UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

SOLUÇÕES DINÂMICAS, DESACOPLAMENTO E APROXIMAÇÃO EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS MATRICIAIS DE ORDEM SUPERIOR *

Elisabeta D'Elia Gallicchio

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Julio Cesar Ruiz Claeyssen, apresentada ao Instituto de Matemática da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

* Trabalho parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Porto Alegre

1987

Dedico à
memória de meus pais

Ada e Luiz Geraldo

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Julio Cesar Ruiz Claeyssen, pela orientação, apoio e acesso a seus trabalhos de pesquisa;

Aos Professores Ada e Claus Ivo Doering, pelo incentivo durante o curso;

A Universidade de Caxias do Sul, pela inclusão no Programa Institucional de Capacitação de Docentes (UCS/PICD/CAPES).

R E S U M O

Um tratamento operacional, para as equações diferenciais lineares de ordem superior com coeficientes matriciais, é dado em termos da solução dinâmica. Tal solução é associada à função de transferência da equação e possui propriedades intrínsecas. Os resultados são estendidos ao caso de equações em diferenças. Para equações de segunda ordem, em particular, é considerado o problema do desacoplamento e aproximação dos coeficientes.

A B S T R A C T

An operational treatment of higher-order linear differential equations with matrix coefficients is given in terms of the dynamical solution. This latter is associated with the transfer function enjoys intrinsic properties . The results are extended to the case of difference equations. For second-order equations, in particular, it is considered the decoupling problem and the approximation of the coefficients.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

O Método Operacional em Equações Lineares Escalares de Ordem Superior

1.1 - Introdução

Consideremos um sistema, ou dispositivo físico, regido pela equação diferencial linear

$$u^{(n)}(t) + a_1 u^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}u'(t) + a_n u(t) = f(t) \quad , \qquad (1)$$

onde os coeficientes a_j , $j = 1,2,\ldots,n$, são constantes escalares. A função $f(t)$ é contínua por partes para $t \geq 0$.

Usualmente, a literatura tecnológica refere-se: à função $f(t)$ como *entrada* (input) e à $u(t)$ como *saída* (output) do sistema; às funções $u(t), u'(t), \ldots, u^{(n-1)}(t)$ denominando-as como *variáveis de estado* (state variables) ; aos valores das variáveis de estado no tempo t_0 , como o *estado do sistema* no tempo t_0 .

Sabe-se que se $f(t)$ for contínua, a saída $u(t)$ pode ser determinada de maneira única, conhecendo o estado inicial do sistema; digamos que em $t = 0$ estes valores são

$$u_0 = u(0) \quad , \quad u_0' = u'(0), \ldots, u_0^{(n-1)} = u^{(n-1)}(0) \qquad (2)$$

Ressalvamos que, se a entrada possuir um salto no instante $t = T$, então entender-se-á como solução de (1),(2) a função obtida por um processo que descreveremos a seguir. Determina-se a saída de (1),(2) até o tempo $t = T$ e prossegue-se para $t \geq T$, estabelecendo a saída de (1) com o estado inicial $u(T^-),\ldots,u^{(n-1)}(T^-)$. É claro que esta solução terá sua n-ésima derivada descontínua em $t = T$. Procede-se de modo similar, no caso em que a entrada possua mais saltos.

No que segue, nos propomos determinar duas fórmulas para a saída $u(t)$. Inicialmente em termos de uma solução particular e, após, como uma integral de contorno. Para tanto, utilizaremos o cálculo operacional da Transformada de Laplace.

1.2 - O conceito de Solução Dinâmica

Das equações (1) e (2), decorre a *equação operacional*,[15],

$$\Delta(s)U(s) = Q(s) + F(s) \qquad , \tag{3}$$

onde

$$\Delta(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n \tag{4}$$

é o polinômio característico da equação homogênea associada a (1); $Q(s)$ é o polinômio de grau $\partial Q \leq n - 1$ dado por

$$Q(s) = \alpha_0 s^{n-1} + \alpha_1 s^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-2}s + \alpha_{n-1} \tag{5}$$

com coeficientes

$$\alpha_j = \sum_{k=0}^{j} a_{j-k} u^{(k)}(0) \quad , \qquad a_0 = 1 \ . \tag{6}$$

Aqui $U(s)$ e $F(s)$ denotam as Transformadas de Laplace da saída e da entrada respectivamente. De fato, supomos que $f(t)$ possui transformada. Tal restrição será eliminada após obtermos a primeira fórmula para a saída.

Segue de (3) que

$$U(s) = D(s)Q(s) + D(s)F(s) \quad , \tag{3)'$$

onde

$$D(s) = \frac{1}{\Lambda(s)} \tag{7}$$

é denominada a *função de transferência* do sistema descrito por (1). Observemos que $D(s)$ é a transformada da saída do sistema com entrada zero ($f \equiv 0$) e com estado inicial de modo que $Q(s) \equiv 1$. Mais precisamente, $D(s)$ é a transformada da solução do problema inicial homogêneo

$$\begin{aligned} &u^{(n)}(t) + a_1 u^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n u(t) = 0 \\ &u^{(n-1)}(t) = 1 \ , \ u(0) = u'(0) = \ldots = u^{(n-2)}(0) = 0 \ . \end{aligned} \tag{8}$$

A solução do problema (8) será denominada a *solução dinâmica* do sistema e denotada por $D(t)$. Em particular, para a equação de segunda ordem

$$u'' + bu' + au = 0 \quad ,$$

que descreve o movimento de uma massa, sujeita a forças lineares elásticas e de atrito, obtemos que a solução dinâmica corresponde ao deslocamento da massa desde uma posição de equilíbrio ($D(0) = 0$) e com empuxo unitário ($D'(0) = 1$).

Decorre de (3)' que a saída $u(t)$ é dada por

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}(D(s)Q(s)) + \int_0^t D(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad , \qquad (8)'$$

onde o segundo termo foi obtido por convolução. Para obter a transformada inversa de $D(s)Q(s)$, usaremos o procedimento ilustrado a seguir. Levando em consideração as condições iniciais da solução dinâmica e as propriedades da transformada para derivadas, segue que

$$\mathcal{L}(D^{(j)}(t)) = s^j\mathcal{L}(D(t)) \quad , \quad j = 0,1,\dots,n-1 \quad ,$$

que implica

$$\mathcal{L}^{-1}(D(s)Q(s)) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \mathcal{L}^{-1}(s^{n-j-1}D(s)) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j D^{(n-j-1)}(t)$$

Deste modo, em termos da solução dinâmica, resulta

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j D^{(n-j-1)}(t) + \int_0^t D(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad , \qquad (9)$$

onde os coeficientes α_j são dados por (6). A fórmula, assim obtida, nos diz que a saída $u(t)$ do sistema depende exclusivamente *dos valores da solução dinâmica e da entrada, no intervalo* $0 \le \tau \le t$, *bem como do estado inicial do sistema e do estado da solução dinâmica no tempo* t.

Além disso, a dependência, em relação à entrada e ao estado inicial (subtendida nos coeficientes α_j), é linear.

Observemos que a saída

$$u(t) = \int_0^t D(t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{10}$$

corresponde ao estado inicial

$$u(0) = u'(0) = \ldots = u^{(n-1)}(0) = 0 \quad .$$

Nos referiremos a (10) como a *resposta livre* do sistema (1).

A verificação da solução (9) pode ser feita por simples substituição na equação (1) do sistema, conferindo os valores iniciais. É importante ressaltar que a fórmula é válida para entradas contínuas ou com saltos, não necessariamente de ordem exponencial.(1)

1.3 - A Determinação da Solução Dinâmica pelo Método de Titchmarsh

Agora nosso propósito é obter a saída como uma integral de contorno. Para tanto, faremos uso do método devido a Titchmarsh [6] que utiliza a fórmula integral de inversão dada por

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}G(\lambda)d\lambda \quad , \qquad G = \mathcal{L}(g) \quad ,$$

onde γ é uma constante maior que a parte real de todas as singularidade de $G(\lambda)$.

(1) Dizemos que (x) é de ordem exponencial α (constante) se $|\phi(x)| < Ke^{\alpha x}$, para $0 \leq x < \infty$, com $K > 0$ constante.

Esta fórmula é válida sobre certas hipóteses, e, decorre do Teorema de Fourier-Mellin. Entretanto, nós seguiremos um caminho indireto. Estabeleceremos que tal integral de linha infinita é bem definida e, além disso, pode ser reduzida a uma integral de contorno, com o auxílio do Lema de Jordan. Após, procederemos a verificar que com uma integral de contorno de fato obtemos a solução do problema (1), (2).

Lema de Jordan

Sejam $0 < \gamma < R_0$ e $c, k > 0$ constantes. Denotemos, para cada $R > R_0$ por $\Gamma_R = \widehat{BCA}$, o arco do círculo de raio R e centro 0 determinado por $B = \gamma + i\delta$, $A = \gamma - i\delta$ e $C = -R$, onde $\delta = +\sqrt{R^2 - \gamma^2}$ (veja figura).

Se $|\varphi(x)| \leq cR^{-k}$ para cada $\lambda = Re^{i\theta}$ com $-\pi \leq \theta \leq \pi$ e $R > R_0$ então, para $t > 0$, temos

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R} e^{\lambda t} \varphi(\lambda) d\lambda = 0 .$$

Demonstremos este lema.

Dados os arcos BB' e $B'C$, tomemos as integrais $I_{BB'}$ e $I_{B'C}$ de $e^{\lambda t}\varphi(\lambda)$ sobre os mesmos.

Consideremos $\alpha = \arccos(\gamma/R)$, para BB'.

Então

$$|I_{BB'}| \leq c\,R^{-k+1}\,e^{\gamma t}\int_{\alpha}^{\pi/2} d\theta = c\,R^{-k+1}e^{\gamma t}\,\mathrm{arc\,sen}(\gamma/R) \quad .$$

Assim,

$$\lim_{R\to\infty} |I_{BB'}| = 0 \quad .$$

Por outro lado, para $B'C$, lembrando que

$$1 < \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\theta} < \frac{2}{\pi} \quad , \qquad \text{se} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad ,$$

segue que

$$|I_{B'C}| \leq c\,R^{-k+1}\int_{\pi/2}^{\pi} e^{Rt\cos\theta}\,d\theta$$

$$= c\,R^{-k+1}\int_{0}^{\pi/2} e^{-Rt\,\mathrm{sen}\,\theta}\,d\theta$$

$$\leq c\,R^{-k+1}\int_{0}^{\pi/2} e^{-2Rt\theta/\pi}\,d\theta$$

$$\leq \frac{\pi c R^{-k}}{2t} \quad .$$

Desta forma,

$$\lim_{R\to\infty} |I_{B'C}| = 0 \quad .$$

Sobre os arcos CA' e A'A, as integrais são calculados de modo similar.

Consideremos (8)' e denotemos

$$u_1(t) = \mathcal{L}^{-1}(D(s)Q(s)) \quad .$$

Do Teorema da Inversão para a Transformada de Laplace, devemos ter, para γ constante maior que a parte real de todas as singularidades de $D(\lambda)Q(\lambda)$, que

$$u_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} D(\lambda)Q(\lambda)d\lambda$$

Agora, sendo $Q(\lambda)$ e $\Lambda(\lambda)$ polinômios em λ com $\partial Q \leq \partial\Delta - 1$, temos que a função meromorfa

$$\varphi(\lambda) = \frac{Q(\lambda)}{\Lambda(\lambda)} = D(\lambda)Q(\lambda)$$

satisfaz as condições do lema. Deste modo, se Γ é um contorno que contém no seu interior todos os zeros de $\Lambda(\lambda)$, teremos, usando a notação do enunciado do lema,

$$\int_\Gamma e^{\lambda t}\varphi(\lambda)d\lambda = \int_{\widehat{ABCA}} e^{\lambda t}\varphi(\lambda)d\lambda$$

$$= \int_{\overline{AB}} e^{\lambda t}\varphi(\lambda)d\lambda + \int_{\widehat{BCA}} e^{\lambda t}\varphi(\lambda)d\lambda \quad ,$$

bastando para isto tomar $0 < \gamma < R_0$ suficientemente grandes (de modo que Γ é homotópica a $\widehat{ABCA}$ no complementar dos zeros de $\Delta(\lambda)$) . Segue-se, pelo lema de Jordan, que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma e^{\lambda t} \frac{Q(\lambda)}{\Delta(\lambda)} d\lambda = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{ABCA}} e^{\lambda t}\varphi(\lambda)d\lambda =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{AB}} e^{\lambda t}\varphi(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \frac{Q(\lambda)}{\Delta(\lambda)} d\lambda,$$

o que mostra que esta integral de linha é uma expressão bem definida.

Mostraremos, a seguir, que a função

$$u_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma e^{\lambda t} D(\lambda) Q(\lambda) d\lambda$$

satisfaz $\Delta(d/dt)u_1 = 0$ e as condições iniciais

$$u_1(0) = u_0 \ , \ u_1'(0) = u_0', \ldots, u_1^{(n-1)}(0) = u_0^{(n-1)} \quad .$$

Temos que $u_1(t)$ é de classe C^∞ com derivadas

$$u_1^{(m)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \lambda^m e^{\lambda t} D(\lambda) Q(\lambda) d\lambda \tag{11}$$

Portanto, devemos estabelecer que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \lambda^m D(\lambda) Q(\lambda) d\lambda = u_0^{(m)}$$

para cada $m = 0, 1, \ldots, n-1$. De fato, desenvolvendo em potências ascendentes de $\frac{1}{s}$, vemos que

$$\frac{Q(s)}{\Delta(s)} = \frac{u_0}{s} + \frac{u_0'}{s^2} + \ldots + \frac{u_0^{(n-1)}}{s^n} + O\left[\frac{1}{s^{n+1}}\right] \quad .$$

Utilizando o contorno $\Gamma_R : \lambda = Re^{i\theta}$, com R suficientemente grande, o resultado segue de

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \lambda^m D(\lambda) Q(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} \lambda^m \frac{Q(\lambda)}{\Delta(\lambda)} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{n-1} \oint_{\Gamma_R} u_0^{(j)} \lambda^{(m-j-1)} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} O\left(\frac{1}{\lambda^{n+1-m}}\right) d\lambda$$

$$= u_0^{(m)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} \frac{1}{\lambda} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} O\left(\frac{1}{\lambda^{n+1-m}}\right) d\lambda$$

$$= u_0^{(m)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} O\left(\frac{1}{\lambda^{n+1-m}}\right) d\lambda \quad ,$$

já que, o segundo termo à direita tende a zero, quando R tende ao infinito.

Por outro lado, temos de (11)

$$\Lambda(d/dt)u_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \Lambda(d/dt)e^{\lambda t}D(\lambda)Q(\lambda)d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} e^{\lambda t}Q(\lambda)d\lambda = 0 \quad ,$$

pelo teorema de Cauchy, [1].

Finalmente, estabeleceremos que a função $u_2(t)$ de (10), dada por $u_2(t) = \int_0^t D(t-\tau)f(\tau)d\tau$, satisfaz o problema

$$\Lambda(d/dt)u_2(t) = f(t) \quad ,$$

$$u_2(0) = \ldots = u_2^{(n-1)}(0) = 0 \quad ,$$

com $f(t)$ seccionalmente contínua.

Para os valores de t em que $f(t)$ é contínua, temos:

$$u_2'(t) = D(0)f(t) + \int_0^t D'(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t D'(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad .$$

Em particular, $u_2'(0) = 0$.

Similarmente,

$$u_2''(t) = D'(0)f(t) + \int_0^t D''(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t D''(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad , \quad u_2''(0) = 0 \quad .$$

Prosseguindo desta forma, obtemos

$$u_2^{(n-1)}(t) = \int_0^t D^{(n-1)}(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

com $u_2^{(n-1)}(0) = 0$.

E, como $D^{(n-1)}(0) = 1$, decorre

$$u_2^{(n)}(t) = f(t) + \int_0^t D^{(n)}(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad .$$

Logo,

$$\Lambda(d/dt)u_2(t) = f(t) + \int_0^t \Lambda(d/dt)D(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

$$= f(t) \quad ,$$

o que demonstra a nossa afirmação.

Pelo princípio da superposição linear, obtemos que a saída de (1) , (2) é a soma das soluções $u_1(t)$ e $u_2(t)$.

Resumiremos a nossa discussão, no seguinte

Teorema 1

A solução do problema (1),(2) é dada por

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma e^{\lambda t} D(\lambda)Q(\lambda)d\lambda + \int_0^t D(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad ,$$

onde $D(\lambda)$ é a função de transferência (7), $Q(\lambda)$ é o polinômio (5) e Γ um contorno que encerra no seu interior os polos de $D(\lambda)$. Além disso, temos a seguinte redução algébrica

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j D^{(n-j-1)}(t) + \int_0^t D(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad ,$$

onde $D(t) = \mathcal{L}^{-1}(D(\lambda))$ é a solução dinâmica (8) e os coeficientes α_j dados por (6).

CAPÍTULO II

Funções Matriciais

2.1 - Introdução

Tendo em vista a discussão de sistemas de equações diferenciais, é conveniente considerar *funções matriciais*, isto é, funções cujos valores são matrizes e cuja variável independente pode ser escalar ou matricial.

O cálculo diferencial e integral para funções reais pode ser estendido às funções matriciais de variável escalar: com processos limites caracterizados pelo auxílio de uma norma matricial ou em termos das componentes. A descrição desta extensão será omitida neste trabalho; para tal indicamos [13] e [18]. Para propósitos práticos, convém salientar a especial atenção que deverá ser dada às propriedades que envolvam comutatividade ou inversão de matrizes. Os aspectos algébricos, como a independência linear de funções, por exemplo, serão entendidos no sentido vetorial.

O principal objetivo deste capítulo é a definição e o manuseio de funções matriciais de variável real e matricial, obtidas a partir de funções escalares analíticas. Mais precisamente, a conveniência em operar com funções $f(t,A)$, obtidas de uma função escalar $f(t,z)$ pela simples substituição da variável z por uma matriz quadrada A. Quando $f(t,z)$ for uma função analítica em cada uma das variáveis, poderemos utilizar, conforme convier, a expansão em séries de potências ou a integral de contorno de Cauchy.

É oportuno salientar que, historicamente, o desenvolvimento da teoria de funções matriciais tem sido feito, por vários autores, de maneira independente. Para um estudo mais detalhado sugerimos [13],[18] e [5].

2.2 - Séries Matriciais

Dizemos que uma sucessão A_k ($k = 0,1,\ldots$) de matrizes de ordem m converge a uma matriz A de mesma ordem se

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}(k) = a_{ij} \quad , \qquad i,j = 1,\ldots,m \quad ,$$

onde $a_{ij}(k)$ e a_{ij} denotam as componentes das matrizes A_k e A respectivamente. Neste caso, escreveremos $\lim_{k\to\infty} A_k = A$ e dizemos que A é o valor limite da sucessão A_k .

Tal conceito de convergência pode ser estabelecido, de maneira equivalente, em termos de uma norma matricial. A norma de uma matriz quadrada A é um número não-negativo $\|A\|$, que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\|A\| > 0$ se $A \neq 0$, $\|0\| = 0$;

(ii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(iii) $\|cA\| = |c|\,\|A\|$;

(iv) $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

É relevante a última propriedade, por sua utilização em processos limites. Citamos, como exemplos, as seguin tes normas matriciais

$$\|A\|_c = \max_{i,j} |a_{ij}| \quad , \quad \|A\|_q = \left(\sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad \text{e}$$

$$\|A\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p = 1} \|A\mathbf{x}\|_p \quad , \quad p \geq 1 \quad .$$

Aqui,

$$\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_m|^p)^{1/p}$$

é a norma de Hölder do vetor $\mathbf{x}$. Para maiores detalhes, veja [9] e [11].

A grandeza da norma de uma matriz pode ser estimada em termos dos elementos da matriz considerada, ou seja:

Lema 1

Para cada norma matricial $\|A\|$, existem constantes α e β , ambas não negativas e independentes da matriz A , tais que

$$\alpha \max_{i,j} |a_{ij}| \leq \|A\| \leq \beta \max_{i,j} |a_{ij}| \quad . \tag{1}$$

A desigualdade decorre do isomorfismo existente entre o espaço das matrizes quadradas de ordem m e C^{m^2}, no qual todas as normas são equivalentes. Este fato implica o resultado.

Através deste lema, obtemos a seguinte definição equivalente de convergência:

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A \quad \text{se, e somente se,} \quad \lim_{k\to\infty} \|A_k - A\| = 0 \quad .$$

A convergência de sucessões matriciais preserva as regras usuais de soma e produto

$$\lim_{k\to\infty} (A_k + B_k) = A + B \quad , \quad \lim_{k\to\infty} A_k B_k = AB \ , \text{ se } \lim_{k\ \infty} B_k = B$$

e a relação de semelhança entre matrizes

$$\lim_{k\to\infty} P A_k P^{-1} = P \lim_{k\to\infty} A_k P^{-1} \quad , \quad P \text{ não-singular} \quad .$$

Diremos que a série $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ de matrizes de ordem m converge para uma matriz A, quando $\lim_{N\to\infty} \left\| \left(\sum_{k=0}^{N} A_k \right) - A \right\| = 0$ ou, equivalentemente, $\sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}(k) = a_{ij}$, $i,j = 1,2,\ldots,m$. Em tal caso, a matriz A é dita a soma da série e escrevemos $\sum_{k=0}^{\infty} A_k = A$. Na prática utilizaremos freqüentemente o critério de convergência absoluta:

Suponhamos que a série numérica $\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\|$ *converge. Então, a série matricial* $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ *é convergente.*

De fato, através do Lema 1, temos que

$$\alpha \sum_{k=0}^{\infty} |a_{ij}(k)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\| < \infty \quad ,$$

e, portanto, cada uma das séries de componentes é convergente.

Para cada matriz quadrada A tal que $\|A\| < 1$ é válido

$$\lim_{k\to\infty} A^k = 0 \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1} \quad , \tag{2}$$

onde I denota a matriz identidade.

A primeira relação segue de

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k < 1$$

e, para a segunda, observemos que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} A^k \quad \text{implica} \quad S_n(I - A) = I - A^{n+1} \quad .$$

Assim, o resultado decorre da primeira relação.

<u>Séries de Potências</u> - Os polinômios $P(t) = C_0 + C_1 t + \ldots + C_m t^m$, com coeficientes matriciais C_k, todos de mesma ordem, são as funções matriciais de variável escalar mais simples de operar algebricamente e analiticamente. Como extensão natural dos mesmos, consideramos as *séries de potências escalares*

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k \quad ,$$

com coeficientes $C_k = [c_{ij}(k)]$ de ordem $m \times m$.

Se r denota o menor dos raios de convergência das séries escalares $\sum_{k=0}^{\infty} c_{ij}(k)t^k$, então, do Lema 1, decorre que a série matricial $\sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k$ converge absolutamente para $|t| < r$ e diverge se $|t| > r$. Portanto, a derivação e integração, de maneira análoga à de polinômios, será feita termo a termo. Mais precisamente,

$$\frac{d^j}{dt^j} F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \frac{d^j t^k}{dt^j} = \sum_{k=j}^{\infty} j!\binom{k}{j} C_k t^{k-j} \quad , \quad |t| < r \qquad (4)$$

para cada inteiro $j \geq 1$. Em particular, temos

$$F^{(j)}(0) = j! C_j \quad , \qquad (5)$$

onde $F^{(j)}(t)$ denota a j-ésima derivada de $F(t)$. O método dos coeficientes indeterminados tem por base a propriedade dos zeros das funções analíticas:

Se $F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k = 0$ *para* $|t| < r$, *então* $C_k = 0$ *para todo* k .

É quase imediato pois, da hipótese, segue que $F^{(j)}(0) = 0$, para todo inteiro $j \geq 0$. A afirmação decorre de (5).

A seguir estabeleceremos um resultado simples, mas extremamente útil no desenvolvimento de nosso trabalho.

Lema 2

A solução do problema de valor inicial

$U'(t) = A\,U(t)$, A $n \times n$

$U(0) = I$

é dada pela função matricial

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \equiv e^{At} .$$

De fato, se

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k \quad , \quad C_0 = U(0) = I \quad ,$$

então, substituindo na equação, decorre da propriedade dos zeros das funções analíticas

$$(k+1)C_{k+1} = AC_k \quad ,$$

para todo inteiro $k > 0$. Por indução, temos que

$$C_k = \frac{A^k}{k!} \quad .$$

Como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k t^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|At\|^k = e^{\|At\|} \quad ,$$

a função $U(t)$ é bem definida e o método dos coeficientes indeterminados é justificado.

A série matricial

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$$

onde A é uma matriz quadrada e (a_k) uma sucessão de escalares, é denominada *série de potências matriciais* . A convergência deste tipo de séries pode ser reduzida ao caso escalar como segue:

Se R *é o raio de convergência da série escalar* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *, então para* $\|A\| < R$ *, temos que a série matricial* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ *converge absolutamente.*

Isto decorre imediatamente do critério de convergência absoluta, pois que $\|a_k A^k\| \leq |a_k| \|A\|^k$.

Como uma série escalar de potências é infinitamente diferenciável no seu intervalo de convergência, temos também que as séries matriciais correspondentes às derivadas

$$\sum_{k=j}^{\infty} j!\binom{k}{j} a_k A^{k-j} \quad , \quad j = 0, 1, \ldots \tag{7}$$

convergem absolutamente, para $\|A\| < R$.

2.3 - Funções Matriciais Analíticas

Seja $f(z)$ uma função analítica de variável complexa definida num domínio simplesmente conexo Ω , ao qual pertencem todos os valores próprios da matriz quadrada A . Definimos a função matricial $f(A)$ como sendo a integral de linha

$$\begin{aligned} f(A) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (zI - A)^{-1} f(z) dz \\ &= \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} [(zI - A)^{-1}]_{ij} f(z) dz \right] \quad , \end{aligned} \tag{8}$$

onde Γ é um contorno fechado(2) em Ω que encerra em seu interior todos os valores próprios de A .

A integral (8) é bem definida, porque as componentes da matriz $(zI - A)^{-1}$ são dadas pelas funções

(2) Na realidade, estamos considerando Γ uma curva de Jordan.

racionais

$$[(zI - A)^{-1}]_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}\phi_{ji}(z)}{P(z)} \quad , \tag{9}$$

onde $P(z) = \det(zI - A)$ e cada $\phi_{ij}(z)$ é o menor complementar de $(zI - A)$. O valor de $f(A)$ independe do contorno considerado, desde que este seja uma curva homotópica a Γ em Ω-{autovalores de A}.

A definição de $f(A)$, através da fórmula integral de Cauchy, pode ser relacionada, como se espera da Teoria de Funções Analíticas Complexas, com uma formulação equivalente em termos de uma expansão em série de potências. Lembremos, por exemplo, que no Lema 2 definimos a matriz e^A como uma série de potências em A,

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (zI - A)^{-1} e^z dz \quad ,$$

onde Γ encerra em seu interior todos os valores próprios de A. Em geral, a possibilidade de expressar $f(A)$ como uma série de potências é conseqüência do seguinte:

Lema 3

Se $(f_k(z))$ é uma sucessão de funções analíticas em Ω tais que $f_k(z) \to f(z)$ uniformemente em Ω, então $f(A) = \lim_{k\to\infty} f_k(A)$.

Na verdade, a prova decorre da integrabilidade termo a termo de seqüências uniformemente convergentes:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma [(zI - A)^{-1}]_{ij} f_k(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma [(zI - A)^{-1}]_{ij} f(z)dz .$$

Suponhamos, agora, que $f(z)$ possui uma expansão em série de potências $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$, que converge no disco aberto $|z - z_0| < R$. Então, a seqüência $f_N(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k(z - z_0)^k$ converge a $f(z)$ uniformemente, num disco menor $|z - z_0| < R' < R$. Se todos os valores próprios de A estão contidos no interior deste disco, então

$$f_N(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (zI - A)^{-1} f_N(z)dz ,$$

onde Γ , digamos, é o contorno $|z - z_0| = R''$ com $R' < R'' < R$. Segue do Lema 3 sobre convergência uniforme que

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(A - z_0 I)^k = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (zI - A)^{-1} f(z)dz . \tag{10}$$

Desta igualdade, decorre facilmente um critério de convergência em termos do *raio espectral*

$$r(A) = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \text{ é valor próprio de } A\} , \tag{11}$$

para o qual são válidas as seguintes propriedades:

(i) $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$;

(ii) $r(\alpha A) = |\alpha| r(A)$, α escalar ;

(iii) $r(P^{-1}AP) = r(A)$;

(iv) $r(A) \leq \|A\|$.

Seja R *o raio de convergência da série escalar* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$. *Então, a série matricial* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(A-z_0I)^k$ *converge, se* $r(A - z_0I) < R$.

Observemos que, da propriedade (iv) do raio espectral, este critério de convergência é mais fraco que o obtido utilizando a norma matricial. Contudo, para o primeiro, é necessário ter estimativas sobre os valores próprios.

Poderíamos ter iniciado com uma definição de f(A) em série de potências, ao invés de estabelecê-la como uma conseqüência, porém é também vantajoso dar ênfase à Fórmula Integral de Cauchy. A primeira, requer que f(z) seja analítica num disco fechado ao qual pertencem todos os valores próprios de A ; isto é, singularidades isoladas e pontos de ramificação não são permitidos no disco. A segunda, formulada através da integral, é claramente adaptável a esta nova situação: simplesmente escolhemos o contorno Γ de modo que não intercepte ou encerre as singularidades isoladas e necessários cortes de ramificação. Certamente, Γ deverá conter no seu interior todos os valores próprios de A e pertencer a um domínio Ω simplesmente conexo, no qual f pode ser definida como uma função sem valores múltiplos.

Exemplificando, a função $f(z) = \sqrt{z}$ possui um ponto de ramificação na origem. Fazendo um corte, de raio infinito γ , na origem, temos uma função analítica. Considerando as funções matriciais, ao definirmos $\sqrt{A}$, devemos atentar para dois aspectos: A não deverá possuir nenhum valor próprio nulo e o raio γ deverá ser escolhido de forma que não intercepte nenhum autovalor de A, [13].

A fórmula integral de Cauchy

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (zI - A)^{-1} f(z) dz$$

é uma expressão fechada para $f(A)$ que requer "a priori" a certeza de que todos os valores próprios de A sejam encerrados por um contorno Γ contido no domínio de analiticidade de $f(z)$. Resta, entretanto, o problema: calcular $f(A)$ explicitamente. Veremos, a seguir, que a existência de divisores de zero na álgebra matricial nos fornece um resultado interessante: $f(A)$ é igual ao valor de um certo polinômio matricial.

Teorema de Redução

Se A é uma matriz quadrada de ordem m, a função matricial $f(A)$ é dada por

$$f(A) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k A^k ,$$

onde os coeficientes b_k do polinômio $R(z) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k z^k$ são obtidos através da interpolação de Hermite

$$R^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i) \quad , \quad j = 0, 1, \ldots, m_i - 1 \qquad (12)$$

para λ_i valor próprio de A com multiplicidade m_i.

Prova:

A função meromorfa $\frac{1}{P(z)}$, onde $P(z) = \det(zI - A)$, possui uma expansão em frações parciais do tipo

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{s=1}^{m_k} \frac{A_{ks}}{(z-\lambda_k)^s} \quad , \tag{13}$$

onde λ_k, para $k = 1,2,\ldots,r$, são os distintos autovalores de A e cada λ_k possui multiplicidade m_k, sendo $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = m$ e A_{ks} os resíduos nos zeros de $P(z)$. Assim,

$$\frac{f(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{s=1}^{m_k} \frac{A_{ks}[f(\lambda_k) + (z-\lambda_k)f'(\lambda_k) + \ldots + \frac{(z-\lambda_k)^{s-1}}{(s-1)!} f^{(s-1)}(\lambda_k)]}{(z-\lambda_k)^s} + \psi(z) ,$$

onde $\psi(z)$ é analítica quando $f(z)$ o é. Decorre

$$f(z) = R(z) + P(z)\psi(z) \tag{14}$$

com $R(z)$ um polinômio em z de grau $m-1$ dado por

$$R(z) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{s=1}^{m_k} A_{ks}[f(\lambda_k) + (z-\lambda_k)f'(\lambda_k) + \ldots +$$

$$+ \frac{(z-\lambda_k)^{s-1}}{(s-1)!} f^{(s-1)}(\lambda_k)] \frac{P(z)}{(z-\lambda_k)^s} \quad . \tag{15}$$

Por outro lado, de (9) e da definição (8) com $q_{ij}(z) = (-1)^{i+j}\psi_{ji}(z)$, obtemos

$$[f(A)]_{ij} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{q_{ij}(z)f(z)}{P(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{q_{ij}(z)R(z)}{P(z)} dz \quad . \tag{15'}$$

Conseqüentemente,

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (zI - A)^{-1} R(z)dz = R(A) \ , \qquad (16)$$

onde $R(A)$ é obtido substituindo z por A em (15).

A regra de Leibniz aplicada a (14) e o fato que P é o polinômio característico de A, ou seja,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \psi^{(k-j)}(z) P^{(j)}(z) + R^{(k)}(z)$$

e

$$P^{(j)}(\lambda_i) = 0 \quad , \quad \text{para} \quad j = 0,1,\ldots,m_{i-1} \quad ,$$

implicam a interpolação de Hermite (12).

Observação. O Teorema de Cayley-Hamilton decorre facilmente de (15)'. Pois, escolhendo $f(z) = P(z)$ nesta expressão segue que $q_{ij}(z)f(z)/P(z)$ é analítica e, pelo Teorema de Cauchy, a integral é zero.

CAPÍTULO III

Equações Diferenciais Matriciais

3.1 - Introdução

O estudo das equações diferenciais lineares de ordem superior com coeficientes matriciais de ordem $m \times m$

$$u^{(n)}(t) + A_1 u^{(n-1)}(t) + \ldots + A_n u(t) = f(t) \quad , \quad (1)$$

é omitido, em geral, na literatura, por ser algebricamente equivalente à equação diferencial matricial de primeira ordem

$$z'(t) = Az(t) + F(t) \quad (2)$$

Aqui, A denota a matriz companheira de ordem $nm \times nm$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & I & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & I \\ -A_n & -A_{n-1} & -A_{n-2} & \ldots & -A_1 \end{bmatrix} \quad , \quad (3)$$

e $z(t)$ e $F(t)$, as matrizes colunas de ordem $nm \times 1$,

$z(t) = \text{col}[u(t) \ \ u'(t) \ \ldots \ u^{(n-1)}(t)]$ e $F(t) = \text{col}[0 \ 0 \ \ldots \ f(t)]$.

Cada solução de (1) define $z(t)$ como solução de (2) e, reciprocamente, as m primeiras componentes de uma solução de (2) formam uma solução de (1). Mais precisamente, observamos que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} C_0(t) & C_1(t) & \dots & C_{n-1}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_0^{(n-1)}(t) & C_1^{(n-1)}(t) & \dots & C_{n-1}^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = [C_{j-1}^{(i-1)}(t)] , \quad (4)$$

$$(i,j = 1,2,\dots,n)$$

cujos elementos matriciais $C_j(t)$ de ordem mxm são soluções matriciais da equação homogênea associada (1), com as condições iniciais

$$C_j^{(k)}(0) = \delta_{jk} I \quad , \quad j,k = 0,1,\dots,n-1 \quad , \qquad (5)$$

onde I denota a matriz identidade $m \times m$. Pois, para $t = 0$, essa matriz se reduz à matriz identidade $nm \times nm$ e cada coluna representa um estado matricial inicial da equação homogênea associada

$$u^{(n)}(t) + A_1 u^{(n-1)}(t) + \dots + A_n u(t) = 0 \quad . \qquad (6)$$

Além disso, como a solução geral de (2) é dada por

$$z(t) = e^{At} z(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} F(\tau) d\tau \qquad ,$$

obtemos que a solução geral de (1) é dada por

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j(t) u^{(j)}(0) + \int_0^t C_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau \qquad . \qquad (7)$$

À solução matricial

$$D(t) = C_{n-1}(t) \quad ,$$

nos referiremos como a *solução dinâmica* da equação (1). A mesma é a solução matricial de (6), com as condições iniciais

$$D^{(n-1)}(0) = I \quad , \quad D(0) = D'(0) = \ldots = D^{(n-2)}(0) = 0 \qquad (8)$$

O manuseio da matriz companheira A não é ameno, para a obtenção de resultados relativos às equações de ordem superior. Porque, feita a redução algébrica (7), a identificação das soluções $C_j(t)$, a partir de (4), não é uma tarefa simples. Além disso, algumas características das equações de ordem superior tornam-se obscuras ou, simplesmente, desconhecidas quando se utiliza a redução à matriz companheira.

Neste capítulo, apresentamos diversos resultados obtidos por Ruiz-Claeyssen, através do método de Cauchy dos coeficientes indeterminados, para um tratamento direto das equações de ordem superior [18], [19] e [20]. Contudo, nós utilizaremos o caminho operacional da Transformada de Laplace, em analogia ao caso escalar. Tal processo nos permitirá representar a solução dinâmica matricial como uma integral de contorno ou como um polinômio matricial.

A maioria dos argumentos operacionais, aqui empregados, são inteiramente análogos ao caso escalar. Portanto, verificaremos somente aqueles que requerem especial atenção.

3.2 - A Solução Dinâmica como Integral de Contorno

Utilizando o método da Transformada de Laplace na equação (1), decorre a equação operacional

$$\Delta(s)\mathbf{U}(s) = Q(s) + F(s) \tag{9}$$

na qual $\mathbf{U}(s)$ e $F(s)$ são as transformadas da saída $u(t)$ e entrada $f(t)$ respectivamente. Os polinômios matriciais $\Delta(s)$ e $Q(s)$ são dados por

$$\Delta(s) = A_0 s^n + A_1 s^{n-1} + \ldots + A_{n-1} s + A_n \quad , \tag{10}$$

com $A_0 = I$ e

$$Q(s) = \sum_{j=0}^{n-1} Q_j(s) u^{(j)}(0) \quad , \tag{11}$$

em que

$$Q_j(s) = \sum_{\ell=0}^{n-j-1} A_\ell s^{n-j-1-\ell} \quad . \tag{11'}$$

Em particular,

$$\Delta(s)\mathbf{D}(s) = I \quad , \tag{12}$$

na qual

$$\mathbf{D}(s) = \mathcal{L}(D(t))$$

é a *função matricial de transferência* associada a (6) e (8). Afirmamos que

$$D(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma e^{\lambda t} \mathbf{D}(\lambda) d\lambda \quad , \tag{13}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma e^{\lambda t}d\lambda = 0 \quad .$$

Corolário 1

A solução do problema inicial

$$\sum_{k=0}^{n} A_k u^{(n-k)}(t) = f(t) \quad , \qquad A_0 = I$$

$$u^{(n-1)}(0) = u_0^{(n-1)}, \ldots, u'(0) = u_0', u(0) = u_0 \quad ,$$

com $f(t)$ contínua é dada por

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-j-1} D^{(n-j-1-\ell)}(t)A_\ell u^{(j)}(0) + \int_0^t D(t-\tau)f(\tau)d\tau \qquad (19)$$

Prova:

De (7) e (9) decorre que

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma e^{\lambda t}(D(\lambda)Q(\lambda))d\lambda + \int_0^t D(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad .$$

Utilizando (11), temos

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma e^{\lambda t} D(\lambda)Q(\lambda)d\lambda = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma e^{\lambda t} D(\lambda)Q_j(\lambda)\ d\lambda\right)u^{(j)}(0)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-j-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \lambda^{n-j-1-\ell}e^{\lambda t}D(\lambda)d\lambda\right]A_\ell u^{(j)}(0) \quad .$$

A conclusão segue de (16).

Corolário 2

As soluções $C_j(t)$ são dadas por

$$C_j(t) = \sum_{\ell=0}^{n-j-1} D^{(n-j-1-\ell)}(t)A_\ell \quad , \quad j = 0,1,\ldots,n-1 \qquad (20)$$

Prova:

É imediata de (7) e (19), pela unicidade da solução.

Exemplo

Para a equação de segunda ordem,

$$u'' + Bu' + Au = 0 \quad ,$$

temos que

$$C_0(t) = D'(t) + D(t)B \quad , \quad C_1(t) = D(t) \qquad (20)'$$

Observação: A colocação dos coeficientes A_ℓ à direita, em (20), deve-se ao fato dos mesmos representarem matrizes não necessariamente cumutativas.

3.3 - Cálculo da Solução Dinâmica

A integral de contorno (13) pode ser a princípio calculada com o teorema dos resíduos. Mais precisamente,

$$D(t) = \sum_{j=1}^{r} \mathrm{Res}(e^{st}D(s),s_j) \quad ,$$

onde os s_j são os diferentes zeros do polinômio característico $P(s)$, dado por (14), e com multiplicidade r_j respectivamente. Assim,

$$D(t) = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{(r_j-1)!} \lim_{s \to s_j} \frac{d^{r_j-1}}{ds^{r_j-1}} (s - s_j)^{r_j} D(s)e^{st} \qquad ,$$

e, utilizando a regra de Leibniz, decorre

$$D(t) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=0}^{r_j-1} \frac{1}{k!} \frac{1}{(r_j-1-k)!} t^{r_j-1-k} e^{s_j t} \frac{d^k}{ds^k}(s-s_j)^{r_j} D(s) \Big|_{s=s_j} . \quad (21)$$

Para podermos utilizar esta fórmula com fins computacionais, devemos enfrentar dois problemas: o cálculo dos zeros do polinômio $P(s)$ e o cálculo das derivadas da função matricial de transferência $D(s)$.

A seguir, nosso propósito é obter uma fórmula para a solução dinâmica que seja mais amena no que se refere aos aspectos computacionais. Para tanto, focalizaremos nossa atenção em derivar uma fórmula para a função exponencial e^{At}. Temos que, se A é uma matriz quadrada de ordem N , então

$$e^{At} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} e^{\lambda t} D(\lambda) d\lambda \qquad ,$$

onde

$$D(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI - A)}{P(s)} \quad .$$

Escrevemos

$$B(s) = adj(sI - A) = \sum_{k=0}^{N-1} B_k s^k \qquad ,$$

pelo fato que os elementos de $B(s)$ são polinômios de grau

$N-1$ em s. Sendo

$$B_k = \frac{B^{(k)}(o)}{k!} ,$$

obtemos

$$\begin{aligned} B_{N-1} &= I \\ B_{N-k-1} &= AB_{N-k} + b_k I , \qquad k = 1,2,\ldots,N-1 \end{aligned} \tag{22}$$

onde

$$P(s) = \det \Lambda(s) = \sum_{k=0}^{N} b_k s^{N-k} , \quad b_o = 1$$

Por indução finita, temos que

$$B_{N-k-1} = \sum_{i=0}^{k} A^{k-i} b_i ,$$

portanto,

$$B(s) = \sum_{k=0}^{N-1} B_{N-k-1} s^{N-k-1} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} b_i s^{j-i-1} A^{N-j} .$$

Assim,

$$D(s) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{b_i s^{j-i-1}}{P(s)} A^{N-j}$$

e, decorre

$$e^{At} = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{\ell=0}^{j-1} b_\ell \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{\lambda^{j-\ell-1} e^{\lambda t}}{P(\lambda)} d\lambda \right) A^{N-j} .$$

As integrais de contorno podem ser identificadas como sendo as derivadas $d^{(j-i-1)}(t)$ da solução dinâmica escalar correspondente à equação escalar

$$\sum_{k=0}^{N} b_k v^{(N-k)}(t) = 0 \qquad . \tag{23}$$

Resulta, portanto, a seguinte fórmula

$$e^{At} = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t)\right) A^{N-j} = \sum_{j=1}^{N} c_{N-j}(t) A^{N-j} \quad , \tag{24}$$

com $c_k(t)$ no sentido do corolário 2, para a equação (23).

Agora consideremos a matriz companheira A definida por (3). Escrevamos as potências

$$A^k = [A_{ij}^{(k)}] \quad , \tag{25}$$

na forma de uma matriz bloco $n \times n$ com elementos $m \times m$. A matriz exponencial e^{At} pode ser escrita, na forma operacional, como

$$e^{At} = \begin{bmatrix} I \\ \frac{d}{dt} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{d^{(n-1)}}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} [C_0(t) \quad C_1(t) \quad \dots \quad C_{n-1}(t)] \quad .$$

Pelo fato que a k-ésima derivada de e^{At} em $t = 0$ é igual a A^k, decorre que

$$A_{ij}^{(k)} = c_{j-1}^{(k+1-1)}(0) \qquad . \qquad (25)'$$

Utilizando (25) juntamente com (24) obtemos a seguinte representação da solução dinâmica

<u>Teorema 3</u>

A solução dinâmica matricial de (1) é dada por

$$D(t) = \sum_{j=1}^{mn} c_{mn-j}(t)D^{(mn-j)}(0) = \sum_{i=0}^{j-1}\left(\sum_{j=1}^{mn} b_i d^{(j-i-1)}(t)\right)D^{(mn-j)}(0) \qquad (26)$$

onde $d(t)$ é a solução dinâmica da equação escalar $P(d/dt)v=0$, com

$$P(s) = \sum_{k=0}^{mn} b_k s^{mn-k} = \det(s^n I + A_1 s^{n-1} + \ldots + A_n) \qquad .$$

<u>Prova</u>:

Sendo

$$D(t) = [I \quad 0 \quad \ldots \quad 0]\; e^{At}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{mn} c_{mn-j}(t)A_{1n}^{(mn-j)} \quad ,$$

nossa afirmação decorre de (25) e (24).

3.4 - <u>Equações Matriciais em Diferenças</u>

O uso da integral de contorno, para representar a solução dinâmica, nos permitiu inferir diversas propriedades. É natural perguntarmo-nos: as outras soluções $C_j(t)$ possuem propriedades semelhantes? E, também, a solução dinâmica matricial pode ser obtida como uma função matricial análoga ao caso escalar? Para discutir estas qüestões é conveniente utilizarmos a representação das soluções em séries de potências, isto é,

$$C_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{j,k} \frac{t^k}{k!} \quad , \qquad D(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \frac{t^k}{k!} = C_{n-1}(t) \quad .$$

Por simples substituição na equação homogênea (6), decorre que os coeficientes $C_{j,k}$ são soluções da equação matricial em diferenças

$$U_{k+n} + \sum_{\ell=1}^{n} A_\ell U_{k+n-\ell} = 0 \quad , \quad k = 0,1,\ldots \tag{27}$$

e, com dados iniciais

$$U_k = C_{j,k} = \delta_{jk} I \quad , \quad k,j = 0,1,\ldots,n-1 \tag{27'}$$

A expressão (20) sugere uma relação entre os coeficientes $C_{j,k}$ e os D_k da solução dinâmica. Mais precisamente, isto nos é dado através do

Lema de Recorrência

Sejam $C_{j,k}$ os coeficientes das séries de potências correspondentes às soluções $C_j(t)$. Então,

$$C_{j,k} + \sum_{\ell=0}^{j} D_{k-j-1+\ell} \, A_{n-\ell} = 0 \quad , \quad k \geq n \quad , \quad j = 0,1,\ldots,n-1 \tag{28}$$

Prova

Utilizaremos o método de indução em k . Para $k = n$, temos que

$$C_{j,n} + \sum_{\ell=0}^{j} D_{n-j-1+\ell} A_{n-\ell} = C_{j,n} + A_{n-\ell} \qquad ,$$

pois que $D_{n-1-i} = 0$ para $i = 1,2,\ldots,n-1$. Por outro lado, de (27) com $k = n$, temos

$$C_{j,n} + \sum_{\ell=1}^{n} A_{\ell} C_{j-n-\ell} = 0 \qquad ,$$

isto é,

$$C_{j,n} + A_{n-j} = 0 \qquad ,$$

pois $C_{j,k} = \delta_{jk} I$ para $j,k = 0,1,\ldots,n-1$.

Suponhamos (28) válida para um inteiro $k > n$. Então, de (27) vem

$$C_{j,k+1} + \sum_{\ell=0}^{n} A_{\ell} C_{j,k+1-\ell} = 0 \qquad .$$

Através da hipótese de indução,

$$C_{j,k+1-\ell} = - \sum_{s=0}^{j} D_{k-\ell-j+s} A_{n-s}$$

Por outro lado, de (27),

$$D_{k-\ell-j+s} = - \sum_{i=1}^{n} A_i D_{k-\ell-j+s-i} \qquad ,$$

portanto,

$$C_{j,k+1} - \sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{s=0}^{j} A_\ell D_{k-\ell-j+s}\right)A_{n-s} = 0$$

e,

$$C_{j,k+1} + \sum_{s=0}^{j}\left(-\sum_{\ell=1}^{n} A_\ell D_{k-\ell-j+s}\right)A_{n-s} = 0 \quad .$$

Assim,

$$C_{j,k+1} + \sum_{s=0}^{j} D_{k-j+s}A_{n-s} = 0$$

e, decorre o afirmado.

Observemos que de (27) e (28) com $j = n-1$, isto é, $C_{n-1,k} = D_k$, temos

$$D_{k+n} + \sum_{\ell=0}^{n-1} A_{n-\ell}D_{k+\ell} = 0$$

e

$$D_{k+n} + \sum_{\ell=0}^{n-1} D_{k+\ell}A_{n-\ell} = 0 \quad ,$$

ou seja, as derivadas da solução dinâmica na origem são soluções bilaterais da equação matricial em diferenças (27).

Agora utilizando o Teorema 3, temos

$$D^{(k)}(0) = D_k = \sum_{j=1}^{mn} C^{(k)}_{mn-j}(0)D_{mn-j} = \sum_{j=1}^{mn} \phi_j(k)D_{mn-j} \quad ,$$

onde

$$\phi_j(k) = \sum_{\ell=0}^{j-1} b_\ell d^{(j-\ell-1+k)}(0) = c_{mn-j}^{(k)}(0) \quad . \tag{30}$$

Sintetizaremos nossa discussão com o seguinte

Teorema 4

A solução da equação matricial em diferenças

$$U_{k+n} + \sum_{\ell=1}^{n} A_\ell U_{k+n-\ell} = 0 \quad , \quad k = 0,1,\ldots$$

é dada por

$$U_k = \sum_{j=0}^{n-1} C_{j,k} U_j = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{\ell=0}^{j} D_{k-j-1-\ell} A_\ell \right) U_j \quad , \tag{31}$$

para os valores iniciais $U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}$.

Prova:

Temos que $C_{j,k}$ é solução do problema de valor inicial representado por (27) e (27)', para $j,k=0,1,\ldots,n-1$. Multiplicando a equação matricial (27) por U_j à esquerda, decorre

$$C_{j,k} U_j + \sum_{\ell=1}^{n} A_\ell C_{j,k-\ell} U_j = 0 \quad .$$

Somando em j , obtemos que

$$U_k = \sum_{j=0}^{n-1} C_{j,k} U_j$$

satisfaz

$$\mathcal{U}_k + \sum_{\ell=1}^{n} A_\ell \mathcal{U}_{k-\ell} = 0 \qquad ,$$

o que implica que $\mathcal{U}_k$ é solução da equação em diferenças. Por outro lado, para $k = 0,1,\ldots,n-1$ temos

$$\mathcal{U}_k = \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{j,k} U_j = U_k \qquad ,$$

o que satisfaz (27)'.

<u>Corolário:</u>

Temos que

$$U_k = \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(k) U_j \quad , \quad k = n, n+1, \ldots, \tag{32}$$

onde

$$\psi_j(k) = - \sum_{\ell=0}^{j} \left(\sum_{j=1}^{mn} \phi_j(k-j-1-\ell) D_{mn-s-1} \right) A_\ell$$

com $\phi_j(k)$ dada por (30).

CAPÍTULO IV

Desacoplamento e Aproximação na Teoria Linear das Vibrações

4.1 - Introdução

O estudo da equação diferencial matricial(3)

$$M\ddot{u} + B\dot{u} + Ku = 0 \tag{1}$$

é de particular interesse para a Teoria das Vibrações, [12] e [21]. Os coeficientes matriciais reais M, B e K são referidos, na literatura, como a *matriz de inércia*, a *matriz de atrito* e a *matriz de rigidez* respectivamente.

A equação (1) é dita *desacoplável* quando, através de uma mudança de variáveis

$$u = Vz \quad , \quad V \text{ não-singular}, \tag{2}$$

e adequadas pré-multiplicações com os coeficientes, chegamos a uma equação da forma

$$\Lambda\ddot{z} + \Gamma\dot{z} + \Phi z = 0 \quad , \tag{3}$$

cujos coeficientes Λ, Γ e Φ são matrizes diagonais. Em tal situação, obtemos facilmente que a solução dinâmica da equação (3) é dada por

---

(3) Neste capítulo, por ser de uso freqüente na Teoria das Vibrações, usaremos $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ para denotar as derivadas de primeira e segunda ordem.

$$D^*(t) = e^{-\Lambda^{-1}\Gamma t/2}\,\frac{\operatorname{senh}\sqrt{\Delta}\,t}{\sqrt{\Delta}} = \operatorname{diag}[d_1(t),d_2(t),\ldots,d_n(t)] \quad , \qquad (4)$$

sendo $\Delta = (\Gamma^2 - 4\Lambda\Phi)/4\Lambda^2$ e as funções $d_j(t)$ as soluções dinâmicas das equações que originam o desacoplamento (3). Ambas as representações acima devem-se à natureza diagonal dos coeficientes: a primeira, associada à comutatividade dos mesmos; a segunda, é imediata.

Porque a solução geral de (3) é escrita na forma (20)' cap 3.

$$z(t) = (\dot{D}^*(t) + \Lambda^{-1}\Gamma D^*(t))z(0) + D^*(t)\dot{z}(0) \quad , \qquad (5)$$

decorre de (2) que a solução geral de (1) é dada por

$$u(t) = V[\dot{D}^*(t) + \Lambda^{-1}\Gamma D^*(t)]V^{-1}u(0) + VD^*(t)V^{-1}\dot{u}(0) \quad . \qquad (6)$$

Assim,

$$D(t) = VD^*(t)V^{-1} \qquad (7)$$

é a solução dinâmica da equação original. Certamente, a relação (7) proporciona uma maneira de calcular a solução dinâmica em termos da matriz V.

Neste capítulo, nosso objetivo será o estudo de condições para os coeficientes M,B e K, sob as quais esteja assegurada a existência da matriz V. Assumiremos, no que segue, que todos os coeficientes são matrizes reais simétricas. Em particular, esta é a situação que se apresenta, quando (1) é obtida a partir das equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}}\right) + \frac{\partial E}{\partial \dot{u}} + \frac{\partial P}{\partial u} = 0 \tag{8}$$

Aqui

$$T = \frac{1}{2}\, \dot{u}^T M \dot{u} \quad , \quad E = \frac{1}{2}\, \dot{u}^T B \dot{u} \quad e \quad P = \frac{1}{2}\, u^T K u \tag{9}$$

são aproximações quadráticas para a energia cinética, dissipativa e potencial respectivamente, associadas a um sistema mecânico com n graus de liberdade que vibra em torno de uma configuração de equilíbrio, [12].

4.2 - A Solução Dinâmica em Modos Normais Clássicos

Supondo que (1) possua soluções da forma

$$u = e^{\lambda t} v \quad , \quad v \text{ não-nulo}, \tag{10}$$

chegamos ao problema algébrico de autovalores

$$(\lambda^2 M + \lambda B + K)v = 0 \quad , \tag{11}$$

que consiste na determinação do vetor não-nulo v e do escalar λ . Tal vetor é denominado *autovetor* ou *modo* e o escalar *autovalor*. Certamente, o escalar λ é raiz do polinômio característico

$$P(\lambda) = \det[\lambda^2 M + \lambda B + K] \quad , \tag{12}$$

e pode ser escrito na forma

$$\lambda = w(-\xi + i\sqrt{1-\xi^2}) \quad , \; w \text{ e } \xi \text{ reais}, \; |\xi| \leq 1 \quad . \tag{13}$$

A literatura específica refere-se a w e ξ como *freqüência natural* e *razão de amortecimento crítico* respectivamente, [12]. É importante observar que as vibrações acontecem sempre que $|\xi| < 1$ e, em particular, vibrações *naturais* quando $\xi = 0$. A ocorrência das últimas equivale à existência de soluções (10) com

$$\lambda = iw \quad , \quad w \ \text{real} \quad .$$

A análise das vibrações naturais, em equações sem atrito

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \quad , \tag{14}$$

é básica e muito utilizado nas aplicações. Esta equação possui soluções periódicas da forma

$$u = e^{iwt} \quad , \quad w \ \text{real} \quad ,$$

se, e somente se,

$$(-w^2M + K)v = 0 \quad ,$$

isto é, quando existir um w^2 real tal que

$$Kv = w^2Mv \tag{15}$$

tenha solução v não-nula. Aqui o sinal de w é irrelevante, pelo simples fato que se $\lambda = iw$ é raiz, seu conjugado também o é. Portanto, a equação (14) terá soluções periódicas reais da forma

$$u = p \cos wt - q \,\text{sen}\, wt \quad , \quad u = p \,\text{sen}\, wt + q \cos wt$$

onde $v = p + iq$ com p e q vetores reais.

Se M *é positiva definida e* K *é simétrica, então existem* n *raízes reais* $w_1^2, w_2^2, \ldots, w_n^2$ *da equação* (15), *cujos correspondentes autovetores* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *satisfazem a relação*

$$v_j^T M v_k = 0 \quad , \quad \text{para} \quad j \neq k \quad , \tag{16}$$

isto é, são ortogonais com respeito ao produto interno

$$<u,v> = u^T M v \quad . \tag{17}$$

Os autovetores ortogonais em (16) são denominados *modos normais clássicos*.

A demonstração deste conhecido resultado, [11] e [22], decorre do fato que a matriz $M^{-1}K$ é simétrica em relação ao produto interno (17) e, portanto, diagonalizável com autovalores w_j^2 reais e modos normais clássicos v_j.

Em conseqüência, a matriz

$$V = [v_1 \quad v_2 \quad \ldots \quad v_n] \quad , \tag{18}$$

denominada *matriz modal* é não-singular. Além disso, decorre de (16) que

$$V^T M V = \Lambda \tag{19}$$

é uma matriz diagonal, cujos elementos são

$$u_j = v_j^T M v_j \quad , \qquad j = 1,2,\ldots,n \quad .$$

Similarmente, de (15), obtemos

$$V^T K V = \Lambda \Omega^2 \quad , \tag{20}$$

onde

$$\Omega^2 = \mathrm{diag}[w_1^2, w_2^2, \ldots, w_n^2]$$

é referida como *matriz espectral*. De modo análogo,

$$K V = M V \Omega^2 \quad . \tag{20)'$$

A mudança de variáveis $u = Vz$ induz um desacoplamento em (14). De fato, multiplicando (14) à esquerda por V^T e substituindo u por Vz, obtemos de (19) e (20)

$$\ddot{z} + \Omega^2 z = 0 \quad , \tag{21}$$

pois Λ é não-singular, por ser M positiva definida. Deste modo,

$$D^*(t) = \frac{\mathrm{sen}\ \Omega t}{\Omega} = \mathrm{diag}\left[\frac{\mathrm{sen}\ w_1 t}{w_1}, \frac{\mathrm{sen}\ w_2 t}{w_2}, \ldots, \frac{\mathrm{sen}\ w_n t}{w_n}\right] \tag{22}$$

é a solução dinâmica de (21).

Utilizando (19) e (7), temos que

$$D(t) = VD^*(t)V^{-1} = VD^*(t)\Lambda^{-1}V^T M \tag{23}$$

é a solução dinâmica de (14). Efetuando os produtos em (23) , obtemos de (22), que a solução dinâmica(4) é dada por

$$D(t) = V\,\mathrm{diag}\left[\frac{1}{v_1^T M v_1}\frac{\mathrm{sen}\, w_1 t}{w_1}, \frac{1}{v_2^T M v_2}\frac{\mathrm{sen}\, w_2 t}{w_2}, \ldots, \frac{1}{v_n^T M v_n}\frac{\mathrm{sen}\, w_n t}{w_n}\right] V^T M$$

$$= \left[\frac{\mathrm{sen}\, w_1 t/w_1}{v_1^T M v_1} v_1, \frac{\mathrm{sen}\, w_2 t/w_2}{v_2^T M v_2} v_2, \ldots, \frac{\mathrm{sen}\, w_n t/w_n}{v_n^T M v_n} v_n\right] \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} M$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{sen}\, w_j t}{w_j} \cdot \frac{v_j v_j^T}{v_j^T M v_j} M \quad .$$

Portanto, *se* M *é positiva definida e* K *é simétrica, a solução dinâmica da equação*

$$M\ddot{u} + Ku = 0$$

definida por

$$D(t) = \frac{\mathrm{sen}\, \sqrt{M^{-1}K}\; t}{\sqrt{M^{-1}K}} , \tag{24}$$

é dada pela fórmula

$$D(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{sen}\, w_j t}{w_j} \frac{v_j v_j^T}{v_j^T M v_j} M \quad . \tag{25}$$

---

(4) Aqui a somatória deve-se à propriedade

$[a\ b]\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = [a\ 0]\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + [0\ b]\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ac + bd$, para $\underline{a}$ e $\underline{b}$ matrizes coluna e $\underline{c}$ e $\underline{d}$ matrizes linha.

Concluímos, deste resultado e do parágrafo anterior, que a solução geral da equação sem atrito é da forma

$$u(t) = \left[\sum_{j=1}^{n} (\cos w_j t) v_j^T M u(0) + \left(\frac{\text{sen } w_j(t)}{w_j}\right) v_j^T M \dot{u}(0)\right] \frac{v_j}{v_j^T M v_j} \quad , \tag{26}$$

ou, simplesmente,

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n} A_j \text{sen}(w_j t + \delta_j) v_j \quad , \tag{26)'$$

para uma apropriada escolha das amplitudes A_j e fases δ_j .

Fisicamente, um movimento descrito por (26) é a superposição de n deslocamentos independentes através de modos normais. Decorre de (25) que

$$w_j^2 = \frac{v_j^T K v_j}{v_j^T M v_j} \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n \quad . \tag{27}$$

Se K é positiva definida, então os w_j^2 são estritamente positivos. Nesta situação, teremos a superposição de vibrações naturais.

4.3 - Desacoplamento na presença de atrito

Consideremos a equação com atrito (1)

$$M\ddot{u} + B\dot{u} + Ku = 0 \quad , \quad M \text{ não-singular} \quad . \tag{28}$$

Aqui o desacoplamento é um problema mais complexo: é possível desacoplar dois desses três coeficientes ; em geral, não é possível diagonalizar simultaneamente todos os coeficientes, exceto sob certas hipóteses adicionais. Senão, vejamos. A equação

$$\ddot{u} + \mathcal{B}\dot{u} + \mathcal{K}u = 0 \tag{28)'$$

com

$$\mathcal{B} = M^{-1}B \quad \text{e} \quad \mathcal{K} = M^{-1}K$$

é equivalente à equação (28). Se $\mathcal{K}$ e $\mathcal{B}$ são matrizes simétricas que comutam, é possível desacoplar a última equação . Mais precisamente, *para matrizes simétricas* $\mathcal{K}$ e $\mathcal{B}$, *existe uma mudança de variáveis*

$$u = \Phi z \quad , \quad \Phi \text{ ortogonal} \quad ,$$

que transforma (28)' *em*

$$\ddot{z} + \mathbb{B}\dot{z} + \mathbb{K}z = 0 \tag{28)''$$

e tal que

$$\mathbb{B} = \Phi^T \mathcal{B} \Phi \quad , \quad \mathbb{K} = \Phi^T \mathcal{K} \Phi$$

são diagonais se, e somente se, $\mathcal{K}$ *comuta com* $\mathcal{B}$, veja Bellman [3], pg.56, Teorema 5. A exigência de Φ ser ortogonal está subordinada ao desejo de não acoplar o termo $\ddot{z}$ enquanto diagonalizamos $\mathcal{K}$ e $\mathcal{B}$.

Em particular, Rayleigh [16] estabeleceu que, *se a matriz de atrito é uma combinação linear das matrizes de inércia e rigidez, isto é,*

$$B = aM + bK \ , \ a \text{ e } b \text{ escalares}, \quad M^T = M \quad e \quad K^T = K \ , \qquad (29)$$

então (28) é desacoplável.

De fato, a equação (28)' com

$$\mathcal{B} = aI + b\mathcal{K} \ , \quad \mathcal{K} = M^{-1}K$$

é equivalente a (28) com $\mathcal{K}$ e $\mathcal{B}$ matrizes simétricas que comutam.

Uma extensão de resultado de Rayleigh foi obtida por Caughey, [7] e [8], da seguinte maneira:

Suponhamos que $\mathcal{K}$ *é simétrica e sem autovalores repetidos. Então, a equação (28)' é desacoplável se, e somente se,* $\mathcal{B}$ *é um polinômio em* $\mathcal{K}$.

Com efeito, se $\mathcal{B}$ é um polinômio em $\mathcal{K}$, ou seja, $\mathcal{B} = p(\mathcal{K})$, e Φ é a matriz ortogonal que diagonaliza $\mathcal{K}$, então

$$\Phi^T \mathcal{B} \Phi = \Phi^T p(\mathcal{K}) \Phi = p(\Phi^T \mathcal{K} \Phi) = p(\mathbb{K}) \quad ,$$

onde $\mathbb{K} = \phi^T \mathcal{K} \Phi$ é diagonal por hipótese. Logo Φ também diagonaliza $\mathcal{B}$ e, portanto, (28)' é desacoplável.

Reciprocamente, suponhamos que (28)' é desacoplável através de Φ . Neste caso, as matrizes

$$\Phi^T \mathcal{B} \Phi = \mathrm{diag}[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n] \ , \quad \Phi^T \mathcal{K} \Phi = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$$

são diagonais. Por outro lado, o sistema linear

$$\mu_j = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \lambda_j^i \quad , \qquad j = 1,2,\ldots,n \quad ,$$

possui solução única em $\alpha = (\alpha_0 \ \alpha_1 \ \ldots \ \alpha_{n-1})$. Isto ocorre porque o determinante do sistema é o determinante de Vandermonde dos valores $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, os quais são distintos por hipótese e, portanto, não nulo. Assim sendo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \phi^T B \phi &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\phi^T K \phi)^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \phi^T K^i \phi \quad , \end{aligned}$$

e decorre que B é um polinômio em K .

Os resultados de Rayleigh e Caughey impõem severas restrições para o desacoplamento da equação (28)': *as matrizes* K *e* B *devem comutar*.

Fisicamente, uma hipótese desta natureza é artificial. Contudo, é de uso freqüente na literatura[5], face à dificuldade no cômputo da solução dinâmica de uma equação matricial de coeficientes simétricos

$$\ddot{u} + B\dot{u} + Ku = 0 \quad , \tag{30}$$

em que tenhamos $KB \neq BK$. Na realidade, neste caso, não existe nenhuma semelhança ou analogia com a solução dinâmica do caso escalar

(5) Para o caso de equações com coeficientes singulares veja Campbell[4]

$$\ddot{u} + b\dot{u} + ku = 0 \quad ,$$

a qual é dada por

$$d(t) = e^{-\frac{b}{2}t} \frac{\operatorname{senh} \sqrt{\Delta}\, t}{\sqrt{\Delta}} \quad , \quad \Delta = \frac{b^2 - 4k}{4} \quad . \tag{31}$$

Este fato tem sido estabelecido por Ruiz-Claeyssen, [18] e [20].

Recentemente, na Engenharia Estrutural, costuma-se aproximar a equação (30), em que $BK - KB \neq 0$, através da equação

$$\ddot{u} + E\dot{u} + Ku = 0 \quad , \tag{32}$$

onde E é simétrica e comuta com K, portanto, desacoplável, [2]. A construção da matriz E que melhor aproxime o atrito B tem sido considerado por Knowles [14] da maneira seguinte:

Seja Φ uma matriz ortogonal que diagonaliza a matriz simétrica K :

$$\mathbf{K} = \Phi^{T} K \Phi = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$$

e escrevamos

$$\mathbf{S} = \Phi^{T} S \Phi = [s_{ij}]$$

para matriz simétrica S . Definamos a matriz $E = [\epsilon_{ij}]$, através de

$$\mathbf{E} = \Phi^{T} E \Phi = [\gamma_{ij}] \quad , \tag{33}$$

com

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \\ \beta_{ij} & \text{se} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \end{cases}$$

onde

$$\mathbf{B} = \Phi^T B \Phi = [\beta_{ij}] \quad .$$

O seguinte resultado estabelece que a melhor aproximação de (30) por (32) é obtida quando a matriz E é definida através de (33):

<u>Teorema</u>

Para matrizes simétricas $\mathbf{S}$ *as quais comutam com* $\mathbf{K}$ *, tem-se que*

$$\min_{\mathbf{S}} \|\mathbf{S} - \mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{E} - \mathbf{B}\|^2 \quad , \tag{34}$$

onde o mínimo é tomando com respeito à norma matricial quadrática[6]. Além disso,

$$\|\mathbf{E} - \mathbf{B}\| \leq \frac{1}{\delta^2} \|\mathbf{K}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{K}\| \tag{35}$$

quando

$$\delta = \min_{\lambda_i \neq \lambda_j} |\lambda_i - \lambda_j| > 0 \quad .$$

<u>Prova</u>:

Primeiramente, da relação

---

(6) $\|A\| = \left(\sum \sum a_{ij}^2\right)^{1/2} = \rho(AA^T)$, onde ρ é o raio espectral, e quando A é normal.

$$\Phi^T(SK-KS)\Phi = \mathbf{S}\,\mathbb{K} - \mathbb{K}\,\mathbf{S} = [(\lambda_j - \lambda_i)s_{ij}] \quad ,$$

decorre que $\mathbf{S}$ comuta com $\mathbb{K}$ se, e somente se, S comuta com K . Equivalentemente, sempre que $s_{ij} = 0$ para $\lambda_i \neq \lambda_j$. Em particular, de (33) e (36), obtemos que $\mathbf{E}$ comuta com $\mathbb{K}$.

Definamos a função

$$\psi(\mathbf{S}) = \|\mathbf{S} - \mathbf{B}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (s_{ij} - \beta_{ij})^2 \quad ,$$

para matrizes simétricas $\mathbf{S}$ que comutam com $\mathbb{K}$. Pela definição de $\mathbf{E}$, temos

$$\psi(\mathbf{E}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\gamma_{ij} - \beta_{ij}\right)^2 = \sum_{\lambda_i \neq \lambda_j}\sum \beta_{ij}^2 \quad .$$

Por outro lado,

$$\psi(\mathbf{S}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (s_{ij} - \gamma_{ij} + \gamma_{ij} - \beta_{ij})^2$$

$$= \|\mathbf{S} - \mathbf{E}\|^2 - \psi(\mathbf{E}) \quad ,$$

pois que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (s_{ij} - \gamma_{ij})(\gamma_{ij} - \beta_{ij}) = \sum_{\lambda_i \neq \lambda_j}\sum (s_{ij} - \gamma_{ij})(\gamma_{ij} - \beta_{ij})$$

$$= -\sum_{\lambda_i \neq \lambda_j}\sum s_{ij}\beta_{ij} = 0 \quad ,$$

porquanto $s_{ij} = 0$ para $\lambda_i \neq \lambda_j$, visto que $\mathbf{S}\,\mathbb{K} = \mathbb{K}\,\mathbf{S}$. É cla ro, então, que ψ atinge um mínimo em $\mathbf{E}$.

Para finalizar, estimaremos o erro $\|B - E\|$ na aproximação de B por E . Escrevamos

$$\Phi = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \quad ,$$

de modo que de (34)

$$Kv_k = \lambda_k v_k \quad , \qquad v_k^T v_j = \delta_{kj} \quad ,$$

isto é, $K\Phi = \Phi K$. Por outro lado, de (34), obtemos também que

$$\beta_{ij} = v_i^T B v_j \quad .$$

Logo,

$$(\lambda_i - \lambda_j)\beta_{ij} = \lambda_i v_i^T B v_j - \lambda_j v_i^T B v_j$$

$$= (v_i^T K B v_j - v_i^T B K v_j) = - v_i^T R v_j = r_{ij} \quad ,$$

onde

$$R = [r_{ij}] = \Phi^T(KB - BK)\Phi = \mathbf{K}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{K}$$

é skew-simétrica. Sendo que

$$\psi(\mathbf{E}) = \|\Phi^T(B - E)\Phi\|^2 = \sum_{\lambda_i \neq \lambda_j}\sum \beta_{ij}^2 = \sum_{\lambda_i \neq \lambda_j}\sum \frac{r_{ij}^2}{(\lambda_i - \lambda_j)^2} \quad ,$$

concluímos

$$\psi(\mathbf{E}) \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{\lambda_i \neq \lambda_j}\sum r_{ij}^2 \quad , \qquad \delta = \min_{\lambda_i \neq \lambda_j} |\lambda_i - \lambda_j| \quad ,$$

isto é,

$$\|\mathbf{E}-\mathbf{B}\|^2 \leq \frac{1}{\delta^2}\|\mathbf{K}\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathbf{K}\| \quad . \tag{37}$$

Observações:

1 - Se K possui um único autovalor α, então temos que $\mathbf{K}=\alpha\mathbf{I}$, onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade. Nesta situação, qualquer $\mathbf{B}$ comuta com $\mathbf{K}$ e, obviamente, a melhor aproximação para $\mathbf{B}$ é a própria matriz $\mathbf{B}$.

2 - Se K não possui autovalores repetidos, temos que os elementos γ_{ij} da matriz $\mathbf{E}$ são nulos para $i \neq j$. Neste caso, decorre que a matriz $\mathbf{E}$ é obtida desprezando os elementos fora da diagonal principal da matriz $\mathbf{B}$.

3 - Se K possuir autovalores repetidos, a matriz $\mathbf{E}$ não precisará ser diagonal. Porém, como as matrizes K e E são simétricas e comutam, ambas podem ser simultaneamente diagonalizadas através de alguma outra matriz ortogonal T.

4 - O tipo de problema de Otimização que consiste em aproximar matrizes numa determinada classe, vem sendo considerado na literatura atual, [17].

BIBLIOGRAFIA

[1] AHLFORS, Lars V., Complex Analysis. New York, McGraw-Hill, 1953.

[2] BALENDRA, T.; TAT, C.W.; LEE, S.L., Modal Damping for Torsionally Coupled Buildings on Elastic Foundation. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 10, 735-756, 1982.

[3] BELLMAN, R., Introduction to Matrix Analysis. 2ª edição, New York, McGraw-Hill, 1970.

[4] CAMPBELL, Stephen L.; ROSE, Nicholas J., A second order singular linear system arising in eletric power systems analysis. Int. J. Systems Sci. Vol. 13, nº 1, 101-108, 1982.

[5] CARPENA, L.H., Representação de funções matriciais e o algorítmo de Runckel-Pittelkow. Dissertação de Mestrado, Porto Alegre, UFRGS, 1985.

[6] CARSLAW, H.S; JAEGER, J.C., Operational Methods in Applied Mathematicals. 2ª edição, London, Oxford University Press, 1949.

[7] CAUGHEY, T.K., Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems. Journal of Applied Mechanics, Vol. 27, 269-271, 1960.

[8] CAUGHEY, T.K.; O'KELLY, M.E.J., Classical Modes in Damped Linear Dynamic Systems. Journal of Applied Mechanics, Vol. 32, 583-588, 1965.

[9] FADDEEV, FADDEEVA, Computational Methods of Linear Algebra. Vol.I, San Francisco, W.H. Freeman, 1963.

[10] FOSS, K.A., Co-Ordinates Which Uncouple the Equations of Montion of Damped Linear Dynamic Systems. Journal of Applied Mechanics. Vol. 25, nº 3, 361-364, 1958.

[11] GANTMACHER, F.R., The Theory of Matrices. Vol.I, New York, Chelsea, 1959.

[12] HARRIS, Cyril M; CREDE, Charles E., in Data Analysis Testing, and Methods of Control: Shock and Vibration Handbook. Vol.2, New York, MacGraw-Hill, 1961.

[13] JOHN, Fritz, Ordinary Differential Equations, New York, Courant Institute, New York University, 1970.

[14] KNOWLES, James K., Linear dynamical systems and an approximation problem for linear transformations. Int. J. Math. Educ. Sci. Tecnol. Vol. 16, nº 4, 489-492, 1985.

[15] RITGER, Paul D.; ROSE, Nicholas J., Differential Equations with Applications, New York, MacGraw-Hill, 1968.

[16] RAYLEIGH,Lord, Theory of Sound. Vol. 1, New York, Dover, 1945.

[17] REID, S., Best Rank-k Approximation to a Matrix. American Mathematical Montly, 503-504, Ag-Sept, 1982.

[18] RUIZ-CLAEYSSEN, J.C., Equações Diferenciais Matriciais. Porto Alegre, Monografia, UFRGS, 1980.

[19] RUIZ-CLAEYSSEN, J.C.; ZEVALLOS, M., Power Series Solutions of the mth-order matrix differential equation. Quart. App. Math., Vol. XXXVII, nº 4, 1980.

[20] RUIZ-CLAEYSSEN, J.C.; TSUKAZAN, T., Dynamical Solutions of Linear Matrix Equations. Porto Alegre, Notas de Matemática, nº 8, UFRGS, 1986.

[21] STARZHINSKII, V.M., <u>Applied Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations</u>. Moscou, Mir, 1980.

[22] STRANG, G., <u>Linear Algebra and its Applications</u>, 2ª edição, New York, Academic Press, 1980.