

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Instituto de Física

**Evolução de Estrelas
com Acréscimo de Massa**

Silvia Helena Becker Livi

PORTO ALEGRE
1975

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

EVOLUÇÃO DE ESTRELAS COM ACRÉSCIMO DE MASSA

Silvia Helena Becker Livi

Dissertação realizada sob a orientação da Dra. Zulema Abraham, apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Porto Alegre

1 9 7 5

INSTITUTO DE FÍSICA
BIBLIOTECA

O presente trabalho foi parcialmente financiado pelas seguintes instituições:

Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

Comissão de Aperfeiçoamento do Pessoal do Ensino Superior

Os serviços de computação foram realizados no computador Burroughs 6700 do

Centro de Processamento de Dados da UFRGS

SINOPSE

Simulamos a evolução de uma estrela com acréscimo de massa aumentando a massa de seu envelope e transferindo-a posteriormente para o interior. O modelo inicial tinha $1 M_{\odot}$ e ao fim de 55 modelos foi atingido $1,2 M_{\odot}$ com uma razão de acréscimo constante de $10^{-8} M_{\odot}/\text{ano}$. Esse é o acréscimo típico da estrela que recebe massa em um sistema binário próximo. São discutidas possíveis implicações de soluções múltiplas na evolução de estrelas com acréscimo de massa.

O modelo ao qual foi acrescentada massa foi obtido simulando a evolução de uma estrela de $1 M_{\odot}$ a partir de um modelo homogêneo tendo sido feitos 255 modelos até a idade de $5,0 \times 10^9$ anos.

Em ambos os casos foi usado um método implícito que resolve simultaneamente todas as equações de evolução estelar. O modelo homogêneo inicial foi calculado pelo método de Runge-Kutta com $X = 0,73$, $Z = 0,02$, sem considerar o He^3 e o C^{12} em equilíbrio.

ABSTRACT

The evolution of a star with mass increase is simulated by increasing the mass of its envelope which is later transferred to its interior. The initial model has $1 M_{\odot}$ and after 55 models constructed with a constant accretion rate of $10^{-8} M_{\odot}/\text{year}$ we obtained a star of $1.2 M_{\odot}$. This is a typical rate of increase for a star that receives mass in a close binary system. Possible implications of multiple solutions on the evolution of stars with mass increase are discussed.

The model to which mass was added was obtained starting from an homogeneous star and making 214 models up to the age of 5×10^9 years.

In both cases an implicit method was used which solves simultaneously all the equations of stellar evolution. The initial homogeneous model was calculated by Runge-Kutta's method with $X = 0.73$, $Z = 0.02$, without considering He^3 and C^{12} in equilibrium.

Índice

Introdução	1
I Evolução Estelar	
I-1 Equações de Equilíbrio	5
I-2 Equação de Estado	12
I-3 Energia Estelar	14
I-4 Variação das Abundâncias	22
I-5 Opacidades	23
II Métodos Numéricos	
II-1 Apresentação do Problema	38
II-2 Método de Runge-Kutta	41
II-3 Método das Correções Diferenciais	42
II-4 Equações Temporais	46
II-5 Método Implícito Usado	48
III - Soluções Múltiplas e Transferência de Massa	
III-1 Soluções Múltiplas	58
III-2 Estrelas Duplas e Transferência de Massa	61
IV - Resultados	
IV-1 Cálculo de modelos de estrelas homogêneas de massas entre $5 M_{\odot}$ e $1 M_{\odot}$ pelo método de Runge-Kutta	67
IV-2 Divisão em Camadas	70
IV-3 Evolução de uma estrela de $1 M_{\odot}$	74
IV-4 Acréscimo de Massa	105
IV-5 Comentários	120
Referências Bibliográficas	122

Índice das tabelas

- Tabela 1 - Parâmetros usados no cálculo da razão de reação e energias das principais reações nucleares. 21
- Tabela 2 - Mistura de elementos pesados das tabelas de opacidade e usada na composição química inicial dos modelos. 26
- Tabela 3 - Valores de $(\lambda_{De}/\lambda_D)^2$ e de $g(X)$ usados no cálculo das correções das opacidades devido a efeitos de interações coletivas. 28
- Tabela 4 - Valores interpolados das correções F das opacidades devido a efeitos de interações coletivas no espalhamento de eletrons (Watson, 1969b) para os valores de X das tabelas de opacidade. 29
- Tabela 5 - Razão de transferência de massa para alguns modelos teóricos de binárias. 66
- Tabela 6 - Características dos modelos homogêneos de massas compreendidas entre $1 M_{\odot}$ e $5 M_{\odot}$ calculados pelo método de Runge-Kutta. 69

Tabela 7 - Característica dos modelos que simulam a evolução de uma estrela de $1M_{\odot}$. 92

Tabela 8 - Características dos modelos com acréscimo de massa. 110

Tabela 9 - Abundâncias químicas no centro e na superfície de alguns dos modelos com acréscimo de massa. 118

Nota: Nas Tabelas 6, 7, 8 e 9 as potências de dez quando diferentes de zero, estão indicadas com seu sinal ao lado do número.

Índice das Figuras

- Fig. 1 - Correções das opacidades devido a efeitos coletivos como função de $(\lambda_{De}/\lambda_D)^2$ e de $\log(T^3/n_e)$ segundo Watson (1969b). 30
- Fig. 2 - Opacidades em função de X para alguns valores de T e ρ . 33
- Fig. 3 - Pontos usados na interpolação das opacidades para obter $\log \kappa(X_0, \rho_0, T_0)$. 34
- Fig. 4 - Modelos de massa total M e massa do núcleo M_N obtidos com o mesmo programa de computador (Roth e Weigert, 1972). 60
- Fig. 5 - Superfícies e equipotenciais num sistema binário. 62
- Fig. 6 - Efeito dos erros numéricos na distribuição de He^3 em função do tempo causados pela variação brusca da espessura das camadas. 72
- Fig. 7 - Efeito dos erros na abundância de He^3 das camadas que se tornam radiativas ocasionados pela incerteza na posição do borde do núcleo convectivo entre duas camadas. 81

- Fig. 8 - Efeito dos erros na distribuição de He^3 devido a recessão do borde do núcleo convectivo em mais de uma camada entre modelos sucessivos. 82
- Fig. 9 - Distribuição de He^3 no interior dos modelos como função do tempo. 83
- Fig. 10 - Distribuição de C^{12} no interior dos modelos com núcleo convectivo como função do tempo. 84
- Fig. 11 - Distribuição de C^{12} como função do tempo a partir do último modelo da Fig. 10. 85
- Fig. 12 - Distribuição de N^{14} no interior dos modelos como função do tempo. 86
- Fig. 13 - Distribuição de He^3 como função do tempo em modelos que seguem aos da Fig. 9. 87
- Fig. 14 - Distribuição de H^1 no interior dos modelos em função do tempo. 88
- Fig. 15 - Distribuição de He^4 no interior dos modelos em função do tempo. 89
- Fig. 16 - Distribuição de O^{16} no interior dos modelos em função do tempo. 90

Fig. 17 - Diagrama de Hertzsprung-Russell dos modelos obtidos simulando a evolução de uma estrela de $1 M_{\odot}$.

91

Fig. 18 - Diagrama de Hertzsprung-Russell dos modelos com e sem acréscimo de massa.

119

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é colocar em funcionamento um programa de computador para simular a evolução de estrelas com acréscimo de massa. Com isso poderemos verificar se a estrutura dessas estrelas se acomoda à sua massa atual ou se permanece semelhante à que tinha.

Por evolução estelar entendemos as mudanças que ocorrem na estrutura das estrelas quando elas se contraem ou se expandem gravitacionalmente e quando reações nucleares alteram sua composição química. Os modelos estelares descrevem a estrutura da estrela, isto é, temperatura, pressão, densidade, luminosidade e composição química como função do raio da estrela e de sua idade. Após sua formação a estrela se contrai até sua temperatura central atingir valor suficiente para transformar hidrogênio em hélio no seu interior. Essa é sua maior fonte de energia, que manterá a estrela a maior parte de sua vida. Quando o hidrogênio central se extinguir o núcleo de puro hélio se contrairá. Nas estrelas de massa pequena a contração terminará ao originar a degenerescência dos elétrons, cuja pressão será suficiente para suportar o peso das camadas externas da estrela. Nas estrelas de massa maior a temperatura central atingirá valor suficiente para iniciar a queima de hélio, detendo a contração antes dos elétrons se tornarem degenerados.

Duas estrelas isoladas de mesma massa e composição química inicial seguirão a mesma linha de evolução, isto é, serão iguais se tiverem a mesma idade. A massa é a característica mais dominante, sendo que as estrelas de massa maior evoluem muito mais ligeiro, passando menor tempo em qualquer de suas etapas. Estrelas isoladas mantêm sua massa praticamente constante grande parte de suas vidas. Quando uma estrela faz parte de um sistema duplo, entretanto, sua evolução poderá ser profundamente alterada devido a interações com sua companheira. Se um sistema duplo for próximo, suas componentes não se poderão expandir livremente. Há um limite além do qual a matéria não mais estará gravitacionalmente ligada à estrela, embora continue ligada ao sistema. Esse limite é denominado lóbulo de Roche. A matéria que ultrapassar o lóbulo e que não puder voltar à estrela de origem, cujo lóbulo está cheio, acabará sendo atraída pela outra. A primeira estrela a atingir a fase de expansão é a de massa maior, porém a transferência de massa, de modo geral, inverte a massa das componentes do sistema. Assim sendo, a estrela inicialmente de massa menor se transformará na mais massiva do par. Como essa estrela não seguiu a linha evolucionária geral sua estrutura poderá ser diferente da de uma estrela normal de mesma massa e composição química atuais. Essa possibilidade contraria o teorema de Vogt-Russel segundo o qual uma estrela de massa e composição química determi-

nadas possui uma única configuração de equilíbrio na qual seu estado físico e estrutura são completamente fixos. Odgers (1958) demonstrou que o teorema não é válido e diversos autores já calcularam explicitamente vários grupos de soluções estáveis diferentes. Tais soluções são bem separadas umas das outras e se devem tanto a diversidade dos envelopes como dos núcleos. O caso que nos atraiu para o presente trabalho foi apresentado por Roth e Weigert (1972). Seus cálculos revelaram modelos de mesma massa em duas configurações possíveis: a) com núcleo de helio isotérmico no qual o gás de elétrons é altamente degenerado; b) com núcleo de helio não degenerado onde ocorrem reações nucleares (3α). O último caso é típico de estrelas de massa grande enquanto o primeiro corresponde a estrelas de massa inferior à do Sol. Há entretanto uma superposição dos dois casos para núcleos entre 0,35 e 0,45 massas solares. Uma estrela real nessa região de massa e composição química deverá se apresentar em apenas uma dessas estruturas, sem atingir a outra estrutura, já que as soluções correspondentes estão separadas por forte barreira de potencial. Para decidir qual a configuração atual da estrela é necessário saber sua história, ou melhor, sua linha anterior de evolução. Os estudos em discussão, porém, são de configurações estáticas, isto é, os modelos não foram obtidos através da evolução de estrelas.

O programa que estamos implantando seguirá a evolução de estrelas que ganham massa e tenta reproduzir a estrutura e evolução da estrela inicialmente menos massiva do

sistema. A razão de acréscimo de massa e a época em que tal acontece dependem da massa e separação das componentes. Antes da fase de transferência de massa as estrelas se comportam como se fossem isoladas, seguindo a evolução usual de uma estrela de sua massa e composição química inicial. Por isso começamos nosso estudo com a evolução de uma estrela simples para depois de evoluçioná-la iniciar o acréscimo de massa. A teoria de evolução estelar será apresentada no Capítulo I. O método usado, que resolve implicitamente as equações temporais da evolução estelar, será discutido no Capítulo II. Esse método permite resolver problemas nos quais a hipótese usual de equilíbrio quase-estático não é válida, como no caso de acréscimo de massa. Soluções múltiplas e transferência de massa é o assunto do Cap. III.

Os resultados da evolução de uma estrela de massa inicialmente igual à do Sol estão no Capítulo IV. Usamos composição química inicial $X = 0,73$, $Z = 0,02$ calculando modelos homogêneos entre $5 M_{\odot}$ e $1 M_{\odot}$ pelo método de Runge-Kutta. Usando um método implícito simulamos a evolução de uma estrela de $1 M_{\odot}$ até a idade de $6,9 \times 10^9$ anos. Voltando ao modelo de $5,0 \times 10^9$ anos iniciamos o acréscimo de massa à razão típica de 10^{-8} massas solares/ano durante 2×10^7 anos até atingir $1,2 M_{\odot}$.

I. EVOLUÇÃO ESTELAR

I-1 Equações de Equilíbrio

Para descrever a estrutura de uma estrela é necessário descobrir os princípios físicos que a regem a partir de dados observacionais. Nesse aspecto surgem duas dificuldades essenciais: a) a evolução das estrelas geralmente é um processo tão lento que não pode ser observado diretamente pelo homem, mesmo acumulando medidas durante séculos; b) só é possível medir propriedades da superfície das estrelas, isto é, luminosidade, temperatura e composição química, de modo que os estudos de seu interior se devem basear em comprovações indiretas. Apesar desses obstáculos muito se conseguiu descobrir acumulando conhecimentos provenientes de diversos campos.

Os espectros das estrelas podem ser agrupados segundo classes que dependem principalmente de sua temperatura superficial (classe espectral), mostrando também efeitos da gravidade em sua superfície (classe de luminosidade). Colocando em um diagrama classe espectral de um grupo de estrelas contra sua luminosidade absoluta, a maioria delas se distribui ao longo da estreita faixa, denominada sequência principal. Tais diagramas chamados de Hertzsprung-Russell geralmente são feitos para aglomerados de estrelas pois supõe-se

que todas as estrelas de um aglomerado se formam mais ou menos ao mesmo tempo e com a mesma composição química inicial. Além disso, como as distâncias entre estrelas do mesmo aglomerado são desprezíveis comparadas com a distância do aglomerado até nós, estimativas incorretas de distância não alteram a forma do diagrama.

Os diagramas de Hertzsprung-Russell são interpretados em termos de evolução das estrelas, isto é, a maioria das estrelas está na sequência principal porque essa região do diagrama corresponde ao estado físico das estrelas na fase mais longa de suas vidas.

As variações apresentadas pelas estrelas do mesmo aglomerado deve ser causada pela diferença entre suas massas, de modo que fazendo diagramas de Hertzsprung-Russell de aglomerados de estrelas podemos isolar as variações devido a massa das causadas por diferenças de idade e composição química inicial.

A massa das estrelas só pode ser determinada em sistemas duplos ou múltiplos e geralmente com pouca precisão. Os dados obtidos indicam que na sequência principal a luminosidade da estrela é diretamente proporcional à sua massa.

Para uma estrela não colapsar é necessário que, em cada ponto, as forças gravitacionais sejam contrabalançadas pelo gradiente de pressão. Supondo simetria esférica, desprezando efeitos de rotação e campos magnéticos que geralmen-

te são muito pequenos, podemos escrever que

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{GM_r}{r^2} \rho \quad (I-1)$$

onde P é a pressão a uma distância r do centro da estrela, M_r é a massa contida na esfera de raio r e pode ser obtida se soubermos a densidade ρ como função de r através da equação de conservação da massa

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (I-2)$$

Sabemos que as estrelas irradiam energia, o que requer a existência de um gradiente de temperatura, portanto elas não podem estar em equilíbrio térmico. Cada camada, entretanto, pode ser considerada em equilíbrio termodinâmico local. Nesse caso há conservação de energia em cada camada, ou seja

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dU}{dt} + P \frac{dV}{dt} \quad (I-3)$$

onde dQ é a quantidade de calor adicionada ao material da camada, dU a variação da energia interna e dV a variação de volume da camada, ocorrida no intervalo de tempo dt . Como na camada contida entre r e $r+dr$ é gerada a quantidade $E(r)$ de energia por segundo, segue que a luminosidade $L(r+dr)$ no borde externo e a luminosidade $L(r)$ são tais que

$$\frac{dQ}{dt} = E(r) - \frac{L(r + dr) - L(r)}{dr} \quad (I-4)$$

e, em virtude da (I-4) e da (I-3)

$$\frac{dL}{dr} = E - \frac{dU}{dt} - P \frac{dV}{dt} \quad (I-5)$$

O transporte de energia pode ocorrer por condução, convecção ou radiação. A contribuição do primeiro é usualmente insignificante, mas assume grande importância nas regiões centrais de estrelas pequenas, onde a densidade é tão alta que os eletrons se tornam degenerados. O segundo ocorre quando há instabilidade convectiva, ou seja, quando um elemento que seja deslocado de sua posição inicial continua a se mover no mesmo sentido. Isso ocorre quando o gradiente de temperatura é tão alto que os elementos que sobem mantêm sua temperatura superior a dos seus arredores e continuam a subir. O contrário acontece com os elementos frios que descem, de modo que extensas regiões da estrela podem ser convectivas. O transporte por convecção é extremamente eficiente. O transporte por radiação ocorre devido a difusão dos ftons de regiões mais quentes, onde a densidade de energia é maior do que nas regiões mais frias.

Em qualquer caso podemos escrever que

$$\frac{dT}{dr} = \nabla \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \quad (I-6)$$

Não havendo instabilidade convectiva ∇ será o gradiente radiativo de temperatura

$$\nabla_r = \frac{3 \kappa_T L_r P}{16 \pi a c G M_r T^4} \quad (\text{I-7})$$

onde κ_T é o coeficiente de absorção radiativa mais o coeficiente de condução por eletrons, c a velocidade da luz, e a a constante de Stefan-Boltzmann.

Haverá transporte convectivo quando o gradiente convectivo for menor que o gradiente radiativo. A expressão do gradiente convectivo depende da equação de estado, do material e é calculada no caso adiabático.

$$\nabla_{\text{conv}} = \nabla_{\text{ad}} = \frac{r}{T} \left(\frac{dT}{dr} \right)_{\text{ad}} \quad (\text{I-8})$$

onde, sendo n_A o número de partículas do elemento A,

$$\left(\frac{dT}{dP} \right)_{\text{ad}} = - \frac{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{T, n_A} + P \right] \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T, n_A}}{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{T, n_A} + P \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P, n_A} + \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V, n_A}} \quad (\text{I-9})$$

As equações da conservação (I-1), (I-2) e (I-5), somadas à equação de transporte (I-6) com ∇ substituído convenientemente pela (I-7) ou (I-8) devem ser acompanhadas da equação de estado do material e de relações que descrevam como é gerada a energia no interior da estrela, além do coeficiente de absorção radiativa ou de condução por eletrons li-

vres como função de ρ , T e composição química. Nos parágrafos que seguem discutiremos separadamente essas relações; por ora vamos supor que sejam conhecidas.

Para obtermos P , T , L e M em função de r teremos essencialmente que resolver um sistema de quatro equações diferenciais. A variável independente geralmente usada, ao invés do raio, é a massa que diminui lentamente a medida que é liberada sob a forma de energia nas reações nucleares. Usamos então, de acordo com Z. Abraham (1974) o número de nucleons, N' , como variável independente, o qual se conserva frente a reações nucleares.

Tendo em vista que

$$\frac{dM}{dN'} = \frac{dM}{dV} \frac{dV}{dN'} = \rho v \quad (\text{I-10})$$

onde v é o volume por nucleon, as equações que usaremos serão:

$$\frac{dP}{dN'} = - \frac{G M_r}{4\pi r^4} \frac{dM}{dN'} \quad (\text{I-11})$$

$$\frac{dr}{dN'} = \frac{v}{4\pi r^2} \quad (\text{I-12})$$

$$\frac{dT}{dN'} = \nabla \frac{T}{P} \frac{dP}{dN'} \quad (\text{I-13})$$

$$\frac{dL}{dN'} = \epsilon - \left(\frac{du}{dt} + P \frac{dv}{dt} \right) \quad (\text{I-14})$$

onde u é a energia interna por nucleon, ϵ é a energia gerada por unidade de tempo por nucleon e a variação temporal na (I-14) é denominada por Iben (1965) de energia gravitacional.

Só será possível resolver o sistema formado pelas equações diferenciais (I-11), (I-12), (I-13) e (I-14) se usarmos as condições de contorno convenientes. No centro da estrela, isto é, em $N' = 0$, a massa e a luminosidade se anulam,

$$M(N' = 0) = 0 \quad (\text{I-15})$$

$$L(N' = 0) = 0 \quad (\text{I-16})$$

Os demais valores centrais são desconhecidos, não havendo qualquer possibilidade de obtê-los experimentalmente. A temperatura e pressão do interior são várias ordens de grandeza superiores às de superfície, sendo usual considerá-las nulas na superfície (Clayton, 1968). Apesar da estrutura das estrelas ser pouco dependente das condições da superfície usamos melhor aproximação. A pressão na superfície é escolhida de modo que a pressão de radiação seja o dobro da pressão de gás, portanto a pressão total P_T é dada por

$$P_T = \frac{3}{2} P_R \quad \text{na superfície} \quad (\text{I-17})$$

A temperatura da superfície é dada pela aproximação de Eddington

$$T_S = 2^{-1/4} T_{ef} \quad (\text{I-18})$$

onde T_{ef} é a temperatura efetiva da estrela definitiva como

$$T_{ef} = \left(\frac{L}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{1/4} \quad (I-19)$$

I-2 Equação de estado

Nas elevadas temperaturas existentes no interior das estrelas os átomos estão totalmente ionizados de modo que, apesar das altas densidades, seu comportamento se aproxima bastante de um gás perfeito. A pressão do gás, P_G , devemos somar a pressão de radiação, P_R , que é muito importante nas estrelas de massa superior à do Sol. Pequenas correções são usadas para levar em conta a degenerescência dos elétrons e as interações coulombianas, visto que o gás é formado por partículas eletricamente carregadas. A equação de estado será então

$$P = P_G + P_R \quad (I-20)$$

onde

$$P_G = \sum_A (1 + Z_A) n_A \frac{kT}{v} (1 + \lambda + \eta) \quad (I-21)$$

e

$$P_R = \frac{a}{3} T^4 \quad (I-22)$$

sendo k a constante de Boltzmann, n_A o número de partículas de massa atômica A por nucleon e Z_A o número atômico das mesmas. λ é a correção por degenerescência dos eletrons e η a correção devido a interações coulombianas.

A correção λ devido a degenerescência dos eletrons, segundo Henyey, Le Levier e Levee (1959) vale

$$\lambda = \frac{\sum Z_A n_A}{\sum (1+Z_A) n_A} \frac{\delta}{(5,01326 (1+0,05512\delta))^{1/3}} \quad (\text{I-23})$$

onde δ , o parâmetro de degenerescência vale

$$\delta = 0,183655 \frac{\sum Z_A n_A}{v T^{3/2}} \quad (\text{I-24})$$

Os valores numéricos nesta fórmula e nas que seguem correspondem a v em unidades de 10^{-24} cm^3 e T em unidades de 10^6 OK .

Como no interior das estrelas o gás está totalmente ionizado a pressão devido a interações coulombianas deve ser considerada quando as densidades forem altas. Seu efeito, entretanto, é diminuir a pressão do gás visto que a energia potencial coulombiana é negativa e aumenta em módulo com a densidade.

A correção η devido a interações coulombianas é dada por

$$\eta = - 0,0403574347 \frac{1}{v^{1/2} \sum (1+Z_A) n_A} \left[\frac{1}{T} \sum_A (Z_A^2 + Z_A) n_A \right]^{3/2} \quad (\text{I-25})$$

I-3 Energia Estelar

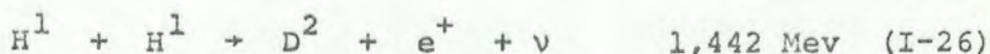
H. von Helmholtz em 1854 e Lord Kelvin em 1861 demonstraram que a contração do Sol poderia gerar energia. Quando uma esfera gasosa se contrai quasiestaticamente, metade da energia gravitacional liberada na contração se transforma em energia térmica e a outra metade é irradiada. Os cálculos demonstraram que a energia irradiada poderia manter o Sol com sua luminosidade atual por cerca de 100 milhões de anos. Esse período é demasiado curto pelas evidências geológicas segundo as quais sua luminosidade atual vem se mantendo durante bilhões de anos. A fonte atual de energia do Sol deve ser capaz de lhe fornecer bastante mais energia do que a contração gravitacional.

Essa fonte, descoberta por Bethe (1938) é a energia de fusão nuclear.

O máximo de energia que pode ser retirada da matéria é obtido pela transformação de hidrogênio em ferro e fornece 0,08% de sua massa. Essa energia é capaz de manter a luminosidade do Sol durante várias dezenas de bilhões de anos. A transformação de hidrogênio em hélio gera 0,07% da energia armazenada, fornecendo cerca de 80% da energia que pode ser liberada da matéria estelar. Já sabemos que as estrelas passam a maior parte de suas vidas na sequência principal, logo somos levados a concluir que a sequência principal deve corresponder a estrelas transformando hidrogênio em hélio. Para que tal aconteça são necessárias temperaturas superiores a

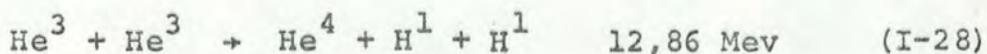
10^7 °K, que correspondem aos valores estimados para as regiões centrais do Sol. Como temos as temperaturas desejadas e sabemos que o hidrogênio é o elemento mais comum do universo, podemos ter bastante confiança de estarmos no caminho certo. A descrição das reações, as energias liberadas e a razão em que ocorrem para cada densidade e temperatura são ainda necessárias para que se possa fazer modelos estelares.

Há dois ciclos principais através dos quais pode ocorrer a transformação de hidrogênio em hélio, nas condições existentes no interior das estrelas. O primeiro é denominado proton-proton:



O positron (e^+) resultante imediatamente se recombina com um eletrón dando origem a dois raios gama. O neutrino (ν) possui uma seção de choque quase nula e passa facilmente através da estrela levando cerca 0,263 Mev dos 1,442 Mev liberados nesse passo. A energia liberada em cada reação inclusive com a contribuição dos neutrinos, está escrita ao lado de cada reação.

A seguir é muito provável que ocorra a reação



que exige que tenham ocorrido duas vezes as reações anteriores (I-26) e (I-27).

O ciclo pode, porém, geralmente com menor probabilidade, ser completado através de



ou



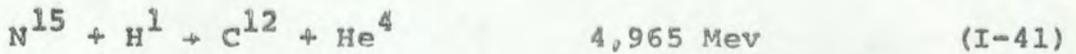
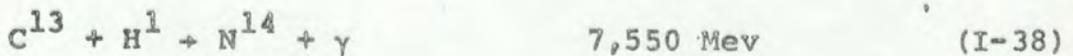
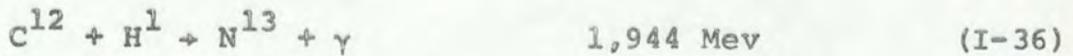
onde * indica estado excitado.

O neutrino da (I-30) leva 0,80 Mev para fora da estrela e o da (I-34) 7,2 Mev, de modo que a energia que permanece na estrela é diferente para as diversas alternativas do ciclo proton-proton.

O ciclo proton-proton tem sua velocidade definida pela (I-26) já que a vida média dos protons em relação à (I-26), nas condições existentes no centro do Sol, é da ordem de 10^{10} anos. Isso se deve ao fato que a barreira coulombiana que eles devem ultrapassar é da ordem de 1000 kev en-

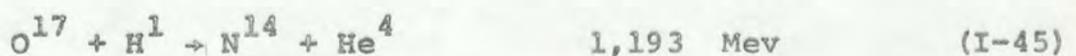
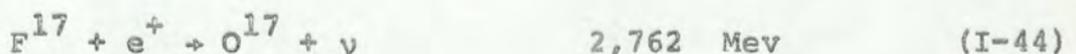
quanto a energia cinética média dos protons a 10^7 OK é apenas 1 kev.

O outro ciclo, denominado ciclo do carbono, envolve partículas mais pesadas que tem barreira coulombiana bastante maior, razão pela qual só ocorre a temperatura mais altas. Esse ciclo é dominante nas estrelas de massa grande. Nele o carbono age como catalizador pois é renovado ao final, como segue



Da energia total fornecida à estrela por ciclo, deve ser descontada a diferença devida aos neutrinos liberados. Os neutrinos em (I-37) e (I-40) retiram em média respectivamente 0,72 Mev e 0,98 Mev da estrela.

O ciclo do carbono também oferece alternativas; no lugar da (I-41) pode ocorrer

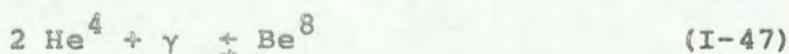


A energia média do neutrino de (I-44) vale 0,94 Mev. Esse ciclo exige a existência prévia dos catalizadores no material estelar.

Sabemos agora a maneira como o hidrogênio se transforma em hélio no interior das estrelas. Se, após queimar hidrogênio no núcleo, a temperatura central atingir 10^8 OK ou mais começará a queima de hélio através do processo 3 alfa:



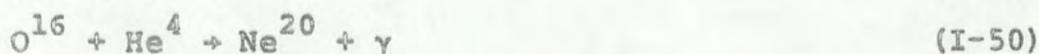
Esse processo ocorre devido a criação intermediária de um núcleo de Be^8 , cuja vida média é $2,6 \times 10^{-16}$ segundos e que chega a equilíbrio nas condições usuais de queima de hélio na proporção de 1 partícula de Be^8 para 10^9 partículas de He^4 .



Apesar da pequena proporção de Be^8 , como o He^4 é muito abundante pode ocorrer a reação



O carbono poderá a seguir capturar mais partículas alfa, seguindo a sequência



A energia gerada por segundo e por nucleon devido às reações nucleares, ϵ , é calculada através de

$$\epsilon = \sum E_{ij} R_{ij} \quad (\text{I-52})$$

onde E_{ij} é a energia liberada na reação entre os elementos i e j , ou seja, a energia indicada ao lado de cada reação menos a energia média subtraída pelos neutrinos. R_{ij} , a razão de reação por nucleon e por segundo, depende fortemente da temperatura, como segue

$$R_{ij} = \frac{n_i n_j}{T^{2/3} v} \exp \left[A_{ij} - B_{ij} T^{-1/3} + S_{ij} \right] \quad (\text{I-53})$$

onde A_{ij} em unidades de kev-barns, depende da seção de choque da reação, σ_{ij} , entre os elementos i e j e de suas massas atômicas m_i e m_j e números atômicos Z_i e Z_j , a saber

$$A_{ij} = \ln \left(\frac{7,2 \times 10^{29}}{A Z_i Z_j (1 + \delta_{ij})} \sigma_{ij} B_{ij}^2 \right) \quad (\text{I-54})$$

$$\text{onde } B_{ij} = 42,58 (Z_i^2 Z_j^2 A)^{1/3} \quad (\text{I-55})$$

$$A = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$$

O fator $(1+\delta_{ij})$ leva em conta a indistinguibilidade das partículas quando a reação é entre dois elementos iguais pois

$$\delta_{ij} \begin{cases} = 1 & \text{para } i = j \\ = 0 & \text{para } i \neq j \end{cases}$$

O último termo da exponencial na (I-53) é o fator de blindagem (screening factor) e pode ser escrito

$$S_{ij} = S'_{ij} S_0 \quad (\text{I-56})$$

onde S'_{ij} são os números listados na Tabela 1 e S_0 vale

$$S_0 = 0,97276 \left[\frac{1}{v T^3} \sum (Z_A^2 + z_A) n_A \right]^{1/2} \quad (\text{I-57})$$

Para levar em conta as alternativas do ciclo proton-proton que começam nas reações (I-30) e (I-33) as incluímos em E_{34} que deve ser substituído por

$$E'_{34} = E_{34} + (\gamma E_{17} + E_{e7}) / (1 + \gamma) \quad (\text{I-58})$$

onde $E_{17} = 1,73663 \times 10^{-5}$; $E_{e7} = 2,78598 \times 10^{-5}$

$$\gamma = \frac{0,091179}{\sum Z_A n_A} \frac{n_1}{T^{1/6}} \exp(39,1440 - 102,639/T^{1/3} + S_0)$$

(I-59)

Tabela 1

reação	ij	A_{ij}	B_{ij}	S'_{ij}	m_i	$10^5 E_{ij}$
H^1, H^1	1,1	26,3807	33,8077	1/4	1	1,07018
He^3, He^3	3,3	84,6792	122,737	1	2,99262	2,05865
He^3, He^4	4,3	76,0296	128,266	1	3,97154	0,253126
C^{12}, H^1	12,1	77,1643	136,913	3/2	11,9069	1,76066
N^{14}, H^1	14,1	78,0249	152,299	7/4	13,8944	2,24988
O^{16}, H^1	16,1	79,2780	166,945	2	15,8708	0,568731

A reação (I-27) ocorre imediatamente após a (I-26) e o deutério logo alcança equilíbrio de modo que a (I-27) foi incluída na (I-26) na Tabela 1. Pela mesma razão a (I-37) e (I-38) foram incluídas na (I-36), a (I-40) e (I-41) na (I-39) e a (I-44) e (I-45) na (I-43).

As unidades usadas foram

$$v \text{ em } 10^{-24} \text{ cm}^3$$

$$T \text{ em } 10^6 \text{ } ^\circ\text{K}$$

$$L \text{ em } L_{\odot} = 3,86 \times 10^{33} \text{ erg/s}$$

$$t \text{ em } 10^7 \text{ anos} = 3,1536 \times 10^{14} \text{ s}$$

Julgamos conveniente salientar que os números que aparecem na Tabela 1 são diferentes dos da literatura corrente visto que definimos ϵ_{ij} e R_{ij} como valores por nucleon e não por grama como é usual.

I-4 Variação das abundâncias

A variação do número de partículas do elemento i por nucleon, n_i , com o tempo pode ser facilmente calculada se soubermos as razões de reação por nucleon por segundo, R_{ij} , visto que

$$\frac{dn_i}{dt} = \sum_j R_{ij} - \sum_k R_{ik} \quad (\text{I-60})$$

onde j indica todos os elementos que reagem dando origem ao núcleo i e k os que contribuem para a sua destruição.

Assim sendo, e considerando o D^2 , Be^7 , Li^7 , Be^8 , N^{13} , C^{13} , O^{15} , N^{15} , F^{17} e O^{17} em equilíbrio, como já havia sido feito na Tabela 1, temos

$$\frac{dn_1}{dt} = (-3R_{11} + 2R_{33} - R_{34}) - 2(R_{12,1} + R_{14,1} + R_{16,1}) \quad (\text{I-61})$$

$$\frac{dn_3}{dt} = R_{11} - 2R_{33} - R_{34} \quad (\text{I-62})$$

$$\frac{dn_4}{dt} = (R_{33} + R_{34}) + (1 - f) R_{14,1} + R_{16,1} \quad (\text{I-63})$$

$$\frac{dn_{12}}{dt} = -R_{12,1} + (1 - f) R_{14,1} \quad (\text{I-64})$$

$$\frac{dn_{14}}{dt} = - R_{14,1} + R_{12,1} + R_{16,1} \quad (\text{I-65})$$

$$\frac{dn_{16}}{dt} = f R_{14,1} - R_{16,1} \quad (\text{I-66})$$

onde f é a razão entre a reação (I-42) e a (I-41) para a qual usamos o valor

$$f = 0,000514$$

o qual se aplica as condições de temperatura e densidade existentes no interior das estrelas (Caughlan e Fowler, 1964).

I-5 Opacidades

As reações nucleares, que fornecem a maior parte da energia das estrelas, ocorrem em suas regiões centrais. Os fotons de alta energia que são gerados se termalizam no interior e devem atravessar as camadas externas mais frias até a superfície. O material da estrela não é transparente para os fotons, cujo livre caminho médio é da ordem de 1 cm. Os principais processos pelos quais eles interagem com a matéria são os seguintes:

a) absorção tipo ligado-ligado em que o foton é absorvido por um eletron ligada ao átomo, que passa para outro estado ligado de energia mais alta;

b) absorção tipo ligado-livre ou fotoionização, em que o foton é absorvido por um eletron ligado ao átomo que passa para estado do contínuo, resultando na ionização do átomo;

c) absorção tipo livre-livre, em que o foton é absorvido por um eletron do estado contínuo, que passa para outro estado contínuo de energia mais alta;

d) espalhamento por eletrons livres ou espalhamento Compton, que em sua aproximação não relativística, geralmente aplicável a estrelas, consiste no espalhamento Thomson. Essa aproximação é válida se as temperaturas não forem excessivamente altas, ou seja, quando a energia dos ftons for bem menor do que a massa de réposo do eletron.

e) espalhamento por ions ou moléculas, que só ocorre nas regiões bem externas da estrela, isto é, na sua atmosfera.

Os processos já referidos darão origem ao coeficiente de absorção radiativa κ_r sendo que apenas o espalhamento Thomson é independente da frequência. Sua fórmula no limite de completa ionização se reduz a

$$\kappa_S = 0,20(1 + X)^2 \quad (I-67)$$

onde X é a fração em peso de hidrogênio na região considerada.

Nos demais processos a opacidade depende da frequência da radiação, ν , mas para aplicar na equação (I-7) devemos calcular o efeito somado em todas as frequências, para o que usamos a média de Rosseland

$$\frac{1}{\kappa_r} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa'(\nu) + \kappa_s} \frac{dB(\nu)}{dT} d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{dB(\nu)}{dT} d\nu} \quad (\text{I-68})$$

com

$$\frac{dB(\nu)}{dT} = \frac{2h^2\nu^4}{c^2kT^2} \frac{\exp(h\nu/kT)}{\exp|(h\nu/kT)-1|^2} \quad (\text{I-69})$$

sendo usado o coeficiente de absorção reduzido:

$$\kappa'(\nu) = \kappa(\nu) (1 - e^{-h\nu/kT}) \quad (\text{I-70})$$

para levar em conta a emissão estimulada cujo efeito líquido é reduzir a opacidade total. $\kappa(\nu)$ é calculada para as interações livre livre, livre-ligado e ligado-ligado.

Usamos as tabelas de Watson (1969a, 1970) que fornecem a média de Rosseland das opacidades radiativas, κ_r , levando em conta efeitos das linhas de autoionização, mas não incluem as regiões de temperatura e densidade em que esses e

feitos são insignificantes. Nessas regiões usamos as tabelas de Cox e Steward (1965). Ambas as tabelas fornecem opacidades para 5 valores da fração de massa de hidrogênio (X) e dois valores da fração de massa de elementos mais pesados do que o hélio (Z), sendo que usamos apenas $Z = 0,02$. A mistura de elementos pesados usada nos cálculos está na Tabela 2.

Tabela 2

Z_1	A_1	X_1
6	12	0,00282
7	14	0,00092
8	16	0,00840
10	20	0,00597
11	22	0,00003
12	24	0,00036
13	26	0,00003
14	28	0,00053
18	40	0,00078
26	56	0,00016

Os valores de X da mistura são:

0,98; 0,80; 0,50; 0,20; 0,00.

Os efeitos de interações coletivas no espalhamento de eletrons não foram levados em conta nessas tabelas de opacidades. Eles estão descritos em Watson (1969b) onde também se encontram tabelas do fator de correção F , que é a razão entre as opacidades corrigidas por efeitos coletivos e as opacidades sem correções. A fórmula que se deve usar na aproximação não relativística é portanto

$$\kappa_S' = 0,20 (1 + X) F \quad (\text{I-71})$$

Devemos então subtrair da opacidade das tabelas o valor κ_S dado pela (I-67) e somar κ_S' da (I-71) para obter a opacidade radiativa corrigida.

O valor de F está tabelado em termos de $\log(T^3/n_e)$, sendo T dado em $^{\circ}\text{K}$ e n_e em cm^{-3} , e de $(\lambda_{De}/\lambda_D)^2$ onde λ_{De} é o comprimento de Debye do eletron

$$\lambda_{De} = \left[\frac{4\pi n_e e^2}{kT} \right]^{-1/2} \quad (\text{I-72})$$

e λ_D o comprimento de Debye total

$$\lambda_D = \left[\sum_i \frac{4\pi N_i Z_i^2 e^2}{kT} \right]^{-1/2} \quad (\text{I-73})$$

onde N_i é o número de partículas do elemento i por cm^3 , \log indica logaritmo decimal e n_e é o número de eletrons por cm^3

$$n_e = \frac{\rho}{M_H} \frac{1}{\mu_e}$$

onde μ_e é o peso molecular médio dos eletrons.

Para facilitar o uso da tabela escrevemos

$$\log(T^3/n_e) = 3 \log T - \log \rho - g(X) \quad (I-75)$$

onde $g(X) = - \log M_H - \log \mu_e$

$$\left(\frac{\lambda_{De}}{\lambda_D}\right)^2 = \frac{\sum N_i z_i^2}{n_e} = \sum \frac{X_i z_i^2}{A_i} \mu_e \quad (I-76)$$

Para as misturas usadas, descritas na Tabela 2, visto que $X_1 + X_2 + Z = 1$ por definição, $X_1 + X_2 = 0,98$ e

$$\begin{aligned} \sum \frac{X_i z_i^2}{A_i} &= X_1 + \frac{4X_2}{4} + \sum_{i>3} \frac{X_i z_i^2}{A_i} = 0,98 + 0,008973 = \\ &= 0,988973 \end{aligned} \quad (I-77)$$

Os valores de $(\lambda_{De}/\lambda_D)^2$ e de $g(X)$ para as misturas referidas estão na Tabela 3.

Tabela 3

X	$(\lambda_{De}/\lambda_D)^2$	g(X)
0,98	1,999003	23,772122
0,80	2,098908	23,730727
0,50	2,318701	23,651542
0,20	2,648398	23,554626
0,00	2,978104	23,475439

A tabela de Watson (1969b) fornece as correções F para valores de $(\lambda_{De}/\lambda_D)^2$ iguais a 2,0; 2,5; 3,0; 5,0; 10,0 as quais foram graficadas na Figura 1. Verificamos que para $(\lambda_{De}/\lambda_D)^2$ entre 2,0 e 3,0 justifica-se plenamente uma interpolação linear para F em função de X . Desse modo construímos a Tabela 4 onde as correções são dadas como função de $\log(T^3/n_e)$ e de X .

Tabela 4

X	$\log\left(\frac{T^3}{n_e}\right)$	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7 e -8
0,98		1,00	0,990	0,960	0,810	0,600	0,520	0,500
0,80		1,00	0,990	0,960	0,810	0,610	0,535	0,520
0,50		1,00	0,990	0,960	0,820	0,640	0,575	0,565
0,20		1,00	0,990	0,960	0,835	0,685	0,625	0,620
0,00		1,00	0,990	0,960	0,850	0,720	0,670	0,670

Os valores de F da Tabela 4 foram usados em um programa de computador que corrigiu as tabelas de Watson (1970) complementadas com as de Cox-Steward (1965), interpolando linearmente em $\log(T^3/n_e)$ para cada valor de ρ e T .

Além do coeficiente de absorção radiativa, κ_r , devemos considerar o efeito da condução por eletrons livres, que reduz a opacidade consideravelmente quando os eletrons estão degenerados. O coeficiente de absorção total vale

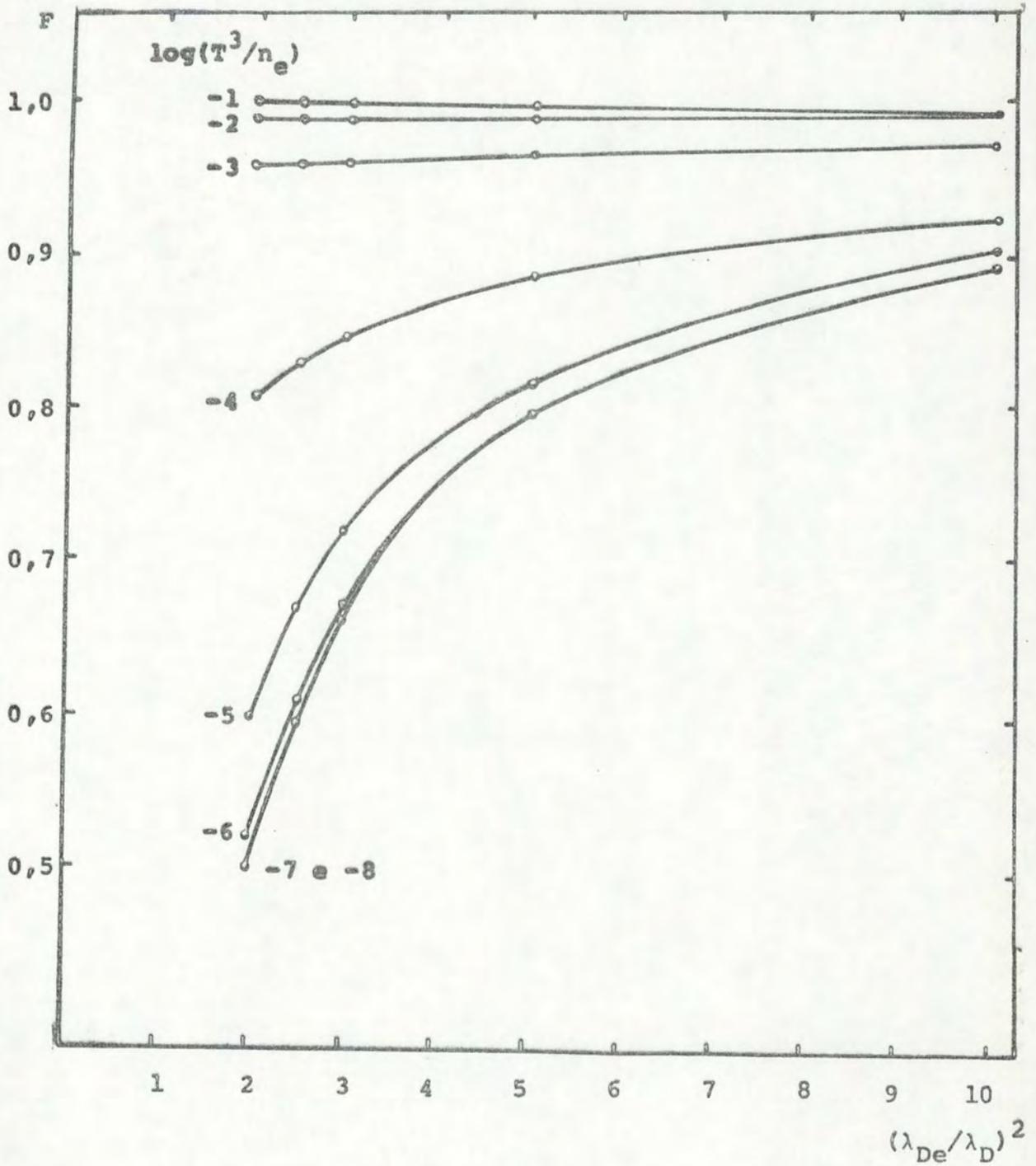


Fig. 1 - Correções das opacidades devido a efeitos coletivos como função de $(\lambda_{De}/\lambda_D)^2$ e de $\log(T^3/n_e)$ segundo Watson (1969b).

$$\frac{1}{\kappa_T} = \frac{1}{\kappa_r} + \frac{1}{\kappa_C} \quad (\text{I-78})$$

Para o valor da opacidade condutiva κ_C foi usada a aproximação não-relativística de Iben (1968), κ_{CI} , multiplicada por um fator de correção, α , de acordo com Hubbard e Lumpe (1969)

$$\kappa_C = \alpha \kappa_{CI} = 0,4 \kappa_{CI} \quad (\text{I-79})$$

$$\kappa_{CI} = \frac{\langle \theta \rangle}{AT} \quad (\text{I-80})$$

onde

$$\langle \theta \rangle = \ln \left[1 + \left(\frac{2R}{\lambda} \right)^2 \right] - \left[1 + \left(\frac{\lambda}{2R} \right)^2 \right]^{-1} \quad (\text{I-81})$$

onde λ é o comprimento de onda de De Broglie do eletrôn e R é o raio de Debye

$$\left(\frac{\lambda}{2R} \right)^2 = D \frac{\rho}{\mu_e T^{3/2}} B \left(\mu_e \sum_i \frac{X_i Z_i^2}{A_i} + C \right) T^{-1/2} \quad (\text{I-82})$$

$$B = \left(\frac{P_e}{n_e kT} \right)^{-1}, \quad C = \frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dn} \quad \text{e} \quad D = 9,24735 \times 10^{-3}$$

A, B e C estão tabelados (Iben 1968) como função de

$$\frac{\rho}{\mu_e T^{3/2}} = \frac{m_H}{T^{3/2}} \sum_A Z_A n_A$$

sendo v o volume específico por nucleon, n_A o número de partículas do elemento A por nucleon e Z_A o número atômico desse elemento.

Com o procedimento descrito obtivemos uma tabela da opacidade total κ_T para 5 valores de X nas regiões de temperatura e densidade que podem ocorrer em nossos modelos estelares. Na verdade só nos interessam as opacidades para valores de X iguais ou menores do que 0,73, visto que partimos de uma estrela homogênea com $X = 0,73$ e as reações nucleares só diminuem o valor de X . A Figura 2 mostra como varia a opacidade como função de X para valores típicos de ρ e T . Note-se que na superfície das estrelas ($T = 2 \times 10^5$, $\log \rho = -5$), a variação da opacidade não é linear em X . Como na superfície a composição não muda, é conveniente termos uma tabela especial para $X = 0,73$, a qual inclui valores do interior e serve para futuras interpolações. Para construí-la fizemos um programa de computador para calcular a opacidade em X_0 fazendo passar uma parábola pelos pontos mais próximos, os quais foram assim definidos:

Se	$X_0 \leq 0,35$	$X = 0,00; 0,20 \text{ e } 0,50$
	$0,35 < X_0 \leq 0,75$	$X = 0,20; 0,50 \text{ e } 0,80$
	$X_0 > 0,75$	$X = 0,50; 0,80 \text{ e } 0,98$

Os valores calculados dessa forma para $X = 0,73$ nas densidades e temperaturas da Figura 2 foram nela indicados com uma cruz.

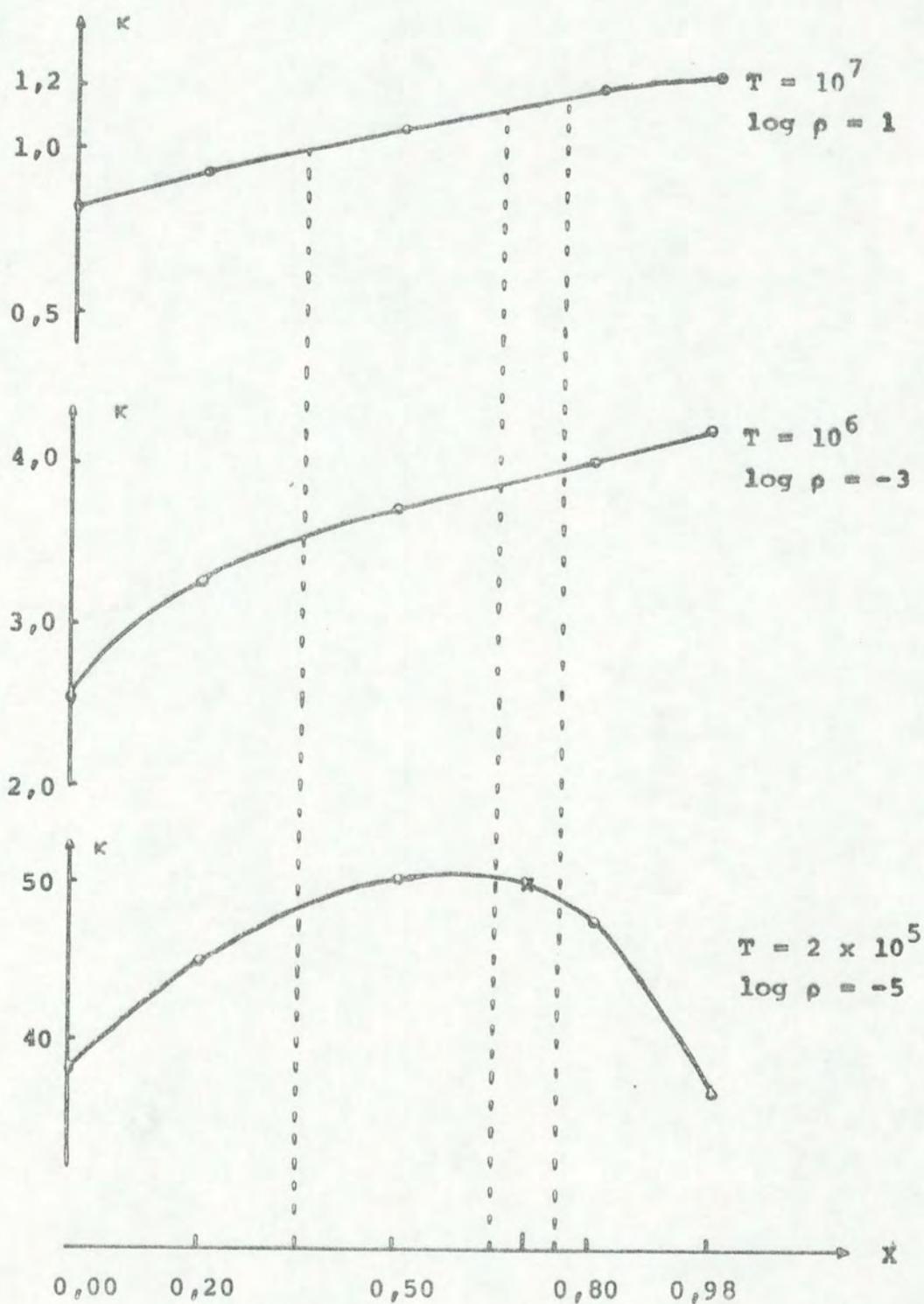


Fig. 2 - Opacidades em função de X para alguns valores de T e ρ .
As linhas tracejadas indicam os limites que foram usados para escolher os três pontos a interpolar.

Nos cálculos posteriores as tabelas de 0,98 e 0,80 não mais foram usadas, pois as opacidades foram interpoladas em composição usando a tabela que criamos para $X = 0,73$ juntamente com as de $X = 0,50, 0,20$ e $0,00$.

A variação das opacidades com densidade e temperatura é bastante brusca. Além disso a densidade e temperatura diferem em várias ordens de grandeza entre o interior e a superfície das estrelas. Por essa razão, embora continuemos a usar equações de segundo grau usamos o logaritmo da opacidade, da densidade e da temperatura nas interpolações.

Para obter o logaritmo da opacidade em X_0, ρ_0 e T_0 , fazemos uma interpolação quadrática em $\log \rho, \log T$ e X , usando os 27 pontos adjacentes, como mostra a Figura 3.

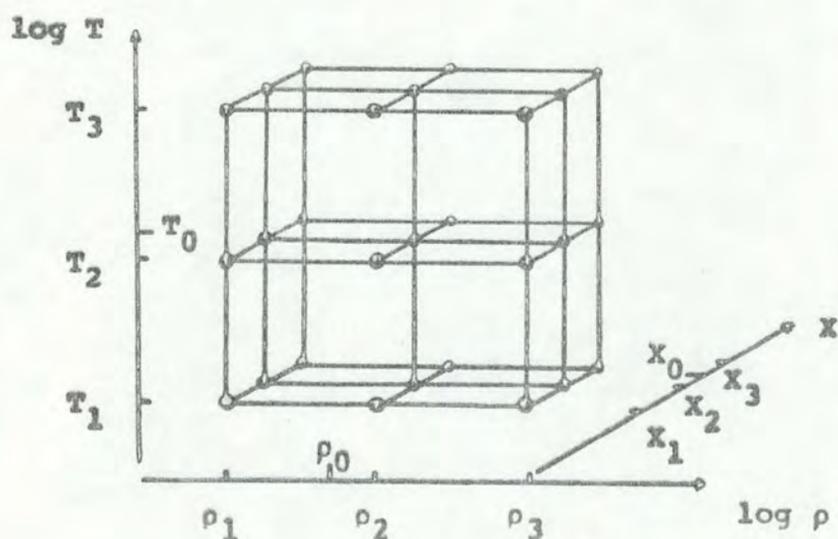


Fig. 3 - Pontos usados na interpolação das opacidades para obter $\log \kappa(X_0, \rho_0, T_0)$.

Para obter a opacidade em $X = X_0$, ou seja, para obter os valores de $\log \kappa(X_0, \rho_1, T_j)$ com $i, j = \{1, 2, 3\}$, vamos interpolar em X por uma curva de 2º grau

$$\log \kappa(X_0, \rho_1, T_j) = A_1(\rho_1, T_j) + A_2(\rho_1, T_j)X_0 + A_3(\rho_1, T_j)X_0^2 \quad (\text{I-83})$$

onde os coeficientes A_ℓ podem ser determinados utilizando os valores conhecidos da opacidade em X_1, X_2 e X_3 e formando um sistema de 3 equações da forma (I-83) para cada conjunto (ρ_1, T_j) .

$$\begin{aligned} A_\ell = & a_{1\ell}(X_1, X_2, X_3) \log \kappa(X_1, \rho_1, T_j) + a_{2\ell}(X_1, X_2, X_3) \log \kappa(X_2, \rho_1, T_j) + \\ & + a_{3\ell}(X_1, X_2, X_3) \log \kappa(X_3, \rho_1, T_j) \end{aligned} \quad (\text{I-84})$$

A interpolação em ρ será feita a partir dos 9 valores obtidos na (I-83) no plano $X = X_0$.

$$\log \kappa(X_0, \rho_0, T_j) = B_1(T_j) + B_2(T_j) \log \rho_0 + B_3(T_j) \log^2 \rho_0 \quad (\text{I-85})$$

onde os coeficientes B_ℓ valem

$$\begin{aligned} B_\ell = & b_{1\ell}(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \log \kappa(X_0, \rho_1, T_j) + b_{2\ell}(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \log \kappa(X_0, \rho_2, T_j) \\ & + b_{3\ell}(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \log \kappa(X_0, \rho_3, T_j) \end{aligned} \quad (\text{I-86})$$

Basta agora interpolar em T os 3 valores da (I-85)

$$\log \kappa(X_0, \rho_0, T_0) = C_1 + C_2 \log T_0 + C_3 \log^2 T_0 \quad (\text{I-87})$$

onde

$$\begin{aligned} C_{\ell} = & c_{1\ell}(T_1, T_2, T_3) \log \kappa(X_0, \rho_0, T_1) + c_{2\ell}(T_1, T_2, T_3) \log \kappa(X_0, \rho_0, T_2) + \\ & + c_{3\ell}(T_1, T_2, T_3) \log \kappa(X_0, \rho_0, T_3) \end{aligned} \quad (\text{I-88})$$

Se substituirmos na (I-88) os valores de $\log \kappa(X_0, \rho_0, T_j)$ dados pela (I-85) e na (I-84) os valores de $\log \kappa(X_0, \rho_1, T_j)$ dados pela (I-83) teremos a expressão que engloba as interpolações em X, ρ e T, a qual pode ser reduzida à forma:

$$\log \kappa = \sum_{i,j,k=1}^3 E_{ijk} (\log T)^{i-1} (\log \rho)^{j-1} X^{k-1} \quad (\text{I-89})$$

onde

$$E_{ijk} = \sum_{\ell, m, n} D_{1i\ell} D_{2jm} D_{3kn} \log \kappa(X_{\ell}, \rho_m, T_n) \quad (\text{I-90})$$

$$D_{S21} = \frac{V_{S2}^2 - V_{S3}^2}{\Delta_S}; \quad D_{S22} = \frac{V_{S3}^2 - V_{S1}^2}{\Delta_S}; \quad D_{S23} = \frac{V_{S1}^2 - V_{S2}^2}{\Delta_S}$$

$$D_{S31} = \frac{V_{S3} - V_{S2}}{\Delta_S}; \quad D_{S32} = \frac{V_{S1} - V_{S3}}{\Delta_S}; \quad D_{S33} = \frac{V_{S2} - V_{S1}}{\Delta_S}$$

$$\Delta_S = (v_{S2} - v_{S1})(v_{S3}^2 - v_{S1}^2) - (v_{S3} - v_{S1})(v_{S2}^2 - v_{S1}^2)$$

$$D_{S11} = 1 - D_{S21} v_{S1} - D_{S31} v_{S1}^2$$

$$D_{S12} = - D_{S22} v_{S1} - D_{S32} v_{S1}^2$$

$$D_{S13} = - D_{S23} v_{S1} - D_{S33} v_{S1}^2$$

sendo v_{S1} a variável número S calculada no ponto i, ou seja

$$v_{11} = x_{11}, v_{21} = \log p_1, v_{31} = \log T_1.$$

II - MÉTODOS NUMÉRICOS

II-1 Apresentação do Problema

A estrutura de uma estrela é descrita por um conjunto de equações diferenciais não lineares de primeira ordem, que só pode ser resolvido numericamente. O sistema, considerando a distribuição das abundâncias X_1 conhecida, e não levando em conta a energia gravitacional, é do tipo

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \quad (\text{II-1})$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

...

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

com n condições de contorno.

Como é necessário integrar numericamente e portanto usar um número finito de passos, aproveita-se a simetria esférica das equações de evolução estelar e divide-se a estrela em camadas concêntricas.

A variável independente a qual estão vinculadas essas camadas, identifica os pontos x_m nos quais devemos calcu-

lar os valores da função $y_j(x_m)$. O sistema (II-1) pode ser escrito em termos de diferenças finitas, ou seja

$$\frac{y_1(x_{m+1}) - y_1(x_m)}{h} = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \quad (\text{II-2})$$

$$\frac{y_2(x_{m+1}) - y_2(x_m)}{h} = f_2(x, y_1, \dots, y_n)$$

...

$$\frac{y_n(x_{m+1}) - y_n(x_m)}{h} = f_n(x, y_1, \dots, y_n)$$

onde $h = x_{m+1} - x_m$ é o tamanho do passo escolhido.

Para resolver esse sistema podemos usar métodos implícitos ou métodos explícitos. Nos métodos explícitos o valor da função no ponto x_{m+1} é calculado a partir dos valores conhecidos nos pontos anteriores, x_m, x_{m-1}, \dots, x_0 . Quando a equação é de primeira ordem bastam esses valores no ponto x_m .

$$y_j(x_{m+1}) = y_j(x_m) + h f_j(x_m, y_1(x_m), y_2(x_m), \dots, y_n(x_m)) \quad (\text{II-3})$$

Nesse caso toda a solução pode ser construída a partir das condições de contorno $y_k(x_0)$ com $k=1, 2, \dots, n$.

Nos métodos implícitos não é possível explicitar os valores que se deseja obter como função dos valores nos pontos anteriores porque as variáveis em x_{m+1} são relacionadas entre si. Nos sistemas de primeira ordem as grandezas no pon-

to x_{m+1} relacionam-se entre si e com as do ponto x_m , ou seja

$$y_j(x_{m+1}) = y_j(x_m) + h f_j(x_m, y_1(x_m), \dots, y_n(x_m)),$$

$$x_{m+1}, y_1(x_{m+1}), \dots, y_n(x_{m+1})) \quad (\text{II-4})$$

Nos métodos implícitos é geralmente necessário resolver simultaneamente um sistema de equações algébricas para se obter o valor da função nos pontos escolhidos, visto que as funções estão relacionadas entre si em pontos adjacentes, em cadeias de dois a dois. Nesse caso não bastam as condições de contorno para iniciar a construção da solução final, isto é, o método não se autoinicia. Geralmente se usa uma solução aproximada gerada por um método explícito para iniciar os cálculos.

Em ambos os métodos é muito importante a escolha de h , que não necessita ser constante. Se h for pequeno haverá convergência em poucas iterações por ponto, mas o número de pontos será grande; se h for demasiadamente grande poderá não haver convergência, ou a função poderão não convergir para seu valor verdadeiro. Isso ocorrerá mais facilmente nos métodos explícitos em que os erros se acumulam a medida que pontos sucessivos são calculados. Os métodos implícitos são, portanto, mais exatos.

II-2 Método de Runge-Kutta

Os métodos explícitos mais usados são os métodos de Runge-Kutta, que coincidem com um desenvolvimento em série de Taylor até termos em h^p onde p é a ordem do método. Eles são métodos de passo único, pois os valores da função em x_{m+1} são obtidos apenas de valores conhecidos em x_m .

$$Y_j(x_{m+1}) = Y_j(x_m) + \Delta Y_j(x_m) \quad (\text{II-5})$$

O método de Runge-Kutta de ordem mais baixa é o de Euler

$$\Delta Y_j(x_{m+1}) = h f_j(x_m, Y_1(x_m), Y_2(x_m), \dots, Y_n(x_m)) \quad (\text{II-6})$$

A solução é construída a partir das condições de contorno $y_j(x_0)$.

Esse método é exato para equações lineares, mas os erros são muito grandes em casos não lineares de modo que se torna imprescindível uma melhor avaliação do valor do acréscimo, calculando-o para mais de um ponto x e y . O método de Runge-Kutta usado em evolução estelar é exato até a quarta potência de h , sendo portanto de ordem 4.

$$\Delta Y_j(x_m) = \frac{1}{6} \left(K_j^1 + 2K_j^2 + 2K_j^3 + K_j^4 \right) \quad (\text{II-7})$$

$$K_j^1 = f_j(x_m, y_1(x_m), \dots, y_n(x_m))h \quad (\text{II-8})$$

$$K_j^2 = f_j(x_m + \frac{h}{2}, y_1(x_m) + \frac{K_1^1}{2}, \dots, y_n(x_m) + \frac{K_n^1}{2})h$$

$$K_j^3 = f_j(x_m + \frac{h}{2}, y_1(x_m) + \frac{K_1^2}{2}, \dots, y_n(x_m) + \frac{K_n^2}{2})h$$

$$K_j^4 = f_j(x_m + h, y_1(x_m) + K_1^3, \dots, y_n(x_m) + K_n^3)h$$

Note-se que os valores de K_j^i são obtidos através de K_j^{i-1} , de modo que sempre temos relações explícitas a calcular. Essa vantagem operacional do método, que exige pouca memória do computador é a causa de sua pouca precisão. Como todos os cálculos são feitos em cadeia o erro se acumula rapidamente. Como o método não é iterativo o erro dependerá apenas da escolha de h .

II-3 Método das Correções Diferenciais

O sistema (II-2) pode ser escrito de modo implícito, ou seja

$$\frac{y_1(x_{m+1}) - y_1(x_m)}{h} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)_{m+\frac{1}{2}} \quad (\text{II-9})$$

$$\frac{y_2(x_{m+1}) - y_2(x_m)}{h} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)_{m+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{y_n(x_{m+1}) - y_n(x_m)}{h} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)_{m+\frac{1}{2}}$$

sendo $f_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n)_{m+\frac{1}{2}}$ o valor médio da função entre x_m e x_{m+1} , portanto

$$f_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n)_{m+\frac{1}{2}} = \psi_j(x_m, y_1(x_m), \dots, y_n(x_m), x_{m+1},$$

$$y_1(x_{m+1}), \dots, y_n(x_{m+1})) \quad (\text{II-10})$$

O sistema está na forma implícita porque escrevemos f_j como uma média dos valores no ponto x_m e no ponto x_{m+1} , pois se ela dependesse apenas de x_m teríamos a relação explícita (II-3).

Se obtivermos valores aproximados $y_1^0(x_m), y_2^0(x_m), \dots, y_n^0(x_m)$ da solução do sistema em todas as camadas da estrela e os substituirmos na (II-9) teremos

$$\frac{y_1^0(x_{m+1}) - y_1^0(x_m)}{h} - f_1(x, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)_{m+\frac{1}{2}} = F_{1m}^0 \quad (\text{II-11})$$

$$\frac{y_2^{\circ}(x_{m+1}) - y_2^{\circ}(x_m)}{h} - f_2(x, y_1^{\circ}, y_2^{\circ}, \dots, y_n^{\circ})_{m+\frac{1}{2}} = F_{2m}^{\circ}$$

...

$$\frac{y_n^{\circ}(x_{m+1}) - y_n^{\circ}(x_m)}{h} - f_n(x, y_1^{\circ}, y_2^{\circ}, \dots, y_n^{\circ})_{m+\frac{1}{2}} = F_{nm}^{\circ}$$

onde as F_{jm}° são diferentes de zero porque as $y_j^{\circ}(x_m)$ não são a solução exata do sistema, mas se aproximarão de zero em conjunto se $y_j(x_m)$ se aproximarem da solução.

Se dermos um acréscimo $\delta y_j^{\circ}(x_m)$ a cada $y_j^{\circ}(x_m)$ as F_{jm}° sofrerão acréscimos correspondentes, ou seja

$$\begin{aligned} \frac{y_1^{\circ}(x_{m+1}) + \delta y_1^{\circ}(x_{m+1}) - y_1^{\circ}(x_m) - \delta y_1^{\circ}(x_m)}{h} - f_1^{\circ}(y_m, y_{m+1}, \delta y_m, \delta y_{m+1}) &= \\ &= F_{1m}^{\circ} + \delta F_{1m}^{\circ} \end{aligned} \quad (\text{II-12})$$

$$\begin{aligned} \frac{y_2^{\circ}(x_{m+1}) + \delta y_2^{\circ}(x_{m+1}) - y_2^{\circ}(x_m) - \delta y_2^{\circ}(x_m)}{h} - f_2^{\circ}(y_m, y_{m+1}, \delta y_m, \delta y_{m+1}) &= \\ &= F_{2m}^{\circ} + \delta F_{2m}^{\circ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y_n^{\circ}(x_{m+1}) + \delta y_n^{\circ}(x_{m+1}) - y_n^{\circ}(x_m) - \delta y_n^{\circ}(x_m)}{h} - f_n^{\circ}(y_m, y_{m+1}, \delta y_m, \delta y_{m+1}) &= \\ &= F_{nm}^{\circ} + \delta F_{nm}^{\circ} \end{aligned}$$

onde

$$f_j^0(y_m, y_{m+1}, \delta y_m, \delta y_{m+1}) = f_j(x_m, y_1^0(x_m) + \delta y_1^0(x_m),$$

$$y_2^0(x_m) + \delta y_2^0(x_m), \dots, y_n^0(x_m) + \delta y_n^0(x_m), x_{m+1}, y_1^0(x_{m+1}) + \delta y_1^0(x_{m+1}),$$

$$y_2^0(x_{m+1}) + \delta y_2^0(x_{m+1}), \dots, y_n^0(x_{m+1}) + \delta y_n^0(x_{m+1}))$$

Se todas as $F_{jm}^0 + \delta F_{jm}^0$ se anularem, $y_j^0(x_m) + \delta y_j^0(x_m)$ serão as soluções do sistema (II-9). Para calcular o incremento $\delta y_j^0(x_m)$ que deve ser dado a $y_j^0(x_m)$ para que tal aconteça devemos resolver o sistema a seguir,

$$F_{jm}^0 + \left(\frac{\partial F_{jm}}{\partial y_1} \right)_{x_m} \delta y_1^0(x_m) + \left(\frac{\partial F_{jm}}{\partial y_2} \right)_{x_m} \delta y_2^0(x_m) + \dots + \left(\frac{\partial F_{jm}}{\partial y_n} \right)_{x_m} \delta y_n^0(x_m) +$$

$$+ \left(\frac{\partial F_{jm}}{\partial y_1} \right)_{x_{m+1}} \delta y_1^0(x_{m+1}) + \left(\frac{\partial F_{jm}}{\partial y_2} \right)_{x_{m+1}} \delta y_2^0(x_{m+1}) + \dots + \left(\frac{\partial F_{jm}}{\partial y_n} \right)_{x_{m+1}} \delta y_n^0(x_{m+1}) = 0$$

(II-13)

onde $j=1, n$ e $m=1, q$ sendo q o número de camadas da estrela.

Como as δF_{jm}^0 do sistema (II-11) não são funções lineares de $\delta y_j^0(x_m)$ o sistema (II-12) fornecerá apenas um acréscimo aproximado e $y_j^1(x_m) = y_j^0(x_m) + \delta y_j^0(x_m)$ não será a solução exata do sistema (II-9).

Podemos entretanto usar $y_j^1(x_m)$ para construir um sistema semelhante ao (II-11) e encontrar novas diferenças δF_{jm} e novos acréscimos $\delta y_j^1(x_m)$. Temos um método iterativo pois a repetição do processo poderá dar origem a uma solução $y_j^{(2)}(x_m) = y_j^1(x_m) + \delta y_j^1(x_m)$ mais exata que a anterior. Para que as aproximações sucessivas sejam cada vez mais exatas é necessário que a primeira solução seja suficientemente próxima da solução exata de modo que $\delta y_j^0(x_m)$ sejam pequenos para que

$$\sum_i \left(\frac{\partial F_{jm}}{\partial y_i} \right)_{x_m} \delta y_i(x_m) + \left(\frac{\partial F_{jm}}{\partial y_i} \right)_{x_{m+1}} \delta y_i(x_{m+1}) \quad \text{seja boa}$$

aproximação de δF_{jm} .

II-4 Equações temporais

A evolução de uma estrela não é descrita apenas pelas equações (I-11) a (I-14), mas inclui as variações temporais das abundâncias (I-61) a (I-66) e da energia gravitacional. O sistema a resolver possui portanto dois tipos de equações.

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, \dots, \frac{dy_n}{dt}) \quad (\text{II-14})$$

$$\frac{dy_k}{dt} = g_k(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (\text{II-15})$$

sendo x uma variável espacial e t o tempo, j varia entre 1 e 4 pois y_j significa P, T, L ou r, e k indica os elementos químicos considerados.

No método de Runge-Kutta, quando se calcula estrelas não-homogêneas os sistemas (II-14) e (II-15) são resolvidos separadamente. A composição química do modelo anterior é usada para calcular a estrutura da estrela, sendo geralmente desprezada a energia gravitacional, portanto usando o sistema II-1. A variação temporal também é calculada por métodos explícitos usando os valores da temperatura, pressão, luminosidade e raio obtidos no cálculo da estrutura. Esse procedimento dá origem a erros graves quando a estrutura da estrela se altera rapidamente.

Henney, Wilets, Böhm, Le Levier e Levêe (1959) introduziram pela primeira vez o método das correções diferenciais no cálculo de modelos estelares. Esse método foi usado entretanto apenas na resolução das equações (II-14), com energia gravitacional, que fornecem a estrutura da estrela. P, T, L e r são obtidos portanto como função da massa, a variável independente usada, para o tempo t_0 . As abundâncias químicas do novo modelo são calculadas substituindo no sistema (II-15) as razões de geração de energia em cada camada no tempo t_0 . Essa parte do problema é resolvida explicitamente, pois o valor de ϵ calculado no tempo t_0 é usado em todo o intervalo, $t_0 + \Delta t$. A construção de novo modelo da estrutura é feita implicitamente a partir dos valores das abundâncias calculados explicitamente para $t_0 + \Delta t$, repetindo-se o procedimento. Se

bem que o método usado por Henyey seja um avanço frente ao de Runge-Kutta, posto que os erros dos métodos implícitos são bastante menores do que nos explícitos, o cálculo das equações temporais continua sendo explícito. É necessário então que Δt seja muito pequeno para que os erros que sempre se acumulam nos métodos explícitos não sejam demasiado grandes. Quando ocorrem alterações rápidas nas estrelas é conveniente usar um método puramente implícito. Isso foi feito no programa usado, escrito por Z. Abraham, que apresentaremos a seguir.

II-5 Método Implícito Usado

No método de Z. Abraham (1974) as equações (II-14) e (II-15) são resolvidas simultaneamente pelo método das correções diferenciais. Usualmente a variável independente é a massa, mas para obter maior precisão, já que a massa não permanece estritamente constante devido as reações nucleares, foi usado o número de nucleons. Todas as equações são escritas na forma de diferenças finitas, sendo que os valores interpolados linearmente entre dois extremos do intervalo são atribuídos ao ponto médio do mesmo. As equações são as seguintes:

$$P_m^i - P_{m-1}^i = 6,33157802 \times 10^{-2} \left(\frac{M}{r^4} \frac{dM}{dN'} \right)_{m-\frac{1}{2}}^i \Delta N' \quad (\text{II-16})$$

$$r_m^i - r_{m-1}^i = 0,2360273971 \left(\frac{v}{r^2} \right)_{m-1/2}^i$$

$$T_m^i - T_{m-1}^i = \left(\frac{vT}{P} \right)_{m-1/2}^i (P_m^i - P_{m-1}^i)$$

$$L_m^i - L_{m-1}^i + L_m^{i-1} - L_{m-1}^{i-1} = 2\Delta N' (\epsilon_N + \epsilon_G)_{m-1/2}^{i-1/2}$$

$$(n_k)_m^i - (n_k)_m^{i-1} = \Delta t \sum_{\ell} (R_{k\ell})_{m-1/2}^{i-1/2} \quad \text{com } k = 1,6$$

onde i indica o tempo. P está em unidades de 10^{+17} dinas/cm², N' de 10^{57} partículas e as demais unidades já foram definidas na seção I-3.

P , T , L e r estão definidos no borde da camada e n_k no meio da mesma. Os passos $\Delta N'$ não são iguais, mas devem obedecer a um critério de divisão tal que as variáveis não apresentem diferenças bruscas de uma camada para a seguinte e que o número de camadas não seja muito grande.

A energia gravitacional é definida pela variação temporal da (I-14)

$$\epsilon_G = - \left[\frac{du}{dt} + P \frac{dv}{dt} \right] \quad (\text{II-17})$$

sendo $u = u_g + u_c + u_R$, onde u_g é a energia interna do gás por nucleon, u_c a energia das interações coulombianas por nucleon e u_R a energia de radiação por nucleon.

Se observarmos as equações do sistema (II-16) veremos que, como as variações Δr e ΔL na primeira camada são iguais ao valor de r e L na mesma, não se pode aplicar o método de diferenças finitas para resolvê-las. Na primeira camada elas devem ser substituídas por equações equivalentes.

Na primeira camada, de massa M ,

$$\Delta M = M = \frac{4}{3} \pi \bar{\rho} r^3 \quad (\text{II-18})$$

Para usar o mesmo algoritmo que em diferenças finitas introduziremos o fator α

$$\Delta M = 4 \pi \alpha \bar{r}^2 \Delta r \bar{\rho} \quad (\text{II-19})$$

Podemos obter α comparando a (II-18) com a (II-19) sabendo que

$$\bar{r} = r/2 \quad \text{e} \quad \Delta r = r \quad (\text{II-20})$$

A equação que usaremos no centro, ao invés da (I-12) será

$$\Delta r = \frac{\Delta N^i v}{4\pi\alpha\bar{r}^2} \quad \text{com} \quad \alpha = \frac{4}{3} \quad (\text{II-21})$$

A (I-13) e a (I-14) não necessitam ser modificadas, mas a (I-11) também deve ser reescrita no centro. Introduzindo o fator β , podemos escrever

$$\Delta P = - \frac{\beta GM}{4\pi r^4} \Delta M \quad (\text{II-22})$$

Se integrarmos a equação (I-1) e substituirmos M pela (II-18) teremos

$$\Delta P = - \frac{2}{3} \pi G \bar{\rho}^2 r^2 \quad (\text{II-23})$$

Substituindo a (II-18) e a (II-20) na (II-23) obtemos $\beta = +3/32$, de modo que a (II-22) substituirá a (I-11), completando as equações no centro.

Após calcular as derivadas indicadas no sistema (II-13) podemos escrevê-lo na forma matricial

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}_m \begin{pmatrix} \delta P \\ \delta T \end{pmatrix}_m + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}_m \begin{pmatrix} \delta P \\ \delta T \end{pmatrix}_{m-1} + \\ & + \begin{pmatrix} C_{13} & C_{14} \\ C_{23} & C_{24} \end{pmatrix}_m \begin{pmatrix} \delta L \\ \delta r \end{pmatrix}_m + \begin{pmatrix} D_{13} & D_{14} \\ D_{23} & D_{24} \end{pmatrix}_m \begin{pmatrix} \delta L \\ \delta r \end{pmatrix}_{m-1} + \\ & + \begin{pmatrix} C_{15} & C_{16} & \dots & C_{1,10} \\ C_{25} & C_{26} & \dots & C_{2,10} \end{pmatrix}_m \begin{pmatrix} \delta n_1 \\ \delta n_2 \\ \dots \\ \delta n_6 \end{pmatrix}_m = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}_m \quad (\text{II-24}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} C_{31} & C_{32} \\ C_{41} & C_{42} \end{bmatrix}_m \begin{bmatrix} \delta P \\ \delta T \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} D_{31} & D_{32} \\ D_{41} & D_{42} \end{bmatrix}_m \begin{bmatrix} \delta P \\ \delta T \end{bmatrix}_{m-1} + \\
 & + \begin{bmatrix} C_{33} & C_{34} \\ C_{43} & C_{44} \end{bmatrix}_m \begin{bmatrix} \delta L \\ \delta x \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} D_{33} & D_{34} \\ D_{43} & D_{44} \end{bmatrix}_m \begin{bmatrix} \delta L \\ \delta x \end{bmatrix}_{m-1} + \\
 & + \begin{bmatrix} C_{35} & C_{36} & \dots & C_{3,10} \\ C_{45} & C_{46} & \dots & C_{4,10} \end{bmatrix}_m \begin{bmatrix} \delta n_1 \\ \delta n_2 \\ \dots \\ \delta n_6 \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}_m \tag{II-25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} C_{51} & C_{52} \\ C_{61} & C_{62} \\ \dots & \dots \\ C_{10,1} & C_{10,2} \end{bmatrix}_m \begin{bmatrix} \delta P \\ \delta T \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} D_{51} & D_{52} \\ D_{61} & D_{62} \\ \dots & \dots \\ D_{10,1} & D_{10,2} \end{bmatrix}_m \begin{bmatrix} \delta P \\ \delta T \end{bmatrix}_{m-1} + \\
 & + \begin{bmatrix} C_{55} & C_{56} & \dots & C_{5,10} \\ C_{65} & C_{66} & \dots & C_{6,10} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_m \begin{bmatrix} \delta n_1 \\ \delta n_2 \\ \dots \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} F_5 \\ F_6 \\ \dots \end{bmatrix}_m \tag{II-26}
 \end{aligned}$$

onde C_{ij} são valores conhecidos que envolvem as derivadas dos termos da (II-16) calculadas no ponto x_m ou no ponto x_{m-1} , usando valores de $y_j(x_m)$ e $y_j(x_{m+1})$ na iteração anterior. As duas primeiras equações do sistema (II-16) estão condensadas na (II-24) e as duas seguintes na (II-25).

O cálculo das camadas externas da estrela, onde o gás não está completamente ionizado, é feito pelo método de Runge-Kutta usando uma subrotina independente. Nessa região, que chamaremos de envelope, as energias nuclear e gravitacional são desprezadas de modo que a luminosidade é constante. A equação de estado é a de um gás ideal sem degenerescência ou interações coulombianas, sendo usada a lei de Saha para descrever a proporção de gases ionizados. O hidrogênio e o hélio são considerados em todos os estágios de ionização, sendo também explicitamente incluída a molécula de H_2 . Os metais são tratados como tendo apenas dois estágios hipotéticos separados por um potencial de ionização de 7,5 ev (Iben, 1963). Outro problema que deve ser tratado com mais cuidado no envelope é a convecção, porque o gradiente convectivo não pode ser aproximado pelo gradiente adiabático. O transporte convectivo de energia não é tão efetivo como no interior, de modo que o fluxo de energia é transportado em parte pelos elementos convectivos e em parte pela radiação. É usada a teoria do "mixing-length" onde a razão entre a distância de mistura, l , dos elementos convectivos e a altura de escala da pressão $H^{-1} = P^{-1}dP/dr$ é considerada constante.

Para cada modelo de estrela de temperatura superficial T_S e luminosidade L_S são calculados três modelos de envelope. Escolhendo temperaturas T_1 e T_2 próximas de T_S , e L_1 e L_2 próximas de L_S e tais que $T_2 < T_S < T_1$ e $L_2 < L_S < L_1$, fazemos modelos de envelope com T_1 e L_1 , T_1 e L_2 e com T_2 e L_1 , com os quais podemos calcular as variações δP_e , δT_e , δL_e e δr_e entre diferentes modelos no seu borde interno. O ajuste entre o interior e o envelope é feito interpolando linearmente entre T_1 e T_2 e entre L_1 e L_2 de modo que as variações δP_i , δT_i , δL_i e δr_i no interior sejam iguais aos valores do envelope correspondentes a δL_S e δT_S tal que $T_S = T_S^O + \delta T_S$ e $L_S = L_S^O + \delta L_S$ onde T_S^O e L_S^O indicam os valores da iteração anterior.

As equações das abundâncias (II-26) não dependem de δL e δr , de modo que δn_j pode ser explicitado em função de $(\delta P, \delta T)_m$ e $(\delta P, \delta T)_{m-1}$ apenas. No centro da estrela δL e δr se anulam e podemos eliminar a dependência de $(\delta L, \delta r)_m$ em $(\delta L, \delta r)_{m-1}$. Como a dependência nas abundâncias aparece apenas no ponto x_m podemos eliminar $(\delta n_1, \delta n_2, \dots, \delta n_6)_m$ nas (II-24) e (II-25) usando a (II-26). As duas primeiras equações dependem apenas de $(\delta L, \delta r)_m$, $(\delta P, \delta T)_m$ e $(\delta P, \delta T)_{m-1}$, de modo que substituindo $(\delta L, \delta r)_m$ dado pela (II-25) na (II-24) ficamos com $(\delta P, \delta T)_m$ como função de $(\delta P, \delta T)_{m-1}$. Assim sendo $(\delta L, \delta r)_m$ também será função de $(\delta P, \delta T)_m$. Se todas as condições de contorno fossem dadas no centro todos os acréscimos poderiam ser calculados em função de valores conhecidos na camada anterior.

Como $(\delta P, \delta T)$ não são conhecidos no centro eles permanecem como parâmetros nos cálculos até que a camada correspondente ao envelope seja atingida. As condições de contorno de pressão e temperatura são dados na superfície da estrela. O ajuste entre o interior e o envelope fornecerá condições suficientes para que $(\delta P, \delta T)_m$ possam ser obtidos e portanto que todo o problema fique completamente resolvido.

Quando houver convecção ocorre um fluxo de matéria que deve ser incluído na equação da variação das abundâncias. O número de partículas do elemento k na camada m ao tempo i , $(n_k)_m^i \Delta N'_m$ varia devido ao fluxo de partículas $(\phi_k)_m^i$ da camada m para a camada $m+1$ e $(\phi_k)_{m-1}^i$ da camada $m-1$ para a camada m , além dos efeitos das reações nucleares. A equação de variação das abundâncias no sistema (II-16) deve ser escrita:

$$\begin{aligned}
 (n_k)_m^i \Delta N'_m - (n_k)_m^{i-1} \Delta N'_m = \Delta t \sum_{\ell=1,6} (R_{k\ell})_{m-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} \Delta N'_m + \\
 + (\phi_k)_m^{i-\frac{1}{2}} - (\phi_k)_{m-1}^{i-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}
 \tag{II-27}$$

Como o número total de partículas da região convectiva é constante frente a convecção, a soma dos fluxos em todas as camadas convectivas é zero. Se somarmos a equação (II-27). para todas as camadas convectivas obtemos

$$\sum_{m=m_c}^{m=m_f} (n_k)_m^i \Delta N^i - (n_k)_m^{i-1} \Delta N^i = \sum_{m=m_c}^{m=m_f} \sum_{\ell} (R_{k\ell})_{m-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} \Delta N^i \quad (\text{II-28})$$

onde m_c é a camada mais interna em que ocorre convecção e m_f a mais externa. Consideramos que as abundâncias são constantes ao longo de todas as camadas convectivas pois o tempo que a convecção gasta para misturar os elementos é muito pequeno comparado com a evolução da estrela

$$(n_k)_{m_c}^i = (n_k)_{m_c+1}^i = \dots = (n_k)_{m_f}^i \quad (\text{II-29})$$

A composição química na região convectiva será dependente das abundâncias em todas as outras camadas convectivas. Entretanto, devido a (I-29) os acréscimos estão relacionados entre si

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \dots \\ n_6 \end{pmatrix}_{m_c}^o + \begin{pmatrix} \delta n_1 \\ \delta n_2 \\ \dots \\ \delta n_6 \end{pmatrix}_{m_c} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \dots \\ n_6 \end{pmatrix}_{m_c+1}^o + \begin{pmatrix} \delta n_1 \\ \delta n_2 \\ \dots \\ \delta n_6 \end{pmatrix}_{m_c+1} = \dots =$$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \dots \\ n_6 \end{pmatrix}_{m_f}^o + \begin{pmatrix} \delta n_1 \\ \delta n_2 \\ \dots \\ \delta n_6 \end{pmatrix}_{m_f} \quad (\text{II-30})$$

onde "o" indica valores da iteração anterior, na qual a zona convectiva não tem obrigatoriamente os mesmos limites.

A resolução do sistema matricial é semelhante a já descrita, mas as abundâncias não podem ser eliminadas de início. Entretanto, a medida que são incluídas novas camadas convectivas, os fluxos indicados na (II-27) vão se cancelando nas camadas adjacentes e os valores de $(\delta n_k)_{m_i}$ vão sendo substituídos por $(\delta n_k)_{m_i+1}$ de acordo com a (II-30), visto que $(n_k)_{m_i}^0$ e $(n_k)_{m_i+1}^0$ são conhecidos da iteração anterior. Desse modo, a medida que se somam as camadas se elimina a dependência na camada anterior porque o fluxo de matéria nos bordes das camadas convectivas é zero e o sistema fica completamente resolvido exceto pela dependência em δP e δT no fim da zona convectiva.

III - SOLUÇÕES MÚLTIPLAS E TRANSFERÊNCIA DE MASSA

III-1 Soluções Múltiplas

Após a sequência principal, as estrelas consistem de um núcleo de hélio e um envelope rico em hidrogênio. Roth e Weigert (1972) mostraram que modelos de estrelas nessa fase são possíveis em duas configurações distintas de mesma massa total M e mesma composição química, a saber:

a) com núcleo de hélio não degenerado e queima de hélio no centro pelo processo 3α ;

b) com um núcleo isotérmico de hélio em que o gás está altamente degenerado e a temperatura central não é suficiente para ocorrer a queima de hélio.

A existência desses modelos contraria o teorema de Vogt-Russell segundo o qual apenas uma configuração de equilíbrio pode existir para uma estrela de massa e composição química determinadas. Muitos outros casos de soluções múltiplas tem sido demonstrados, a maioria dos quais devido a diversidade dos envelopes (Lauterborn, 1972, Murai, 1974). O teorema de Vogt-Russell só é válido em um sentido local, isto é, as soluções formam um conjunto discreto de modo que na vizinhança imediata de uma solução não há outras soluções possíveis, exceto em casos marginais de instabilidade (Kahler, 1972).

Os modelos com núcleos diferentes a que nos referimos se superpõem para massas entre $M = 0,5 M_{\odot}$ e $M = 1,5 M_{\odot}$, como mostra a Figura 4. A massa do núcleo, M_N , determina os limites de superposição, pois núcleos com massa de helio menor do que $M_N = 0,35 M_{\odot}$ não chegam a queimar helio enquanto a queima de helio começará em núcleos degenerados com massa maior do que cerca de $M_N = 0,45 M_{\odot}$. A Figura 4 ilustra a região em que podem ocorrer soluções duplas segundo os modelos calculados. Essas soluções são estáveis e bem separadas de modo que uma vez alcançada uma configuração a estrela nela permanecerá. A linha de evolução de uma estrela isolada de massa e composição química inicial determinadas é única, de modo que apenas uma dessas configurações poderá corresponder a situação real. Os estudos feitos investigaram apenas a estrutura da estrela, sem seguir sua evolução, mas podemos cogitar na possibilidade de que ambas as configurações venham a ocorrer em estrelas reais visto que grande número de estrelas são duplas ou múltiplas e portanto não estão isoladas. A massa é a variável mais importante para estabelecer a estrutura das estrelas de modo que a mais decisiva interação que pode ocorrer em um sistema é a transferência de massa entre seus componentes. Como isso acontece será descrito no parágrafo seguinte.

Uma estrela de massa superior a $1,5 M_{\odot}$ com núcleo de helio estará certamente queimando helio em seu interior enquanto uma estrela de massa inferior a $0,5 M_{\odot}$ certamente terá

$$q = M_N/M$$

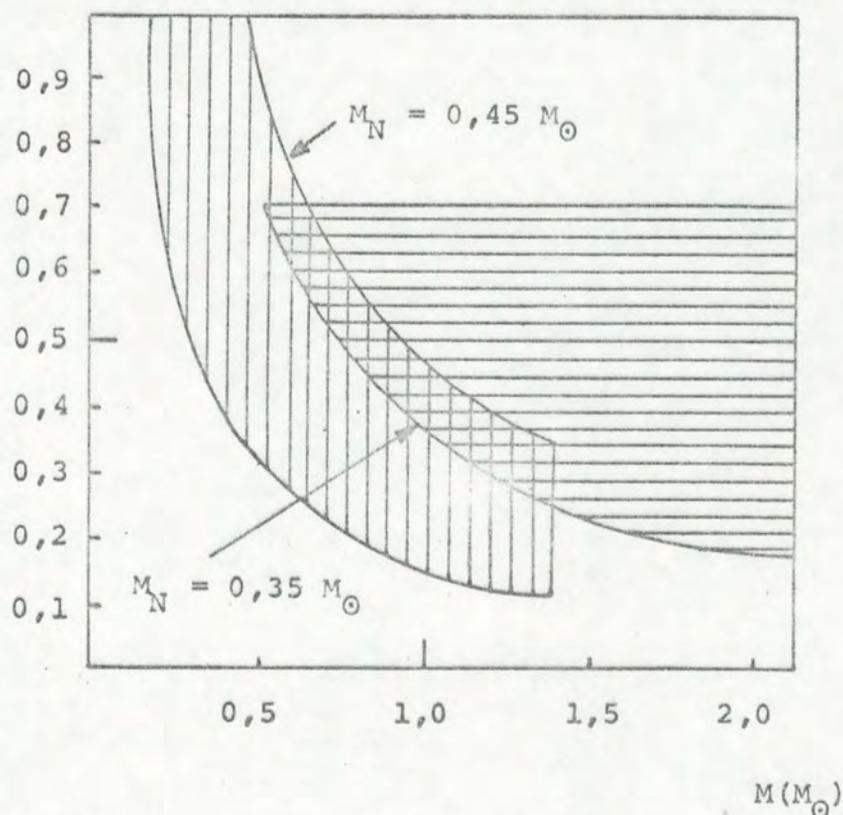


Fig. 4 - Modelos de massa total M e massa do núcleo M_N obtidos com o mesmo programa de computador (Roth e Weigert, 1972). As áreas hachuradas horizontalmente correspondem a núcleos queimando hélio e as hachuradas verticalmente a núcleos isotérmicos com elétrons degenerados. A superposição das duas áreas é a região em que ocorrem soluções duplas.

seu núcleo de hélio altamente degenerado. Se retirarmos lentamente massa da primeira ou adicionarmos lentamente massa na segunda até que ambas atinjam a mesma massa poderão acontecer que ambas mantenham sua configuração original, o que poderia dar origem a duas estrelas de mesma massa e composição química, mas estruturas diferentes.

III-2 Estrelas duplas e transferência de massa.

Sistemas duplos são próximos quando houver uma fase de sua evolução em que uma das componentes se expande mais do que o volume que lhe cabe no sistema (Plavec, 1968). A componente que atingir primeiro essa fase será certamente a de maior massa, que evoluciona mais depressa. O raio previsto em sua evolução poderá ser maior que a distância entre as componentes, mas a estrela não chegará a atingi-lo. Existem superfícies equipotenciais que na vizinhança de qualquer das estrelas, são esféricas, mas que se deformam a medida que se afastam até se encontrar em um ponto comum, L_1 , como mostra a Figura 5. A matéria circunscrita a essa superfície, denominada lóbulo de Roche, pertence a estrela nela contida, mas se a ultrapassar, não mais estará gravitacionalmente presa a essa estrela. Como a expansão da estrela é lenta as velocidades serão tão baixas que o material fluirá paralelamente as superfícies equipotenciais e acabará "caindo" na outra.

Naturalmente se está supondo que a companheira não preencha seu próprio lóbulo e que possa portanto acomodar essa massa. Esse caso foi denominado por Kopal de "semi-detached" (Kopal, 1955) e chamaremos de semi-contato.

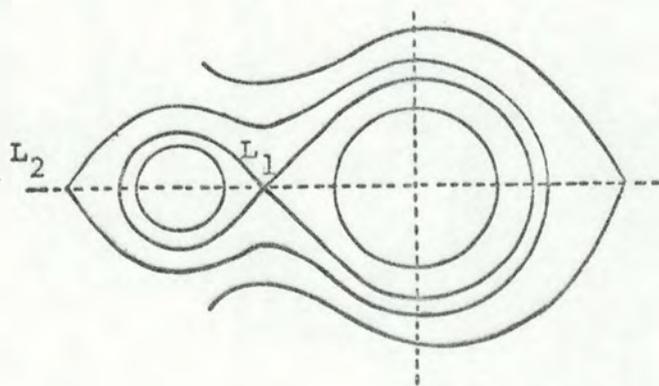


Fig. 5 - Superfícies equipotenciais num sistema binário.

As superfícies equipotenciais fora do lóbulo de Roche são contínuas e envolvem as duas estrelas até um ponto externo, L_2 , em que, devido à rotação, o material escapa ao próprio sistema. L_2 pertence a uma superfície equipotencial bastante afastada do lóbulo de Roche. É necessário que ambas as estrelas preencham seus lóbulos, formando um sistema de contato, para que quantidade significativa de matéria possa ser perdida pelo sistema. Em um sistema semi-contato esperamos observar a estrela de massa maior, que primeiro irá preen

cher seu lóbulo, ocupando todo o volume do mesmo e transferindo toda a matéria excedente para a outra estrela. Todos os sistemas observados possuem a estrela de massa menor enchendo o lóbulo, contrariando as expectativas. Essa estrela é a mais evolucionada, sendo que a de massa maior geralmente continua na sequência principal.

Morton (1960) conseguiu explicar esse fato supondo que a transferência de massa é tão rápida logo após a estrela atingir seu lóbulo de Roche que é mínima a possibilidade de observá-la. Para demonstrar isso ele calculou o que acontece quando uma pequena quantidade de massa for retirada da superfície da estrela. Verificou então que no caso da estrela homogênea seu raio diminui, mas se o núcleo já tiver composição significativamente diferente do envelope a estrela manterá seu raio quase inalterado para continuar em equilíbrio térmico e hidrostático. Na evolução subsequente ela continuará se expandindo.

Morton fez a hipótese de que a separação entre componentes não se altera. Atualmente supõe-se que o momentum angular do sistema é constante, pois toda a massa é transferida sem sair do sistema. O raio médio do lóbulo de Roche, R_1 , (Paczynsky, 1969 e 1971) será então:

$$R_1 = A(0,38 + 0,20 \log M_1/M_2) \quad (\text{I-91})$$

com

$$A = \frac{J^2}{G} \frac{M_1 + M_2}{(M_1 \times M_2)^2}$$

onde M_1 é a massa da estrela contida no lóbulo de raio R_1 e J é o momentum angular do sistema, sendo suposto sincronismo entre os movimentos de rotação e revolução.

Note que A , o fator dominante no cálculo do raio, é mínimo quando as massas das duas estrelas forem iguais. Como a estrela de massa maior enche primeiro seu lóbulo a transferência de massa ocasiona uma diminuição no raio permitido para essa estrela, já que a transferência tende a igualar as massas. A transferência de massa inicialmente é muito rápida, pois ao perder massa a estrela mais massiva cada vez mais se afasta do equilíbrio, até que as massas se igualem. A partir de então a razão de massa transferida tende a diminuir, sendo que quando as massas aproximadamente se inverterem cessa a transferência rápida de massa (Ziolkowski, 1969). Só então a estrela recupera seu equilíbrio térmico e hidrostático. Seu lóbulo de Roche aumentará à medida que ela perder massa, mas a transferência continua já que a estrela se expande lentamente devido a sua evolução. Essa é a fase mais provável de ser observada, visto que é a mais longa. A estrela de massa menor encherá seu lóbulo de Roche e será superluminosa para sua massa, comparada com uma de mesma massa na sequência principal. Isso confirma as observações.

Em todos os casos a estrela estudada teoricamente é a que perde massa, a qual sofre maiores transformações. Nenhum estudo tem sido feito para a que recebe massa. Considera-se que ela é capaz de acomodar toda a massa transferida e se transformar em uma estrela típica de sua massa total.

A quantidade de massa transferida depende da separação e da massa inicial das componentes. O estágio de evolução da estrela ao preencher o lóbulo determina a razão de transferência, que também é afetada pela diferença de massas das componentes. Para a mesma massa inicial e o mesmo estágio de evolução da estrela ao encher o lóbulo, o tempo total de transferência pouco depende da massa da companheira, ainda que a fase de transferência rápida seja mais curta quando a diferença entre as massas for maior (Harmanec, 1970). Isso significa que a razão de transferência de massa é maior quando a diferença entre as massas das componentes for maior. Sistemas de massas $M_1 = 1,4 M_{\odot}$, $M_2 = 1,1 M_{\odot}$ foram calculados por Refsdal e Weigert (1969) com separação inicial $A = 8,6 R_{\odot}$ (Sistema 1) e por Giannone, Refsdal e Weigert (1970) com separação inicial $A = 69,82 R_{\odot}$ (Sistema 2) e $A = 144,88 R_{\odot}$ (Sistema 3). O aumento da separação inicial das componentes faz com que o início da transferência de massa ocorra em idades mais avançadas como se pode observar na Tabela 5. Essa tabela contém a razão média de transferência de massa no intervalo de tempo indicado, que calculamos com base na idade e massa da estrela que perde massa nos modelos referidos. Incluímos também o Sistema 4, com dados de um modelo de $M_1 = 2,5 M_{\odot}$, $M_2 = 1,0 M_{\odot}$ com $A = 10 R_{\odot}$ (Giannone e Giannuzzi, 1972). Esse último sistema é o que mais se aproxima do nosso caso, sendo que a razão média de massa adicionada durante a transferência de massa é $1,4 \times 10^{-8} M_{\odot}/\text{ano}$.

Tabela 5

IDADE (10^9 anos)	MASSA (M_1) (M_\odot)	INTERVALO DE TEMPO (anos)	RAZÃO DE TRANSFERÊNCIA (M_\odot /ano)
SISTEMA 1 ($M_1 = 1,4 M_\odot$, $M_2 = 1,1 M_\odot$, $A = 8,6 R_\odot$)			
1,921	1,400	$1,0 \times 10^6$	$3,1 \times 10^{-7}$
1,922	1,090	$1,0 \times 10^6$	$1,6 \times 10^{-7}$
1,923	0,930	$2,01 \times 10^8$	$2,6 \times 10^{-9}$
2,124	0,398		
SISTEMA 2 ($M_1 = 1,4 M_\odot$, $M_2 = 1,1 M_\odot$, $A = 69,82 R_\odot$)			
2,151	1,400	$1,0 \times 10^6$	$7,71 \times 10^{-7}$
2,152	0,673	$8,0 \times 10^6$	$3,84 \times 10^{-8}$
2,160	0,366		
SISTEMA 3 ($M_1 = 1,4 M_\odot$, $M_2 = 1,1 M_\odot$, $A = 144,88 R_\odot$)			
2,161	1,400	$3,0 \times 10^6$	$2,57 \times 10^{-7}$
2,164	0,426		
SISTEMA 4 ($M_1 = 2,5 M_\odot$, $M_2 = 1,0 M_\odot$, $A = 10 R_\odot$)			
3,102	2,500	$6,0 \times 10^6$	$1,25 \times 10^{-7}$
3,108	1,750	$4,0 \times 10^6$	$1,36 \times 10^{-7}$
3,112	1,208	$1,3 \times 10^7$	$4,22 \times 10^{-8}$
3,115	0,659	$1,32 \times 10^8$	$2,59 \times 10^{-9}$
3,257	0,317		

IV - RESULTADOS

IV-1 Cálculo de modelos de estrelas homogêneas de massas entre $5 M_{\odot}$ e $1 M_{\odot}$ pelo método de Runge-Kutta.

Para calcular a sequência principal inicial, quando a estrela é homogênea, basta resolver quatro equações diferenciais com quatro condições de contorno, duas no centro e duas na superfície da estrela. Para aplicar o método de Runge-Kutta estima-se os valores centrais de pressão P_c e temperatura T_c para, junto com as condições usuais $L_c = 0$ e $R_c = 0$, integrar do centro para a superfície. Como os valores das variáveis diferem em várias ordens de grandeza entre o centro e a superfície, pequenas diferenças nos valores estimados das condições de contorno de um extremo podem originar soluções não físicas no outro extremo de integração. Por exemplo, temperatura ou pressão centrais menores que a correta poderão originar temperatura ou pressão superficiais negativas. Para evitar isso reinicia-se a integração da superfície para o centro com valores estimados de luminosidade na superfície L_s e temperatura da estrela T_s , junto com P_T e com o raio da estrela, R , conforme a (I-17) e (I-19), e ajusta-se as duas soluções em um ponto intermediário. Esse ajuste não será perfeito já que quatro das condições de contorno são, na verdade, parâmetros do problema. Dando independentemente acréscimos a cada um desses parâmetros podemos calcular o acréscimo

das variáveis P , T , L e r no ponto de ajuste. Supondo variação linear com P_c , T_c , L_s e T_s podemos obter novas estimativas para esses parâmetros e reaplicar o método até que a solução interna e a solução externa sejam consideradas iguais no ponto de ajuste. Esse processo entretanto só converge se os parâmetros estiverem bem próximos dos valores reais.

Para obter um modelo de $1M_\odot$ por esse método necessitamos estimativas bastante corretas de sua temperatura e pressão centrais e de sua luminosidade e temperatura na superfície. Como não tivéssemos modelos da composição química desejada ($X = 0,73$; $Z = 0,02$) resolvemos partir de uma estrela de $5M_\odot$ para a qual contávamos com um modelo correto. Calculamos então um modelo de $5M_\odot$ e usamos seus valores centrais e da superfície como primeira aproximação de um modelo de $4,9M_\odot$. A partir de então extrapolamos em massa a temperatura e pressão no centro e o raio e luminosidade da superfície para usá-los como estimativa em modelos de massa gradativamente menor. A precisão exigida foi que a diferença entre qualquer das variáveis no ponto de ajuste não ultrapassasse 10^{-7} do valor da mesma.

A Tabela 6 contém os valores obtidos para:

M_{total} = massa total do modelo em M_\odot

P_c = pressão central em 10^{17} dinas/cm²

ρ_c = densidade central em 10g/cm^3

T_c = temperatura central em 10^7OK

T_s = temperatura na superfície em 10^7OK , a qual está relacionada com a temperatura efetiva através da (I-18)

Tabela 6

Unidades: M_{total} em M_{\odot} , L_S em L_{\odot} ,
 P_C em 10^{17} dinas/cm², ρ_C em 10g/cm^3 ,
 T_C e T_S em 10^7 °K

M_{total}	P_C	ρ_C	T_C	T_S	L_S
5,00	0,427	1,349	2,272	1,232-3	4,302+2
4,90	0,435	1,384	2,261	1,216-3	3,987+2
4,50	0,472	1,539	2,213	1,149-3	2,886+2
4,00	0,531	1,785	2,148	1,061-3	1,836+2
3,50	0,607	2,118	2,076	9,673-4	1,094+2
3,00	0,711	2,585	1,994	8,684-4	5,975+1
2,75	0,777	2,894	1,949	8,168-4	4,238+1
2,50	0,856	3,189	1,902	7,643-4	2,929+1
2,25	0,954	3,750	1,850	7,090-4	1,924+1
2,00	1,076	4,367	1,792	6,516-4	1,203+1
1,90	1,133	4,665	1,767	6,279-4	9,802+0
1,80	1,197	4,999	1,741	6,039-4	7,893+0
1,70	1,267	5,378	1,714	5,795-4	6,275+0
1,60	1,345	5,807	1,684	5,545-4	4,916+0
1,50	1,432	6,295	1,652	5,296-4	3,789+0
1,40	1,528	6,856	1,618	5,069-4	2,865+0
1,30	1,633	7,500	1,580	4,890-4	2,120+0
1,20	1,748	8,240	1,538	4,724-4	1,527+0
1,10	1,866	9,078	1,488	4,579-4	1,066+0
1,00	1,973	9,992	1,428	4,443-4	7,163-1

L_S = luminosidade na superfície em L_\odot

Todas as estrelas listadas possuem núcleos convectivos. Na estrela de $5M_\odot$ o núcleo convectivo ocupa 18% da massa da estrela, decrescendo para 13% na estrela de $2M_\odot$ e 7% na de $1M_\odot$. As estrelas de $1,1 M_\odot$ e $1,0 M_\odot$ possuem uma zona convectiva na superfície, mas a fração de massa por elas compreendida é apenas 0,2% e 0,7% respectivamente.

É interessante notar que as estrelas menores tem densidade central maior, o que poderia dar origem a degenerescência dos elétrons de seu núcleo quando ele se contrair. A temperatura central das estrelas maiores é mais elevada e a luminosidade, nessa região da sequência principal, é aproximadamente proporcional à quarta potência da massa da estrela.

Usamos o valor $l/H = 1,1$ para a razão entre a distância de mistura e a altura de escala da pressão, o qual foi determinado por Z. Abraham (1971) como adequado ao Sol. A mistura de elementos pesados foi descrita na Tabela 2.

IV - 2 Divisão em camadas

A espessura das camadas dos modelos deve ser tal que as grandezas físicas não sofram variações muito bruscas entre camadas adjacentes e que o número total de camadas seja o menor possível. A divisão das camadas feita no programa de estrelas homogêneas foi mantida nos modelos evolutivos se-

guintes. Não foi permitido a qualquer grandeza variar mais do que 20% de seu valor na camada anterior. A massa da primeira camada foi definida como 10^{-7} da massa total da estrela e a massa de qualquer das camadas não pode ultrapassar 20% da massa integrada das camadas anteriores.

Perto do borde do núcleo convectivo as camadas devem ficar bem juntas para que a posição de borde fique bem determinada. Nessa região decidimos inicialmente dividir por dez o intervalo usual entre camadas, mas isso acarretou graves problemas numéricos nos modelos evolutivos. No gráfico da distribuição de He^3 no interior da estrela em função do tempo (Figura 6) podemos observar um abaulamento na curva a partir da posição em que a espessura das camadas volta a seu valor original, dez vezes maior. Esse acréscimo na abundância de He^3 é um efeito numérico cumulativo que se apresenta, embora menos pronunciado, mesmo se as camadas forem divididas ao meio em determinada região. Isso se observa na Figura 6 onde os pontos correspondentes ao modelo com intervalo dividido por dez foram identificados com uma cruz e os de divisão de camada ao meio por pontos, sendo que quando ambas as curvas coincidem omitimos as cruces. Esse problema não se apresentou nas demais variáveis cuja diferença entre dois modelos é muito menor do que a do He^3 .

Escolhemos critérios tais que a variação de espessura entre uma camada e a seguinte seja muito branda. O borde do núcleo é caracterizado pela igualdade entre o gradiente

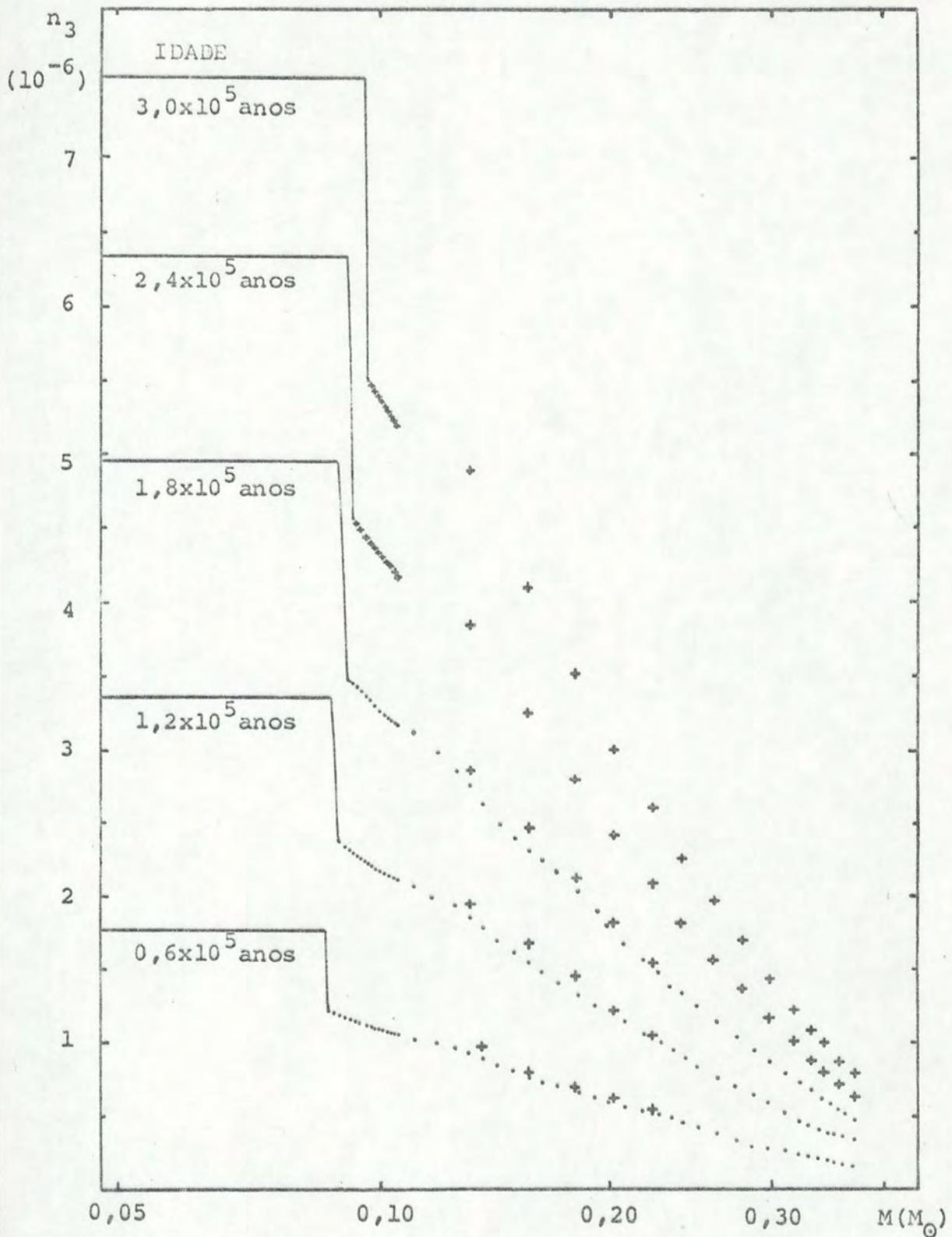


Fig. 6 - Efeito dos erros numéricos na distribuição de He^3 em função do tempo causados pela variação brusca da espessura das camadas (+++ variação relativa=10; ... variação relativa=2).

convectivo ∇_{ad} e o gradiente radiativo ∇_r . Quando a diferença entre os gradientes em valor absoluto era menor que um certo valor ΔG_1 começamos a reduzir a espessura das camadas multiplicando-as sucessivamente por $(1-\xi)$ com $0 < \xi < 1$ até que seu valor atingisse determinada fração FC da massa do modelo nesse ponto. Esse valor é mantido até que, passado o borde do núcleo, a diferença entre os gradientes ∇_{ad} e ∇_r ultrapasse o valor ΔG_2 , quando as camadas são aumentadas multiplicando-as sucessivamente por $(1+\xi)$ um número N de vezes. N é escolhido de modo que o passo volte a seu valor normal. Todos esses valores devem ser escolhidos com cuidado para que a redução da espessura das camadas termine antes do borde do núcleo e que o aumento da mesma acabe antes de ser atingida a massa M_f em que é feito o ajuste entre a solução interior e a solução exterior. Esse tratamento para o núcleo convectivo só é dado na integração de dentro para fora, isto é, na solução interior. Os valores que escolhemos foram

$$\Delta G_1 = 0,07$$

$$\Delta G_2 = 0,05$$

$$\xi = 0,2$$

$$N = 18$$

$$FC = 0,04$$

$$M_f = 0,4060$$

e deram origem a um modelo de 186 camadas.

IV-3 Evolução de uma estrela de $1 M_{\odot}$

Simulamos a evolução de uma estrela de $1 M_{\odot}$ usando o método implícito descrito na seção II-5 para resolver as equações diferenciais, com as camadas divididas de acordo com a seção IV-2. Usamos o modelo homogêneo de $1 M_{\odot}$ com $X = 0,73$, $Z = 0,02$ calculado pelo método de Runge-Kutta como solução inicial. Após, extrapolamos linearmente no tempo os modelos anteriores para usá-los como primeira aproximação de um processo iterativo. A massa do envelope foi de $10^{-3} M_{\odot}$, sendo que os modelos de envelope usados na interpolação diferiam em 1% em temperatura e 5% em luminosidade. Se o modelo final tivesse seu envelope fora dos limites de luminosidade e temperatura usados na interpolação, novos modelos de envelope eram calculados e refeito o cálculo do modelo final da estrela.

O He^3 e o C^{12} não foram considerados em equilíbrio no modelo inicial. Como a abundância inicial do He^3 era zero, essa grandeza inicialmente apresentou variações bastante grandes entre modelos. O intervalo de tempo nos primeiros dez modelos foi 6×10^4 anos, não podendo ser muito mais reduzido sob pena de se tornar comparável ao tempo que os fótons levam para difundir-se através da estrela. Nos modelos seguintes, embora não permitíssemos que qualquer grandeza variasse mais de 10%, o intervalo de tempo pode ser aumentado. O núcleo convectivo, que inicialmente abrangia 7% da massa da estrela, foi crescendo até 12% de sua massa na idade de $1,7 \times 10^6$ anos,

mas a seguir começou a retroceder. Em consequência disso o cálculo da abundância de He^3 nas camadas que se tornavam radiativas começou a apresentar problemas. A posição do núcleo convectivo não estava perfeitamente determinada, ficando em algum lugar entre os bordes de duas camadas adjacentes e causando erros no cálculo da abundância do núcleo, embora a região de seu borde tivesse sido especialmente dividida em camadas mais finas. Entretanto, como a abundância de todas as camadas convectivas era novamente misturada no modelo seguinte, esses erros não afetavam a distribuição enquanto o núcleo aumentava. Quando o núcleo começou a retroceder, as camadas que iam ficando radiativas apresentavam pequenas diferenças na composição como mostra a Figura 7. Essa figura é um gráfico da distribuição de He^3 na região do borde do núcleo e mostra uma série de modelos consecutivos.

Erro muito mais grave ocorria se o intervalo de tempo fosse tal que o núcleo retrocedesse mais de uma camada, como é mostrado na Figura 8, nos modelos b e d. O cálculo da composição dessas camadas era feito como se todas elas se tivessem tornado radiativas ao mesmo tempo, mas na verdade as camadas mais próximas do núcleo se mantiveram convectivas por mais tempo. Sua composição deveria, portanto, se aproximar mais da composição do núcleo convectivo. Esse erro também ocorreu com os demais elementos.

Para evitar todos esses problemas foi incluído no programa o cálculo do intervalo de tempo que deveria ser usado no modelo seguinte para que o núcleo retrocedesse só uma

camada e que seu borde ficasse exatamente no extremo da camada. Primeiro determinamos a posição do núcleo convectivo interpolando linearmente o gradiente radiativo e o gradiente convectivo e calculando a posição em que ambos são iguais. A seguir foi calculada a variação da posição do borde do núcleo no intervalo de tempo entre os dois últimos modelos e, extrapolando linearmente, o intervalo de tempo necessário para que no modelo seguinte sua posição se deslocasse exatamente a espessura de uma camada. O novo modelo era calculado com esse intervalo de tempo, mas geralmente o borde do núcleo convectivo ficava a cerca de 10% do extremo da camada. Como desejávamos que essa diferença fosse menor calculamos, através de interpolações semelhantes, o intervalo de tempo com que o modelo deveria ser refeito para que o borde do núcleo ficasse na posição desejada. O modelo foi refeito sempre que a diferença entre o borde do núcleo e o extremo da camada ultrapassasse 3%.

As camadas centrais da estrela foram divididas com massa extremamente pequena, pois a luminosidade varia muito nessa região, sendo que a soma das massas das 40 primeiras camadas é apenas $10^{-4} M_{\odot}$. Como nessa região a abundância de He^3 se aproxima do equilíbrio, sua variação temporal e espacial é pequena, de modo que a partir da 48a. camada ($m = 4,39 \times 10^{-4} M_{\odot}$) permitimos que o núcleo retrocedesse saltando camadas e passamos diretamente para a 46a. camada ($m=3,05 \times 10^{-4} M_{\odot}$), 44a. camada ($m=2,12 \times 10^{-4} M_{\odot}$) 32a. camada ($m=2,38 \times 10^{-5} M_{\odot}$) e no modelo seguinte terminou a convecção.

Nessa ocasião permitimos que o borde do núcleo se afastasse até 5% do extremo da camada.

A Figura 9 representa a distribuição de He^3 e a Figura 10 a distribuição de C^{12} como função do tempo nos modelos definitivos. Há uma descontinuidade da abundância de C^{12} na posição mais externa que o núcleo atingiu ($m = 0,1176 M_{\odot}$), que se mantém nos modelos seguintes junto com a descontinuidade do borde atual do núcleo até a estrela atingir cerca de 10^9 anos. Essa descontinuidade realmente deve ocorrer na estrela pois a difusão é bastante lenta.

Após o fim da convecção o intervalo de tempo entre modelos pode ser aumentado, ficando restringido pela variação da abundância de C^{12} , que diminui em todo o interior da estrela até 2×10^8 anos. A partir de então a abundância central de C^{12} aumenta lentamente, mas o mínimo da abundância se desloca para camadas mais externas fazendo com que sua variação seja muito grande em certas camadas. A Figura 11 é um gráfico logarítmico da abundância de C^{12} no interior da estrela, sendo que o primeiro modelo (λ , com idade $19,6 \times 10^6$ anos) é o último graficado na Figura 10. Para evitar variações muito grandes incluímos no programa o cálculo da variação das abundâncias em cada camada entre modelos e restringimos a variação máxima a 30%. Se o intervalo por nós fornecido correspondesse a uma variação maior, novo intervalo de tempo seria determinado e o modelo automaticamente calculado com esse intervalo.

O acréscimo na abundância de N^{14} é praticamente igual a variação da abundância do C^{12} , como se pode concluir das equações (I-36) a (I-45) pois o N^{13} , C^{13} , O^{15} , N^{15} , F^{17} e O^{17} estão em equilíbrio e o O^{16} varia muito lentamente. A Figura 12 mostra a distribuição de N^{14} no interior dos modelos como função do tempo.

A grandeza que mais varia relativamente, além do C^{12} , é o He^3 . A Figura 13 é um gráfico logarítmico da distribuição de He^3 para os modelos em que sua abundância central diminui, sendo que essa variação foi mantida menor do que 10%.

Completando o comportamento das abundâncias apresentamos na Figura 14 a distribuição de H^1 ; na Figura 15 a distribuição de He^4 e finalmente na Figura 16 a distribuição de O^{16} no interior da estrela como função do tempo. Foram representados os modelos após o fim da convecção pois a variação de abundância nesses elementos é muito pequena nos modelos anteriores.

A Tabela 7 contém dados de todos os modelos obtidos onde os símbolos tem o seguinte significado:

n^o = número de ordem do modelo

Idade = sua idade em unidades de 10^7 anos

n_1 = abundância central de H^1

n_3 = abundância central de He^3 em unidades de 10^{-6}

n_4 = abundância central de He^4 em unidades de 10^{-2}

n_{12} = abundância central de C^{12} em unidades de 10^{-4}

T_c = temperatura central em 10^6 oK

P_C = pressão central em 10^{17} dinas/cm²

L_S = luminosidade da superfície em L_\odot

T_S = temperatura da superfície em 10^3 °K, que está relacionada com a temperatura efetiva T_{ef} através da (I-18)

m_C = massa do núcleo convectivo em $10^{-3} M_\odot$.

As abundâncias são número de partículas do elemento dividido pelo número total de nucleons da camada.

Os valores finais em cada modelo devem ser corretos não apenas no que se refere a obtenção do modelo que está sendo calculado, mas também devem manter a precisão desejada após uma longa série de modelos sucessivos. Nosso controle ao longo dos modelos foi feito através do número total de nucleons de cada camada, $\sum_A Z_A n_A$, que deve se manter constante ao longo da evolução, pois não é afetado pelas reações nucleares. A precisão das camadas centrais do último modelo foi de 3×10^{-7} ou $3 \times 10^{-9}\%$, sendo que a precisão das camadas mais externas é maior. Esse é o melhor valor que devemos esperar pois a precisão exigida no processo iterativo em cada um dos modelos foi de 10^{-7} .

A massa total do último modelo, que possui $6,9 \times 10^9$ anos, é de $0,9995 M_\odot$ sendo a diferença liberada em forma de energia.

A Figura 17 é o diagrama de Hertzsprung-Russell dos modelos obtidos, estando as idades indicadas ao longo do mesmo. A temperatura efetiva do modelo com a idade do Sol ($4,5 \times 10^9$ anos) é de 5260°K , 10% menor que a do Sol, mas sua

luminosidade \tilde{a} apenas 1% menor. A massa do modelo \tilde{e} 0,9997 M_{\odot} , o que poderia explicar a diferen \tilde{c} a em luminosidade. Se desej \tilde{a} ssemos obter coincid \tilde{e} ncia na temperatura bastaria variar ℓ/H , o qual n \tilde{a} o afeta a luminosidade do modelo, alteran \tilde{d} o apenas sua temperatura, entretanto isso n \tilde{a} o \tilde{e} importante em nosso estudo.

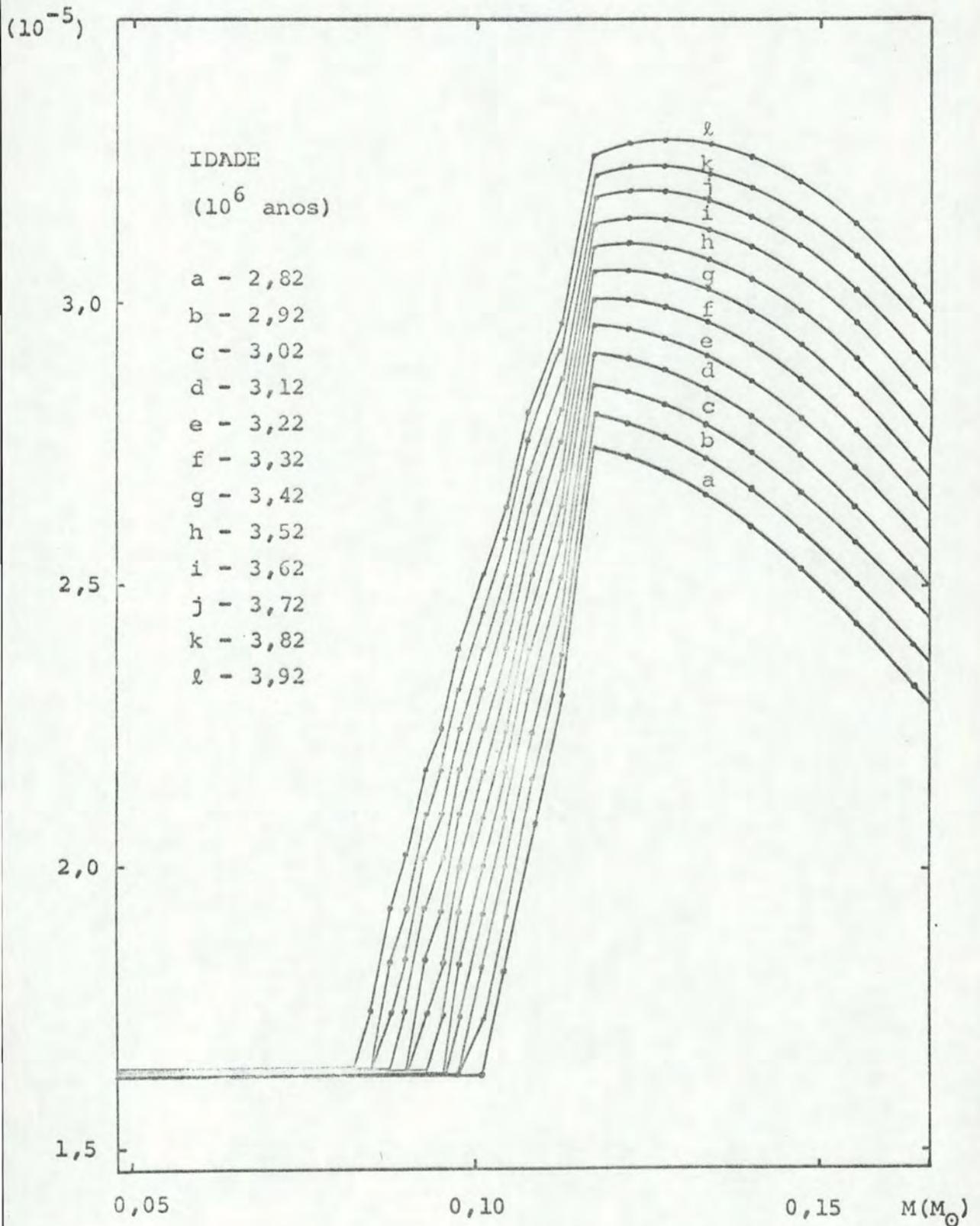


Fig. 7 - Efeito dos erros na abundância de He^3 das camadas que se tornam radiativas ocasionados pela incerteza na posição do borde do núcleo convectivo entre duas camadas.

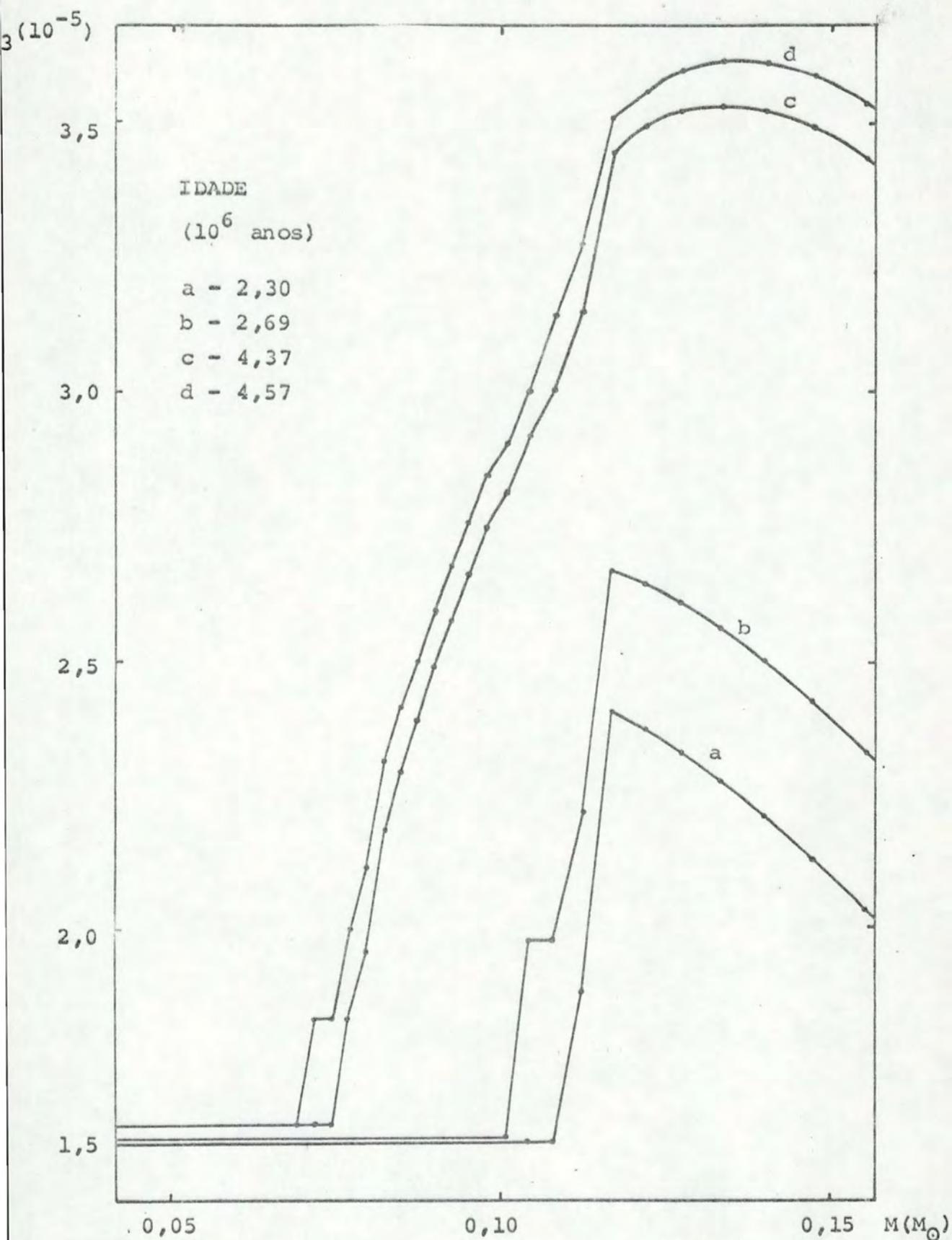


Fig. 8 - Efeito dos erros na distribuição de He^3 devido a recessão do borde do núcleo convectivo em mais de uma camada entre modelos sucessivos. O modelo b segue o a e o modelo d segue o c, mas não há relação entre o modelo b e o c.

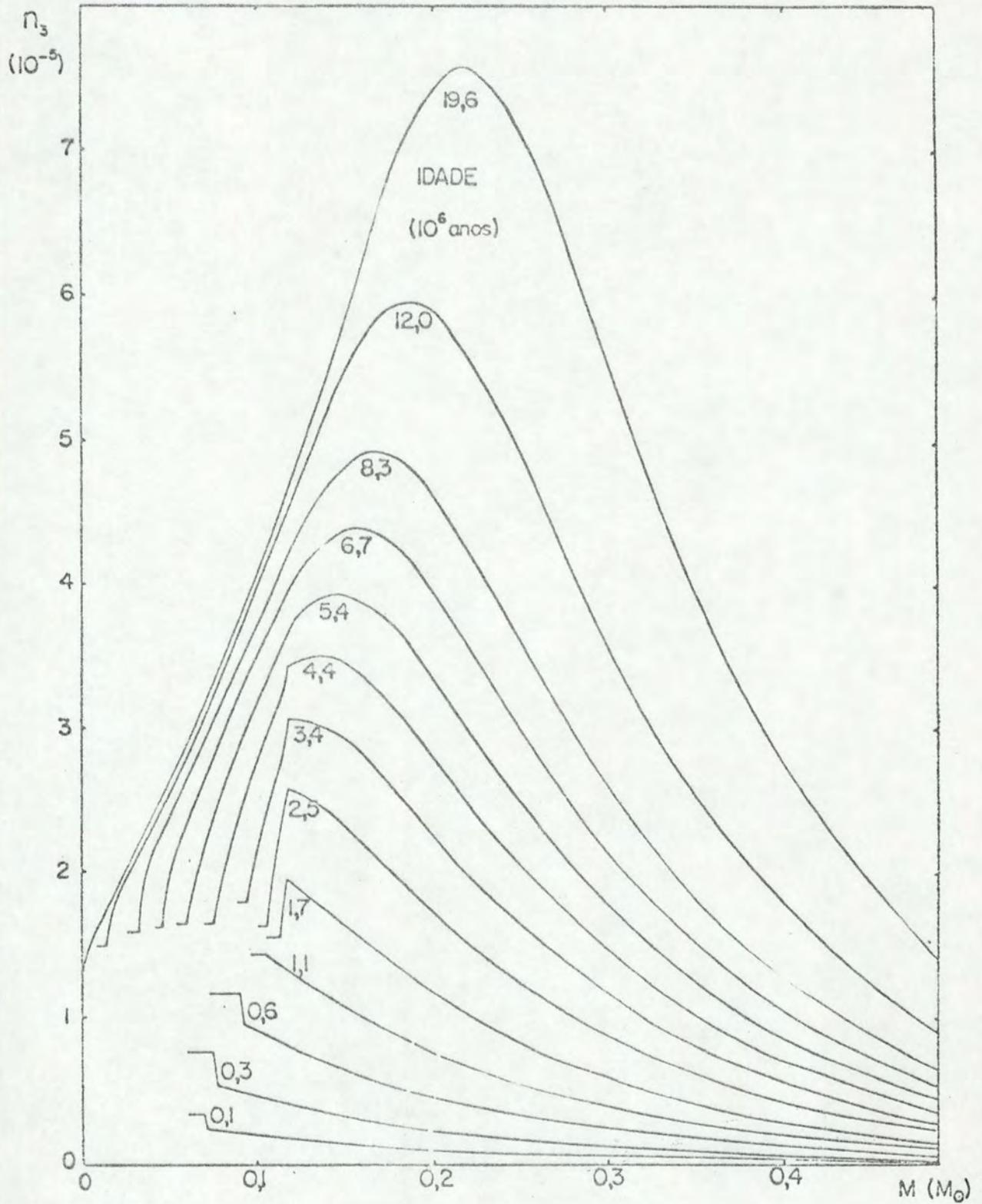


Fig. 9 - Distribuição de He^3 no interior dos modelos como função do tempo. As linhas interrompidas indicam abundância uniforme até $M = 0$.

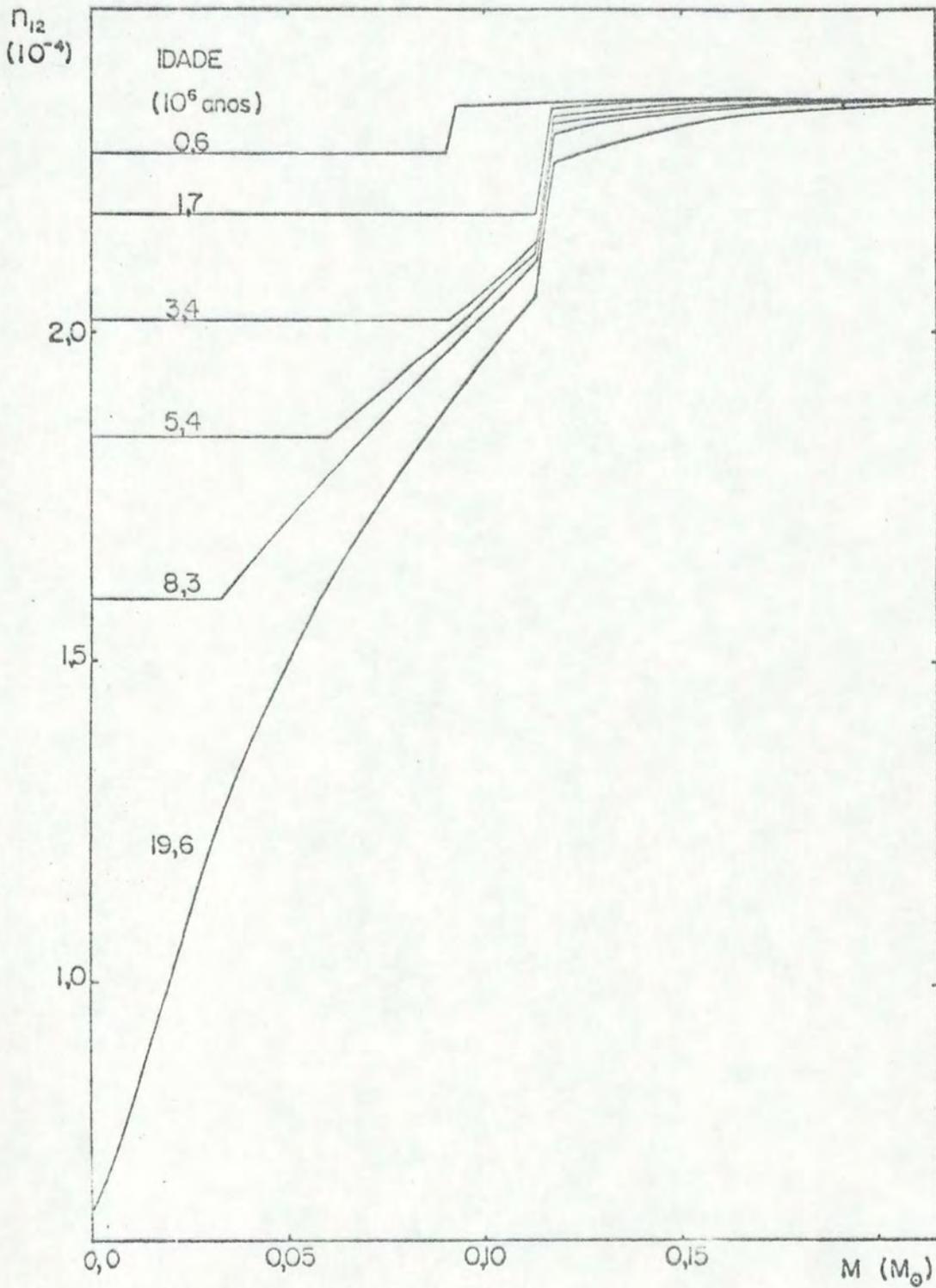


Fig. 10 - Distribuição de C^{12} no interior dos modelos com núcleo convectivo como função do tempo.

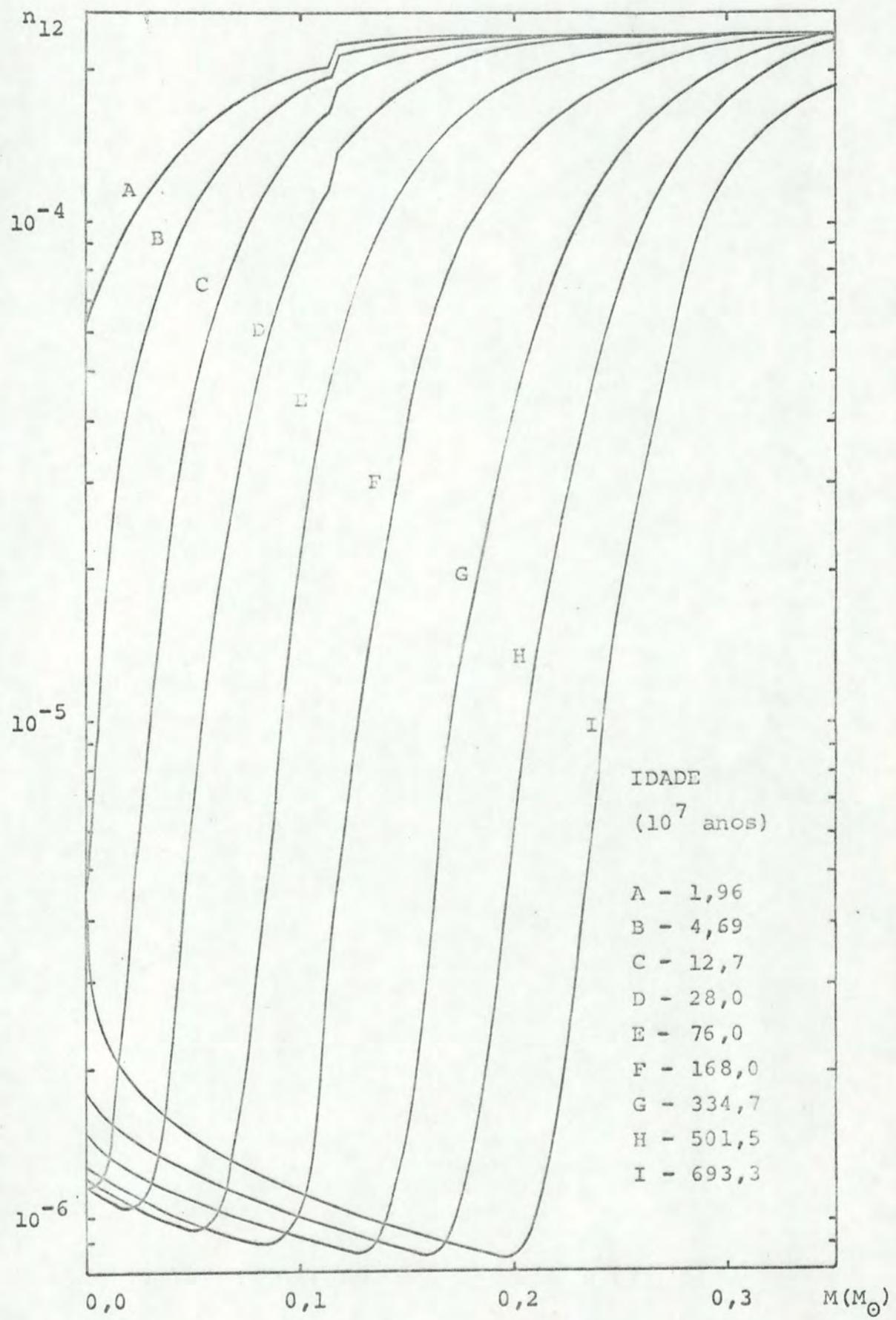


Fig. 11 - Distribuição de C^{12} como função do tempo a partir do último modelo da Fig. 10.

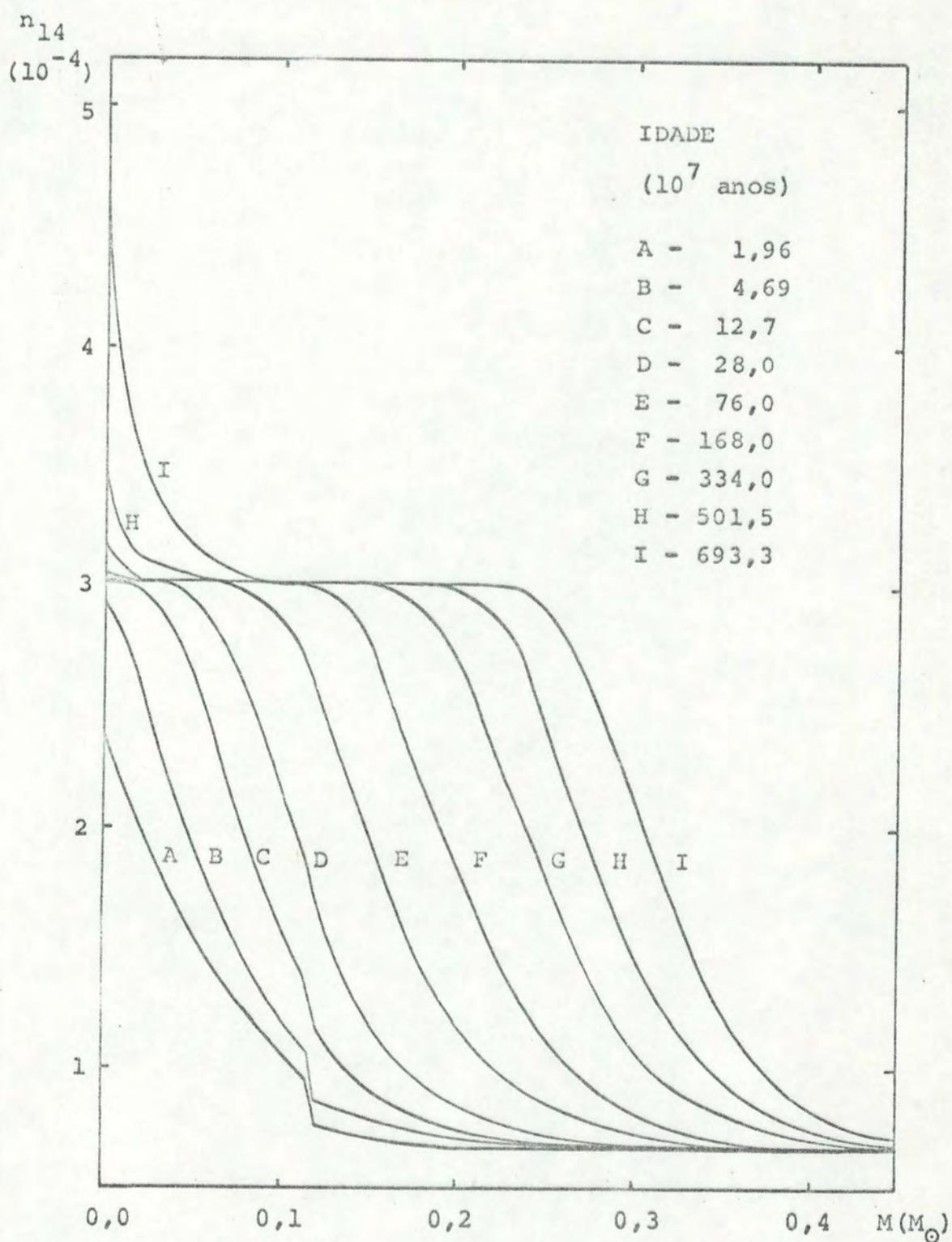


Fig. 12 - Distribuição de N^{14} no interior dos modelos como função do tempo.

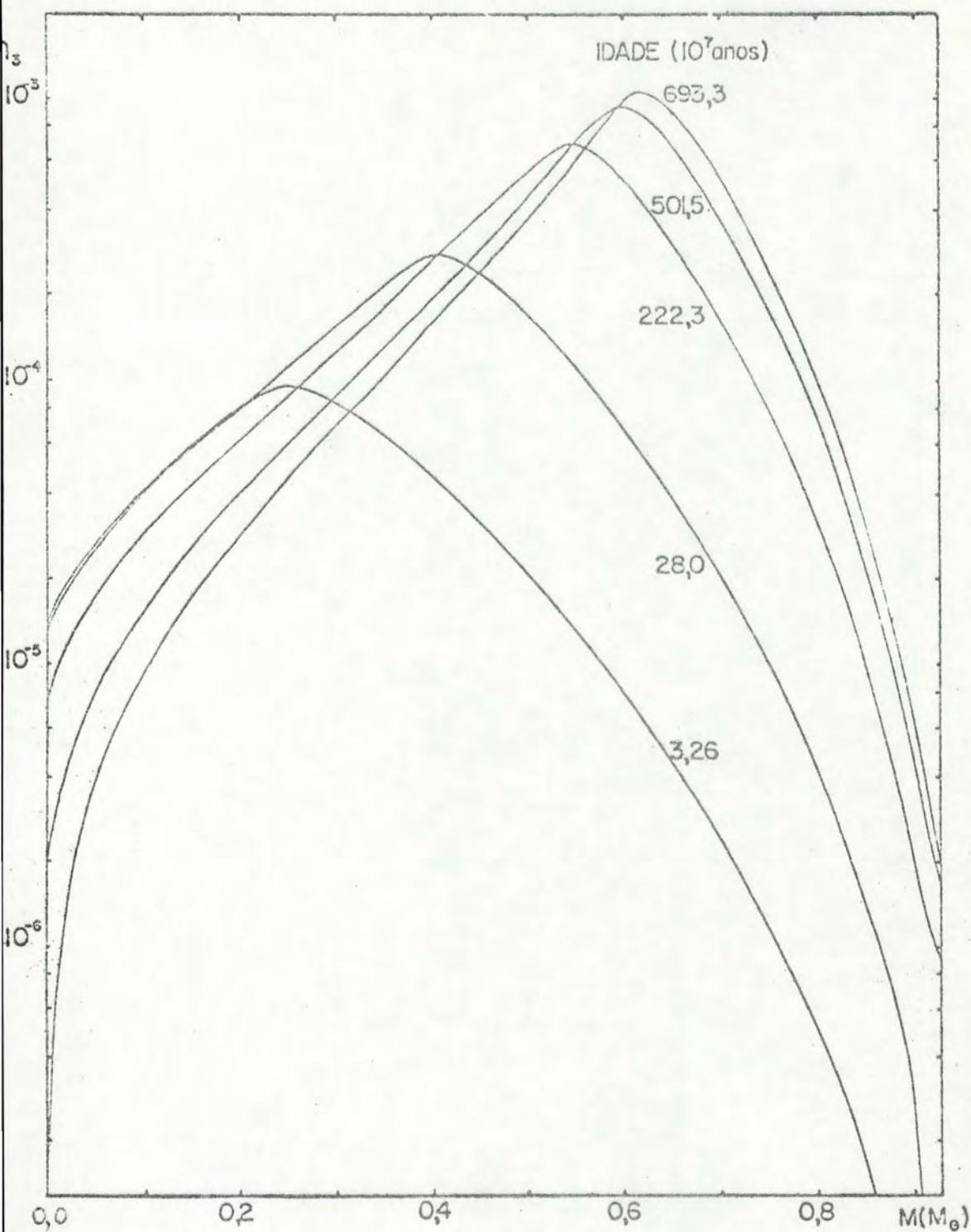


Fig. 13 - Distribuição de He^3 como função do tempo em modelos que seguem aos da Fig. 9.

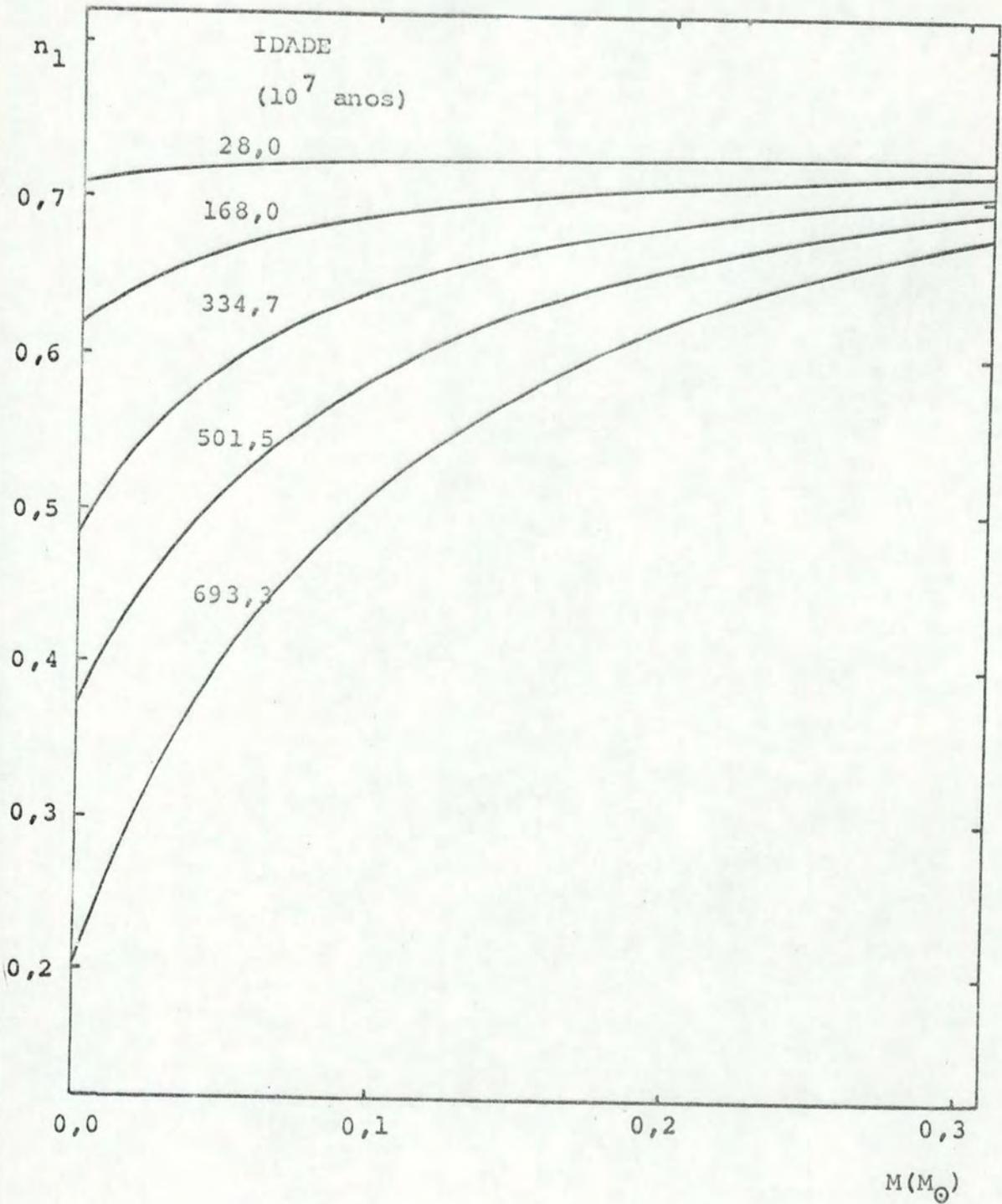


Fig. 14 - Distribuição de H^1 no interior dos modelos em função do tempo.

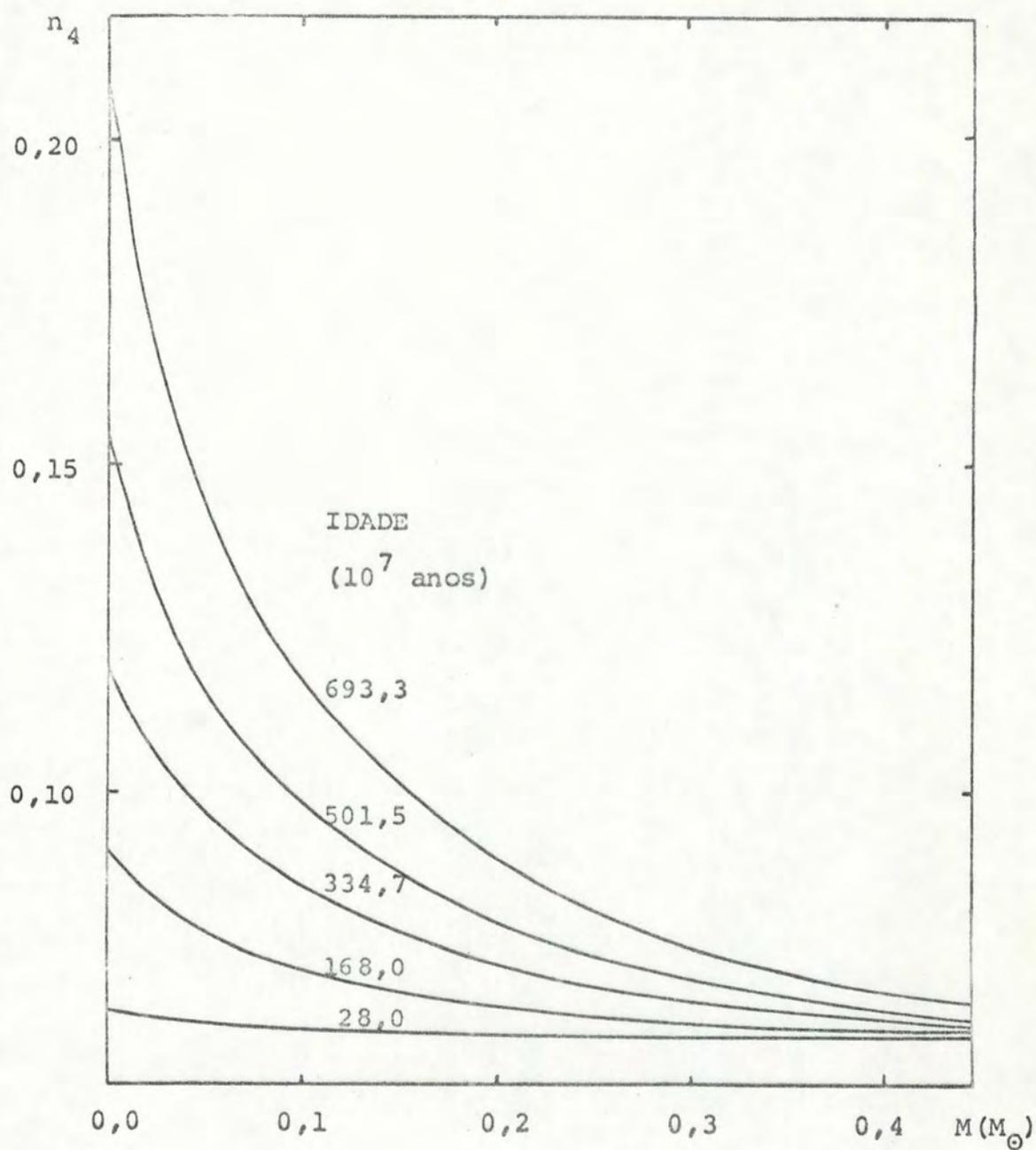


Fig. 15 - Distribuição de He^4 no interior dos modelos em função do tempo.

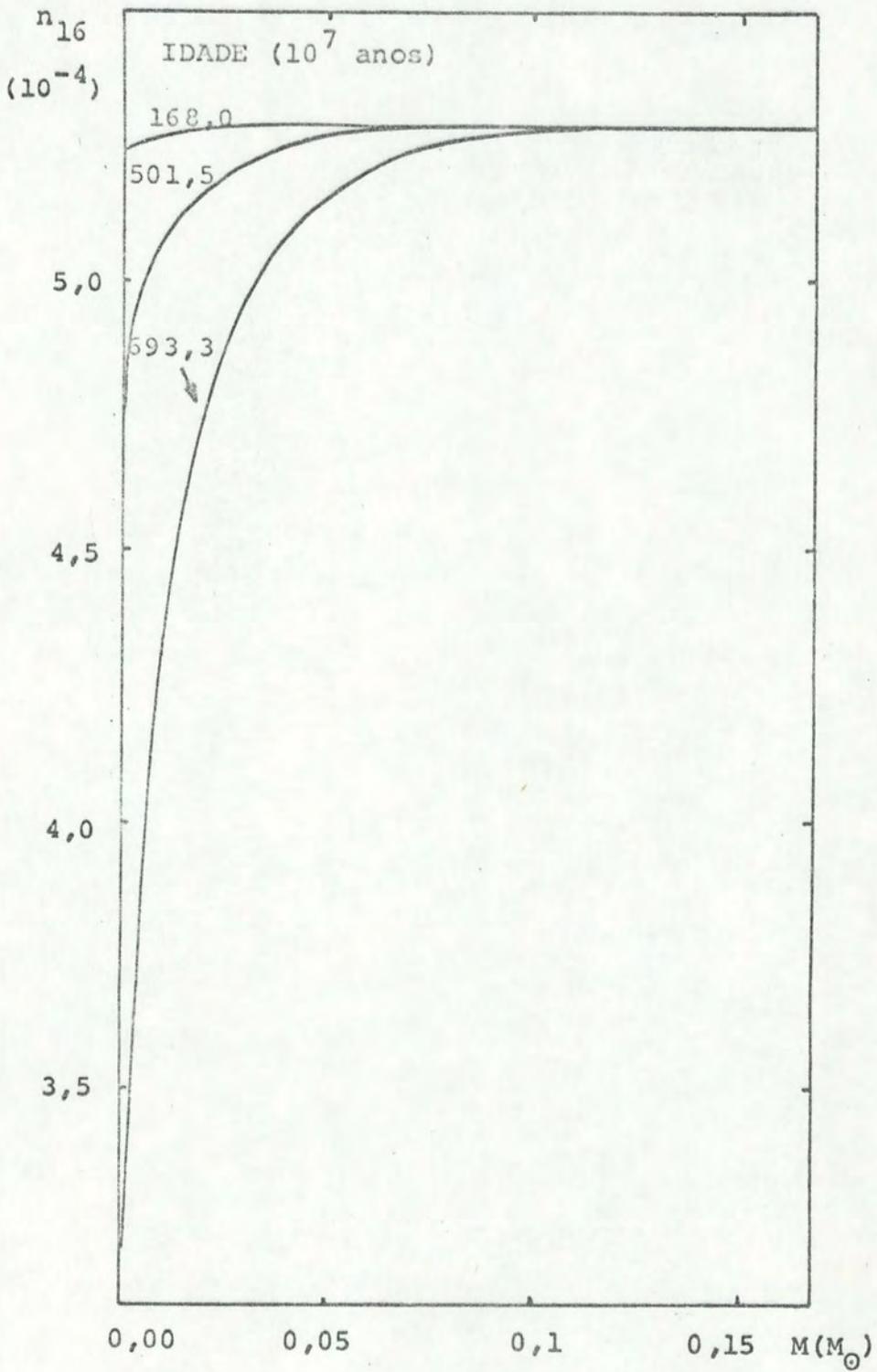


Fig. 16 - Distribuição de O^{16} no interior dos modelos em função do tempo.

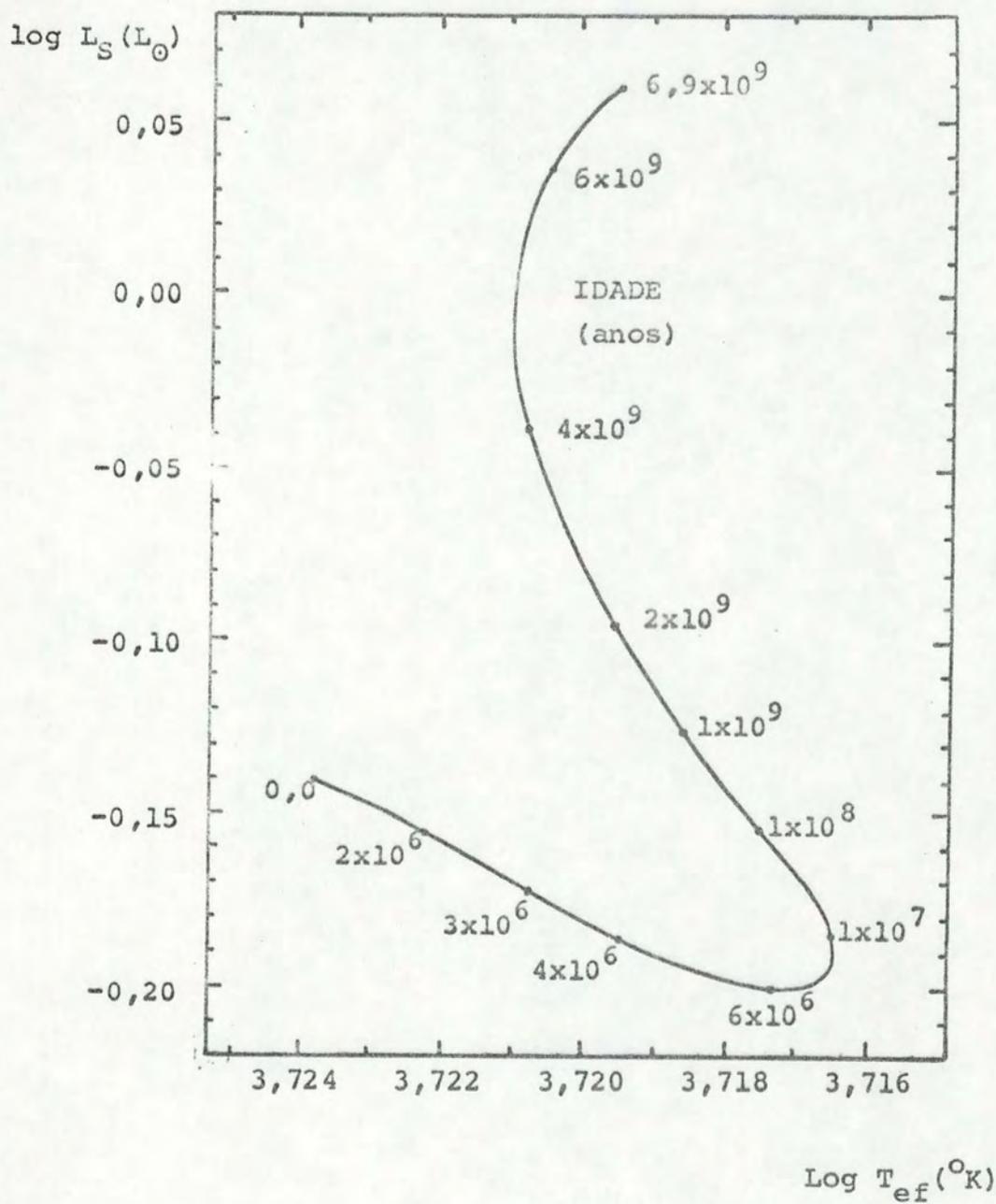


Fig. 17 - Diagrama de Hertzsprung-Russell dos modelos obtidos simulando a evoluç~ao de uma estrela de $1 M_\odot$.

Tabela 7

nº	Idade (anos)	n_1	n_3	n_4	n_{12}	T_c (10^6 °K)	P_c (10^{17})	L_S (L_\odot)	T_S (10^3 °K)	m_c (M_\odot)
1	0,00000	0,7286	0,000	6,283-2	2,364-4	14,29	1,969	0,7253	4,4510	6,723-2
2	6,00000+4	0,7286	1,742-6	6,283-2	2,353-4	14,29	1,968	0,7253	4,4510	6,981-2
3	1,20000+5	0,7286	3,389-6	6,283-2	2,342-4	14,29	1,968	0,7253	4,4510	7,239-2
4	1,80000+5	0,7286	4,959-6	6,283-2	2,331-4	14,29	1,968	0,7253	4,4510	7,239-2
5	2,40000+5	0,7286	6,339-6	6,283-2	2,321-4	14,30	1,966	0,7252	4,4510	7,498-2
6	3,00000+5	0,7286	7,563-6	6,283-2	2,312-4	14,30	1,964	0,7251	4,4509	7,756-2
7	3,60000+5	0,7286	8,635-6	6,283-2	2,304-4	14,30	1,962	0,7249	4,4508	8,015-2
8	4,20000+5	0,7286	9,500-6	6,283-2	2,297-4	14,30	1,959	0,7247	4,4506	8,529-2
9	4,80000+5	0,7286	1,038-5	6,283-2	2,288-4	14,30	1,955	0,7244	4,4504	8,529-2
10	5,40000+5	0,7286	1,101-5	6,283-2	2,283-4	14,30	1,951	0,7240	4,4501	9,050-2
11	6,00000+5	0,7286	1,162-5	6,283-2	2,276-4	14,30	1,947	0,7235	4,4497	9,311-2
12	7,20000+5	0,7286	1,261-5	6,283-2	2,264-4	14,30	1,937	0,7223	4,4489	9,849-2
13	1,12000+6	0,7285	1,427-5	6,283-2	2,235-4	14,30	1,909	0,7178	4,4461	1,088-1
14	1,42000+6	0,7285	1,519-5	6,284-2	2,210-4	14,28	1,879	0,7120	4,4426	1,176-1
15	1,72000+6	0,7285	1,567-5	6,284-2	2,178-4	14,26	1,851	0,7052	4,4388	1,176-1

nº	Idade	n ₁	n ₃	n ₄	n ₁₂	T _C	P _C	L _S	T _S	m _C
16	2,00000+6	0,7285	1,595-5	6,284-2	2,150-4	14,23	1,826	0,6989	4,4348	1,130-1
17	2,30000+6	0,7285	1,611-5	6,285-2	2,121-4	14,20	1,803	0,6919	4,4312	1,088-1
18	2,54400+6	0,7284	1,619-5	6,285-2	2,097-4	14,18	1,787	0,6861	4,4282	1,050-1
19	2,77700+6	0,7284	1,626-5	6,285-2	2,076-4	14,15	1,773	0,6797	4,4224	1,016-1
20	2,95130+6	0,7284	1,630-5	6,286-2	2,060-4	14,13	1,763	0,6759	4,4199	9,849-2
21	3,13030+6	0,7284	1,633-5	6,286-2	2,043-4	14,12	1,754	0,6721	4,4177	9,563-2
22	3,28230+6	0,7284	1,636-5	6,286-2	2,030-4	14,10	1,747	0,6688	4,4158	9,311-2
23	3,43130+6	0,7284	1,638-5	6,286-2	2,016-4	14,09	1,741	0,6656	4,4138	9,050-2
24	3,59930+6	0,7284	1,640-5	6,286-2	2,001-4	14,07	1,734	0,6619	4,4117	8,790-2
25	3,73430+6	0,7284	1,641-5	6,286-2	1,989-4	14,05	1,729	0,6588	4,4090	8,529-2
26	3,91430+6	0,7283	1,642-5	6,287-2	1,973-4	14,04	1,724	0,6553	4,4068	8,274-2
27	4,05770+6	0,7283	1,642-5	6,287-2	1,961-4	14,02	1,719	0,6525	4,4050	8,015-2
28	4,22770+6	0,7283	1,642-5	6,287-2	1,946-4	14,01	1,715	0,6496	4,4031	7,756-2
29	4,38770+6	0,7283	1,642-5	6,287-2	1,932-4	13,99	1,711	0,6470	4,4014	7,498-2
30	4,54770+6	0,7283	1,641-5	6,287-2	1,918-4	13,98	1,707	0,6442	4,3987	7,239-2
31	4,72270+6	0,7283	1,640-5	6,288-2	1,903-4	13,96	1,703	0,6416	4,3967	6,981-2
32	4,90170+6	0,7283	1,639-5	6,288-2	1,887-4	13,95	1,700	0,6393	4,3948	6,723-2
33	5,08070+6	0,7283	1,638-5	6,288-2	1,871-4	13,93	1,697	0,6374	4,3928	6,464-2
34	5,27270+6	0,7283	1,636-5	6,288-2	1,855-4	13,92	1,694	0,6347	4,3909	6,215-2
35	5,45820+6	0,7282	1,634-5	6,289-2	1,839-4	13,90	1,691	0,6333	4,3890	5,976-2

nº	Idade	n ₁	n ₃	n ₄	n ₁₂	T _C	P _C	L _S	T _S	m _C
36	5,64120+6	0,7282	1,632-5	6,289-2	1,823-4	13,88	1,689	0,6320	4,3875	5,746-2
37	5,82620+6	0,7282	1,630-5	6,289-2	1,807-4	13,87	1,687	0,6311	4,3862	5,525-2
38	6,00400+6	0,7282	1,628-5	6,289-2	1,791-4	13,86	1,685	0,6304	4,3849	5,313-2
39	6,18300+6	0,7282	1,625-5	6,289-2	1,776-4	13,84	1,683	0,6297	4,3828	5,108-2
40	6,36200+6	0,7282	1,622-5	6,290-2	1,760-4	13,83	1,682	0,6295	4,3817	4,912-2
41	6,54100+6	0,7282	1,620-5	6,290-2	1,745-4	13,82	1,680	0,6294	4,3807	4,723-2
42	6,72000+6	0,7282	1,617-5	6,290-2	1,729-4	13,81	1,679	0,6296	4,3798	4,541-2
43	6,89500+6	0,7281	1,613-5	6,290-2	1,714-4	13,80	1,678	0,6298	4,3790	4,366-2
44	7,07000+6	0,7281	1,610-5	6,291-2	1,699-4	13,79	1,677	0,6303	4,3783	4,199-2
45	7,25000+6	0,7281	1,606-5	6,291-2	1,683-4	13,78	1,676	0,6312	4,3789	4,037-2
46	7,43000+6	0,7281	1,603-5	6,291-2	1,668-4	13,77	1,676	0,6319	4,3783	3,882-2
47	7,61000+6	0,7281	1,599-5	6,291-2	1,652-4	13,76	1,675	0,6327	4,3778	3,733-2
48	7,79000+6	0,7281	1,595-5	6,292-2	1,636-4	13,75	1,674	0,6337	4,3774	3,589-2
49	7,97000+6	0,7281	1,591-5	6,292-2	1,621-4	13,74	1,674	0,6347	4,3770	3,451-2
50	8,15200+6	0,7281	1,587-5	6,292-2	1,605-4	13,73	1,674	0,6359	4,3768	3,318-2
51	8,33500+6	0,7280	1,583-5	6,292-2	1,589-4	13,72	1,673	0,6371	4,3765	3,191-2
52	8,52100+6	0,7280	1,579-5	6,293-2	1,572-4	13,71	1,673	0,6385	4,3763	3,068-2
53	8,70800+6	0,7280	1,575-5	6,293-2	1,556-4	13,71	1,673	0,6399	4,3761	2,930-2
54	8,89500+6	0,7280	1,570-5	6,293-2	1,540-4	13,70	1,673	0,6413	4,3760	2,836-2
55	9,26500+6	0,7280	1,557-5	6,294-2	1,507-4	13,69	1,673	0,6442	4,3758	2,612-2

nº	Idade	n ₁	n ₃	n ₄	n ₁₂	T _c	P _c	L _S	T _S	m _c
56	9,78900+6	0,7279	1,538-5	6,294-2	1,460-4	13,67	1,673	0,6483	4,3758	2,308-2
57	1,04410+7	0,7279	1,516-5	6,295-2	1,401-4	13,65	1,674	0,6533	4,3759	1,987-2
58	1,11830+7	0,7278	1,496-5	6,296-2	1,334-4	13,63	1,675	0,6586	4,3762	1,684-2
59	1,20330+7	0,7278	1,481-5	6,298-2	1,258-4	13,62	1,677	0,6641	4,3776	1,403-2
60	1,28497+7	0,7277	1,456-5	6,299-2	1,186-4	13,61	1,679	0,6685	4,3782	1,169-2
61	1,36047+7	0,7276	1,441-5	6,300-2	1,121-4	13,60	1,681	0,6719	4,3788	9,748-3
62	1,43047+7	0,7276	1,426-5	6,301-2	1,061-4	13,59	1,683	0,6745	4,3793	8,120-3
63	1,49347+7	0,7275	1,412-5	6,302-2	1,009-4	13,58	1,685	0,6765	4,3797	6,766-3
64	1,54847+7	0,7275	1,400-5	6,303-2	9,635-5	13,58	1,687	0,6779	4,3800	5,639-3
65	1,59607+7	0,7275	1,389-5	6,304-2	9,250-5	13,58	1,688	0,6790	4,3802	4,699-3
66	1,63834+7	0,7274	1,379-5	6,304-2	8,913-5	13,57	1,689	0,6799	4,3804	3,916-3
67	1,67534+7	0,7274	1,370-5	6,305-2	8,622-5	13,57	1,690	0,6807	4,3813	3,263-3
68	1,70834+7	0,7274	1,362-5	6,306-2	8,366-5	13,57	1,691	0,6812	4,3814	2,742-3
69	1,73734+7	0,7273	1,355-5	6,306-2	8,143-5	13,56	1,692	0,6816	4,3815	2,266-3
70	1,76294+7	0,7273	1,349-5	6,307-2	7,948-5	13,56	1,692	0,6820	4,3816	1,888-3
71	1,78534+7	0,7273	1,343-5	6,307-2	7,779-5	13,56	1,693	0,6823	4,3817	1,574-3
72	1,80534+7	0,7273	1,339-5	6,307-2	7,630-5	13,56	1,693	0,6825	4,3818	1,312-3
73	1,82294+7	0,7273	1,334-5	6,308-2	7,499-5	13,56	1,694	0,6827	4,3818	1,093-3
74	1,83864+7	0,7273	1,331-5	6,308-2	7,383-5	13,55	1,694	0,6829	4,3819	9,109-4
75	1,85214+7	0,7273	1,327-5	6,308-2	7,284-5	13,55	1,695	0,6830	4,3819	7,589-4

nº	Idade	n ₁	n ₃	n ₄	n ₁₂	T _C	P _C	L _S	T _S	m _C
76	1,86474+7	0,7272	1,324-5	6,308-2	7,192-5	13,55	1,695	0,6832	4,3820	6,324-4
77	1,87574+7	0,7272	1,322-5	6,309-2	7,120-5	13,55	1,695	0,6833	4,3820	5,271-4
78	1,88499+7	0,7272	1,319-5	6,309-2	7,046-5	13,55	1,696	0,6834	4,3820	4,392-4
79	1,89946+7	0,7272	1,315-5	6,309-2	6,941-5	13,55	1,696	0,6835	4,3821	3,050-4
80	1,91133+7	0,7272	1,312-5	6,309-2	6,856-5	13,55	1,696	0,6837	4,3821	2,118-4
81	1,92623+7	0,7272	1,307-5	6,309-2	6,750-5	13,55	1,696	0,6838	4,3821	1,022-4
82	1,94173+7	0,7272	1,302-5	6,310-2	6,639-5	13,54	1,697	0,6839	4,3822	2,376-5
83	1,96063+7	0,7272	1,296-5	6,310-2	6,505-5	13,54	1,697	0,6841	4,3822	0,00
84	2,00063+7	0,7271	1,284-5	6,311-2	6,220-5	13,54	1,698	0,6844	4,3823	
85	2,04063+7	0,7271	1,287-5	6,311-2	5,965-5	13,54	1,699	0,6847	4,3824	
86	2,08063+7	0,7271	1,300-5	6,312-2	5,705-5	13,53	1,699	0,6850	4,3825	
87	2,12063+7	0,7270	1,303-5	6,313-2	5,493-5	13,53	1,700	0,6853	4,3826	
88	2,19063+7	0,7270	1,306-5	6,314-2	5,105-5	13,52	1,702	0,6858	4,3827	
89	2,26063+7	0,7269	1,309-5	6,315-2	4,747-5	13,52	1,703	0,6862	4,3830	
90	2,33063+7	0,7269	1,312-5	6,316-2	4,416-5	13,51	1,704	0,6866	4,3830	
91	2,41063+7	0,7268	1,315-5	6,318-2	4,069-5	13,51	1,706	0,6870	4,3831	
92	2,50063+7	0,7267	1,317-5	6,319-2	3,713-5	13,51	1,707	0,6875	4,3832	
93	2,59663+7	0,7267	1,320-5	6,321-2	3,370-5	13,50	1,709	0,6880	4,3834	
94	2,69663+7	0,7266	1,323-5	6,323-2	3,050-5	13,50	1,710	0,6885	4,3835	
95	2,80663+7	0,7265	1,325-5	6,325-2	2,734-5	13,49	1,712	0,6890	4,3837	

nº	Idade	n ₁	n ₃	n ₄	n ₁₂	T _c	P _c	L _S	T _S
96	2,91663+7	0,7264	1,328-5	6,327-2	2,454-5	13,49	1,714	0,6895	4,3838
97	3,02663+7	0,7263	1,330-5	6,328-2	2,205-5	13,48	1,715	0,6899	4,3839
98	3,14663+7	0,7262	1,332-5	6,331-2	1,964-5	13,48	1,717	0,6904	4,3841
99	3,26663+7	0,7262	1,333-5	6,333-2	1,751-5	13,48	1,718	0,6908	4,3842
100	3,38663+7	0,7261	1,335-5	6,335-2	1,564-5	13,47	1,719	0,6913	4,3843
101	3,50663+7	0,7260	1,336-5	6,337-2	1,398-5	13,47	1,721	0,6917	4,3845
102	3,61993+7	0,7259	1,337-5	6,339-2	1,260-5	13,47	1,722	0,6920	4,3846
103	3,75993+7	0,7258	1,339-5	6,341-2	1,109-5	13,47	1,723	0,6925	4,3847
104	3,93557+7	0,7257	1,340-5	6,344-2	9,479-6	13,46	1,725	0,6930	4,3848
105	4,11700+7	0,7256	1,341-5	6,347-2	8,092-6	13,46	1,726	0,6935	4,3850
106	4,30300+7	0,7254	1,342-5	6,351-2	6,911-6	13,46	1,728	0,6940	4,3851
107	4,49420+7	0,7253	1,343-5	6,354-2	5,908-6	13,46	1,729	0,6944	4,3852
108	4,69180+7	0,7251	1,343-5	6,357-2	5,056-6	13,46	1,730	0,6949	4,3853
109	4,89185+7	0,7250	1,344-5	6,361-2	4,349-6	13,46	1,732	0,6953	4,3854
110	5,10652+7	0,7249	1,544-5	6,364-2	3,733-6	13,46	1,733	0,6958	4,3855
111	5,33376+7	0,7247	1,344-5	6,368-2	3,210-6	13,45	1,734	0,6962	4,3856
112	5,58376+7	0,7245	1,344-5	6,373-2	2,756-6	13,45	1,736	0,6967	4,3858
113	5,84909+7	0,7243	1,344-5	6,377-2	2,384-6	13,45	1,737	0,6971	4,3859
114	6,14377+7	0,7241	1,344-5	6,382-2	2,071-6	13,45	1,738	0,6976	4,3860
115	6,48377+7	0,7239	1,343-5	6,388-2	1,808-6	13,45	1,740	0,6981	4,3861

nº	Idade	n ₁	n ₃	n ₄	n ₁₂	T _c	P _c	L _S	T _S
116	6,88473+7	0,7236	1,343-5	6,395-2	1,593-6	13,45	1,741	0,6987	4,3862
117	7,39018+7	0,7233	1,342-5	6,404-2	1,419-6	13,45	1,743	0,6993	4,3868
118	7,99018+7	0,7228	1,340-5	6,415-2	1,301-6	13,45	1,745	0,7001	4,3871
119	8,59018+7	0,7224	1,339-5	6,425-2	1,237-6	13,46	1,747	0,7008	4,3872
120	9,19018+7	0,7220	1,337-5	6,435-2	1,203-6	13,46	1,748	0,7014	4,3873
121	9,54018+7	0,7218	1,336-5	6,442-2	1,191-6	13,46	1,749	0,7017	4,3874
122	9,89018+7	0,7215	1,335-5	6,448-2	1,183-6	13,46	1,750	0,7021	4,3875
123	1,02402+8	0,7213	1,334-5	6,454-2	1,178-6	13,46	1,751	0,7024	4,3875
124	1,05902+8	0,7210	1,333-5	6,460-2	1,174-6	13,46	1,725	0,7027	4,3875
125	1,09402+8	0,7208	1,332-5	6,466-2	1,171-6	13,46	1,752	0,7030	4,3876
126	1,12902+8	0,7205	1,331-5	6,472-2	1,169-6	13,46	1,753	0,7033	4,3877
127	1,16402+8	0,7202	1,330-5	6,478-2	1,168-6	13,46	1,754	0,7036	4,3877
128	1,19902+8	0,7200	1,328-5	6,484-2	1,167-6	13,46	1,754	0,7039	4,3878
129	1,23402+8	0,7198	1,327-5	6,490-2	1,167-6	13,46	1,755	0,7042	4,3878
130	1,26902+8	0,7196	1,326-5	6,497-2	1,166-6	13,47	1,756	0,7045	4,3879
131	1,30402+8	0,7193	1,325-5	6,503-2	1,166-6	13,47	1,757	0,7047	4,3879
132	1,33902+8	0,7191	1,324-5	6,509-2	1,166-6	13,47	1,757	0,7050	4,3879
133	1,39902+8	0,7187	1,322-5	6,519-2	1,166-6	13,47	1,758	0,7054	4,3880
134	1,45902+8	0,7182	1,320-5	6,530-2	1,167-6	13,47	1,759	0,7058	4,3881
135	1,51902+8	0,7178	1,318-5	6,540-2	1,167-6	13,47	1,760	0,7062	4,3881

nº	Idade	n ₁	n ₃	n ₄	n ₁₂	T _C	P _C	L _S	T _S
136	1,57902+8	0,7174	1,316-5	6,551-2	1,167-6	13,47	1,761	0,7066	4,3882
137	1,63902+8	0,7170	1,314-5	6,561-2	1,168-6	13,48	1,762	0,7070	4,3883
138	1,66902+8	0,7166	1,313-5	6,572-2	1,168-6	13,48	1,763	0,7074	4,3883
139	1,75902+8	0,7161	1,311-5	6,582-2	1,168-6	13,48	1,764	0,7078	4,3884
140	1,82902+8	0,7157	1,308-5	6,594-2	1,169-6	13,48	1,765	0,7082	4,3884
141	1,89902+8	0,7176	1,306-5	6,607-2	1,169-6	13,48	1,766	0,7086	4,3885
142	1,96902+8	0,7173	1,304-5	6,618-2	1,170-6	13,49	1,767	0,7091	4,3886
143	2,03902+8	0,7142	1,301-5	6,631-2	1,170-6	13,49	1,768	0,7095	4,3887
144	2,13902+8	0,7135	1,298-5	6,649-2	1,171-6	13,49	1,770	0,7100	4,3888
145	2,23902+8	0,7128	1,295-5	6,666-2	1,171-6	13,49	1,771	0,7106	4,3889
146	2,52002+8	0,7108	1,286-5	6,716-2	1,173-6	13,50	1,775	0,7112	4,3889
147	2,80102+8	0,7088	1,277-5	6,765-2	1,175-6	13,51	1,779	0,7136	4,3894
148	3,20102+8	0,7060	1,264-5	6,835-2	1,178-6	13,52	1,785	0,7157	4,3897
149	3,60102+8	0,7032	1,251-5	6,905-2	1,180-6	13,54	1,791	0,7177	4,3901
150	4,00102+8	0,7004	1,238-5	6,976-2	1,183-6	13,55	1,796	0,7197	4,3905
151	4,40102+8	0,6976	1,225-5	7,046-2	1,185-6	13,56	1,802	0,7216	4,3908
152	4,80102+8	0,6948	1,213-5	7,117-2	1,188-6	13,57	1,807	0,7235	4,3912
153	5,20102+8	0,6919	1,200-5	7,188-2	1,191-6	13,59	1,813	0,7254	4,3915
154	5,60102+8	0,6891	1,188-5	7,258-2	1,194-6	13,60	1,818	0,7273	4,3918
155	6,00102+8	0,6863	1,175-5	7,329-2	1,196-6	13,61	1,824	0,7292	4,3922

nº	Idade	n ₁	n ₃	n ₄	n ₁₂	T _c	P _c	L _S	T _S
156	6,40102+8	0,6834	1,163-5	7,400-2	1,199-6	13,63	1,829	0,7311	4,3930
157	6,80102+8	0,6806	1,150-5	7,471-2	1,202-6	13,64	1,835	0,7330	4,3934
158	7,20102+8	0,6778	1,138-5	7,542-2	1,205-6	13,65	1,841	0,7349	4,3938
159	7,60102+8	0,6749	1,126-5	7,613-2	1,208-6	13,67	1,846	0,7367	4,3943
160	8,00102+8	0,6721	1,113-5	7,684-2	1,211-6	13,68	1,852	0,7385	4,3947
161	8,40102+8	0,6692	1,101-5	7,756-2	1,214-6	13,69	1,858	0,7405	4,3951
162	8,90102+8	0,6656	1,086-5	7,845-2	1,217-6	13,71	1,865	0,7429	4,3956
163	9,40102+8	0,6621	1,071-5	7,934-2	1,221-6	13,73	1,873	0,7453	4,3961
164	9,90102+8	0,6585	1,056-5	8,024-2	1,225-6	13,74	1,880	0,7476	4,3965
165	1,04010+9	0,6549	1,041-5	8,113-2	1,229-6	13,76	1,887	0,7500	4,3971
166	1,10010+9	0,6510	1,023-5	8,221-2	1,233-6	13,78	1,895	0,7528	4,3976
167	1,16010+9	0,6456	1,006-5	8,330-2	1,238-6	13,80	1,903	0,7556	4,3982
168	1,22010+9	0,6414	9,910-6	8,439-2	1,243-6	13,82	1,912	0,7584	4,3988
169	1,28010+9	0,6372	9,725-6	8,547-2	1,248-6	13,84	1,921	0,7613	4,4005
170	1,34010+9	0,6331	9,543-6	8,655-2	1,253-6	13,86	1,932	0,7644	4,4011
171	1,40010+9	0,6290	9,377-6	8,762-2	1,258-6	13,89	1,943	0,7676	4,4019
172	1,47010+9	0,6239	9,181-6	8,889-2	1,264-6	13,92	1,955	0,7710	4,4023
173	1,54010+9	0,6188	8,989-6	9,017-2	1,270-6	13,94	1,966	0,7745	4,4028
174	1,61010+9	0,6137	8,797-6	9,144-2	1,276-6	13,97	1,978	0,7780	4,4032
175	1,68010+9	0,6086	8,609-6	9,272-2	1,282-6	14,00	1,990	0,7816	4,4036

nº	Idade	n ₁	n ₃	n ₄	n ₁₂	T _c	P _c	L _S	T _S
176	1,75010+9	0,6034	8,421-6	9,401-2	1,289-6	14,02	2,001	0,7851	4,4040
177	1,82010+9	0,5933	8,237-6	9,529-2	1,295-6	14,05	2,013	0,7887	4,4044
178	1,88728+9	0,5933	8,060-6	9,653-2	1,302-6	14,08	2,025	0,7923	4,4069
179	1,95445+9	0,5884	7,887-6	9,777-2	1,308-6	14,10	2,037	0,7958	4,4073
180	2,02162+9	0,5834	7,714-6	9,901-2	1,315-6	14,13	2,049	0,7993	4,4078
181	2,08880+9	0,5784	7,545-6	1,003-1	1,322-6	14,16	2,061	0,8029	4,4083
182	2,15597+9	0,5734	7,376-6	1,015-1	1,329-6	14,18	2,074	0,8065	4,4087
183	2,22315+9	0,5684	7,211-6	1,028-1	1,336-6	14,21	2,086	0,8101	4,4092
184	2,30247+9	0,5625	7,016-6	1,042-1	1,344-6	14,25	2,101	0,8145	4,4096
185	2,38133+9	0,5566	6,827-6	1,057-1	1,353-6	14,28	2,117	0,8188	4,4101
186	2,46018+9	0,5506	6,638-6	1,072-1	1,362-6	14,31	2,132	0,8232	4,4105
187	2,53904+9	0,5447	6,454-6	1,087-1	1,371-6	14,35	2,148	0,8276	4,4109
188	2,62307+9	0,5383	6,258-6	1,103-1	1,381-6	14,38	2,165	0,8324	4,4130
189	2,70710+9	0,5319	6,068-6	1,119-1	1,391-6	14,42	2,182	0,8372	4,4135
190	2,78710+9	0,5258	5,888-6	1,134-1	1,401-6	14,46	2,198	0,8419	4,4139
191	2,86710+9	0,5197	5,712-6	1,149-1	1,411-6	14,49	2,215	0,8465	4,4143
192	2,94710+9	0,5136	5,536-6	1,165-1	1,422-6	14,53	2,233	0,8512	4,4147
193	3,02710+9	0,5074	5,365-6	1,180-1	1,433-6	14,57	2,250	0,8560	4,4151
194	3,10710+9	0,5012	5,195-6	1,196-1	1,444-6	14,60	2,268	0,8608	4,4154
195	3,18710+9	0,4950	5,030-6	1,211-1	1,455-6	14,64	2,286	0,8657	4,4158

nº	Idade	n ₁	n ₃	n ₄	n ₁₂	T _c	P _c	L _S	T _S
196	3,26710+9	0,4887	4,865-6	1,227-1	1,467-6	14,68	2,305	0,8706	4,4162
197	3,34710+9	0,4704	4,704-6	1,243-1	1,480-6	14,72	2,324	0,8756	4,4165
198	3,43710+9	0,4754	4,524-6	1,260-1	1,494-6	14,77	2,345	0,8813	4,4183
199	3,52710+9	0,4682	4,350-6	1,278-1	1,509-6	14,81	2,367	0,8870	4,4187
200	3,61710+9	0,4611	4,176-6	1,296-1	1,524-6	14,86	2,390	0,8928	4,4191
201	3,71656+9	0,4531	3,991-6	1,316-1	1,542-6	14,91	2,415	0,8992	4,4194
202	3,81602+9	0,4451	3,807-6	1,336-1	1,561-6	14,96	2,441	0,9057	4,4197
203	3,91549+9	0,4371	3,629-6	1,356-1	1,580-6	15,02	2,467	0,9123	4,4199
204	4,01549+9	0,4289	3,452-6	1,377-1	1,601-6	15,07	2,494	0,9191	4,4213
205	4,11549+9	0,4207	3,281-6	1,397-1	1,623-6	15,13	2,522	0,9259	4,4215
206	4,21549+9	0,4124	3,113-6	1,418-1	1,645-6	15,18	2,551	0,9328	4,4218
207	4,31549+9	0,4041	2,949-6	1,438-1	1,669-6	15,24	2,580	0,9398	4,4219
208	4,41549+9	0,3958	2,788-6	1,459-1	1,694-6	15,30	2,610	0,9469	4,4220
209	4,51549+9	0,3873	2,633-6	1,481-1	1,721-6	15,36	2,640	0,9541	4,4230
210	4,61549+9	0,3788	2,480-6	1,502-1	1,749-6	15,42	2,672	0,9614	4,4232
211	4,71549+9	0,3703	2,332-6	1,523-1	1,779-6	15,48	2,704	0,9687	4,4233
212	4,81549+9	0,3616	2,187-6	1,545-1	1,811-6	15,55	2,737	0,9762	4,4233
213	4,91549+9	0,3529	2,047-6	1,567-1	1,844-6	15,61	2,770	0,9837	4,4232
214	5,01549+9	0,3441	1,910-6	1,589-1	1,880-6	15,68	2,805	0,9913	4,4230
215	5,11549+9	0,3353	1,779-6	1,611-1	1,918-6	15,74	2,841	0,9990	4,4242

nº	Idade	n ₁	n ₃	n ₄	n ₁₂	T _C	P _C	L _S	T _S
216	5,21549+9	0,3263	1,650-6	1,633-1	1,958-6	15,81	2,877	1,007	4,4239
217	5,31549+9	0,3173	1,527-6	1,656-1	2,001-6	15,88	2,915	1,015	4,4238
218	5,41549+9	0,3082	1,406-6	1,679-1	2,047-6	15,96	2,953	1,023	4,4233
219	5,51549+9	0,2990	1,292-6	1,702-1	2,096-6	16,03	2,993	1,031	4,4228
220	5,58549+9	0,2925	1,213-6	1,718-1	2,133-6	16,08	3,021	1,036	4,4332
221	5,65549+9	0,2859	1,138-6	1,734-1	2,171-6	16,13	3,050	1,042	4,4228
222	5,72549+9	0,2793	1,064-6	1,751-1	2,211-6	16,19	3,079	1,048	4,4224
223	5,79549+9	0,2727	9,924-7	1,767-1	2,253-6	16,24	3,109	1,054	4,4218
224	5,85549+9	0,2669	9,331-7	1,782-1	2,290-6	16,29	3,136	1,059	4,4217
225	5,91549+9	0,2612	8,753-7	1,796-1	2,329-6	16,34	3,162	1,064	4,4212
226	5,97549+9	0,2553	8,194-7	1,811-1	2,370-6	16,39	3,189	1,069	4,4207
227	6,01549+9	0,2514	7,833-7	1,821-1	2,398-6	16,42	3,208	1,072	4,4202
228	6,05549+9	0,2475	7,476-7	1,831-1	2,427-6	16,45	3,226	1,076	4,4198
229	6,09549+9	0,2435	7,130-7	1,840-1	2,457-6	16,49	3,245	1,079	4,4194
230	6,13549+9	0,2395	6,789-7	1,850-1	2,488-6	16,52	3,264	1,082	4,4190
231	6,17549+9	0,2355	6,459-7	1,860-1	2,519-6	16,56	3,283	1,086	4,4192
232	6,21668+9	0,2314	6,125-7	1,871-1	2,552-6	16,59	3,303	1,089	4,4188
233	6,25644+9	0,2274	5,814-7	1,881-1	2,586-6	16,63	3,323	1,093	4,4184
234	6,29565+9	0,2234	5,512-7	1,891-1	2,619-6	16,66	3,343	1,096	4,4180
235	6,33565+9	0,2193	5,216-7	1,901-1	2,654-6	16,70	3,363	1,100	4,4175

nº	Idade	n ₁	n ₃	n ₄	n ₁₂	T _C	P _C	L _S	T _S
236	6,37289+9	0,2154	4,944-7	1,911-1	2,688-6	16,73	3,382	1,103	4,4171
237	6,40866+9	0,2117	4,694-7	1,920-1	2,721-6	16,77	3,400	1,106	4,4167
238	6,44397+9	0,2080	4,450-7	1,929-1	2,754-6	16,80	3,419	1,109	4,4162
239	6,47897+9	0,2043	4,218-7	1,939-1	2,788-6	16,83	3,437	1,112	4,4157
240	6,51931+9	0,2001	3,955-7	1,949-1	2,828-6	16,87	3,458	1,116	4,4152
241	6,55809+9	0,1959	3,715-7	1,960-1	2,868-6	16,91	3,479	1,119	4,4146
242	6,59648+9	0,1918	3,481-7	1,970-1	2,908-6	16,95	3,500	1,123	4,4140
243	6,63148+9	0,1880	3,280-7	1,979-1	2,946-6	16,98	3,519	1,126	4,4134
244	6,66648+9	0,1842	3,079-7	1,989-1	2,984-6	17,02	3,539	1,129	4,4129
245	6,69513+9	0,1810	2,923-7	1,997-1	3,016-6	17,05	3,555	1,131	4,4125
246	6,72398+9	0,1779	2,770-7	2,005-1	3,049-6	17,08	3,571	1,134	4,4120
247	6,75089+9	0,1749	2,635-7	2,012-1	3,081-6	17,11	3,586	1,136	4,4116
248	6,78089+9	0,1715	2,481-7	2,021-1	3,116-6	17,14	3,604	1,139	4,4112
249	6,80654+9	0,1686	2,361-7	2,028-1	3,147-6	17,17	3,619	1,141	4,4107
250	6,83314+9	0,1656	2,231-7	2,036-1	3,180-6	17,19	3,634	1,143	4,4103
251	6,85736+9	0,1628	2,126-7	2,043-1	3,210-6	17,22	3,648	1,146	4,4099
252	6,86340+9	0,1621	2,098-7	2,044-1	3,218-6	17,23	3,652	1,146	4,4097
253	6,89019+9	0,1590	1,977-7	2,052-1	3,252-6	17,26	3,668	1,148	4,4093
254	6,91333+9	0,1564	1,883-7	2,059-1	3,282-6	17,28	3,682	1,150	4,4088
255	6,93333+9	0,1540	1,796-7	2,065-1	3,308-6	17,30	3,694	1,152	4,4085

IV-4 Acréscimo de Massa

O acréscimo de massa é simulado fazendo-se um modelo evolutivo de mesma massa no interior mas com mais massa no envelope, a qual é transferida para o interior do modelo evolutivo seguinte. O número de camadas é mantido constante multiplicando a espessura de cada camada pelo mesmo fator pelo qual multiplicamos a massa do interior. O valor P , T , L e r nos extremos das novas camadas e das abundâncias em seu ponto médio são obtidos interpolando-se o modelo evolutivo original até seu ajuste entre o interior e o envelope pelo método de "splines" (Pennington, 1965) que denominaremos método da régua flexível. Completamos então o interior do modelo interpolado usando o método de Runge-Kutta. Como o envelope é calculado pelo método de Runge-Kutta, ao usarmos esse método explícito para completar o interior não alteramos o modelo, que é essencialmente o mesmo, apenas com nova posição de ajuste. Para obtermos novo modelo evolutivo necessitamos de um modelo extrapolado como solução tentativa. Como a extrapolação entre dois modelos evolutivos exige que suas camadas sejam igualmente divididas, interpolamos do mesmo modo o modelo evolutivo anterior. A extrapolação é feita linearmente usando um parâmetro fornecido ao programa que estima em quanto o novo modelo diferirá do anterior, a fim de acelerar a convergência.

Embora a energia gravitacional não seja considerada quando a matéria é acrescida no envelope, pois não é incluída no programa que o calcula, seus efeitos são levados em conta no modelo evolutivo seguinte, quando a massa é transferida para o interior.

Partimos de um modelo de $1 M_{\odot}$ inicial e 5×10^9 anos, no qual a abundância central de hidrogênio havia chegado a cerca da metade de seu valor inicial e a massa total, devido as reações nucleares, se havia reduzido a $0,9997 M_{\odot}$. Nesse modelo as camadas foram redistribuídas de modo que dentre P , T , L e r a grandeza que mais muda entre duas camadas varie 15%. O novo modelo ficou com 183 camadas e a interpolação foi feita pelo método da régua flexível. Nova redistribuição seria feita se a variação máxima não estivesse entre 10% e 20% nos modelos seguintes, mas tal não ocorreu.

Usamos um acréscimo típico de $10^{-8} M_{\odot}/\text{ano}$, conforme a seção III-2. Por razões de convergência iniciamos entretanto com um acréscimo de $10^{-9} M_{\odot}/\text{ano}$, o qual foi aumentado gradativamente de modo que em 10 modelos atingimos o valor final de $10^{-8} M_{\odot}/\text{ano}$. A partir daí mantivemos a razão temporal de massa acrescida, mas aumentamos o intervalo de tempo entre modelos até que a massa acrescida em cada intervalo fosse 0,8% da massa total do modelo. Essa razão é limitada pela variação de pressão no ajuste, que não permitimos ultrapassar 65%.

A massa do envelope deve ser bastante espessa para podermos transferir uma quantidade significativa de massa

para o interior sem reduzir muito o envelope do modelo interpolado. O modelo inicial tinha 10^{-3} de sua massa no envelope, mas essa proporção foi aumentada até 3×10^{-2} . Esse é o máximo recomendado por Kippenhahn e Weigert (1967).

O aumento de massa do envelope foi restringido a 20% de seu valor e a variação de pressão foi inicialmente limitada em 30%, sendo necessária uma longa série de modelos para o acréscimo atingir uma proporção significativa. Tentando evitar isso havíamos deslocado o ajuste do modelo inicial, desprezando camadas do interior, que ficou com massa 2% menor e envelope igualmente mais espesso. O programa do envelope não considera energia gravitacional, usa método explícito e considera a luminosidade constante. Em consequência disso a região incluída no envelope teve seus valores alterados e quando o modelo relaxou até o equilíbrio sua luminosidade ficou 3% menor. Esse falso efeito impediu que usássemos tal procedimento para obter um envelope mais espesso.

A Tabela 8 mostra alternadamente dados do modelo original e do modelo interpolado, sendo que para o modelo interpolado não calculamos o envelope. Estão listados na seguinte ordem:

n° = número de ordem do modelo

M_{total} = massa total do modelo em massas solares

Idade = sua idade em unidades de 10^9 anos

Fator = fator pelo qual multiplicamos a massa do interior e a espessura das camadas, sendo referente ao modelo interpolado

M_{atm} = massa do envelope em massas solares

P_c = pressão central em unidades de 10^{17} dinas/cm²

T_c = temperatura central em 10^7 °K

P_f = pressão no ajuste entre interior e o envelope em 10^{17} dinas/cm²

T_f = temperatura do ajuste em 10^4 °K

$L_f=L_s$ = luminosidade do ajuste, que é igual a luminosidade da superfície, em L_{\odot}

T_s = temperatura da superfície em 10^3 °K, relacionada com a temperatura efetiva através da (I-18).

Os dados do modelo extrapolado foram colocados mais próximos dos do modelo evolutivo seguinte, porque ambos tem o ajuste na mesma posição, facilitando comparar os valores.

Até o 17^o modelo cerca de metade da massa acrescentada no envelope foi transferida para o interior, mas a seguir fizemos dez modelos sem mudar a posição do ajuste até atingir 2% de fração de massa no envelope.

Nos 30 primeiros modelos a massa adicionada por modelo atingiu apenas 0,3% de sua massa. Para acrescentar um total de 10% de massa ao primeiro modelo fizemos 43 modelos intermediários, mas os 10% seguintes exigiram apenas 12 modelos.

A Tabela 9 contém as abundâncias n_1 , n_3 , n_4 , n_{12} , n_{14} e n_{16} dos elementos H^1 , He^3 , He^4 , C^{12} , N^{14} e O^{16} , respectivamente, no centro de alguns dos modelos da Tabela 8. Os valores respectivos na superfície, ou seja, as abundâncias

da estrela quando homogênea, também estão indicados. A unidade de massa é M_{\odot} e a de abundância é o número de partículas do elemento considerado dividido pelo número total de núcleons da camada.

A Figura 18 é o diagrama de Hertzsprung-Russell dos modelos com acréscimo de massa, estando também representada a evolução do modelo sem acréscimo. Além da idade, em anos, indicamos entre parênteses a massa dos modelos com acréscimo.

Tabela 8

Unidades: M_{total} e M_{atm} em M_{\odot} , Idade em 10^9 anos, P_c e P_f em 10^{17} dinas/cm²,
 T_c em 10^7 °K, T_f em 10^4 °K, T_s em 10^3 °K, L_f em L_{\odot} e R_f em R_{\odot}

nº	M_{total}	Idade	Fator	M_{atm}	P_c	T_c	P_f	T_f	$L_f=L_s$	R_f	T_s
1	0,99970	5,01549		1,00-3	2,805	1,568	6,042-6	0,5529	0,9913	1,069	4,4229
2	0,99980	5,01559		1,10-3	2,805	1,568	6,725-6	0,5781	0,9941	1,065	4,4239
3	0,99990	5,01569	1,0001	1,15-3	2,810	1,569	6,491-6	0,5697	0,9943	1,067	4,4221
4	1,00005	5,01579	1,0001	1,21-3	2,810	1,569	7,444-6	0,5996	0,9935	1,062	4,4212
5	1,00027	5,01589	1,0001	1,33-3	2,810	1,569	8,247-6	0,6267	0,9978	1,058	4,4217
6	1,00065	5,01599	1,0002	1,51-3	2,810	1,569	9,435-6	0,6655	1,006	1,054	4,4225
			1,0004				6,629-6	0,5784	1,006	1,072	

nº	M _{total}	Idade	Fator	M _{atm}	P _c	T _c	P _f	T _f	L _f =L _S	R _f	T _S
7	1,00130	5,01609		1,76-3	2,811	1,569	1,103-5	0,7182	1,023	1,050	4,4254
			1,0004				8,174-6	0,6375	1,023	1,066	
8	1,00200	5,01619		1,96-3	2,812	1,570	1,303-5	0,7784	1,040	1,044	4,4287
			1,0005				1,010-5	0,7036	1,040	1,059	
9	1,00280	5,01629		2,46-3	2,813	1,570	1,579-5	0,8523	1,057	1,036	4,4316
			1,0005				1,203-5	0,7650	1,057	1,053	
10	1,00380	5,01639		2,96-3	2,815	1,571	1,925-5	0,9394	1,080	1,028	4,4350
			1,0005				1,534-5	0,8585	1,080	1,043	
11	1,00480	5,01649		3,46-3	2,817	1,571	2,283-5	1,022	1,100	1,019	4,4383
			1,0005				1,878-5	0,9461	1,101	1,033	
12	1,00580	5,01659		3,96-3	2,819	1,572	2,660-5	1,101	1,117	1,010	4,4409
			1,0005				2,239-5	1,028	1,117	1,023	
13	1,00680	5,01669		4,46-3	2,821	1,573	3,052-5	1,177	1,133	1,001	4,4434
			1,0005				2,615-5	1,107	1,133	1,001	

nº	M _{total}	Idade	Fator	M _{atm}	P _c	T _c	P _f	T _f	L _F =L _S	R _f	T _S
14	1,00780	5,01679		4,96-3	2,823	1,573	3,468-5	1,248	1,148	0,9917	4,4466
			1,0005				3,014-5	1,180	1,148	1,004	
15	1,00880	5,01689		5,46-3	2,826	1,574	3,902-5	1,307	1,160	0,9828	4,4487
			1,0005				3,430-5	1,250	1,160	0,9943	
16	1,00980	5,01699		5,95-3	2,828	1,575	4,349-5	1,358	1,171	0,9743	4,4503
			1,0005				3,860-5	1,309	1,171	0,9852	
17	1,01080	5,01709		6,45-3	2,830	1,576	4,812-5	1,403	1,182	0,9662	4,4519
			1,0				4,812-5	1,403	1,181	0,9662	
18	1,01190	5,01720		7,55-3	2,832	1,577	5,965-5	1,488	1,192	0,9472	4,4540
			1,0				5,965-5	1,488	1,192	0,9472	
19	1,01300	5,01731		8,65-3	2,835	1,578	7,208-5	1,562	1,201	0,9301	4,4555
			1,0				7,208-5	1,562	1,201	0,9301	
20	1,01420	5,01743		9,85-3	2,838	1,579	8,655-5	1,634	1,210	0,9134	4,4568
			1,0				8,655-5	1,634	1,210	0,9134	

nº	M _{total}	Idade	Fator	M _{atm}	P _c	T _c	P _f	T _f	L _F =L _S	R _f	T _S
21	1,01550	5,01756		1,11-2	2,840	1,580	1,037-4	1,707	1,221	0,8968	4,4591
			1,0				1,037-4	1,707	1,221	0,8968	
22	1,01690	5,01770		1,25-2	2,844	1,581	1,234-4	1,779	1,229	0,8807	4,4607
			1,0				1,234-4	1,779	1,229	0,8807	
23	1,01840	5,01785		1,40-2	2,847	1,583	1,462-4	1,853	1,240	0,8648	4,4629
			1,0				1,462-4	1,853	1,240	0,8648	
24	1,02000	5,01801		1,56-2	2,850	1,584	1,723-4	1,928	1,250	0,8494	4,4649
			1,0				1,723-4	1,928	1,250	0,8494	
25	1,02180	5,01819		1,74-2	2,854	1,586	2,038-4	2,009	1,261	0,8336	4,4672
			1,0				2,038-4	2,009	1,261	0,8336	
26	1,02380	5,01839		1,94-2	2,858	1,588	2,417-4	2,095	1,272	0,8175	4,4698
			1,0				2,417-4	2,095	1,272	0,8175	
27	1,02600	5,01861		2,16-2	2,862	1,590	2,867-4	2,187	1,285	0,8112	4,4726
			1,001				2,652-4	2,146	1,284	0,8091	

nº	M _{total}	Idade	Fator	M _{atm}	P _c	T _c	P _f	T _f	L _{F=L_S}	R _f	T _S
28	1,02840	5,01885		2,24-2	2,866	1,592	3,161-4	2,242	1,299	0,7929	4,4758
			1,002				2,718-4	2,161	1,298	0,8074	
29	1,03100	5,01911		2,36-2	2,870	1,595	3,281-4	2,266	1,316	0,7894	4,4799
			1,003				2,616-4	2,144	1,315	0,8121	
30	1,03380	5,01939		2,34-2	2,875	1,598	3,215-4	2,258	1,334	0,7923	4,4843
			1,003				2,557-4	2,135	1,334	0,8153	
31	1,03680	5,01969		2,33-2	2,879	1,601	3,192-4	2,258	1,352	0,7939	4,4885
			1,004				2,332-4	2,092	1,350	0,8254	
32	1,04000	5,02001		2,25-2	2,883	1,604	2,979-4	2,224	1,373	0,8017	4,4934
			1,004				2,148-4	2,056	1,371	0,8346	
33	1,04340	5,02035		2,18-2	2,887	1,607	2,815-4	2,198	1,392	0,8083	4,4978
			1,004				2,005-4	2,026	1,390	0,8424	
34	1,04710	5,02072		2,15-2	2,891	1,610	2,729-4	2,185	1,418	0,8124	4,5050
			1,004				1,931-4	2,011	1,416	0,8473	

nº	M _{total}	Idade	Fator	M _{atm}	P _c	T _c	P _f	T _f	L _F =L _S	R _f	T _S
35	1,05110	5,02112		2,13-2	2,895	1,614	2,695-4	2,181	1,437	0,8147	4,5101
			1,004				1,900-4	2,007	1,435	0,8499	
36	1,05550	5,02156		2,16-2	2,899	1,618	2,749-4	2,195	1,464	0,8139	4,5177
			1,004				1,943-4	2,021	1,462	0,8489	
37	1,06030	5,02204		2,23-2	2,503	1,622	2,894-4	2,226	1,491	0,8100	4,5261
			1,004				2,065-4	2,053	1,489	0,8441	
38	1,06550	5,02256		2,33-2	2,907	1,627	3,114-4	2,270	1,517	0,8040	4,5336
			1,005				2,056-4	2,054	1,516	0,8459	
39	1,07110	5,02312		2,37-2	2,911	1,632	3,191-4	2,288	1,551	0,8031	4,5430
			1,005				2,117-4	2,073	1,549	0,8445	
40	1,07720	5,02373		2,46-2	2,915	1,637	3,378-4	2,325	1,585	0,7991	4,5527
			1,006				2,268-4	2,111	1,583	0,8393	
41	1,08380	5,02439		2,59-2	2,920	1,643	3,675-4	2,377	1,623	0,7924	4,5633
			1,006				2,306-4	2,125	1,622	0,8395	

nº	M _{total}	Idade	Fator	M _{atm}	P _c	T _c	P _f	T _f	L _F =L _S	R _f	T _S
42	1,09060	5,02507		2,64-2	2,924	1,648	3,762-4	2,396	1,665	0,7920	4,5747
			1,006				2,376-4	2,145	1,665	0,8387	
43	1,09770	5,02578		2,71-2	2,928	1,655	3,914-4	2,425	1,710	0,7901	4,5867
			1,006				2,491-4	2,176	1,709	0,8359	
44	1,10510	5,02652		2,81-2	2,933	1,661	4,143-4	2,463	1,760	0,7865	4,6006
			1,006				2,673-4	2,219	1,760	0,8310	
45	1,11280	5,02729		2,93-2	2,937	1,668	4,430-4	2,508	1,809	0,7819	4,6136
			1,007				2,903-4	2,270	1,809	0,8249	
46	1,12080	5,02809		3,08-2	2,942	1,674	4,787-4	2,560	1,864	0,7764	4,6278
			1,007				2,958-4	2,288	1,864	0,8254	
47	1,12910	5,02892		3,14-2	2,946	1,682	4,948-4	2,587	1,927	0,7755	4,6447
			1,007				3,081-4	2,316	1,926	0,8238	
48	1,13770	5,02978		3,24-2	2,951	1,689	5,158-4	2,619	1,987	0,7737	4,6604
			1,007				3,244-4	2,353	1,987	0,8211	

nº	M _{total}	Idade	Fator	M _{atm}	P _c	T _c	P _f	T _f	L _F =L _S	R _f	T _S
49	1,14660	5,03067		3,35-2	2,955	1,697	5,446-4	2,659	2,056	0,7708	4,6784
			1,0075				3,347-4	2,379	2,054	0,8206	
50	1,15580	5,03159		3,44-2	2,959	1,705	5,654-4	2,690	2,129	0,7696	4,6974
			1,0077				3,455-4	2,404	2,128	0,8200	
51	1,16510	5,03252		3,51-2	2,962	1,714	5,800-4	2,714	2,202	0,7695	4,7161
			1,008				3,514-4	2,422	2,202	0,8209	
52	1,17450	5,03346		3,55-2	2,966	1,722	5,896-4	2,733	2,282	0,7704	4,7362
			1,008				3,557-4	2,437	2,282	0,8223	
53	1,18400	5,03441		3,59-2	2,969	1,731	5,965-4	2,749	2,362	0,7717	4,7563
			1,008				3,604-4	2,453	2,362	0,8236	
54	1,19370	5,03537		3,64-2	2,972	1,741	6,061-4	2,769	2,449	0,7726	4,7773
			1,008				3,672-4	2,474	2,448	0,8243	
55	1,20330	5,03633		3,67-2	2,974	1,751	6,135-4	2,785	2,534	0,7738	4,7991

Tabela 9

n ^o	M _{total}	n ₁	n ₃	n ₄	n ₁₂	n ₁₄	n ₁₆
no centro:							
1	0,99980	0,3441	1,912-6	0,1589	1,880-6	3,524-4	4,765-4
5	1,00027	0,3441	1,891-6	0,1589	1,881-6	3,524-4	4,765-4
10	1,00380	0,3441	1,885-6	0,1589	1,883-6	3,524-4	4,765-4
15	1,00880	0,3440	1,855-6	0,1589	1,888-6	3,524-4	4,765-4
20	1,01420	0,3440	1,814-6	0,1589	1,896-6	3,524-4	4,764-4
25	1,02180	0,3439	1,751-6	0,1589	1,911-6	3,525-4	4,764-4
30	1,03380	0,3438	1,650-6	0,1589	1,940-6	3,525-4	4,763-4
35	1,05110	0,3436	1,521-6	0,1590	1,982-6	3,526-4	4,762-4
40	1,07720	0,3433	1,355-6	0,1591	2,041-6	3,527-4	4,760-4
45	1,11280	0,3428	1,161-6	0,1592	2,119-6	3,530-4	3,756-4
50	1,15580	0,3422	9,581-7	0,1593	2,218-6	3,537-4	4,749-4
55	1,20330	0,3413	7,576-7	0,1596	2,340-6	3,548-4	4,736-4
na							
superfície:	0,7286	0,0	0,06283	2,364-4	6,609-5	5,283-4	

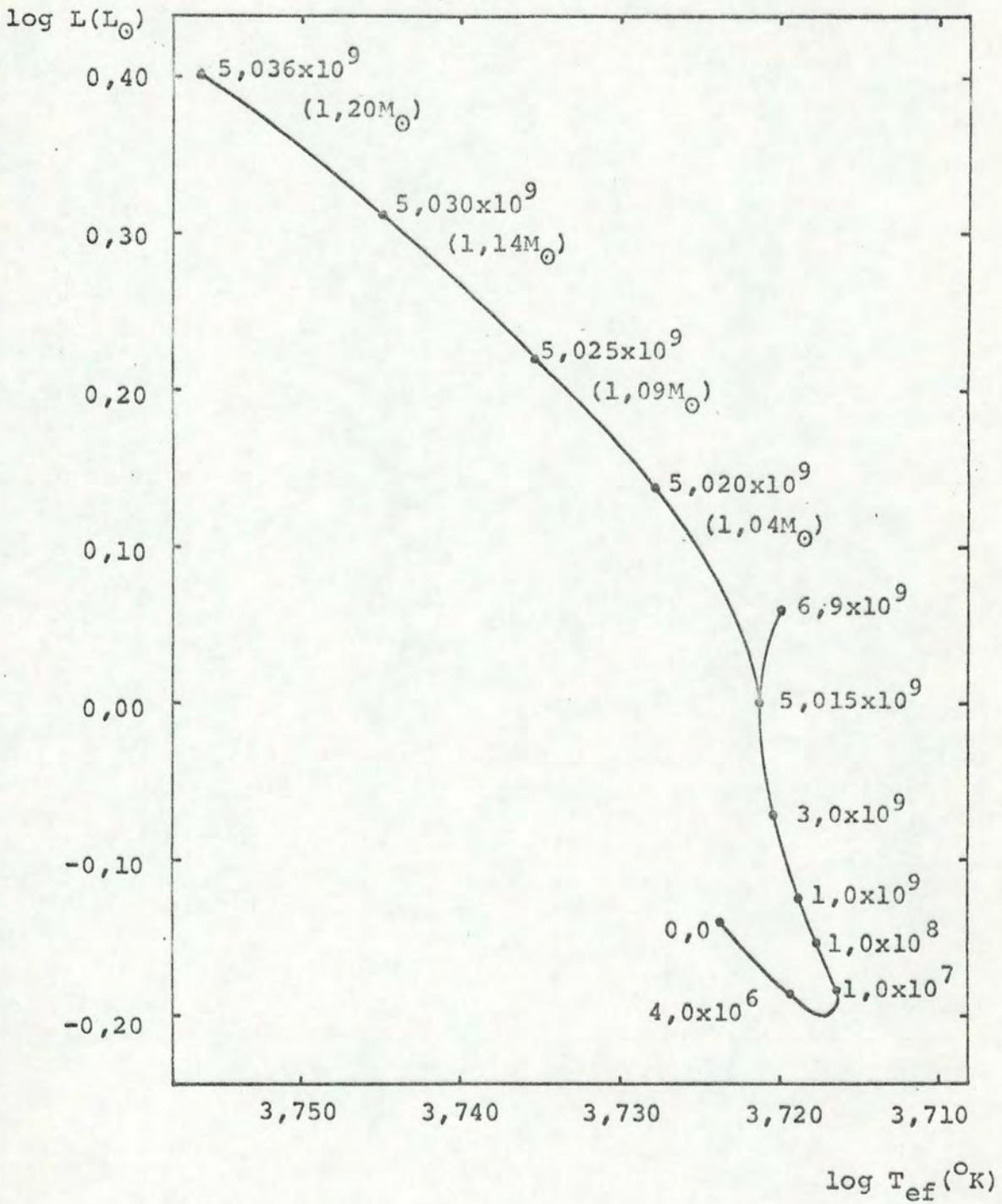


fig. 18 - Diagrama de Hertzsprung-Russell dos modelos com e sem acréscimo de massa. Está indicada a idade em anos e, entre parênteses, a massa dos modelos com acréscimo.

IV-5 Comentários

Nosso estudo focaliza mudanças na estrutura da estrela que recebe massa, sem se deter nos fenômenos que ocorrem quando o material é transferido. A matéria foi acrescentada no envelope da estrela e a energia gravitacional considerada quando ela foi transferida para o interior. Essa energia tem real significado físico na estrutura da estrela pois a massa é acrescentada em sua superfície.

A energia gravitacional envolvida na transferência de massa de uma das estrelas para a superfície de outra não foi considerada, pois possivelmente é irradiada antes de contribuir para o equilíbrio da estrela (Starrfield, 1970) tratando-se portanto de um fenômeno atmosférico que não afeta sua estrutura.

Os resultados que obtivemos mostram a tendência da estrela a se acomodar a sua massa atual, sendo que no último modelo começa a aparecer um núcleo convectivo, característico das estrelas de massa maior. Para podermos encontrar diferenças significativas entre a estrela que recebeu massa e uma estrela que desde o início teve massa maior será necessário iniciarmos o acréscimo de massa em um modelo muito mais evoluído porque se acrescentarmos massa a uma estrela cuja composição for homogênea ela se acomodará a sua massa atual. Pretendemos continuar com esse estudo, que o programa até aqui desenvolvido mostra ser perfeitamente factível.

O uso de um método implícito para resolver as equações de evolução estelar é especialmente recomendável em nosso caso, pois a estrutura da estrela se altera rapidamente ao lhe ser acrescentada massa. Os problemas numéricos que tivemos mostraram a importância de dividir o modelo em camadas de modo que sua espessura não sofra variações bruscas e que a região do borde do núcleo convectivo tenha camadas suficientemente finas. A espessura dessas camadas entretanto não deve ser muito reduzida porque quando o núcleo recede somos obrigados a usar um intervalo de tempo entre modelos tal que o núcleo receda exatamente uma camada, caso contrário as abundâncias apresentarão erros.

Referências Bibliográficas

- Abraham, Z. 1971, tese de doutoramento, Mass.Inst.of Technol.
 ----- . 1974, comunicação privada.
- Bethe, H.A. 1938, *Phys.Rev.*, 55, 103.
- Caughlan, G.R. e Fowler, W.A. 1964, *Ap.J.*, 139, 1180.
- Clayton, D.D. 1968, *Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis* (New York: McGraw-Hill, Inc.), p.440.
- Cox, A.N., Steward, J.N. e Eilers, D.D. 1965, *Ap.J.Suppl.*, nº 94, 1.
- Giannone, P., Refsdal, R. e Weigert, A. 1970, *Astr. and Ap.*, 4, 428.
- Giannone, P. e Giannuzzi, M.A. 1970, *Astr. and Ap.*, 6, 309.
- Harmanec, P. 1970, *Bull.Astr.Inst.Czech.*, 21, 113.
- Heney, L.G., LeLevier, R. e Levée, R.D. 1959, *Ap.J.*, 129, 2.
- Heney, L.G., Wilets, L., Böhm, K.H., LeLevier, R. e Levée, R.D. 1959, *Ap.J.*, 129, 628.
- Hubbard, W.B. e Lumpe, M. 1969, *Ap.J.Suppl.*, nº 18, 297.
- Iben, I. 1963, *Ap.J.*, 138, 452.
 ----- . 1965, *Ap.J.*, 141, 993.
 ----- . 1968, *Ap.J.*, 154, 557.
- Kahler, H. 1972, *Astr. and Ap.*, 20, 105.
- Kippenhahn, R. e Weigert, A. 1967, in *Methods of Computational Physics*, ed. B.Alder, S.Fernback e M.Rotenberg, (New York: Academic Press), 7, 129.
- Kopal, Z. 1955, *Ann.d'ap.*, 18, 379.

- Lauterborn, D. 1969, in *Mass Loss from Stars*, ed. M.Hack,
(Dordrecht: D.Reidel Publishing Company) p.262.
- . 1972, *Astr. and Ap.*, 19, 473.
- Morton, D.C. 1960, *Ap.J.*, 132, 146.
- Murai, T. 1974, *Pub.Astr.Soc.Japan*, 26, 323.
- Odgers, G.J. 1958, *Pub.Dom.Astrophys.Obs.Victoria*, 10, 393.
- Paczynski, B. 1969, in *Mass Loss and Evolution of Close
Binaries*, ed. K.Gyldenkerne e R.H.West
(Copenhagen: Copenhagen University Publ.) p.139.
- . 1971, *Ann.Rev.Astr. and Ap.*, 9, 183.
- Plavec, M. 1968, *Advances in Astronomy and Astrophysics*,
6, 201.
- Pennington, R.C. 1965, *Introductory Computer Methods and
Numerical Analysis* (London: McMillan & Co.)
- Refsdal, R. e Weigert, A. 1969, *Astr. and Ap.*, 20, 13.
- Roth, M.L. e Weigert, A. 1972, *Astr. and Ap.*, 1, 167.
- Starrfield, S.G. 1970, *Ap.J.*, 161, 361.
- Watson, W.D. 1969a, *Ap.J.*, 157, 375.
- . 1969b, *Ap.J.*, 158, 303.
- . 1970, *Ap.J.Suppl.*, nº 174, 1.
- Ziolkowski, J. 1969, in *Mass Loss from Stars*, ed. M.Hack,
(Dordrecht: D.Reidel Publishing Company), p.231.