(x) = xf_{n+1}(x) = \frac{1}{1+x} g_n\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{x}{1+x} g_n\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right) \qquad (3)$$

Lema 1

Para todo $n \geq 0$ g_n é função não decrescente e $g_n(x) \geq 0$ $\forall x \in [0,1]$.

Prova:

A verificação da afirmação acima é facilmente realizada por indução. Vamos de fato provar que $g_n'(x) \geq 0$ $\forall x \in [0,1]$. Trivialmente o resultado é válido para $g_0(x) = x$. Suponhamos que o resultado seja válido para todo $n \geq 0$. Então,

$$g_{n+1}'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\left[g_n\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right) - g_n\left(\frac{x}{1+x}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{(1+x)^3} g_n'\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x} g_n'\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right)$$

Como por hipótese $g_n'(x) \geq 0$ então g_n não decresce e como $\frac{x}{1+x} < \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ para todo $x \in [0,1]$ então

$$\left[g_n\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right) - g_n\left(\frac{x}{1+x}\right)\right] \geq 0$$ e disto deduzimos que

$g_{n+1}'(x) \geq 0$.

Temos que $g_0(0) = 0$. Se supomos $g_n(0) = 0$ para todo $n \geq 0$ então $g_{n+1}(0) = 1 \cdot g_n(0) = 0$ pela equação (3). Em resumo,

$g_n(0) = 0$ para todo $n \geq 0$. A conclusão é que g_n é não decrescente e $g_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$.

Observemos que usando a equação (3)

$$\begin{aligned} g_{n+1}(1) &= \frac{1}{2} g_n\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} g_n(1) \\ &\leq \frac{1}{2} g_n(1) + \frac{1}{2} g_n(1) \\ &\leq g_n(1) \end{aligned}$$

logo a seqüência $(g_n(1))$ converge. Digamos que $g_n(1) \to C_o$. Pondo $z_o = 1$ e $z_{k+1} = \frac{z_k}{1+z_k}$, ou seja $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{1}{3}$ ..., $z_k = \frac{1}{k+1}$, e usando a equação (3) novamente concluímos que:

$$g_{n+1}(z_k) = \frac{1}{1+z_k} g_n(z_{k+1}) + \frac{z_k}{1+z_k} g_n\left(\frac{1}{2} + \frac{z_k}{2}\right)$$

Lema 2

As funções g_n convergem uniformemente para c_o em $[\delta,1]$, $\forall \delta > 0$.

Prova:

Novamente vamos nos valer de uma argumentação por indução. Vamos provar que $\forall k \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = c_o$ se $z_k \leq x \leq 1$. O resultado é trivialmente válido se $k = 0$. Suponhamos pois o resultado válido para um certo $k \geq 0$. Já que

$$g_{n+1}(z_k) = \frac{1}{1+z_k} g_n(z_{k+1}) + \frac{z_k}{1+z_k} g_n\left(\frac{1}{2} + \frac{z_k}{2}\right)$$

e desde que $z_k \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z_k$ então

$$c_o = \lim_{n\to\infty} g_{n+1}(z_k) = \frac{1}{1+z_k} \lim_{n\to\infty} g_n(z_{k+1}) + \frac{z_k}{1+z_k} c_o \quad \text{ou}$$

$$c_o = \frac{1}{1+z_k} \lim_{n\to\infty} g_n(z_{k+1}) + \frac{z_k}{1+z_k} c_o \quad \text{ou}$$

$$c_o(1 + z_k) = \lim_{n\to\infty} g_n(z_{k+1}) + z_k c_o \quad ,$$

de onde $\lim_{n\to\infty} g_n(z_{k+1}) = c_0$.

Todavia $z_{k+1} \leq z_k$ e se $z_{k+1} \leq x \leq z_k$ então temos $g_n(z_{k+1}) \leq g_n(x) \leq g_n(z_k)$ e como $g_n(z_{k+1})$; $g_n(z_k) \to c_0$ então $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = c_0$ para todo x , $z_{k+1} \leq x \leq 1$.

De fato, a convergência é uniforme e isto decorre facilmente dos argumentos acima, pois $\lim_{n\to\infty} g_n(1) = c_0$ e $\lim_{n\to\infty} g_n(z_k) = c_0$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in N$ tal que $\forall n \in N$ se $n \geq N_\varepsilon$ então $c_0 - \varepsilon < g_n(1) < c_0 + \varepsilon$ e $c_0 - \varepsilon < g_n(z_k) < c_0 + \varepsilon$. Se $z_k \leq x \leq 1$ então $g_n(z_k) \leq g_n(x) \leq g_n(1)$ e disto concluímos $c_0 - \varepsilon < g_n(x) < c_0 + \varepsilon$. Portanto temos a convergência uniforme em $[z_k, 1]$ das funções g_n e como $z_k \to 0$ se $k \to \infty$ na verdade a convergência é uniforme sobre um intervalo $[\delta, 1]$ se $\delta > 0$.

Lema 3

As funções f_n são não crescentes $\forall x \in [0,1]$ · $f_n(x) \geq 0$ e $\|f_n\| = 1$.

Novamente um argumento por indução. Vamos provar que f_n são não crescentes. O resultado é óbvio para $f_0 = 1$. Suponhamos f_n não crescentes para $n \geq 0$.

Se $0 \leq x < y \leq 1$ então $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y}$ e $\frac{1}{2} + \frac{x}{2} < \frac{1}{2} + \frac{y}{2}$, logo

$$f_n\left(\frac{x}{1+x}\right) \geq f_n\left(\frac{y}{1+y}\right) \quad \text{e}$$

$$f_n\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) \geq f_n\left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2}\right) \quad .$$

Também temos $\frac{1}{(1+x)^2} > \frac{1}{(1+y)^2}$ logo

$$\frac{1}{(1+x)^2} f_n\left(\frac{x}{1+x}\right) \geq \frac{1}{1+y} f_n\left(\frac{y}{1+y}\right) \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{2} f_n\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right) \geq \frac{1}{2} f_n\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{2}\right) .$$

Usando a equação (2) obtemos $f_{n+1}(x) \geq f_{n+1}(y)$. É claro usando a equação (2) e um argumento de indução também obtemos que $f_n \geq 0$.

Já que cada $f_n \geq 0$ então $P_r f_n \geq 0$, como observamos na propriedade (c). Temos $f_o \equiv 1$ então, pela mesma propriedade (c) , $\int_0^1 P_\tau f_o = \int_0^1 f_o = 1$ ou seja $\|f_1\| = 1$.
Este aegumento repetido nos diz que

$$\int_0^1 P_\tau f_1 = \int_0^1 f_1 = 1 \quad \text{ou} \quad \|f_2\| = 1 .$$

Por indução novamente obteríamos que $\forall n \geq 0 \quad \|f_n\| = 1$.

Como temos a convergência uniforme das g_n para c_o em $[\delta,1]$ se $\delta > 0$ então já que $f_n(x) = \frac{g_n(x)}{x}$ se $x \neq 0$ temos a convergência uniforme das f_n para $\frac{c_o}{x}$ em $[\delta,1]$.
Supondo $c_o \neq 0$, podemos escolher um $\delta > 0$ tal que
$\int_\delta^1 \frac{c_o}{x}\, dm > 1$ mas

$$\lim_{n\to\infty} \int_\delta^1 f_n dm = \int_\delta^1 \frac{c_o}{x}\, dm > 1$$

e isto é absurdo pois, acabamos de ver, $\|f_n\| = 1$. Disto só podemos concluir que $c_o = 0$.
Temos na verdade a convergência uniforme das f_n em $[\delta,1]$ se $\delta > 0$ para 0 . Escrito de outra maneira:

$P_r^n 1 \to 0$ uniformemente em $[\delta,1]$ se $\delta > 0$. Fixemos $\delta > 0$.
Seja $f \in L^1[0,1]$ então dado $\varepsilon > 0$ existe φ $\varphi = \sum_{i=1}^{P} c_i X_{J_i}$

onde J_i são intervalos contidos no $[0,1]$ tal que $\int_0^1 |f - \varphi| dm < \frac{\varepsilon}{2}$.

Se escolhemos k positivo tal que $|c_1|,\ldots,|c_p| < k$ podemos determinar um N_ε tal que para todo $n \geq N_\varepsilon$ temos $\int_g^1 P_r^n 1 dm < \frac{\varepsilon}{2pk}$.

Avaliemos $\int_\delta^1 |P_r^n f| dm$.

$$\begin{aligned}
\int_\delta^1 |P_r^n f| dm &= \int_\delta^1 |P_r^n (f - \varphi + \varphi)| dm \\
&\leq \int_\delta^1 |P_r^n (f - \varphi)| dm + \int_\delta^1 |P_r^n \varphi| dm \\
&\leq \int_0^1 |P_r^n (f - \varphi) dm + \int_\delta^1 |P_r^n \varphi| dm \\
&\leq \int_0^1 |f - \varphi| dm + \int_\delta^1 |P_r^n \varphi| dm \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \int_\delta^1 |P_r^n \varphi| dm
\end{aligned}$$

Avaliando $|P_r^n \varphi|$

$$\begin{aligned}
|P_r^n \varphi| &= |P_r^n (\sum_{i=1}^{P} c_i \chi_{J_i})| \\
&\leq \sum_{i=1}^{P} |c_i| . |P_r^n \chi_{J_i}| \\
&\leq \sum_{i=1}^{P} K |P_r^n \chi_{J_i}|
\end{aligned}$$

$$\int_\delta^1 |P_r^n \varphi| dm \leq \sum_{i=1}^{P} K \int_\delta^1 |P_r^n \chi_{J_i}| dm$$

Como $P_r f(x) \geq 0$ se $f(x) \geq 0$, então se $f(x) \leq g(x)$ então $P_r f(x) \leq P_r g(x)$.

De onde concluí-se que $P_r \chi_{J_i}(x) \leq P_r 1$.

$$\int_{\delta}^{1} |P_r^n \varphi| dm \leq \sum_{i=1}^{P} K \int_{\delta}^{1} P_r^n 1 dm$$

$$\leq \sum_{i=1}^{P} \left(\frac{\varepsilon}{2pk}\right) = \frac{\varepsilon}{2}$$

se $n \geq N_\varepsilon$.

Concluímos então

$$\int_{\delta}^{1} |P_r^n f| dm < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n \geq N_\varepsilon$$

para $\delta > 0$ fixado.

Se $f^* = P_r f^*$ então $\int_{\delta}^{1} |f^*| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon$

de onde temos $f^* = 0$ quase sempre em [0,1].

SEÇÃO 4

No início da demonstração do Teorema A a composição da aplicação τ n vezes, obtendo $\phi = \tau^N$, foi feita de modo a ter $|\tau'| > 2$. A condição imposta, de maneira que $|\tau'| > 2$, se expressou exigindo que $\inf|\tau'| > 1$. Substituindo a condição $\inf|\tau'| > 1$ pela existência de um $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\inf|(\tau^{n_0})'| > 1$ se seguirá o Teorema.

<u>Teorema B</u>

Seja $\tau : [0,1] \to [0,1]$ C^2 por partes. Existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\inf|(\tau^{n_0})'| > 1$ então para toda $f \in L_1[0,1]$ a seqüência $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_\tau^k$ converge em $L_1[0,1]$ para uma função $f^* \in L_1[0,1]$ e

1) Se $f \geq 0$ então $f^* \geq 0$.

2) $\int_0^1 f^* dm = \int_0^1 f dm$.

3) $P_\tau f^* = f^*$.

4) $\bigvee_0^1 f^* \leq c\|f\|$.

A quarta conclusão do Teorema A dependeu ainda da variação limitada de $P_\tau f, P_{\tau^2} f, \ldots$, etc e estas não podem ser obtidas a menos que tenhamos $\inf|\tau'| > 0$. Como existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\inf|(\tau^{n_0})'| > 1$ então $\inf|\tau'| > 0$.
No contra-exemplo

$$r(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x}, & 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ 2x - 1, & \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$\frac{d}{dx} r^n(0) = 1$ e portanto fora do conjunto de aplicações, agora mais amplo, para os quais nossos resultados são válidos.

Seja $\phi : [0,1] \to [0,1]$ contavelmente C^2 por partes, sejam $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$,etc os intervalos da partição relativa a aplicação . Para demonstrar o Teorema C exigiremos que $(\Delta_i) = [0,1]$, exceto, possivelmente, para um número finito de intervalos Δ_i . Entretanto, esta condição pode ser válida para ϕ e não ser válida para ^{2}, como o seguinte exemplo mostra.

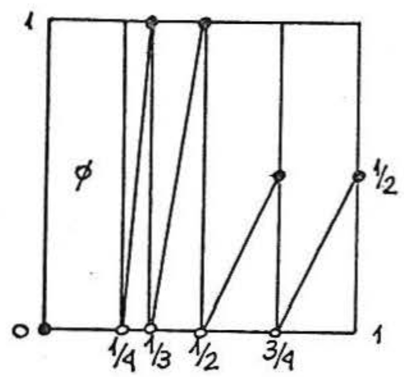
A aplicação $: [0,1] \to [0,1]$ é definida por:

$\phi(0) = 0$

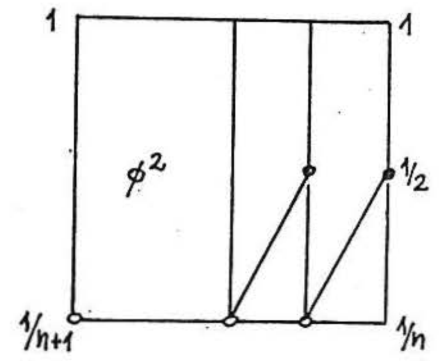
$\phi(x) = n(n+1)(x - \frac{1}{n+1})$, para $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$
e $n = 2,3,\ldots$,etc

$\phi(x) = 2(x - \frac{1}{2})$, para $\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4}$

$\phi(x) = 2(x - \frac{3}{4})$, para $\frac{3}{4} < x \leq 1$.



Não é difícil observar que ^{2} não está submetida a condição acima. A imagem dos intervalos $(\frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{n+1}, \frac{3}{4n(n+1)} + \frac{1}{n+1}]$ e $(\frac{3}{4n(n+1)} + \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, para n=2,3,... por ^{2} é o intervalo $(0,\frac{1}{2}]$.



Para conduzir a demonstração do Teorema C como a demonstração do Teorema A, a condição acima recairia sobre alguma iterada ϕ^N de ϕ e não basta exigi-la de ϕ apenas.
No Teorema A, as iteradas foram necessárias para obter uma aplicação, no caso ϕ^N, com o ínfimo da derivada maior que 2. No Teorema C como não vamos iterar exigimos $\inf|\phi'| > 2$.

Teorema C

Seja $\;:[0,1]\to[0,1]$ contavelmente C^2 por partes tal que $\inf|\phi'|>2$ e $\sup|\phi''|<\infty$.
Suponhamos que $\phi_i(\Delta_i)=[0,1]$ exceto para um número finito de intervalos Δ_i. Então para toda $f\in L_1[0,1]$ a seqüência $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k f$ converge em $L_1[0,1]$ para uma função $f^*\in L_1[0,1]$ e

1) Se $f\geq 0$
2) $\int_0^1 f^* dm = \int_0^1 f dm$
3) $P f^* = f^*$
4) A função f^* é de variação limitada e existe uma constante c independente da f inicial, tal que

$$\bigvee_0^1 f^* \leq c\|f\| \quad .$$

Demonstração:

Devemos fazer algumas modificações na demonstração do Teorema A. De fato, as hipóteses acima foram propostas de maneira que a demonstração do Teorema A possa ser empregada.

A exigência que $\sup|\phi''|<\infty$ nasce da necessidade de ter $K=\dfrac{\sup|(\phi^{-1})''|}{\inf|(\phi^{-1})'|}<\infty$ como na página 40.

A exigência que apenas um número finito de intervalos $[b_{i-1},b_i]$ tenhamos $\phi_i[b_{i-1},b_i]\neq[0,1]$ surge da necessidade, para o caso finito, de tomarmos b^{-1}, onde $b=\min_i (b_i-b_{i-1})$ na equação (4).
Computando o operador de Perron-Frobenius para ϕ vamos

inicialmente supor $f \in L_\infty[0,1]$ e $f \geq 0$:

$$P_\phi f(x) = \frac{d}{dx} \int_{\phi^{-1}[0,x]} f(s)ds$$

$$P_\phi f(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_{\phi^{-1}[0,x]\cap[b_0,b_1]} f(s)ds + \dots + \int_{\phi^{-1}[0,x]\cap[b_{i-1},b_i]} f(s)ds + \dots\right]$$

Se $\phi_i[b_{i-1},b_i] = [c_{i-1},c_i']$ e χ_i a função característica de $[c_{i-1},c_i']$ então

$\int_0^1 |(\phi_i^{-1})(x)|\chi_i(x)dx = b_i$ então $\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 |(\phi_i^{-1})'(x)|\chi_i(x)dx = 1$

ou seja, $\int_0^1 (\sum_{i=1}^{\infty} |(\phi_i^{-1})'(x)|\chi_i(x)dx = 1$, pelo Teorema da Convergência Monótona.

Se definimos por M o supremo essencial de uma função $f \in L_\infty[0,1]$ então

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^{\infty} f(\phi_i^{-1}(x))|(\phi_i^{-1})'(x)|\chi_i(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 f(\phi_i^{-1}(x))|(\phi_i^{-1})'(x)|\chi_i(x)dx$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} M \int_0^1 |(\phi_i^{-1})'(x)|\chi_i(x)dx$$

$$\leq M.$$

Portanto, $G(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f(\phi^{-1}(x))|(\phi_i^{-1})'(x)|\chi_i(x)$ pertence ao espaço $L_1[0,1]$.

Se definirmos $F_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\phi^{-1}[0,x]\cap[b_{i-1},b_i]} f(s)ds$ e

$F(x) = \int_{\phi^{-1}[0,x]} f(s)ds$ temos $F_n(x) \to F(x)$ e $F(x) \leq \|f\|$.

Se $F_n'(x) = \sum_{i=1}^{n} f(\phi_i^{-1}(x)).|(\phi_i^{-1})'(x)|\chi_i(x)$ então

$F_n'(x) \to G(x)$.

$$\int_0^x F_n'(s)ds = [F_n(x) - F_n(0)] \to [F(x) - F(0)] \ .$$

Pelo Teorema da convergência dominada

$\int_0^x F_n'(s)ds \to \int_0^x G(s)ds$ então $F(x) - F(0) = \int_0^x G(s)ds$,

logo $F'(x) = G(x)$ (q.s.).

Portanto,

$$\frac{d}{dx}\int_{\phi^{-1}[0,x]} f(s)ds = \sum_{i=1}^{\infty} f(\phi_i^{-1}(x)).|(\phi_i^{-1})'(x)|\chi_i(x) \ (q.s.)$$

se $f \in L_\infty[0,1]$ e $f \geq 0$.

Por outro lado se $f \in L_\infty[0,1]$ escrevemos $f = f^+ - f^-$ e temos

$$P_\phi f(x) = P_\phi f^+(x) - P_\phi f^-(x) \quad \text{ou}$$

$$P_\phi f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f^+(\phi_i^{-1}(x)).|(\phi_i^{-1})'(x)|\chi_i(x) - \sum_{i=1}^{\infty} f^-(\phi_i^{-1}(x)).|(\phi_i^{-1})'(x)|\chi_i(x)$$

logo para toda $f \in L_\infty[0,1]$ temos

$$P_\phi f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f(\phi_i^{-1}(x)).|(\phi_i^{-1})'(x)|\chi_i(x) \ (q.s.)$$

Vamos usar a expressão acima para o caso de uma função f de variação limitada.

Seja $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ uma partição do $[0,1]$.

Notando $f(\phi_i^{-1}(x))|(\phi_i^{-1})'(x)|\chi_i(x)$ por $H_i(x)$ temos

$$P_\phi f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} H_i(x) \ .$$

$$\sum_{i=1}^{n} |P_\phi f(t_k) - P_\phi f(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{\infty} H_i(t_k) - \sum_{i=1}^{\infty} H_i(t_{k-1})\right|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{\infty} (H_i(t_k) - H_i(t_{k-1}) \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} |H_i(t_k) - H_i(t_{k-1})|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} |H_i(t_k) - H_i(t_{k-1})|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \overset{1}{\underset{0}{V}} H_n$$

Portanto, $\overset{1}{\underset{0}{V}} P_\phi f \leq \sum_{i=1}^{\infty} \overset{1}{\underset{0}{V}} H_n$.

Digamos que os n's para os quais $\phi_i[b_{i-1},b_i] = [c_{i-1},c_i] \neq$ $\neq [0,1]$ sejam $n_1,n_2,\ldots,n_\ell$.

Como na expressão (2) do Teorema temos:

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} P_\phi f \leq \sum_{n_1,\ldots,n_\ell} \overset{c_i}{\underset{c_{i-1}}{V}} (f \circ \phi_i^{-1}) |(\phi_i^{-1})'| + \sum_{n_1,\ldots,n_\ell} s^{-1}(|f(b_{i-1})| + |f(b_i)| +$$

$$+ \sum_{n \neq n_1,\ldots,n_\ell} \overset{1}{\underset{0}{V}} (f \circ \phi_i^{-1}).|(\phi_i^{-1})'|$$

Tomando $K = \dfrac{\sup|(\phi^{-1})''|}{\inf|(\phi^{-1})'|}$, obtemos

$$\overset{c_i}{\underset{c_{i-1}}{V}} (f \circ \phi_i^{-1}).|(\phi_i^{-1})'| \leq \int_{b_{i-1}}^{b_i} |f| dm + s^{-1} \overset{b_i}{\underset{b_{i-1}}{V}} f$$

como na expressão (3) do Teorema A.

Nesta expressão não importa se $[c_{i-1},c_i] \neq [0,1]$ ou não.

Servindo para majorar tanto

$$\sum_{n_1,\ldots,n_\ell} \overset{c_i}{\underset{c_{i-1}}{V}} (f \circ \phi_i^{-1}) |(\phi_i^{-1})'| \quad \text{quanto} \quad \sum_{n \neq n_1,\ldots,n_\ell} (f \circ \phi_i^{-1}) |(\phi_i^{-1})'|$$

Quanto as parcelas $\sum_{n_1,\dots,n_\ell} s^{-1}(|f(b_{i-1})| + |f(b_i)|)$

tomando $b = \min(b_{n_j} - b_{n_{j-1}})$ para $j = 1,\dots,\ell$ obtemos

$$\sum_{n_1,\dots,n_\ell} s^{-1}(|f(b_{i-1})| + |f(b_i)|) \leq s^{-1} \bigvee_0^1 f + 2s^{-1}b^{-1} \int_0^1 |f|dm$$

Como na expressão (5) do Teorema A.

Reunindo estes resultados temos

$$\bigvee_0^1 P_\phi f \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left[K \int_{b_{i-1}}^{b_i} |f|dm + s^{-1} \bigvee_0^1 f + 2b^{-1}s^{-1} \int_0^1 |f|dm\right.$$

ou $\bigvee_0^1 P_\phi f \leq (K + 2b^{-1}s^{-1}) \int_0^1 |f|dm + 2s^{-1} \bigvee_0^1 f$.

Se $\alpha = (K + 2b^{-1}s^{-1})$ e $\beta = 2s^{-1}$ então obtemos a expressão

$\bigvee_0^1 P\ f \leq \alpha\|f\| + \beta \bigvee_0^1 f$, ou seja, a expressão (7) do Teorema

A. Desta expressão podemos obter que, para qualquer $k \geq 1$,

$$\bigvee_0^1 P_\phi^k f \leq \alpha\|f\|[1 + \beta + \dots + \beta^{k-1}] + \beta^k \bigvee_0^1 f \quad .$$

Como $\beta < 1$, então

$$\bigvee_0^1 P_\phi^k f \leq \alpha\|f\|(1 - \beta)^{-1} + \bigvee_0^1 f \text{ , isto é,}$$

a expressão (9) do Teorema A.

Se definirmos o conjunto

$$A = \{P_\phi^k f \mid k = 0,1,2,\dots\}$$

como

$$\|P_\phi^k f\| \leq \|f\| \quad \text{e} \quad \bigvee_0^1 P_\phi^k f \leq \frac{\alpha}{1-\beta}\|f\| + \bigvee_0^1 f \quad ,$$

para toda a função de variação limitada e todo $k \in \mathbf{N}$, então A é relativamente compacto, pelo lema 6.

Estamos na afirmação (10) do Teorema A.

A partir deste ponto, para obter as conclusões 1), 2) e 3) basta seguir a demonstração do Teorema A.

Em relação à conclusão 4), a argumentação do Teorema A é desnecessária na sua etapa inicial.

retornando à desigualdade

$$\bigvee_0^1 P_\phi^k f \leq \alpha\|f\|[1+\ldots+\beta^{k-1}]+\beta^k \bigvee_0^1 f$$

da página anterior temos

$\bigvee_0^1 P_\phi^k f \leq \frac{\alpha}{1-\beta}\|f\|+\beta^k \bigvee_0^1 f$, para toda $f \in BV[0,1]$ e $k \in \mathbf{N}$.

Então, $\limsup\limits_{k\to\infty} \bigvee_0^1 P_\phi^k f \leq \frac{\alpha}{1-\beta}\|f\|$, para toda $f \in BV[0,1]$ e todo $k \geq 1$. Estamos na expressão (11) do Teorema A. O resto prossegue como naquele Teorema.

Se exigirmos que $\phi(\Delta_i)=[0,1]$, para $i=1,2,\ldots$ podemos iterar para obter N tal que $\inf|(\phi^N)'|>2$. Neste caso reunindo a argumentação dos Teoremas A,B e C obtemos o Teorema D.

Teorema D

Seja $\phi:[0,1]\to[0,1]$ contavelmente C^2 por partes. Existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\inf|(\phi^{n_0})'|>1$ e $\sup|\phi''|<\infty$. Suponhamos que para todo intervalo Δ_i da partição relativa à temos $(\Delta_i)=[0,1]$. Então, valem as mesmas conclusões dos Teoremas A,B e C.

É neste caso que se enquadra a aplicação de Gauss, pois $|(\varphi^2)'|>2$.

Exemplo 2

Como anteriormente comentamos não podemos abrir mão da condição que assegura, exceto num número finito de intervalos da partição, ser a imagem por τ_i do intervalo Δ_i igual ao intervalo $[0,1]$.

De fato, existem aplicações $\tau : [0,1] \to [0,1]$ contavelmente C^2 que não possuem medida invariante absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue.

Como observamos antes em (H) se τ possue uma medida invariante absolutamente contínua em relação a Lebesgue então P_τ possue um ponto fixo $f \neq 0$.

Seja $\tau(x) = 2x + \frac{1}{2}$, $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$

$\tau(x) = 2(x - \frac{1}{4}) + \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}$

para $n = 1,2,\ldots$

$$\tau(x) = 2(x-1+\frac{1}{2^n}) + 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \ , \quad 1 - \frac{1}{2^n} < x \leq 1 - \frac{3}{2^{n+2}}$$

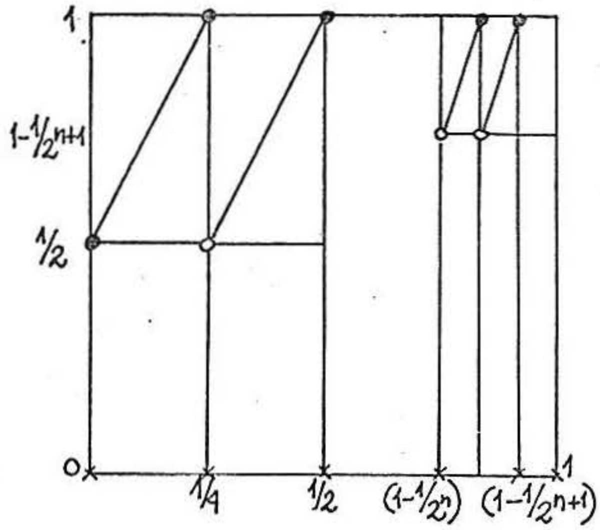
$$\tau(x) = 2(x-1+\frac{3}{2^{n+2}}) + 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \ , \quad 1 - \frac{3}{2^{n+2}} < x \leq 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$\tau(1) = 1$

De maneira geral temos

$1 - \frac{1}{2^n} \leq \tau^n(x) \leq 1$.

Portanto, $P_{\tau^n} f(x) = 0$ se $0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{2^n}$. Se f é um ponto fixo de P_τ então $P_{\tau^n} f = f$(q.s.), para todo $n \in \mathbf{N}$, logo $f \equiv 0$(q.s.).



Podemos mostrar algo mais geral.

Seja $h:[0,1]\to[0,1]$ crescente contínua e tal que com exceção do 0 e do 1 temos $h(x)>x$.
Seja $x\in(0,1)$, então $h(x)<h^2(x)<h^3(x)<\ldots<1$, onde $h^n(x)=h(h(\ldots(h(x))\ldots))$ representa a composição de h com ela mesma n vezes.

Naturalmente $h^n(x)\to\alpha\in(0,1]$. O limite α tem que ser 1 pois $h^{n+1}(x)\to h(\alpha)$ então $h(\alpha)=\alpha$, logo $\alpha=1$. Disto se conclui que se $1>\varepsilon>0$ e $\delta>0$, então existe n_0 tal que $h^{n_0}(\delta)>1-\varepsilon$, logo para todo $x\geq\delta$ temos $h^{n_0}(x)>1-\varepsilon$.

<u>Teorema 2</u>

Seja $\tau:[0,1]\to[0,1]$ contavelmente C^2 por partes tal que $\tau(x)\geq h(x)$ $\forall x\in[0,1]$. Então, para toda $f\in L_1[0,1]$, $P_\tau^n f\to 0$ em medida.

<u>Demonstração</u>:

Seja $f\in L_1[0,1]$ e $f\geq 0$. Definindo

$\phi_n(x)=\int_{\tau^{-n}[0,x]} f(s)ds$ então ϕ_n é absolutamente contínua e não decrescente, logo $'_n\geq 0$ (q.s.).

Na verdade $P_\tau^n f(x)=P_{\tau^n}f(x)=\phi_n'(x)$.

Sejam $\eta>0$ e $\varepsilon>0$. Como $f\in L_1[0,1]$ existe $\delta>0$ tal que se $m(E)<\delta$ então $\int_E f<\eta$. Sendo

$\tau(x)\geq h(x)$ então $\tau^n(x)\geq h^n(x)$ e portanto existe n_0 tal que se $n\geq n_0$, $\tau^n(x)\geq 1-\varepsilon$, para todo $x\in[\delta,1]$, isto é,

$\tau^{-n}([0,1-\varepsilon]) \subseteq [0,\delta]$, qualquer que seja $n \geq n_0$.

Segue que

$$\int_0^{1-\varepsilon} \phi_n'(x)\,dx = \phi_n(1-\varepsilon) - \phi_n(0) = {}_n(1-\varepsilon) \leq \int_0^\delta f < \eta$$

para todo $n \geq n_0$.

Se $f \in L_1[0,1]$ escrevemos $f = f^+ - f^-$ e como $|P_\tau^n f| = |P_\tau f^+ - P_{\tau^n} f^-| \leq P_\tau^n f^+ + P_\tau^n f^-$ aplicando o raciocínio anterior para f^+ e f^- concluímos que qualquer que seja $f \in L_1[0,1]$ para todo $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$ existe n_0 tal que $\int_0^{1-\varepsilon} |P_\tau^n f(x)|\,dx < \eta$, qualquer que seja $n \geq n_0$.

Dados $\eta > 0$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários existe n_0 tal que se $n \geq n_0$ $\int_0^{1-\frac{\varepsilon}{2}} |P_\tau^n f|\,dm < \eta^2$, logo

$$m(\{x \in [0,1-\tfrac{\varepsilon}{2}] \,|\, |P_\tau^n f(x)| \geq 2\eta\}) < \frac{\eta}{2} \;,$$

portanto

$$m(\{x \in [0,1] \,|\, |P_\tau^n f(x)| \geq 2\eta\}) < \frac{\eta}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;.$$

Logo, tomando $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$, concluímos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $m(\{x \in [0,1] \,|\, |P_\tau^n f(x)| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon$, ou seja, $P_\tau^n f \to 0$ em medida. Disto deduzimos a existência de uma subseqüência $P_\tau^{n_k} \to 0$ (q.s.) .

Se f^* é ponto fixo de P_τ então $P_\tau^{n_k} f^* = f^* = 0$ (q.s.).

REFERÊNCIAS

[1] DUNFORD, N. & SCHWARTZ, J.T. General Theory. In ______ *Linear Operators*. New York, N.Y., Interscience, 1958. V.1.

[2] HENSTOCK, Ralph. *Linear Analysis*. Londres, Butterworth, 1967.

[3] LASOTA, A. & YORKE, J.A. On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Transactions of American Mathematical Society*. Providence, R.I., *186*: 481-488, dec. 1973.

[4] MAÑÉ RAMIREZ, Ricardo. *Introdução à Teoria Ergódica*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983.