Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

A Indicatriz Tangente de uma Curva Regular Fechada na Esfera $\mathbb{S}^2$

por

JOICE NHUCH

Porto Alegre, outubro de 2007.

Dissertação submetida por Joice Nhuch como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Profª Drª Elizabeth Quintana Ferreira da Costa

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera (UFRGS)
Profª Drª Elizabeth Quintana Ferreira da Costa (UFRGS)
Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll (UFRGS)
Profª Drª Susana Fornari (UFMG)

Data da Defesa: 9 de outubro de 2007.

Agradecimentos

Agradeço à Professora Elizabeth Quintana Ferreira da Costa pelo empenho, interesse e amizade que demonstrou no período do desenvolvimento desta dissertação.

Agradeço ao Professor Jaime Bruck Ripoll por suas valiosas observações e sugestões.

Agradeço a todos meus professores no curso, Leonardo Prange Bonorino, Miguel Angel Alberto Ferrero, Alexandre Tavares Baraviera e Luis Gustavo Doninelli Mendes.

Agradeço aos colegas das diversas disciplinas do curso, destacando os colegas de grupos de estudo Cleonis Viater Figueira, Cícero Nacthigal, Guilherme Pumi, Lisiane Zach e Rosane Maria Fydryzewski.

Agradeço à Rosane, atenciosa secretária do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS.

Agradeço à minha família que sempre me incentiva a vencer novos desafios.

Resumo

Neste trabalho estudamos a indicatriz tangente de uma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$ que mostramos ser também uma curva regular fechada. Provamos que, em particular, se a indicatriz tangente é simples, determina na esfera duas regiões com áreas iguais. Também estabelecemos condições necessárias e suficientes para que uma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$ seja a indicatriz tangente de alguma curva em $\mathbb{S}^2$. A existência de uma homotopia regular entre uma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$ e sua indicatriz tangente também é apresentada.

Abstract

In this work we study the tangent indicatrix of a closed regular curve in $\mathbb{S}^2$, which is by itself a closed regular curve. In particular, we prove that if tangent indicatrix is simple, it divides the sphere into two regions with exactly the same areas. We also establish necessary and sufficient conditions for a closed regular curve in $\mathbb{S}^2$ to be the tangent indicatrix of some curve in $\mathbb{S}^2$. Moreover, the existence of a regular homotopy between a closed regular curve in $\mathbb{S}^2$ and its tangent indicatrix is proved.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudaremos a indicatriz tangente de uma curva regular fechada na esfera unitária $\mathbb{S}^2$.

Para contextualizar a proposta de trabalho, lembremos (conforme [8]) que dada uma curva regular α no espaço Euclideano $\mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco s, considerando os vetores $\alpha'(s)$, $n(s)$ e $b(s)$, respectivamente vetor tangente, vetor normal e vetor binormal à curva α no ponto $\alpha(s)$, ficam definidas as curvas

$$\mathcal{T} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \;\; \mathcal{T}(s) = \alpha'(s),$$

$$N : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \;\; N(s) = n(s),$$

e

$$B : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \;\; B(s) = b(s),$$

denominadas respectivamente *indicatriz tangente*, *indicatriz normal* e *indicatriz binormal* da curva α. Sendo $|\alpha'(s)| = 1$, $|n(s)| = 1$ e $|b(s)| = 1$, para todo $s \in [a, b]$, estas três indicatrizes são também curvas esféricas.

Em geral os textos de Geometria Diferencial dão uma ênfase maior ao estudo da indicatriz normal, destacando-se o Teorema de Jacobi para a indicatriz normal de uma curva regular fechada, como pode ser encontrado em [3].

O foco deste trabalho será o estudo da indicatriz tangente de curvas regulares fechadas em $\mathbb{S}^2$, baseado no texto "Tantrices of Spherical Curves" de Bruce Solomon [10].

No Capítulo 1 são apresentadas algumas definições, propriedades e observações que colocadas preliminarmente facilitarão a leitura do trabalho.

No Capítulo 2 mostraremos que a indicatriz tangente de uma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$ é também uma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$, além disso, neste Capítulo serão estabelecidas condições necessárias e suficientes para que uma curva regular fechada na esfera unitária seja a indicatriz tangente de alguma curva de $\mathbb{S}^2$. Provaremos ainda que, dada uma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$, se a sua indicatriz tangente é simples, ela limita na esfera $\mathbb{S}^2$ duas regiões de áreas iguais a 2π.

No Capítulo 3 estudaremos homotopias regulares entre curvas fechadas na esfera ($\mathbb{S}^2$) provando que uma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$ é regularmente homotópica à sua indicatriz tangente. Neste capítulo também apresentaremos outros resultados relativos a homotopias regulares entre curvas fechadas na esfera cuja motivação encontramos no artigo [7], sobre inversão da esfera.

No Capítulo 4 serão feitas algumas consideraçãoes sobre a indicatriz tangente de uma curva regular fechada em $\mathbb{R}^3$.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Apresentamos neste Capítulo algumas definições, observações e propriedades relativas às curvas na esfera unitária do $\mathbb{R}^3$.

1.1 A Esfera Unitária $\mathbb{S}^2$

A esfera unitária

$$\mathbb{S}^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

é uma superfície regular no $\mathbb{R}^3$.

Consideraremos como métrica na esfera a métrica induzida do espaço $\mathbb{R}^3$.

1.2 Curvas na Esfera $\mathbb{S}^2$

Definição 1.1. Uma *curva regular* na esfera $\mathbb{S}^2$ é uma aplicação C^∞, $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$, tal que $\alpha'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$.

Definição 1.2. Uma *curva regular fechada* em $\mathbb{S}^2$ é uma curva regular $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$, tal que α e todas as suas derivadas coincidam em a e b; ou seja, $\alpha(a) = \alpha(b)$, $\alpha'(a) = \alpha'(b)$, $\alpha''(a) = \alpha''(b), \cdots$

O traço de uma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$ também é dito um *círculo imerso em* $\mathbb{S}^2$. Note que um círculo imerso em $\mathbb{S}^2$ pode possuir auto-intersecções. Já a exigência de regularidade da curva garante que um círculo imerso em $\mathbb{S}^2$ não possui vértices ou cúspides.

Definição 1.3. Uma *curva regular fechada* $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ é dita *simples* se α não possui outras auto-intersecções além de $\alpha(a) = \alpha(b)$; isto é, se $t_1, t_2 \in [a, b)$, $t_1 \neq t_2$, então $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$.

O traço de uma curva regular fechada simples em $\mathbb{S}^2$ também é chamado de *círculo mergulhado em* $\mathbb{S}^2$.

As terminologias "círculo imerso" e "círculo mergulhado" se justificam uma vez que, dada uma curva regular fechada $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$, pondo

$$\mathbb{S}^1 = \big\{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) | \theta \in [0, 2\pi]\big\} \subset \mathbb{R}^2,$$

fica bem definida a aplicação $\widetilde{\alpha} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ através da fórmula

$$\widetilde{\alpha}\,(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \alpha\left(\frac{b-a}{2\pi}\,\theta + a\right), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Podemos então ver que $\widetilde{\alpha}$ é uma imersão no sentido de variedade diferenciável. Além disso, $\widetilde{\alpha}$ é um mergulho no sentido de variedade diferenciável se e somente se α é uma curva regular fechada simples.

Note que α e $\widetilde{\alpha}$ têm o mesmo traço em $\mathbb{S}^2$, ou seja, $\alpha\big([a, b]\big) = \widetilde{\alpha}(\mathbb{S}^1)$.

1.3 Função Comprimento de Arco

Seja $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva regular. A função $S : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(r)| dr$$

é chamada *função comprimento de arco* da curva α a partir de $t_0 \in [a, b]$.

Definição 1.4. Dizemos que uma curva $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco quando $|\alpha'(t)| = 1$, para todo $t \in [a, b]$. Ou seja, se a velocidade escalar da curva é constante e igual a 1.

O seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [1], nos permite considerar, sempre que nos for conveniente, a curva α parametrizada pelo comprimento de arco.

Proposição 1.1. *Seja* $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ *uma curva regular. Então* α *pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco, ou seja, existem* $l > 0$ *e uma função diferenciável* $h : [0, l] \to [a, b]$, *com* $h' > 0$ *tal que* $\overline{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$ *e* $|\overline{\alpha}\,'(s)| = 1$, *para todo* $s \in [0, l]$.

1.4 Campos de Vetores Paralelos ao Longo de Curvas Regulares em $\mathbb{S}^2$

Definição 1.5. Dada uma curva regular $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$, um *campo de vetores* ao longo da curva α em $\mathbb{S}^2$ é uma aplicação $v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que, $v(t) \in T_{\alpha(t)}\mathbb{S}^2$ para todo $t \in [a,b]$. Dizemos ainda que v é um *campo diferenciável de vetores* se v for uma aplicação diferenciável. Se a curva α for fechada temos que adicionar a condição $v(a) = v(b)$, $v'(a) = v'(b)$, $v''(a) = v''(b)$, $\cdots$.

Note que a condição $v(t) \in T_{\alpha(t)}\mathbb{S}^2$ equivale à condição

$$\langle v(t), \alpha(t) \rangle = 0, \ \ \forall t \in [a,b].$$

Observação: O fato de que na esfera o vetor posição $\alpha(t)$ é normal à esfera em $\alpha(t)$ permite uma definição bastante particular para Campos de Vetores Paralelos ao longo de curvas em $\mathbb{S}^2$, como veremos a seguir.

Definição 1.6. Um campo diferenciável de vetores v ao longo de uma curva α em $\mathbb{S}^2$ é dito um *campo paralelo* se, e somente se, satisfaz

$$\frac{dv}{dt} = f(t)\alpha(t),$$

para alguma função escalar f.

Observe que esta definição coincide com a definição de campo paralelo da Geometria Riemanniana, uma vez que

$$\frac{Dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dt}\right)^T = \frac{dv}{dt} - \left\langle \frac{dv}{dt}, \alpha(t) \right\rangle \alpha(t),$$

onde $\frac{Dv}{dt}$ é a *derivada covariante* do campo de vetores v em $\mathbb{S}^2$, sendo $\left(\frac{dv}{dt}\right)^T$ a projeção ortogonal de $\frac{dv}{dt}$ no plano tangente $T_{\alpha(t)}\mathbb{S}^2$.

Portanto,

$$\frac{Dv}{dt} = 0 \iff \frac{dv}{dt} = f(t)\alpha(t),$$

onde $f(t) = \left\langle \dfrac{dv}{dt}, \alpha(t) \right\rangle$.

1.5 Curvatura Geodésica de Curvas em $\mathbb{S}^2$ e Curvatura Geodésica Total

Definição 1.7. Seja $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco t. O valor $k_g(t) = \langle \alpha''(t), \eta(t) \rangle$ onde $\eta(t) = \alpha(t) \times \alpha'(t)$ é chamado *curvatura geodésica* da curva α em $\alpha(t)$.

Definição 1.8. Seja $\alpha : [a,b] \to \mathbb{S}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco t. A *curvatura geodésica total* de α é dada pela integral

$$\int_a^b k_g(t)dt,$$

onde $k_g(t)$ é a curvatura geodésica de α em $\alpha(t)$.

Usaremos a notação $\displaystyle\int_\alpha k_g$ para indicar a curvatura geodésica total da curva α.

Mais detalhes sobre derivada covariante, curvatura geodésica e outros tipos de curvaturas podem ser encontrados em [9] e [6].

Definição 1.9. Dada uma função contínua $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, definimos a integral de f sobre $\mathbb{S}^1$, denotada por $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^1} f$, por

$$\int_{\mathbb{S}^1} f := \int_0^{2\pi} f(\cos s, \operatorname{sen} s)ds.$$

Definição 1.10. Dizemos que $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ tem *antiderivada* se existe $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ tal que a função

$$h(s) = g(\cos s, \operatorname{sen} s), \;\; s \in \mathbb{R}$$

é derivável e satisfaz $f(\cos s, \operatorname{sen} s) = h'(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. A função g é dita uma *antiderivada* de f.

Note que a função h satisfaz $h(0) = h(2\pi)$, já que g está definida em $\mathbb{S}^1$.

Proposição 1.2. *Seja $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então*

$$f \textit{ tem antiderivada} \iff \int_{\mathbb{S}^1} f = 0.$$

Demonstração: Suponhamos inicialmente que g é uma antiderivada de f. Tomando $h(s) = g(\cos s, \operatorname{sen} s)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^1} f &= \int_0^{2\pi} f(\cos s, \operatorname{sen} s) ds \\
&= \int_0^{2\pi} h'(s) ds \\
&= h(2\pi) - h(0) \ = \ 0.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^1} f = 0$.
Defina

$$h(s) := \int_0^s f(\cos t, \operatorname{sen} t) dt.$$

Pondo $g(\cos s, \operatorname{sen} s) = h(s)$, mostremos que g define uma função de $\mathbb{S}^1$ em $\mathbb{R}$.

Sendo, por hipótese,

$$h(0) = \int_0^0 f\big(\cos t, \operatorname{sen} t\big)\, dt \ = 0,$$

e

$$h(2\pi) = \int_0^{2\pi} f\big(\cos t, \operatorname{sen} t\big)\, dt \ = 0,$$

temos que $h(0) = h(2\pi)$ e, conseqüentemente,

$$g\big(\cos 0, \operatorname{sen} 0\big) = g\big(\cos 2\pi, \operatorname{sen} 2\pi\big),$$

uma vez que

$$g\big(\cos 0, \operatorname{sen} 0\big) = h(0) \quad \text{ e } \quad g\big(\cos 2\pi, \operatorname{sen} 2\pi\big) = h(2\pi).$$

Portanto g está bem definida e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $h'(s) = f(\cos s, \operatorname{sen} s)$, ou seja, g é uma antiderivada da função f.

■

Capítulo 2

Indicatriz Tangente de uma Curva Regular Fechada na Esfera $\mathbb{S}^2$

Neste capítulo definiremos a curva indicatriz tangente de uma curva σ, regular fechada, em $\mathbb{S}^2$ a qual passaremos a chamar de *tantrix* (esta expressão é comum na literatura especializada, como por exemplo em [4] e [10], sendo utilizada para referir de forma condensada o termo "indicatriz tangente" de uma curva). Ao provar que toda curva na esfera tem curvatura no espaço no mínimo igual a 1, obteremos o argumento principal para garantir que a *tantrix* também é um círculo imerso em $\mathbb{S}^2$.

Mostraremos ainda que a curva σ pode ser identificada como um campo de vetores paralelo em $\mathbb{S}^2$ ao longo de sua *tantrix* $\mathcal{T}$. Este resultado será usado para provar que a curvatura geodésica total da *tantrix* $\mathcal{T}$ é igual a zero.

Será provado ainda que, em particular, se a indicatriz tangente $\mathcal{T}$ é simples, então a região da esfera limitada por $\mathcal{T}$ tem área igual a 2π.

Finalizamos este Capítulo estabelecendo as condições que devem ser satisfeitas por uma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$ para que seja a *tantrix* de alguma curva de $\mathbb{S}^2$.

2.1 A Indicatriz Tangente

Conforme mencionado na introdução deste trabalho, dada uma curva regular $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, a aplicação $\mathcal{T} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dada por

$$\mathcal{T}(s) = \frac{\sigma'(s)}{|\sigma'(s)|}$$

é denominada indicatriz tangente da curva σ. Em particular podemos considerar este conceito para uma curva σ em $\mathbb{S}^2$.

Definição 2.1. Seja $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva regular fechada. Considere também a aplicação $\mathcal{T} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dada por

$$\mathcal{T}(s) := \frac{\sigma'(s)}{|\sigma'(s)|}.$$

A curva $\mathcal{T}$ assim definida é chamada de *indicatriz tangente* da curva σ.

Com o objetivo de simplificar a linguagem, diremos que $\mathcal{T}$ é a *tantrix* da curva σ.

Lema 2.1. *Seja $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s e seja $\mathcal{T}$ sua* tantrix *também parametrizada por s. Então,*

$$\left|\frac{d\mathcal{T}}{ds}\right| \geq 1.$$

Demonstração: De $|\sigma|^2 = \langle \sigma, \sigma \rangle$, obtemos

$$\frac{d}{ds}\big(|\sigma|^2\big) = \frac{d}{ds}\big(\,\langle \sigma, \sigma \rangle\,\big) = 2\left\langle \sigma, \frac{d\sigma}{ds} \right\rangle.$$

Derivando em relação a s novamente,

$$\frac{d^2}{ds^2}\big(|\sigma|^2\big) = 2\left(\left\langle \sigma, \frac{d^2\sigma}{ds^2} \right\rangle + \left\langle \frac{d\sigma}{ds}, \frac{d\sigma}{ds} \right\rangle\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\big(|\sigma|^2\big) &= \left\langle \sigma, \frac{d^2\sigma}{ds^2} \right\rangle + \left|\frac{d\sigma}{ds}\right|^2 \\ &= \left\langle \frac{d^2\sigma}{ds^2}, \sigma \right\rangle + 1. \end{aligned}$$

Mas $\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\big(|\sigma|^2\big) \equiv 0$, já que $|\sigma| = 1$ pois σ é curva em $\mathbb{S}^2$. Portanto,

$$\left\langle \frac{d^2\sigma}{ds^2}, \sigma \right\rangle = \left\langle \frac{d\mathcal{T}}{ds}, \sigma \right\rangle = -1.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$\left|\frac{d\mathcal{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathcal{T}}{ds}\right| |\sigma| \geq \left|\left\langle \frac{d\mathcal{T}}{ds}, \sigma \right\rangle\right| = 1.$$

Logo,

$$\left|\frac{d\mathcal{T}}{ds}\right| \geq 1.$$

Sendo

$$\frac{d\mathcal{T}}{ds} = \sigma''$$

e considerando o fato de que $|\sigma''(s)|$ é a curvatura, no $\mathbb{R}^3$, da curva σ em $\sigma(s)$, podemos afirmar que toda curva na esfera tem curvatura espacial no mínimo igual a 1.

■

Proposição 2.1. *Se $\mathcal{T}$ é a* tantrix *de uma curva regular σ em $\mathbb{S}^2$, então $\mathcal{T}$ é também uma curva regular em $\mathbb{S}^2$.*

Demonstração: Considere ambas as curvas σ e $\mathcal{T}$, parametrizadas pelo comprimento de arco s da curva σ.

Então,

$$\mathcal{T}(s) = \frac{\sigma'(s)}{|\sigma'(s)|} = \frac{\sigma'(s)}{1} = \sigma'(s).$$

Assim,

$$\mathcal{T}'(s) = \sigma''(s).$$

Estando σ parametrizada pelo comprimento de arco s, temos que $|\sigma''(s)|$ é a curvatura espacial da curva σ em $\sigma(s)$.

Pelo Lema 2.1 sabemos que toda curva na esfera tem, em qualquer de seus pontos, a curvatura espacial no mínimo igual a 1.

Logo,

$$|\mathcal{T}'(s)| = |\sigma''(s)| \geq 1, \;\; \forall s \in [a, b].$$

Conseqüentemente,

$$\mathcal{T}'(s) \neq 0, \;\; \forall s \in [a, b],$$

caracterizando assim a curva $\mathcal{T}$ como curva regular.

■

Proposição 2.2. *Se $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ é uma curva regular fechada e $\mathcal{T}$ sua* tantrix*, então $\mathcal{T}$ é também uma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$.*

Demonstração: Considere ambas as curvas parametrizadas pelo comprimento de arco s da curva σ. Já provamos (Proposição 2.1) que a *tantrix* $\mathcal{T}$ da curva σ é regular. Resta mostrar que $\mathcal{T}$ é curva fechada.

Para isso lembre que, sendo $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ fechada, valem as seguintes igualdades,

$$\sigma(a) = \sigma(b),\ \sigma'(a) = \sigma'(b),\ \sigma''(a) = \sigma''(b), \cdots$$

Assim, também $\mathcal{T}$ e todas as suas derivadas coincidem nos pontos a e b. Logo, $\mathcal{T}$ é uma curva fechada.

$\blacksquare$

Corolário 2.1. *A* tantrix *de um círculo imerso em* $\mathbb{S}^2$ *é também um círculo imerso em* $\mathbb{S}^2$*.*

Demonstração: Imediata da Proposição 2.2.

2.2 As Fórmulas de Frenet para Curvas na Esfera $\mathbb{S}^2$

Seja $\mathcal{T}$ uma curva regular fechada na esfera $\mathbb{S}^2$. Considere $\mathcal{T}$ parametrizada pelo comprimento de arco t. Assim, $|\mathcal{T}'(t)| = 1$ para todo t. Definindo

$$\nu := \mathcal{T} \times \mathcal{T}',$$

temos que ν é um vetor unitário e simultaneamente ortogonal a $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$.

Além disso, como $\mathcal{T}$ é uma curva em $\mathbb{S}^2$, o vetor posição $\mathcal{T}(t)$ é ortogonal ao vetor tangente $\mathcal{T}'(t)$. Desta forma, $\{\mathcal{T}, \mathcal{T}', \nu\}$ consiste em um referencial ortonormal em $\mathcal{T}(t)$.

Considerando a derivada segunda $\mathcal{T}''$, existem e são únicos os reais a, b e c tais que

$$\mathcal{T}'' = a\mathcal{T} + b\mathcal{T}' + c\nu,$$

a saber, $a = \langle \mathcal{T}'', \mathcal{T} \rangle$, $b = \langle \mathcal{T}'', \mathcal{T}' \rangle$ e $c = \langle \mathcal{T}'', \nu \rangle$.

Lema 2.2.

$$a = \langle \mathcal{T}'', \mathcal{T} \rangle = -1, \qquad b = \langle \mathcal{T}'', \mathcal{T}' \rangle = 0, \qquad c = \langle \mathcal{T}'', \nu \rangle = k_g.$$

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt} \langle \mathcal{T}, \mathcal{T}' \rangle &= \langle \mathcal{T}', \mathcal{T}' \rangle + \langle \mathcal{T}, \mathcal{T}'' \rangle \\ &= 1 + \langle \mathcal{T}, \mathcal{T}'' \rangle . \end{aligned}$$

Assim $a = \langle \mathcal{T}'', \mathcal{T} \rangle = \langle \mathcal{T}, \mathcal{T}'' \rangle = -1$.

Por outro lado, $|\mathcal{T}'| = 1$ pois $\mathcal{T}$ está parametrizada pelo comprimento de arco e, portanto,

$$\langle \mathcal{T}', \mathcal{T}' \rangle = 1.$$

Derivando ambos os membros desta igualdade obtemos

$$2 \langle \mathcal{T}'', \mathcal{T}' \rangle = 0.$$

Assim $b = \langle \mathcal{T}'', \mathcal{T}' \rangle = 0$.

Observe ainda que $c = \langle \mathcal{T}'', \nu \rangle = \langle \mathcal{T}'', \mathcal{T} \times \mathcal{T}' \rangle$ é a curvatura geodésica da curva $\mathcal{T}$ em $\mathcal{T}(t)$ pois, como vimos acima, $\langle \mathcal{T}'', \mathcal{T}' \rangle = 0$. Assim temos que

$$c = \langle \mathcal{T}'', \nu \rangle = k_g.$$

■

Conforme vimos acima, sendo $\mathcal{T}$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, temos $\langle \mathcal{T}'', \mathcal{T} \rangle = -1$, $\langle \mathcal{T}'', \mathcal{T}' \rangle = 0$, e $\langle \mathcal{T}'', \nu \rangle = k_g$. Assim, no referencial $\{\mathcal{T}, \mathcal{T}', \nu\}$, podemos escrever

$$\mathcal{T}'' = -\mathcal{T} + k_g \nu. \tag{2.1}$$

Por outro lado, sendo $\nu = \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$, temos que

$$\nu' = \frac{d}{dt} \nu = \frac{d}{dt} (\mathcal{T} \times \mathcal{T}') = \mathcal{T} \times \mathcal{T}'' + \mathcal{T}' \times \mathcal{T}' = \mathcal{T} \times \mathcal{T}''.$$

Usando a igualdade (2.1),

$$\begin{aligned} \nu' &= \mathcal{T} \times \mathcal{T}'' = \mathcal{T} \times (k_g \nu - \mathcal{T}) \\ &= \mathcal{T} \times k_g \nu - \mathcal{T} \times \mathcal{T} = \mathcal{T} \times k_g \nu \\ &= k_g (\mathcal{T} \times \nu) \\ &= -k_g \mathcal{T}'. \end{aligned}$$

As igualdades

$$\mathcal{T}'' = -\mathcal{T} + k_g \nu$$

e

$$\nu' = -k_g \mathcal{T}' \tag{2.2}$$

são ditas *Fórmulas de Frenet* para curvas em $\mathbb{S}^2$.

2.3 A Curva σ Vista como um Campo de Vetores Paralelo ao Longo de sua *Tantrix*

Proposição 2.3. *Seja σ uma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$, parametrizada pelo comprimento de arco s e seja $\mathcal{T}$ sua* tantrix *parametrizada pelo comprimento de arco t. Então,*

$$\sigma' = \frac{d\sigma}{dt} = \mathcal{T}\frac{ds}{dt} \qquad e \qquad \frac{ds}{dt} > 0.$$

Demonstração: Escreva t em função de s usando a função comprimento de arco.

Assim

$$t(s) = \int_0^s \left|\frac{d\mathcal{T}}{ds}\right| ds.$$

Portanto,

$$\frac{dt}{ds} = \left|\frac{d\mathcal{T}}{ds}\right|.$$

Aplicando o Lema 2.1 obtemos,

$$\frac{dt}{ds} = \left|\frac{d\mathcal{T}}{ds}\right| \geq 1.$$

Sendo assim, $\frac{dt}{ds} \neq 0$. Além disto, $\frac{dt}{ds}$ é contínua visto que σ é C^∞ e

$$\frac{d\mathcal{T}}{ds} = \frac{d^2\sigma}{ds^2}.$$

Podemos, então, aplicar o Teorema da Função Inversa que garante a existência e diferenciabilidade da inversa de $\frac{dt}{ds}$. Assim,

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^{-1} = \frac{ds}{dt} > 0.$$

Pela regra da cadeia,

$$\sigma' = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathcal{T}\,\frac{ds}{dt}.$$

■

Observação 2.1. Como $\sigma(t)$ pertence $T_{\mathcal{T}(s)}\mathbb{S}^2$ pois $\langle \sigma(t), \mathcal{T}(t)\rangle = 0$, mais ainda, pela definição de campo de vetores paralelo (Definição 1.5) ao escrever

$$\sigma' = \mathcal{T}\,\frac{ds}{dt}, \quad \text{sendo } \frac{ds}{dt} \text{ uma função escalar,}$$

σ fica caracterizada como um campo de vetores paralelo ao longo da *tantrix* $\mathcal{T}$ em $\mathbb{S}^2$ já que $\sigma'(t) = f(t)\mathcal{T}(t)$, onde

$$f(t) = \frac{ds}{dt}(t).$$

□

Seja $\mathcal{T} : [a, b] \to \mathbb{S}^2$ uma curva regular fechada parametrizada pelo comprimento de arco t e seja $X : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ um campo diferenciável de vetores unitários ao longo de $\mathcal{T}$ em $\mathbb{S}^2$.

Suponha que os vetores $X(t)$ e $\mathcal{T}'(t)$ sejam linearmente independentes para todo $t \in [a, b]$. Então está bem definida a função $\phi(t)$ dada por

$$\phi(t) := \arccos \frac{\langle X(t), -\mathcal{T}'(t)\rangle}{|X(t)||-\mathcal{T}'(t)|}.$$

Note que sendo os vetores $X(t)$ e $-\mathcal{T}'(t)$ unitários podemos escrever simplesmente

$$\phi(t) = \arccos \langle X(t), -\mathcal{T}'(t)\rangle .$$

Além disto a função ϕ acima definida é diferenciável pois sendo os vetores $X(t)$ e $-\mathcal{T}'(t)$ linearmente independentes, temos que $0 < \phi(t) < \pi$.

Assim ao derivar ambos membros da igualdade

$$\cos \phi(t) = \langle X(t), -\mathcal{T}'(t)\rangle ,$$

obtemos

$$-\phi'(t) \operatorname{sen} \phi(t) = \langle X(t), -\mathcal{T}''(t)\rangle + \langle -\mathcal{T}'(t), X'(t)\rangle .$$

Portanto,

$$\phi'(t) = -\frac{\langle X(t), -\mathcal{T}''(t)\rangle + \langle -\mathcal{T}'(t), X'(t)\rangle}{\operatorname{sen} \phi(t)}.$$

Considerando o referencial ortonormal $\{\mathcal{T}', \nu\}$, onde $\nu = \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$, no plano tangente $T_{\mathcal{T}(t)}\mathbb{S}^2$, conforme visto em 2.2, é imediato que $\{-\mathcal{T}', \nu\}$ também constitui um referencial ortonormal em $T_{\mathcal{T}(t)}\mathbb{S}^2$. Assim existem e são únicos os reais β_1, β_2 tais que

$$X(t) = \beta_1[-\mathcal{T}'(t)] + \beta_2\nu(t).$$

Mas sendo $X(t)$ vetor unitário e $\phi(t)$ o ângulo determinado pelos vetores $X(t)$ e $-\mathcal{T}'(t)$, temos

$$\beta_1 = \cos\phi(t) \quad \text{e} \quad \beta_2 = \operatorname{sen}\phi(t)$$

e assim $X(t)$ pode ser escrito na forma

$$X(t) = -\cos\phi(t)\mathcal{T}'(t) + \operatorname{sen}\phi(t)\nu(t). \tag{2.3}$$

Proposição 2.4. *Seja $\mathcal{T} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva regular fechada parametrizada pelo comprimento de arco t. Seja $X : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um campo diferenciável de vetores unitários ao longo de $\mathcal{T}$ em $\mathbb{S}^2$ e tal que os vetores $X(t)$ e $\mathcal{T}'(t)$ são linearmente independentes para todo $t \in [a,b]$. Então, de* (2.3)*, tem-se*

$$X'(t) = (\phi'(t) - k_g(t))[\operatorname{sen}\phi(t)\mathcal{T}'(t) + \cos\phi(t)\nu(t)] + \cos\phi(t)\mathcal{T}(t), \tag{2.4}$$

onde $k_g(t)$ é a curvatura geodésica da curva $\mathcal{T}$ em $\mathcal{T}(t)$.

Demonstração: Derivando em relação a t ambos os lados da igualdade (2.3), obtemos

$$\begin{aligned} X'(t) &= -\cos\phi(t)\mathcal{T}''(t) + \mathcal{T}'(t)\phi'(t)\operatorname{sen}\phi(t) + \operatorname{sen}\phi(t)\nu'(t) + \nu(t)\phi'(t)\cos\phi(t) \\ &= -\cos\phi(t)\big[\mathcal{T}''(t) - \phi'(t)\nu(t)\big] + \operatorname{sen}\phi(t)\big[\phi'(t)\mathcal{T}'(t) + \nu'(t)\big]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Usando as Fórmulas de Frenet para curvas em $\mathbb{S}^2$:

$$\mathcal{T}'' = k_g\nu - \mathcal{T} \quad \text{e} \quad \nu' = -k_g\mathcal{T}',$$

em (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} X'(t) &= -\cos\phi(t)\big[k_g(t)\nu(t) - \mathcal{T}(t)\big] + \mathcal{T}'(t)\phi'(t)\operatorname{sen}\phi(t) \\ &\quad + \operatorname{sen}\phi(t)\big[-k_g(t)\mathcal{T}'(t)\big] + \nu(t)\phi'(t)\cos\phi(t) \\ &= \big[\phi'(t)\operatorname{sen}\phi(t) - k_g(t)\operatorname{sen}\phi(t)\big]\mathcal{T}'(t) + \cos\phi(t)\mathcal{T}(t) \\ &\quad + \big[\phi'(t)\cos\phi(t) - k_g(t)\cos\phi(t)\big]\nu(t) \\ &= \big[\phi'(t) - k_g(t)\big]\big[\operatorname{sen}\phi(t)\mathcal{T}'(t) + \cos\phi(t)\nu(t)\big] + \cos\phi(t)\mathcal{T}(t). \end{aligned}$$

■

Corolário 2.2. *Seja $\mathcal{T} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva regular fechada e seja X um campo diferenciável de vetores unitários paralelo em $\mathbb{S}^2$ ao longo da curva $\mathcal{T}$ tal que os vetores $X(t)$ e $\mathcal{T}'(t)$ são linearmente independentes para todo $t \in [a,b]$. Se $\phi(t)$ denota o ângulo entre os vetores $X(t)$ e $-\mathcal{T}'(t)$, então*

$$\phi'(t) = k_g(t), \quad \forall t.$$

Demonstração: Segue da definição de paralelismo que X' é múltiplo de $\mathcal{T}(t)$ e, assim, de (2.4) temos

$$X'(t) = \cos\phi(t)\mathcal{T}(t)$$

e, neste caso, ainda por (2.4), segue que

$$\phi'(t) - k_g(t) = 0,$$

isto é, $\phi'(t) = k_g(t)$, para todo t. ■

Observação 2.2. Decorre deste corolário que ϕ' independe do particular campo diferenciável de vetores unitários ao longo da curva $\mathcal{T}$ considerado.

2.4 Curvatura Geodésica Total da *Tantrix*

Teorema 2.1. *A* tantrix *$\mathcal{T}$ de uma curva regular fechada σ em $\mathbb{S}^2$ sempre tem curvatura geodésica total igual a zero e se a* tantrix *$\mathcal{T}$ é simples, limita na esfera duas regiões com áreas iguais a 2π.*

Demonstração: Seja $\sigma : [a,b] \to \mathbb{S}^2$ uma curva regular fechada parametrizada pelo comprimento de arco s e seja $\mathcal{T}$ a *tantrix* da curva σ parametrizada pelo comprimento de arco t. Conforme a Observação 2.1, σ é um campo de vetores paralelo ao longo da curva $\mathcal{T}$. Fixado t e denotando por $\phi(t)$ o ângulo entre os vetores $\sigma(t)$ e $-\mathcal{T}(t)$, obtemos, por (2.4),

$$\sigma'(t) = \big(\phi'(t) - k_g(t)\big)[\operatorname{sen}\phi(t)\mathcal{T}'(t) + \cos\phi(t)\nu(t)] + \cos\phi(t)\mathcal{T}(t). \tag{2.6}$$

Da Proposição 2.3, segue que

$$\sigma'(t) = \mathcal{T}(t)\,\frac{ds}{dt} \qquad \text{e} \qquad \frac{ds}{dt} > 0.$$

Comparando com (2.6), obtemos

$$\phi'(t) - k_g(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad \cos\phi(t) = \frac{ds}{dt} > 0.$$

Portanto,

$$\phi'(t) = k_g(t) \qquad \text{e} \qquad \cos\phi(t) > 0.$$

Note que, sendo σ fechada e a função ϕ periódica de período L, onde L é o comprimento da *tantrix* $\mathcal{T}$, podemos escrever

$$\int_0^L \phi'(t)\,dt = \phi(L) - \phi(0) = 0$$

e, portanto,

$$\int_a^b k_g(t)\,dt = \int_0^L \phi'(t)\,dt = 0. \tag{2.7}$$

Temos (Definição 1.8) que $\displaystyle\int_a^b k_g(t)dt$ é a curvatura geodésica total de $\mathcal{T}$, provando assim que a *tantrix* de uma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$ sempre tem curvatura geodésica total nula.

Consideremos agora o caso em que a curva $\mathcal{T}$ é simples, ou seja, $\mathcal{T}$ não possui auto-intersecções.

Denotemos por Ω uma das regiões da esfera delimitada pela curva $\mathcal{T}$ e por K a curvatura Gaussiana da esfera. Aplicando o corolário 1 do Teorema de Gauss-Bonnet (veja [3], pag. 330) para esta região simples de $\mathbb{S}^2$, chegamos à igualdade

$$\int_{\mathcal{T}} k_g + \int_{\Omega} K dA = 2\pi,$$

onde dA representa o elemento de área. Sendo $K = 1$ na esfera, temos

$$\text{área de } \Omega = \int_{\Omega} 1\,dA = 2\pi - \int_{\mathcal{T}} k_g = 2\pi - 0 = 2\pi.$$

Portanto, como a área da esfera unitária é 4π, temos que, se a *tantrix* $\mathcal{T}$ é simples, $\mathcal{T}$ divide a esfera em duas regiões de áreas iguais.

■

2.5 Oscilação de um Sub-arco de uma Curva com Curvatura Geodésica Total Igual a Zero

Seja $\mathcal{T} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva regular fechada, parametrizada pelo comprimento de arco e com a curvatura geodésica total igual a zero.
Ou seja,

$$\int_{\mathcal{T}} k_g = 0.$$

Desde que $\mathcal{T}$ é uma curva fechada, k_g pode ser considerada como função de $\mathbb{S}^1$ em $\mathbb{R}$ e, portanto, podemos afirmar (Proposição 1.2) que a função k_g tem antiderivada que denotaremos por $\phi_{\mathcal{T}}$.

Lembre ainda que, conforme observado em (2.2), qualquer que seja o campo diferenciável X, de vetores unitários, paralelo ao longo de $\mathcal{T}$, sendo ϕ o ângulo entre os vetores $X(t)$ e $-\mathcal{T}'(t)$, temos que ϕ é diferenciável e $\phi' = k_g$. Assim, considerando diferentes campos paralelos ao longo de $\mathcal{T}$, as respectivas funções ângulo diferem por uma constante, isto é, quaisquer que sejam $t_1,\ t_2 \in [a,b]$ a diferença $\phi(t_2) - \phi(t_1)$ independe do campo paralelo considerado.

Mais especificamente, $\phi_{\mathcal{T}}$ pode ser definida por

$$\phi_{\mathcal{T}}(s) = \int_a^s k_g(t)\,dt = \phi(s) - \phi(a).$$

Definição 2.2. A *curvatura geodésica total máxima* de um sub-arco α de $\mathcal{T}$ é denotada por $\operatorname*{osc}_{\alpha} \phi_{\mathcal{T}}$ e definida por

$$\operatorname*{osc}_{\alpha} \phi_{\mathcal{T}} := \sup_{\alpha} \phi_{\mathcal{T}} - \inf_{\alpha} \phi_{\mathcal{T}}.$$

Assim a curvatura geodésica total máxima do sub-arco α é a oscilação máxima do ângulo $\phi_{\mathcal{T}}$ no sub-arco considerado.

Proposição 2.5. *Seja $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva regular fechada e $\mathcal{T}$ sua* tantrix. *Então*

$$\operatorname*{osc}_{\alpha} \phi_{\mathcal{T}} < \pi,$$

onde α é um sub-arco de $\mathcal{T}$.

Demonstração: Seja ϕ o ângulo entre σ e $-\mathcal{T}'$.

Sendo σ um campo de vetores paralelo ao longo da curva σ e escrevendo

$$\sigma(t) = -\cos\phi(t)\cdot\mathcal{T}'(t) + \operatorname{sen}\phi(t)\cdot\nu(t),$$

obtemos (Proposição 2.4)

$$\sigma'(t) = \big(\phi'(t) - k_g(t)\big)\big[\operatorname{sen}\phi(t)\mathcal{T}'(t) + \cos\phi(t)\nu(t)\big] + \cos\phi(t)\mathcal{T}(t). \quad (2.8)$$

Da demonstração da Proposição 2.1, temos que $k_g(t) = \phi'(t)$. Então podemos tomar $\phi = \phi_{\mathcal{T}}$. Usando novamente a demonstração da Proposição 2.1 obtemos

$$\sigma'(t) = \cos\phi_{\mathcal{T}}\mathcal{T}(t) \quad (2.9)$$

e

$$\cos\phi_{\mathcal{T}} = \frac{ds}{dt} > 0.$$

Assim,

$$-\frac{\pi}{2} < \phi_{\mathcal{T}} < \frac{\pi}{2}$$

e, portanto, $\operatorname{osc}\phi_{\mathcal{T}} < \pi$.

$\blacksquare$

Proposição 2.6. *Seja $\mathcal{T}$ uma curva regular fechada tal que a curvatura geodésica total de $\mathcal{T}$ é igual a zero e qualquer de seus sub-arcos tem curvatura geodésica total menor que π. Então $\mathcal{T}$ é a* tantrix *de alguma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{T} : [a, b] \to \mathbb{S}^2$ uma curva regular fechada tal que

$$\int_{\mathcal{T}} k_g = 0 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{osc}\phi_{\mathcal{T}} < \pi.$$

Em particular, podemos tomar $-\frac{\pi}{2} < \phi_{\mathcal{T}} < \frac{\pi}{2}$.

Definamos o campo de vetores $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ ao longo da curva $\mathcal{T}$ por

$$\sigma(t) = -\cos\phi_{\mathcal{T}}(t)\mathcal{T}'(t) + \operatorname{sen}\phi_{\mathcal{T}}(t)\nu(t).$$

Observe que σ é um campo diferenciável de vetores unitários e que $\phi_{\mathcal{T}}$ é o ângulo entre $\sigma(t)$ e $-\mathcal{T}'(t)$.

Usando a Proposição 2.4,

$$\sigma'(t) = \big(\phi'_{\mathcal{T}}(t) - k_g(t)\big)\big[\operatorname{sen}\phi_{\mathcal{T}}(t)\mathcal{T}'(t) + \cos\phi_{\mathcal{T}}(t)\nu(t)\big] + \cos\phi_{\mathcal{T}}(t)\mathcal{T}(t).$$

Pela definição de $\phi_{\mathcal{T}}$, temos que

$$\phi'_{\mathcal{T}}(t) - k_g(t) = 0,$$

e daí

$$\sigma'(t) = \cos\phi_{\mathcal{T}}(t) \cdot \mathcal{T}(t).$$

Como $\cos\phi_{\mathcal{T}}(t) > 0$, pois $-\frac{\pi}{2} < \phi_{\mathcal{T}} < \frac{\pi}{2}$, temos

$$\sigma'(t) = \cos\phi_{\mathcal{T}}(t)\mathcal{T}(t) \neq 0, \ \forall t \in [a, b].$$

Pelo observado anteriormente, o campo σ pode ser visto como uma curva na esfera $\mathbb{S}^2$ e desde que $\cos\phi_{\mathcal{T}}(t)$ é não nulo, temos que σ é uma curva regular. Além disto,

$$\frac{\sigma'(t)}{|\sigma'(t)|} = \frac{\cos\phi_{\mathcal{T}}(t)\mathcal{T}(t)}{|\cos\phi(t)||\mathcal{T}(t)|} = \mathcal{T}(t),$$

para todo $t \in [a, b]$.

■

Podemos agora apresentar o teorema que estabelece as condições necessárias e suficientes para que uma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$ seja a *tantrix* de alguma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$.

Teorema 2.2. *Uma curva $\mathcal{T}$ regular fechada em $\mathbb{S}^2$, é a* tantrix *de alguma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$ se, e somente se, a curvatura geodésica total de $\mathcal{T}$ é igual a zero e qualquer sub-arco de $\mathcal{T}$ tem curvatura geodésica total menor do que π.*

Demonstração: Decorre das Proposições 2.1, 2.5 e 2.6.

■

Capítulo 3

Homotopias de Curvas Regulares Fechadas na Esfera $\mathbb{S}^2$

Neste capítulo definiremos curvas regularmente homotópicas em $\mathbb{S}^2$. Provaremos que toda curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$ é regularmente homotópica à sua *tantrix*.

Definição 3.1. Duas curvas regulares fechadas $\alpha_0 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ e $\alpha_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ são *livremente homotópicas* se existe uma aplicação diferenciável $H : [a,b] \times [0,l] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ tal que

$$H(s,0) = \alpha_0(s) \quad \text{e} \quad H(s,l) = \alpha_1(s), \ \forall s \in [a,b]$$

e

$$H(a,t) = H(b,t), \ \forall\, t \in [0,l].$$

A aplicação H é dita uma *homotopia livre* entre α_0 e α_1.

Observação: A Homotopia é livre pois os extremos não estão fixos como ocorre nas homotopias usuais. Por um abuso de linguagem diremos que as curvas α_0 e α_1 são homotópicas para significar livremente homotópicas e que H é uma homotopia entre α_0 e α_1 para significar que H é uma homotopia livre entre α_0 e α_1.

Proposição 3.1. *A relação de homotopia entre curvas é uma relação de equivalência.*

Demonstração: Uma prova desta proposição pode ser encontrada em [3]. ■

As classes determinadas por esta relação de equivalência são chamadas de *classes de homotopia*.

Definição 3.2. Dada uma homotopia entre as curvas $\alpha_0 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ e $\alpha_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ consideramos, para cada $t \in [0,l]$, a aplicação diferenciável $H_t : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ definida por $H_t(s) = H(s,t)$. A homotopia H é dita uma *homotopia regular* se $H_t'(s) \neq 0$, para todo $s \in [a,b]$ e todo $t \in [0,l]$. Dizemos neste caso que as curvas α_0 e α_1 são *regularmente homotópicas*.

Em resumo, duas curvas diferenciáveis regulares fechadas em $\mathbb{S}^2$ são ditas *regularmente homotópicas* se uma pode ser deformada na outra por uma seqüencia de curvas regulares.

Esta família de curvas regulares representando cada estágio da deformação é dita uma *homotopia regular*.

Na próxima Proposição mostramos que uma curva regular fechada pertence à mesma classe de homotopia regular de sua *tantrix*.

Proposição 3.2. *Toda curva regular fechada na esfera é regularmente homotópica à sua própria* tantrix.

Demonstração: Seja $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva regular fechada parametrizada pelo comprimento de arco s e seja $\mathcal{T} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ sua *tantrix*.

Considere a aplicação $H : [a,b] \times [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dada por

$$H(s,\theta) = \sigma(s)\cos\theta + \mathcal{T}(s)\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Esta aplicação está bem definida, é diferenciável e satisfaz

$$H(s,0) = \sigma(s) \quad \text{e} \quad H\big(s, \tfrac{\pi}{2}\big) = \mathcal{T}(s), \;\; \forall s \in [a,b]$$

e

$$H(a,\theta) = H(b,\theta), \;\; \forall\theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}].$$

Fixado θ, defina

$$\sigma_\theta(s) := H(s,\theta).$$

Temos

$$\sigma_\theta'(s) = \frac{\partial}{\partial s}H(s,\theta) = \sigma'(s)\cos\theta + \mathcal{T}'(s)\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{3.1}$$

Considerando o referencial ortonormal $\{\sigma, \sigma', \nu\}$, onde $\nu = \sigma \times \sigma'$, podemos escrever as Fórmulas de Frenet (2.1 e 2.2) para a curva σ

$$\sigma'' = -\sigma + k_g\nu \quad \text{e} \quad \nu' = -k_g\sigma',$$

onde k_g é a curvatura geodésica da curva σ em $\sigma(s)$. Sendo

$$\sigma'(s) = \mathcal{T}(s) \quad \text{e} \quad \sigma''(s) = \mathcal{T}'(s),$$

pois $\mathcal{T}$ é a *tantrix* da curva σ, temos que

$$\mathcal{T}' = -\sigma + k_g\nu \quad \text{e} \quad \nu' = -k_g\mathcal{T}.$$

Substituindo em (3.1), obtemos

$$\begin{aligned}
\sigma'_\theta(s) &= \sigma'(s)\cos\theta + \mathcal{T}'(s)\operatorname{sen}\theta \\
&= \mathcal{T}(s)\cos\theta + \big[-\sigma(s) + k_g(s)\nu(s)\big]\operatorname{sen}\theta \\
&= \mathcal{T}(s)\cos\theta - \sigma(s)\operatorname{sen}\theta + k_g(s)\nu(s)\operatorname{sen}\theta.
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{T}(s)$, $\sigma(s)$ e $\nu(s)$ são linearmente independentes e $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ não podem ser simultaneamente nulos, segue que, para cada $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\sigma'_\theta(s) \neq 0, \quad \forall\, s \in [a, b].$$

Portanto, a homotopia H é regular e assim a curva σ é regularmente homotópica a sua *tantrix* $\mathcal{T}$.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Indicatriz Tangente de uma Curva Regular Fechada no $\mathbb{R}^3$

No Capítulo 2 deste trabalho estabelecemos resultados para a *tantrix* de curvas regulares fechadas considerando o caso especial de curvas em $\mathbb{S}^2$.

Finalizaremos nosso trabalho apresentando alguns resultados válidos para a *tantrix* de qualquer curva regular fechada no $\mathbb{R}^3$. Este Capítulo é baseado em [2].

Proposição 4.1. *Seja $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular fechada e seja $\mathcal{T} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sua* tantrix*, ambas parametrizadas pelo comprimento de arco s da curva σ. Dado $v \in \mathbb{S}^2$ qualquer temos*

$$\int_a^b \langle v, \mathcal{T}(s)\rangle\, ds = 0.$$

Demonstração: Escreva, para $s \in [a,b]$,

$$\sigma(s) = \big(x_1(s), x_2(s), x_3(s)\big).$$

Temos neste caso

$$\mathcal{T}(s) = \big(\mathcal{T}_1(s), \mathcal{T}_2(s), \mathcal{T}_3(s)\big) = \sigma'(s) = \big(x_1'(s), x_2'(s), x_3'(s)\big).$$

Integrando em cada componente de $\mathcal{T}(s)$, temos

$$\int_a^b \mathcal{T}_1(s)ds = \int_a^b x_1'(s)ds = x_1(b) - x_1(a) = 0,$$
$$\int_a^b \mathcal{T}_2(s)ds = \int_a^b x_2'(s)ds = x_2(b) - x_2(a) = 0,$$

e

$$\int_a^b \mathcal{T}_3(s)ds = \int_a^b x_3'(s)ds = x_3(b) - x_3(a) = 0,$$

pois σ é curva fechada.

Assim, escrevendo $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{S}^2$ dado, temos

$$\begin{aligned}
\int_a^b \langle v, \mathcal{T}(s)\rangle\, ds &= \int_a^b \big(v_1\mathcal{T}_1(s) + v_2\mathcal{T}_2(s) + v_3\mathcal{T}_3(s)\big)ds \\
&= v_1\int_a^b \mathcal{T}_1(s)ds + v_2\int_a^b \mathcal{T}_2(s)ds + v_3\int_a^b \mathcal{T}_3(s)ds \\
&= 0 + 0 + 0 \;=\; 0.
\end{aligned}$$

■

Proposição 4.2. *Seja $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular fechada e seja $\mathcal{T} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sua* tantrix*, ambas parametrizadas pelo comprimento de arco s da curva σ. Então a* tantrix *$\mathcal{T}$ da curva σ ou é um círculo máximo de $\mathbb{S}^2$ ou $\mathcal{T}$ possui pontos em dois hemisférios de $\mathbb{S}^2$.*

Demonstração: Temos que (Proposição 4.1) dado $v \in \mathbb{S}^2$,

$$\int_a^b \langle v, \mathcal{T}(s)\rangle\, ds = 0.$$

Analisemos separadamente as duas alternativas possíveis para que isto ocorra.

Se existe $v \in \mathbb{S}^2$ tal que $\langle v, \mathcal{T}(s)\rangle \equiv 0$, para todo $s \in [a,b]$, escrevendo

$$v = (a,b,c) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{T}(s) = \big(\mathcal{T}_1(s), \mathcal{T}_2(s), \mathcal{T}_3(s)\big),$$

temos

$$a\mathcal{T}_1(s) + b\mathcal{T}_2(s) + c\mathcal{T}_3(s) \equiv 0.$$

Ou seja, a curva $\mathcal{T}$ está contida em um plano que passa pela origem e que tem como vetor normal o vetor não-nulo $v = (a,b,c)$.

Como sabemos que a interseção de uma esfera com um plano que passa pelo seu centro determina um círculo máximo dessa esfera, temos que $\mathcal{T}$ é um círculo máximo de $\mathbb{S}^2$.

Se $\langle v, \mathcal{T}(s)\rangle$ não é identicamente nulo para todo $v \in \mathbb{S}^2$, necessariamente o produto $\langle v, \mathcal{T}(s)\rangle$ troca de sinal tomando $s \in [a,b]$. Conseqüentemente, se considerarmos agora a esfera $\mathbb{S}^2$ dividida em dois hemisférios pelo plano que passa pelo centro da esfera e tem como vetor normal o vetor v considerado, temos que a curva $\mathcal{T}$ possui pontos nestes dois hemisférios acima determinados.

■

Referências Bibliográficas

[1] Araújo, P. J. (1998). *Geometria Diferencial*. Rio de Janeiro: IMPA. Coleção Matemática Universitária.

[2] Carreño, O. A. M. (2005). "Tantrices de Lazos en $\mathbb{R}^3$". *Lecturas Matemáticas*. Vol. **26**, $165 - 170$.

[3] Do Carmo, M. P. (2005). *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro: SBM.

[4] Ghomi, M., Solomon, B. (2002)."Skew Loops and Quadric Surfaces". *Commentarii Mathematici Helvetici*. Vol. **77**, $767 - 782$.

[5] Lima, E. L. (1989). *Curso de Análise Vol. 2*. Rio de Janeiro: IMPA. Projeto Euclides, 3ª edição.

[6] Oprea, J. (1997). *Diffrential Geometry and its Applications*. New Jersey: Prentice Hall.

[7] Phillips, A. (1966). "Turning a Surface Inside Out". *Scientific American*. Vol. **214**, nº 5, $112 - 120$.

[8] Rodrigues, P. R. (2001). *Introdução às Curvas e Superfícies*. Niterói: Ed.UFF.

[9] Simanca, S. R. (2004). "Geodesics and Curvature: An Elementary Introduction". XII Escola de Geometria Diferencial. São Paulo: USP.

[10] Solomon, B. (1996). "Tantrices of Spherical Curves". *American Matematical Monthly*, Vol. **103**, $30 - 39$.