

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS AO ESTUDO DE
MICROMECAÂNICA DO DANO DE MATERIAIS MICROPOROSOS DE MATRIZ
METÁLICA

por

Rubén Galiano Batista

Tese para a obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Julho de 2007

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS AO ESTUDO DE
MICROMECAÂNICA DO DANO DE MATERIAIS MICROPOROSOS DE MATRIZ
METÁLICA

por

Rubén Galiano Batista

Mestre em Engenharia

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do
Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Ignacio Iturrioz

Co-orientador: Prof. Dr. Adrian Cisilino

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Afonso Reguly- PPGEM/UFRGS

Prof. Dr. Jorge Daniel Riera- PPGEC/UFRGS

Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca- PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Luiz Carlos Pereira- COPPE/UFRJ

Prof. Dr. Flavio José Lorini

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 16 de Julho de 2007.

Partes do conteúdo desta tese já foram publicadas em:

- a) Batista R. G., Iturrioz I. e Cisilino A. “Mapeamento das tensões utilizando elementos discretos”, proceedings of XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE 2003), Ouro Preto – MG, Brazil
- b) Batista R. G., Iturrioz I. e Cisilino A. “Aplicación del método de los elementos discretos a la homogenización de las propiedades mecánicas de materiales microporosos”, XIII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF 2003) Bahía Blanca, Argentina.
- c) Batista R. G., Iturrioz I. e Cisilino A. “Caracterização micromecânica do dano em materiais microporosos utilizando o método dos elementos discretos”, 2o Congresso de Ciência e Engenharia de Materiais do Mercosul (SULMAT'2004), Joinville, SC , Brasil.
- d) Tech T W., Batista R. G., Iturrioz I. e Cisilino A. “Aplicação do método dos elementos discretos em mecânica de fratura estática e dinâmica”, XXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods (CILAMCE 2004), Recife, Pernambuco, Brasil.
- d) Galiano R. B., Cisilino A. e Iturrioz I., “Determinación del elemento de volumen representativo de compuestos particulados utilizando el método de los elementos discretos”, Jornadas SAM/CONAMET 2005 – mema 2005, Mar del Plata, Octubre de 2005.
- e) Galiano B. R., Iturrioz, I.e Cisilino, A., “Aplicación del método de los elementos discretos al estudio del mecanismo de fractura por crecimiento y coalescencia de vazios”, Asociación Argentina de Mecánica Computacional- XV Congreso sobre métodos numéricos y sus aplicaciones-ENIEF 2006, Santa Fe, Argentina.
- f) Galiano B. R., Iturrioz, I.e Cisilino, A., “Computational modelling of the micromechanics of void growth and coalescence in ductile failure via the discrete element method”, In: Solid Mechanics in Brazil 2007 - MECSOL 2007, 2007, São PauloMECSOL-2007, ABCM São Paulo.

AGRADECIMENTOS

Ao término do doutorado, transcorreu um extenso período ao longo do qual convivi com muitas pessoas que contribuíram em maior ou menor medida com o andamento do trabalho. Seja com uma simples piada ou sorriso quando as coisas não andavam muito bem e parecia que os problemas da academia não tinham solução ou então, contribuindo de forma mais direta ajudando a resolver tais problemas. Desde os nossos familiares e amigos até os professores, colegas e funcionários que nos acompanham nessa caminhada, incluindo também os órgãos financiadores do governo encarregados de administrar o dinheiro que o povo brasileiro disponibiliza através dos altos impostos cobrados. Enfim, espero não esquecer ninguém nos meus agradecimentos.

Então começo agradecendo aos Professores Ignacio Iturrioz e Adrian Cisilino pela orientação na realização deste trabalho e por contribuírem com meu crescimento e amadurecimento profissional. De vocês levo os mais fieis exemplos de ética profissional e pessoal, de amor à profissão e competência, entre outros tantos valores. Muchas gracias a los dos.

À minha esposa Julia Maria Diaz Cónsul pelo amor, paciência, dedicação ao nosso relacionamento e a nossa família, que no meio do trabalho ganhou mais um integrante ao qual também agradeço simplesmente por existir como escreveu minha esposa nos agradecimentos da sua tese. A mi esposa y mi hijo un muchas gracias inmenso, ustedes son mi equilibrio y mi razón de vivir.

Aos amigos:

Hervandil Morosini Sant'Anna: Sabe aquelas pessoas as quais não sei por que estranho mistério parece que já conheces da vida toda, tá aqui uma delas para mim, a quem considero como um irmão e contribuiu muito também com o andamento deste trabalho, tanto técnica como moralmente, além de estar sempre presente em qualquer situação. Brother sempre escrito no alcorão!!!!!!!!!!!!!! Obrigado pela amizade incondicional.

André Schaan Casagrande pela amizade e a força em todas as situações, sempre tentarei me espelhar na organização, ética profissional e competência que te caracterizam, por tabela e não menos importante esta sua digníssima esposa. Tati obrigadão também a você. Obrigado a vocês dois.

Leonardo Hoss: Tá aqui um cara que conheci há pouco tempo e já faz parte do meu hall da fama particular. Esse cara é laureado em todas as tarefas técnicas que lhe são designadas. Velho muito obrigado pela parceria e bons momentos que passamos juntos.

Federico Carlos Buroni: Mas conhecido como Federiquito, este tipo es todo lo buena gente que ustedes puedan imaginarse, inteligente, paciente, educado de fácil convivencia e un gran amigo con el que da gusto conversar e filosofar de cualquier cosa.

Gracias Federiquito por tus importantes contribuciones a este trabajo y por tu valiosa amistad, el futuro es tuyo.

José Luis Albuquerque e Raúl Mondadori: Estão aqui dois caras a quem admiro muito, que a pesar da idade e sem querer chamá-los de velhos, encararam vibrações com Ignacio, mecânica dos sólidos e finitos com Jun, e ganharam os desafios. Diante destes fatos o Chuck Norris virou um neném malcriado comparado com estes guerreiros. Obrigado a vocês pelas conversas, experiências transmitidas e bons momentos que me proporcionaram.

Carla Anflor e John. Ainda me lembro quando entrei no GMAp, que com quem primeiro falei foi com vocês. Obrigado pela amizade e muito sucesso na vida.

Carlos Eduardo de Souza (Cadu), Carlos Eduardo Marcos Guilherme (este é um cara com muitos nomes e sem nenhum sobrenome), Vagner Schmidt, Cristian Zarichta, Leandro Corso, Tomas Tech. Obrigado a vocês pelos bons momentos, conversas e força nos anos de convivência.

Pablo Diego Didoné, Crissiane Ancines, Tales Lisboa, Guilherme Tesser, Martin Mauler Neto, Jose Tiago da Cunha, Gilnei Recksiegel, Gladimir Grigoletti, Letícia Fadel Miguel, Rafael Laranja, Tiago Becker, Eduardo Lenz, Eduardo Nabinguer, Sávio Pacheco, Leonardo Zanneti, Newton Ruth, Newton Rogério da Silva, em fim tantos outros que fizeram parte da nossa convivência na universidade e que as vezes sem eles saberem contribuíram com o andamento do trabalho, muito obrigado a todos vocês.

Fora do ambiente da universidade quero agradecer aos amigos Janaina Goulart, Tereza Campessato, Joel Belanca, Flavia Belanca, Rossani Baron Jose Flores, Jorge barata entre outros, em quem sempre pude encontrar suporte pessoal e moral, bons conselhos e muitas outras coisas que tornam a caminhada mais fácil. Obrigado a todos vocês pela amizade.

Aos professores do GMAp, Rogério José Marczak, Jun Sérgio Ono Fonseca e Alberto Tamagna, agradeço também a vocês, por juntos terem contribuído com minha formação e amadurecimento profissional. Em fim, fazer parte desse coletivo de pessoas foi um grande privilégio que poucos têm.

Agradeço meus pais e irmãos por existirem e pela família tão linda que somos.

Quero agradecer aos funcionários desta universidade que contribuem com seus serviços para o funcionamento desta instituição, desde secretárias até a biblioteca e o restaurante

universitário, dentre eles dou um muito obrigado à Vera e ao Luis da biblioteca, ao Paulo, Dona Gracinda e Helen do PROMEC.

Por último e não menos importante agradeço ao povo Brasileiro por me acolher e pagar os impostos que permitiram que a CAPES paga-se uma bolsa de estudos para mim. Me esforcei ao máximo para retribuir esse favor. Pelo menos essa pequena parcela não foi investida em pagamentos de propinas, nem desviado para engordar as contas de políticos corruptos e inescrupulosos.

RESUMO

A caracterização mecânica de materiais compósitos a nível micro-mecânico é de difícil realização utilizando a experimentação física. Neste sentido, a mecânica computacional se apresenta como uma ferramenta de grandes possibilidades. Particularmente o método dos elementos discretos (MED), por suas características, constitui uma ferramenta numérica de potencial aplicação na modelagem de fenômenos de fratura. No presente trabalho, é estudado o micromecanismo de fratura de um ferro fundido nodular ferrítico FFNF utilizando-se como variável de dano a fração de volume de vazios. Para a realização desse estudo é determinado um elemento de volume representativo (EVR) do FFNF através de modelos em duas dimensões desenvolvidos pelo método dos elementos discretos (MED). No modelos computacionais foi considerada uma pseudo-microestrutura de FFNF constituída de uma matriz homogênea na qual estão embutidos nódulos de grafite circulares, todos de um mesmo diâmetro. A distribuição espacial dos nódulos respeita as condições de vizinhança características de distribuições de nódulos reais. A determinação do EVR em regime não linear impõe a necessidade de se estabelecerem critérios em relação à utilização de tolerâncias na determinação das propriedades efetivas, pois o grau de dispersão nos volumes de controle analisados, não é desprezível. No entanto, testes preliminares no estudo da micro-mecânica de fratura em um elemento de volume representativo do material considerado neste trabalho, descrevem de maneira coerente o processo de dano desse material, o qual mostra a eficácia do método nas etapas posteriores, direcionadas a relacionar parâmetros micro-mecânicos de fratura com parâmetros macro-mecânicos da mecânica da fratura convencional.

ABSTRACT

“APPLICATION OF DISCRETE ELEMENT METHOD TO THE MICROMECHANICS OF DAMAGE IN MICROPOROUS METAL MATRIX MATERIALS”

The mechanical characterization of composite materials at a micro-mechanical level becomes a difficult task using physical experimentation. In this sense computational mechanics is introduced as a tool with great possibilities. Particularly the discrete elements method, due to its characteristics, is presented as a numerical tool of potential application in fracture micro-mechanisms modeling. This work presents the study of fracture micro-mechanism of a ferritic nodular cast iron (FNCI) using the void volume fraction as the damage variable. A representative volume element (RVE) of FNCI by two dimension models using the discrete elements method (DEM) is obtained, in which it is considered a pseudo-microstructure with homogeneous matrix where the graphite nodules, with circular shape and equal diameter, are embedded. In the pseudo-microstructure graphite nodules distribution, were considered the neighboring conditions characteristic of real nodules distributions. The determination of the RVE in a non-linear regime imposes the need to establish criteria in relation to the use of tolerances in the determination of the effective properties, since the dispersion degree in the analyzed control volumes is significant, however, preliminary tests in the study of fracture micro-mechanics in a volume element representative of the material considered for this work, describe in a coherent way the damage process of this material, which shows the effectiveness of the method in posterior steps, directed to relate fracture micro-mechanical parameters with conventional fracture mechanics parameters.

ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO.....	1
2.	FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	3
2.1.	Aspectos Básicos da Mecânica da Fratura.....	3
2.1.1.	CrITÉrio EnergÉtico de Griffith.....	5
2.1.2.	Teoria de Griffith Modificada.....	8
2.1.3.	Fator de Intensidade de Tensões.....	9
2.2.	Materiais Compósitos e Tratamento Computacional de Materiais Micro-heterogêneos.....	12
2.2.1.	Materiais Compósitos.....	13
2.2.2.	Tratamento Computacional de Materiais Micro-heterogêneos.....	15
2.2.2.1.	Elemento de Volume Representativo.....	15
2.2.3.	Homogeneização.....	21
2.3.	Mecânica do Dano.....	26
2.3.1.	Fratura Dúctil em Metais.....	28
2.3.1.1.	Coalescência dos Vazios.....	33
3.	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	35
3.1.	Modelos Contínuos Relacionados à Fratura Dúctil.....	35
3.2.	Modelagem Computacional de Micromecanismos da Fratura Dúctil.....	37
3.2.1.	CrITÉrios de Coalescência.....	42
4.	MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS (MED).....	45
4.1.	Características do Método Utilizado Neste Trabalho.....	46
4.2.	Rigidez das Barras Equivalente ao Contínuo.....	47
4.3.	Massas Nodais.....	52
4.4.	Solução da Equação de Equilíbrio.....	52
4.5.	CrITÉrio de Falha da Barra.....	54
5.	IMPLEMENTAÇÕES REALIZADAS NO MED.....	57
5.1.	Metodologia de Determinação das Tensões.....	57
5.1.1.	Tensões Normais.....	58
5.1.2.	Tensões Tangenciais.....	59
5.1.3.	Exemplos de Verificação.....	59
5.1.4.	Placa Submetida a Diferentes Carregamentos (Exemplo 1).....	60
5.1.4.1.	Influência do Número de Camadas.....	61
5.1.4.2.	Influência da Discretização.....	64
5.2.	Viga em Balanço (exemplo tipo 2).....	65
5.2.1.	Comportamento das Tensões e dos Deslocamentos em Relação à Discretização.....	66
5.3.	Placa com Orifícios de Distribuídos de forma Aleatória (exemplo 3).....	67
5.3.1.	Tensões Obtidas com o MED.....	69
5.4.	Outra Alternativa para a Lei Constitutiva da Barra: Lei Trilinear.....	72
5.4.1.	Lei Trilinear.....	74
5.5.	Cálculo da Fração de Volume de Vazios.....	76
5.5.1.	Fração de Volume de Vazios Proposta.....	77
5.5.2.	Determinação do volume do módulo.....	79
5.5.3.	Exemplos de Verificação.....	80
5.5.3.1.	Comportamento da Fração de Vazios Proposta para os Exemplos Analisados.....	81
5.6.	Cálculo de Parâmetros Fractomecânicos Utilizando-se o MED.....	84
5.6.1.	Análise Estática de uma Placa Finita com Trinca Central (exemplo 1):.....	86
5.6.2.	Placa Finita com Trinca Central e Deslocamento Prescrito Aplicado em seus Extremos (exemplo 2).....	90
6.	ESTUDO COMPUTACIONAL DO MICROMECHANISMO DE FRATURA DE MATERIAIS MICROPOROSOS DE MATRIZ METÁLICA UTILIZANDO-SE O MED.....	93
6.1.	Características da Micro-Estrutura do Ferro Fundido Nodular Ferrítico e Simplificações Realizadas nos Modelos em MED.....	94
6.1.1.	Forma e Distribuição das Inclusões de Grafite.....	95
6.1.2.	Propriedades das Barras Matriz dos Modelos.....	98
6.2.	Determinação do Elemento de Volume Representativo.....	100
6.2.1.	Resultados e Discussão.....	102
6.2.1.1.	Energia Elástica.....	102
6.2.1.2.	Energia de Dano.....	104
6.2.1.3.	Fração de Volume de Vazios.....	106

6.2.2.	Ajuste dos Parâmetros da Lei Trilinear Considerando o EVR.	109
6.3.	Verificação da Resposta Micromecânica e sua Relação com Comportamento Macroscópico.....	112
6.3.1.	Crítério de Coalescência e de Ruptura Propostos.....	112
6.3.2.	Aplicação dos Critérios de Coalescência e Ruptura Propostos.	117
6.3.2.1.	Coalescência.	117
6.3.2.2.	Ruptura.	119
6.3.3.	Análise Considerando Periodicidade da Microestrutura.	124
6.3.4.	Atribuindo as Propriedades do Grafite aos Nódulos.	128
6.4.	Influência da Triaxialidade nas Tensões.	134
7.	CONCLUSÕES.....	144
	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	147
	REFERÊNCIAS.....	148

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

A- Área
a- comprimento da trinca.
 A_n e A_d - Área de seção da transversal das barras normais e diagonais do módulo cúbico respectivamente.
 a^* - aceleração da partícula no instante analisado
B- espessura
C - matriz de amortecimento (também considerada diagonal)
 C_{ij} - componentes do tensor constitutivo.
D- Variável de dano.
 D_f - constante vinculada ao coeficiente de amortecimento
 D_{NL} - Energia de dano em regime não linear.
 D_{TM} - Energia de dano para o ponto de tensão máxima.
E- módulo de elasticidade.
ENEL- energia elástica.
ENCN- energia cinética
EVR- elemento de volume representativo
EPD- Estado plano de deformações.
EPT- Estado plano de tensões.
 $E\sigma_{vm}$ - Erro na tensão equivalente de von Mises
E' - Módulo de elasticidade equivalente.
E* - Propriedade elástica homogeneizada obtida a partir da relação direta entre a tensão deformação.
E^{*-1} - Propriedade elástica homogeneizada obtida a partir da relação inversa entre a tensão deformação.
F- Carga aplicada.
f- Fração de volume de vazios.
 F_f = Força de inércia
 F_a = Força de amortecimento
 f_c - Fração de volume de vazios crítica.
 f_n - é a frequência natural de vibração do modo n (Hz)
 f_f - Fração de volume de vazios no instante da fratura.
 \dot{F} - Velocidade de aplicação da Carga.
 F_R^i = Resultante da soma de todas as forças correspondentes ao nó i.
 f_r^b - força interna de cada barra.
 f_L - fração de volume de vazios em regime linear.
 f_{NL} - fração de volume de vazios em regime não linear.
 f_{TM} - fração de volume de vazios no ponto de tensão máxima.
G- Energia específica de fratura.
 G_c - Energia específica de fratura crítica.
K- Fator de intensidade de tensão.
 K_I - Fator de intensidade de tensões em modo I de carga.
 K_{IC} - Fator de intensidade de tensões crítico modo I ou tenacidade de fratura do material.
 K_r - função das propriedades mecânicas do material e da discretização adotada que determina a deformação de ruptura da barra.
 K_{r0} - Coeficiente de ajuste da lei constitutiva que determina a deformação para a qual começa diminuir a capacidade de carregamento da barra.
 K^* - Energia cinética.
 L_c - Dimensão do lado do módulo cúbico da formulação em MED utilizada.
M - matriz de massas nodais (considerada diagonal),
m- masa da partícula;
ntm- número total de módulos do modelo;
nbrm- número de barras rompidas do módulo;
nbtm- número de barras total do módulo;
nbdm- número de barras enfraquecidas do módulo;
Pc- Carga crítica.
 Q_{11} e Q_{22} - Propriedades efetivas numa determinada direção.
 $q1$ e $q2$ - coeficientes de ajuste utilizados no modelo de Gurson.
r- coordenada r num sistema de coordenadas polares.
 Rf_c fator de falha.

REET- Coeficiente de ajuste da lei constitutiva que determina a mudança na rigidez da barra após atingido o limite elástico.

S_{ij} - Componente de tensão desviadora.

T^* - Temperatura.

T - Triaxialidade nas tensões

U - energia de deformação.

u - deslocamento.

\tilde{u}_i^1 e \tilde{u}_i^2 - Perturbação no deslocamento total devido às escalas micro-estruturais 1 e 2;

u_i^η - Deslocamento total na menor escala da micro-estrutura.

u_i^0 - Deslocamento na escala macroscópica.

\bar{U}_{NL} - Energia elástica média em regime não linear.

\bar{U}_L - Energia elástica média em regime linear.

\bar{U}_{TM} - Energia elástica média em no ponto de tensão máxima.

v - deslocamento em y .

v - velocidade.

v_0 - velocidade inicial da partícula

$VEVR$ e $VEVRn$: são o volume total do EVR e o volume correspondente a uma determinada fase dentro do EVR, Vt - volume total.

Vol_{mod} - Volume do módulo;

W - Potencial das forças externas.

x - é o vetor deslocamento nodal,

X_{mat} - Parâmetro fractomecânico característico do material.

X_{cal} - Parâmetro fractomecânico calculado.

x^0, x^1, x^2 ,- Coordenadas nas escalas, macroscópica e demais escalas micro-estruturais analisadas, respectivamente.

x_0 - posição inicial da partícula.

α_{kl}^n e α_{jkl}^d - são os cosenos diretores.

β_1 e β_2 - Cosenos diretores.

δ_c - Parâmetro adimensional que contem informação da relação entre o tamanho do EVR e o tamanho da menor partícula nele contida.

ε - Deformação.

ε_{pl} - Deformação plástica.

ε_c - Deformação de coalescência.

ξ

ξ_n - Coeficiente de amortecimento crítico.

ε_{pl} - Deformação para a qual começa diminuir a capacidade de carregamento da barra.

ε_p - Limite de deformação elástica.

$\langle \varepsilon \rangle$ - Deformação media dentro de um volume de controle.

γ Energia de superfície do material

γ_p - energia de deformação plástica do material associada ao processo de fratura

η - Fator de escala.

ϕ - Coeficiente que inclui informação da geometria na formula do KI.

μ - Módulo de cisalhamento.

ν - coeficiente de poisson.

ρ - densidade do material

σ_{calc} - Tensão de cálculo.

σ - Tensão

σ_e - Tensão equivalente.

σ_{vm} , - Tensão equivalente de von Mises.

$\sigma_{material}$ - Tensão de referencia para o projeto

σ_{aplic} - Tensão aplicada.

σ_y - Tensão na direção y

σ_f - Tensão de falha.

σ_m - Tensão hidrostática.

σ_{ys} - Tensão de escoamento do material.

$\langle \sigma \rangle$ - Tensão média dentro de um volume de controle.
 ψ - Relação entre as tensões na direção y e x.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1. Caso considerado por Inglis para sua dedução [Kaninen e Popelar, 1985].....	4
Figura 2.2. Experiência realizada por Griffith com as fibras de vidro [Kaninen e Popelar, 1985].	6
Figura 2.3 Placa de dimensões infinitas utilizada pelo Griffith.....	7
Figura 2.4. Modos de fratura considerados por Irwin	9
Figura 2.5. Sistema de coordenadas utilizado na dedução do fator de intensidade de tensão (K_I).....	10
Figura 2.6. Figura esquemática mostrando a equivalência entre o campo de tensões na ponta da trinca entre uma estrutura real e um corpo de prova. [Aderson, 1995].	11
Figura 2.7. Representação esquemática das considerações realizadas por Voigt e Reuss para estabelecer os limites das propriedades equivalentes de compósitos, utilizando a análise numa dimensão, [Zodhi e Wriggers, 2005].	14
Figura 2.8. Exemplos de materiais compósitos de micro-estrutura aleatória. a) ferro fundido nodular, b) matriz de Alumínio com partículas de carburo de silício, c) Liga alumínio-titânio d) Matriz de prata com partículas de ouro [Zohdi, 2002].	14
Figura 2.9. Esboço de um material compósito periódico.	15
Figura 2.10. Esquema ilustrativo do tamanho do EVR.	16
Figura 2.11. Desenho esquemático para explicar a homogeneidade estatística.....	17
Figura 2.12. Seqüência de volumes de material numa análise de evr [Zohdi, 2002].....	18
Figura 2.13. Verificação da independência das condições de contorno com o incremento do volume de controle encontrado por Terada <i>et al.</i> , [2000].	18
Figura 2.14. Convergência da resposta em termos do módulo de cisalhamento da amostra de material (μ^*), com o incremento do número de partículas [Zohdi, 2002].	19
Figura 2.15. Verificação da independência, das condições de contorno aplicadas, no valor do módulo volumétrico (k_{pp}) obtido, com o incremento do volume de controle (V) [Kanit, 2003].....	20
Figura 2.16. Esboço de um material periódico microheterogêneo.	23
Figura 2.17. Domínio de material micro-heterogêneo não periódico subdividido em volumes de controle.....	24
Figura 2.18. Esquema ilustrativo da consideração de estado plano de deformações (EPD) e estado plano de tensões (EPT).....	25
Figura 2.19. Ilustração esquemática dos campos de aplicação da mecânica do dano e mecânica da fratura [Caboche, 1987].	26
Figura 2.20. Forma de obtenção da variável de dano através da verificação do módulo de elasticidade [Chaboche, 1987]	27
Figura 2.21. Resposta mecânica de um corpo de prova de material metálico dúctil sob tração. 1 material convencional utilizado na engenharia, 2 metal de alta pureza.....	29
Figura 2.22. Análise da superfície de fratura de um corpo de prova de tração (Thomason 1990), a) aumento de 20 vezes, b) aumento de 2000 vezes e c) aumento de 5000 vezes.	29
Figura 2.23. Inclusões, dentro dos micro-vazios da superfície de fratura [Garrison, 1987].....	30
Figura 2.24. Representação esquemática dos diferentes estágios do processo de fratura dúctil, desde o material indeformado (a), passando pela nucleação dos vazios a partir das inclusões e partículas dispersas (b), o crescimento dos vazios nucleados (c) e coalescência dividida em três etapas: coalescência incipiente dos vazios (d), formação da instabilidade plástica, a nível microscópico, no inter-espaço entre vazios (e) e finalmente o estrangulamento do inter-espaço entre os vazios formando a superfície de fratura (f) [Thomason, 1990].	31
Figura 2.25. Porcentual de inclusões que nucleiam vazios em um aço 4340 com pureza comercial, (marcação cheia ●), e com alto grau de pureza (marcação vazia ○) para diferentes graus de triaxialidade nas tensões.	32
Figura 2.26. Início da ruptura no interior do corpo de prova na região de instabilidade plástica (pescoço). [Puttick, 1959].	33
Figura 2.27. Representação esquemática do perfil da superfície de fratura segundo a forma em que ocorre a coalescência. a) Coalescência direta entre uma única população de vazios, b) Coalescência na presença de varias populações de vazios, onde a coalescência dos vazios nucleados primeiro, ocorre pela coalescência dos vazios nucleados por último.	34
Figura 3.1. Superfície de escoamento obtida pelo modelo de Gurson. a) $f=0.07$, b) $f=0$	36
Figura 3.2. Hipótese de material poroso periódico [Brocks et al, 1995].	38
Figura 3.3. Influência da triaxialidade nas tensões (T) no valor da fração de volume de vazios na coalescência (f_c) [Brocks et al, 1995].	39
Figura 3.4. Influência da triaxialidade nas tensões (T) e da fração de volume de vazios inicial (f_0), a) na fração de volume de vazios crítica (f_c), e b) na deformação equivalente associada (E_c).	39
Figura 3.5. Esquema ilustrativo do método utilizado pelo Wriggers para a medição do vazio nucleado e seu posterior crescimento [Wriggers et al, 1998].	40
Figura 3.6. Células unitárias comparadas nos testes preliminares [Wriggers, 1998]	41

Figura 3.7. Distribuição de tensoes obtida dentro de uma célula unitária a) uma única fibra com carregamento uniforme aplicado no contorno, b) Célula unitária extraída do centro de um arranjo de 9x9.	41
Figura 3.8. Distribuição cúbica de vazios considerada por Goods e Brown [1979].....	43
Figura 3.9. Critério de coalescência utilizado por Kim (2004).	43
Figura 4.1. Modelo reológico da interação das partículas no DEM.	45
Figura 4.2. Modelo em MED utilizando o arranjo espacial de barras e detalhe do módulo cúbico básico.	47
Figura 4.3. Determinação da área efetiva das barras normais a) e diagonais b).	48
Figura 4.4. Diagrama do corpo livre de um nó do modelo.	52
Figura 4.5. Lei constitutiva bilinear atribuída a cada barra do modelo (a) parâmetros envolvidos na lei constitutiva, (b) Comportamento em tração e compressão [Rocha, 1989].	54
Figura 5.1. Módulo cúbico utilizado como referência para a explicação da obtenção dotensor de tensões, orientado conforme o sistema de coordenadas global.	58
Figura 5.2. Placa: a) Dimensões, b)tração axial em Y, c) carregamento tangencial, d) carregamento composto (tangencial xy e tração y). (dimensões em m)	61
Figura 5.3. Comportamento energético do modelo da placa com tração axial em Y, ENEL: Energia elástica de deformação, ENCN: Energia cinética.	61
Figura 5.4. Comportamento do erro em relação ao número de camadas para a placa submetida à tração uniaxial (a barra vertical mostra a variância).	62
Figura 5.5. Comportamento do erro em relação ao número de camadas no caso da placa submetida à carga tangencial. (a barra vertical indica a variância).	62
Figura 5.6. Comportamento do erro em relação ao número de camadas no caso da placa submetida a carregamento composto. (a barra vertical indica a variância).	62
Figura 5.7. Distribuição do erro na tensão equivalente de Von Mises numa camada para o caso de tensão normal uniaxial utilizando duas camadas: a) mapa percentual do erro na camada analisada, b) histograma do erro.	63
Figura 5.8. Distribuição do erro na tensão de Von Mises numa camada para o caso de carregamento tangencial utilizando duas camadas: a) mapa percentual do erro na camada analisada, b) histograma do erro.	63
Figura 5.9. Distribuição do erro da tensão equivalente de Von Mises por módulo, numa camada para o caso de carregamento misto utilizando duas camadas: a) mapa percentual do erro na camada analisada, b) histograma do erro.	64
Figura 5.10. Distribuição do erro numa camada para o caso de sessenta elementos no lado da placa, duas camadas e carregamento uniaxial em Y.	64
Figura 5.11. Comportamento do erro na tensão equivalente de Von Mises em relação à discretização: a) caso de duas camadas com tração axial em Y, b) caso de duas camadas com carregamento tangencial.	65
Figura 5.12. Representação geral das características utilizadas na simulação da viga. a) vista geral da viga, b) forma de vinculação utilizada, c) distribuição do carregamento no extremo livre. (dimensões em m).	65
Figura 5.13. Comportamento do erro da viga em relação à discretização: a) Erro médio numa camada na tensão equivalente, b) Erro no deslocamento da linha média. h/Lc : número de elementos na altura da viga, d: distância do engaste e EDL : Erro no deslocamento da linha elástica.	66
Figura 5.14. Comportamento do erro médio na tensão equivalente de Von Mises numa camada em relação à discretização para o caso da viga em balanço. h/Lc = número de módulos na altura da viga, $E \square vm$ = Erro médio na tensão equivalente de Von Mises.	67
Figura 5.15. Distribuição da tensão equivalente (em Pascal) para uma discretização de h/Lc : 10. a) Modelo de elementos finitos, b) Modelo em elementos discretos MED.	67
Figura 5.16. Forma de carregamento e vinculação utilizada na placa com orifícios. As dimensões estão metros.	67
Figura 5.17. Modelo da placa com orifícios utilizando elementos finitos: a) distribuição de tensões para o modelo de discretização $L/40$, b) distribuição de tensões para o modelo de discretização $L/180$, c) detalhe da malha discretização $L/40$, d) detalhe da malha discretização $L/180$	68
Figura 5.18. Modelo em elementos discretos (MED): a) distribuição de tensões obtida para discretização L/Lc : 40, b) distribuição de tensões obtida para discretização L/Lc : 180, c) malha do modelo de discretização L/Lc : 40, d) malha do modelo de discretização L/Lc : 180.	69
Figura 5.19. Seções nas quais foi mapeada a tensão equivalente de von Mises no modelo em elementos finitos.	70
Figura 5.20. Resultados caminho SEQV 5, discretização L/Lc : 40 . a) tensão equivalente de Von Mises, b) histograma do erro na tensão equivalente.	70
Figura 5.21. Resultados caminho SEQV 7, discretização L/Lc : 40 . a) tensão equivalente de Von Mises, b) histograma do erro na tensão equivalente.	71
Figura 5.22. Resultados caminho SEQV 5, discretização L/Lc : 180 . a) tensão equivalente de Von Mises, b) histograma do erro na tensão equivalente.	71
Figura 5.23. Resultados caminho SEQV 7, discretização L/Lc : 180. a) tensão equivalente de Von Mises, b) histograma do erro na tensão equivalente.	72
Figura 5.24. Modelo utilizado como exemplo a) dimensões (em m), modelo em DEM.	72

Figura 5.25. Curvas do material real e do modelo em DEM com lei bilinear, sendo PMMA 4 e PMMA 5 duas medições experimentais.	73
Figura 5.26. Lei trilinear proposta neste trabalho.....	74
Figura 5.27. Área embaixo da curva da lei trilinear, divisão considerada.....	75
Figura 5.28. Curvas tensão deformação do material real e do DEM com as leis bilinear e trilinear.....	76
Figura 5.29 Criação de um vazío circular dentro da formulação em MED utilizada no trabalho.	77
Figura 5.30. Visualização das considerações geométricas na determinação do volume do módulo cúbico. a) visualização de um dos doze tetraedros que compõem o módulo, b) vetores posição que auxiliam na determinação do volume do tetraedro.	79
Figura 5.31. Modelos em elementos discretos para os diferentes casos estudados e representação das tensões aplicadas.....	81
Figura 5.32. Balanço energético para o modelo de orifício losango. ENEL = Energia elástica, ENGD = Energia de dano dissipada e ENCN = energia cinética.	81
Figura 5.33. Curvas tensão (σ_y), vs deformação ϵ_y dos casos analisados.....	82
Figura 5.34. Comportamento do fator f para os casos analisados	82
Figura 5.35. Distribuição de tensões na direção y (σ_y) em MPa para os casos estudados em diferentes estágios do carregamento a) distribuição de tensões para 10,2 MPa aplicados, b) distribuição de tensões para 67 MPa aplicados, c) distribuição de tensões para 240,8 MPa aplicados, d) distribuição de tensões para 400 MPa aplicados, e) distribuição de tensões para tensão máxima.....	83
Figura 5.36. Configuração deformada dos modelos em MED para o último ponto da curva tensão deformação	84
Figura 5.37. Geometria do exemplo a ser modelado, (dimensões em mm).....	86
Figura 5.38. Modelo utilizando o método dos elementos discretos de uma placa finita com uma trinca central. (a) Vista geral e (b) detalhe.	87
Figura 5.39. Valor do fator de intensidade de tensões normalizado K/K0 para os diferentes níveis de discretização ensaiadas	87
Figura 5.40. Fator intensidade de tensões para o caso analisado segundo tabela proposta por Rooke e Cartwright, 1976.	88
Figura 5.41. Leis constitutivas elementares das barras normais para as diferentes discretizações utilizadas.....	88
Figura 5.42. Variação da energia específica de fratura Gf com a tensão remota aplicada para o caso de uma placa de dimensões finitas com uma trinca central submetida à tensão prescrita.	89
Figura 5.43. Balanço energético durante o processo de ruptura de uma placa finita com trinca central com tensão prescrita, onde R é a energia dissipada na fratura (valores multiplicados por 75 para facilitar a visualização), U a energia elástica e K a energia cinética.	90
Figura 5.44. Resultados da análise de uma placa finita com trinca central aplicando deslocamentos prescritos nas bordas. (a) Fator de intensidade de tensões adimensionalizado em relação às tensões. (b) Balanço energético.	91
Figura 5.45. Configuração final do corpo de prova rompido. (a) Vista geral e (b) detalhe.....	92
Figura 6.1. Micro-estrutura de um ferro fundido nodular ferrítico [Metallographer's Guide: Practices and Procedures for Irons and Steels, 2002].	94
Figura 6.2. Superfície de fratura característica de um ferro fundido nodular ferrítico	95
Figura 6.3. Procedimento utilizado para introduzir os poros nos modelos em MED.....	96
Figura 6.4. Estudo das características da distribuição dos nódulos de um ferro fundido nodular. a) Distribuição de nódulos característica de um dos ferros fundidos analisados, b) Parâmetros verificados nas distribuições de nódulos, c) Determinação do numero de vizinhos mais próximos através da triangulação de Delaunay, d) Distribuição de nódulos gerada de forma automática com a rotina desenvolvida.....	97
Figura 6.5. Distribuição de nódulos gerada de forma automática (a), e sua correspondente representação nos modelos em MED (b).	97
Figura 6.6. Condições de contorno e dimensões do modelo em MED utilizado para o ajuste das propriedades a serem atribuídas às barras do modelo.	98
Figura 6.7. Determinação do modulo de Young a ser utilizado nas barras da matriz.	100
Figura 6.8. Curva do modelo em DEM ajustada com acurva real.....	100
Figura 6.9. Modelo típico de DEM com as condições de contorno utilizadas neste trabalho para a determinação do EVR.....	102
Figura 6.10. Curva tensão deformação média para o caso de 20 nódulos, (dez réplicas).	102
Figura 6.11. Energia elástica média (\bar{U}_L) no volume de controle em função do número de nódulos (N) analisado, (regimen linear).....	103
Figura 6.12. Energia elástica média (\bar{U}_{NL}) no volume de controle em função do número de nódulos (N) analisado, (regime não-linear).....	103
Figura 6.13. Energia elástica média (\bar{U}_{TM}) no volume de controle em função do número de nódulos (N) analisado, (regime não-linear).....	104

Figura 6.14. Energia de dano média (D_{NL}) no volume de controle em função do número de nódulos (N) analisado, (regime não-linear).....	105
Figura 6.15. Energia de dano média no volume de controle (D_{TM}) com o incremento do número de nódulos (N) para o ponto de tensão máxima.....	105
Figura 6.16. Valor médio da fração de volume de vazios em regime linear (f_L), com o incremento do volume de controle.....	106
Figura 6.17. Valor médio da fração de volume de vazios em regime não linear (f_{NL}), com o incremento do volume de controle.....	107
Figura 6.18. Valor médio da fração de volume de vazios no ponto de tensão máxima (f_{TM}), com o incremento do volume de controle(número de nódulos (N)).	107
Figura 6.19. Resposta tensão deformação das 40 réplicas analisadas a) Modelos em MED, b) Comparação da resposta dos modelos em MED com a resposta do material real.....	111
Figura 6.20. Ajuste das propriedades atribuídas à matriz dos modelos em MED.....	112
Figura 6.21. Superfície de fratura de um ferro fundido nodular ferrítico [Petry, 1999]......	113
Figura 6.22. Configuração deformada do modelo para o ponto de tensão máxima.....	114
Figura 6.23. Região em que ocorre a coalescência na curva tensão deformação do modelo	115
Figura 6.24. Taxa de variação da energia elástica dU/dt e da energia de dano dD/dt em relação à deformação	115
Figura 6.25.- Máximo global na resposta da energia elástica do modelo, tomado como critério de ruptura.	116
Figura 6.26. Evolução da fração de volume de vazios (f), com a deformação (ϵ_{22}).....	117
Figura 6.27. Deformação de coalescência obtidas para os 40 EVRs analisados.....	118
Figura 6.28. Evolução da fração de volume de vazios com a deformação das 40 réplicas analisadas	119
Figura 6.29. Deformação de ruptura obtida com o primeiro critério proposto.....	120
Figura 6.30. Deformação de ruptura, obtida com o primeiro critério proposto desconsiderando as replicas mal comportadas.....	121
Figura 6.31. Deformação de ruptura obtida com o segundo critério.....	122
Figura 6.32. Superposição da deformação de ruptura obtida pelos dois critérios propostos.....	122
Figura 6.33. Curva tensão deformação média das 40 replicas analisadas e resposta do material real.....	123
Figura 6.34. EVRs utilizados considerando periodicidade da micro-estrutura do material.....	125
Figura 6.35. Resposta tensão deformação do material real e os modelos em MED com e sem periodicidade da micro-estrutura.....	125
Figura 6.36. Evolução da fração de volume de vazios com a deformação.....	126
Figura 6.37. Variação da energia elástica (U) e a taxa de energia elástica (\dot{U}), com a deformação do modelo periódico de 7x7 células, e detalhes do modelo deformado em diferentes estágios do carregamento.	127
Figura 6.38. Comparação da evolução da energia elástica (U) e a taxa de energia elástica (\dot{U}), com a deformação, entre o EVR periódico de 7x7 células, e um EVR de 40 nódulos de distribuição aleatória.....	128
Figura 6.39. Comparação entre a resposta mecânica dos EVRs considerando o nódulo como vazio e como grafite e do material real.....	130
Figura 6.40. Diferença entre a tensão em valores percentuais em relação ao maior valor de tensão, dos EVRs considerando o nódulo como vazio e como grafite.....	130
Figura 6.41. Diferença entre as tensões em valores percentuais considerando o nódulo como vazio e como grafite durante o comportamento elástico dos modelos.....	131
Figura 6.42. Valores médios da evolução da fração de volume de vazios (f) considerando os nódulos como vazios e como grafite.....	132
Figura 6.43. Evolução da diferença nos valores de f obtidos, ao considerar os nódulos como vazios e como grafite, em relação á resposta tensão deformação.....	133
Figura 6.44. Configuração deformada do modelo considerando os nódulos como grafite (b) e como vazios (a).....	134
Figura 6.48. Distribuição de nódulos em 3D. a) distribuição gerada de forma automática, b) Correspondente representação no modelo em MED.....	136
Figura 6.49 Modelo utilizado para implementar as condições de contorno de triaxialidade constante a) Vista geral, b) Condições de contorno de carregamento axial.....	137
Figura 6.50. Relação entre os sistemas de coordenadas utilizados na implementação das condições de contorno de triaxialidade constante.....	137
Figura 6.51. Comportamento da relação ψ nos modelos analisados.....	139
Figura 6.52. Comportamento do parâmetro T para os casos analisados.....	140
Figura 6.53. Variação das tensões normais médias nas direções x, y, e o parâmetro T com a deformação na direção y, a) Evolução da tensão nas direções x e y e do parâmetro T com a deformação para $\psi=0,75$, b) Evolução da tensão nas direções x e y e da relação σ_x/σ_y com a deformação para $\psi=0,75$ c) Evolução da tensão nas direções x e y e do parâmetro T com a deformação para $\psi=0,55$, d) Evolução da tensão nas direções x e y e da relação σ_x/σ_y com a deformação para $\psi=0,55$	141

Figura 6.54. Figura esquemática da modificação a lei constitutiva da barra em função do nível de triaxialidade presente.	142
Figura 6.55. Resultados de cinco réplicas em 3D para a fração de volume de vazios de coalescência (f_c).	143

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 5.1 Propriedades do material utilizado	73
Tabela 5.2. Propriedades mecânicas atribuídas às barras do modelo.....	80
Tabela 5.3. Propriedades do material utilizadas nos exemplos estudados	85
Tabela 6.1. Propriedades mecânicas do ferro fundido utilizado como referência para o estudo [Berdin <i>et al.</i> , 2001]99	
Tabela 6.2. Dispersões obtidas a partir da resposta estável das variáveis de campo analisadas.....	108
Tabela 6.3. Parâmetros da lei constitutiva da barra antes e depois do ajuste.	111

1. INTRODUÇÃO.

A crescente aplicação de materiais compósitos nas diferentes áreas da engenharia faz com que os mesmos venham sendo amplamente estudados, visando a sua completa caracterização mecânica. Esses materiais são formados no mínimo por duas fases, que podem ser de natureza similar ou não, cuja mistura resulta em propriedades diferentes daquelas que caracterizam a cada uma das fases. Essa característica, se adequadamente utilizada, permite a fabricação de materiais para satisfazer necessidades tecnológicas específicas, muitas vezes com melhor viabilidade econômica que materiais tradicionais. A natureza heterogênea desse tipo de material impõe a necessidade de uma caracterização mecânica rigorosa, de modo a estabelecer seus limites de aplicação ou exploração. Neste sentido, o estudo sistemático dos fenômenos de fratura nas diferentes escalas estruturais (macro e mesoescala) permite uma caracterização mecânica mais completa dos materiais, de modo que se torna possível estudar a interação entre os constituintes, bem como, entender melhor os mecanismos de formação de defeitos sobre a ação de determinada sollicitação mecânica. Sem dúvida, o domínio destes aspectos contribui com o projeto ótimo de estruturas segundo as exigências de serviço, além de permitir a elaboração de estratégias de manutenção e exploração mais eficientes e confiáveis.

Sabe-se que as condições de iniciação e propagação instável de defeitos macroscópicos dependem de processos de iniciação e propagação de defeitos ou fissuras que ocorrem em escalas estruturais inferiores (mesoescala). O estudo experimental destes processos de fratura ao nível da mesoescala requer a aplicação de técnicas experimentais altamente sofisticadas, o que limita sua disponibilidade a grandes centros de pesquisa. Neste contexto, a modelagem computacional se apresenta como uma alternativa mais acessível, que quando utilizada em conjunto com dados obtidos de experimentos macroscópicos, podem permitir um conhecimento mais amplo sobre os materiais compósitos.

O Método dos Elementos Discretos (MED) constitui uma ferramenta computacional de grande potencial na modelagem numérica de fenômenos de fratura. O mesmo considera o meio sólido como um conjunto de massas com distribuição espacial uniforme, interconectadas entre si por um sistema de barras de rigidez equivalente ao contínuo que se quer modelar. Se em alguma região do modelo as tensões ou deformações ultrapassarem os limites impostos pela relação constitutiva da barra, aquelas que estiverem dentro desta região rompem-se, originando um defeito local que eventualmente poderá propagar.

OBJETIVOS DO TRABALHO

O objetivo principal deste trabalho consiste no desenvolvimento de estratégias para o estudo de micromecanismos de fratura em materiais compósitos particulados de matriz metálica utilizando o método dos elementos discretos. O mesmo será atingido completando os seguintes objetivos específicos:

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Implementar ferramentas dentro do método dos elementos discretos que permitam a utilização do mesmo no estudo da micro-mecânica de materiais compósitos, entre elas:

- a) Implementar uma metodologia para a obtenção dos resultados do MED em termos de tensores de tensão e deformação.
- b) Modificar a lei constitutiva da barra de maneira que permita a modelagem de comportamento macroscópico não linear acentuado.
- c) Implementar uma metodologia que permita a verificação de um parâmetro de dano micro-mecânico e estabelecer critérios de determinação de valores críticos do mesmo assim como sua evolução.
- d) Obtenção de um elemento de volume representativo em duas dimensões, sob o qual serão realizados os estudos micro-mecânicos pertinentes.
- e) Aplicar as implementações realizadas ao estudo em duas dimensões da evolução do dano de um material compósito.
- f) Verificar a possibilidade de estender o estudo a três dimensões.

O trabalho desenvolvido é apresentado conforme a seguinte estrutura. No capítulo dois são apresentados os fundamentos teóricos considerando-se aspectos relacionados com temas abordados no trabalho. No capítulo três é realizada uma revisão bibliográfica a fim de verificar o estado da arte quanto aos aspectos relacionados com o estudo realizado. Logo após, no capítulo quatro é apresentado o método numérico utilizado (Método dos elementos discretos (MED)) enquanto que no capítulo cinco são mostradas as implementações realizadas no MED, visando criar as ferramentas necessárias para o estudo a ser realizado. Para cada uma das implementações foram realizados exemplos de verificação com o objetivo de validá-las e definir critérios em relação à utilização de parâmetros do MED. No capítulo seis são aplicadas as ferramentas implementadas na formulação em MED ao estudo micro-mecânico de falha de um ferro fundido nodular ferrítico. A seguir no capítulo sete são apresentadas as conclusões do trabalho e, finalmente no capítulo oito são realizadas as sugestões para trabalhos futuros.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS.

O estudo realizado envolve conceitos de mecânica da fratura na macro e mesoescala, bem como modelagem computacional de materiais heterogêneos (compósitos). O presente capítulo pretende colocar a disposição do leitor as bases teóricas pertinentes aos conceitos envolvidos no estudo, começando pela mecânica da fratura com seus parâmetros macroscópicos e suas características. Logo é realizado um apanhado das particularidades do tratamento computacional de materiais heterogêneos e por último são revisados os conceitos de mecânica do dano, particularmente, da fratura dúctil.

2.1. Aspectos Básicos da Mecânica da Fratura.

O estado de tensões de qualquer ponto de uma estrutura sob um sistema de cargas atuantes, está caracterizado por um tensor de tensões que contem informação da tensão em todas as direções. Utilizando alguma das teorias de resistência clássicas, se obtém a partir do tensor de tensões um único valor de comparação que chama-se tensão de cálculo ($\sigma_{calc.}$). Se for utilizada a teoria de resistência de von Mises, por exemplo, a tensão de cálculo será igual à tensão equivalente de von Mises σ_{vm} . Na prática do projeto convencional, o valor de tensão calculado (σ_{vm} , por exemplo) é comparado com uma tensão de referência segundo a relação estabelecida pela eq.(2.1). A tensão de referência diz respeito à resistência mecânica do material de modo que, para o projeto de componentes mecânicos considerando o término do comportameto elástico, se utiliza a tensão de escoamento obtida de um ensaio de tração uniaxial.

A tensão calculada é função da geometria e condições de contorno aplicadas (F), e a tensão de referência vai depender do material e das condições em que foi realizado o ensaio, temperatura (T^*) e velocidade da carga aplicada (\dot{F}). Neste caso se supõe a estrutura livre de defeitos e descontinuidades e não se considera o efeito dos mesmos.

$$\sigma_{calc.}(F, Geometria) = \sigma_{material}(material, T^*, \dot{F}) \quad (2.1)$$

Considere-se agora a placa quadrada com um orifício elíptico central tracionada pelos extremos superior e inferior mostrado na Figura 2.1. A presença desse orifício influencia na distribuição de tensões no componente. Para este caso, e fazendo o uso da teoria da elasticidade, Inglis [1913] propôs que a variação da tensão na direção da tração aplicada (σ_{aplic}) sob o eixo x é calculada pela eq.(2.2). Segundo a qual se pode verificar que quando o semi-eixo menor da elipse tende a zero ($b \rightarrow 0$), a tensão no extremo do semi-eixo “a”, $\sigma_y(a)$ vai ser infinita, ou seja, vai

resultar numa singularidade. Estas elipses de semi-eixo menor tendendo a zero podem ser assemelhadas aos defeitos e falhas que em micro, meso, ou macro escala se apresentam no material [Kanninen e Popelar, 1985; J.F. Knott, 1993].

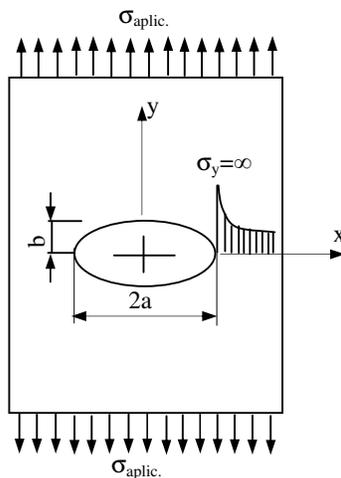


Figura 2.1. Caso considerado por Inglis para sua dedução [Kaninen e Popelar, 1985].

$$\sigma(a) = \sigma \left(1 + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (2.2)$$

Na medida em que vão sendo desenvolvidos os métodos de detecção das trincas, tem-se comprovado que elas estão sempre presentes em qualquer estrutura, podendo ser inerentes ao material ou ao processo de fabricação, ou então surgido durante o desempenho em serviço da estrutura.

Conforme sugere a eq.(2.2), a tensão calculada na ponta de uma trinca teórica ($a/b \rightarrow \infty$) será infinita independentemente do valor da carga remota aplicada, o qual faz com que nunca seja satisfeita a relação estabelecida pela eq.(2.1) na qual se baseia o projeto convencional. Porém, sabe-se que as estruturas reais, ainda na presença de defeitos, resistem com segurança a valores de cargas finitos. Isso indica a necessidade de procurar critérios de projeto, aplicáveis a estruturas com defeitos macroscópicos.

Seguindo o mesmo princípio da eq.(2.1), a verificação de projeto considerando os critérios da mecânica da fratura está representada pela equação eq.(2.3), onde o parâmetro calculado $X_{cal.}$ deve ser menor que $X_{mat.}$ para garantir a integridade da estrutura trincada. Neste caso o parâmetro calculado $X_{cal.}$ é função do tamanho de trinca (a), geometria da estrutura e condições de contorno (F). Por outro lado, o parâmetro que caracteriza o material $X_{mat.}$ é função

da temperatura (T), velocidade de aplicação da carga (\dot{F}), e espessura analisada (B) [Kaninnen e Popelar, 1985].

$$X_{cal.}(F, Geometria, a) = X_{mat.}(B, T^*, \dot{F}) \quad (2.3)$$

Em ambas as equações (2.1) e (2.3), a variável correspondente ao material não é função da geometria do problema, e pode ser obtida a partir de um ensaio num corpo de prova simples para o caso de $\sigma_{mat.}$ ou de um ensaio em corpos de prova compacto de tração ou de flexão em três pontos para o caso de $X_{mat.}$ conforme os procedimentos descritos nas normas [ASM Handbook, 1985].

Segundo as formulações utilizadas para a obtenção do parâmetro $X_{cal.}$, a mecânica da fratura pode ser dividida em linear elástica ou não linear. Como parâmetros da mecânica da fratura linear elástica podem-se mencionar:

- A energia específica de fratura (G) ou taxa de libertação de energia, que foi primeiramente proposta por Griffith, 1920 e se considera um parâmetro global porque envolve o balanço energético da estrutura como um todo;
- O fator de intensidade de tensão K [Irwin, 1957], que se considera um parâmetro local, pois somente considera a distribuição de tensões no entorno da ponta da trinca.
- Como representante da mecânica da fratura não linear, podem ser mencionados a integral J [Rice, 1968], que se considera como parâmetro global que envolve também o balanço energético da estrutura em análise e o Crack Opening Displacement (COD), parâmetro introduzido por Wells em, 1961.

São apresentados a seguir os fundamentos teóricos correspondentes aos parâmetros da mecânica da fratura linear elástica. Para obter informação referente aos parâmetros da mecânica da fratura não linear recomenda-se consultar algum texto clássico de mecânica da fratura, por exemplo, Anderson, 1995.

2.1.1. Critério Energético de Griffith.

Os primeiros passos dentro da mecânica da fratura foram dados por Griffith, 1920. Intrigado com a divergência existente entre a resistência teórica e a resistência real da maioria dos sólidos cristalinos, Griffith realizou uma série de ensaios com fibras de vidro de diferentes espessuras obtendo os resultados ilustrados na Figura 2.2

Pode-se verificar que quanto menor a espessura utilizada, a resistência obtida aproxima-se da resistência teórica do vidro, enquanto que para espessuras maiores os valores de resistência apresentados aproximam-se com a resistência convencional do vidro.

Estes resultados levaram Griffith a concluir que a discrepância entre a resistência real e a teórica dos sólidos cristalinos se deve à presença de defeitos ou trincas nos mesmos. Quanto maior o tamanho, maior a probabilidade de encontrar defeitos, o que poderia ser interpretado a nível global como a probabilidade da existência de mais e maiores defeitos.

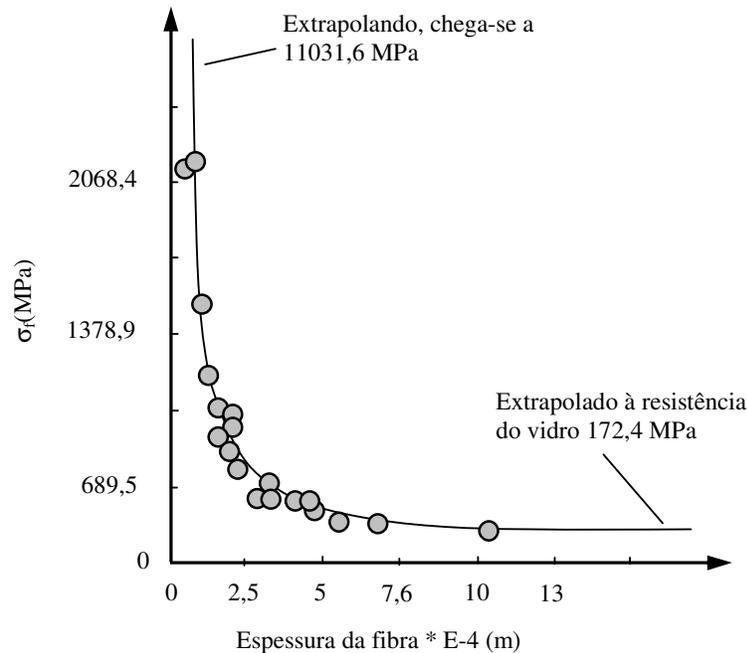


Figura 2.2. Experiência realizada por Griffith com as fibras de vidro [Kaninen e Popelar, 1985].

Para fundamentar a hipótese anterior, Griffith propõe o balanço energético representado pela eq.(2.4), a qual estabelece que a condição crítica para a propagação da trinca é que a variação da energia potencial experimentada pelo sistema seja igual à energia necessária para formar uma superfície (fratura ou trinca). Esta última, considerada por unidade de área gerada, é uma propriedade do material. Considera-se para a análise que as forças de inércia produto da aplicação das cargas sejam desprezíveis.

$$\frac{dW}{dA} - \frac{dU}{dA} = \gamma \quad (2.4)$$

Onde:

W : Potencial das forças externas aplicadas sobre o corpo.

U : Energia de deformação interna.

γ : Energia de superfície do material.

A : Área de superfície da trinca formada. Para uma placa de espessura B com uma trinca interna de comprimento $2a$ resulta $A = 4Ba$.

Na realização da análise, Griffith se baseia no problema apresentado na Figura 2.3, o qual consiste numa placa de espessura B e dimensões de lado muito maiores em relação a dimensão da trinca central. Nos extremos da placa é aplicada uma tensão uniforme e o sistema de coordenadas está localizado no centro da trinca. Pelas características do caso tomado como referência para a análise, o mesmo pode ser considerado em estado plano de tensões.

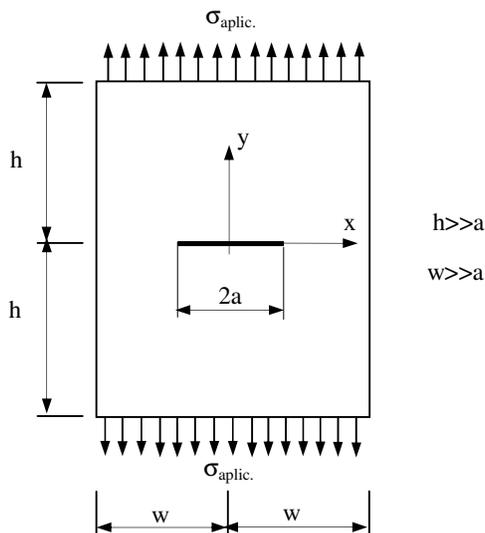


Figura 2.3 Placa de dimensões infinitas utilizada pelo Griffith.

Considerando o teorema de Clapeyron, o potencial do trabalho externo (W) pode ser considerado como duas vezes a energia de deformação elástica, com o qual a eq.(2.4) pode ser escrita como mostra a eq.(2.5) [Kaninen e Popelar, 1985].

$$\frac{dW}{dA} - \frac{dU}{dA} = \frac{2U}{dA} - \frac{dU}{dA} = \frac{dU}{dA} = \gamma \quad (2.5)$$

Por outro lado, utilizando a solução de Westergaard para o caso analisado, Griffith obtém que a abertura da face da trinca é calculada pela eq.(2.6).

$$v = \frac{2\sigma}{E} \cdot (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

Onde:

v : deslocamento na direção y da face da trinca;

σ : Tensão remota aplicada;

a : comprimento da trinca;

E : Módulo de elasticidade.

Das considerações anteriores, é possível escrever a eq.(2.7).

$$W - U = 2U - U = 4B \int_0^a \frac{1}{2} \sigma \cdot v(x) dx = \frac{\pi a^2 \sigma^2 B}{E} \quad (2.7)$$

Aplicando a equação eq.(2.5), e considerando $dA=4B \cdot da$, é obtida a relação representada pela eq.(2.8):

$$\frac{d(W - U)}{dA} = \frac{a\pi\sigma^2}{2E} = \gamma \quad (2.8)$$

De onde se deduz a eq.(2.9):

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{\gamma 2E}{\pi a}} \quad (2.9)$$

Onde:

σ_f = é a tensão aplicada que provoca a ruptura da placa (Figura 2.3).

A equação eq.(2.9) justifica a hipótese do Griffith, de que quanto maior o tamanho da trinca a tensão de fratura é menor. Para o estado plano de deformações a solução para σ_f é obtida substituindo E por $E/(1-\nu^2)$.

2.1.2. Teoria de Griffith Modificada.

O ponto mais criticado da teoria de Griffith é que a mesma foi proposta para materiais idealmente frágeis, (vidro), o que restringe sua aplicação. Uma solução para esta limitação é proposta por Orowan, 1950, [apud Kanninen e Popelar, 1985], a qual admite que a energia liberada na propagação da fissura é consumida não só em formação de superfícies de fratura, mas também na deformação plástica associada ao processo de fratura.

Com isto, a eq.(2.9) é modificada resultando na eq.(2.10).

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{(2\gamma + \gamma_p)E}{\pi a}} = \sqrt{\frac{G_c E}{\pi a}} \quad (2.10)$$

Onde:

γ_p = energia de deformação plástica associada ao processo de fratura,

Esta proposta também modifica a equação (2.5) obtendo-se a eq.(2.11).

$$G_c = \frac{dW}{dA} - \frac{dU}{dA} \quad (2.11)$$

Onde:

$G_c = (2\gamma + \gamma_p)$, é chamada de taxa de liberação de energia crítica, e recebeu o símbolo de G_c em homenagem a Griffith. A eq.(2.10) é conhecida como teoria de Griffith modificada.

Orowam e Irwin, 1957, estabeleceram que, desde que as teorias da elasticidade linear possam ser utilizadas, a resistência à fratura de um material está dada pelo valor crítico de G , (G_c), e o G pode ser calculado ou medido experimentalmente utilizando a relação mostrada pela eq.(2.12)

$$G = \frac{dW}{da} - \frac{dU}{da} = \frac{d(W - U)}{da} \quad (2.12)$$

2.1.3. Fator de Intensidade de Tensões

O fator de intensidade de tensão K é mais um parâmetro fractomecânico que determina as condições de propagação da trinca em função da intensidade das tensões na ponta da mesma, sendo considerado um parâmetro local. Foi introduzido por Irwin [1957] e está baseado na solução elástica de Westergaard na vizinhança de uma fissura [Kaninen e Popelar, 1985, Moura Branco, 1986]. Irwin estabeleceu três modos básicos de fratura, (I, II e III), os quais são ilustrados na Figura 2.4. De maneira geral o modo que mais se apresenta na prática e para o qual o K é menor é o modo I, pelo que toda a formulação a seguir mostrada é deduzida considerando este modo de fratura.

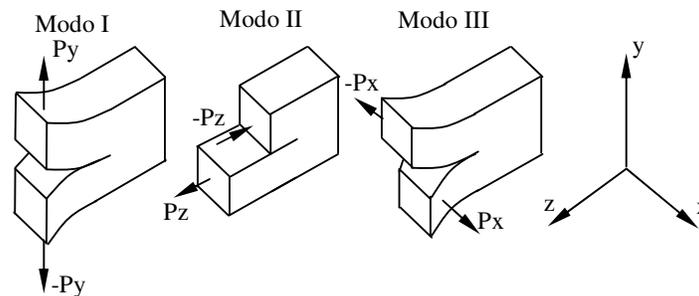


Figura 2.4. Modos de fratura considerados por Irwin.

A descrição da obtenção do fator de intensidade de tensão será realizada considerando um sistema de coordenadas polares com a origem na ponta da trinca como mostra a Figura 2.5

Irwin estabeleceu que, a distribuição da tensão na ponta da trinca para o modo I está determinada pela eq.(2.13).

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2r}} \cdot f(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n}{\sqrt{2}} \cdot r^{\frac{(n-1)}{2}} \cdot f(\theta) \quad (2.13)$$

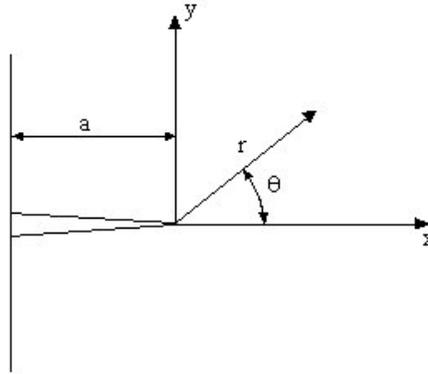


Figura 2.5. Sistema de coordenadas utilizado na dedução do fator de intensidade de tensão (K_I).

Observa-se que a partir do segundo termo o raio está elevado ao quadrado, o que indica que para valores de r pequenos (próximos da trinca), o primeiro termo da expansão em série da eq.(2.13) predomina sobre os outros termos, e os mesmos podem ser desconsiderados. Já para valores de r distantes da ponta da trinca, os outros termos começam ter maior significância e a tensão começa aproximar-se da tensão remota aplicada. Nesta eq.(2.13) pode-se observar que a função $f(\theta)$ depende do ângulo e K_I funciona como um fator de escala.

Considerando a afirmação anterior, nas proximidades da trinca a eq.(2.13) pode ser escrita como mostra a eq.(2.14).

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2r}} f(\theta) \quad (2.14)$$

Em relação à eq.(2.14) é importante fazer algumas observações:

Para $\theta=0$, a função $f(\theta)=1$ e a eq.(2.14) pode ser escrita como $\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2r}}$

Analisando esta eq.(2.14) pode-se concluir que a distribuição de tensões nas proximidades da ponta da trinca independe das condições de contorno, e da geometria da estrutura analisada o qual permite comparar estados tensionais nas proximidades de uma trinca em estruturas de geometria e sob condições de contorno, diferentes. Este aspecto é de grande importância, uma vez que o estudo de propagação de trincas em corpos de provas realizados em laboratório, permite a obtenção do valor de K_I crítico (K_{IC}) que caracteriza o material (o X_{mat} da eq. 2.3) e o mesmo pode ser utilizado como referência para comparar com o K_{Icalc} (o X_{calc} da eq. 2.3) calculado para uma trinca presente numa estrutura real deste mesmo material. Se $K_{Icalc} > K_{IC}$, então a trinca da estrutura real vai estar numa situação crítica. Na Figura 2.6 se mostra de forma esquemática esta analogia.

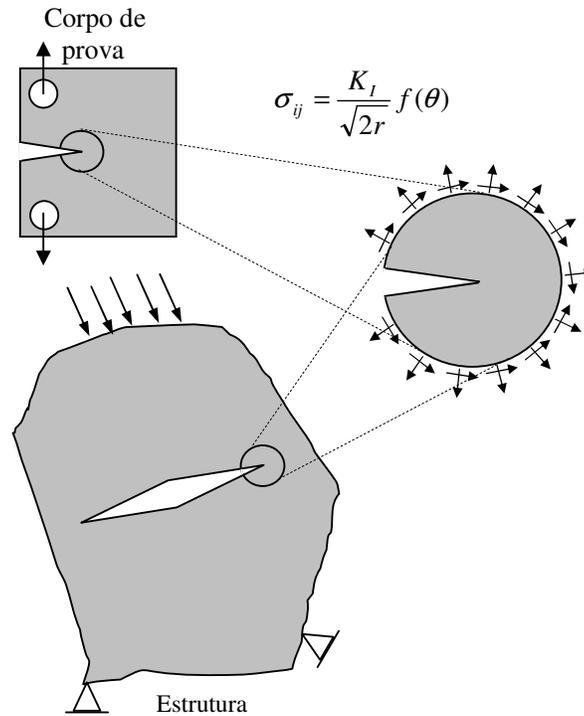


Figura 2.6. Figura esquemática mostrando a equivalência entre o campo de tensões na ponta da trinca entre uma estrutura real e um corpo de prova. [Aderson, 1995].

Existem vários procedimentos, tanto numéricos como analíticos, para determinar o fator de intensidade de tensões K_I , podendo ser encontrada uma ótima revisão no trabalho de Aliabadi e Rook, 1991. No entanto, na maior parte das vezes é possível escrever o K_I como propôs Irwin [1957] na relação apresentada pela eq.(2.15).

$$K_I = \varphi \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi a} \quad (2.15)$$

Onde:

σ = Tensão existente na estrutura no local da trinca sem considerar a presença da mesma;

φ = Coeficiente dependente da geometria do problema analisado;

a = Comprimento da trinca analisada.

É possível estabelecer a relação entre o G e o K_I . A mesma é muito importante, uma vez que através dela se evidencia a relação entre aspectos mecânicos e geométricos (K_I), com aspectos relacionados às propriedades do material (G_c) implícitos nos problemas de mecânica da fratura. A eq.(2.16) representa a relação entre estas duas variáveis fractomecânicas quando se tem somente o modo I de fratura (conforme figura 2.4).

$$K_I = \sqrt{G \cdot E'} \quad (2.16)$$

Sendo que:

$E' = E$ para estado plano de tensões (EPT);

$E' = E/(1-\nu^2)$ para estado plano de deformações (EPD).

A dedução da relação entre G e K_I pode ser encontrada em qualquer livro básico de mecânica da fratura, por exemplo Moura Branco, 1986, e se apresenta de forma resumida no quadro a seguir mostrado.

Teoria de Griffith	Griffith modificada
$\sigma_f = \sqrt{\frac{\gamma 2E}{\pi a}}$	$\sigma_f = \sqrt{\frac{E(2\gamma + \gamma_p)}{\pi a}} = \sqrt{\frac{EG_c}{\pi a}} \implies \sigma_f^2 \pi a = EG_c \implies \sigma_f^2 = \frac{EG_c}{\pi a}$
Irwin	
$K_I = \varphi \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi a} \implies \sigma = \frac{K_I}{\varphi \sqrt{\pi a}} \implies \sigma^2 = \frac{K_I^2}{\varphi^2 \pi a}$	
Considerando que $\varphi=1$ e considerando $\sigma=\sigma_f$ se obtém a relação representada pela eq.(2.16)	
$\frac{K_I^2}{\varphi^2 \pi a} = \frac{EG_c}{\pi a} \implies K_I^2 = EG_c$	

Como comentado anteriormente, a tensão na ponta da trinca tem um valor finito devido ao efeito da plastificação. Entretanto, surgem tensões acima da tensão de escoamento do material, o que pressupõe um comportamento local não linear que deixa de ser compatível com a elasticidade linear sobre a qual está baseada a formulação do fator de intensidade de tensões e o G_c . Se a região plastificada for suficientemente pequena em relação à região onde é válida a eq.(2.14), então pode ser aplicada a mecânica linear elástica da fratura. Caso contrário, devem ser utilizados outros parâmetros fractomecânicos como a Integral J e o COD (Crack Opening Displacement), os quais não serão apresentados neste trabalho; porém informação a esse respeito pode ser encontrada em Anderson, 1995 ou Kaninen e Popelar, 1985.

A relação entre os parâmetros apresentados da mecânica da fratura linear elástica, é utilizada para estabelecer o critério de falha dos elementos nos modelos desenvolvidos pelo método dos elementos discretos (MED), como será descrito mais adiante quando for apresentado o método.

2.2. Materiais Compósitos e Tratamento Computacional de Materiais Micro-heterogêneos.

Os materiais compósitos são cada vez mais utilizados nas diferentes áreas da engenharia, principalmente devido à diversidade de combinações de propriedades mecânicas, físicas e tecnológicas que podem ser alcançadas com eles. Entretanto, essa crescente aplicação

em engenharia vem exigindo uma mais rigorosa caracterização mecânica, de modo a estabelecer limites de aplicação ou exploração destes materiais.

Historicamente, a caracterização da resposta mecânica de um material esteve sustentada na base fenomenológica, com a realização de numerosos testes experimentais, porém, em determinadas circunstâncias tais testes não permitem uma caracterização mecânica completa. Sabe-se, por exemplo, que o comportamento macroscópico de um material está determinado por fenômenos que acontecem em escalas microestruturais, nas quais, se faz extremamente difícil a realização de uma avaliação experimental adequada.

Neste sentido, a experimentação computacional apresenta-se como uma ferramenta de muita utilidade, permitindo não apenas a análise mecânica de geometrias complexas, mas também, a simulação de ensaios sob as mais diversas condições. O pesquisador passa a ter uma quantidade considerável de resultados que, em conjunto com testes experimentais macroscópicos complementares, contribuem para uma completa caracterização da resposta mecânica do material.

Nesta seção serão tratados temas referentes à definição e classificação dos materiais compósitos, bem como aspectos relacionados com o tratamento computacional dos mesmos.

2.2.1. Materiais Compósitos.

Sucintamente, materiais compósitos são aqueles que apresentam heterogeneidades em escalas estruturais maiores que a escala atômica, mas podem ser tratados como homogêneos na macro-escala ou em alguma escala estrutural intermediária (mesoescala) [Milton, 2002]. Essa definição sugere que a maior parte dos materiais utilizados na engenharia podem ser considerados como materiais compósitos, pois a maioria deles apresentam heterogeneidades na mesoescala. Ao longo deste trabalho será utilizado o termo mesoescala de maneira geral para referir-se a escalas estruturais abaixo da escala macroscópica.

Os materiais compósitos são constituídos por dois ou mais materiais (fases), que podem ser da mesma natureza ou não, cuja combinação resulta num agregado de propriedades equivalentes diferente das propriedades dos constituintes. As propriedades, a forma e a disposição espacial dos constituintes podem ser selecionadas visando à obtenção da combinação ótima de propriedades mecânicas, físicas e tecnológicas, ou seja, um material sob medida. Em relação a isto, e especificamente tratando da resposta mecânica, pode-se fazer alusão ao exemplo ilustrado na Figura 2.7, que está relacionado às considerações realizadas por Voigt e Reuss, ao

estabelecer os limites em que podem ser encontradas as propriedades equivalentes de uma determinada mistura de materiais.

Nesta Figura 2.7, se apresenta um material compósito constituído por outros dois de rigidez diferente, dispostos em forma de laminas paralelas entre si. Considerando uma determinada fração de volume dos constituintes, quando a carga aplicada atua paralela às lâminas, as propriedades equivalentes obtidas são maiores que quando as cargas aplicadas são perpendiculares às lâminas. As considerações realizadas por estes dois pesquisadores são desenvolvidas com mais detalhe no item 2.2.3.

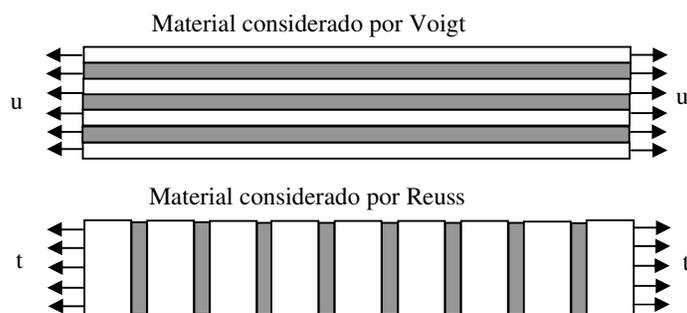


Figura 2.7. Representação esquemática das considerações realizadas por Voigt e Reuss para estabelecer os limites das propriedades equivalentes de compostos, utilizando a análise numa dimensão, [Zodhi e Wriggers, 2005].

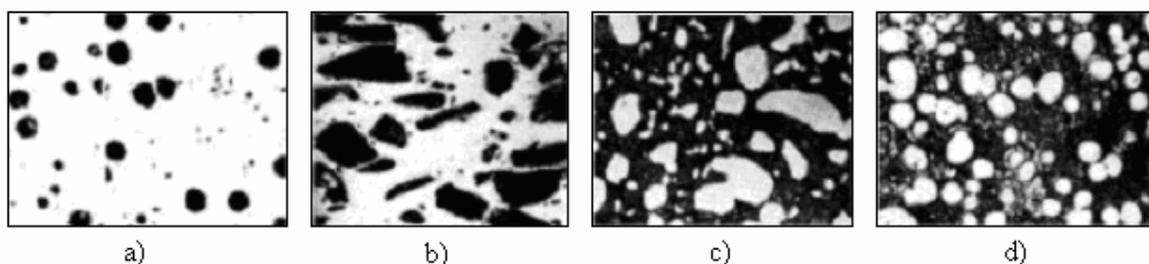


Figura 2.8. Exemplos de materiais compostos de micro-estrutura aleatória. a) ferro fundido nodular, b) matriz de Alumínio com partículas de carbeto de silício, c) Liga alumínio-titânio d) Matriz de prata com partículas de ouro [Zohdi, 2002].

De maneira geral, nos materiais compostos um dos constituintes funciona como matriz, no qual os outros são introduzidos de forma dispersa. Considerando a forma do componente disperso, os materiais compostos podem ser classificados em particulados, fibrosos, laminados, entre outros. Se for considerada a forma como está distribuído na matriz o componente disperso, os materiais compostos se classificam em aleatórios ou periódicos. A grande maioria dos materiais compostos utilizados na prática constitui-se de partículas dispersas distribuídas de forma aleatória (Figura 2.8). Já a utilização dos materiais compostos periódicos é mais

específica, e como indica seu nome, as partículas dispersas estão distribuídas de maneira ordenada, seguindo um padrão periódico.

A Figura 2.9 mostra de maneira esquemática a aparência de um material compósito periódico.

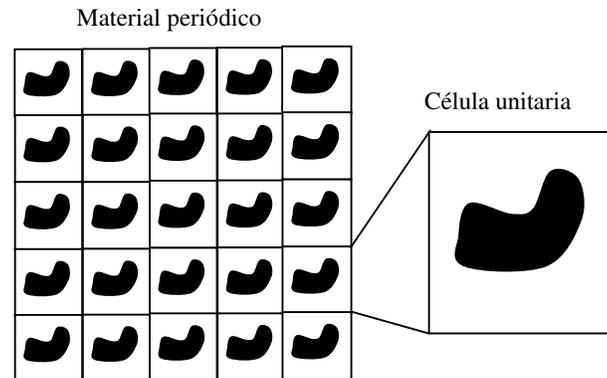


Figura 2.9. Esboço de um material compósito periódico.

2.2.2. Tratamento Computacional de Materiais Micro-heterogêneos.

Para a simulação numérica em escala real de uma estrutura de material micro-heterogêneo incorporando todos os detalhes da microestrutura, seria necessário um tamanho de elemento tão pequeno quanto a menor das micro-heterogeneidades que constituem o material, o que demandaria um esforço computacional, acima das possibilidades reais atuais.

Para solucionar este problema, são utilizadas propriedades efetivas ou homogeneizadas que consideram o efeito das propriedades dos micro-constituintes, permitindo a análise computacional de estruturas de materiais micro-heterogêneos em escala real, sem considerar os detalhes da micro-estrutura. Dessa forma, podem-se utilizar tamanhos de malha que requeiram um trabalho computacional dentro das possibilidades disponíveis [Zohdi, 2002]. A seguir nesta seção, serão abordados aspectos relacionados à obtenção de propriedades efetivas tais como elemento de volume representativo (EVR) e homogeneização.

2.2.2.1. Elemento de Volume Representativo.

As propriedades efetivas ou homogeneizadas utilizadas na análise computacional de estruturas cujo material é de micro-estrutura heterogênea, são obtidas, relacionando os valores médios de variáveis de campo dentro de um elemento de volume representativo da micro-estrutura. Quando se trata de micro-estruturas heterogêneas periódicas, o EVR estaria constituído pela menor célula unitária que as caracteriza (Figura 2.9). Caso o material analisado possua

micro-estrutura heterogênea de distribuição aleatória, o EVR deve conter suficiente informação dos constituintes, visando garantir a homogeneidade estatística [Ostoja-Starzewski, 2006].

Os critérios de determinação do EVR mais utilizados na obtenção de propriedades equivalentes, de micro-estruturas heterogêneas de distribuição aleatória, são os propostos por Hill e Hashin [Hollister e Kikuchi, 1997].

Em 1963, Hill define o elemento de volume representativo como uma amostra de material que deve:

- a) Conter todos os constituintes que caracterizam a micro-estrutura do material heterogêneo em estudo,
- b) Conter um número suficiente desses constituintes para que as propriedades médias correspondentes ao EVR independam das condições de contorno aplicadas, desde que tais condições sejam macroscopicamente uniformes, ou seja, os valores oscilam em torno de um valor médio com um desvio padrão pequeno, e o mesmo passa ser insignificante a pouca distância da superfície [Aidun et al, 1999].

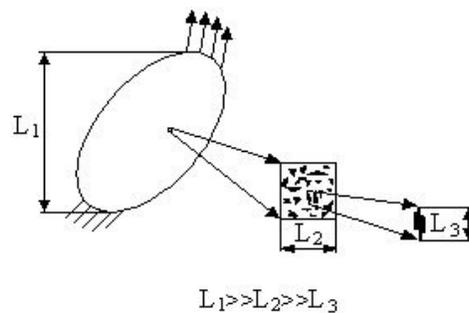


Figura 2.10. Esquema ilustrativo do tamanho do EVR.

O critério proposto por Hill, 1963, para a determinação do EVR é chamado de condição energética de Hill, e está representada pela (2.17).

$$\langle \sigma : \varepsilon \rangle_{L_2} = \langle \sigma \rangle_{L_2} : \langle \varepsilon \rangle_{L_2} \quad (2.17)$$

A relação representada pela eq.(2.17) se apoia na Figura 2.10 e tem implícita as duas considerações anteriores, uma vez que a mesma só se satisfaz para tamanhos de volume de controle grandes e pequenas flutuações nos campos de tensão e deformação no domínio analisado.

Hashin em 1983 estabelece que o EVR deve ser grande em comparação com a dimensão e espaçamento da microestrutura típica presente dentro do mesmo. Além disso, estabelece o conceito de homogeneidade estatística de materiais heterogêneos e a necessidade de sua existência para a determinação do elemento de volume representativo. Define-se micro-estrutura estatisticamente homogênea, aquela em que suas características microestruturais são as mesmas

em qualquer elemento de volume analisado, independentemente da sua localização. Apoiando-se no esquema da Figura 2.11, se existir homogeneidade estatística, as características da microestrutura dos volumes V_1 , V_2 e V_3 são iguais [Hollister e Kikuchi, 1997].

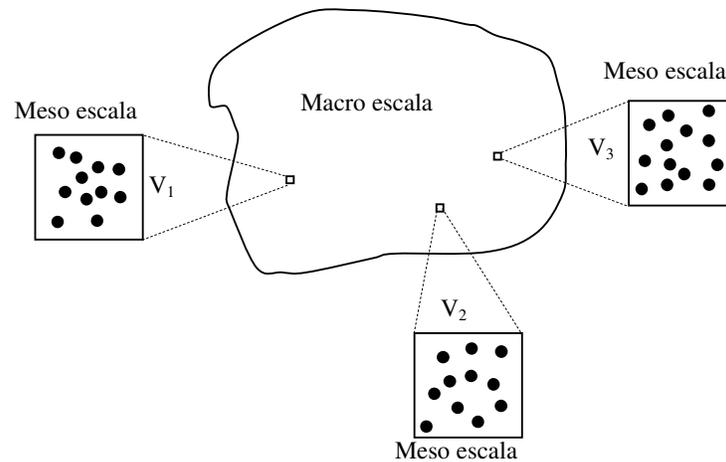


Figura 2.11. Desenho esquemático para explicar a homogeneidade estatística.

As duas definições anteriores sugerem que o EVR deve possuir representatividade suficiente dos microconstituintes do material analisado. Portanto, deve ser grande em comparação com o tamanho característico de partícula presente na microestrutura, mas ao mesmo tempo deve ser pequeno em comparação com as dimensões das estruturas mecânicas no nível macroscópico, pois dentro do mesmo serão considerados os detalhes da microestrutura ao ser realizada a análise computacional. Em resumo, deve-se satisfazer à relação $L_1 \gg L_2 \gg L_3$ (Figura 2.10).

Apesar de existirem controvérsias quanto à utilização de um ou outro critério [Aidum *et al.*, 1999], ambos têm sido utilizados com sucesso [Terada *et al.*, 2000 e Kanit, 2003], verificando-se que o tamanho do EVR está influenciado por fatores tais como grau de dispersão dos microconstituintes, fração de volume dos mesmos, contraste nas suas propriedades mecânicas, propriedade que se quer homogeneizar entre outros.

Considerando o parâmetro adimensional δ_c que resulta da relação entre a dimensão do volume analisado L_2 e a dimensão característica do micro-constituente L_3 ((2.18)), Ostoja-Starzewski, 2006, sugere que o δ_c do EVR pode se encontrar entre 10 e 100, dependendo das características do problema estudado.

$$\delta_c = \frac{L_2}{L_3} \quad (2.18)$$

Ainda que dentro do EVR sejam considerados os detalhes da micro-estrutura, o trabalho computacional envolvido é consideravelmente menor que se fosse realizada a mesma análise na estrutura em escala real.

A determinação do tamanho do EVR é realizada resolvendo problemas de valores de contorno, de amostras de material micro-heterogêneo nas quais se verifica a resposta do valor médio de variáveis de campo. Usualmente vai se incrementando a quantidade de micro-constituintes nas amostras analisadas, mantendo constantes suas frações de volume (Figura 2.12)

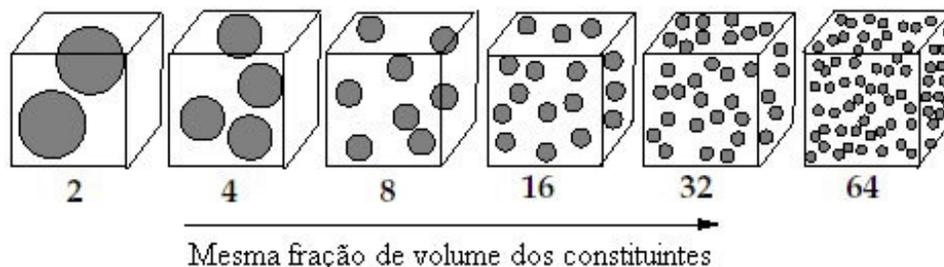


Figura 2.12. Seqüência de volumes de material numa análise de evr [Zohdi, 2002].

Segundo as definições anteriores, será considerada uma amostra representativa de material aquela em que as propriedades homogeneizadas independam das condições de contorno (Figura 2.13) ou então, aquela para a qual se verifique homogeneidade estatística (Figura 2.14).

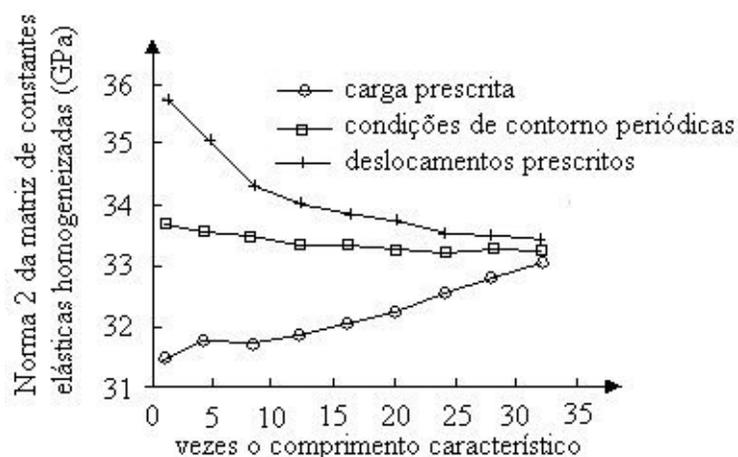


Figura 2.13. Verificação da independência das condições de contorno com o incremento do volume de controle encontrado por Terada *et al.*, 2000.

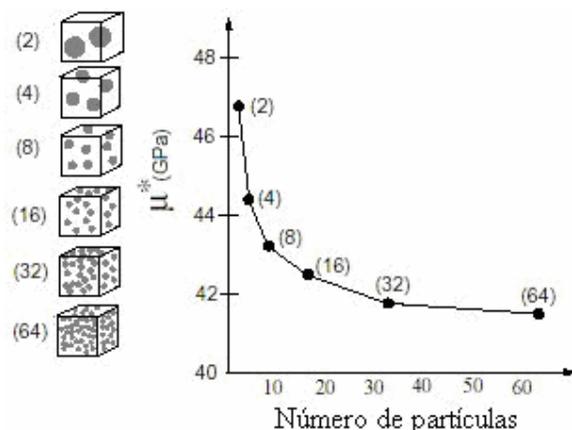


Figura 2.14. Convergência da resposta em termos do módulo de cisalhamento da amostra de material (μ^*), com o incremento do número de partículas [Zohdi, 2002].

Utilizando o critério de independência das condições de contorno proposto por Hill, Terada *et al.*, 2000, estuda o tamanho do EVR de um compósito de boro-silício como função da resposta de uma constante elástica obtida a partir dos valores médios de tensão e deformação. Os volumes de controle foram gerados pelo método de processamento de imagens a partir da estrutura real.

Analisando os resultados obtidos por Terada (Figura 2.13), pode-se observar que relativa independência das condições de contorno aplicadas é alcançada, para um tamanho de amostra aproximadamente 33 vezes maior do que o tamanho médio do micro-constituente.

De maneira similar ao procedimento seguido por Terada, Kanit *et al.*, 2003, realiza um estudo de homogeneização das propriedades de um material micro-heterogêneo gerado de maneira artificial pelo método de tecelagem de Voronoi [Nygårds, 2003]. Os resultados obtidos da propriedade homogeneizada (módulo volumétrico, k) em função do tamanho do volume de controle são apresentados na Figura 2.15.

Neste caso, se observa certa independência nas condições de contorno somente para um volume de controle aproximadamente oito mil vezes maior do que o volume da célula de Voronoi considerada. Apesar de, neste caso, terem sido comparados os volumes e não a dimensão da partícula em relação à dimensão do lado do volume de controle utilizado, como tinha sido realizado por Terada na Figura 2.13, é interessante observar na Figura 2.15 que tanto o critério de independência nas condições de contorno quanto o critério de homogeneidade estatística pode ser utilizado na determinação do EVR.

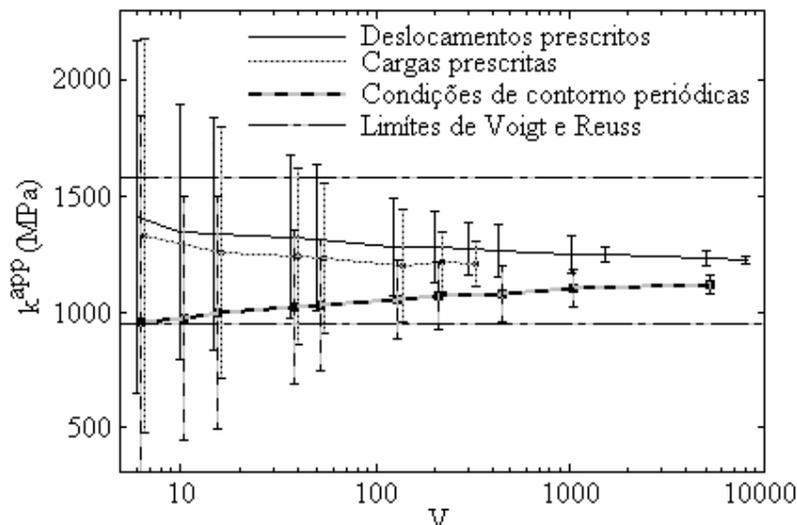


Figura 2.15. Verificação da independência, das condições de contorno aplicadas, no valor do módulo volumétrico (k^{pp}) obtido, com o incremento do volume de controle (V) [Kanit, 2003].

Cabe salientar que nos resultados apresentados por Kanit *et al.*, 2003 (Figura 2.15) existe incoerência com a teoria, uma vez que os limites de Voigt e Reuss são ultrapassados pelos resultados obtidos na determinação do EVR, em muitos dos tamanhos de amostras analisadas. Isto se mostra incoerente, pois os limites de Voigt e Reuss são os valores extremos dentro dos quais poderiam ser encontradas as propriedades de qualquer mistura de fases. Todo parece indicar que na análise realizada por Kanit *et al.*, 2003, em algum dos casos não foram consideradas as propriedades mecânicas de um dos constituintes.

Apesar de não poderem ser comparados os tamanhos de EVRs obtidos na Figura 2.13 e Figura 2.15, por não ter sido utilizadas a mesma referência dimensional, pode-se comentar que Terada analisou um material constituído somente por duas fases, sendo que uma delas funcionava como matriz. No caso de Kanit o material considerado estava constituído por múltiplas fases, e nenhuma funcionava como matriz. Estes fatos certamente levariam à obtenção de EVRs de tamanhos diferentes com a necessidade de maiores EVRs no caso analisado por Kanit por existir maior número de microconstituintes.

Estas observações sugerem que, o tamanho do EVR depende das características do material analisado. Alguns dos estudos realizados neste sentido comprovaram que o tamanho do EVR vai depender de fatores tais como grau de dispersão dos micro-constituintes, fração de volume dos mesmos [S. Graham, 2003; Kanit, 2003], contraste nas suas propriedades mecânicas e propriedade que se deseja homogeneizar [Kanit, 2003; Cailletaud, 2003], etc.

Teoricamente, a independência absoluta nas condições de contorno ou a homogeneidade estatística absoluta em um material micro-heterogêneo somente se torna possível para amostras

de tamanho infinito [Aidun, 1999], o qual não teria sentido computacionalmente. Por esse motivo opta-se por trabalhar com EVRs em que é alcançada a independência nas condições de contorno ou a homogeneidade estatística das propriedades homogeneizadas dentro de tolerâncias pré-estabelecidas [Aidun, 1999; Kanit, 2003]. No caso de comportamento não linear acentuado, estes critérios são ainda mais necessários [Kouznetsova, 2001].

2.2.3. Homogeneização.

A homogeneização é uma ferramenta matemática que, aplicada à ciência dos materiais, consiste em determinar as propriedades mecânicas equivalentes ou efetivas de materiais micro-heterogêneos. Por vezes estas propriedades equivalentes também são chamadas de propriedades homogeneizadas. No texto que segue serão utilizadas estas terminologias indistintamente.

Usualmente, a homogeneização é realizada relacionando-se os valores médios de variáveis de campo dentro de um EVR do material micro-heterogêneo considerado. A mesma tem sido amplamente utilizada no tratamento computacional de materiais micro-heterogêneos, tanto em estudos relacionados com a criação de novos materiais, como na caracterização mecânica dos já existentes.

As primeiras tentativas na obtenção de propriedades mecânicas efetivas são atribuídas a Voigt e Reuss [Hollister e Kikuchi, 1997]. O primeiro, considerou um campo uniforme de deformações dentro de uma amostra de material micro-heterogêneo. Assim a tensão média dentro do EVR poderia ser determinada pela eq.(2.19).

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{V_{RVE}} \left(\sum_{i=1}^n \int_{v_n} \sigma_n dV \right) = \frac{V_{EVR1}}{V_{RVE}} (E_1 : \varepsilon_1) + \dots + \frac{V_{EVRn}}{V_{RVE}} (E_n : \varepsilon_n) \quad (2.19)$$

Onde:

$\langle \sigma \rangle$: Tensão média dentro do EVR.

V_{EVR} e V_{EVRn} : São o volume total do EVR e o volume correspondente a uma determinada fase dentro do EVR, respectivamente.

Considerando que as deformações são uniformes, a eq.(2.19) poderia ser escrita como mostra a eq.(2.20), a qual indica que a propriedade equivalente (E^*), pode ser obtida a partir das propriedades das fases constituintes, multiplicada pela sua respectiva fração de volume, na amostra analisada.

$$\langle \sigma \rangle = \frac{V_{EVRI}}{V_{RVE}} (E_1 : \varepsilon_1) + \dots + \frac{V_{EVRn}}{V_{RVE}} (E_n : \varepsilon_n) = \underbrace{\left(\frac{V_{EVRI}}{V_{RVE}} E_1 + \dots + \frac{V_{EVRn}}{V_{RVE}} E_n \right)}_{E^*} : \varepsilon \quad (2.20)$$

Reuss complementa o trabalho do Voigt e realiza uma análise similar considerando um campo de tensões uniformes dentro da amostra de material. Desta forma, são obtidas as propriedades equivalentes dos micro-constituintes (E^{*-1}) considerando a relação inversa eq.(2.21). Esta metodologia seguida por Voigt e Reuss, é conhecida como regra das misturas, e apesar de não ser a mais adequada, constitui uma maneira rápida de obter os valores extremos esperados das propriedades homogeneizadas ou efetivas para qualquer mistura de fases. Voigt representa o limite superior e Reuss o limite inferior das propriedades homogeneizadas [Zohdi, 2002]. Outras aproximações para homogeneização de materiais micro-heterogêneos têm sido propostas, dentre as quais, podem ser mencionadas os estudos de Eshelby, Hashin e Shtrikman, entre outros [Zohdi, 2002; Hollister e Kikuchi, 1997].

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{V_{EVR1}}{V_{RVE}} (E_1^{-1} : \sigma_1) + \dots + \frac{V_{EVRn}}{V_{RVE}} (E_n^{-1} : \sigma_n) = \underbrace{\left(\frac{V_{EVR1}}{V_{RVE}} E_1^{-1} + \dots + \frac{V_{EVRn}}{V_{RVE}} E_n^{-1} \right)}_{E^{*-1}} : \varepsilon \quad (2.21)$$

No tratamento computacional de materiais micro-heterogêneos usualmente são aplicadas duas técnicas de homogeneização: a homogeneização assintótica e a homogeneização utilizando-se a mecânica dos sólidos convencional.

A homogeneização assintótica foi introduzida na década de 70 e dentre alguns dos seus precursores podem ser mencionados Sanchez-Palencia e Babuska. Suas principais características são:

- a) Considera-se a existência de periodicidade na micro-estrutura do material, que a priori, é uma maneira de impor a condição de homogeneidade estatística do mesmo [Terada *et al.*, 2000];
- b) Considera-se que o deslocamento total de um material micro-heterogêneo pode ser representado por uma expansão assintótica que compreende o deslocamento em todas as escalas consideradas (eq.(2.22)) [Hollister e Kikuchi, 1997].

$$u_i^\eta(x^0, x^1, x^2, \dots) = u_i^0(x^0, x^1, x^2, \dots) + \eta^1 \tilde{u}_i^1(x^0, x^1, x^2, \dots) + \eta^2 \tilde{u}_i^2(x^0, x^1, x^2, \dots) + \dots \quad (2.22)$$

onde:

u_i^η : Deslocamento total na menor escala micro-estrutural;

u_i^0 : Deslocamento na escala macroscópica;

\tilde{u}_i^1 e \tilde{u}_i^2 : Perturbação no deslocamento total devido às escalas micro-estruturais 1 e 2;

η : Relação entre a n -ésima escala micro-estrutural analisada, e a escala imediatamente anterior (fator de escala);

x^0, x^1, x^2, \dots : Coordenadas nas escalas, macroscópica e demais escalas micro-estruturais analisadas, respectivamente.

De maneira geral, o material micro-heterogêneo periódico é modelado utilizando-se como estrutura básica uma célula unitária de morfologia simples, a qual funciona como elemento de volume representativo do material (Figura 2.16). Esta característica reduz de maneira significativa o tempo e esforço computacional nas análises.

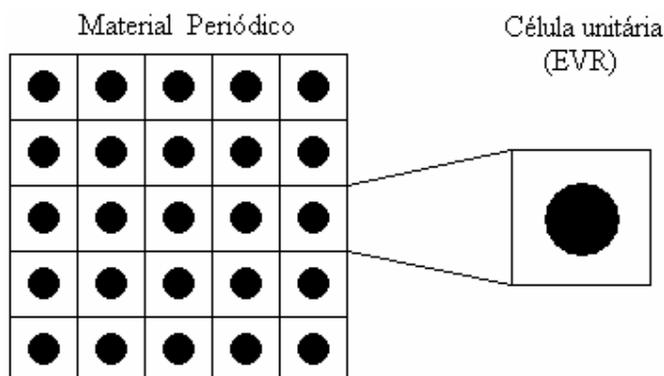


Figura 2.16. Esboço de um material periódico microheterogêneo.

Apesar destas vantagens, a homogeneização assintótica apresenta o inconveniente de que, na prática, a maioria dos materiais micro-heterogêneos possuem distribuição aleatória dos seus constituintes. Por outro lado, a distribuição das variáveis de campo (tensões, deformações, energia etc) dentro de um EVR que considera somente uma célula unitária, difere da distribuição das variáveis de campo dentro de outro que considera a forma e distribuição real dos micro-constituintes, ainda que ambos possuam a mesma fração de volume dos constituintes [Terada et al, 2000]. Por esta razão alguns pesquisadores consideram que o método, é aplicável somente sob comportamento linear elástico [Kusnetsova, 2001].

Contudo a hipótese de periodicidade tem sido aplicada à homogeneização de materiais com comportamento viscoplástico e elastoplástico [Van der Sluis *et al*, 1999 e Kaminski et al., 2001]. Para tanto, o EVR está geralmente constituído por um conjunto de células unitárias e não mais por uma única célula unitária.

Aspectos relacionados com análise computacional de micro-mecânica de fratura dúctil [Armero *et al*, 2000, Kim *et al.*, 2004] também têm sido estudados utilizando a hipótese de periodicidade, considerando-se apenas uma única célula de morfologia simples.

A outra técnica de homogeneização, é usualmente utilizada para obter propriedades efetivas de materiais com distribuição aleatória dos micro-constituintes. A mesma considera um EVR que reproduz tanto quanto possível a microestrutura do material. Para a obtenção do EVR, são resolvidos problemas de valores de contorno em volumes de controle do material micro-heterogêneo, incrementando gradualmente seu tamanho para incorporar na análise maior informação da micro-estrutura (Figura 2.17).

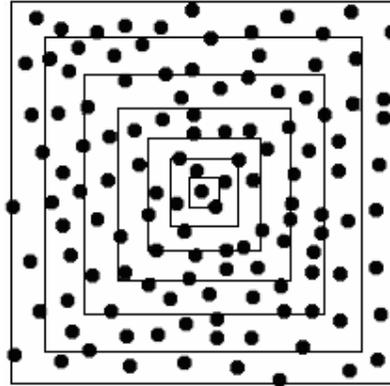


Figura 2.17. Domínio de material micro-heterogêneo não periódico subdividido em volumes de controle.

Dentro dos volumes de controle são verificadas as variáveis de campo e a partir da relação entre elas são obtidas as propriedades equivalentes E^* ou E^{*-1} , dependendo das condições de contorno utilizadas.

De maneira geral, a obtenção das componentes do tensor E^* ou E^{*-1} é realizada através da resolução de problemas de valores de contorno, onde são aplicadas condições de contorno de deslocamentos ou tensões, considerando seis casos de carregamento linearmente independentes como mostra a eq.(2.23)

$$\varepsilon \text{ ou } p = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Onde:

ε : Deslocamentos uniformes aplicados;

P : Tensões aplicadas;

β : variável que representa a carga aplicada (ou deslocamentos ou tensões).

Para cada caso de carregamento linearmente independente, se verifica a influência nas outras direções, do qual se originam 6 equações. Considerando-se os seis casos de carregamento completa-se um total de 36 equações.

Para simplificar as análises podem ser aplicados alguns artifícios. Por exemplo se for admitido comportamento isotrópico, somente é realizado um único caso de carregamento que permita a obtenção de um tensor de tensões de componentes hidrostáticas e desviadoras não nulas, por outro lado, se o problema for analisado em duas dimensões, seriam necessários somente três casos de carregamento independentes.

Considerar o problema em duas dimensões ou os estados planos como é comumente conhecido, é um artifício que permite reduzir a complexidade de vários problemas em engenharia e permite testar formulações antes de estendê-las a três dimensões. Normalmente quando se utiliza esta aproximação são empregadas hipóteses sobre o comportamento referente à terceira dimensão, (x_3). Particularmente, a modelagem de um material compósito utilizando os estados planos implica nas seguintes considerações:

- a) Quando se utiliza a hipótese de estado plano de tensões (EPT) o modelo computacional consiste em uma placa fina com o componente disperso em forma de círculos [Nemat-Nasser S. & Hori M., 1999].
- b) Quando se utiliza a hipótese de estado plano de deformações (EPD) o modelo computacional consiste em sólido contendo o componente disperso em forma de cilindros alinhados na direção x_3 [Nemat-Nasser S. & Hori M., 1999].

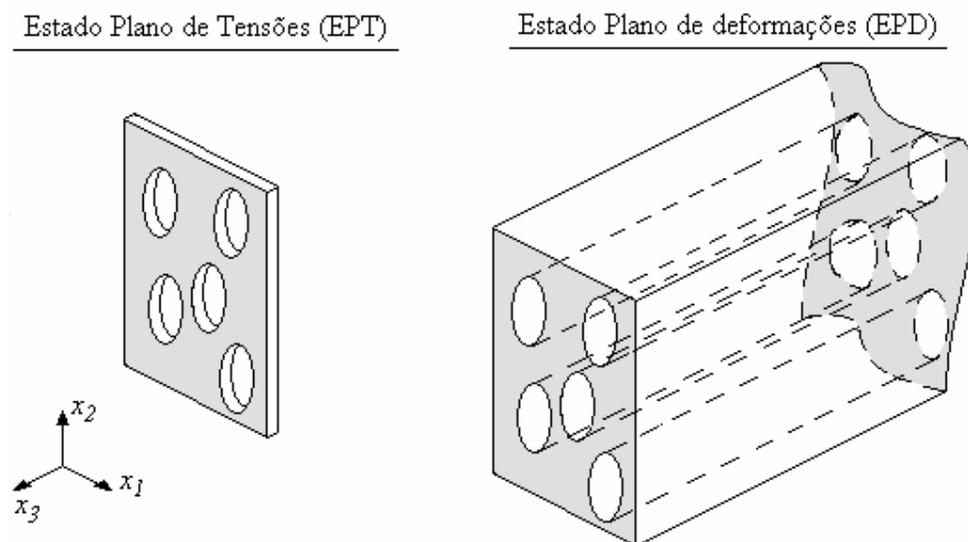


Figura 2.18. Esquema ilustrativo da consideração de estado plano de tensões (EPT) e estado plano de deformações (EPD).

Na Figura 2.18 pode se observar uma representação esquemática do material quando se utilizam os estados planos descritos anteriormente.

2.3. Mecânica do Dano

Enquanto a mecânica da fratura verifica as condições de propagação de uma trinca macroscópica sobre a ação de tensões ou deformações, a mecânica do dano verifica o processo gradual de deterioração que se produz nos materiais antes da iniciação de uma trinca macroscópica. O fenômeno de dano se apresenta através de descontinuidades superficiais ou de volume à escala mesoscópica na forma de trincas ou cavidades, respectivamente [Ibijola, 2002]. Assim, tem-se estabelecido que o estado final do dano corresponde à iniciação de uma trinca macroscópica, ou seja, uma descontinuidade do material suficientemente grande em comparação com as suas características micro-estruturais (tamanho de grão, inclusões, etc.). O esquema ilustrativo da Figura 2.19 esboça a afirmação anterior [Chaboche, 1987].

A mecânica do dano analisa o processo de dano dos materiais, utilizando as variáveis internas convencionais da mecânica do contínuo (o tensor de deformações elásticas ϵ_e , o tensor de deformações plásticas ϵ_p , etc), e introduz uma nova variável interna chamada dano (D). Geralmente, um conjunto destas variáveis internas na forma de tensores ou escalares são necessárias para descrever o processo de deterioração dos materiais [Ibijola, 2002].

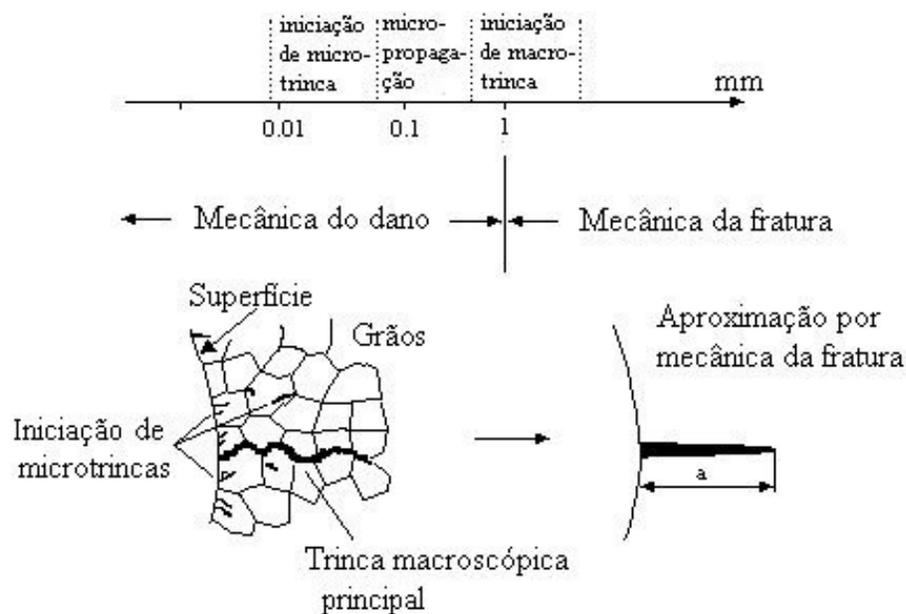


Figura 2.19. Ilustração esquemática dos campos de aplicação da mecânica do dano e mecânica da fratura [Chaboche, 1987].

A variável de dano (D) pode ser obtida de maneira direta ou indireta. Quando determinada de forma indireta, a variável de dano é função do comportamento macroscópico do material, por exemplo em problemas de fadiga, a variável de dano pode ser obtida em termos de vida remanescente (eq.(2.24)), onde o N representa o número de ciclos já aplicados e N_f representa o número total de ciclos até a aparição da trinca ou falha do material [Chaboche, 1982, Krempl, 1977]. Ainda de forma indireta, a variável de dano pode ser obtida através da verificação da variação de uma propriedade física como a resistência elétrica [Liu, 2003], ou a densidade [Jonas *et al*, 1977]. Em outro caso a variável de dano se obteve de forma indireta através do módulo de elasticidade [Lemaitre, 1985] representado pela eq.(2.25), onde \tilde{E} representa o módulo de elasticidade após ser atingido o limite elástico e, E constitui o módulo de elasticidade inicial que caracteriza o material. (Figura 2.20)

$$D = 1 - \frac{N}{N_f} \quad (2.24)$$

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E} \quad (2.25)$$

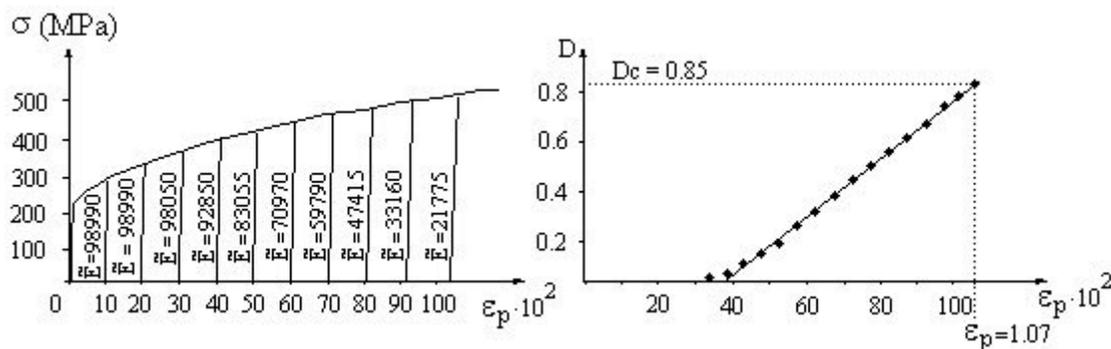


Figura 2.20. Forma de obtenção da variável de dano através da verificação do módulo de elasticidade [Chaboche, 1987].

A partir da afirmação de que o dano se evidencia pela formação de descontinuidades na micro-estrutura do material, a forma direta de se obter a variável de dano é precisamente a determinação quantitativa destas descontinuidades. Assim, a variável de dano pode ser determinada através da área de seção transversal \tilde{S} (eq.(2.26)), ou através da fração de volume de vazios f . Esse último parâmetro estabelece a relação entre o volume dos vazios (ou descontinuidades) e o volume total analisado (eq.(2.27)).

A determinação direta das variáveis de dano mencionadas é realizada, de maneira geral, através de técnicas experimentais avançadas [Berdin *et al*, 2001], ou através da mecânica computacional, [Brocks *et al*, 1995, Wriggers *et al.*, 1998].

$$D = 1 - \frac{\tilde{S}}{S} \quad (2.26)$$

$$f = \frac{\text{volume dos vazios}}{\text{volume total analisado}} \quad (2.27)$$

Das equações anteriores pode-se inferir que a variável de dano assume valores entre zero e um ($0 \leq D \leq 1$). Considera-se o valor 1 como a ruptura local ou formação de uma descontinuidade macroscópica.

As variáveis de dano, anteriormente apresentadas, são introduzidas em modelos constitutivos de modo a considerar seu efeito, em forma de tensor [Chaboche, 1977; Murakami e Ohno, 1981], ou em forma de escalar [Gurson, 1977], podendo-se utilizar as ferramentas da mecânica do contínuo acopladas com algum destes modelos constitutivos, para a simulação computacional de fenômenos de dano.

2.3.1. Fratura Dúctil em Metais.

A resposta mecânica de um corpo de prova de material metálico dúctil sob esforços de tração, tem a tendência que mostra a curva esquemática da Figura 2.21. Observa-se uma relação linear entre a tensão e a deformação até o limite de proporcionalidade e, uma vez que o mesmo é ultrapassado, a relação entre a tensão e a deformação passa a ser não linear. A partir desse momento, a parcela da deformação plástica começa ser considerável na deformação total do corpo de prova.

A deformação plástica vem acompanhada de um fenômeno chamado “encruamento”, que se evidencia por um incremento da dureza e da resistência do material devido à deformação plástica. Assim, para continuar deformando o material se precisa incrementar a tensão aplicada. Os incrementos de tensão provocam deformações totais uniformes ao longo do comprimento de controle (l_0) do corpo de prova que está sendo analisado, até chegar a um valor de tensão para o qual ocorre uma deformação plástica considerável de forma localizada, (instabilidade plástica), que se evidencia com a formação de um “pescoço” no comprimento de controle (l_0). A partir deste momento, o encruamento não consegue acompanhar a diminuição da seção transversal e se verifica uma queda na carga aplicada. Em metais com alto grau de pureza, a instabilidade plástica continua até quase 100 % de redução de área na região do pescoço (corpo de prova número 2 da Figura 2.21); entretanto, nos metais e ligas utilizados convencionalmente na engenharia, pouco depois de se alcançar a instabilidade plástica ocorre a ruptura do corpo de prova, correspondendo a uma redução de área na região do pescoço de aproximadamente 70 % (corpo de prova número 1 da Figura 2.21). [Thomason, 1990].

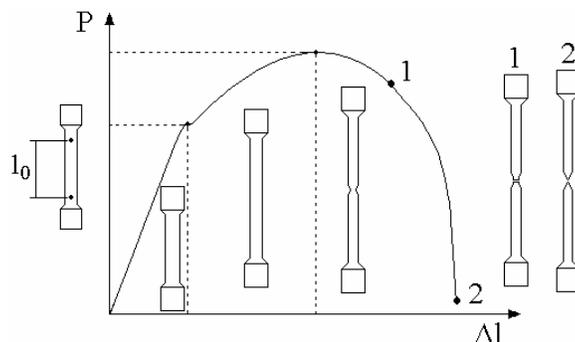


Figura 2.21. Resposta mecânica de um corpo de prova de material metálico dúctil sob tração. 1 material convencional utilizado na engenharia, 2 metal de alta pureza.

O formato característico das superfícies fraturadas de corpos de prova de materiais dúcteis convencionais, (corpo de prova número 1 da Figura 2.21) é o de “taça”, em um dos extremos e “cone” no extremo oposto, como comumente chama-se a esta forma de fratura.

A inspeção visual de uma dessas partes fraturadas, com pouco aumento, revela uma parte central plana de aspecto fibroso, daí o nome com que também é conhecido este tipo de fratura (fratura fibrosa) (Figura 2.22 (a)).

Utilizando maiores aumentos, através da técnica de microscopia eletrônica de varredura, estudos realizados sob a superfície de fratura de aparência fibrosa [Thomason, 1990], revelam uma série de micro-cavidades (vazios) de diferentes tamanhos, distribuídas por toda a superfície (Figura 2.22 (b) e (c)), e no centro de cada uma dessas cavidades, de modo geral, se observa uma inclusão ou partícula dispersa (Figura 2.23).

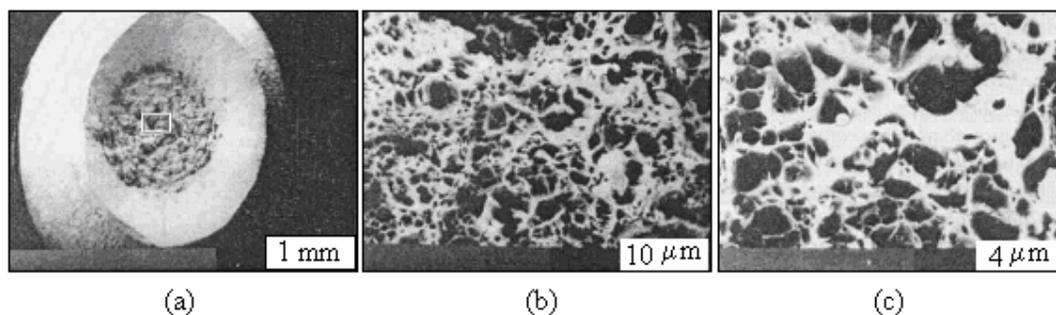


Figura 2.22. Análise da superfície de fratura de um corpo de prova de tração, a) aumento de 20 vezes, b) aumento de 2000 vezes e c) aumento de 5000 vezes. [Thomason, 1990]

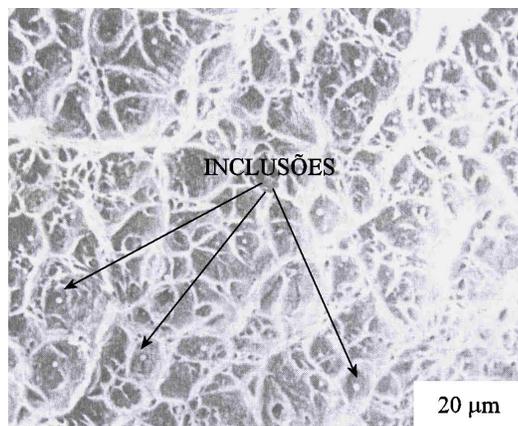


Figura 2.23. Inclusões, dentro dos micro-vazios da superfície de fratura [Garrison, 1987].

Ou seja, a partir das inclusões e partículas de segunda fase presentes nas ligas metálicas convencionais, nucleiam vazios que aceleram o processo de ruptura uma vez alcançada a instabilidade plástica. Precisamente, este fato é que impede estes materiais atingirem os níveis de redução de área que são registrados pelos metais de alta pureza.

Para propósitos de estudo, o processo de fratura dúctil tem sido dividido em três etapas, as quais são: a) Nucleação de vazios, por descolamento da interface matriz partícula ou por ruptura da partícula, b) crescimento dos vazios nucleados e por último c) a coalescência dos vazios em crescimento [Thomason, 1990]. Apesar desta divisão é difícil estabelecer os limites de cada um desses estágios [Garrison, 1987].

A Figura 2.24 mostra de modo esquemático as etapas anteriormente mencionadas, desde a nucleação a partir de inclusões e partículas de segunda fase (Figura 2.24 (b)), passando pelo crescimento dos vazios formados (Figura 2.24 (c)) até chegar à coalescência. A etapa de coalescência ainda pode ser dividida em três estágios, os quais são: coalescência incipiente dos vazios (Figura 2.24 (d)), formação da instabilidade plástica, a nível microscópico, no inter-espaço entre vazios (Figura 2.24 (e)) e finalmente o estrangulamento do inter-espaço entre os vazios formando a superfície de fratura ((Figura 2.24 (f)) [Thomason, 1990].

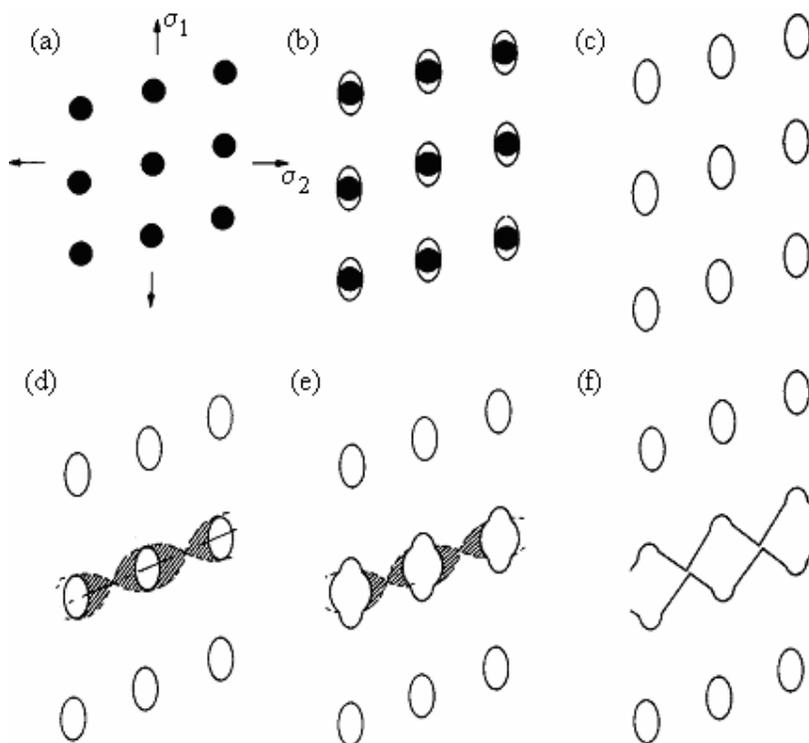


Figura 2.24. Representação esquemática dos diferentes estágios do processo de fratura dúctil, desde o material indeformado (a), passando pela nucleação dos vazios a partir das inclusões e partículas dispersas (b), o crescimento dos vazios nucleados (c) e coalescência dividida em três etapas: coalescência incipiente dos vazios (d), formação da instabilidade plástica, a nível microscópico, no inter-espaço entre vazios (e) e finalmente o estrangulamento do inter-espaço entre os vazios formando a superfície de fratura (f) [Thomason, 1990].

De modo geral o processo de fratura dúctil é influenciado por diversos fatores microestruturais e mecânicos. Dentre os fatores microestruturais podem mencionar-se o tamanho e geometria da partícula (inclusão ou partícula de segunda fase, tipo óxidos, sulfetos), fração de volume correspondente à partícula, etc. Dentre os fatores mecânicos se destacam, a resistência da interface matriz partícula, resistência da matriz, estado de tensões presente, entre outros. [Garrison, 1987]

O tamanho da partícula influencia fortemente a iniciação da nucleação dos vazios. Em um sistema de partículas dispersas e inclusões de diferentes tamanhos, a nucleação dos vazios começa primeiro nas partículas maiores e por último nas partículas menores. Assim, os vazios formados crescem com o incremento da deformação plástica, até que a população dominante alcança um nível de deformação crítica, acima do qual, se inicia a coalescência dos mesmos pela ocorrência da instabilidade plástica no material da matriz entre os vazios [Thomason, 1990, Garrison, 1987].

O número de partículas que caracteriza a microestrutura de um material, também tem influência direta nas diferentes etapas do processo de fratura dúctil. Estudos experimentais

realizados por Garrison, 1987, num aço estrutural nas condições de alto grau de pureza e pureza comercial, demonstram que maior número de partículas nucleiam vazios se o material for de pureza comercial, (Figura 2.25).

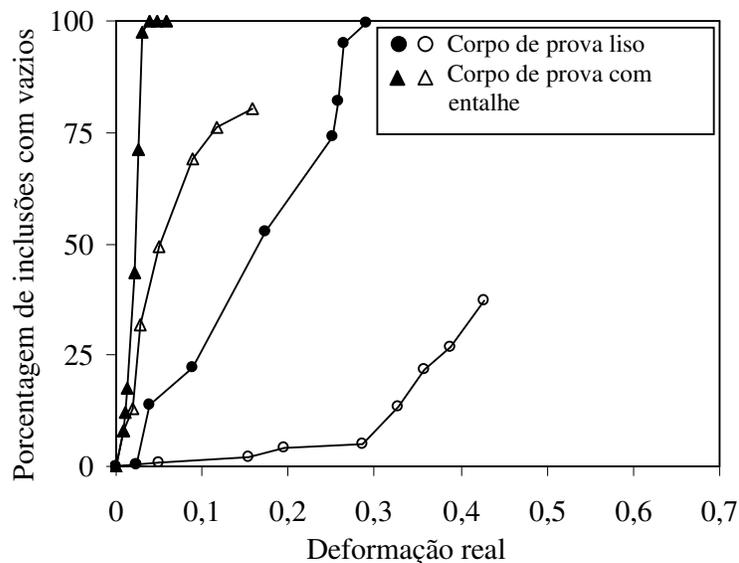


Figura 2.25. Porcentual de inclusões que nucleiam vazios em um aço 4340 com pureza comercial, (marcação cheia ●), e com alto grau de pureza (marcação vazia ○) para diferentes graus de triaxialidade nas tensões.[Garrison, 1987]

Considerando as duas observações anteriores pode-se afirmar que, quanto maior o número e tamanho de vazios nucleados maior será a fração de volume de vazios inicial e a velocidade de crescimento dos vazios, dando lugar à ocorrência da etapa de coalescência para menores valores de deformação. Resultados obtidos de estudos computacionais realizados por Kim *et al.*, 2004 confirmam esta afirmação.

A resistência da interface matriz-partícula determina a importância das etapas mencionadas anteriormente, no processo de fratura dúctil. Nos materiais onde existe forte ligação entre a matriz e as partículas dispersas, a etapa de nucleação constitui a etapa crítica no processo de fratura, uma vez, que a fratura ocorre pouco depois da partícula ter nucleado. Já nos materiais em que a nucleação ocorre com pouca dificuldade, o processo de fratura é controlado pelo crescimento e coalescência dos vazios [Anderson, 1995].

O estado de tensões presente também influencia o processo de fratura dúctil. Estudos realizados [Garrison, 1987] em corpos de prova cilíndricos sob tração, demonstram que o número de partículas que nucleiam vazios em corpos de prova com entalhe, (maior nível de triaxialidade nas tensões) é maior que em corpos de prova lisos (Figura 2.25). Nas etapas de crescimento e coalescência dos vazios, a existência de triaxialidade nas tensões também tem influência direta. Observações experimentais realizadas por Puttick, 1959, num corte longitudinal

da região do “pescoço” de um corpo de prova de tração, em que foi retirada a carga pouco depois de ocorrer a instabilidade plástica sem chegar à ruptura (Figura 2.26), revelam não só uma grande quantidade de vazios, mas também, que os vazios da parte central do pescoço são de maior tamanho e inclusive, alguns já coalesceram formando uma trinca macroscópica no centro do corpo de prova. Cabe lembrar que na região do “pescoço”, a triaxialidade nas tensões é alta.

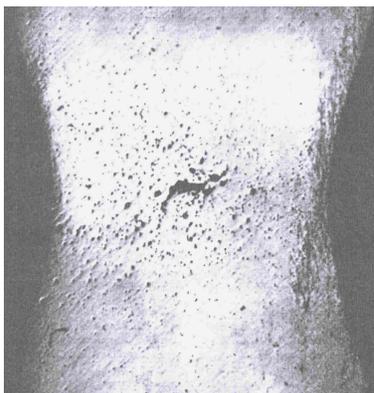


Figura 2.26. Início da ruptura no interior do corpo de prova na região de instabilidade plástica (pescoço). [Puttick, 1959].

As observações experimentais, realizadas por Puttick, 1959, são reforçadas pelo estudo numérico realizado por Kim *et al.*, 2004. Onde se observa que quanto maior o nível de triaxialidade presente, menor é a deformação para a qual se evidencia a coalescência e maior a fração de volume de vazios associada a este evento.

2.3.1.1. Coalescência dos Vazios

A coalescência constitui a última das três etapas em que idealmente é dividido o processo de fratura dúctil. A mesma se manifesta com a formação da instabilidade plástica no material da matriz localizado entre vazios adjacentes, até a completa estricção do mesmo. Esta etapa determina o final da etapa de crescimento para a população de vazios dominante e marca a iminência da ocorrência da fratura [Thomason, 1990, Garrison, 1987].

Usualmente são considerados duas formas de coalescência entre os vazios crescentes. A primeira delas, ocorre em materiais em que a nucleação de vazios é ativada somente em uma população de partículas dispersas, durante o processo de fratura (podem existir outras partículas, no entanto, estão tão fortemente ligadas à matriz que não ocorre nucleação de vazios a partir das mesmas, ao longo do processo de fratura). Neste caso a coalescência ocorre pela completa estricção do material da matriz localizado entre esta população de vazios dominantes. A superfície de fratura correspondente a esta forma de coalescência se caracteriza pela presença de

grandes cavidades separadas por bordas agudas [Garrison, 1987]. A Figura 2.27 (a) mostra de forma esquemática o aspecto da superfície de fratura da primeira forma de coalescência.

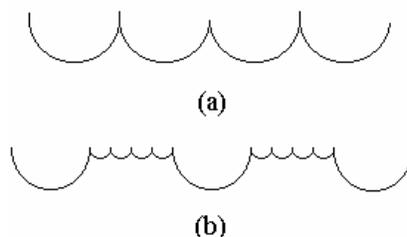


Figura 2.27. Representação esquemática do perfil da superfície de fratura segundo a forma em que ocorre a coalescência. a) Coalescência direta entre uma única população de vazios, b) Coalescência na presença de várias populações de vazios, onde a coalescência dos vazios nucleados primeiro, ocorre pela coalescência dos vazios nucleados por último.

A segunda forma de coalescência ocorre em materiais onde existem várias populações de partículas dispersas que nucleiam vazios. Neste caso, os vazios nucleiam primeiro a partir das partículas maiores e menos fortemente ligadas à matriz. Os vazios nucleados crescem com o incremento da deformação plástica do material, até um determinado nível de deformação em que é ativada a nucleação em uma segunda população de partículas menores, que estão finamente dispersas e mais fortemente ligadas à matriz. É esta última característica, associada à segunda população de partículas, que determina os valores de deformação requeridos para a nucleação de vazios a partir das mesmas. Assim a coalescência dos vazios nucleados a partir das partículas menos fortemente ligadas à matriz ocorre, pela coalescência dos vazios nucleados a partir das partículas mais fortemente ligadas à matriz metálica.[Garrison, 1987]

O aspecto da superfície de fratura desta segunda forma de coalescência se caracteriza pela presença de grandes concavidades distantes entre si, separadas por superfícies em que se observam numerosas cavidades de menor tamanho. A Figura 2.27 (b) apresenta de forma esquemática a superfície de fratura da segunda forma em que pode ocorrer a coalescência.

Estes dois modos de coalescência anteriormente descritos, também podem se apresentar de forma mista, com predomínio de ocorrência do primeiro modo nos locais onde existe maior densidade de nódulos e predominio do segundo modo nos locais onde existe menor densidade.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo se apresenta uma breve revisão bibliográfica relacionada aos temas abordados neste trabalho, tais como: modelos contínuos aplicados à fratura dúctil e modelagem computacional de micro-mecanismo de fratura dúctil.

3.1. Modelos Contínuos Relacionados à Fratura Dúctil.

Há materiais metálicos em que as partículas dispersas estão fortemente ligadas à matriz, e devido a este fato se produz um acúmulo significativo de energia elástica. Nessas condições, a ruptura ocorre logo depois de ter iniciado a nucleação dos vazios. Para esses materiais, a etapa de nucleação constitui o estágio crítico no processo de fratura. Um dos modelos mais utilizado para a previsão da fratura neste tipo de material é o modelo proposto por Argon [Argon et al, 1975, apud Aderson, 1994], onde se considera que a tensão na interface da partícula vai ser aproximadamente igual a soma da tensão equivalente de von Mises com a tensão hidrostática (eq.(3.1)). Dessa forma, o descolamento da interface vai estar determinado pela combinação de valores críticos dessas tensões.

$$\sigma_c = \sigma_e + \sigma_m \quad (3.1)$$

Onde:

σ_c = Tensão na interface;

σ_e = Tensão equivalente de Von Mises

σ_m = Tensão hidrostática.

Segundo Argon, a deformação em que ocorre a nucleação decresce com o incremento da tensão hidrostática. Isto indica que a nucleação de vazios ocorre mais facilmente sob um campo de tensões triaxial.

Para os materiais metálicos em que a interface matriz-partícula é pouco resistente (o descolamento da matriz ocorre no início do carregamento) ou que exista alguma porosidade inicial, os vazios crescem até ocorrer sua coalescência, originando-se defeitos macroscópicos que comprometem a capacidade de transmissão de esforço do material e provocam ruptura local do mesmo. Neste caso, a fase crítica constitui a coalescência dos vazios.

Um dos modelos mais utilizados na análise computacional da resposta do material, incluindo o efeito do crescimento e coalescência dos vazios, é o modelo proposto por Gurson para materiais porosos [Gurson, 1977]. O mesmo está baseado na modelo de plasticidade convencional, com a particularidade de que a superfície de escoamento depende da triaxialidade

das tensões e de um parâmetro de dano, a fração de volume de vazios (f). A eq.(3.2) apresenta o modelo de Gurson para materiais porosos.

$$\Phi = \frac{3}{2} \cdot \frac{S_{ij} \cdot S_{ij}}{\sigma_{ys}} + 2 \cdot f \cdot \cosh\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\sigma_m}{\sigma_{ys}}\right) - (1 + f^2) = 0 \quad (3.2)$$

onde:

S_{ij} = Tensão desviadora;

σ_{ys} = Tensão de escoamento do material;

σ_m = Tensão hidrostática;

f = fração de volume de vazios.

A fração de volume de vazios f representa a porosidade, e seu efeito na eq.(3.2) se manifesta na redução da superfície de escoamento (Figura 3.1 a). Dessa forma pode se fazer a análise computacional de materiais porosos ou materiais com um determinado nível de dano, tratando-os como materiais contínuos. Se f for igual a zero, a eq.(3.2) se transforma na equação da superfície de escoamento de Von Mises, utilizada na teoria convencional da plasticidade (Figura 3.1 b).

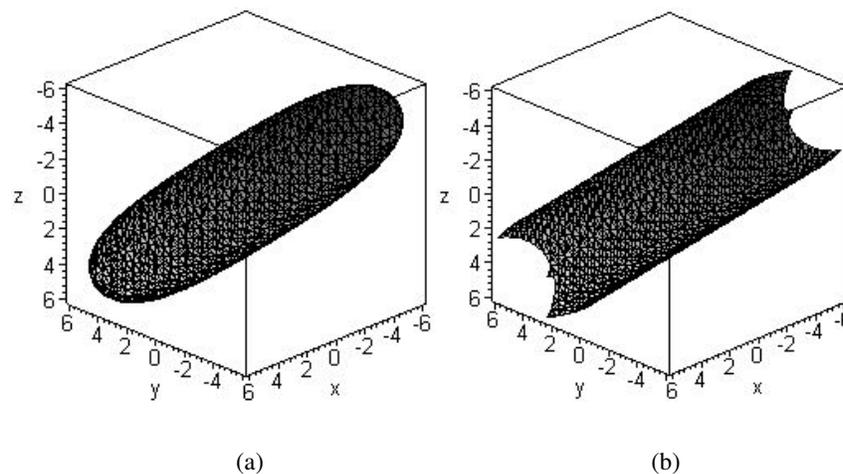


Figura 3.1. Superfície de escoamento obtida pelo modelo de Gurson. a) $f=0.07$, b) $f=0$.

O modelo de Gurson (eq.(3.2)) superestima a deformação de ruptura dos materiais reais, o que incentivou Tvergaard e Needleman a corrigi-lo [Tvergaard e Needleman, 1984]. Com base fenomenológica, estes pesquisadores introduziram vários coeficientes de ajuste no modelo proposto por Gurson, dando lugar ao modelo conhecido com o nome de Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN) (eq.(3.3)).

$$\Phi = \frac{3}{2} \cdot \frac{S_{ij} \cdot S_{ij}}{\sigma_{YS}} + 2 \cdot q_1 \cdot f^* \cdot \cosh\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{q_2 \cdot \sigma_m}{\sigma_{YS}}\right) - \left(1 + (q_1 \cdot f^{*2})\right) = 0 \quad (3.3)$$

Onde:

q_1 e q_2 : são parâmetros de ajuste. De um modo geral se define $q_1=2$ e $q_2=1$, ou pode ser alterado em função de ajustar o comportamento do modelo.

f^* : Representa a fração de volume de vazios determinada pela eq.(3.4). A mesma tem o propósito de, uma vez alcançada a fração de volume de vazios crítica (f_c), acelerar o processo de instabilidade plástica.

$$f^* = \begin{cases} f & \text{para } f \leq f_c \\ f_c - \frac{1/q_1 - f_c}{f_F - f_c} (f - f_c) & \text{para } f > f_c \end{cases} \quad (3.4)$$

Onde:

f_c : fração de volume de vazios crítica (na coalescência);

f_F : fração de volume de vazios no instante da fratura.

Os valores f_c e f_F são parâmetros de ajuste. Os mesmos podem ser tomados em função de ajustar as previsões do modelo ao comportamento observado experimentalmente.

A utilização de vários coeficientes de ajuste pelo modelo GTN tem sido criticado por alguns pesquisadores, entretanto é um dos modelos mais utilizados na análise computacional de fratura dúctil.

3.2. Modelagem Computacional de Micromecanismos da Fratura Dúctil

A modelagem computacional aplicada ao estudo do micro-mecanismo de fratura dúctil tem sido tema de diversos trabalhos, os quais visam um melhor entendimento deste processo, pois sua verificação experimental direta é bastante complexa e onerosa, devido à escala estrutural em que acontecem.

Dentre os trabalhos realizados no estudo computacional de crescimento e coalescência de vazios, pode-se comentar o desenvolvido por Brocks *et al.*, 1995, no qual foi estudada a influência da triaxialidade das tensões na evolução da fração de volume de vazios de um material micro-poroso. Para tanto, foi utilizada a hipótese de periodicidade do material, considerando-se uma célula unitária cilíndrica (matriz) com um vazio esférico central (poro) (Figura 3.2).

Aproveitando a condição de simetria da célula unitária, a análise foi realizada em modelos bidimensionais utilizando o método dos elementos finitos (Figura 3.2), considerando três modelos constitutivos diferentes para o material da matriz.

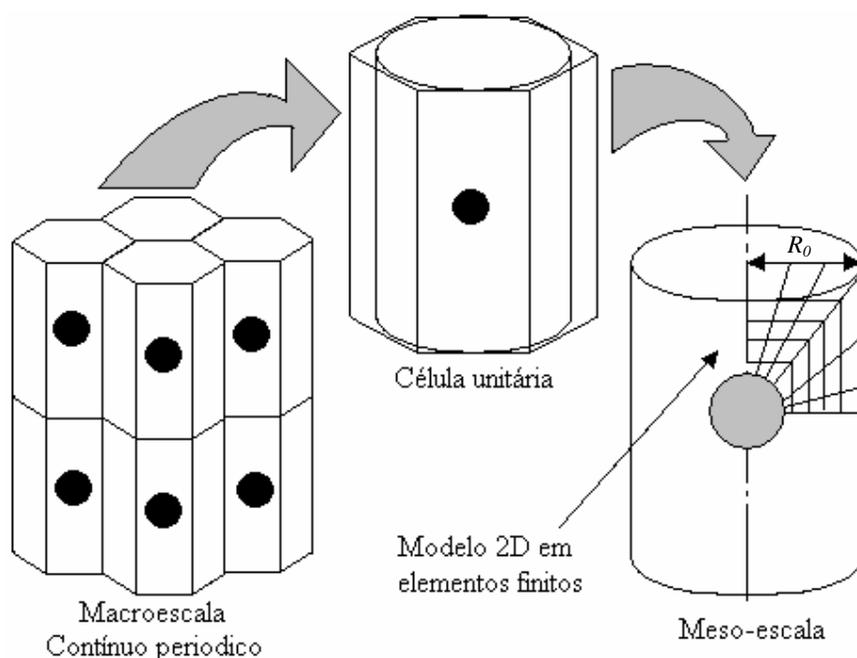


Figura 3.2. Hipótese de material poroso periódico [Brocks et al, 1995].

A repostas mecânica, assim como a evolução da fração de volume de vazios dos modelos em elementos finitos foram comparadas com as previsões do modelo de Gurson modificado. Assim foi estudada a influência da triaxialidade na fração de volume de vazios crítica (f_c) (no instante da coalescência), verificando-se que, de maneira geral, o incremento da triaxialidade nas tensões contribui na diminuição do f_c (Figura 3.3).

Tomando como referência o trabalho do Brocks, Kim *et al.*, 2004, estudou a influência da triaxialidade das tensões e da porosidade inicial, no crescimento e coalescência dos vazios. Para tal estudo, o elemento de volume representativo utilizado é analisado utilizando-se duas aproximações: a) modelo em elementos finitos de um cilindro com um vazio central (como considerado anteriormente por Brocks (Figura 3.2), sendo que o material responde à teoria da plasticidade convencional. b) modelo em elementos finitos de um cilindro homogêneo em que o material responde à relação constitutiva de Gurson-Tvergaard-Nedleman (GTN), e onde se utiliza a mesma fração de volume de vazios inicial (f_0) que no modelo em que se considera a presença física do vazio.

Os parâmetros de ajuste do modelo GTN, são determinados de maneira que a previsão da evolução da fração de volume de vazios e a resposta tensão-deformação do mesmo, se ajustem o melhor possível com a resposta do modelo em elementos finitos.

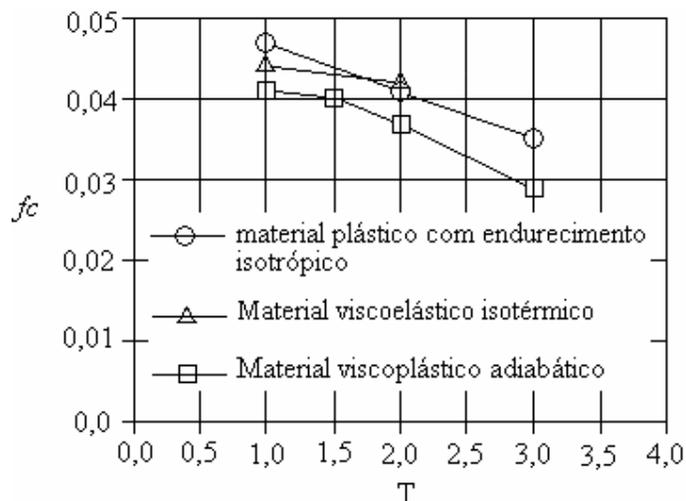


Figura 3.3. Influência da triaxialidade nas tensões (T) no valor da fração de volume de vazios na coalescência (f_c) [Brocks et al, 1995].

Nos modelos computacionais em elementos finitos nos que foi representado o vazio, a fração de volume de vazios de coalescência f_c é determinada através da relação, onde R é o raio do cilindro para uma determinada deformação, R_0 é o raio inicial do modelo (Figura 3.2), e $d\varepsilon_e$ é o incremento na deformação equivalente do modelo. Foi estabelecido que a fração de volume de vazios de coalescência, vai ser aquela a partir da qual a relação $R - R_0 / d\varepsilon_e$ permanece constante.

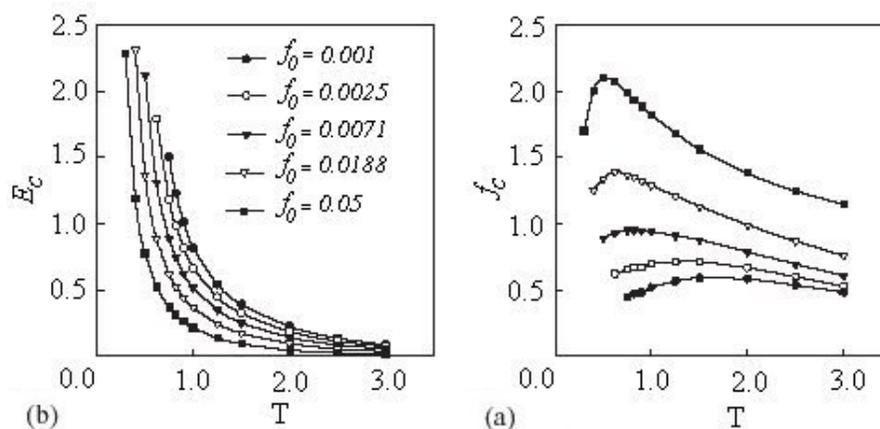


Figura 3.4. Influência da triaxialidade nas tensões (T) e da fração de volume de vazios inicial (f_0), a) na fração de volume de vazios crítica (f_c), e b) na deformação equivalente associada (E_c).

Alguns dos resultados obtidos são apresentados na Figura 3.4, onde se pode observar que a fração de volume de vazios na coalescência (f_c), bem como a deformação equivalente associada (ε_c), dependem da triaxialidade nas tensões (T) e da fração de volume de vazios inicial f_0 . A triaxialidade nas tensões (T) se obtém através da relação apresentada na eq.(3.5)

$$T = \frac{\sigma_m}{\sigma_e} \quad (3.5)$$

Onde:

σ_m : Componente hidrostática das tensões;

σ_e : Tensão equivalente.

Nos trabalhos até aqui comentados, foi considerado um material poroso, ou então, que o descolamento da interface matriz-partículas se produz nos instantes iniciais da deformação, sem muito esforço. Por esta razão é dada uma maior atenção aos processos de crescimento e coalescência dos vazios.

Nos casos em que existe forte aderência entre a matriz e as partículas dispersas, a mecânica computacional tem-se direcionado no sentido de incluir na análise o processo de nucleação dos vazios, através da simulação dos micro-mecanismos de separação da interface matriz-partícula dispersa. Dentre os trabalhos desenvolvidos considerando nucleação pode ser citado o do Wriggers *et al.*, 1998, que utiliza o método dos elementos finitos, com a particularidade de permitir a separação dos nós dos elementos da interface matriz-partícula dispersa, se for ultrapassado o nível de tensão correspondente à resistência mecânica pré-estabelecida da interface.

Funções de penalização foram utilizadas para evitar a interpenetração dos elementos correspondentes à interface e para evitar o deslocamento tangencial relativo na interface, pois se considera para o estudo que o descolamento somente ocorre por tração.

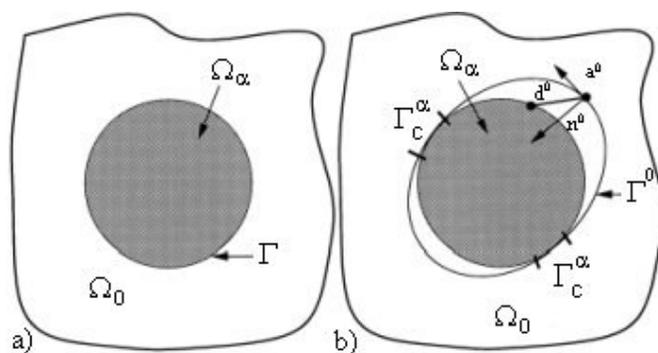


Figura 3.5. Esquema ilustrativo do método utilizado pelo Wriggers para a medição do vazio nucleado e seu posterior crescimento [Wriggers et al, 1998].

A dimensão do vazio formado entre a matriz e a partícula dispersa foi obtida a partir dos deslocamentos da interface da matriz e da interface da partícula (Figura 3.5).

As análises computacionais foram realizadas em um elemento de volume representativo (EVR) considerando a hipótese de periodicidade do material. Entretanto, diferentemente dos

trabalhos comentados anteriormente, em lugar de considerar uma única célula unitária, o EVR está constituído por um conjunto de células unitárias (Figura 3.6). Testes preliminares realizados por Wriggers *et al.*, 1998, ao comparar os resultados obtidos considerando-se uma única célula unitária com os obtidos dentro de uma célula unitária extraída do centro de um conjunto de 9x9 células (Figura 3.6), revelam distribuições de tensões distintas (Figura 3.7).

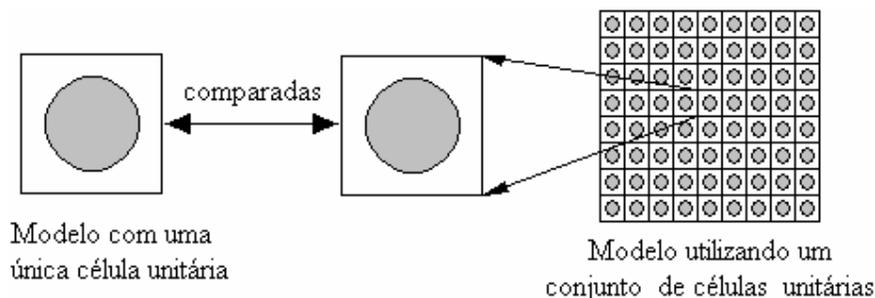


Figura 3.6. Células unitárias comparadas nos testes preliminares [Wriggers, 1998].

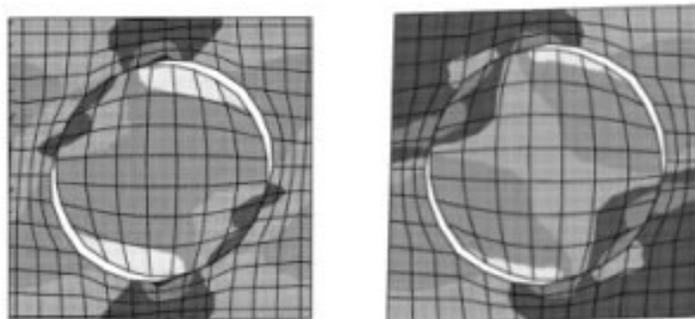


Figura 3.7. Distribuição de tensões obtida dentro de uma célula unitária a) Única célula com carregamento uniforme aplicado no contorno, b) Célula unitária extraída do centro de um arranjo de 9x9.

Esta última verificação realizada por Wriggers alerta sobre tomar cuidado ao realizar conclusões a partir dos resultados de EVRs que consideram uma única célula. Terada *et al.*, 2000, também fazem o alerta em relação a esse fato.

Seguindo a mesma linha de Wriggers, Segurado e Lorca, 2004, realizam um estudo computacional do processo de nucleação de defeitos como consequência da descolagem da interface matriz-partícula dispersa ou ruptura da partícula. Este trabalho também utiliza o método dos elementos finitos com implementação de interfaces coesivas e são propostos dois elementos com interfaces coesivas, de formulação para grandes deslocamentos.

Particularmente os métodos apresentados por Wriggers *et al.*, 1998, e Segurado e Lorca, 2004, têm o inconveniente que se necessita conhecer previamente a orientação e localização da fratura. Por outro lado, este método consegue simular os processos de nucleação e crescimento

dos vazios, mas não contempla a ocorrência da coalescência dos mesmos. Tentando solucionar este problema, outros trabalhos tem-se desenvolvido utilizando o método dos elementos finitos, onde todos os elementos que constituem o modelo apresentam interfaces coesivas. Isto permite o surgimento e propagação natural de trincas [Fedrigo e Bittencourt, 2001]

3.2.1. Critérios de Coalescência.

A coalescência dos vazios crescentes constitui a etapa final do mecanismo de fratura dúctil. Seu início marca o fim da etapa de crescimento dos vazios, e a criação de um defeito macroscópico que propagará em forma estável ou instável segundo as características do material analisado [Garrison, 1987]. Na simulação computacional de fenômenos de fratura dúctil, a etapa de coalescência tem sido considerada de diversas maneiras. Nos modelos em elementos finitos onde são modelados fisicamente os vazios, tem-se estabelecido como o início da coalescência quando o ligamento entre dois vazios vizinhos atinge entre 33 e 50 % do tamanho inicial, no entanto valores em torno de 60 % algumas vezes são necessários para driblar os problemas de distorção da malha [Tvergaard e Hutchinson, 2002].

A utilização deste critério de coalescência está associada à limitação, principalmente relacionada à distorção da malha, da formulação em elementos finitos utilizada. Para justificar sua validade foi argumentado, que a deformação macroscópica desde o início da instabilidade plástica no ligamento entre dois nódulos vizinhos, até a sua completa ruptura, é insignificante em relação à deformação precedente. Esta observação é válida quando se analisa o comportamento macroscópico do material, mas, se a intenção for estudar as condições de propagação de uma trinca num material plástico, a correta determinação da coalescência seria de grande utilidade.

Outro critério de coalescência, proposto por Goods e Brown, 1979, admite a possibilidade de coalescência em uma distribuição cúbica de vazios crescentes, quando o raio (r) dos vazios for da ordem de seu espaçamento. Considerando o desenho esquemático da Figura 3.8, a coalescência acontece quando $r=a/3$. Este valor corresponde a 33 % do espaço inicial entre os vazios e uma fração de volume de vazios $f= 0,15$.

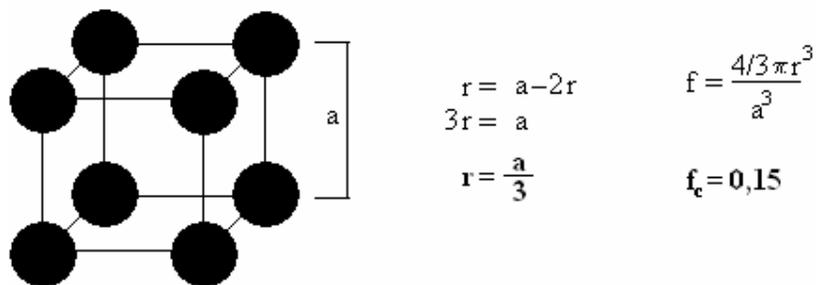


Figura 3.8. Distribuição cúbica de vazios considerada por Goods e Brown [1979].

O modelo de dano contínuo proposto por Gurson, 1977, e posteriormente modificado por Needleman e Tvergaard, 1984, verifica a coalescência através da fração de volumen de vazios f , e estabelece uma faixa de valores para a ocorrência da coalescência, $f_c = 0,15$ a $0,20$. O valor utilizado de f_c vai ser aquele que permita o melhor ajuste fenomenológico da resposta mecânica do modelo, com a resposta do material real [Rugieri 2004; Berdin *et al.* 2001]. Também utilizando a variável f , Brown e Embury, 1973, admitem o início da coalescência para a faixa de valores $f_c = 0,10$ a $0,20$.

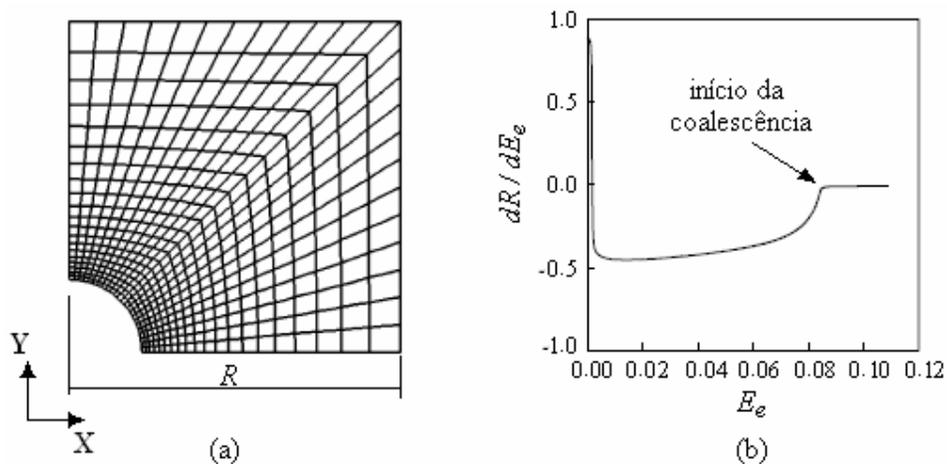


Figura 3.9. Critério de coalescência utilizado por Kim, 2004.

Utilizando modelos axisimétricos em duas dimensões carregados nas direções X e Y, Kim *et al.*, 2004, considera que a coalescência começa, quando a razão entre variação da deformação perpendicular à direção de maior carregamento dR , e a variação da deformação equivalente dE_e , começa ser aproximadamente constante em relação à deformação equivalente (Figura 3.9). Isto significa que a deformação plástica está ocorrendo de maneira localizada, o qual caracteriza a formação do estreitamento da seção transversal.

Na tabela 3.1 se apresenta um resumo dos diferentes critérios mencionados nesta seção, para identificar a coalescência. De modo geral pode-se dizer que não existe um consenso em

relação a qual critério utilizar, e sua escolha é fortemente influenciada pelas características do método computacional utilizado. Particularmente no caso do ferro fundido nodular ferrítico, que é o material objeto de estudo neste trabalho, os valores de f publicados para a ocorrência da coalescência, são de $f_c = 0,12$ e $f_c = 0,17$ encontrados por Berdin *et al.*, 2001 e Liu *et al.*, 2002, respectivamente.

Tabela 3.1 Resumo dos critérios de coalescência citados nesta seção.	
V. Tvergaard e W. Hutchinson, 2002	Largura do ligamento de 33 % e 50% do valor inicial
Goods e Brown, 1979	$f=0,15$
Gurson, 1977	$f = 0,15$ a $0,20$
Brown e Embury, 1973	$f = 0,10$ a $0,20$
Kim et al., 2004	Deformação média transversal constante (instabilidade plástica do ligamento entre os vazios)

4. MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS (MED).

O método dos elementos discretos (MED) foi introduzido na década de setenta, e na literatura Cundall aparece como um dos principais precursores do mesmo [Cundall, 1971; Cundall, 1979]. No MED o meio a ser modelado considera-se como um sistema de partículas discretas, geralmente de forma esférica e massa conhecida. De maneira geral, é considerada uma interação visco-elástica entre as partículas, como representa o modelo reológico da Figura 4.1.

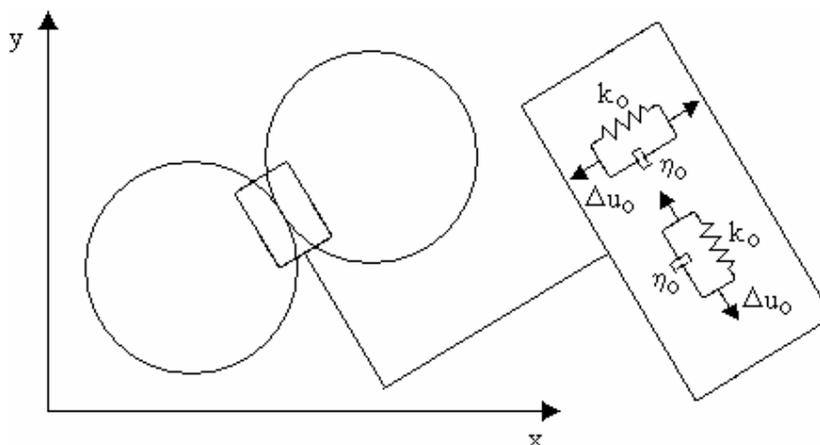


Figura 4.1. Modelo reológico da interação das partículas no DEM.

Neste método, cada partícula é identificada separadamente e suas posições instantâneas são determinadas a partir da utilização das equações de movimento como se mostra a seguir.

Da segunda lei de Newton tem-se que a aceleração de uma partícula em um determinado instante está dada pela eq.(4.1).

$$a^* = \frac{F}{m} \quad (4.1)$$

Onde:

F : soma vetorial de todas as forças que atuam sobre a partícula no instante analisado, (força de inércia, força de amortecimento, força externa, força de atrito, etc);

m : massa da partícula;

a^* : aceleração da partícula no instante analisado

Conhecendo a aceleração da partícula, utilizando as equações de movimento, são obtidas a sua velocidade e posição (eq.(4.2) e eq.(4.3)).

$$v = v_0 + a^* \cdot t \quad (4.2)$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v) \cdot t \quad (4.3)$$

Onde:

v e x : Velocidade e posição da partícula no instante analisado;

v_0 e x_0 : Velocidade e posição inicial da partícula.

O método dos elementos discretos (MED) tem sido aplicado com sucesso à simulação computacional de processos que envolvem comportamentos predominantemente descontínuos, como é o caso do comportamento de sólidos não-coesivos, onde se destacam os trabalhos de estudo do transporte de sedimentos num fluido [Goth e Sakai, 1997 e Lin *et al.*, 2000], e simulação computacional de filtros com camadas granulares [Chou *et al.*, 2000]. O MED também tem sido utilizado no estudo de processos de degradação e fratura em sólidos coesivos, entre os quais podem ser citados: simulação de explosões em rochas [Ladislav e Dutko, 2003, Procházka, 2004], fratura de materiais compósitos como o concreto [Sawamoto *et al.*, 1998; Camborde *et al.*, 2000; Brara *et al.*, 2001; Wittel *et al.*, 2003] entre outras aplicações.

Particularmente, através da formulação em MED utilizada neste trabalho, a qual será explicada nos itens a seguir, tem sido modelados processos de fratura dinâmica em rochas, produto de terremotos [Dalguer *et al.*, 2003], impacto em concreto armado [Riera, 1980, 1984], fenômenos de fratura por impacto em polímeros [Barrios *et al.*, 2004], processos de fratura em concreto [Iturrioz e Riera, 1998] entre outros.

Uma das maiores desvantagens do método está no fato do grande trabalho computacional requerido, pois, como cada partícula é considerada separadamente, existe a execução de múltiplos processos em paralelo. Neste sentido têm-se desenvolvido alguns trabalhos que otimizam os recursos de processamento computacional, fazendo uso de técnicas avançadas de programação em paralelo [Schafer *et al.*, 2002] ou a combinação com o método dos elementos finitos [Gethin *et al.*, 2001, Munjiza *et al.*, 2004] entre outros.

4.1. Características do Método Utilizado Neste Trabalho.

A idéia para a representação do contínuo segundo a formulação em elementos discretos utilizada neste trabalho, pode ser atribuída a Hrennikoff, 1942, e Absi, 1971. Esses pesquisadores utilizaram estruturas de barras de rigidez equivalente a estruturas contínuas com o objetivo de simplificar o modelo em análise.

A formulação em MED utilizada neste trabalho foi proposta por Hayashi, 1982, onde, o material a ser simulado está representado através de uma distribuição regular espacial de massas,

interconectadas através de barras de rigidez equivalente ao contínuo que se deseja analisar. As barras estão dispostas no espaço segundo a unidade cúbica básica, mostrada no detalhe da Figura 4.2 e as mesmas são consideradas como sendo barras de treliça, o qual determina três graus de liberdade por nó. A repetição regular desta unidade cúbica nas três direções ortogonais, permite a obtenção do modelo (Figura 4.2). Uma das vantagens destes modelos está no fato de serem naturalmente objetivos, ou seja, sem esforço adicional é possível analisar problemas com grandes deslocamentos.

A representação do sólido através de um sistema de treliças visando a obtenção de tensores constitutivos pré-determinados também tem sido obtida através da homogeneização inversa [Sigmund, 1994]

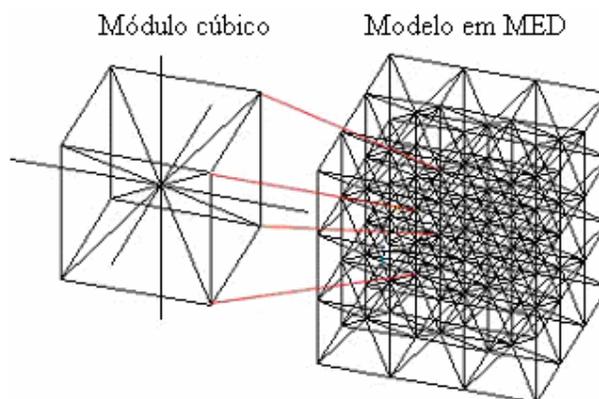


Figura 4.2. Modelo em MED utilizando o arranjo espacial de barras e detalhe do módulo cúbico básico.

4.2. Rigidez das Barras Equivalente ao Contínuo.

Hayashi, 1982, ao representar o contínuo como um sistema de barras de rigidez equivalente, percorre o caminho inverso ao de Nayfeh e Hehzy, 1978. Estes últimos estudaram estruturas em treliça através de contínuos equivalentes.

Nos comentários a seguir, será utilizada a mesma nomenclatura empregada por Hayashi, 1982, e será considerado como referência, um módulo cúbico básico como o do detalhe da Figura 4.2.

Considerando-se a disposição espacial das barras que concorrem a um nó central do módulo cúbico (Figura 4.2), pode-se constatar que a estrutura em treliça utilizada está caracterizada por sete direções diferentes, três correspondentes às barras normais às faces do módulo e quatro direções correspondentes às barras diagonais. Se todas as barras possuem o mesmo módulo de elasticidade (E), cada conjunto de barras paralelas define um contínuo com propriedade unidirecional efetiva que será chamada de Q_{11} . Considerando que Q_{11} é tomado

como um valor médio ponderado com relação à área de influência da barra, em um determinado conjunto de barras paralelas o valor de Q_{11} dependerá do espaçamento entre elas.

Tomando como referência a Figura 4.3, pode-se observar que na área correspondente às faces normais do módulo cúbico (L_c^2), existe a contribuição de duas barras, uma correspondente à barra central, e a outra correspondente a um quarto de barra, com que contribui cada vértice do módulo cúbico. Dessa forma a área de influência das barras normais vai ser $L_c^2/2$.

Se for considerada a área delimitada por quatro barras diagonais ($L_c^2/\sqrt{3}$), tem-se a contribuição de um quarto de barra por cada uma delas. Assim a área de influência das barras diagonais é de ($L_c^2/\sqrt{3}$).

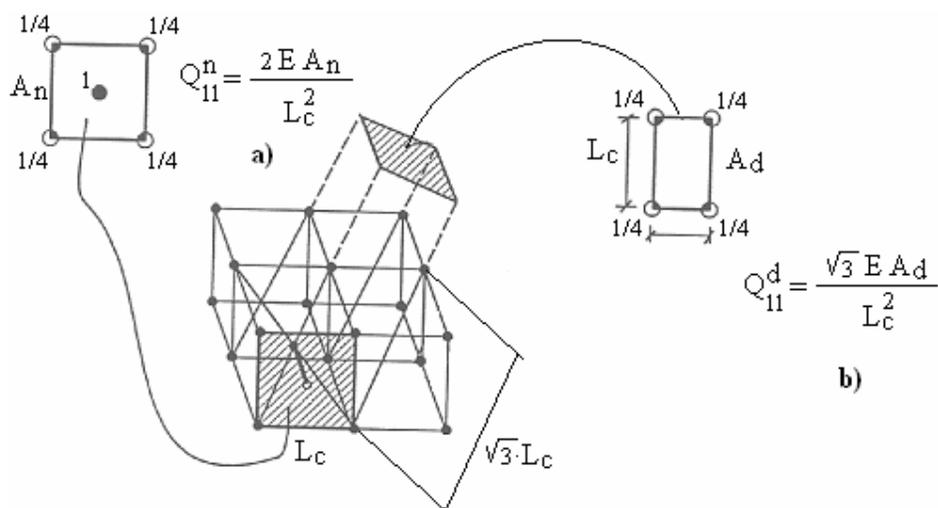


Figura 4.3. Determinação da área efetiva das barras normais a), e diagonais b).

Da análise realizada se infere que nas direções perpendiculares às faces do módulo cúbico, o empilhamento de barras é maior que nas direções das barras diagonais, o qual indica que para considerar um contínuo isotrópico equivalente, a rigidez das barras diagonais deve ser maior que a das normais.

Define-se a propriedade unidirecional na direção das barras normais às faces do módulo cúbico (Q_{11}^n), e a propriedade unidirecional na direção das barras diagonais (Q_{11}^d) como a relação entre, o módulo de elasticidade, a área da seção transversal da barra (A_n e A_d) e a área de influência da barra, segundo indicam as equações (4.4) e (4.5) [Hayashi, 1982].

$$Q_{11}^n = \frac{2 \cdot E \cdot A_n}{L_c^2} \quad (4.4)$$

$$Q_{11}^d = \frac{\sqrt{3} \cdot E \cdot A_d}{Lc^2} \quad (4.5)$$

De um modo geral, a relação tensão-deformação de um material elástico qualquer está definida pela eq.(4.6), representada da forma compacta [Spencer, 1980].

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad i, j = 1 \dots 6 \quad (4.6)$$

Onde:

σ_i e ε_j : Componentes do tensor tensão e tensor deformação, respectivamente;

C_{ij} : Componentes do tensor constitutivo.

Para um material isotrópico, o tensor constitutivo é representado segundo mostra a eq.(4.7), e suas componentes C_{ij} são função somente de duas constantes elásticas independentes.

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Onde:

C_{11} , C_{12} e C_{44} : São funções do módulo de Young (E) e o coeficiente de Poisson (ν).

Na representação do contínuo através da estrutura em treliça, é necessário considerar a influência de cada barra na rigidez do sólido equivalente. Para isto foi utilizada a eq.(4.8) [Nayfe e Hefz, 1979], que permite a transformação das constantes elásticas de um sistema de coordenadas cartesianas x_i para outro cujas coordenadas são \bar{x}_i .

$$\bar{Q}_{ij} = \sum_{l=1}^3 f(Q_{11}^n, \alpha_{lkl}^n) + \sum_{j=1}^4 f(Q_{11}^d, \alpha_{jkl}^d) \quad (k, l = 1 \dots 3) \quad (4.8)$$

Onde:

O primeiro termo corresponde à contribuição das barras normais às faces do módulo cúbico e o segundo termo corresponde às quatro direções das diagonais do cubo.

α_{lkl}^n e α_{jkl}^d : Cosenos diretores dos sistemas \bar{x} , x_l^n e \bar{x} , x_j^d respectivamente;

\bar{Q}_{ij} : Constantes elásticas do sólido equivalente representado pela estrutura em treliças.

Considerando-se as equações (4.7) e (4.8) chega-se às equações (4.9).

$$\begin{aligned}
C_{11} &= Q_{11}^n (1)^4 + 4Q_{11}^d \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^4 = Q_{11}^n + \frac{4}{9} Q_{11}^d \\
C_{12} &= 4Q_{11}^d \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{4}{9} Q_{11}^d \\
C_{44} &= 4Q_{11}^d \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{4}{9} Q_{11}^d
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Define-se agora a (4.10) como:

$$\delta = \frac{Q_{11}^d}{Q_{11}^n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{A_d}{A_n} \tag{4.10}$$

Que permite simplificar as equações (4.9). Como mostram as equações (4.11):

$$\begin{aligned}
C_{11} &= Q_{11}^n \cdot \left(1 + \frac{4}{9} \delta \right) \\
C_{12} &= Q_{11}^n \cdot \left(\frac{4}{9} \delta \right) \\
C_{44} &= Q_{11}^n \cdot \left(\frac{4}{9} \delta \right)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Logo, substituindo as eq.(4.11) na eq.(4.7), obtém-se a eq.(4.12):

$$C_{ij} = \frac{2EA_n}{L^2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{4}{9} \delta & \frac{4}{9} \delta & \frac{4}{9} \delta & 0 & 0 & 0 \\ & 1 + \frac{4}{9} \delta & \frac{4}{9} \delta & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 + \frac{4}{9} \delta & 0 & 0 & 0 \\ & \text{simétric.} & & \frac{4}{9} \delta & 0 & 0 \\ & & & & \frac{4}{9} \delta & 0 \\ & & & & & \frac{4}{9} \delta \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

A eq.(4.12) apresenta as componentes do tensor constitutivo, do contínuo equivalente que representa a estrutura em treliça analisada.

As constantes elásticas E , ν e μ se relacionam com as componentes do tensor constitutivo (C_{ij}) através das equações (4.13).

$$\begin{aligned}
E &= C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{11} + C_{12}} \\
\nu &= \frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}} \\
\mu &= \frac{1}{2}C_{44}
\end{aligned}
\tag{4.13}$$

Substituindo-se as componentes do tensor constitutivo do sólido equivalente à estrutura treliçada nas equações (4.13), é obtida sua relação com as constantes elásticas E , ν , e μ (eq.(4.14)).

$$\begin{aligned}
E &= \frac{2EA_n(9+12\delta)}{L^2(9+8\delta)} \\
\nu &= \frac{4\delta}{9+8\delta} \\
\mu &= \frac{EA_n 4\delta}{9L^2}
\end{aligned}
\tag{4.14}$$

Das equações (4.14) chega-se à equação (4.15):

$$\delta = \frac{9\nu}{(4-8\nu)}
\tag{4.15}$$

Considera-se oportuno salientar que no trabalho de Nayfeh e Heftzy [1978] se comprovou que a matriz constitutiva representada pela equação (4.12), somente representa um sólido isotrópico e homogêneo para valores de $\delta=9/8$, o qual significa que $\nu=0,25$.

Das equações (4.10) e (4.14), obtém-se as equações (4.16):

$$\begin{aligned}
EA_n &= \frac{L^2(9+8\delta)}{2(9+12\delta)}E \\
EA_d &= \frac{\delta L^2(9+8\delta)}{\sqrt{3}(9+12\delta)}E
\end{aligned}
\tag{4.16}$$

Das relações apresentadas na equação 4.16, e considerado a rigidez das barras normais e diagonais como $\frac{EA_n}{L_n}$ e $\frac{EA_d}{L_d}$ respectivamente, é obtida a rigidez das barras do módulo cúbico equivalente ao contínuo que se deseja modelar, (eq.(4.17). Onde L_n é o comprimento das barras normais (L_c), e L_d é o comprimento das barras longitudinais.

$$\frac{EA_n}{L_n} = \frac{L(9+8\delta)}{2(9+12\delta)} E$$

$$\frac{EA_d}{L_d} = \frac{2\delta L(9+8\delta)}{3(9+12\delta)} E \quad (4.17)$$

4.3. Massas Nodais.

A massa está concentrada nos nós da treliça, e a magnitude da mesma vai depender do volume de influência do nó. Considerando-se o módulo cúbico básico, pode-se observar que para cada módulo de volume L_c^3 existe ao todo a contribuição de dois nós: o nó central e um oitavo que aporta cada nó das arestas do módulo. Seguindo o raciocínio, pode-se dizer que a massa do nó central do módulo cúbico vai estar determinada pela relação $\frac{\rho L_c^3}{2}$, onde ρ representa a densidade do material. Assim, a massa que corresponde a cada nó das arestas do módulo, vai estar determinada pela relação $\frac{\rho L_c^3}{16}$ multiplicada pela quantidade de módulos da qual participa tal nó. Em outras palavras, para os nós dos cantos do modelo global só existe a participação de um módulo portanto, a massa será de $\frac{\rho L_c^3}{16}$. Os nós das aresta do modelo global participam de dois módulos portanto, a massa nos mesmos vai ser de $\frac{\rho L_c^3}{8}$. Finalmente, para os nós localizados nas superfícies do modelo global que participam de quatro módulos têm uma massa de $\frac{\rho L_c^3}{4}$.

4.4. Solução da Equação de Equilíbrio

Para cada nó de massa m é considerado o sistema de forças representado no diagrama de corpo livre mostrado na Figura 4.4.

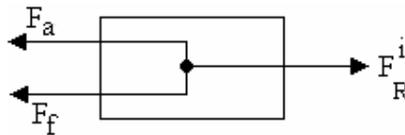


Figura 4.4. Diagrama do corpo livre de um nó do modelo.

Onde:

F_f : Força de inércia

F_a : Força de amortecimento

F_R^i : Resultante da soma de todas as forças correspondentes ao nó i (cargas externas, força interna da barra) (eq.(4.18)).

$$F_R^i = \sum_{b=1}^k f_r^b + F_{ext}^i \quad (4.18)$$

A força interna de cada barra (f_r^b) é obtida a partir da relação força deformação que será vista em detalhe na seção 4.1.4.

A equação de equilíbrio do sistema de forças para um nó mostrado na Figura 4.4, pode ser escrito conforme a eq.(4.19), mostrada seguir.

$$F_R^i = M\ddot{x} + C\dot{x} \quad (4.19)$$

Onde:

x : Vetor deslocamento nodal,

M : Matriz de massas nodais (considerada diagonal),

C : Matriz de amortecimento (também considerada diagonal).

A equação de equilíbrio (4.19), é integrada no tempo através de um esquema de integração explícita, o método de diferenças finitas centrais. Desta forma é obtida a coordenada atual do nó em cada passo de integração.

Em relação à matriz de amortecimento (C), foi utilizada a hipótese simplificativa de considerar o amortecimento proporcional à massa (M) ((4.20)) [Hayashi, 1982].

$$C = MD_f \quad (4.20)$$

Sendo D_f uma constante vinculada ao coeficiente de amortecimento crítico ξ_n , (eq.(4.21))

$$D_f = \xi_n 2\pi f_n \quad (4.21)$$

Onde:

f_n : Freqüência natural de vibração do modo n (Hz)

De um modo geral o modo n é adotado como sendo igual ao modo fundamental de vibração da estrutura [Hayashi, 1982].

4.5. Critério de Falha da Barra.

A relação força-deformação ($P-\epsilon$) de cada barra responde ao diagrama bilinear mostrado na Figura 4.5, proposto por Rocha, 1989 e que esteve baseado na idéia originalmente proposta por Hillerborg *et al.*, 1976. Esta relação bilinear se caracteriza por dois parâmetros fundamentais: a deformação crítica da barra (ϵ_p) que define a deformação a partir da qual começa verificar-se dano na barra, e a energia específica de fratura (G_c) que define a deformação de ruptura ϵ_r . A carga crítica P_c vai estar determinada pela relação $P_c=EA\cdot\epsilon_p$ onde EA representa a rigidez da barra e a mesma é proporcional ao módulo de elasticidade (E) do material. Como pode ser observado na Figura 4.5, a ruptura da barra somente é considerada quando a mesma está submetida à tração.

A obtenção da deformação crítica da barra (ϵ_p) tem suas bases na mecânica linear elástica da fratura considerando estado plano de deformações, como será mostrado a seguir.

Particularizando para o caso da barra, a expressão para o K_{IC} e sua relação com a energia específica de fratura poderiam ser escritas como mostram as equações (4.22). Substituindo a tensão crítica por $E\cdot\epsilon_p$ e realizando as devidas transformações algébricas chega-se à eq.(4.23).

$$K_{IC} = Y \cdot P_c \cdot \sqrt{a}$$

$$G_c = \frac{K_{IC}^2 \cdot (1-\nu^2)}{E} \quad (4.22)$$

$$(Y \cdot E \cdot \epsilon_p \cdot \sqrt{a})^2 = \frac{E \cdot G_c}{(1-\nu^2)} \quad (4.23)$$

$$\epsilon_p = R_{fc} \cdot \sqrt{\frac{G_c}{E \cdot (1-\nu^2)}} \quad (4.24)$$

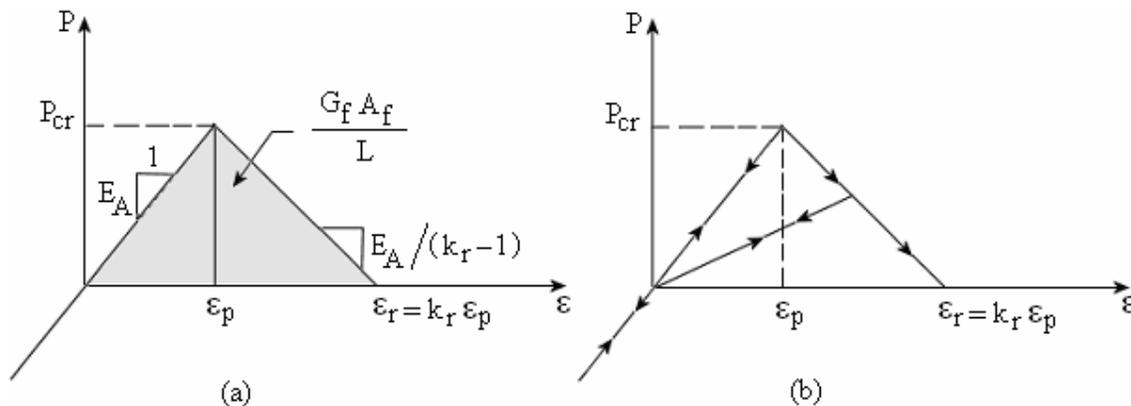


Figura 4.5. Lei constitutiva bilinear atribuída a cada barra do modelo (a) parâmetros envolvidos na lei constitutiva, (b) Comportamento em tração e compressão [Rocha, 1989].

Isolando o ε_p na eq.(4.23) se obtém a eq.(4.24), onde o R_{fc} é chamado de fator de falha, e o mesmo contém informações sobre o tamanho de defeito característico (a) da micro-estrutura do material, e suas características geométricas (Y), relacionados como mostra a eq.(4.25).

$$R_{fc} = \frac{1}{Y \cdot \sqrt{a}} \quad (4.25)$$

A relação entre G_f e a área abaixo da curva da Figura 4.5, está determinada pela eq.(4.26).

$$\int_0^{\varepsilon_r} P(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{G_c \cdot A_f}{L_c} = \frac{K_r \cdot \varepsilon_p^2 \cdot E \cdot A_n}{2} \quad (4.26)$$

Onde:

A_f : Área de fratura da barra. Determinada por Rocha, 1989, $A_f = 0.1385 \times L_c^2$;

Para que a relação constitutiva seja estável deve-se cumprir que $K_r \geq 1$, sendo que K_r é função das propriedades mecânicas do material e da discretização adotada (L_c). Desta forma a inclinação do ramo descendente da curva bilinear apresentada na Figura 4.5, depende do tamanho do elemento (L_c) utilizado no modelo. Esta característica deixa evidente como o critério de falha utilizado considera o efeito de escala inerente aos problemas de fratura. Para maior informação a este respeito se recomenda consultar os trabalhos de Rios e Riera, 2004, e Iturrioz *et al.*, 2007, onde são verificadas as características do efeito de escala no critério de falha.

Cabe salientar que a forma bilinear que determina a relação força deformação da barra (Figura 4.5), poderia ser substituída por outra, visando coerência entre o comportamento do modelo em MED e do material que se quer modelar. Na próxima seção se apresenta como foi modificada a lei bilinear visando dispor de maior flexibilidade no ajuste fenomenológico da resposta dos modelos em MED. Outras modificações já realizadas na forma da curva de falha da barra foram desenvolvidas por Miguel e Riera, 2006, e Riera, 2005.

Finalizando a descrição da formulação em elementos discretos (MED) utilizada, cabe salientar que é possível incorporar características aleatórias nas propriedades mecânicas do material que se quer modelar, através de um coeficiente de variação pré-estabelecido que é introduzido como parâmetro de entrada. Estas características da formulação têm sido exploradas em vários trabalhos dentre os quais podem ser citados os desenvolvidos por Rocha, 1989; Iturrioz, 1995, e Rios, 1995, entre outros.

Particularmente neste trabalho, não é introduzida aleatoriedade nas propriedades mecânicas, porém, a microestrutura a ser modelada contém componentes particulados

distribuídos de forma dispersa que acabam introduzindo variabilidade nas propriedades, ver capítulo 6.

5. IMPLEMENTAÇÕES REALIZADAS NO MED.

Visando uma aplicação mais eficiente da formulação em elementos discretos utilizada, ao estudo de micromecanismos de fratura, foram necessárias algumas implementações adicionais tais como: a) determinação do tensor de tensões e de deformações correspondentes a um módulo cúbico, b) determinação computacional da fração de volume de vazios, que foi utilizada como parâmetro de comparação, e por último, c) implementação de uma lei constitutiva trilinear, para as barras, com o objetivo de acompanhar o comportamento não-linear do material a ser analisado. Por outro lado, é realizada uma verificação das possibilidades do emprego do MED na simulação de fenômenos de fratura, através da modelagem de alguns problemas simples, verificando-se os resultados quanto a parâmetros fractomecânicos tais como G e K . Estudos similares já haviam sido desenvolvidos por Rocha, 1989, para concreto.

5.1. Metodologia de Determinação das Tensões.

Os resultados da formulação em elementos discretos utilizada, são obtidos em termos de deslocamentos, velocidades, acelerações e forças nodais para cada incremento de tempo da análise. Como o sistema é discreto, não tem sentido falar de tensões ou deformações, grandezas estas relacionadas com a hipótese dos meios contínuos, no entanto, seria interessante obter os resultados também em termos dos tensores de tensão e deformação pelos motivos expostos a seguir:

- a) O mapeamento das tensões e deformações facilita a visualização dos resultados bem como a comparação dos mesmos com soluções teóricas ou numéricas da mecânica do contínuo.
- b) A disponibilidade do tensor de tensões permitirá implementar leis uniaxiais nas barras que dependam de invariantes do tensor de tensões, assim como verificar o nível de triaxialidade nas tensões existente.

Considerando estas possibilidades, foi implementada uma metodologia de obtenção do tensor de tensões e deformações. A metodologia de obtenção das componentes de tensão para um módulo cúbico elementar (Figura 5.1), utilizando as forças das barras que o compõem é apresentada a seguir.

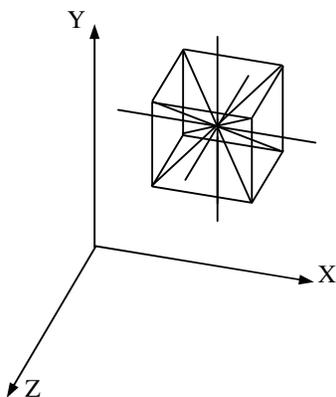
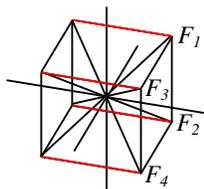


Figura 5.1. Módulo cúbico utilizado como referência para a explicação da obtenção do tensor de tensões, orientado conforme o sistema de coordenadas global.

5.1.1. Tensões Normais

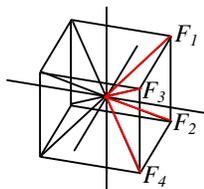
A tensão normal em qualquer uma das direções ortogonais mostradas na Figura 5.1, é determinada a partir de uma força equivalente dividida pela área de seção transversal do módulo cúbico. O cálculo da força equivalente considera a componente da força de cada barra, que compõe o módulo cúbico, na direção ortogonal analisada. Por exemplo, a força equivalente para determinar a tensão normal na direção x da Figura 5.1 está composta por:

A média das forças das barras normais das arestas, na direção analisada (F^a).



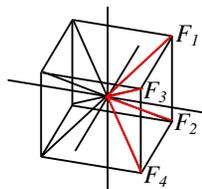
$$F^a = \frac{F_1 + F_2 + F_3 + F_4}{4}$$

A média da componente das forças das barras diagonais de cada um dos lados do módulo cúbico na direção analisada, F^b .



$$F^{b2} = \alpha \cdot (F_1 + F_2 + F_3 + F_4)$$

$$F^b = \frac{F^{b1} + F^{b2}}{2}$$

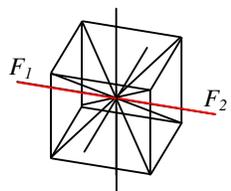


$$F^{b1} = \alpha \cdot (F_1 + F_2 + F_3 + F_4)$$

Onde:

α : Tangente do ângulo formado pelas barras diagonais e a direção ortogonal analisada, que é $\alpha = 0,577$.

A média das forças das barras normais centrais do módulo cúbico na direção analisada F^c .



$$F^c = \frac{F_1 + F_2}{2}$$

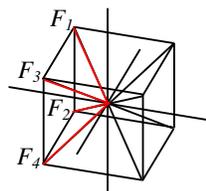
Desta forma, a força equivalente utilizada na determinação da tensão normal está definida por:

$$F_{normal\ equivalente} = F^a + F^b + F^c$$

5.1.2. Tensões Tangenciais.

As tensões tangenciais foram determinadas utilizando o procedimento descrito para a determinação das tensões normais. Entretanto, neste caso a força equivalente somente considera as forças das barras diagonais do módulo cúbico. Dessa forma, também tomando como referência a Figura 5.1, a força equivalente tangencial na direção y num plano perpendicular à direção x (F_{xy}), por exemplo, inclui as seguintes componentes.

A média das subtrações entre as forças da barra superior e da barra inferior de um lado F^a .

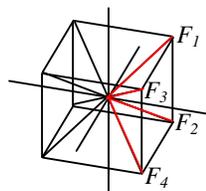


$$F^{a1} = \alpha \cdot (F_1 - F_2)$$

$$F^{a2} = \alpha \cdot (F_3 - F_4)$$

$$F^a = \frac{F^{a1} + F^{a2}}{2}$$

A média das subtrações entre as forças da barra superior e da barra inferior do outro lado



$$F^{b1} = \alpha \cdot (F_1 - F_2)$$

$$F^{b2} = \alpha \cdot (F_3 - F_4)$$

$$F^b = \frac{F^{b1} + F^{b2}}{2}$$

α : tangente do ângulo das barras diagonais com a direção ortogonal analisada.

Assim, a força equivalente F_{xy} é calculada como:

$$F_{xy} = \frac{F^a + F^b}{2}$$

A determinação das demais componentes do tensor de tensões é realizada de maneira análoga ao procedimento descrito.

5.1.3. Exemplos de Verificação.

Utilizando a metodologia proposta para obtenção das tensões foram analisados vários exemplos típicos através de modelos em elementos discretos. Dependendo do caso, os resultados obtidos foram comparados ou com soluções analíticas ou com resultados obtidos a partir do

método dos elementos finitos. Estas análises permitiram determinar critérios relacionados ao número de camadas e tamanho de elemento que deve ser utilizado nos modelos em MED para obter os melhores resultados. Para a visualização das tensões obtidas dos modelos em MED foram utilizadas as ferramentas de pós-processamento de um programa comercial de elementos finitos, onde cada módulo cúbico foi representado como um elemento sólido de oito nós. Dessa forma, cada elemento sólido recebe o tensor de tensões calculado pela metodologia anteriormente descrita.

Os casos analisados foram os seguintes:

- Exemplo 1: Placa submetida a diferentes carregamentos (tração uniaxial, carregamento tangencial e carregamento composto formado por uma componente tangencial na direção XY e uma componente normal na direção Y). Os resultados foram comparados com a solução analítica.
- Exemplo 2: Viga em balanço. Os resultados foram comparados com a solução analítica e a solução numérica obtida com o método dos elementos finitos.
- Exemplo 3: Placa com orifícios distribuídos em forma aleatória. Os resultados obtidos são comparados com a solução obtida pelo método dos elementos finitos.

Para todos os casos foram utilizados coeficiente de Poisson igual a 0,25 e módulo de Young de 182 GPa, assim como todas as análises foram realizadas dentro do comportamento elástico linear.

5.1.4. Placa Submetida a Diferentes Carregamentos (Exemplo 1)

As dimensões da placa e os carregamentos estudados são mostrados na Figura 5.2. Para a comparação foi escolhida a tensão equivalente de Von Mises obtida da solução analítica. Foi aplicada carga prescrita de forma linear uniformemente distribuída, com velocidade de carregamento de $2,4E13$ Pa/s, e tempo total de carga de $1,32E-5$ s, o qual significa uma tensão aplicada de aproximadamente 317 MPa.

Foi verificado que a velocidade de carregamento utilizada não fosse interferir nos resultados das análises realizadas. Isto foi realizado confirmando o balanço energético dos modelos, nos quais, a energia cinética não poderia alcançar valores significativos em relação à energia de deformação elástica. A Figura 5.3 mostra o balanço energético para o caso de tração uniaxial na direção Y onde pode verificar-se o comportamento energético desejado. Essa verificação foi realizada em todos os casos analisados, e permite considerar o problema como quase-estático.

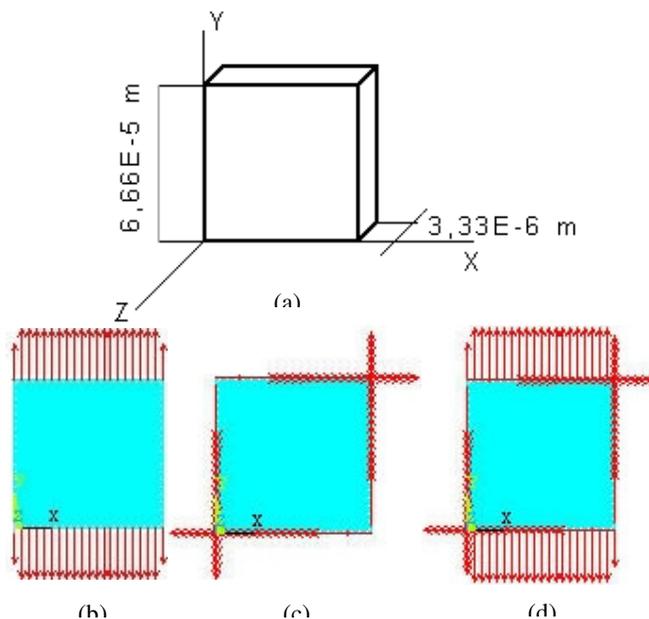


Figura 5.2. Placa: a) Dimensões, b) tração axial em Y, c) carregamento tangencial, d) carregamento composto (tangencial xy e tração y). (dimensões em m)

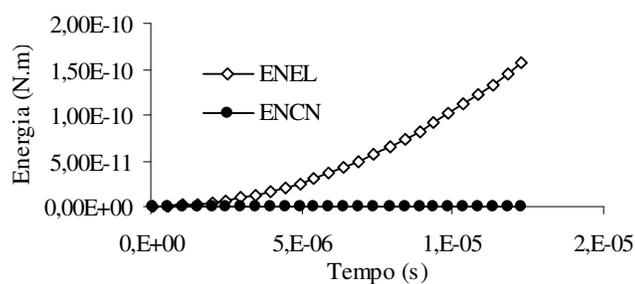


Figura 5.3. Comportamento energético do modelo da placa com tração axial em Y, ENEL: Energia elástica de deformação, ENCN: Energia cinética.

5.1.4.1. Influência do Número de Camadas.

Foi necessário realizar um estudo da resposta dos modelos vinculada ao número de camadas na espessura dos mesmos. O tamanho de elemento utilizado responde à relação $L/L_c = 20$, sendo que L é a dimensão do lado da placa (Figura 5.2(a)) e L_c é a dimensão do módulo cúbico básico ($L_c = 3.33E-6$ m).

As Figuras 5.4, 5.5 e 5.6 apresentam os resultados do erro médio na tensão equivalente de von Mises, relacionado ao número de camadas utilizado no modelo para os três carregamentos estudados respectivamente, (tensão uniaxial na direção Y, cisalhamento simples, estado misto de tensões).

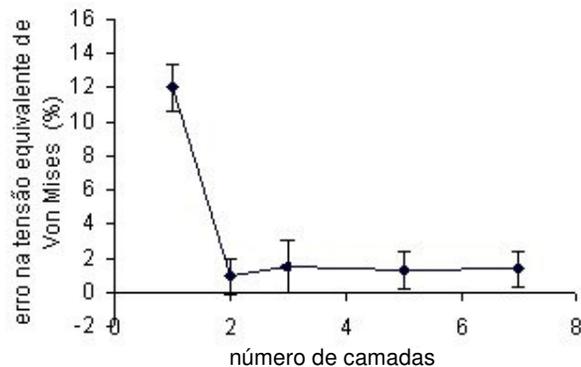


Figura 5.4. Convergência do erro em relação ao número de camadas para a placa submetida à tração uniaxial (a barra vertical mostra a variância).

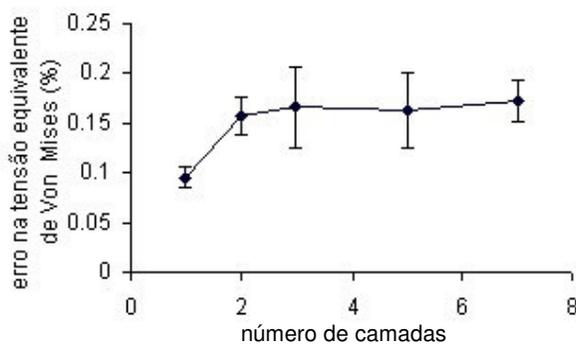


Figura 5.5. Convergência do erro em relação ao número de camadas no caso da placa submetida à carga tangencial. (a barra vertical indica a variância).

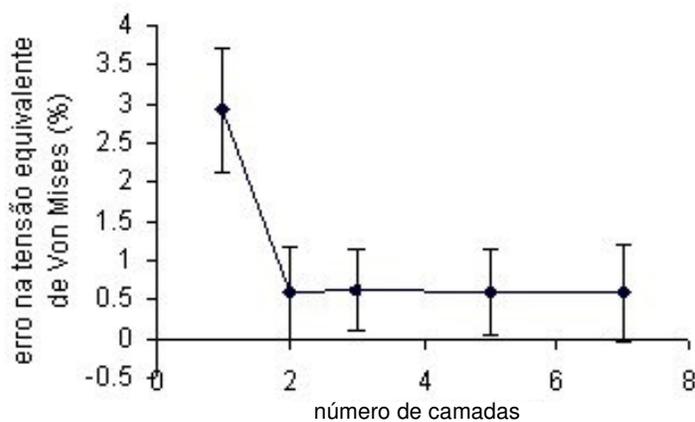


Figura 5.6. Convergência do erro em relação ao número de camadas no caso da placa submetida a carregamento composto. (a barra vertical indica a variância).

O erro na tensão equivalente de von Mises, apresentado nas figuras anteriores corresponde ao valor médio de uma camada do modelo comparado com a solução analítica. Pode-se observar nos três casos analisados, que a partir de duas camadas os resultados

apresentam estabilidade no erro médio obtido. Com variância de no máximo 2% em todos os casos analisados.

Visando complementar a análise, nas Figuras 5.7, 5.8 e 5.9 se mostra a distribuição do erro na tensão equivalente de von Mises no domínio analisado, junto ao seu respectivo histograma, para cada caso de carregamento analisado. Os resultados apresentados são para uma camada do modelo. Os seguintes símbolos são utilizados nos gráficos: NE: número de módulos dentro de uma mesma faixa de erro na camada, NET: Número total de módulos da camada e $E\sigma_{vm}$: Erro na tensão equivalente de von Mises.

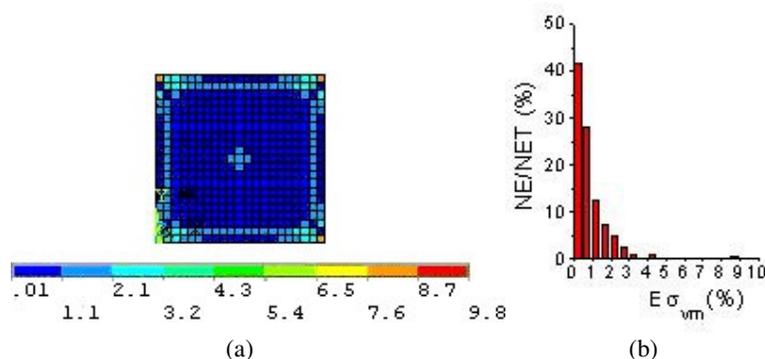


Figura 5.7. Distribuição do erro na tensão equivalente de von Mises numa camada para o caso de tensão normal uniaxial utilizando duas camadas: a) mapa percentual do erro na camada analisada, b) histograma do erro.

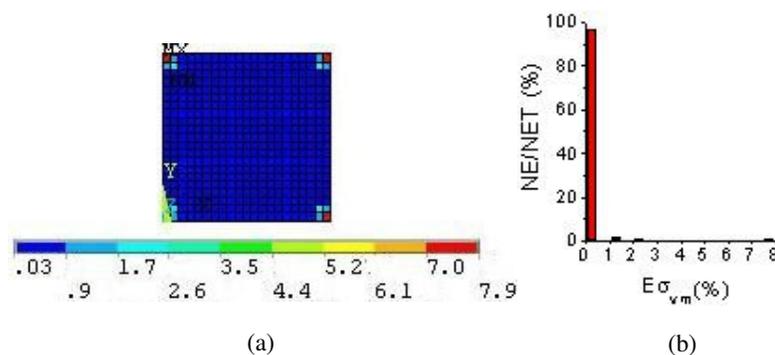


Figura 5.8. Distribuição do erro na tensão de von Mises numa camada para o caso de carregamento tangencial utilizando duas camadas: a) mapa percentual do erro na camada analisada, b) histograma do erro.

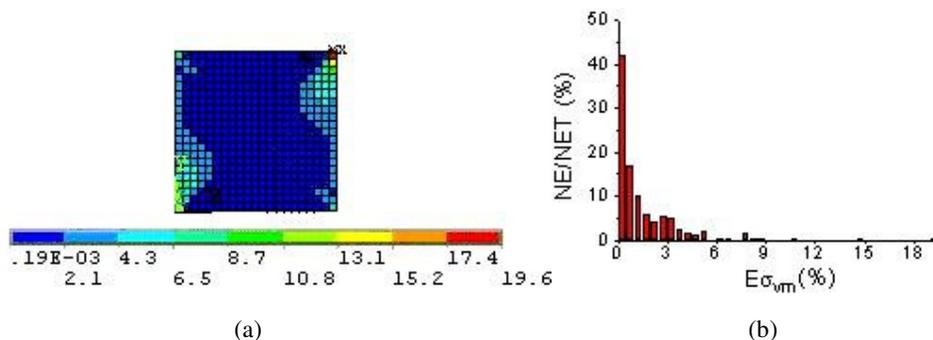


Figura 5.9. Distribuição do erro da tensão equivalente de von Mises por módulo, numa camada para o caso de carregamento misto utilizando duas camadas: a) mapa percentual do erro na camada analisada, b) histograma do erro.

Observando os gráficos anteriores é possível notar que nas análises realizadas com o MED o maior erro concentra-se nas bordas do modelo. Isto se deve, entre outras razões, a uma limitação inerente ao método: os módulos que têm uma face livre (extremos do modelo) têm uma rigidez menor por não possuírem a barra normal central. Este erro tende a diminuir na medida em que se aumenta a discretização, pois sempre surge nas três primeiras fileiras de elementos, independentemente da discretização utilizada. Isso pode ser observado na Figura 5.10, em que é mostrada a distribuição do erro para o modelo de duas camadas submetido a tração uniaxial, agora com uma discretização de L/L_c : 60. Comparando com o mesmo caso, mas utilizando discretização L/L_c : 20, (Figura 5.7), pode-se observar que os maiores níveis de erro se concentram nas primeiras três fileiras próximas da borda em ambos os casos.

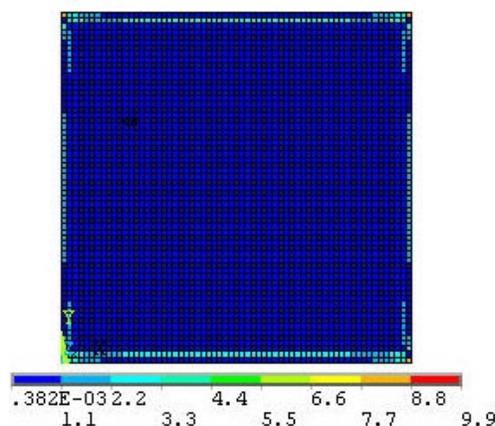


Figura 5.10. Distribuição do erro numa camada para o caso de sessenta elementos no lado da placa, duas camadas e carregamento uniaxial em Y.

5.1.4.2. Influência da Discretização.

Considerando os resultados anteriores em relação ao número de camadas, foi estabelecido que para estudar a influência da discretização fossem utilizados modelos com duas

camadas na espessura. Foram estudadas três discretizações, a constar L/L_c : 20, 60 e 80. Novamente, L a dimensão do lado da placa e L_c o tamanho do módulo cúbico.

A Figura 5.11 mostra o comportamento do erro médio obtido para a tensão equivalente em relação à discretização. Pode-se observar que a partir do L/L_c : 60 não se evidencia redução considerável do erro obtido.

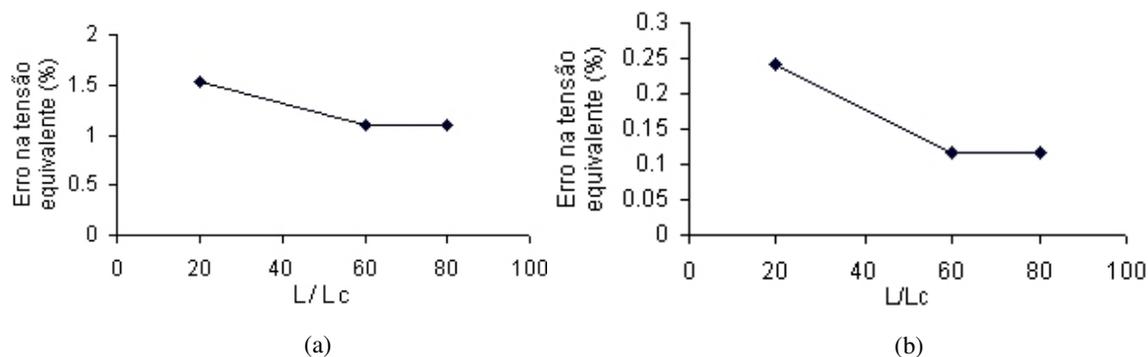


Figura 5.11. Comportamento do erro na tensão equivalente de von Mises em relação à discretização: a) caso de duas camadas com tração axial em Y, b) caso de duas camadas com carregamento tangencial.

5.2. Viga em Balanço (exemplo tipo 2).

A viga em balanço analisada possui razão de aspecto de $L = 10h$, ou seja, comprimento igual a dez vezes a altura onde: $h = 3,33E-5$ m e $L = 3,33E-4$ m, (Figura 5.12 (b)). Foram analisadas cinco discretizações diferentes: h/L_c : 4, h/L_c : 10, h/L_c : 20, h/L_c : 30 e h/L_c : 40, sendo L_c a dimensão do lado do módulo cúbico do MED. Foram utilizadas três camadas na espessura, dessa forma, a espessura da viga e sua seção transversal mudaram de uma discretização para outra.

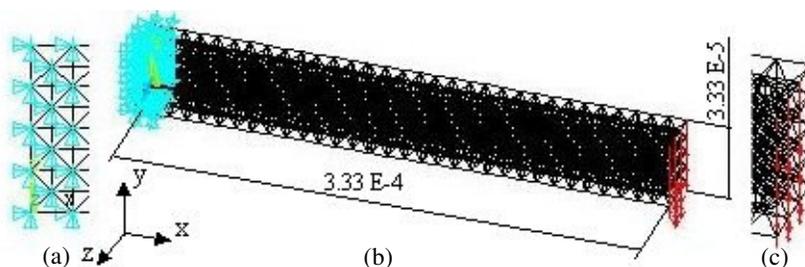


Figura 5.12. Representação geral das características utilizadas na simulação da viga. a) vista geral da viga, b) forma de vinculação utilizada, c) distribuição do carregamento no extremo livre. (dimensões em m)

A carga foi distribuída na seção transversal equivalente à extremidade livre, com magnitude igual a 177 N/m (Figura 5.12 (c)). Na seção engastada foram impostas as restrições de

movimento mostradas na Figura 5.12 (a) e foi considerado estado plano de deformações, (através da restrição dos deslocamentos na direção z)

Em todas as análises foi verificado que a energia cinética se manteve em níveis muito inferiores em relação à energia elástica do sistema.

5.2.1. Comportamento das Tensões e dos Deslocamentos em Relação à Discretização.

A determinação do erro no deslocamento foi realizada comparando com a solução analítica de deslocamento da linha elástica obtida para cada discretização estudada. Observando-se convergência no erro médio na medida em que diminui a discretização, (Figura 5.13(a)). Nas proximidades do engaste o erro se mostra extremamente elevado, para depois convergir bruscamente a valores baixos na maior parte do comprimento da viga (Figura 5.13 (b)) em todos os casos analisados. De forma similar ao comportamento evidenciado pela Figura 5.13 (a) o comportamento do erro no deslocamento ao longo da linha média da viga a partir de uma discretização de h/Lc : 10 é praticamente o mesmo (Figura 5.13 (b)).

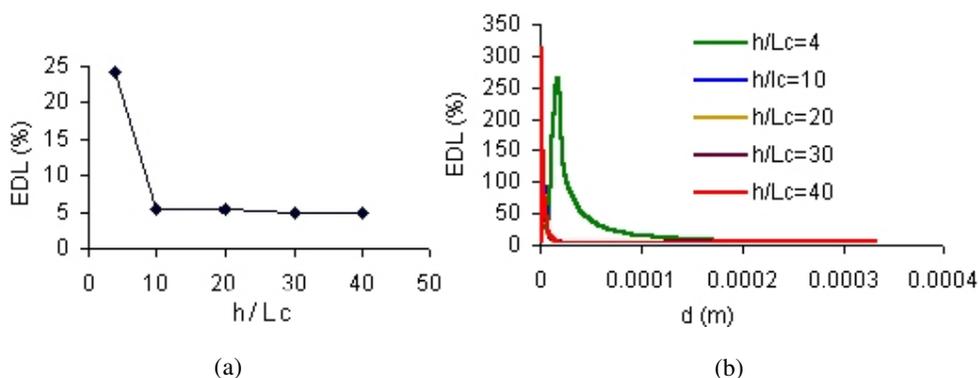


Figura 5.13. Comportamento do erro da viga em relação à discretização: a) Erro médio numa camada na tensão equivalente, b) Erro no deslocamento da linha média. h/Lc : número de elementos na altura da viga, d :distância do engaste e EDL : Erro no deslocamento da linha elástica.

A diferença nas tensões foi determinada em relação à tensão equivalente de von Mises obtida de modelos utilizando o método dos elementos finitos para cada discretização analisada. Nesses modelos foi considerado estado plano de deformações, visando coerência com as condições de contorno impostas ao modelo em MED. O gráfico da Figura 5.14 mostra o valor médio do erro na tensão equivalente de Von Mises numa camada do modelo para as diferentes discretizações estudadas. Conforme previsto, observa-se uma diminuição do valor do erro nas tensões na medida em que é utilizada uma menor discretização e se evidencia convergência para 1% de erro a partir de uma discretização de h/Lc : 30.

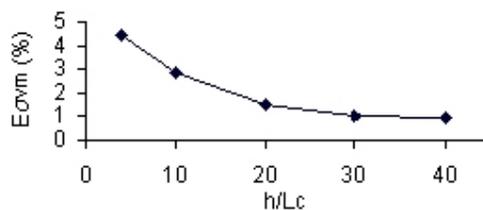


Figura 5.14. Comportamento do erro médio na tensão equivalente de von Mises numa camada em relação à discretização para o caso da viga em balanço. h/Lc = número de módulos na altura da viga, $E\sigma_{vm}$ = Erro médio na tensão equivalente de Von Mises.

Qualitativamente, pode-se observar que a distribuição de tensões obtidas através do MED é similar a obtida pelo método dos elementos finitos, como mostra a Figura 5.15 para a discretização h/Lc : 10, onde foi verificado um erro médio de aproximadamente 3% (Figura 5.14).

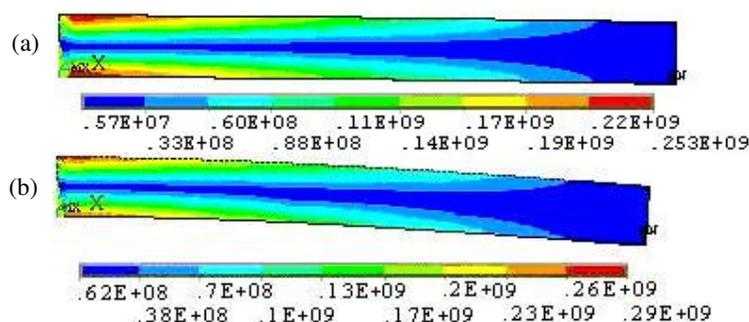


Figura 5.15. Distribuição da tensão equivalente (em Pascal) para uma discretização de h/Lc : 10. a) Modelo de elementos finitos, b) Modelo em elementos discretos MED.

5.3. Placa com Orifícios de Distribuidos de forma Aleatória (exemplo 3)

O estudo deste último exemplo foi motivado pela aplicação que se pretendia realizar, vinculada a resposta micromecânica de materiais microporosos de matriz metálica, em particular do ferro fundido nodular ferrítico.

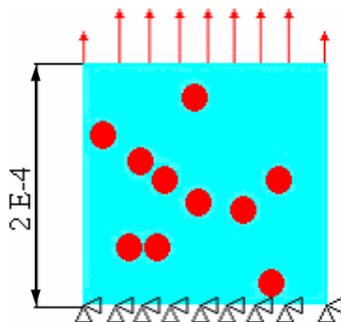


Figura 5.16. Forma de carregamento e vinculação utilizada na placa com orifícios. As dimensões estão metros.

Foi analisada uma placa quadrada de dimensão $L=2E-4m$ com orifícios passantes distribuídos de forma aleatória (Figura 5.16). Nos modelos foram consideradas duas camadas de elementos na espessura e estudadas três discretizações diferentes: L/L_c : 40,60,80, sendo L a dimensão do lado da placa e L_c a dimensão do módulo básico. Os orifícios têm um raio equivalente a 5% do valor do lado da placa ($10E-6m$). Para sua representação nos modelos construídos utilizando o MED, foi retirada a capacidade de transmitir esforços das barras localizadas na região dos mesmos, criando uma descontinuidade no modelo com a forma do orifício. Na Figura 5.16 se apresenta o modelo em MED da placa estudada, com as barras nas quais foi retirada a capacidade de carga indicadas em vermelho.

Foi considerado estado plano de deformações, e foi aplicada uma tensão axial de 320 MPa no extremo superior da placa. Todos os graus de liberdade dos nós do extremo inferior foram restritos (Figura 5.16).

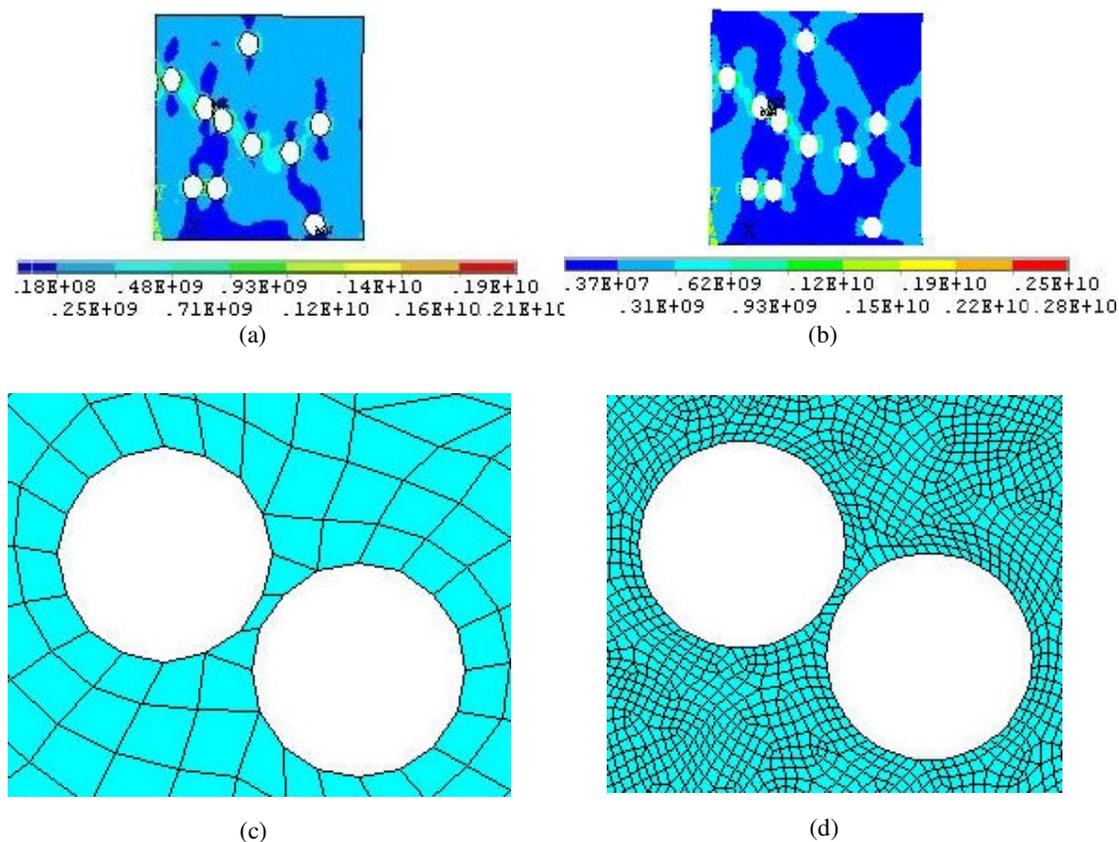


Figura 5.17. Modelo da placa com orifícios utilizando elementos finitos: a) distribuição de tensões para o modelo de discretização $L/40$, b) distribuição de tensões para o modelo de discretização $L/180$, c) detalhe da malha discretização $L/40$, d) detalhe da malha discretização $L/180$.

Para comparar os resultados obtidos do modelo em MED, foi simulado o mesmo problema utilizando elementos finitos. Para o modelo em elementos finitos foi realizado um

estudo de convergência dos resultados segundo o tamanho de malha utilizada. A Figura 5.17 mostra a distribuição de tensões obtida para duas discretizações analisadas no modelo em elementos finitos. A solução mostrada na Figura 5.17 (b) foi utilizada como referência para comparação dos resultados obtidos dos modelos em MED.

5.3.1. Tensões Obtidas com o MED.

A Figura 5.18 mostra a distribuição de tensões e os respectivos tamanhos de malha para os casos extremos de discretização analisados nos modelos em MED, (L/Lc: 40 e L/Lc: 180). Uma análise qualitativa aponta para a existência de distribuições de tensões similares entre a solução de referência, considerando o método dos elementos finitos (Figura 5.17(b)), e a solução obtida através do MED para o caso de maior discretização (Figura 5.18 (b)). É importante salientar que, quando são utilizadas discretizações grosseiras, o MED apresenta dificuldade na representação geométrica dos orifícios, como pode ser observado na Figura 5.18 (c). Isto justifica a falta de qualidade dos resultados obtidos com esta discretização.

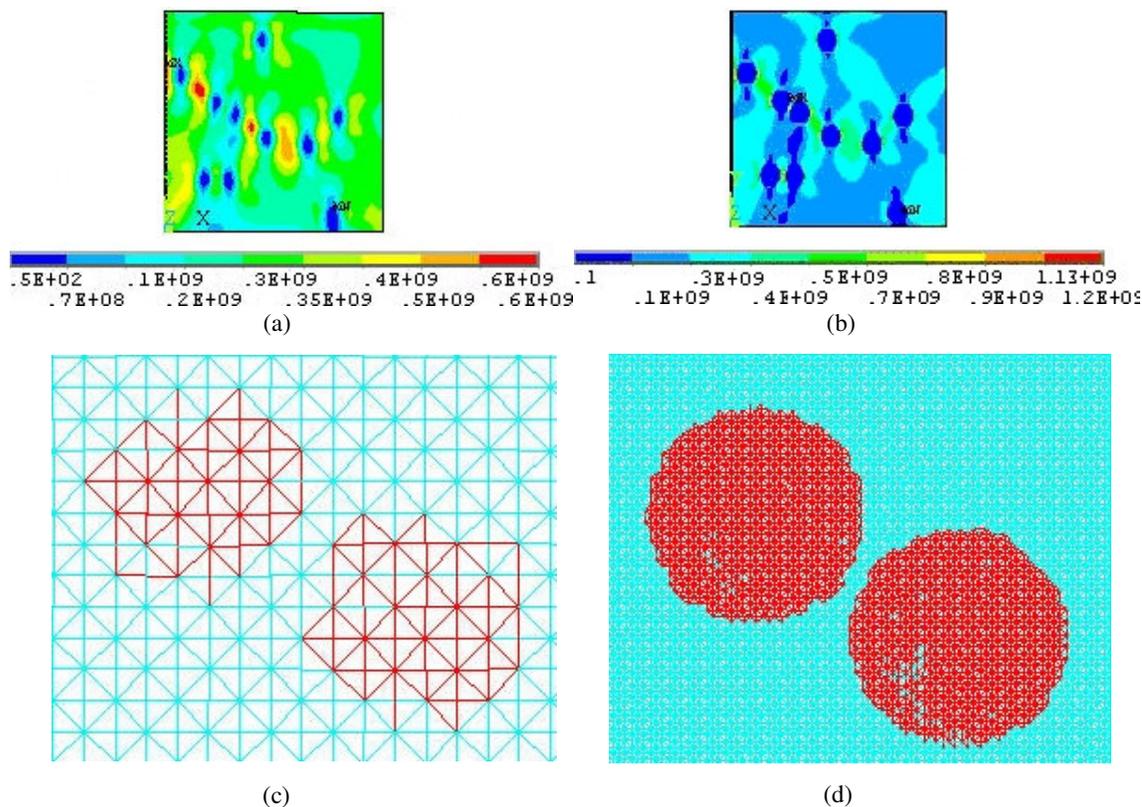


Figura 5.18. Modelo em elementos discretos (MED): a) distribuição de tensões obtida para discretização L/Lc: 40, b) distribuição de tensões obtida para discretização L/Lc: 180, c) malha do modelo de discretização L/Lc: 40, d) malha do modelo de discretização L/Lc:180.

Uma comparação quantitativa entre ambos os métodos permite avaliar melhor a magnitude do erro para cada discretização. Desta forma foi mapeada a tensão equivalente de von Mises ao longo de uma linha, em diferentes posições do modelo, como mostra a Figura 5.19 com as linhas em vermelho.

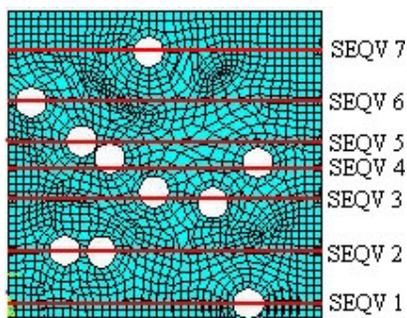


Figura 5.19. Seções nas quais foi mapeada a tensão equivalente de von Mises no modelo em elementos finitos.

As mesmas seções mapeadas no modelo em finitos (Figura 5.19) foram consideradas nos modelos em MED para as discretizações extremas utilizadas ($L/Lc:40$ e $L/Lc:180$). A comparação entre os resultados de ambos os métodos foi realizada para dois caminhos escolhidos: (SEQV 5) e (SEQV 7).

Nas Figuras 5.20, 5.21, 5.22 e 5.23 se apresentam os resultados da tensão equivalente de von Mises obtidos com o MED e do modelo em elementos finitos, juntamente com o histograma da diferença entre os resultados. Nessas figuras é utilizada a seguinte nomenclatura: NPE: número de pontos do caminho, que apresentam uma mesma faixa de erro, NPT: número de pontos total do caminho, $E\sigma_{vm}$: erro na tensão equivalente de von Mises, L: localização no caminho analisado.

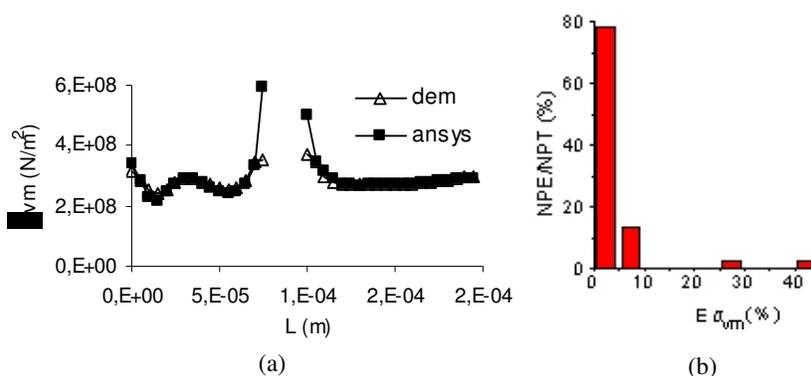


Figura 5.20. Resultados caminho SEQV 5, discretização $L/Lc: 40$. a) tensão equivalente de von Mises, b) histograma do erro na tensão equivalente.

As Figuras 5.20 e 5.21 mostram o comportamento da tensão equivalente de von Mises nos caminhos SEQV 5 e SEQV 7, respectivamente, para a discretização L/Lc:40. Pode-se observar que existe uma tendência similar nos resultados de ambos os métodos utilizados, como confirmam os histogramas. No entanto, se evidenciam diferenças significativas nas proximidades do orifício, onde o erro apresenta valores máximos entre 40 e 60 %, dependendo do caminho analisado.

Esses erros elevados nas proximidades do orifício observados para esta discretização (L/Lc: 40) são devidos, principalmente, aos concentradores de tensão gerados pela precária representação geométrica do orifício com essa malha (Figura 5.18(c)).

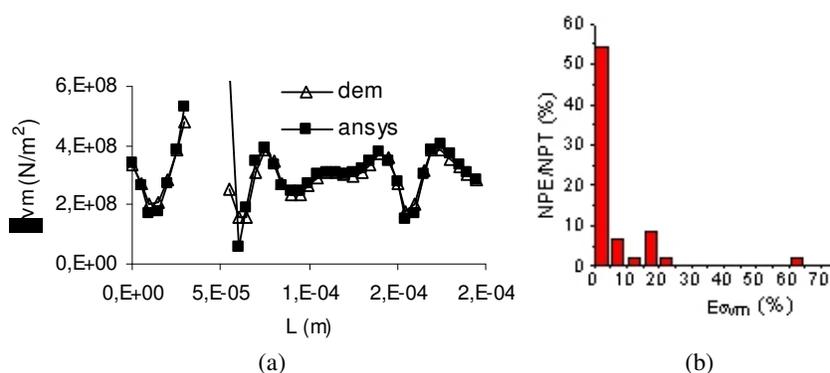


Figura 5.21. Resultados caminho SEQV 7, discretização L/Lc: 40 . a) tensão equivalente de Von Mises, b) histograma do erro na tensão equivalente.

Para a maior discretização (L/Lc:180) observa-se excelente coerência, entre os resultados obtidos com o MED e os de elementos finitos, ao longo dos caminhos analisados (Figuras 5.22 e 5.23 (a)). Somente nas proximidades do orifício ainda estão presentes níveis elevados do erro, mas, desta vez está muito mais concentrado na borda do orifício, como confirmam os histogramas (Figuras 5.22 e 5.23 (b)).

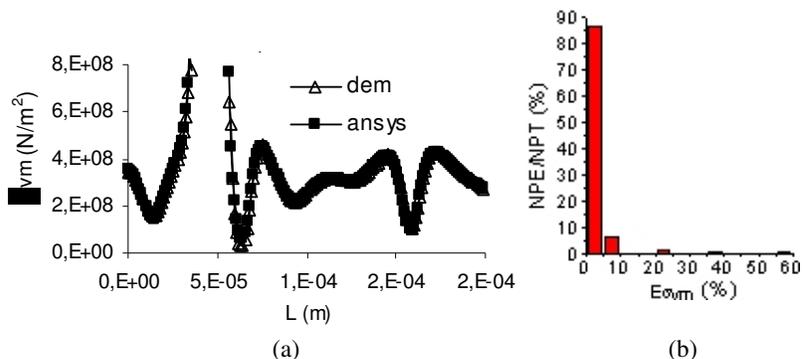


Figura 5.22. Resultados caminho SEQV 5, discretização L/Lc: 180 . a) tensão equivalente de von Mises, b) histograma do erro na tensão equivalente.

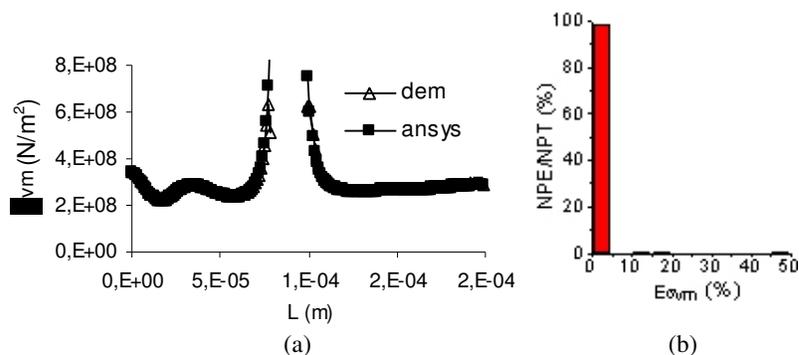


Figura 5.23. Resultados caminho SEQV 7, discretização L/Lc: 180. a) tensão equivalente de von Mises, b) histograma do erro na tensão equivalente.

Dos resultados obtidos, conclui-se que a metodologia para o cálculo das tensões pode ser utilizada com sucesso na aplicação do método dos elementos discretos. Por outro lado foi comprovado, que o emprego de duas camadas na espessura dos modelos seria suficiente para obter resultados aceitáveis, no caso de problemas em que se utiliza a hipótese de estado plano de tensões. O tamanho de malha a ser utilizado dependerá, tanto do problema a ser modelado, quanto da capacidade computacional disponível. Recomenda-se uma análise de convergência para definir este aspecto.

5.4. Outra Alternativa para a Lei Constitutiva da Barra: Lei Trilinear.

Para ilustrar melhor a necessidade de modificar a lei constitutiva da barra, na simulação computacional de materiais que apresentam resposta mecânica não-linear acentuada antes da ruptura, foi analisado um modelo em MED sob tração uniaxial cujas dimensões são mostradas na Figura 5.24.

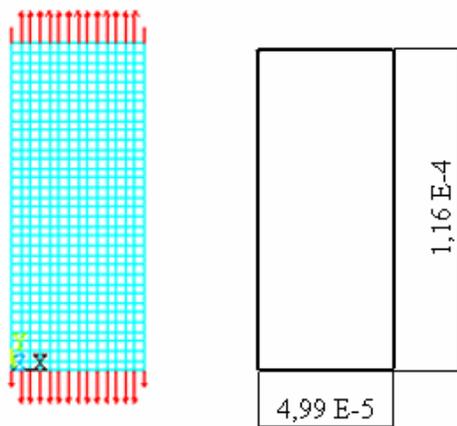


Figura 5.24. Modelo utilizado como exemplo a) dimensões (em m), modelo em MED.

As propriedades mecânicas utilizadas são apresentadas na Tabela 5.1, e correspondem a um Polimetilmetacrilato (PMMA). A tensão aplicada foi de 64 MPa e o tamanho de elemento utilizado foi $L_c=3.33e-6$ m.

Tabela 5.1 Propriedades do material utilizado	
Tenacidade de fratura (MPam ^{0.5})	0,8 - 1,3
Modulo de Young (MPa)	2656
Tensão de escoamento (MPa)	38 - 75
Densidade (kg/m ³)	1200

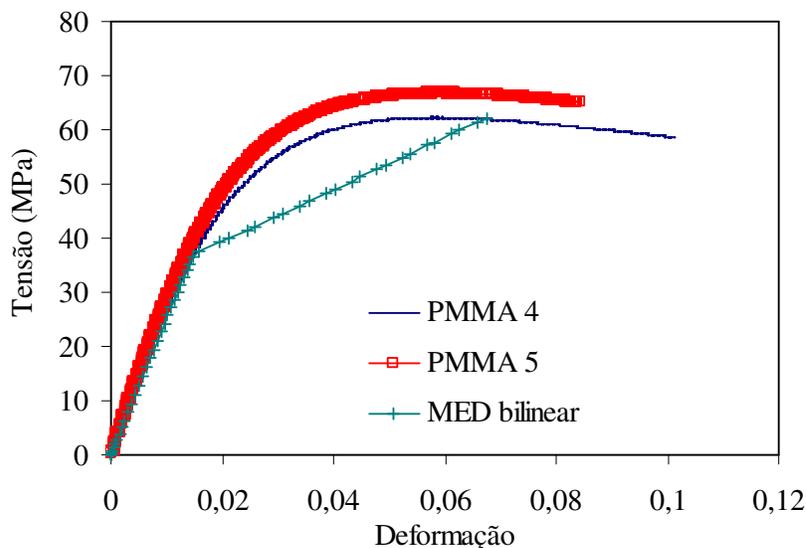


Figura 5.25. Curvas do material real e do modelo em MED com lei bilinear, sendo PMMA 4 e PMMA 5 duas medições experimentais.

O gráfico da Figura 5.25 apresenta a respostas mecânica do material real juntamente com a resposta do modelo em MED. Pode-se observar que a pesar da dispersão considerável evidenciada na resposta do material real a mesma no inclui a resposta do modelo em MED, durante o comportamento não linear. Outros trabalhos desenvolvidos em estudos de fratura e impacto em concreto, rochas, solos etc. utilizando-se o MED, [Iturrioz, 1995, Rocha, 1989] dizem respeito à eficiência do método na simulação computacional destes fenômenos. Entretanto cabe salientar que esses materiais apresentam comportamento frágil, nos quais a resposta tensão deformação é quase linear até a ruptura, diferentemente do material agora estudado (PMMA), no qual se observa uma resposta mecânica não-linear considerável antes da ruptura.

A lei constitutiva atribuída às barras proposta por Rocha, 1989, corresponde ao digrama bilinear da Figura 4.5 (seção 4.4). A mesma considera que, uma vez que o material atinge o limite elástico, começa o processo de perda da capacidade da carga da barra “strain softening”, cuja intensidade vai depender da energia de fratura G_f , e da deformação crítica adotada ϵ_p .

A lei trilinear que será apresentada a seguir sugere uma pequena modificação na lei constitutiva bilinear proposta por Rocha, 1989, visando uma maior flexibilidade da formulação em MED para modelar, de forma mais adequada, materiais de resposta mecânica não linear acentuada.

5.4.1. Lei Trilinear

Visando melhorar a resposta dos modelos em MED em condições de não-linearidade, propõe-se neste trabalho uma pequena modificação da lei bilinear como mostra a Figura 5.26, que foi chamada de lei trilinear. Nessa lei são adicionados dois parâmetros de ajuste, K_{r0} e $REET$, sendo que, $\epsilon_{p1} = K_{r0} \cdot \epsilon_p$ determina a deformação a partir da qual começa se evidenciar diminuição da capacidade de carga da barra, enquanto que o coeficiente $REET = E/E_T$ determina a mudança da rigidez da barra logo após ser atingido o limite elástico do material.

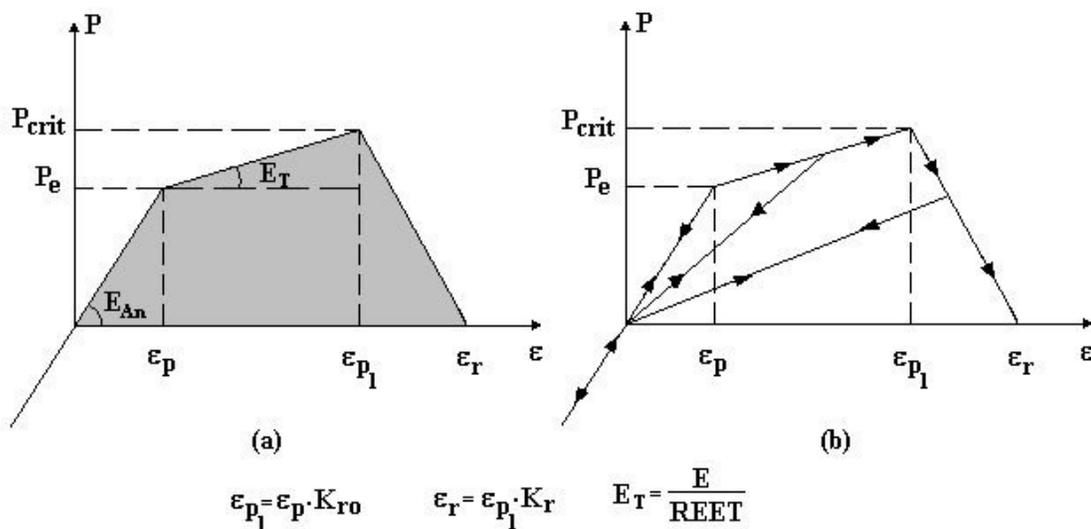


Figura 5.26. Lei trilinear proposta neste trabalho.

Como foi estabelecido por Rocha, 1989, para a relação constitutiva bilinear, a área embaixo da curva da lei trilinear contínua sendo determinada pela energia de fratura G_f e está representada pela eq.(5.1).

$$\int_0^{\epsilon} F(\epsilon) d\epsilon = \frac{G_f A_f}{L_c} = \text{Área embaixo da curva} \quad (5.1)$$

Logo, se faz necessária a determinação do coeficiente K_r que permita estabelecer a igualdade representada pela eq.(5.1). Para isto, a área embaixo da curva foi dividida em sub-áreas como mostra a Figura 5.27, de forma que a eq.(5.1) pode ser escrita segundo mostra a relação

determinada pela eq.(5.2), onde está discriminada a parcela correspondente a cada área da subdivisão mostrada na Figura 5.27.

$$\int_0^{\varepsilon_r} F(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{G_f A_f}{L_c} = \underbrace{\frac{\varepsilon_p^2 E_{An}}{2}}_1 + \underbrace{\varepsilon_p^2 E_{An} (K_{ro} - 1)}_2 + \underbrace{\frac{E_T}{2} (K_{ro} \varepsilon_p - \varepsilon_p)^2}_3 + \underbrace{\frac{\varepsilon_p K_{ro} (K_r - 1) \cdot (E_{An} \varepsilon_p + E_T (\varepsilon_p K_{ro} - \varepsilon_p))}{2}}_4 \quad (5.2)$$

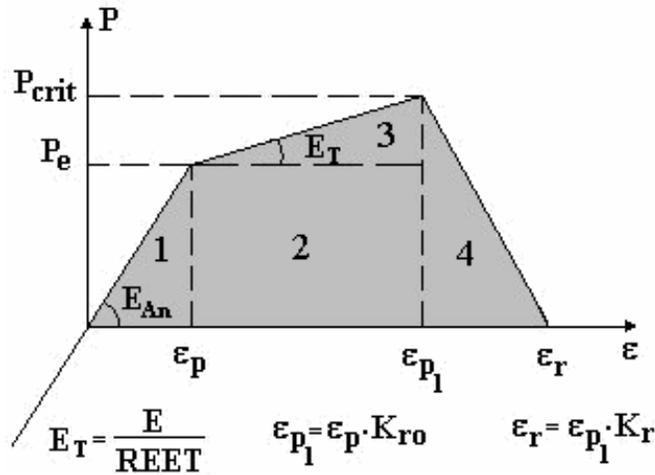


Figura 5.27. Área embaixo da curva da lei trilinear, divisão considerada.

Realizando algumas manipulações algébricas na eq.(5.2), se obtém o valor de K_r para o qual a área embaixo da curva da lei trilinear, se iguala ao valor determinado pela relação $G_f A_f / L_c$ (eq.(5.3)).

$$K_r = \frac{\frac{c_A 2(1-\nu^2)}{Rf c^2 L_c \alpha} + (1 - K_{ro} + \frac{K_{ro}}{REET} - \frac{1}{REET})}{(K_{ro} + \frac{K_{ro}^2}{REET} - \frac{K_{ro}}{REET})} \quad (5.3)$$

Os parâmetros de ajuste K_{ro} e $REET$, vão adotar valores em função do melhor ajuste da curva tensão deformação do modelo em MED, com a curva de tensão deformação do material que esta sendo estudado. Da Figura 5.27 se infere que $K_{ro} \geq 1$ e $K_r \geq 1$. Se $K_{ro} = 1$ a lei trilinear passa ser a lei bilinear proposta por Rocha, 1989.

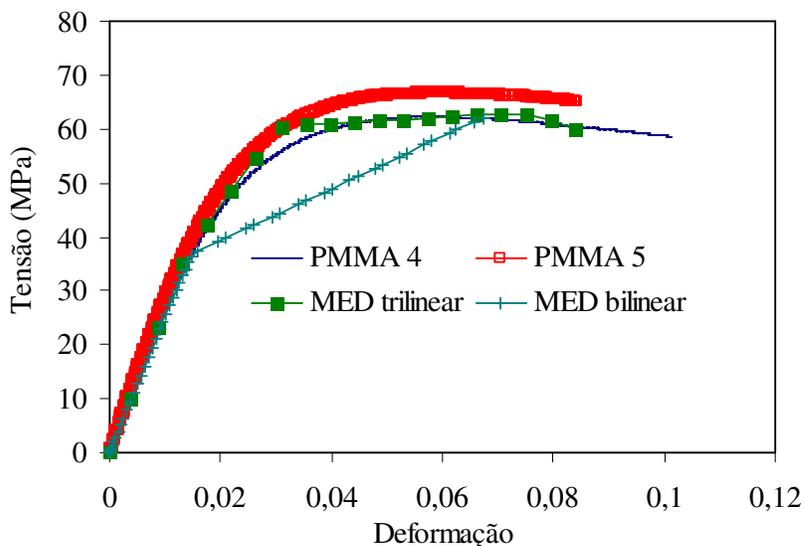


Figura 5.28. Curvas tensão deformação do material real e do DEM com as leis bilinear e trilinear.

A verificação da lei trilinear foi realizada utilizando-se o exemplo apresentado na Figura 5.24. Os valores dos coeficientes K_{r0} e $REET$ foram escolhidos, de maneira que a resposta tensão-deformação do modelo em MED se ajustasse o melhor possível à curva tensão-deformação do material real.

A Figura 5.28 mostra as curvas tensão-deformação dos modelos em MED utilizando-se a lei bilinear e trilinear conjuntamente com as curvas do material real. Pode-se observar como a curva do modelo que utiliza a lei trilinear, consegue acompanhar melhor o comportamento não-linear do material real após ultrapassar o limite elástico.

5.5. Cálculo da Fração de Volume de Vazios

A fração de volume de vazios (f), constitui um parâmetro direto para a avaliação do dano de um material a nível micromecânico. O mesmo foi introduzido por Gurson [1977] em um modelo de dano contínuo que tem sido um dos mais utilizados na simulação computacional de ruptura dúctil. O parâmetro f é obtido de dividir o volume de vazios presentes num determinado volume de controle de material, pelo próprio volume de controle.

Para a determinação da evolução do dano através do parâmetro f , freqüentemente são utilizadas técnicas experimentais sofisticadas [Berdin *et al.*, 2001], ou expressões analíticas que requerem a utilização de diversos coeficientes de ajuste [Tvergaard e Needleman, 1982]. O método dos elementos discretos (MED), por suas características, possibilita a obtenção direta do

parâmetro f nos diferentes estágios do dano até a ruptura. Para os materiais microporosos, o parâmetro f já parte com um valor inicial correspondente aos poros, o qual será chamado de f_0 .

O objetivo desta parte do trabalho é apresentar um método de determinação da fração de volume de vazios utilizando experimentação numérica, através do método dos elementos discretos (MED), visando desta forma, monitorar a evolução dos vazios nos diferentes estágios do dano até a ruptura, bem como verificar a inter-relação com o estado de carga global do modelo numérico. Cabe salientar que a intenção de calcular a variável f seria utilizada neste trabalho como mais um parâmetro de comparação com os dados de f reportados na bibliografia para o material a ser analisado.

5.5.1. Fração de Volume de Vazios Proposta.

Dentro da formulação em MED utilizada, a obtenção de um vazio é realizada eliminando a capacidade de transmissão de esforços das barras correspondentes à região do vazio (Figura 5.29). Desta forma, perante um carregamento, as mesmas não oferecem resistência alguma, comportando-se como se não existisse material. Para verificar se a barra corresponde ou não ao vazio, a mesma é localizada pela coordenada do seu centróide.

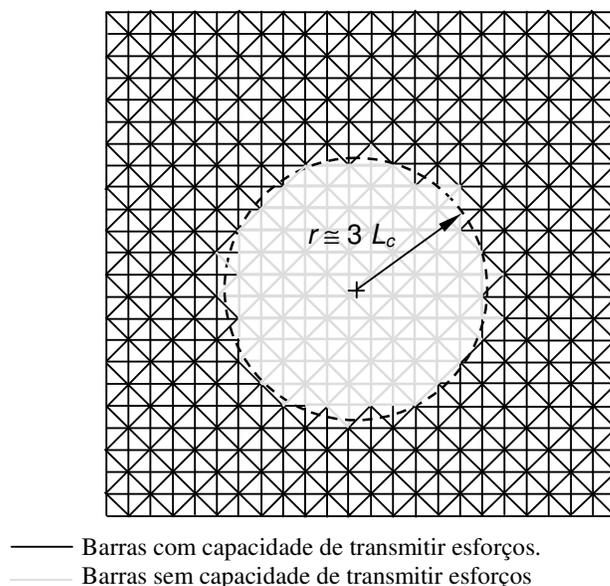


Figura 5.29 Criação de um vazio circular dentro da formulação em MED utilizada no trabalho.

A fração de volume de vazios está determinada pela relação entre o volume correspondente aos vazios e o volume total da estrutura (eq.(5.4)).

$$f = \frac{\text{volume dos vazios}}{\text{volume total da estrutura}} \quad (5.4)$$

Quando um material microporoso é submetido a um campo de tensões ou deslocamentos, os vazios iniciais se deformam incrementado seu tamanho, até o instante em que em algum lugar da parede do poro a tensão alcança o limite de ruptura do material da matriz, ocorrendo a ruptura local da mesma. A partir deste instante se produz a coalescência de vários poros diminuindo a capacidade de transmitir carga do material, ou no pior dos casos, ocasionando a ruptura macroscópica do mesmo [Anderson, 1994]. A metodologia implementada no MED para a medição da fração de volume de vazios, permite capturar todas as fases pelas que passam os vazios até a ruptura do material.

Considerando o volume da célula elementar (módulo cúbico), através da qual é modelado o contínuo na formulação em MED utilizada, a eq.(5.5) considera tanto a variação de volume dos vazios devida à aplicação de um campo de tensões ou deformações, como o surgimento de novos vazios devido a ruptura da matriz.

Segundo a metodologia proposta, primeiramente é calculado o volume de cada módulo cúbico que compõe o modelo. Logo, têm-se condições de conhecer o volume total do modelo (denominador da eq.(5.5)).

O volume de vazios correspondente ao orifício, (primeira parcela do numerador na eq.(5.5)) é obtido multiplicando o volume de cada módulo pelo fator que resulta do quociente entre o número de barras enfraquecidas do módulo ($nbdm$), e o número de barras total do mesmo ($nbtm$).

O volume de vazios referente à ruptura local da matriz é obtido de multiplicar o volume do módulo cúbico, pelo quociente entre o número de barras rompidas do módulo cúbico ($nbrm$) e o número de barras total do mesmo ($nbtm$), (segunda parcela do numerador na eq.(5.5)). As barras contabilizadas no índice ($nbrm$) não consideram aquelas que estão na região correspondente aos orifícios.

$$f = \frac{\sum_{i=1}^{ntm} \left(vol_{mod} \cdot \frac{nbdm}{nbtm} \right) + \sum_{i=1}^{ntm} \left(vol_{mod} \cdot \frac{nbrm}{nbtm} \right)}{\sum_{i=1}^{ntm} vol_{mod}} \quad (5.5)$$

onde:

vol_{mod} = Volume do módulo;

ntm = número total de módulos do modelo;

$nbrm$ = número de barras rompidas do módulo;

$nbtm$ = número de barras total do módulo;

$nbdm$ = número de barras enfraquecidas do módulo;

5.5.2. Determinação do volume do módulo.

A determinação do volume do módulo foi realizada a partir de sua subdivisão em unidades menores. Cada módulo pode ser dividido em doze tetraedros. Determinando-se o volume dos tetraedros chega-se ao volume do módulo cúbico.

O volume de um tetraedro é obtido de dividir por seis, o volume do paralelepípedo formado pelos vetores posição que definem os nós dos vértices e o nó central do módulo cúbico. Por exemplo, a determinação do volume do tetraedro mostrado em vermelho na Figura 5.30 (a) obteve-se dividindo por seis, o volume do paralelepípedo formado pelos vetores (nó 1 – nó 2), (nó 1 – nó 4) e (nó 1 – nó 9) Figura 5.30 (b). O volume do paralelepípedo é o determinante do produto vetorial duplo dos vetores anteriormente mencionados (eq.(5.6)) [Shimada, 1985].

$$V_t = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \text{nó4} - \text{nó1} \\ \text{nó2} - \text{nó1} \\ \text{nó9} - \text{nó1} \end{vmatrix} \quad (5.6)$$

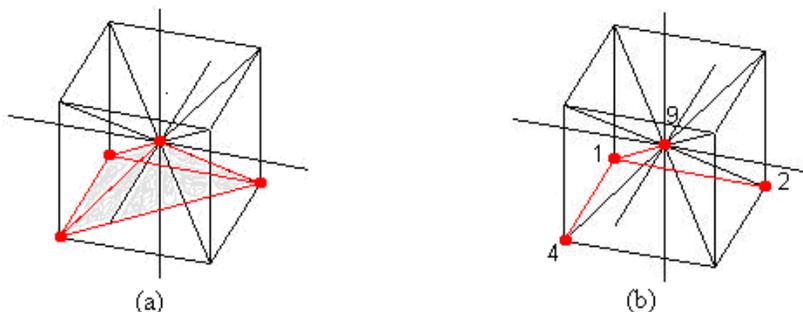


Figura 5.30. Visualização das considerações geométricas na determinação do volume do módulo cúbico. a) visualização de um dos doze tetraedros que compõem o módulo, b) vetores posição que auxiliam na determinação do volume do tetraedro.

Em relação à metodologia de determinação da fração de volume de vazios, cabe salientar que a mesma considera a existência de vazios iniciais, ou seja, seria aplicável para simular a evolução do parâmetro f em materiais microporosos ou em materiais em que a interface matriz-inclusão seja pouco resistente, e a descolagem da interface ocorra nos instantes iniciais do carregamento. Esta metodologia não considera a etapa de nucleação do vazio, mas poderia ser considerada se fosse incluída uma lei constitutiva para a interface matriz-partícula. Considerando as características do material objeto de estudo neste trabalho, a etapa de nucleação não teria importância significativa no processo de dano, desta forma, foram concentrados esforços na verificação das etapas de crescimento e coalescência de vazios.

Na Figura 5.29 é possível observar que a representação de um vazio circular dentro da formulação em MED não tem a aparência de um círculo perfeito. Este fato exigiu a realização de um estudo paramétrico, visando determinar quantos módulos deveriam ser colocados no raio para a obtenção da fração de volume de vazios inicial desejada. Foi verificado que utilizando 3 módulos por raio ($r=3*L_c$) o erro obtido na fração de volume de vazios inicial calculada (f_0) em relação ao valor teórico, é de apenas 0,15 %.

5.5.3. Exemplos de Verificação

Na verificação da evolução do parâmetro f , foram analisados três modelos em elementos discretos. Os mesmos consistiram em uma placa quadrada de $6,66E-5 \times 6,66E-5$ m com um orifício central, mantendo-se constante em todos os casos a fração de volume de vazios inicial (f_0) e igual a $0,08 \pm 0,002$. Mudando-se, de um modelo para outro, somente o formato do orifício (Figura 5.31). O tamanho do módulo cúbico utilizado foi de $L_c=1,665E-6$ m, o que representa um modelo quadrado de 40×40 módulos. Foi considerada a hipótese de estado plano de tensões, utilizando-se dois módulos na espessura dos modelos e foi aplicada nos mesmos, uma tensão axial na direção Y (Figura 5.31) com velocidade de aplicação de $75,4E6$ MPa/s.

Tabela 5.2. Propriedades mecânicas atribuídas às barras do modelo	
Propriedades	Magnitude
Modulo de elasticidade E (MPa)	182000
Coefficiente de Poisson ν	0,25
Densidade ρ (kg/m ³)	7800
Limite de deformação elástica da barra da treliça (ϵ_p)	$0,1758E-2$

Na construção dos modelos computacionais em MED, os orifícios foram obtidos tirando a capacidade de transmitir esforços das barras localizadas dentro da região do orifício. Às barras restantes do modelo (material da matriz), foram atribuídas as propriedades apresentadas na Tabela 5.2. No caso específico da Figura 5.31 é mostrada uma configuração deformada para valores baixos de tensão aplicada, onde as áreas em vermelho representam as barras rompidas e em laranja as barras com certo valor de dano. Em todos os casos foi utilizada a lei constitutiva trilinear.

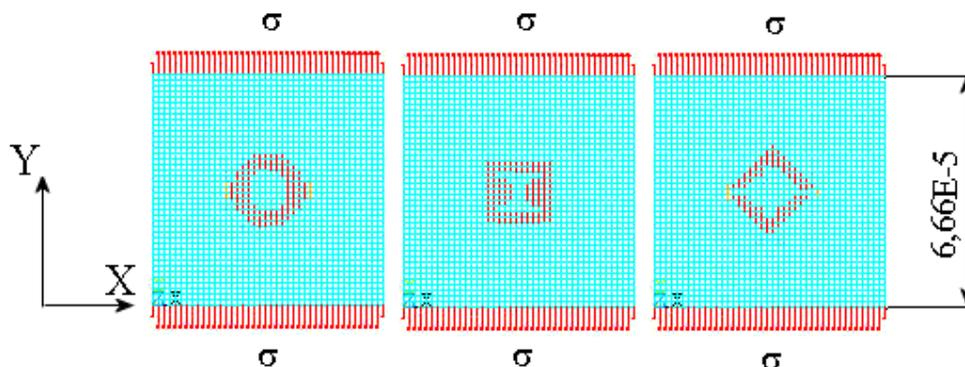


Figura 5.31. Modelos em elementos discretos para os diferentes casos estudados e representação das tensões aplicadas.

Na Figura 5.32 é mostrado o balanço energético para o modelo de orifício em forma de losango, evidenciando-se que os valores de energia cinética somente se tornam consideráveis depois da ruptura do modelo. Um comportamento similar foi verificado nos modelos dos outros casos analisados.

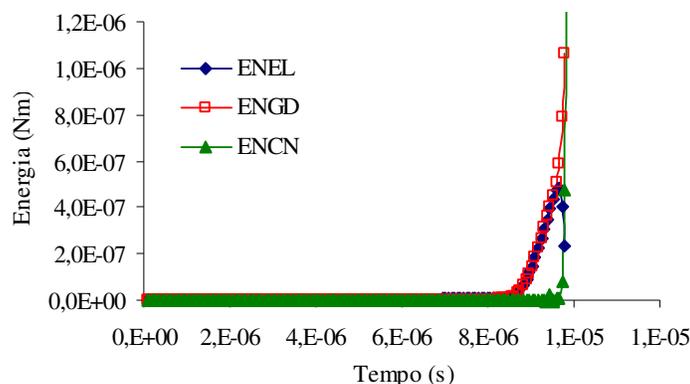


Figura 5.32. Balanço energético para o modelo de orifício losango. ENEL = Energia elástica, ENGD = Energia de dano dissipada e ENCN = energia cinética.

5.5.3.1. Comportamento da Fração de Vazios Proposta para os Exemplos Analisados.

A Figura 5.33 mostra a relação tensão-deformação média, na direção de aplicação da carga (σ_y - ϵ_y), para os modelos estudados. De maneira geral, o comportamento evidenciado era esperado.

Para o modelo com orifício em forma de losango se observam os menores valores de resistência e tenacidade, mostrando-se coerente com a geometria de orientação desfavorável com respeito à direção de carregamento, a qual favorece a ocorrência de concentração de tensões, provocando a ruptura prematura do modelo.

Para os modelos com orifício circular e quadrado, se observa um comportamento similar porém, o último mostrou-se mais resistente e tenaz. Esta diferença era esperada, pois o orifício em forma quadrada tem orientação favorável com relação à direção de carregamento. Assim, a influência da concentração de tensões se evidencia de forma mais severa no orifício circular. Acredita-se que esta diferença conseguiria ser reduzida para modelos com tamanho menor de elemento (L_c), pois a representação geométrica do orifício seria mais eficiente e portanto, não seriam gerados concentradores de tensão além dos que correspondem a esta forma geométrica.

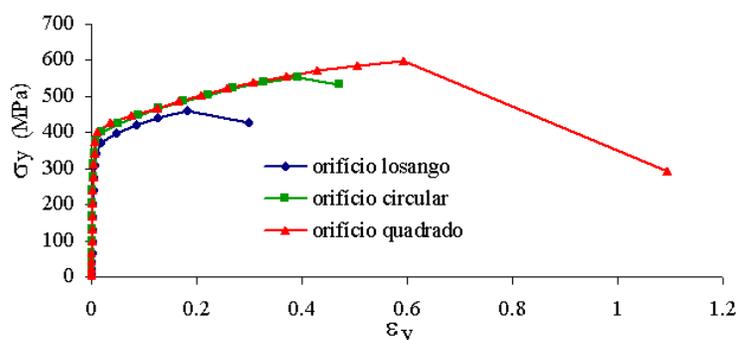


Figura 5.33. Curvas tensão (σ_y), vs deformação ϵ_y dos casos analisados.

Na Figura 5.34, é mostrado o comportamento da fração de volume de vazios (f) em relação à deformação média do modelo na direção Y (ϵ_y). Uma análise qualitativa evidencia que existe correspondência entre as curvas da Figura 5.34 e o correspondente comportamento da fração de volume de vazios. O modelo de orifício quadrado, que apresentou os maiores valores de deformação, mostrou maior valor final do parâmetro f . Correspondência similar é observada para os modelos de orifício circular e losangular.

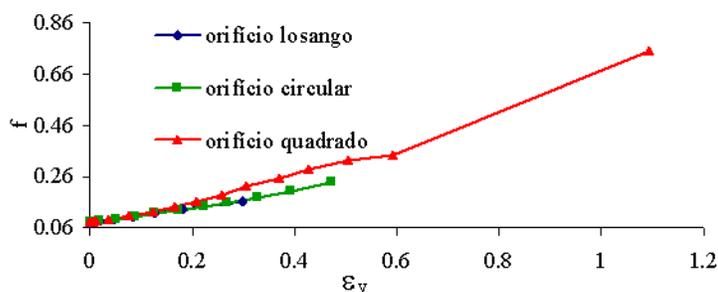


Figura 5.34. Comportamento do fator f para os casos analisados.

A Figura 5.35 mostra a relação entre a distribuição de tensões do modelo e o valor da fração de volume de vazios correspondente, para os três exemplos estudados, em diferentes estágios do carregamento. Pode-se observar que nos estágios iniciais, e até, os primeiros instantes

do comportamento não-linear, a fração de volume de vazio do modelo de orifício losangular evidencia um maior crescimento relativo do que os outros casos analisados, inclusive passa ser o maior valor dentre os casos analisados, quando é atingida a tensão de 400 MPa. Este comportamento está relacionado com a concentração das tensões que caracteriza a forma geométrica losangular, a qual propicia uma maior deformação local nestes modelos e o vazio experimente taxas de crescimento maiores. Este fato contribui também com a ruptura prematura do modelo.

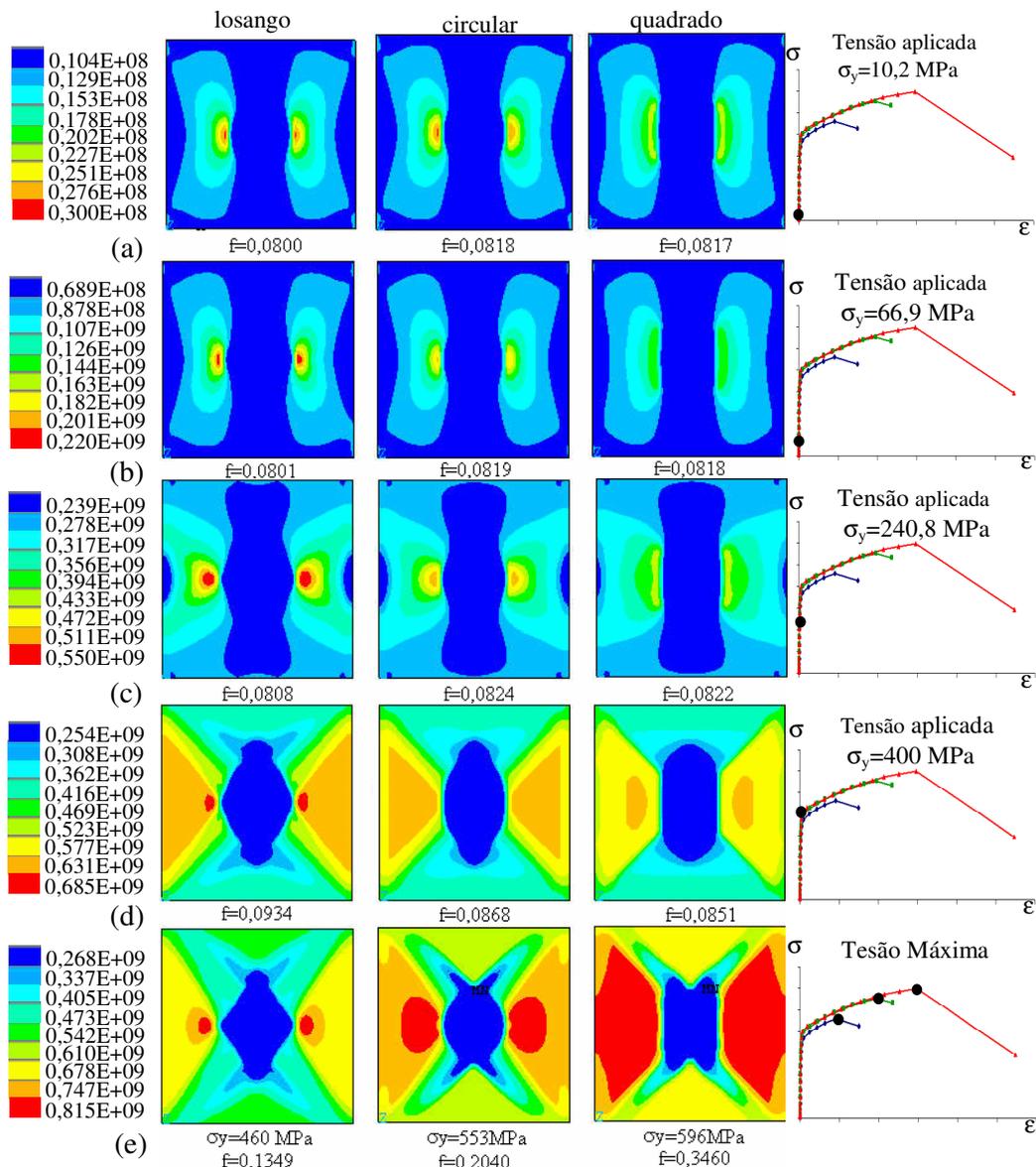


Figura 5.35. Distribuição de tensões na direção y (σ_y) em MPa para os casos estudados em diferentes estágios do carregamento a) distribuição de tensões para 10,2 MPa aplicados, b) distribuição de tensões para 67 MPa aplicados, c) distribuição de tensões para 240,8 MPa aplicados, d) distribuição de tensões para 400 MPa aplicados, e) distribuição de tensões para tensão máxima.

Nas formas geométricas que favorecem menos a ocorrência de concentração de tensões (orifício circular e quadrado), as mesmas estão mais uniformemente distribuídas no contorno do orifício. Assim para altos níveis de tensão aplicada, maior porção do perímetro do orifício estará sob tensões acima da tensão de escoamento do material, portanto, nesses modelos a fração de volume de vazios (f) até a ruptura, é maior.

A configuração deformada dos modelos em MED é mostrada na Figura 5.36

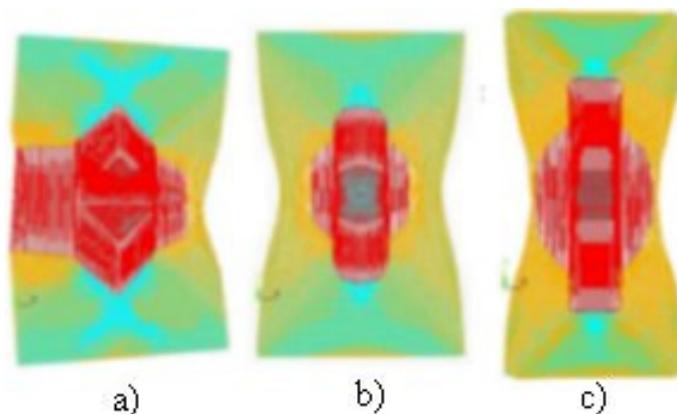


Figura 5.36. Configuração deformada dos modelos em MED para o último ponto da curva tensão deformação

Os resultados obtidos nesta parte do trabalho evidenciam, que a forma proposta para se obter a fração de volume de vazios (f) permite descrever a evolução do dano. Além disso, a mesma está diretamente inter-relacionada com o comportamento global do modelo, o que sugere o DEM como uma ferramenta potencialmente adequada para aplicações em micromecânica de fratura. Por outro lado, os resultados indicam que o comportamento da fração de volume de vazios depende da forma do vazio, e portanto, da distribuição de tensões na borda do mesmo.

5.6. Cálculo de Parâmetros Fractomecânicos Utilizando-se o MED.

Nos fundamentos teóricos foram apresentados os parâmetros fractomecânicos mais utilizados na mecânica da fratura. O cálculo destes parâmetros dentro da mecânica dos sólidos constitui um tema que tem despertado o interesse de muitos pesquisadores da área de análises numéricas, e novos trabalhos e técnicas são periodicamente acrescentados ao ferramental de cálculo existente, entre as quais se destacam o FEM e o BEM. Uma compilação clássica de métodos numéricos e analíticos é apresentada em Aliabadi e Rooke, [1991].

O objetivo fundamental da mecânica da fratura consiste em determinar quais são as condições em que uma trinca propaga de forma instável, ou seja, quando o parâmetro fractomecânico monitorado atinge o valor crítico. Computacionalmente, simular a propagação

em forma instável é uma tarefa bastante complexa para os métodos numéricos convencionais (elementos finitos, por exemplo). Neste sentido, existem trabalhos de adaptação dos métodos convencionais para conseguir simular a propagação instável de fissuras, como é o caso do método dos elementos finitos com interfaces coesivas [Needleman, 1987].

O método dos elementos discretos, proposto por Hayashi, 1982, apresenta características específicas que o colocam numa situação bastante favorável para a simulação computacional de fenômenos de fratura, inclusive para a propagação instável de defeitos.

O objetivo desta parte do trabalho consiste em verificar a capacidade do método dos elementos discretos em simular, o comportamento de parâmetros fractomecânicos com ênfase na situação crítica de propagação instável de defeitos. A verificação é realizada através da análise por elementos discretos de alguns problemas clássicos da mecânica da fratura. As propriedades do material atribuídas aos modelos são apresentadas na Tabela 5.3.

Tabela 5.3. Propriedades do material utilizadas nos exemplos estudados	
Propriedade	Magnitude
Módulo de Elasticidade (E) N/m ²	2,1x10 ⁹
Coefficiente de Poisson (ν)	0,25
Densidade ρ kg/m ³	908
Energia de fratura crítica (G _C) N/m	500

Dentre os parâmetros fractomecânicos mais utilizados na mecânica de fratura, poderiam ser citados a energia específica de fratura (ou taxa de libertação de energia) G e o fator de intensidade de tensão K . É possível expressar o parâmetro G como mostra a eq.(5.7) [Anderson, 1994]:

$$G = \frac{dW}{dA} - \frac{dU}{dA} - \frac{dK^*}{dA} \quad (5.7)$$

Onde:

W é o trabalho das forças externas, A é a área da trinca, U é a energia de deformação elástica, e K^* a energia cinética.

Como as cargas são aplicadas lentamente, é possível desconsiderar a contribuição da energia cinética. Além disso, considerando o fato de que estão sendo aplicadas tensões nos extremos da placa, pelo teorema de Clayperon é possível demonstrar que $\frac{dW}{dA} = 2 \frac{dU}{dA}$. Substituindo este termo na eq.(5.7), chega-se à relação representada pela eq.(5.8)

$$G = \frac{dU}{dA} \quad (5.8)$$

Para um determinado valor de tensão aplicada, a eq.(5.8) pode ser numericamente escrita segundo a eq.(5.9), mostrada a seguir.

$$G(\sigma) = \frac{U_{(a+\Delta a)} - U_{(a)}}{\Delta a \cdot B} \quad (5.9)$$

Para a obtenção de $U_{(a+\Delta a)}$, aumenta-se o comprimento da fissura em um módulo L_c , e é repetida a análise. Uma vez obtido o valor de G (e considerando estado plano de deformações), é possível calcular o fator de intensidade de tensões K e posteriormente seu valor normalizado K/K_0 . Considerando as relações entre os parâmetros fractomecânicos tratados nos fundamentos teóricos deste trabalho, chega-se à eq.(5.10).

$$\frac{K}{K_0} = \frac{\sqrt{\frac{GE}{(1-\nu^2)}}}{\sigma\sqrt{\pi a}} \quad (5.10)$$

Nos exemplos analisados a seguir, são verificados através do método dos elementos discretos estes parâmetros fractomecânicos, e utilizada a relação entre os mesmos.

5.6.1. Análise Estática de uma Placa Finita com Trinca Central (exemplo 1):

A Figura 5.37 apresenta de forma esquemática o exemplo analisado com as respectivas dimensões. Foram aplicadas tensões uniformemente distribuídas nas bordas superior e inferior, do modelo, com velocidade de aplicação da carga de 0,00025 Pa/s. É considerado estado plano de deformações.

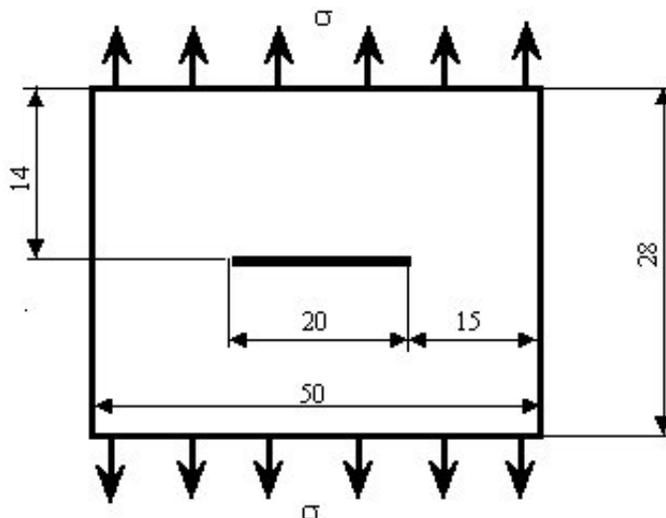


Figura 5.37. Geometria do exemplo a ser modelado, (dimensões em mm).

O modelo em elementos discretos é ilustrado na Figura 5.38. A fissura foi introduzida enfraquecendo os elementos correspondentes à localização geométrica da mesma. Para representar a condição de estado plano de deformações foram restritos os deslocamentos na direção da espessura (Z) em todos os nós do modelo.

Esta primeira etapa está direcionada a estabelecer critérios referentes à discretização a ser utilizada para a simulação de problemas de fratura. Para isso, o exemplo da Figura 5.37 foi analisado utilizando tamanhos de elementos diferentes. O tamanho dos elementos L_c foi normalizado com relação ao semicomprimento da fissura (a).

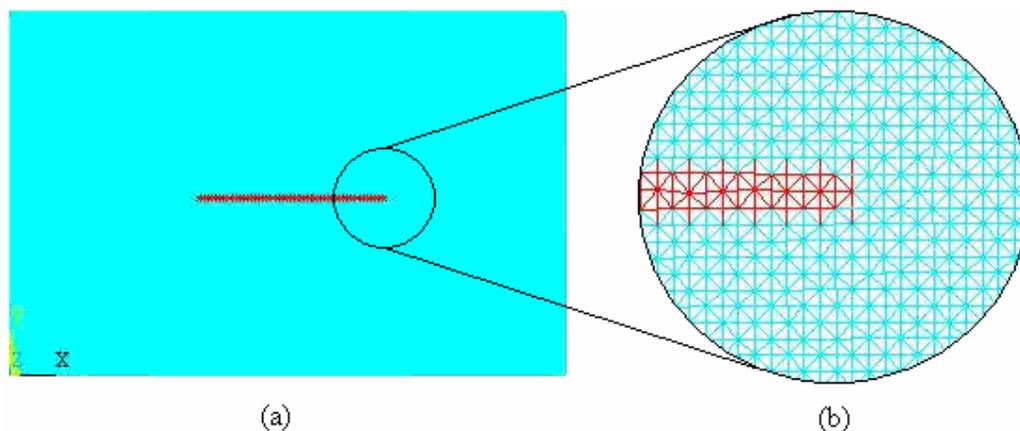


Figura 5.38. Modelo utilizando o método dos elementos discretos de uma placa finita com uma trinca central. (a) Vista geral e (b) detalhe.

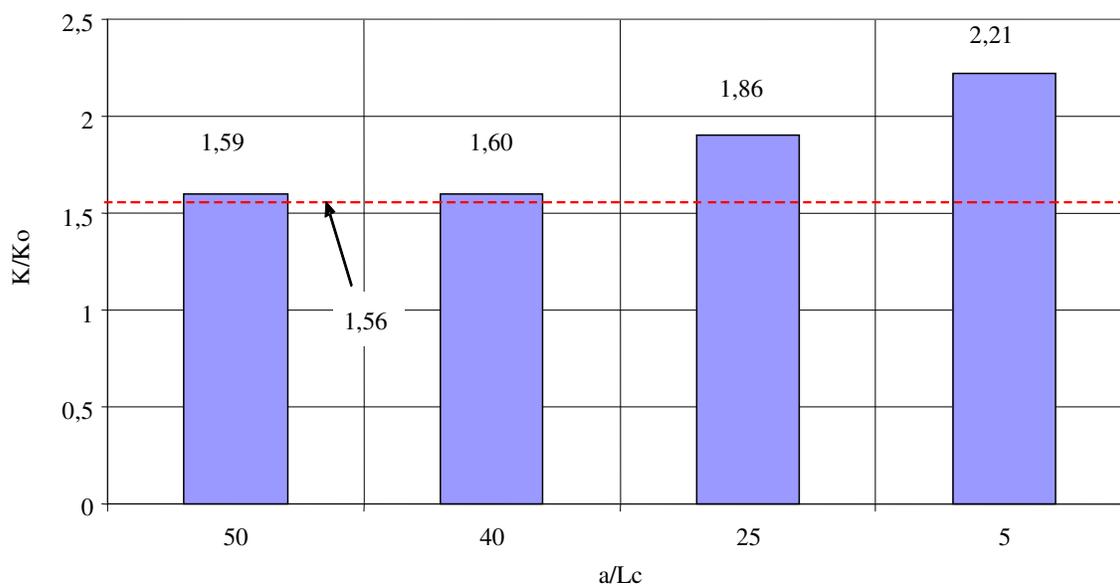


Figura 5.39. Valor do fator de intensidade de tensões normalizado K/K_0 para os diferentes níveis de discretização ensaiadas.

Na Figura 5.39 se apresentam os valores de K calculados para diferentes discretizações (a/L_c : 50, 40, 25 e 5) utilizando as relações entre os parâmetros fractomecânicos definidas anteriormente. Os resultados apresentados na Figura 5.39 estão normalizados com relação à

$K_0 = \sigma\sqrt{\pi a}$. O valor de referência teórico utilizado nesta figura foi obtido a partir do gráfico mostrado na Figura 5.40 [Rooke e Cartwright, 1976]. Assim, utilizando-se as dimensões características do exemplo analisado $a/b=0,4$ e $b/h=0,56$, resultou-se no valor de referência $K/K_0=1,56$.

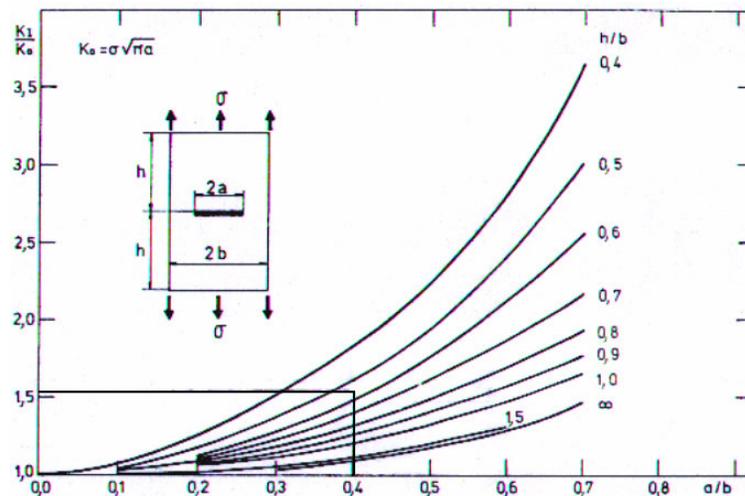


Figura 5.40. Fator intensidade de tensões para o caso analisado segundo tabela proposta por Rooke e Cartwright, 1976.

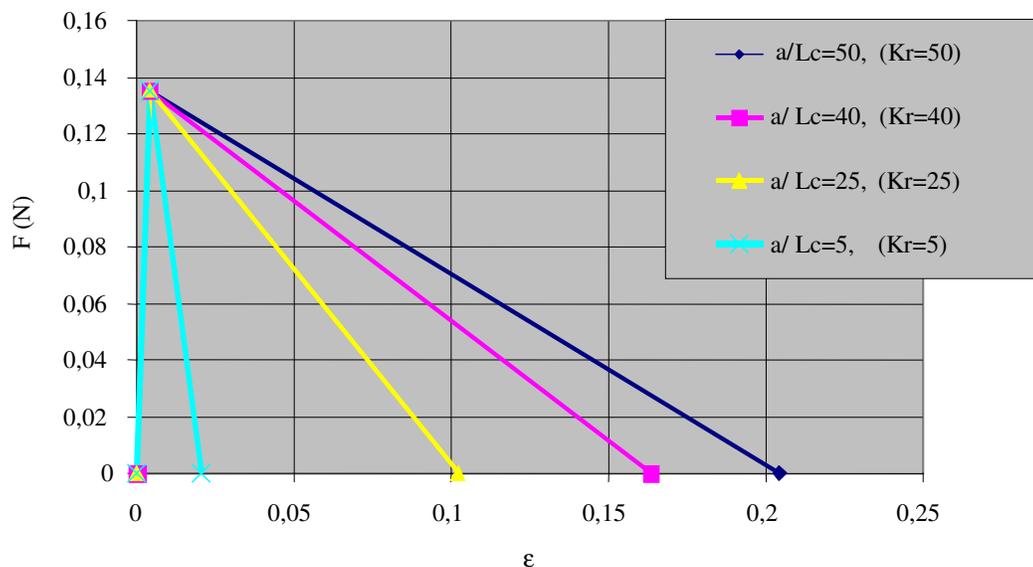


Figura 5.41. Lei constitutiva elementar das barras normais para as diferentes discretizações utilizadas.

A partir dos resultados obtidos, conclui-se que é necessário discretizar o comprimento da fissura utilizando no mínimo 100 elementos ($a/Lc=50$) visando a obtenção de resultados com erro inferior a 2%.

A Figura 5.41 apresenta as leis constitutivas elementares utilizadas para cada discretização estudada na análise de convergência.

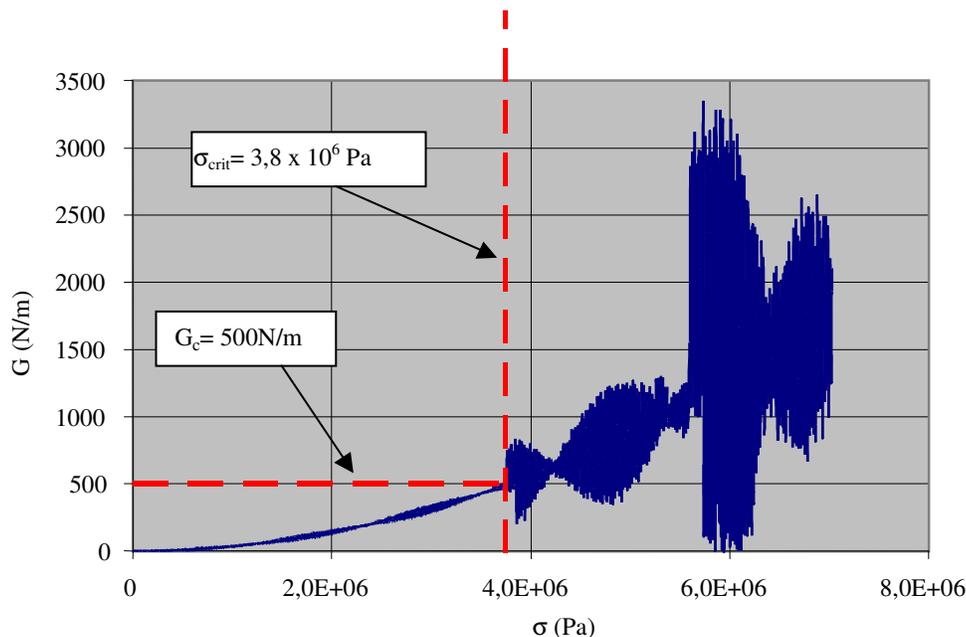


Figura 5.42. Variação da energia específica de fratura G_f com a tensão remota aplicada para o caso de uma placa de dimensões finitas com uma trinca central submetida à tensão prescrita.

A Figura 5.42 mostra a variação da energia específica de fratura G_f com a tensão remota aplicada, para o modelo com discretização $a/L_c=50$. Auxiliando-se da Tabela 5.2, em que aparecem as propriedades do material introduzidas ao modelo, substituindo os respectivos valores na eq.(5.10) e considerando $K/K_0 = 1,56$, se obtém o valor teórico de tensão aplicada que produzirá a propagação instável da fissura $\sigma_{crit} = 3.8 \times 10^6$ Pa. Este valor coincide com o nível de carga para o qual se inicia a propagação da trinca no modelo mostrado na Figura 5.42.

Na Figura 5.43 se mostra o balanço energético do modelo durante o processo em análise, onde é possível observar a variação da energia cinética K^* , da energia elástica U e da energia consumida durante a abertura da trinca R com relação à carga aplicada. Pode observar-se que a energia cinética K^* , apresenta valores desprezíveis até a trinca propagar em forma instável, a partir de onde atinge valores significativos. A energia dissipada durante a propagação da fratura R teve seus valores multiplicados por um fator arbitrado (75), com o objetivo de facilitar a visualização de sua variação ao longo do processo.

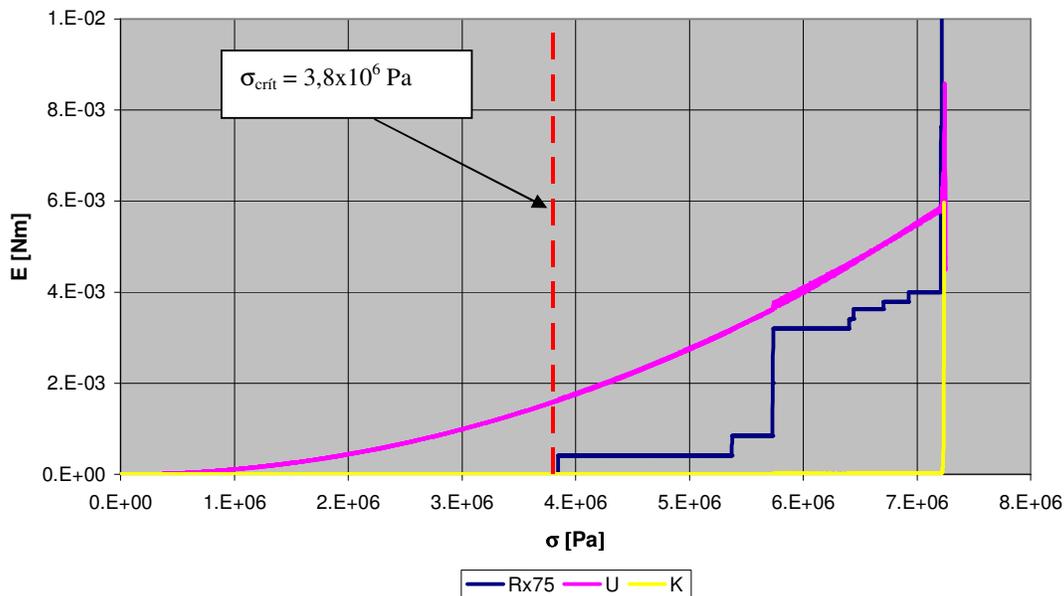


Figura 5.43. Balanço energético durante o processo de ruptura de uma placa finita com trinca central com tensão prescrita, onde R é a energia dissipada na fratura (valores multiplicados por 75 para facilitar a visualização), U a energia elástica e K a energia cinética.

5.6.2. Placa Finita com Trinca Central e Deslocamento Prescrito Aplicado em seus Extremos (exemplo 2)

Neste caso foi analisada a mesma geometria do exemplo anterior, porém sobre a ação de deslocamentos prescritos cuja taxa de aplicação foi de $du/dt=1 \times 10^{-2}$ m/s. Com esta taxa de deslocamento se garantiu uma energia cinética muito pequena em relação às outras formas de energia envolvidas, podendo esta ser desconsiderada. Os resultados em termos de K/K_0 e balanço energético em relação à tensão são apresentados na Figura 5.44 (a) e (b), respectivamente.

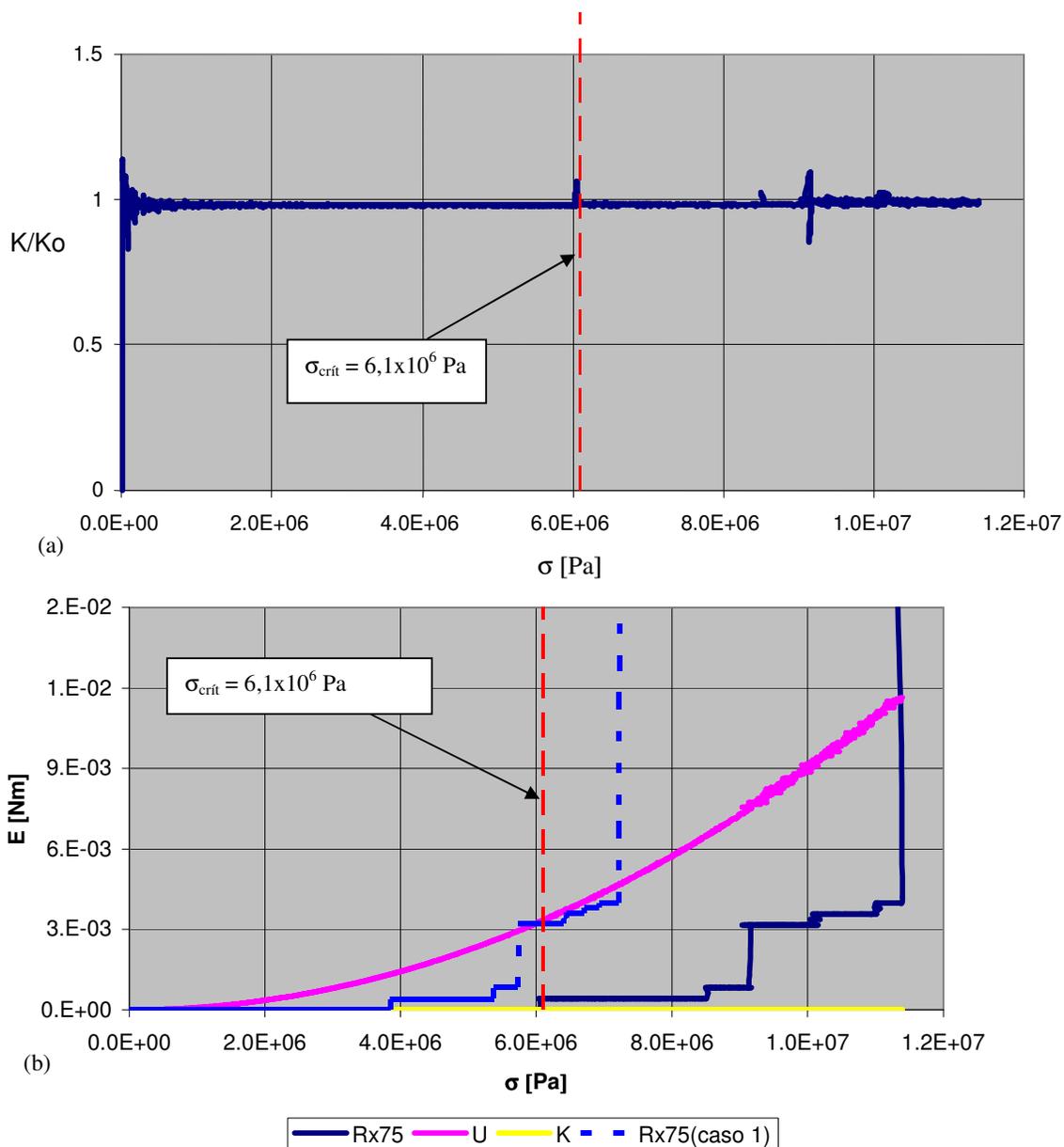


Figura 5.44. Resultados da análise de uma placa finita com trinca central aplicando deslocamentos prescritos nas bordas. (a) Fator de intensidade de tensões adimensionalizado em relação às tensões. (b) Balanço energético.

É importante salientar que, pelo fato de serem utilizados deslocamentos prescritos, o termo dW/dA da eq.(5.7) se anula e a energia específica de fratura passa ser $G = -dU/dA$.

Neste caso, o valor de referência teórico de K/K_0 foi obtido resolvendo o mesmo problema utilizando-se um programa comercial de elementos finitos. O valor do fator de intensidade de tensões normalizado obtido a partir desse modelo foi de $K/K_0 = 1,0$. Para o modelo em elementos discretos foi obtido um valor de $K/K_0 = 0,98$, o que representa uma diferença de 2% em relação à referência adotada. Substituindo as propriedades do material na equação eq.(5.10) e

considerando o valor de K/K_0 de referência, tem-se como resultado $\sigma_{\text{crít}}=6,1 \times 10^6$ Pa. Para esse valor de tensão, pode-se observar uma perturbação na curva da Figura 5.44 (a) e um salto na energia dissipada por fratura no balanço energético da Figura 5.44 (b). O comportamento da energia dissipada na propagação da fratura R para o caso de tensão prescrita também foi mostrado no gráfico da Figura 5.44 (b). Pode-se observar como o processo de propagação da trinca é mais lento no caso de deslocamento prescrito do que no caso de tensão prescrita, o qual está coerente com a teoria.

Na Figura 5.45 apresenta-se a configuração final do corpo de prova rompido juntamente com um detalhe nas proximidades da ponta da trinca inicial.

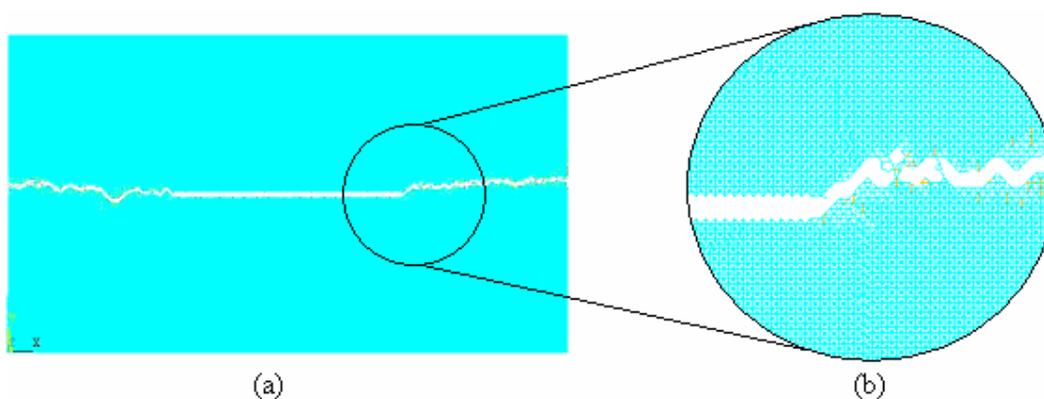


Figura 5.45. Configuração final do corpo de prova rompido. (a) Vista geral e (b) detalhe.

6. ESTUDO COMPUTACIONAL DO MICROMECHANISMO DE FRATURA DE MATERIAIS MICROPOROSOS DE MATRIZ METÁLICA UTILIZANDO-SE O MED.

A resposta mecânica macroscópica de um material é determinada, fundamentalmente, pela sua micro-estrutura e a interação entre seus constituintes a nível de microescala. Estudar esta interação permite um melhor entendimento do comportamento mecânico macroscópico do material, tornando mais previsível sua resposta mecânica. Neste sentido, a mecânica computacional constitui uma ferramenta auxiliar muito útil, tanto para o projeto de novos materiais, quanto para a melhor caracterização mecânica dos já existentes, uma vez, que a experimentação física nessas escalas torna-se extremamente onerosa, ou por vezes, até impossível de ser realizada.

Tradicionalmente, a mecânica computacional tem-se aplicado ao estudo do micromecanismo de fratura de materiais compósitos, utilizando o método dos elementos finitos, e a hipótese de periodicidade da micro-estrutura do material, [Bonora e Ruggiero 2005, Kim *et al.* 2004]. Neste capítulo, é aplicado o método dos elementos discretos (MED) ao estudo do micromecanismo de fratura de materiais compósitos particulados de matriz metálica.

O material tomado como referência para o estudo computacional a ser realizado, foi o ferro fundido nodular ferrítico. Sua escolha esteve influenciada fundamentalmente, pelos seguintes aspectos:

- a) É um material utilizado na fabricação de diversos componentes mecânicos;
- b) Existe suficiente informação na bibliografia ao seu respeito;
- c) As características da sua micro-estrutura permitem, em alguma medida, a realização de simplificações na sua representação através de modelos computacionais.

Nos modelos computacionais, a micro-estrutura do material tomado como referência foi simplificada em alguns aspectos, que serão mencionados mais adiante no item 6.1. Dessa forma, o estudo micro-mecânico, foi desenvolvido sob um elemento de volume representativo (EVR) de uma pseudo-micro-estrutura de ferro fundido nodular ferrítico.

A determinação do EVR foi realizada, analisando a resposta média de variáveis de campo em volumes de controle da pseudo-micro-estrutura considerada, como será descrito no item 6.2. Para minimizar o tempo computacional necessário para a obtenção do EVR, optou-se pela análise em duas dimensões, simplificação esta, que tem sido utilizada por outros pesquisadores [Staub *et al.*, 1998, Prahl *et al.*, 1999, Armero *et al.*, 2000, Kouznetsova, 2001].

6.1. Características da Micro-Estrutura do Ferro Fundido Nodular Ferrítico e Simplificações Realizadas nos Modelos em MED.

De forma geral, a microestrutura de um ferro fundido nodular ferrítico está constituída por uma matriz metálica de grãos de ferrita, na qual estão distribuídos de forma aleatória os nódulos de grafita de diferentes tamanhos, com formato aproximadamente circular. Conjuntamente com os nódulos se observam algumas partículas dispersas de menor tamanho (Figura 6.1).

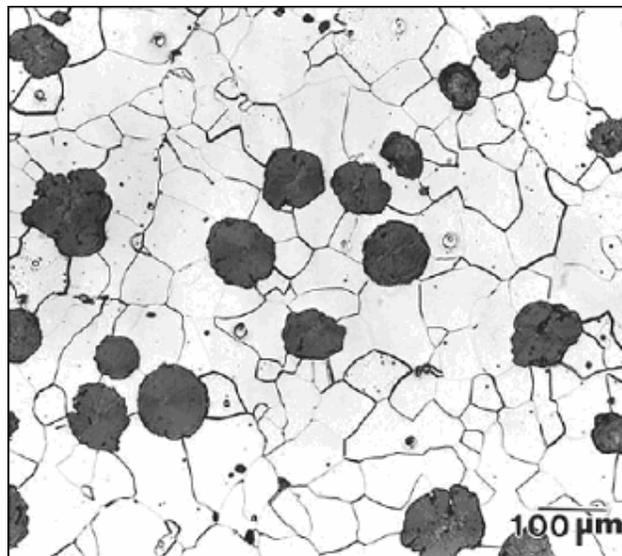


Figura 6.1. Microestrutura de um ferro fundido nodular ferrítico [Metallographer's Guide: Practices and Procedures for Irons and Steels, 2002].

Quando o ferro fundido nodular ferrítico é submetido a carregamento, a descolagem na interface ferrita-nódulos de grafita acontece para baixos níveis de tensão, transformando a microestrutura em uma matriz de ferrita com orifícios em lugar dos nódulos [Berdin *et al.*, 2001, Edolky e Voigt, 1986].

A ferrita tem características dúcteis, e os vazios formados a partir dos nódulos de grafita crescem até coalescerem entre si nas regiões de maior densidade de nódulos (fratura por microcavidades), como revelam as superfícies de fratura observadas por microscopia eletrônica de varredura (Figura 6.2) onde se evidencia a predominância deste tipo de fratura.

Nos modelos em MED utilizados neste trabalho, foram realizadas algumas simplificações em relação à microestrutura do material. De tal forma, que pode se falar em relação à microestrutura dos modelos como uma pseudo-microestrutura de ferro fundido nodular ferrítico, cujas características são explanadas a seguir.

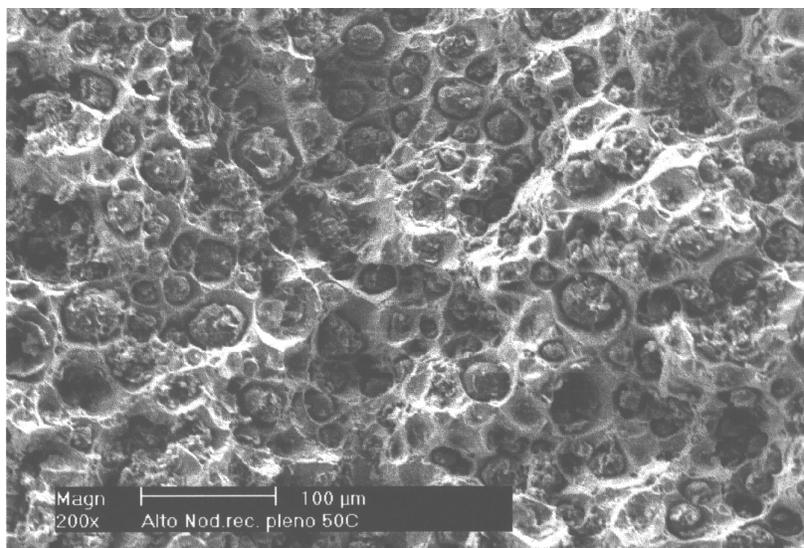


Figura 6.2. Superfície de fratura característica de um ferro fundido nodular ferrítico [Petry, 1999].

6.1.1. Forma e Distribuição das Inclusões de Grafite.

Foram estudadas duas formas de representar o nódulo de grafita nos modelos em MED. Em um dos casos foram atribuídas às barras dos nódulos as propriedades mecânicas do grafite. Como segunda alternativa, considerando as características mencionadas anteriormente, relacionadas à descolagem da interface ferrita-nódulos de grafita, os nódulos de grafita foram considerados como poros ou vazios [Berdin *et al*, 2001]. Neste caso sua obtenção foi realizada diminuindo de forma severa a capacidade de transmissão de esforço das barras correspondentes à região dos nódulos (barras de cor negro na Figura 6.3).

No detalhe da Figura 6.3, pode-se observar, que somente são modificadas as propriedades dos elementos cujo baricentro estiver localizado na região do nódulo.

Foi verificado que utilizando-se 3 módulos por raio ($r = 3 \cdot L_c$), se obtém uma adequada representação geométrica do vazio (Figura 6.3), e o erro na fração de volume de vazios inicial é de apenas 0,15 % em relação ao valor teórico.

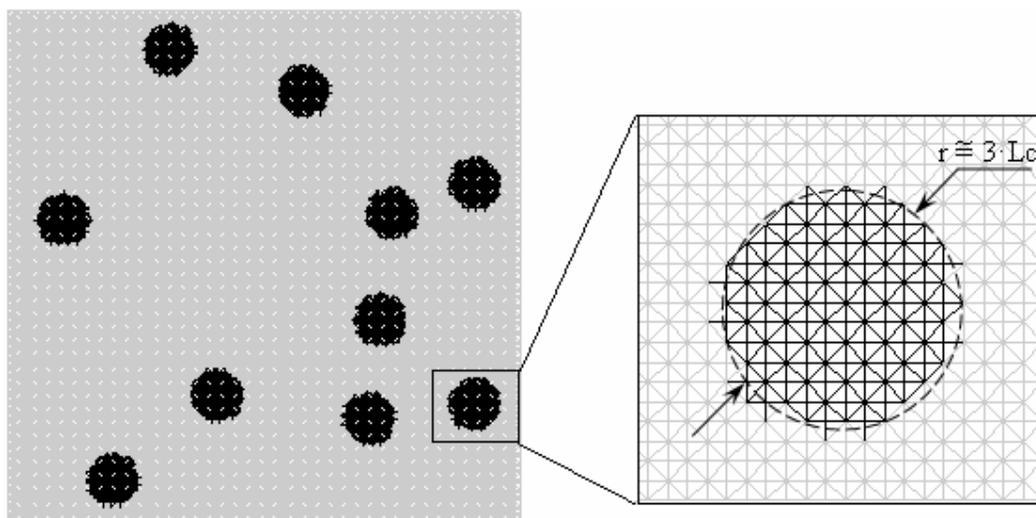


Figura 6.3. Procedimento utilizado para introduzir os poros nos modelos em MED.

Outra simplificação utilizada foi que os nódulos de grafita foram considerados de formato circular, e todos de um mesmo diâmetro. Esta aproximação tem sido muito utilizada em estudos computacionais micromecânicos realizados, com relação à forma das inclusões não metálicas em geral. No caso particular de ferro fundido nodular foi utilizada por Bonora e Ruggiero, 2005.

A distribuição dos nódulos utilizada nos modelos foi obtida através de uma rotina desenvolvida no INTEMA, Universidad de Mar del Plata, sob orientação do professor Adrian Cisilino, que gera de forma automática distribuições aleatórias de nódulos, respeitando as condições de vizinhança características das distribuições de nódulos reais [Bermot e Cisilino., 2000]. O estudo a partir do qual foi obtida esta rotina se resume na Figura 6.4. Amostras de ferro fundido nodular (Figura 6.4 (a)), com número de nódulos por área de 60, 100, 150 e 600 foram analisadas através de um software de processamento de imagens determinando a área e localização de cada nódulo, considerando os nódulos como perfeitamente circulares se obteve o diâmetro de cada nódulo. A partir das análises das distribuições de nódulos reais, foram determinados parâmetros estatísticos como: raio dos nódulos (r), distância entre vizinhos mais próximos (Figura 6.4 (b)), número de vizinhos mais próximos e distância promedio entre vizinhos mais próximos. A determinação do número de vizinhos e a distância entre eles foi obtida através de uma triangulação de Delaunay (Figura 6.4 (c)). A partir desta informação, foi criada uma rotina que gera de forma automática distribuições de nódulos com o raio dos nódulos como parâmetro característico de suas dimensões, (Figura 6.4(d)).

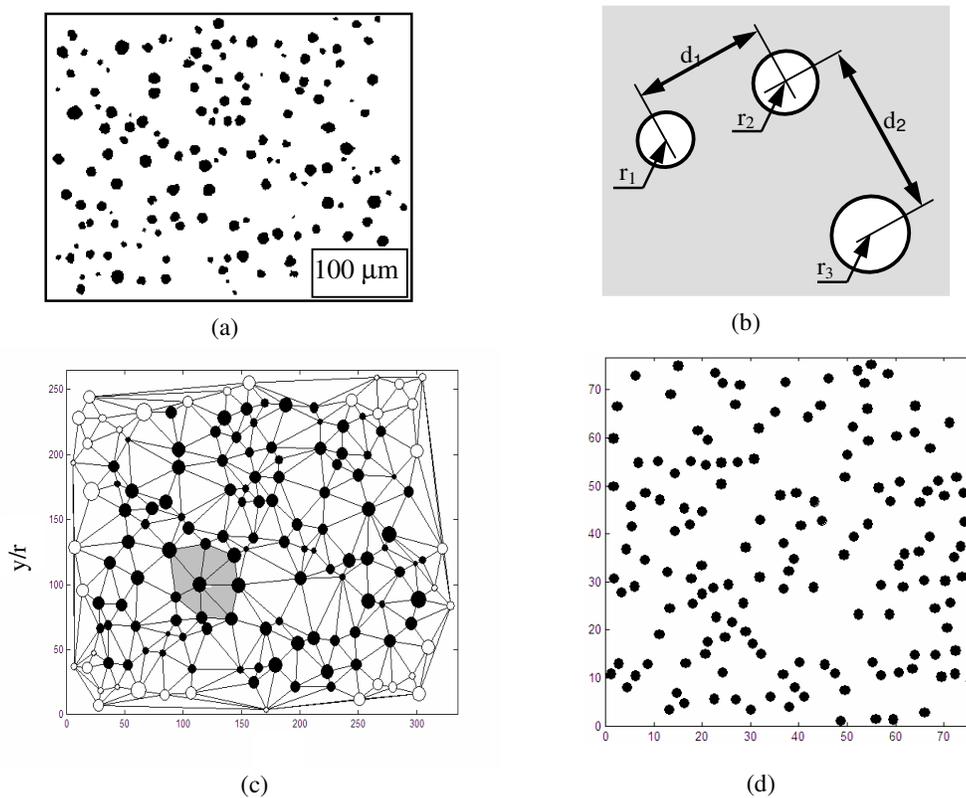


Figura 6.4. Estudo das características da distribuição dos nódulos de um ferro fundido nodular. a) Distribuição de nódulos característica de um dos ferros fundidos analisados, b) Parâmetros verificados nas distribuições de nódulos, c) Determinação do número de vizinhos mais próximos através da triangulação de Delaunay, d) Distribuição de nódulos gerada de forma automática com a rotina desenvolvida.

Na Figura 6.5 é mostrada uma distribuição de 10 nódulos gerada de forma automática (a) e a correspondente representação no modelo em MED (b).

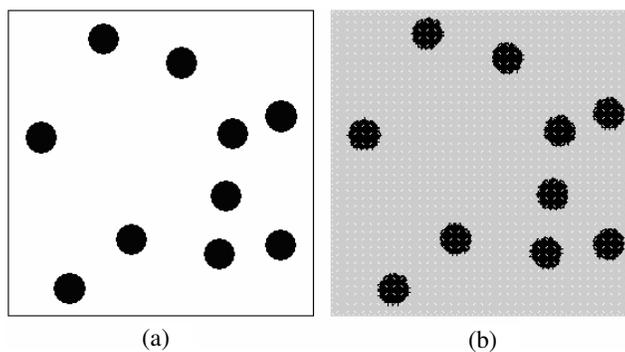


Figura 6.5. Distribuição de nódulos gerada de forma automática (a), e sua correspondente representação nos modelos em MED (b).

6.1.2. Propriedades das Barras Matriz dos Modelos.

Mesmo sabendo que a rigor, a matriz metálica de um ferro fundido nodular ferrítico contém uma série de heterogeneidades características como inclusões finamente dispersas, contornos de grão, etc. (Figura 6.1), neste trabalho, se considera a mesma como sendo homogênea. Cabe salientar que, a formulação em MED utilizada permitiria introduzir aleatoriedade nas propriedades mecânicas da matriz dos modelos, mesmo assim, optou-se por considerar homogeneidade da ferrita. Simplificação esta, usualmente utilizada nos estudos computacionais que envolvem a representação de materiais heterogêneos.

A lei constitutiva da barra se fundamenta principalmente no módulo de elasticidade (E) e na energia de fratura do material (G_c). Logo resta saber, que valores destas propriedades atribuir às barras da matriz metálica dos modelos. Esta tarefa pressupõe a utilização de um elemento de volume representativo (EVR) da pseudo-microestrutura analisada, mas por outro lado, a determinação do EVR requer do conhecimento das propriedades mecânicas.

Para resolver este problema, estimou-se um elemento de volume representativo da pseudo-micro-estrutura de ferro fundido nodular ferrítico que compreende 30 nódulos distribuídos de forma aleatória, cujas dimensões e condições de contorno aplicadas são apresentados na Figura 6.56 O tamanho de elemento utilizado foi $L_c=3,33E-6$ m e a tensão aplicada foi de 390 MPa.

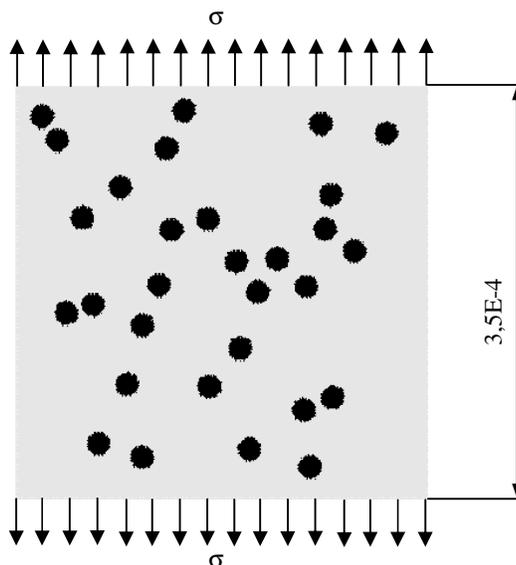


Figura 6.6. Condições de contorno e dimensões do modelo em MED utilizado para o ajuste das propriedades a serem atribuídas às barras do modelo.

As propriedades mecânicas do ferro fundido nodular ferrítico tomadas como referência para a determinação das propriedades mecânicas das barras da matriz dos modelos em MED, são apresentadas na Tabela 6.1.

Tabela 6.1. Propriedades mecânicas do ferro fundido utilizado como referência para o estudo [Berdin <i>et al.</i>, 2001]	
Propriedade	Magnitude
Módulo de Young (MPa)	187000
Tensão de escoamento (MPa)	260
Tensão de ruptura (MPa)	390
Tenacidade de fratura K_{IC} (MPa.m ^{0,5})	77
Fração de volume correspondente aos nódulos (%)	7,7

Para definir o módulo de elasticidade a ser introduzido às barras da matriz do modelo em MED, a resposta tensão deformação do mesmo, sob regime linear elástico, foi comparada com a curva analítica obtida a partir do módulo de elasticidade do material real (Tabela 6.1). Assim, foi variando-se gradualmente o módulo de elasticidade introduzido às barras (Figura 6.7) até verificar-se coincidência, entre as respostas tensão-deformação do modelo em MED e do material real. Como resultado obteve-se um módulo de elasticidade de 250000 MPa para as barras da matriz dos modelos em MED. Considerando que o módulo de elasticidade da ferrita é de 210000 MPa, tem-se uma diferença de 16 %.

Para determinar a energia de fratura (G_c) associada à matriz, foi verificada até a ruptura a resposta tensão vs deformação do modelo em MED, e comparada com a resposta do material real [Berdin *et al.*, 2001]. De maneira similar que para o módulo de elasticidade, foi variando-se a energia de fratura (G_c) introduzida ao modelo em conjunto com os parâmetros K_{r0} e $REET$ até que a curva tensão-deformação do mesmo ajustou-se o melhor possível à curva tensão deformação obtida a partir de um corpo de prova do material real [Berdin *et al.*, 2001]. A Figura 6.8 mostra a curva real e a curva melhor ajustada do modelo em MED. Cabe salientar que para a determinação do G_c seria pertinente contar com a resposta mecânica de vários corpos de prova do material real, visando obter valores de referência mais representativos que os utilizados correspondentes a um único corpo.

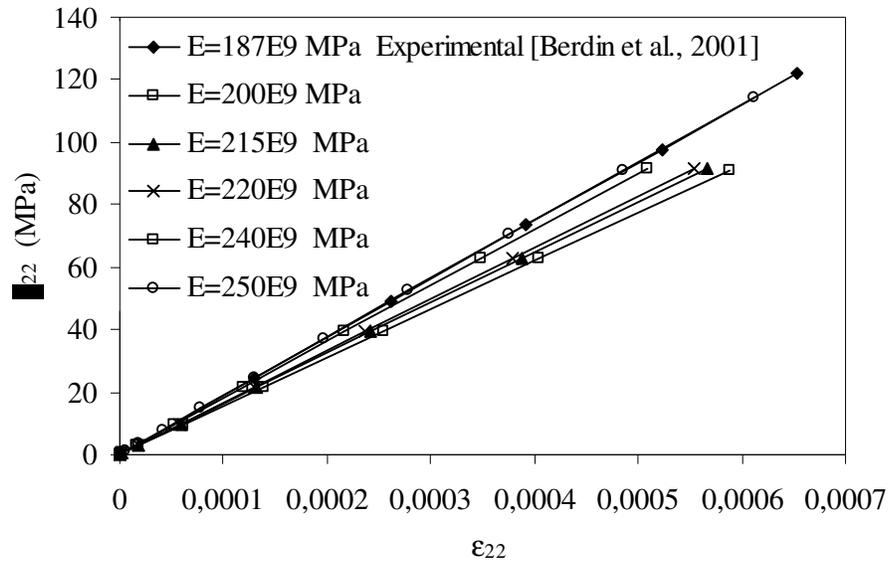


Figura 6.7. Determinação do módulo de Young a ser utilizado nas barras da matriz.

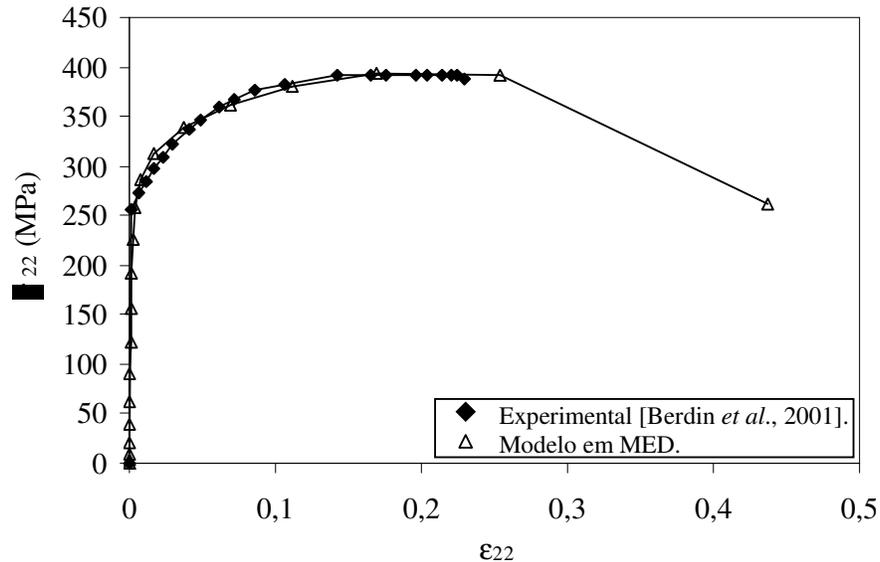


Figura 6.8. Curva do modelo em DEM ajustada com a curva real.

Finalmente, as propriedades atribuídas às barras da matriz do modelo foram módulo de Young $E=250000$ MPa, e energia de fratura $G_c = 11000$ N.m.

6.2. Determinação do Elemento de Volume Representativo

Os processos de fratura a nível micro-mecânico estão determinados principalmente pela interação entre as micro-heterogeneidades. Portanto, o estudo computacional desses fenômenos em materiais com distribuição aleatória dos seus microconstituintes impõe a necessidade de utilizar um elemento de volume representativo (EVR) da sua micro-estrutura [Ostoja-Starzewski, 2006]. Diversos trabalhos têm sido desenvolvidos nesta área, entretanto, grande parte dos

mesmos consideram para o estudo uma célula unitária de morfologia simples, apostando na hipótese de periodicidade. [Bonora e Ruggiero, 2005; Wrigger *et al.*, 1998].

Na determinação do EVR usualmente se utiliza o critério proposto por Hill, através do qual define-se o mesmo, como sendo um elemento de volume que: a) contem todos os constituintes característicos da micro-estrutura considerada, e b) estes constituintes devem estar em número suficiente, de modo que a resposta média do problema seja independente das condições de contorno aplicadas. [Hollister e Kikuchi, 1997; Ostoja-Starzewski, 2006]

O procedimento para a determinação do EVR, consiste na resolução de problemas de valores de contorno em volumes de controle do material, incrementando seu tamanho. Assim, foi analisada a resposta mecânica de volumes de controle (modelos em 2D utilizando o MED) da pseudo-micro-estrutura de ferro fundido nodular ferrítico, incrementando seu tamanho e mantendo constante a fração de volume de vazios inicial $f_0=7,77\%$. Para esta análise os nódulos de grafite foram considerados como poros. No total, foram analisados dez casos (2,5,10,20,30,40,50,60,70 e 80 nódulos) e, para cada caso foram realizadas dez réplicas com distribuições de nódulos diferentes.

Também, como foi descrito na seção 2.2 dos fundamentos teóricos, no caso de se considerar isotropia do material, em vez de serem realizados seis casos de carregamento independentes para determinar as propriedades efetivas, somente é necessário um único caso de carregamento que permita a obtenção de um tensor de tensões de componentes esféricas e desviadoras não nulas [Zodhi, 2002]. Para a análise de EVR realizada, considera-se que o material é isotrópico. Portanto, é considerado um único caso de carregamento utilizando-se tensões prescritas (Figura 6.9), pois essa condição de contorno é válida na presença de defeitos ou trincas [Zodhi, 2002], sendo coerente com a pseudo-microestrutura utilizada (nódulos como poros). Para todos os casos é utilizada a hipótese de estado plano de tensões.

Já que o estudo a ser realizado, envolve o comportamento do material em condições de considerável não-linearidade. Estimou-se conveniente determinar o EVR a partir do comportamento médio das energias envolvidas (energia de dano e a energia de deformação elástica), e a fração de volume de vazios.

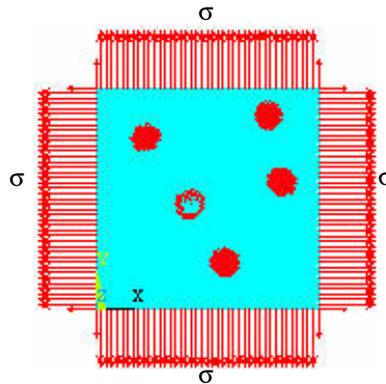


Figura 6.9. Modelo típico de DEM com as condições de contorno utilizadas neste trabalho para a determinação do EVR.

6.2.1. Resultados e Discussão.

Em todos os volumes de controle analisados, os valores médios das variáveis de campo (energia elástica, energia de dano e fração de volume de vazios) foram verificados em três pontos característicos ao longo do carregamento. A Figura 6.10 mostra estes pontos característicos para o caso particular do volume de 20 nódulos. Pode-se constatar, através desta figura, que um ponto se encontra no regime linear elástico (P_1), outro corresponde ao regime não-linear (P_2) e, um último ponto que corresponde à tensão máxima (P_3).

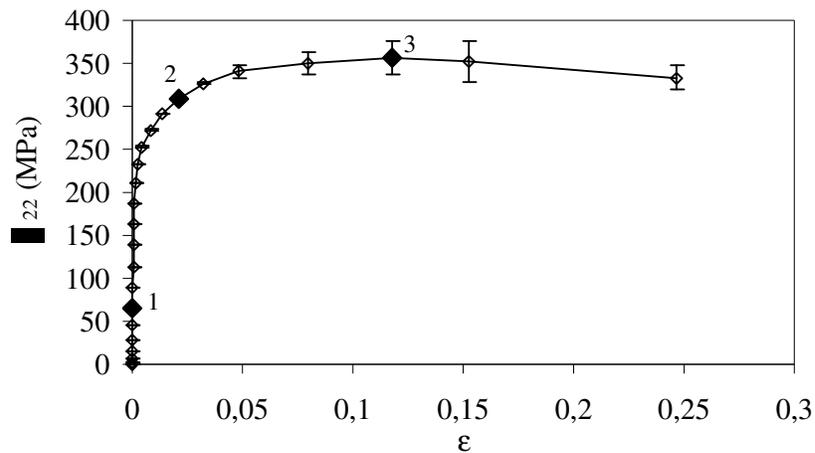


Figura 6.10. Curva tensão deformação média para o caso de 20 nódulos, (dez réplicas).

6.2.1.1. Energia Elástica

As Figuras Figura 6.11 e Figura 6.12 mostram os resultados da energia elástica média dentro do volume de controle em regime linear e não-linear, respectivamente.

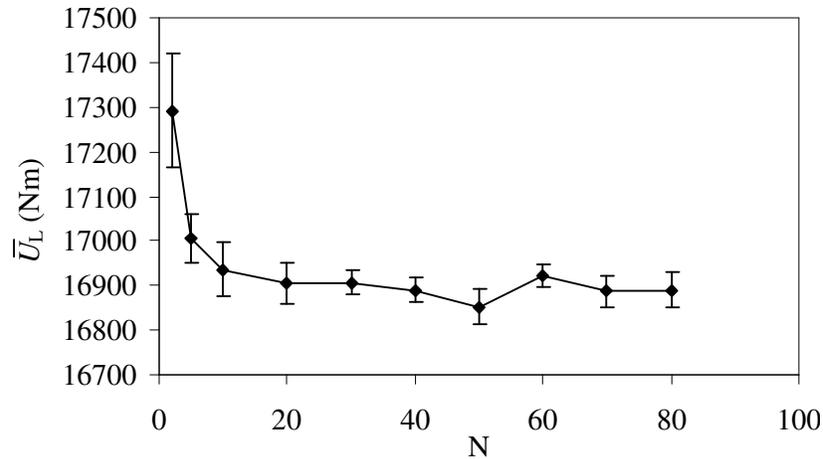


Figura 6.11. Energia elástica média (\bar{U}_L) no volume de controle em função do número de nódulos (N) analisado, (regimen linear).

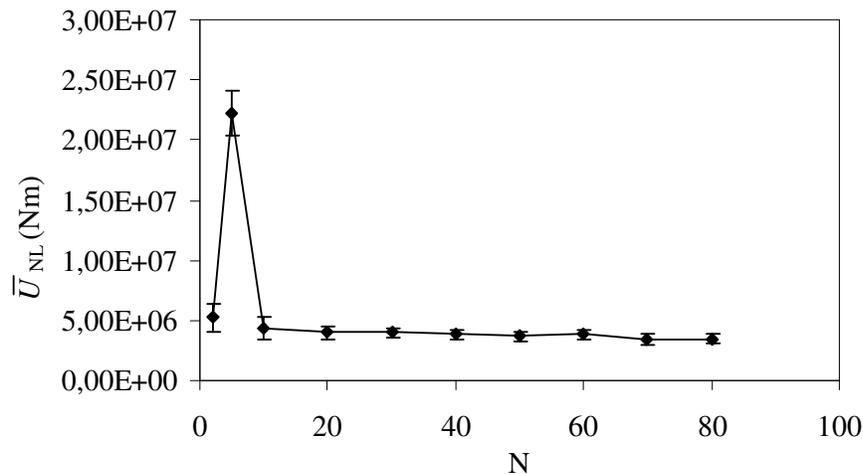


Figura 6.12. Energia elástica média (\bar{U}_{NL}) no volume de controle em função do número de nódulos (N) analisado, (regime não-linear).

Nos resultados obtidos para a energia elástica em regime linear \bar{U}_L (Figura 6.11) se observa um comportamento estável nos valores médios obtidos para os diferentes volumes analisados a partir da amostra de 20 nódulos, onde começa verificar-se um coeficiente de variação entre as médias de 0,14%. Por outro lado, a dispersão apresentada entre as réplicas também se torna estável a partir deste momento, verificando-se coeficientes de variação entre 0,14 e 0,27 % para os diferentes volumes analisados.

Para regime não linear, a energia elástica (\bar{U}_{NL}), apresenta a mesma tendência do caso linear (Figura 6.12). Verifica-se estabilidade na resposta mecânica a partir do volume de 20 nódulos, só que neste caso as dispersões obtidas são maiores. O coeficiente de variação entre os

valores médios aumenta para 6% e entre as réplicas oscila entre 8 e 12 % para os diferentes volumes analisados a partir do volume que contem 20 nódulos.

A resposta da energia elástica nos diferentes volumes de controle analisados, para o ponto de tensão máxima (\bar{U}_{TM}), é apresentada na Figura 6.13. Pode observar-se também neste caso, tendência à estabilidade na resposta a partir do volume de 20 nódulos. A dispersão entre os valores médios atinge seu valor máximo, com coeficiente de variação entre os mesmos de 7,3%, embora, este valor não difere muito da dispersão obtida para regime não linear. Com relação à dispersão obtida entre as réplicas, se observa, para este ponto (P_3) os maiores valores de dispersão, com coeficiente de variação entre 29 e 40 % entretanto, nos mesmos se observa certa independência em relação ao tamanho de réplica analisado. De modo geral esta independência foi também observada para o ponto em regime linear e não linear (P_1 e P_2) como pode ser observado nas Figuras 6.11 e 6.12.

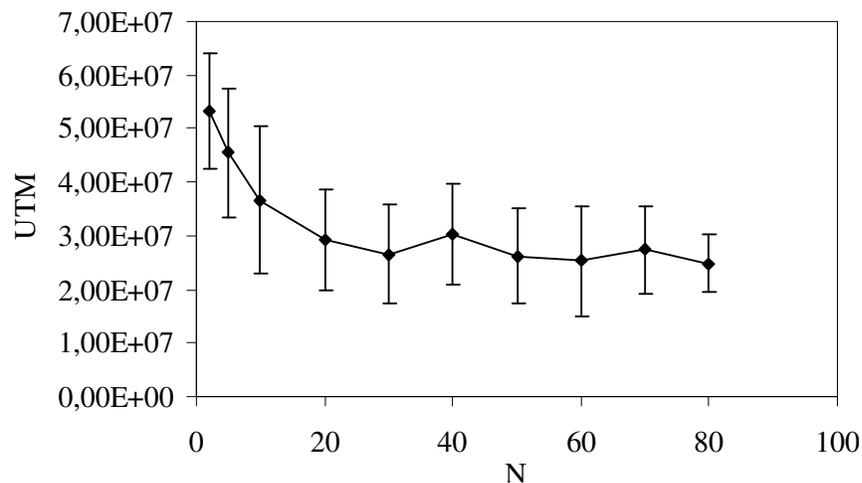


Figura 6.13. Energia elástica média (\bar{U}_{TM}) no volume de controle em função do número de nódulos (N) analisado, (regime não-linear).

De modo geral, pode-se observar que a energia elástica média dos modelos analisados nos diferentes estágios considerados (P_1 , P_2 e P_3), apresenta convergência a partir do volume de 20 nódulos, tanto nos valores médios obtidos para os diferentes tamanhos de volume de controle verificados, quanto na dispersão entre as réplicas.

6.2.1.2. Energia de Dano.

Para o caso da energia de dano, não foi realizada a análise em regime linear, pois não tem muito sentido estimar algum nível de dano nestas condições. Portanto, o comportamento da energia de dano será analisado somente para regime não-linear (P_2) e para o ponto de tensão máxima (P_3).

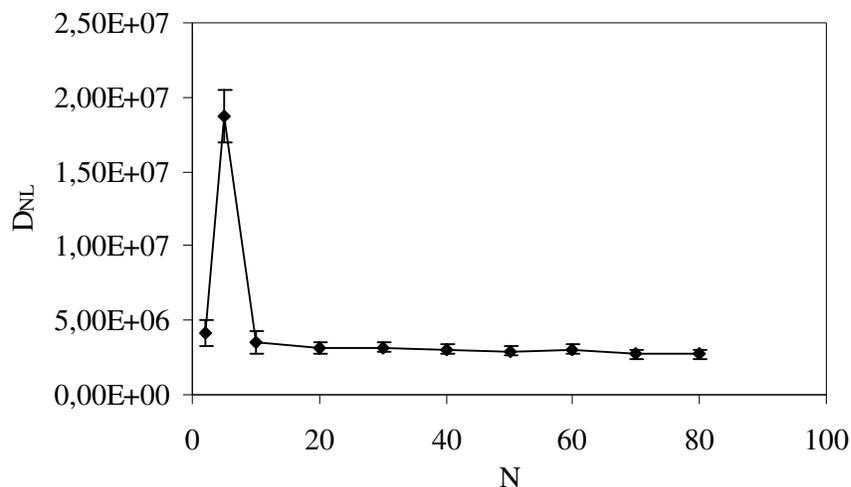


Figura 6.14. Energia de dano média (D_{NL}) no volume de controle em função do número de nódulos (N) analisado, (regime não-linear).

A Figura 6.14 apresenta o comportamento do valor médio da energia de dano com o incremento de tamanho do volume de controle para o comportamento não-linear (D_{NL}). Estes resultados indicam que, a partir do volume de 20 nódulos, se evidencia estabilidade nos valores médios obtidos, com coeficiente de variação na faixa de 6,52 %. A dispersão dentro das replicas para cada caso analisado apresenta estabilidade a partir do volume de 20 nódulos com coeficientes de variação entre 9 e 12 %.

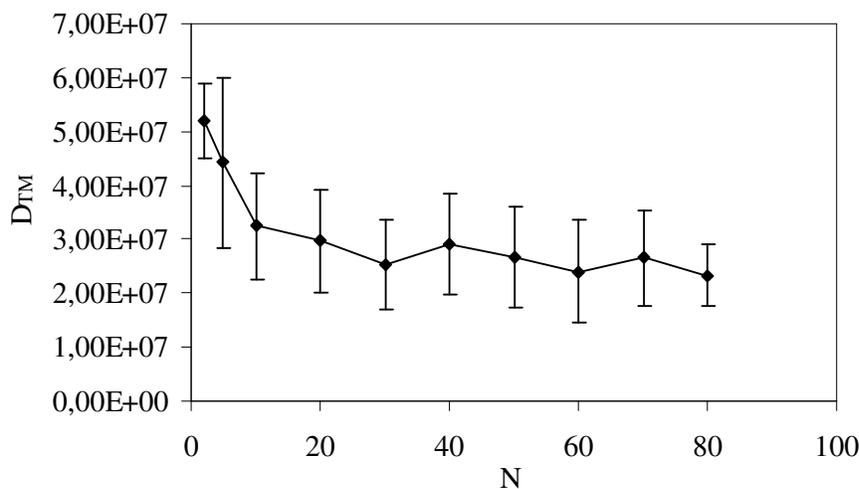


Figura 6.15. Energia de dano média no volume de controle (D_{TM}) com o incremento do número de nódulos (N) para o ponto de tensão máxima.

A energia de dano para o ponto de tensão máxima (D_{TM}) é apresentado na Figura 6.15 em função do tamanho de volume analisado. Pode-se observar bastante instabilidade nos resultados, apesar de que a partir do volume de 20 nódulos se evidencia uma ligeira tendência à convergência, com dispersão entre os valores médios dos volumes analisados caracterizada por

um coeficiente de variação de 9 %. A dispersão dentro das réplicas apesar de ser considerável se apresenta também bastante estável com coeficientes de variação entre 32 e 39 % a partir do volume de 20 nódulos.

6.2.1.3. Fração de Volume de Vazios.

Nas Figuras Figura 6.16, Figura 6.17 e Figura 6.18 são apresentados os resultados dos valores médios da fração de volume de vazios (f) com o incremento do tamanho do volume de controle, para os três pontos característicos verificados nos casos anteriores, P_1 (regime linear), P_2 (regime não-linear) e P_3 (ponto de tensão máxima).

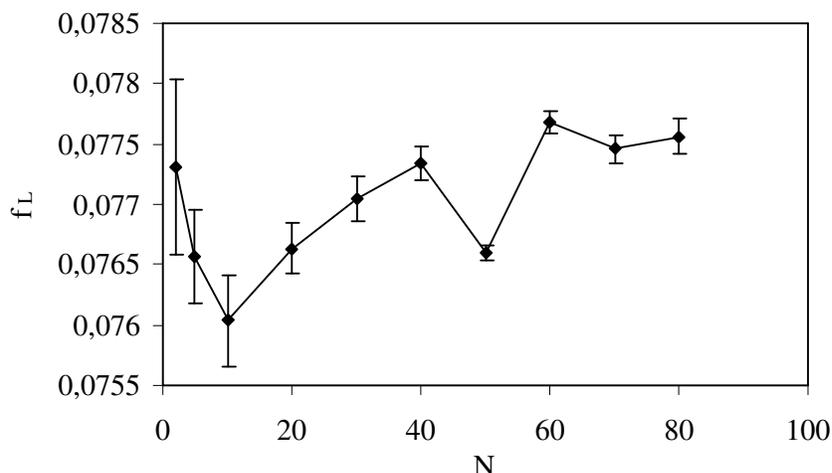


Figura 6.16. Valor médio da fração de volume de vazios em regime linear (f_L), com o incremento do volume de controle.

Observa-se, que os valores médios da fração de volume de vazios em regime linear f_L (Figura 6.16), apesar de ter um aspecto instável, apresenta pequena diferença entre eles, com dispersão a partir do volume de 20 nódulos caracterizada por um coeficiente de variação de aproximadamente 0,56 %. A dispersão dentro das réplicas a partir do volume de 20 nódulos também é pequena e apresenta bastante estabilidade com coeficientes de variação entre 0,07 e 0,26 %.

Em regime não-linear, os valores médios da fração de volume de vazios (f_{NL}) como função do tamanho do volume de controle analisado, tem o comportamento mostrado na Figura 6.17. Observa-se que a partir do volume de 20 nódulos fica evidente a estabilidade da resposta dos modelos, com coeficiente de variação entre os valores médios de aproximadamente 0,92%. A dispersão dentro das réplicas está caracterizada por coeficientes de variação entre 2,5 e 3,39 %, mostrando-se também bastante estáveis.

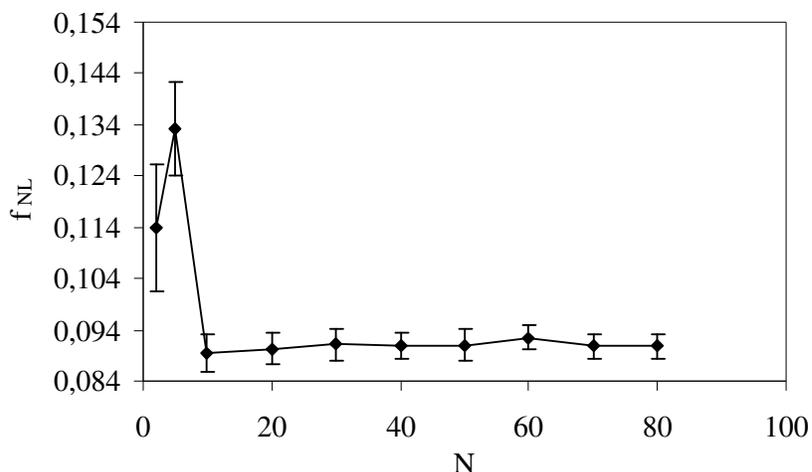


Figura 6.17. Valor médio da fração de volume de vazios em regime não linear (f_{NL}), com o incremento do volume de controle.

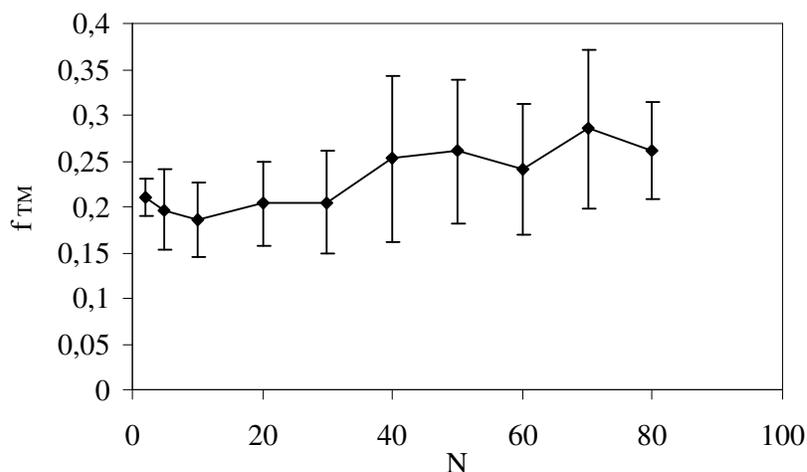


Figura 6.18. Valor médio da fração de volume de vazios no ponto de tensão máxima (f_{TM}), com o incremento do volume de controle (número de nódulos (N)).

Para o ponto de tensão máxima, a variação da fração de volume de vazios (f_{TM}) com o aumento do tamanho do volume de controle é mostrado na Figura 6.18. De modo geral se observa para este caso um comportamento bastante instável, com alguma tendência à estabilidade a partir do volume de 40 nódulos, onde se registra uma dispersão caracterizada por um coeficiente de variação de 12,4% entre os valores médios. A dispersão dentro das réplicas a partir deste momento se apresenta com coeficientes de variação entre 29 e 36 %.

Na Tabela 6.2 se apresenta um resumo, das dispersões obtidas ao atingir estabilidade na resposta, das variáveis de campo verificadas nos volumes de controle analisados.

Tabela 6.2. Dispersões obtidas a partir da resposta estável das variáveis de campo analisadas.

Região de análise	Energia elastica		Energia de dano		Fração de volume de vazios	
	*DPm %	*DPr %	*DPm %	*DPr %	*DPm %	*DPr %
Regime linear (P1)	0,14	0,14 e 0,27	-	-	0,56	0,07 e 0,26
Regime não linear (P2)	6	8 e 12	6,52	9 e 12	0,92	2,5 e 3,39
Ponto de tensão máxima (P3)	7,3	29 e 40	9	32 e 39	12,4	29 e 36

*DPm: Coeficiente de variação dos valores médios a partir do comportamento estável.

*DPr: Coeficiente de variação dentro das réplicas a partir do comportamento estável.

Do comportamento evidenciado pelos valores médios das variáveis de campo analisadas, podem ser realizadas as seguintes observações:

- a) De modo geral, para regime linear elástico são obtidos os menores valores de dispersão na resposta mecânica dos modelos, tanto nos valores médios para os diferentes volumes de controle verificados, quanto dentro das réplicas. Pode afirmar-se que sob estas condições um volume de 10 nódulos, poderia ser considerado como elemento de volume representativo da pseudo-micro-estrutura de ferro fundido nodular ferrítico considerada. Utilizar volumes maiores não significaria numa sensível melhora na resposta mecânica dos modelos e encareceria a simulação computacional.
- b) Em condições de não linearidade e na região de tensão máxima, a estabilidade na resposta mecânica das variáveis verificadas, se alcança para volumes maiores que para regime linear. Mesmo dentro do comportamento estável verifica-se um aumento considerável da dispersão na resposta mecânica dos modelos em relação ao regime linear elástico, tanto entre os valores médios das variáveis de campo consideradas para os diferentes volumes de controle analisados, quanto dentro das réplicas. Observa-se também que sob estas condições utilizar volumes de controle com número de nódulos maior do que 40 não melhoraria sensivelmente a dispersão obtida na resposta mecânica dos modelos e demandaria maior trabalho computacional, encarecendo o estudo. Portanto, com base nas observações realizadas pode se afirmar que um volume contendo 40 nódulos, poderia ser considerado um elemento de volume representativo da pseudo-micro-estrutura de ferro fundido nodular ferrítico utilizada, podendo verificar desta forma sua resposta mecânica em condições de não linearidade e próximos da ruptura do material.
- c) Observando-se a Tabela 6.2, verifica-se que a resposta dos modelos relacionadas à energia apresentam maior dependência da distribuição de nódulos e tamanho de volume analisado em

regime não linear e ponto de tensão máxima, evidenciando-se os maiores valores de dispersão durante estes regimes. Entretanto em regime linear a resposta dos modelos relacionadas à energia é praticamente independente da distribuição de nódulos e do tamanho do volume de controle analisados. Já no caso da fração de volume de vazios (f), observa-se independência da distribuição de nódulos e do tamanho do volume de controle analisado na resposta dos modelos durante regime linear e não linear, entretanto para o ponto de tensão máxima a variável f apresenta maior dependência da distribuição de nódulos e do tamanho do volume analisado.

Usualmente, o tamanho do elemento de volume representativo na literatura se expressa em função do parâmetro adimensional δ , que representa a relação entre o tamanho do volume total e o tamanho de uma dimensão característica da micro-estrutura. O valor do coeficiente δ para um elemento de volume representativo se estima entre 10 e 100 [Ostoja-Starzewski, 2006]. No caso da pseudo-microestrutura estudada, a dimensão característica seria o tamanho do nódulo de grafite. Considerando o tamanho do nódulo, e o volume de 40 nódulos fixado como EVR se obtém um coeficiente $\delta=20$ para o caso analisado neste trabalho.

6.2.2. Ajuste dos Parâmetros da Lei Trilinear Considerando o EVR.

Da análise de EVR realizada foi estabelecido, que um volume com 40 nódulos, poderia ser considerado um elemento de volume representativo da pseudo-micro-estrutura de ferro fundido nodular ferrítico, pelo menos para os pontos P_1 e P_2 da Figura 6.10. Resta saber se esta pseudo-microestrutura teria uma resposta que possa ser considerada como representativa do ferro fundido nodular com 7,77 % de grafite tomado como referência.

Para realizar esta verificação, foi analisada a resposta tensão vs deformação de 40 réplicas de tamanho igual ao do EVR e distribuições de nódulos diferentes, sob carregamento axial na direção Y.

Na Figura 6.19 (a) são mostrados os resultados obtidos. Pode-se observar uma dispersão considerável nos valores de tensão, principalmente a partir de 5% de deformação axial (ϵ_{22}), onde se atingem diferenças máximas de aproximadamente 20 % em relação ao valor de tensão média. Este fato era esperado, considerando a aleatoriedade inerente à micro-estrutura e que as análises são estendidas até considerável dano do modelo. Comparando a dispersão obtida nesta análise, utilizando modelos em MED, com a dispersão obtida numa análise similar realizada utilizando elementos finitos [Kusnetsova, 2001], verifica-se que, para uma deformação axial de 15 % a análise por elementos finitos reporta valores de tensão que diferem em até 15 % do valor médio, enquanto que, na análise das 40 réplicas em MED, mostrada na Figura 6.19 (a) para essa mesma

deformação, se obtém diferenças de até 17 % em relação ao valor médio de tensão, mostrando coerência nas dispersões obtidas.

Comparando a resposta tensão deformação do material real tomada como referência [Berdin *et al.*, 2001], com a resposta das 40 réplicas analisadas (Figura 6.19 (b)), pode observar-se que a curva do material real, está praticamente fora da faixa de valores obtidas para os modelos em MED. Em relação a este comportamento, cabe lembrar que os parâmetros da lei constitutiva das barras foram ajustados a partir de uma única distribuição de nódulos (Figura 6.8). Considerando as características aleatórias das distribuições de nódulos, o correto seria o ajuste fenomenológico considerando o comportamnetno de vários EVRs.

Quando foi mostrada a lei trilinear (seção 5.2), os parâmetros K_{r0} e $REET$ foram apresentados como parâmetros que permitem maior flexibilidade, no ajuste fenomenológico da resposta dos modelos em MED com a resposta do material real. Desta forma o ajuste esteve focado principalmente nestes parâmetros, e o mesmo foi realizado verificando-se a resposta tensão deformação de 40 EVRs com distribuições de nódulos diferentes.

Os valores de K_{r0} e $REET$ foram escolhidos, buscando o melhor ajuste da resposta tensão deformação média das 40 réplicas analisadas, com a resposta do material. Na Tabela 6.3 são apresentados os parâmetros do MED antes do ajuste e os novos parâmetros ajustados, onde pode ver-se que somente foram modificados os valores de K_{r0} e $REET$.

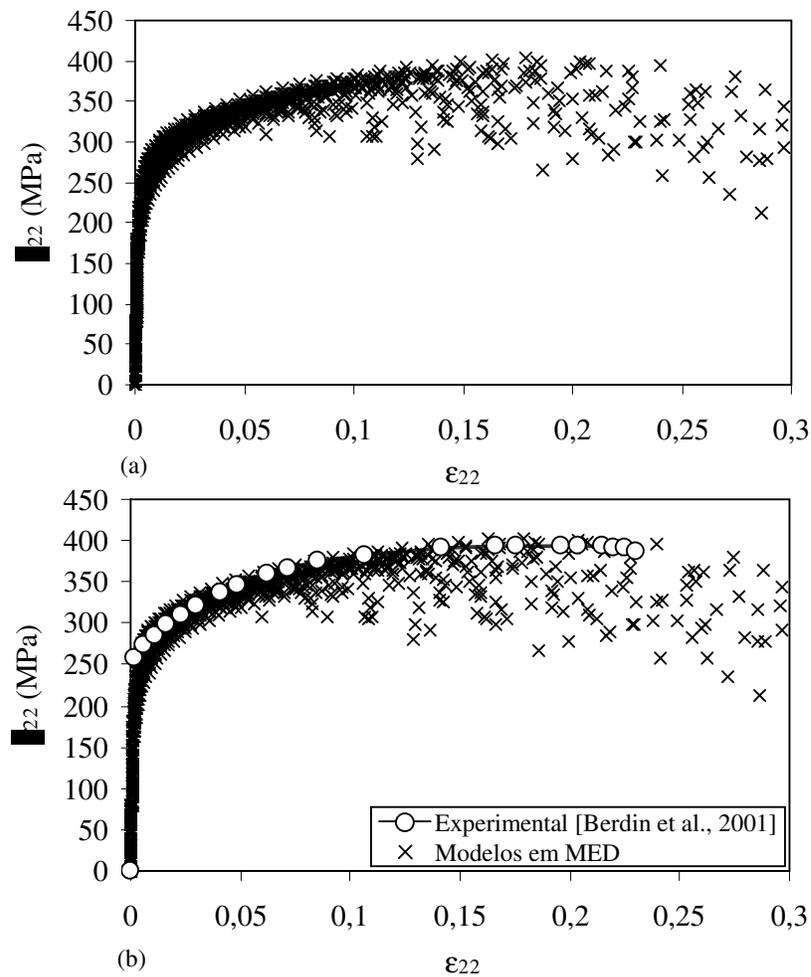


Figura 6.19. Resposta tensão deformação das 40 réplicas analisadas a) Modelos em MED, b) Comparação da resposta dos modelos em MED com a resposta do material real.

Tabela 6.3. Parâmetros da lei constitutiva da barra antes e depois do ajuste.		
Parâmetro	antigo	novo
K_{r0}	270	320
$REET$	660	500
G (MPa.m ^{1/2})	11000	11000
E (MPa)	250000	250000
ν	0,25	0,25
ϵ_p	0,00092	0,00092

A

Figura

6.20 mostra a resposta tensão deformação dos modelos em MED utilizando os parâmetros ajustados, conjuntamente com a resposta real tomada como referência [Berdin et al., 2001]. Pode-se observar que neste caso, a resposta do material real se encontra compreendida dentro da faixa de respostas dos modelos em MED, com o qual poderia se afirmar que a resposta média dos modelos em MED seria representativa do material real.

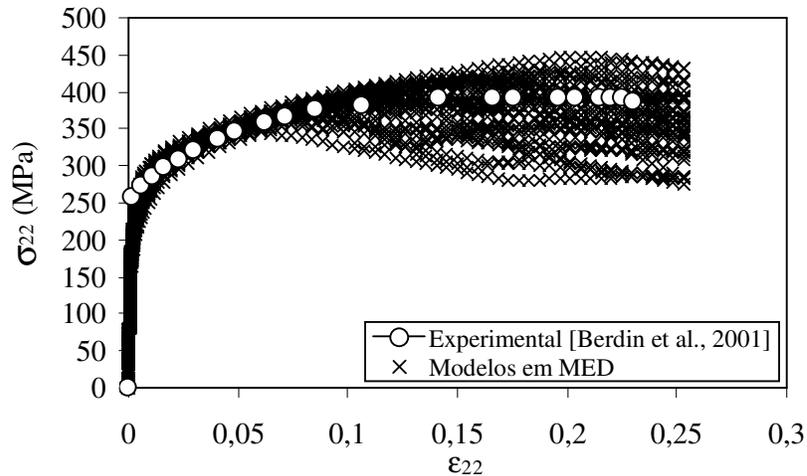


Figura 6.20. Ajuste das propriedades atribuídas à matriz dos modelos em MED.

6.3. Verificação da Resposta Micromecânica e sua Relação com Comportamento Macroscópico.

Baseado no comportamento mostrado na Figura 6.16 e o estudo de EVR realizado no item anterior, considera-se que a resposta média de vários modelos em MED da pseudo-microestrutura de ferro fundido nodular contendo 40 nódulos, representa o comportamento macroscópico do ferro fundido nodular ferrítico tomado como referência [Berdin *et al.*, 2001].

O ferro fundido nodular ferrítico rompe pelo mecanismo de fratura dúctil, o qual, usualmente tem-se dividido para seu estudo nas etapas de nucleação, crescimento e coalescência de vazios, que se formam a partir dos nódulos de grafite e partículas dispersas de menor tamanho [Garrison, 1988]. Particularmente no estudo realizado neste trabalho, a etapa de nucleação não é estudada, uma vez que é considerado que a mesma ocorre nos instantes iniciais de carregamento, ou então os nódulos de grafite são representados como vazios.

Considera-se, portanto, uma fração de volume de vazios inicial f_0 , correspondente aos nódulos de grafite, e se estuda o crescimento dos mesmos até o início da coalescência entre si, nas regiões onde existe maior proximidade entre eles. Seria interessante então, estabelecer critérios dentro da formulação em MED utilizada, que auxiliem na verificação dos diferentes estágios do processo de fratura, principalmente a ocorrência da coalescência. Sobre estes aspectos trata o presente item.

6.3.1. Critério de Coalescência e de Ruptura Propostos.

Como foi descrito no item 2.3.1, a coalescência se caracteriza pela união física entre os vazios formados a partir de inclusões próprias da microestrutura dos metais. De modo geral, as

inclusões de maior tamanho dão origem a vazios primeiramente que as de menor tamanho [Garrison, 1988]. Particularmente nos ferros fundidos nodulares ferríticos, os vazios se originam primeiramente a partir dos nódulos de grafite, para pequenos valores de deformação [Berdin *et al.*, 2001], e somente se formaram vazios a partir das inclusões de menor tamanho nos estágios finais do carregamento, onde os níveis de deformação são consideráveis [Bonora e Rugiero, 2005]. Nestes materiais, a coalescência se produz diretamente entre os vazios formados a partir de nódulos de grafite, naquelas regiões onde a densidade de nódulos é maior (regiões indicadas na Figura 6.21), e entre os vazios formados a partir das inclusões menores, quando os nódulos estão mais distantes como pode se observar na Figura 6.21.

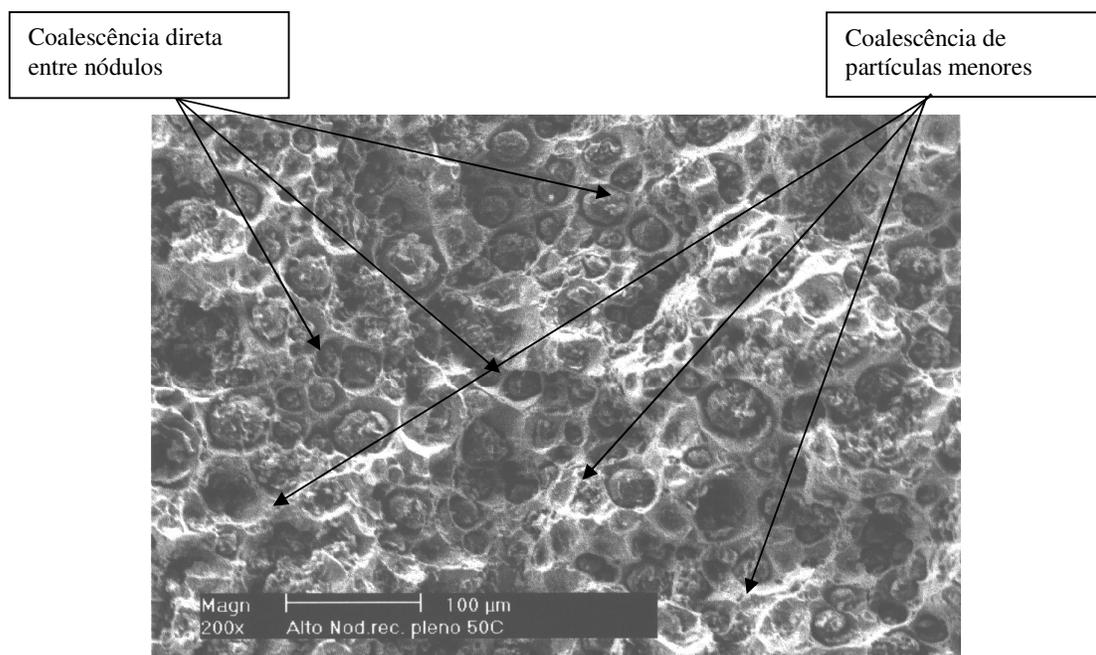


Figura 6.21. Superfície de fratura de um ferro fundido nodular ferrítico [Petry, 1999].

Na pseudo-microestrutura considerada nos modelos em MED, não são modelados os vazios de menor tamanho, portanto, a coalescência se verifica somente entre os vazios correspondentes aos nódulos de grafite, naquelas regiões de maior densidade dos mesmos (Figura 6.22), entretanto, acredita-se que a coalescência entre as partículas de menor tamanho está implícita na formulação em MED, uma vez que a mesma admite o surgimento de dano na matriz de forma natural pela ruptura local das barras. Dentro deste contexto, o objetivo principal desta seção é caracterizar a resposta dos modelos em MED em relação à coalescência e a ruptura, visando estabelecer critérios que acusem a ocorrência destas etapas.

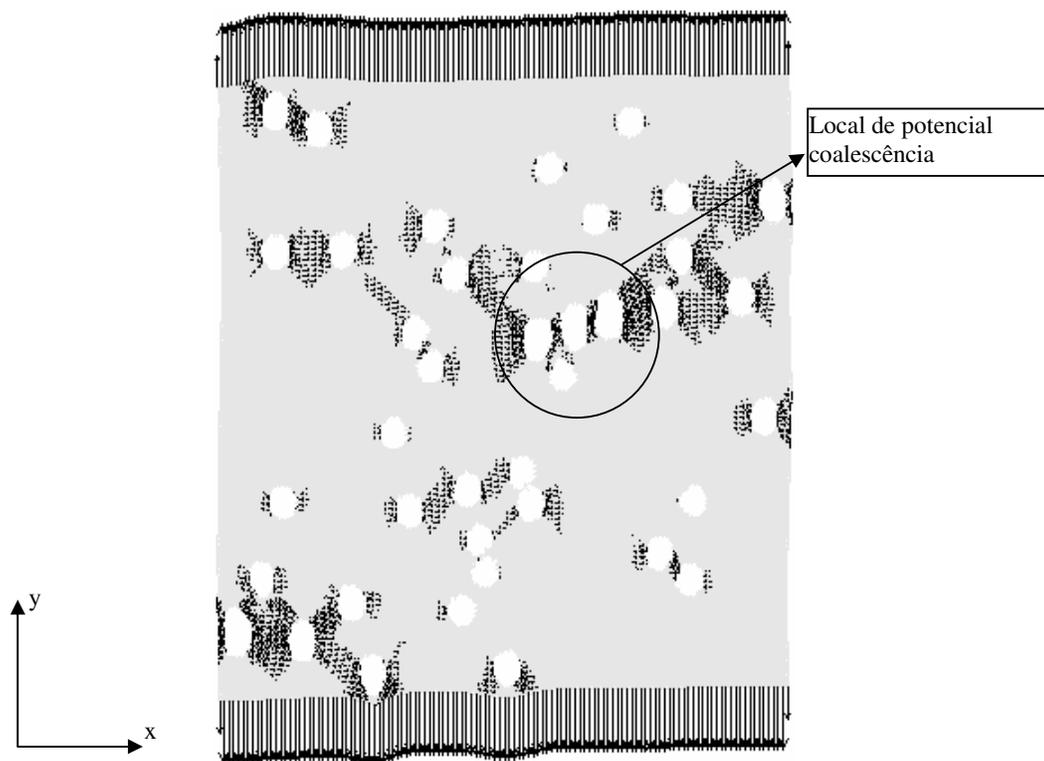


Figura 6.22. Configuração deformada do modelo para o ponto de tensão máxima.

Na Figura 6.22 se mostra como exemplo um EVR de 40 nódulos com certo nível de dano onde se indica uma região de potencial início da coalescência. Nessa região se observa maior densidade de nódulos e particularmente existem três nódulos muito próximos entre si e alinhados em uma direção próxima da direção de máximo cisalhamento.

A resposta tensão-deformação correspondente ao modelo da Figura 6.22 é apresentada na curva da Figura 6.23. Pode-se observar que na região de tensão máxima se evidencia uma pequena queda na tensão que provavelmente esta associada à ocorrência de coalescência entre vazios.

Associando a configuração deformada do modelo em MED com a correspondente curva tensão deformação (detalhes na parte superior da Figura 6.23), pode-se observar que, efetivamente, o início da coalescência se localiza na região de tensão máxima. A inflexão que se observa na curva logo após a ocorrência do primeiro máximo na tensão está associada à ocorrência da coalescência entre dois vazios cuja interface é bem maior do que a dos que tinham coalescido anteriormente. Este ponto de inflexão se apresenta para a deformação média $\varepsilon_{22}=1,42E-1$.

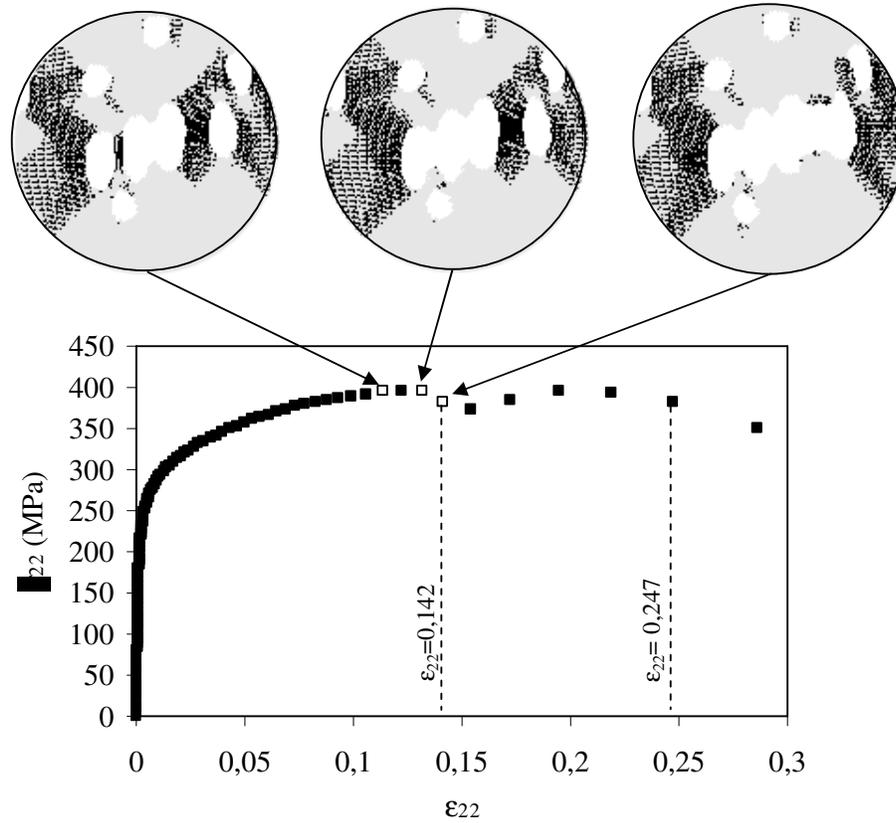


Figura 6.23. Região em que ocorre a coalescência na curva tensão deformação do modelo.

Ao verificar a taxa de variação da energia elástica e da energia de dano com a deformação, pode-se observar que estas grandezas experimentam uma perturbação local associada à ocorrência da coalescência. Particularmente para a deformação ($\epsilon_{22}=1,42E-1$) observa-se um máximo local na taxa de variação da energia de dano, e um mínimo local na taxa de variação da energia elástica (Figura 6.24).

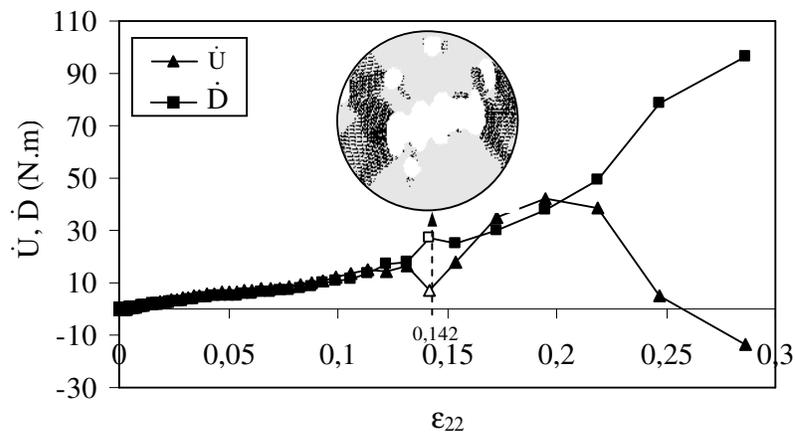


Figura 6.24. Taxa de variação da energia elástica dU/dt e da energia de dano dD/dt em relação à deformação.

Assim fica estabelecido que o início de coalescência está associado à ocorrência de uma perturbação local na taxa de variação da energia elástica (dU/dt) ou da energia de dano (dD/dt).

O processo de coalescência começa de forma estável entre dois o mais vazios nas regiões de maior densidade de nódulos, ou em que os nódulos estejam alinhados numa direção oblíqua à direção de carregamento, e logo instabiliza levando o material à ruptura. A ocorrência deste evento, (ruptura) está associada a uma queda na energia elástica, pelo que foi adotado como critério de ruptura a existência de um máximo global na resposta da energia elástica do modelo como mostra a Figura 6.25.

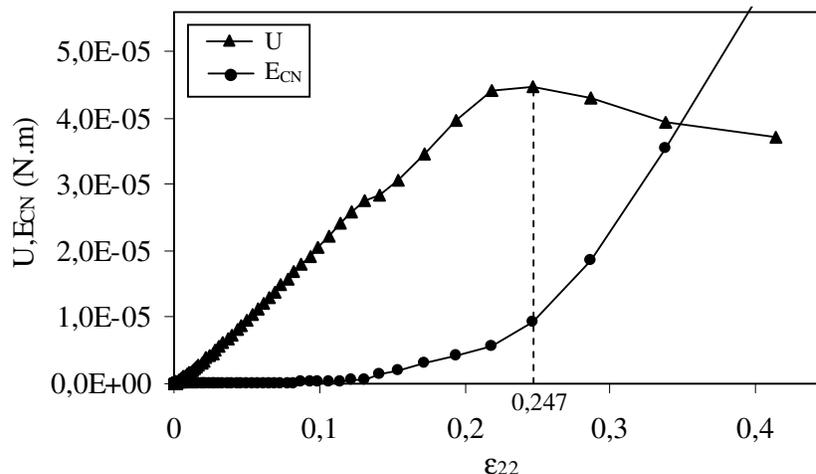


Figura 6.25.- Máximo global na resposta da energia elástica do modelo, tomado como critério de ruptura.

Outro critério de ruptura proposto, foi baseado na avaliação da energia cinética do modelo. De modo geral foi observado no estudo realizado, que após a coalescência de 4 ou 5 nódulos, a trinca formada instabiliza, e propaga de forma instável. Imediatamente após este instante a energia cinética atinge aproximadamente 30% da energia elástica do modelo. Este foi considerado o segundo critério de ruptura proposto, quando a energia cinética do modelo atinge 30% da energia elástica.

A evolução da fração de volume de vazios (f) do modelo, com a deformação é apresentada na Figura 6.26. Utilizando os valores de deformação que caracterizam tanto a coalescência como à ruptura, anteriormente determinados, podem ser obtidos os valores da variável f para estes instantes, como está indicado nesta figura.

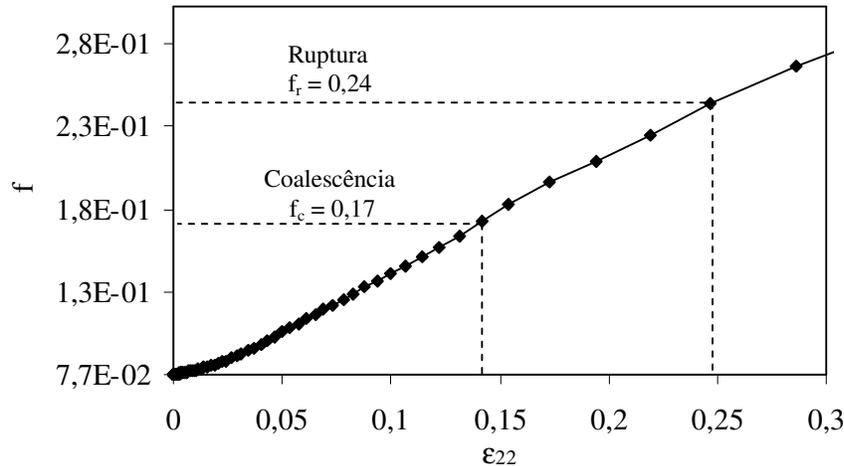


Figura 6.26. Evolução da fração de volume de vazios (f), com a deformação (ϵ_{22}).

Pode-se observar (Figura 6.26), que a fração de volume de vazios para a deformação que indica o início da coalescência ($\epsilon_{22}=1,42E-1$) é de $f_c=17\%$, esse valor é similar a outro reportado na literatura ($f_c=16\%$), para este material obtido via experimental [Liu *et al.*, 2002]. Outros estudos reportam para este mesmo material um valor de $f_c=12\%$ [Berdin *et al.*, 2001].

Estes resultados preliminares evidenciam a correspondência entre o comportamento macroscópico do modelo e o processo de dano que acontece na mesoescala. Por outro lado, indicam que a metodologia de obtenção da fração de volume de vazios implementada descreve corretamente o processo de crescimento e coalescência dos vazios na pseudo-micro-estrutura estudada, uma vez que os valores de f_c obtidos são coerentes com os reportados na literatura para este material.

6.3.2. Aplicação dos Critérios de Coalescência e Ruptura Propostos.

6.3.2.1. Coalescência.

Uma vez definidos os critérios para definir o início da coalescência dos vazios e a ruptura, os mesmos são aplicados ao análise de 40 EVRs com distribuições diferentes de nódulos, visando obter a resposta média da pseudo-micro-estrutura considerada.

As condições de contorno aplicadas aos 40 EVRs foram de carregamento axial na direção 2, como foi realizado para o exemplo visto no item anterior (Figura 6.22).

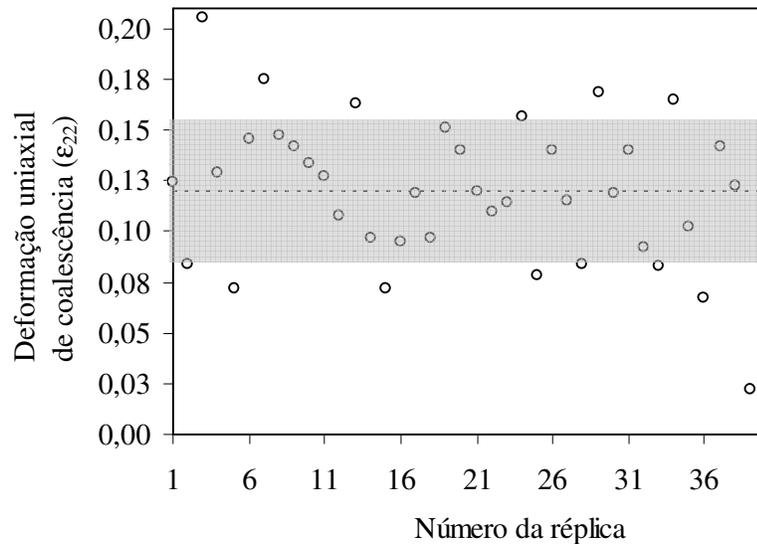


Figura 6.27. Deformação de coalescência obtidas para os 40 EVRs analisados.

A deformação associada ao início da coalescência foi verificada para os 40 EVRs, e a mesma é mostrada na Figura 6.27. Pode-se observar grande dispersão nos resultados obtidos com valor médio da deformação axial de coalescência $\varepsilon_{22}^c = 0,125$ e desvio padrão de $\Delta = \pm 0,035$ (faixa cinza no gráfico da Figura 6.27). Utilizando estes valores de deformação correspondentes ao início da coalescência, pode ser determinada a fração de volume de vazios de coalescência (f_c) correspondente a cada EVR da pseudo-microestrutura de ferro fundido nodular ferrítico estudada.

A curva mostrada na Figura 6.28 corresponde ao comportamento médio da fração de volume de vazios (f), das 40 réplicas analisadas. As barras verticais representam a dispersão encontrada entre as réplicas através do desvio padrão.

Considerando a deformação média correspondente ao início da coalescência e sua respectiva dispersão, pode-se encontrar no gráfico da Figura 6.28 uma fração de volume de vazios de coalescência média de $f_c = 0,148$ com dispersão caracterizada por um valor máximo de $f_c^{máx} = 0,190$ e um valor mínimo de $f_c^{mín} = 0,117$. Como foi mencionado na revisão bibliográfica, os valores publicados para a fração de volume de vazios de coalescência estão entre $10 \leq f_c \leq 20$. Assim, os valores obtidos são coerentes, uma vez que os mesmos se encontram dentro da faixa de valores mencionada.

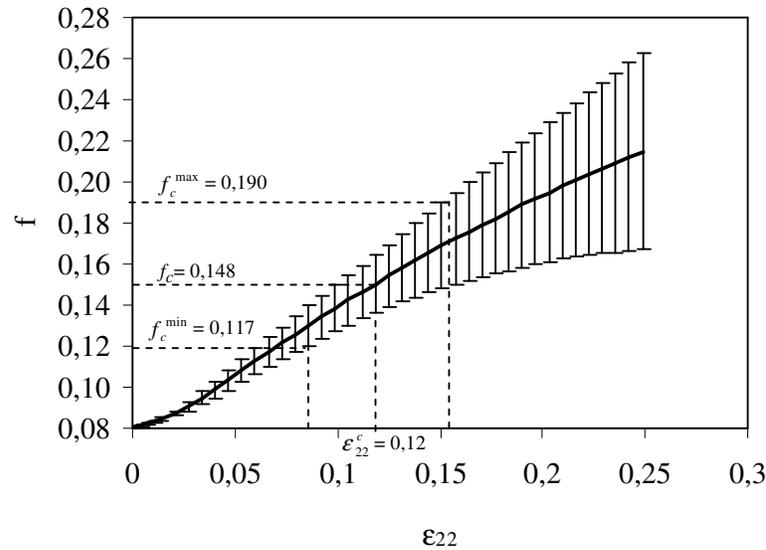


Figura 6.28. Evolução da fração de volume de vazios com a deformação das 40 réplicas analisadas

Particularmente para o ferro fundido nodular ferrítico, tem-se reportados os valores de fração de volume de vazios de $f_c = 0,12$ e $f_c = 0,16$, publicados por Berdin *et al.*, 2001 e Liu *et al.*, 2002 respectivamente. Comparando esses valores, com o valor médio de f_c obtido para a pseudo-micro-estrutura de ferro fundido nodular ferrítico ($f_c = 0,148$), pode observar-se que o mesmo se encontra dentro desta faixa de valores, mostrando coerência do comportamento evidenciado pelos modelos em MED. Entretanto, cabe salientar que o valor estabelecido por Berdin *et al.*, 2001, de $f_c = 0,12$, não corresponde a observações experimentais, mas sim, foi obtido a partir de um ajuste fenomenológico do modelo de Gurson, 1977, com a resposta experimental do material real.

6.3.2.2. Ruptura.

São apresentados os resultados de deformação de ruptura para as réplicas analisadas, utilizando os dois critérios de ruptura anteriormente propostos.

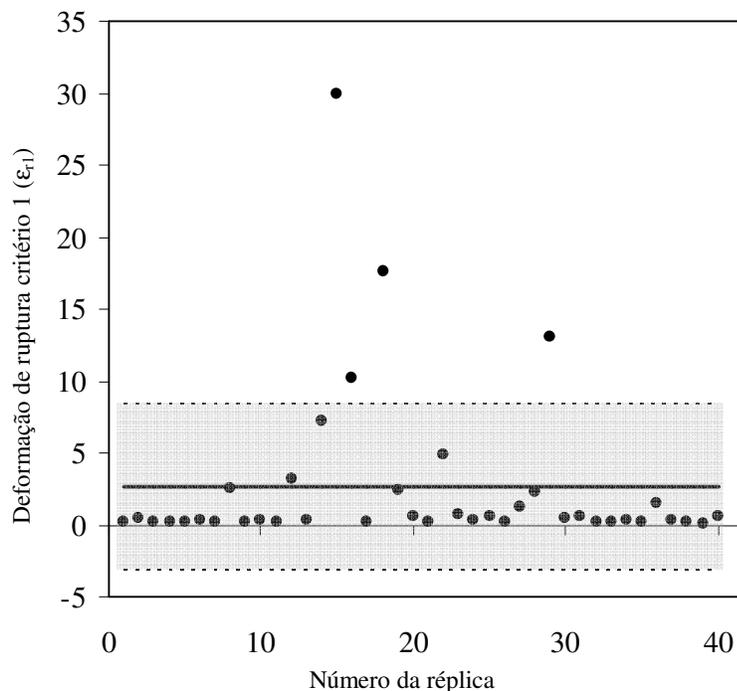


Figura 6.29. Deformação de ruptura obtida com o primeiro critério proposto.

Na Figura 6.29, são mostrados os valores de deformação de ruptura obtida com o primeiro critério proposto (ϵ_{r1}). Pode observar-se que algumas réplicas, como por exemplo a réplica 15, apresentam uma deformação de ruptura consideravelmente maior em relação à maioria das réplicas. Isto acontece porque este primeiro critério estabelece ruptura logo após o acontecimento de um máximo global no comportamento da energia elástica. No entanto, existem algumas réplicas em que os nódulos estão posicionados de forma desfavorável (geralmente muito perto da borda), o qual ocasiona a ruptura localizada de uma pequena porção do modelo. Nas réplicas em que acontece isto, apesar de na curva tensão deformação acusar a perda de capacidade de carga do modelo, na energia elástica não acontece assim, e a mesma somente começa a diminuir quando considerável parte do modelo esta comprometida. Com isto, a deformação de ruptura obtida, nas réplicas que apresentam este problema, vai ser consideravelmente maior do que nos outros casos. Estas réplicas foram consideradas mal comportadas.

Desconsiderando as réplicas mal comportadas, a deformação de ruptura se mostra no gráfico da Figura 6.30, com valor médio de $\epsilon_{rm1} = 0,243$ e desvio padrão de $\Delta\epsilon_{r1} = 0,0904$ representado pela faixa cinza. Este valor de deformação de ruptura é coerente com a deformação de ruptura obtida por Berdin et al., 2001 de $\epsilon_r=0,23$ para o material real.

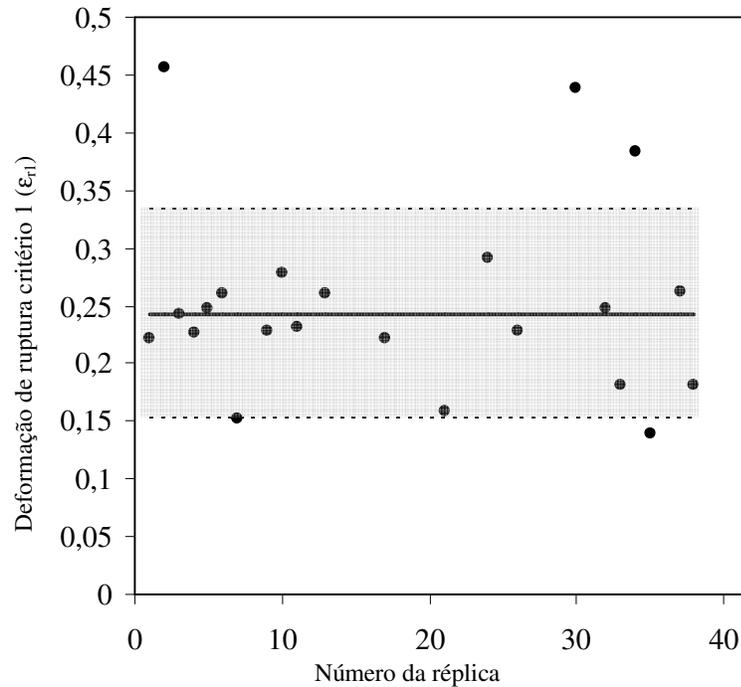


Figura 6.30. Deformação de ruptura, obtida com o primeiro critério proposto desconsiderando as réplicas mal comportadas.

Considerando o segundo critério, os valores de deformação de ruptura obtidos são mostrados no gráfico da Figura 6.31. Segundo este critério, a deformação média de ruptura é de $\epsilon_{r2} = 0,173$, com desvio padrão de $\Delta\epsilon_{r2} = 0,07$ representado pela faixa cinza. De modo geral, pode-se observar que com este segundo critério o valor médio e a dispersão obtidos são menores em relação aos obtidos utilizando o primeiro critério. Isto está explicado pelo fato de que este segundo critério está baseado na energia cinética do modelo. Assim, aqueles casos em que somente se rompe uma pequena porção do modelo, que influenciavam de forma considerável os resultados obtidos segundo o primeiro critério, com este segundo critério seria acusada a ruptura para esta deformação.

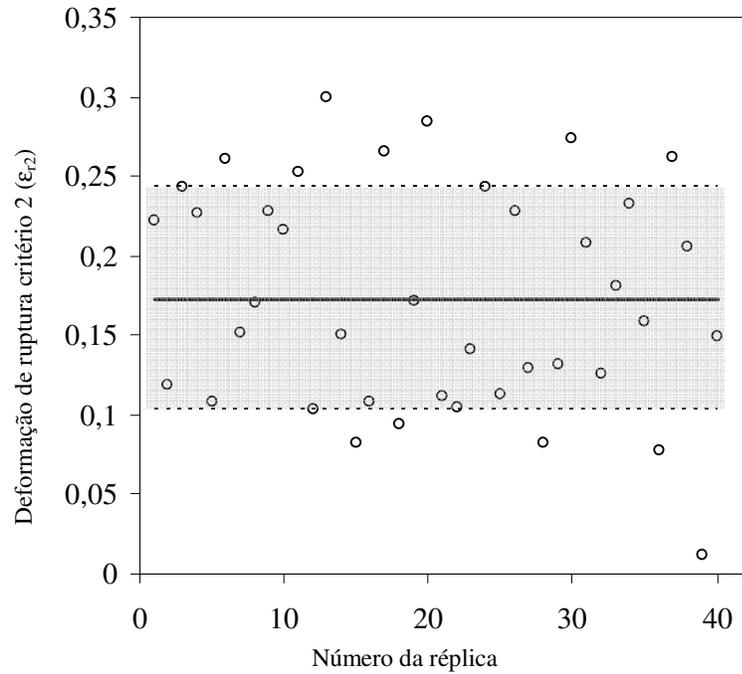


Figura 6.31. Deformação de ruptura obtida com o segundo critério.

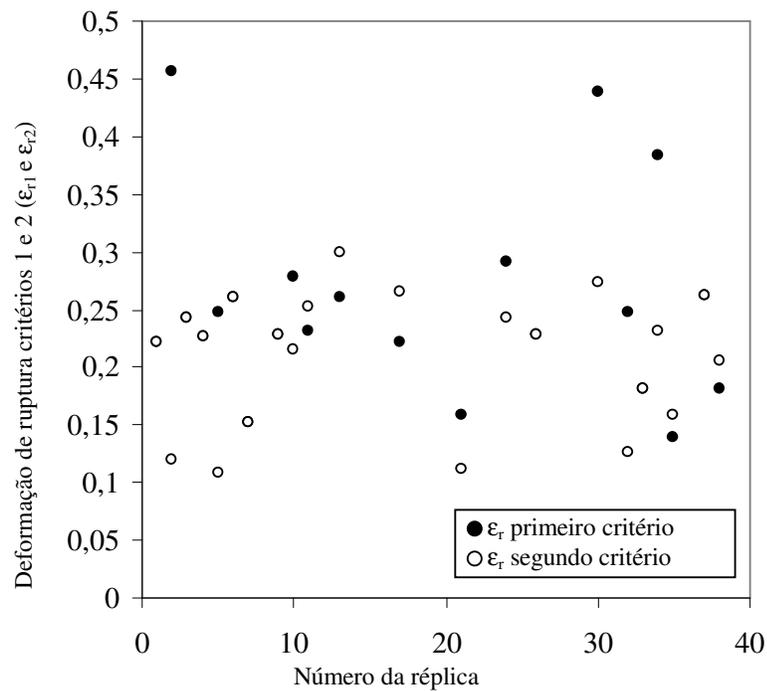


Figura 6.32. Superposição da deformação de ruptura obtida pelos dois critérios propostos.

A superposição dos resultados de deformação de ruptura utilizando-se os dois critérios propostos, considerando somente as réplicas melhor comportadas segundo o primeiro critério (Figura 6.30), é mostrada na Figura 6.32. Podem-se observar comportamentos similares com

ambos os critérios, com a existência de muitos valores de deformação coincidentes. Nos casos em que não existe coincidência, de forma geral pode-se constatar que quando $\epsilon_{r1} < \epsilon_{r2}$ a trinca formada se localizava mais longe da borda do que nos casos em que $\epsilon_{r1} > \epsilon_{r2}$.

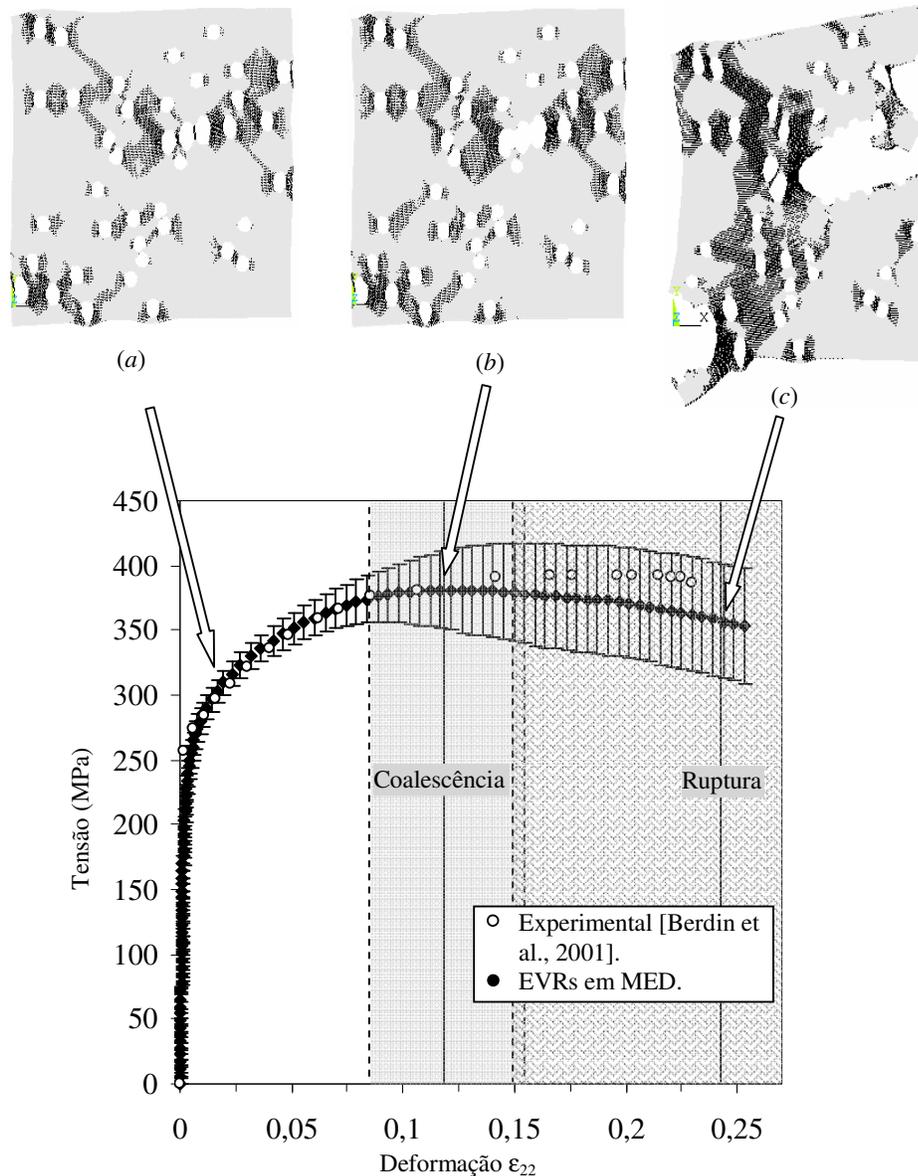


Figura 6.33. Curva tensão deformação média das 40 replicas analisadas e resposta do material real.

Colocando os valores de deformação média de coalescência e ruptura (1º critério), na curva média de tensão deformação (Figura 6.33), pode-se constatar que a ocorrência do início da coalescência está localizada na região de tensões médias máximas. Na parte superior desta figura são mostrados os detalhes (a), (b) e (c) de um dos EVRs analisados, onde se ilustra o estado do modelo em MED em diferentes estágios do carregamento, incluindo a coalescência e a ruptura.

As regiões em preto correspondem a barras com dano considerável, mas que ainda não romperam.

6.3.3. Análise Considerando Periodicidade da Microestrutura.

Usualmente, a análise computacional do micro-mecanismo de fratura por crescimento e coalescência de vazios tem sido realizada considerando a hipótese de periodicidade da microestrutura do material, assim, o EVR utilizado consiste numa célula de formato simples ou então um conjunto destas células de formato simples [Gurson, 1977; Brock *et al.*, 1995; Bonora e Ruggiero *et al.* 2005; Kim *et al.*, 2004 e Hutchinson *et al.*, 2003 entre outros]. Em relação à utilização desta hipótese existem controvérsias. Alguns autores alegam que somente se justifica quando a diferença entre as propriedades mecânica dos componentes da micro-estrutura analisada é pequena [Martin Oztoja-Starzewski, 2006]. Outros alertam que a utilização de um EVR constituído de uma única célula, resulta em distribuições de tensões que diferem totalmente da distribuição de tensões presente em um EVR que considere a aleatoriedade do material [Terada *et al.*, 2000; Wriggers *et al.*, 1998]. Em relação a este último aspecto, sabe-se que a evolução do mecanismo de fratura por crescimento e coalescência de vazios é dependente das tensões presente no entorno do vazio [Garrison, 1987; Galiano *et al.*, 2002]. Por último, poderia mencionar-se como outro inconveniente da hipótese de periodicidade, que quando se utiliza uma única célula, a mesma não considera a interação com outros vazios e portanto seria discutível chegar a conclusões em relação ao início da coalescência entre os mesmos.

Neste contexto, o presente item tem por objetivo comparar os resultados obtidos anteriormente para os EVRs de 40 nódulos da pseudo-microestrutura estudada, com a resposta de dois EVRs que consideram a hipótese de periodicidade. Um deles consiste numa célula com um vazio central, e o segundo está composto por um conjunto de 7x7 destas células, como pode se observar na Figura 6.34. A fração de volumes de vazios inicial dos EVRs periódicos é igual à dos EVRs de 40 nódulos ($f_0=0,077$) e as condições de contorno aplicadas foram as mesmas (tração axial na direção 2, considerando estado plano de tensões).

A resposta tensão deformação dos modelos periódicos é mostrada na Figura 6.35 conjuntamente com a resposta média dos EVRs de 40 nódulos e a do material real. Uma análise qualitativa permite constatar diferenças entre o comportamento dos modelos periódicos e os modelos com aleatoriedade, o que deixa evidente que mesmo considerando as mesmas propriedades do material, a utilização de uma ou outra hipótese influencia nos resultados obtidos, principalmente em relação a tenacidade e resistência.

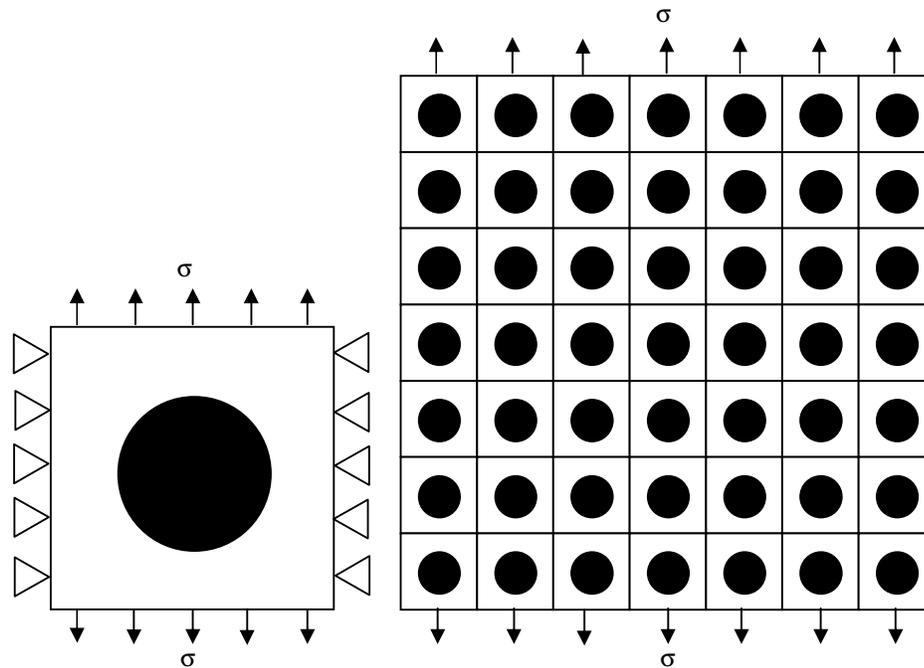


Figura 6.34. EVRs utilizados considerando periodicidade da micro-estrutura do material

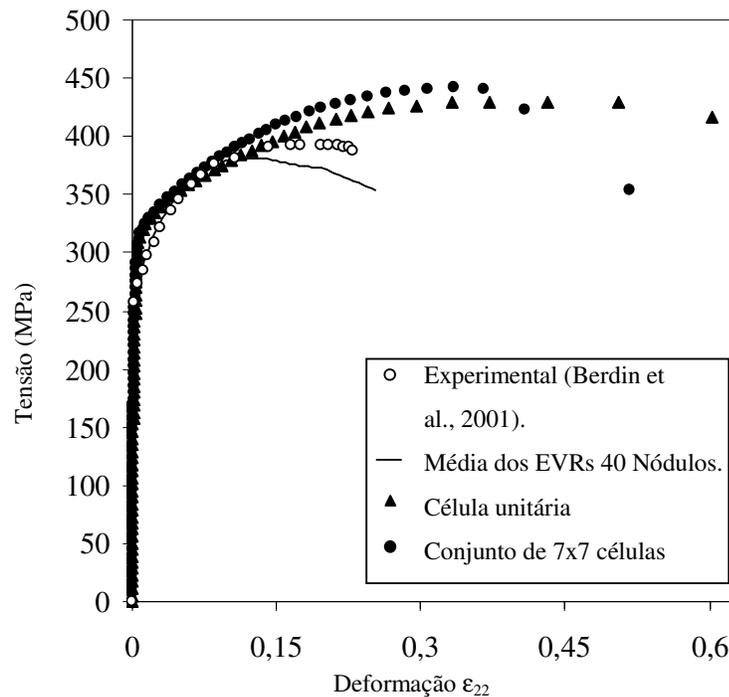


Figura 6.35. Resposta tensão deformação do material real e os modelos em MED com e sem periodicidade da microestrutura.

De forma geral pode se observar maior rigidez nos EVRs de micro-estrutura periódica, que nos EVRs de micro-estrutura aleatória. Resultados similares a estes foram obtidos por Kusnetsova, 2001, utilizando elementos finitos. Essa menor rigidez apresentada pelos EVRs de

40 nódulos se deve principalmente às características aleatórias da distribuição dos nódulos, a qual favorece à formação de clusters de nódulos ou então o alinhamento dos mesmos numa direção desfavorável, comprometendo a integridade do material.

Comparando a resposta tensão-deformação dos modelos periódicos entre si, pode-se constatar que o modelo de 7x7 células rompe primeiro que o de uma única célula. Isto deve ser atribuído à interação entre os vazios que tem lugar no conjunto de células, o qual no acontece no de uma única célula.

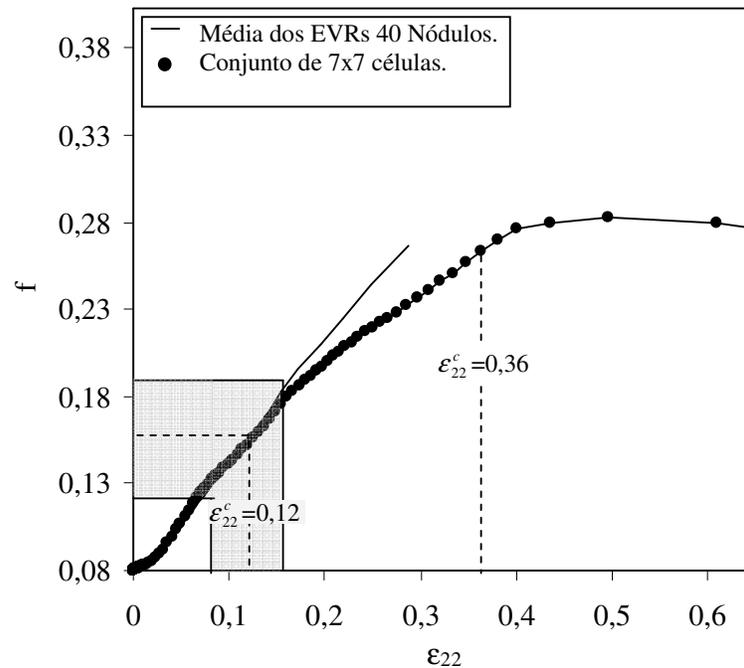


Figura 6.36. Evolução da fração de volume de vazios com a deformação.

A tendência nos resultados da fração de volume de vazios é mostrada na Figura 6.36. Comparando os resultados da fração de volume de vazios média dos EVRs de 40 nódulos de distribuição aleatória, com os do EVR de 7x7 células unitárias, pode observar-se, que as tendências são similares em ambos os casos, entretanto, verifica-se uma considerável diferença entre a deformação e a fração de volume de vazios correspondentes à coalescência. A deformação que marca o início da coalescência no conjunto de 7x7 células unitárias, é $\epsilon_{22}^c=0,36$ e sua correspondente fração de volume de vazios é $f_c=0,26$, enquanto que, nos modelos com aleatoriedade na microestrutura a deformação média de coalescência é $\epsilon_{22}^c=0,12$, e a correspondente fração de volume de vazios de coalescência é $f_c=0,148$. Este comportamento já era esperado, pois como pode se constatar na Figura 6.35, os modelos periódicos admitem maior deformação além do que, as deformações se distribuem de forma periódica por todo o modelo,

como pode se observar nos detalhes (a) e (b) da Figura 6.37, e da mesma forma ocorre com o crescimento dos vazios. Estas características determinam a obtenção de maiores valores de f no EVR periódico de 7×7 células unitárias.

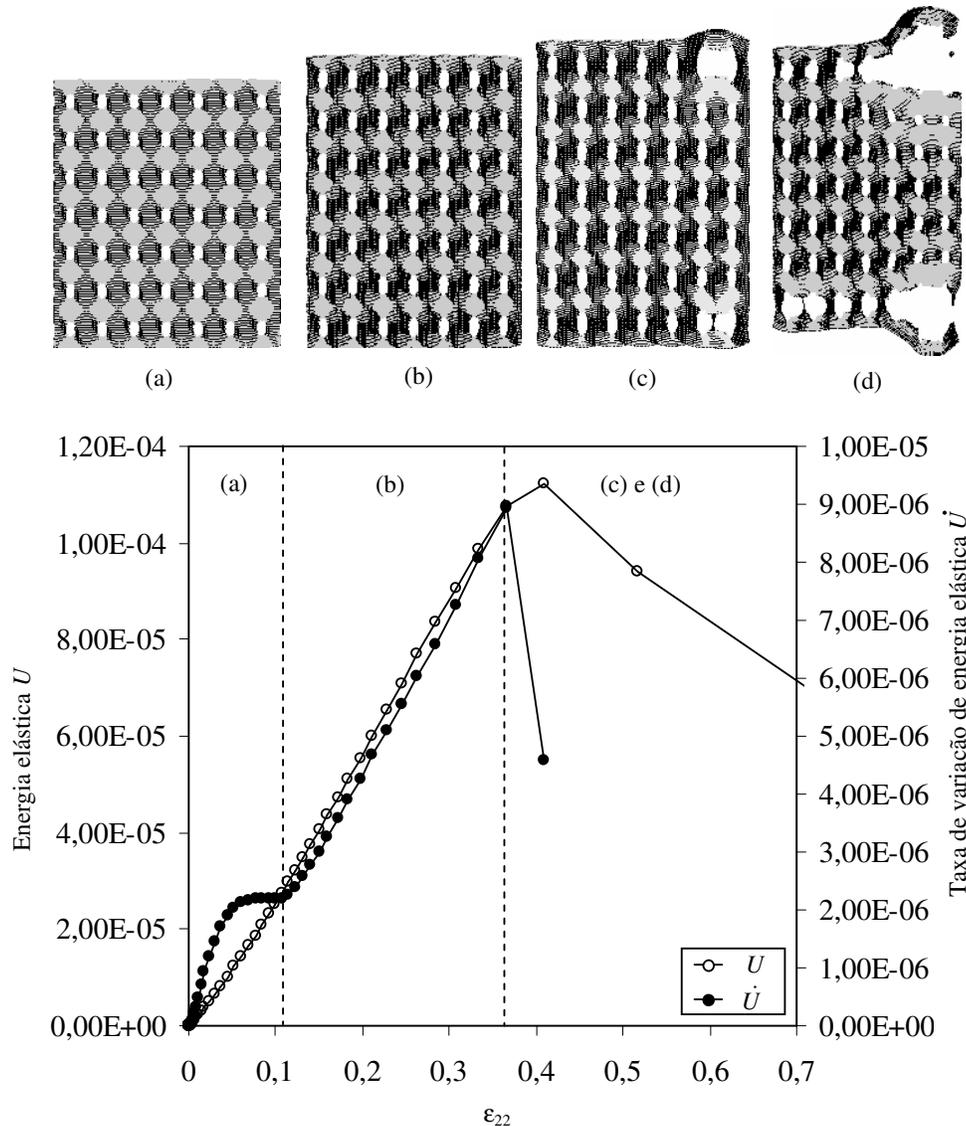


Figura 6.37. Variação da energia elástica (U) e a taxa de energia elástica (\dot{U}), com a deformação do modelo periódico de 7×7 células, e detalhes do modelo deformado em diferentes estágios do carregamento.

O fato das deformações serem periódicas propicia que o estado de dano de todos os nódulos seja similar. Desta forma uma vez iniciada a coalescência, o processo se torna instável e a ocorrência da falha tem lugar pouco depois, como pode ser observado na Figura 6.37 onde são mostrados os pontos de coalescência e ruptura, determinados segundo os critérios comentados anteriormente e as respectivas configurações deformada do modelo (detalhes (c) e (d)).

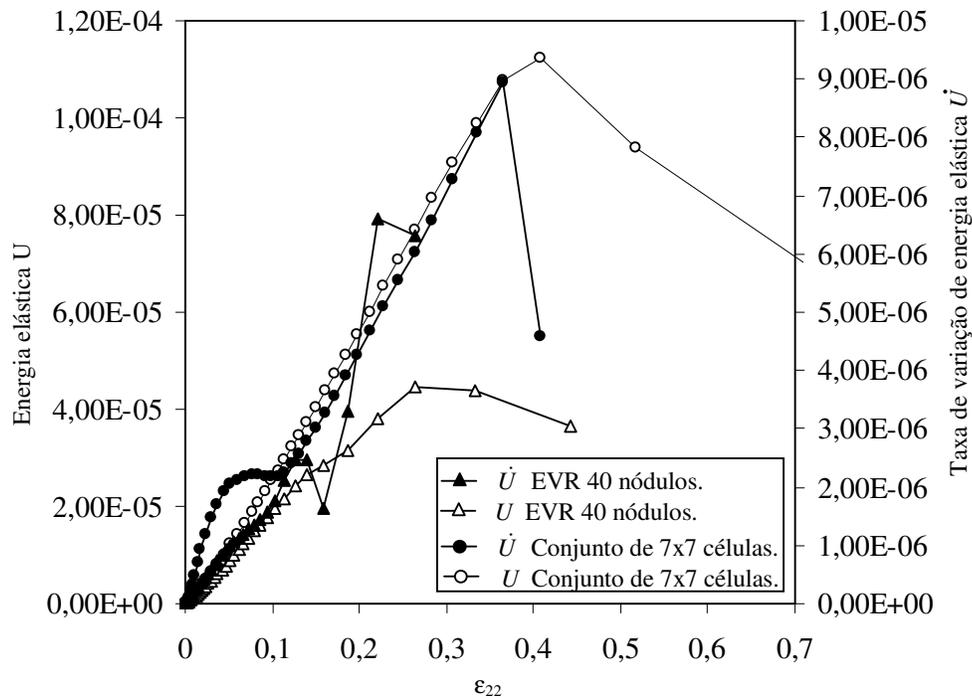


Figura 6.38. Comparação da evolução da energia elástica (U) e a taxa de energia elástica (\dot{U}), com a deformação, entre o EVR periódico de 7x7 células, e um EVR de 40 nódulos de distribuição aleatória.

No modelo com distribuição aleatória de nódulos, a deformação é irregular e se concentra nas regiões da maior densidade de nódulos ou então nas regiões onde os nódulos estiverem com orientação menos favorável em relação ao carregamento, assim, de forma geral nestes casos a coalescência se inicia, mas não se torna instável rapidamente. Comparando a resposta de um EVR de 40 nódulos com a resposta do EVR de 7x7 células periódicas (Figura 6.38), pode-se observar que uma vez iniciada a coalescência, o modelo periódico perde a capacidade de carregamento definitivamente. Entretanto, no modelo de distribuição aleatória de nódulos o início da coalescência não significa a perda definitiva da capacidade de carregamento do mesmo. Observa-se um mínimo local na taxa de energia elástica, só havendo uma completa queda em estágios mais avançados de dano, com a ruptura do modelo.

6.3.4. Atribuindo as Propriedades do Grafite aos Nódulos.

Na modelagem computacional da microestrutura do ferro fundido, usualmente tem-se tratado os nódulos de grafite como vazios, como proposto por Kohout, 2001 e Berdin *et al.*, 2001. Em relação a esta simplificação alguns autores discordam, e ressaltam a necessidade de ser considerado o grafite nos modelos computacionais, principalmente durante o comportamento linear elástico [Bonora e Ruggiero, 2005]. Devido a existencia destas discrepâncias, se estimou pertinente realizar o mesmo estudo apresentado nos itens anteriores, mas, atribuindo as

propriedades do grafite às barras dos nódulos em lugar de considerá-lhes como vazios. Para tanto foram analisados os mesmos EVRs utilizados na análise anterior substituindo os vazios por grafite, cujas propriedades são mostradas na tabela 6.3.

Tabela 6.3. Propriedades mecânicas do grafite (http://www.ndsm.ufrgs.br/)	
Propriedade	Magnitude
Módulo de elasticidade (MPa)	7000-25000
Limite elástico (MPa)	10-110
Tenacidade de fratura K_{Ic} (MPa·m ^{1/2})	1-2
Tensão de ruptura por tração (MPa)	11-150
Coefficiente de Poisson	0,22-0,3
Módulo de cisalhamento (MPa)	3000-9000

Foi utilizada a lei constitutiva bilinear para os elementos da região do nódulo de grafite, (ver Fig 4.5 Cap.) visto que este material apresenta comportamento mecânico essencialmente frágil. Para o material da matriz foram utilizadas as mesmas propriedades e lei constitutiva que nos modelos da análise anterior.

Os resultados da resposta média tensão-deformação de 40 EVRs considerando os nódulos como vazios e como grafite, juntamente com a resposta do material real, são mostrados na Figura 6.39. Uma análise qualitativa desses resultados, permite observar que existe pouca diferença na resposta mecânica média tensão-deformação entre ambos os casos analisados, com diferenças mais significativas no início do comportamento não linear. A dispersão nos resultados se mostra também muito similar e se observa que aproximadamente a partir da deformação $\epsilon_{22}=0,075$, a mesma aumenta de forma considerável.

Ao verificar de forma quantitativa a diferença nas tensões ao longo de todo o carregamento entre ambos os casos analisados (Figura 6.40), pode observar-se que existem dois picos, um localizado na transição entre o comportamento linear para não-linear, e outro localizado na região da ruptura. A diferença máxima alcançada representa aproximadamente 4 % do maior valor de tensão, e se localiza na região de transição do comportamento linear para não linear.

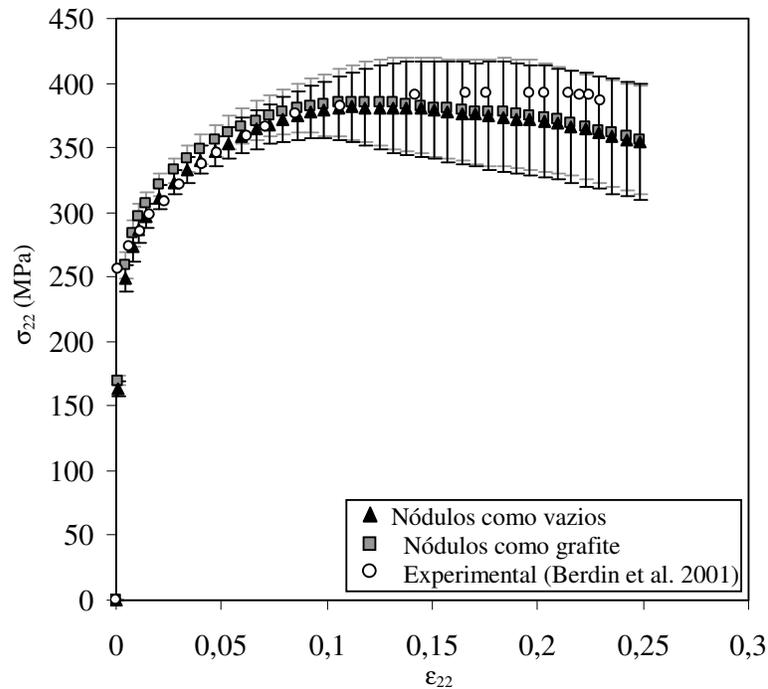


Figura 6.39. Comparação entre a resposta mecânica dos EVRs considerando o nódulo como vazio e como grafite e do material real.

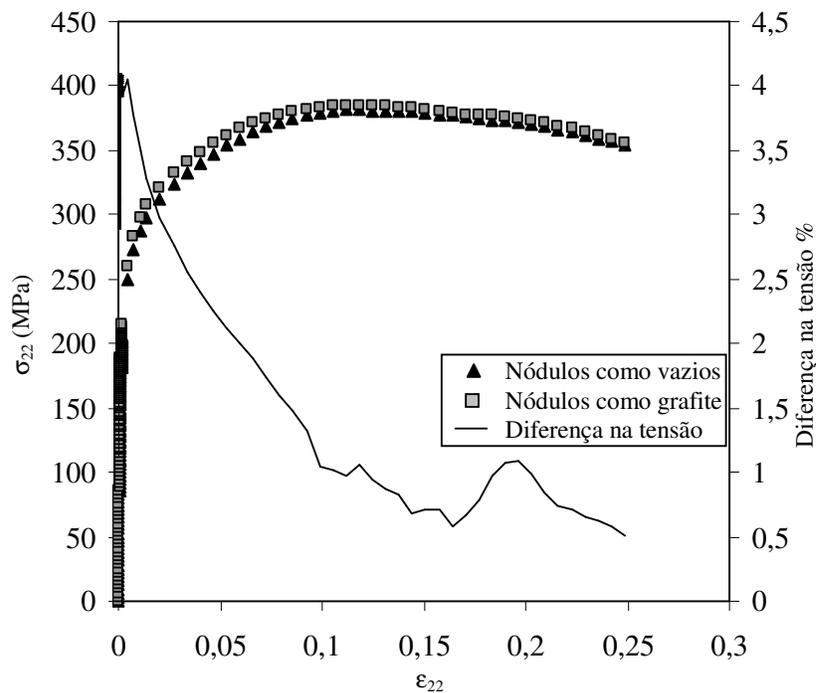


Figura 6.40. Diferença entre a tensão em valores percentuais em relação ao maior valor de tensão, dos EVRs considerando o nódulo como vazio e como grafite.

Na Figura 6.40, não se observa com clareza a diferença nas tensões durante o comportamento linear. Quando verificada neste trecho (Figura 6.41), pode observar-se um valor

máximo de aproximadamente 1,5% em relação à maior das tensões dos casos analisados. Esta mesma diferença se apresenta no valor de rigidez do modelo. Por tanto poderia se afirmar que o fato de considerar os nódulos de grafite na pseudo-micro-estrutura de ferro fundido nodular que constitui os EVRs analisados, contribui com no máximo 1,5 % na rigidez do modelo durante o comportamento elástico linear. Este resultado é coerente com resultados obtidos por Bonora e Ruggiero, 2005, com as mesmas propriedades do grafite aqui utilizadas.

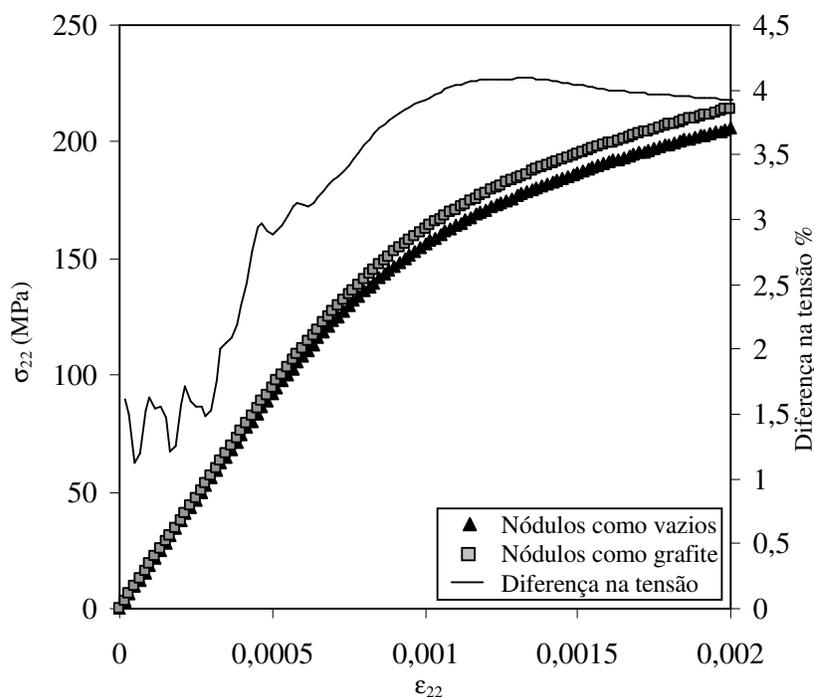


Figura 6.41. Diferença entre as tensões em valores percentuais considerando o nódulo como vazio e como grafite durante o comportamento elástico dos modelos.

Em relação à evolução do dano, e particularmente em relação à fração de volume de vazios (f), os valores médios e correspondente dispersão das 40 réplicas considerando os nódulos como vazios e como grafite, são apresentados na Figura 6.42.

Uma análise qualitativa das curvas da Figura 6.42, revelam maiores valores de f quando é considerado o nódulo como vazio. A diferença significativa entre os valores de f para um e outro caso analisado, começa se evidenciar a partir da deformação de aproximadamente $\epsilon_{22}=0,025$. Para este valor a diferença é de 3 % em relação ao maior dos valores de f dos casos analisados. Para maiores deformações essa diferença atinge valores máximos de aproximadamente 26 %.

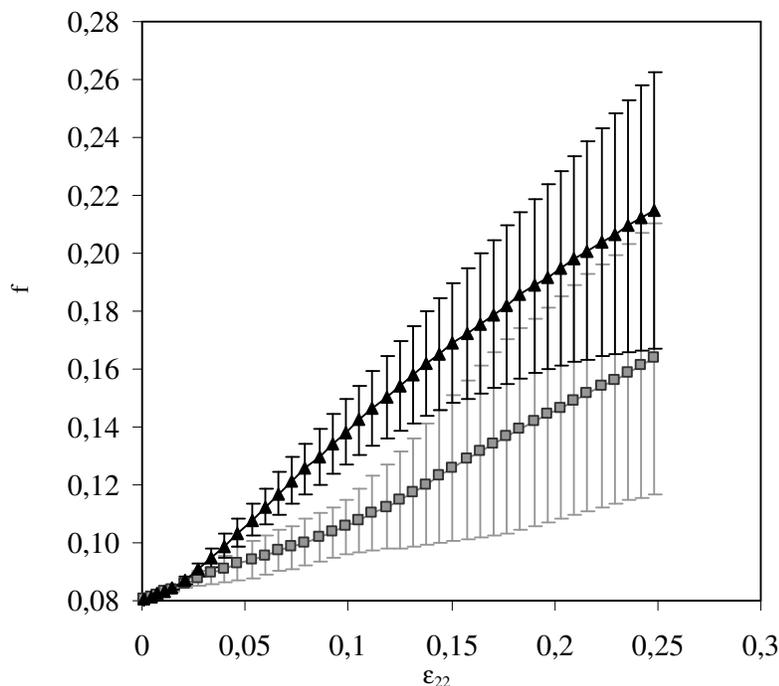


Figura 6.42. Valores médios da evolução da fração de volume de vazios (f) considerando os nódulos como vazios e como grafite.

Com relação à dispersão nos resultados, pode-se observar que até aproximadamente a deformação de $\epsilon_{22} = 0,12$, a dispersão nos resultados independe do fato dos nódulos serem considerados como grafite ou como vazio. Uma vez ultrapassado esse valor de deformação, a dispersão encontrada nos modelos considerando os nódulos como grafite se mostra ligeiramente superior à dos modelos em que se consideram os nódulos como vazio.

Colocando num mesmo gráfico as curvas tensão deformação, conjuntamente com a diferença dos valores de f obtidos, ao considerar os nódulos como grafite e como vazios, (Figura 6.43) pode ser observado que durante o regime linear elástico a diferença na variável de dano f praticamente independe de ser o nódulo vazio ou grafite, uma vez que a diferença entre os dois casos é menor do que 1 %. Quando ocorre a transição para o comportamento não linear a diferença nos valores de f se incrementa abruptamente, atingindo valores máximos de aproximadamente 26 % na região de tensão máxima.

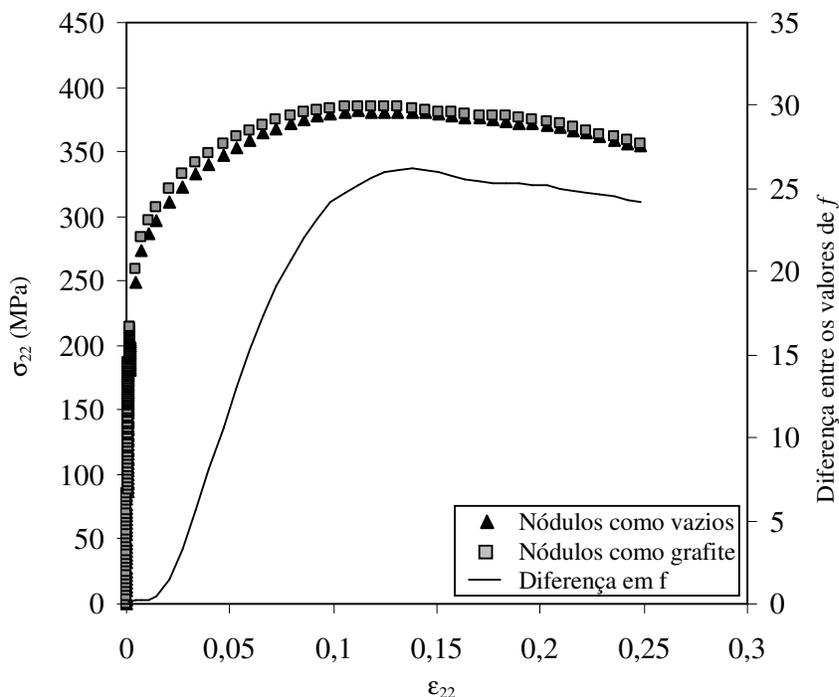


Figura 6.43. Evolução da diferença nos valores de f obtidos, ao considerar os nódulos como vazios e como grafite, em relação á resposta tensão deformação.

Foi verificada a configuração deformada de duas réplicas nos estágios finais do carregamento, uma considerando os nódulos como grafite e na outra como vazios (Figura 6.44). Nesta figura é apresentada uma seqüência de imagens, da esquerda para direita, onde se pode observar a evolução de um defeito formado de igual tamanho nos dois casos analisados. Verifica-se que no modelo que considera os nódulos como grafite o defeito formado alcança instabilidade mais rapidamente.

Considerando-se que as condições de contorno aplicadas foram as mesmas para ambos modelos, e que as configurações deformadas analisadas correspondem aos mesmos instantes de tempo, os resultados mostrados na Figura 6.44 sugerem que considerar os nódulos de grafite nos modelos computacionais, faz com que a pseudo-microestrutura de ferro fundido nodular ferrítico se mostre mais suscetível à presença de trincas.

De modo geral pode-se dizer que considerar os nódulos de grafite na simulação computacional deste material tem influência na resposta mecânica dos modelos e na evolução do dano, principalmente durante o regime não linear.

Em relação a considerar os nódulos como grafite ao modelar numericamente o ferro fundido nodular ferrítico alguns autores alertam sobre a necessidade de considerar os mesmos somente no regime linear [Bonora e Ruggiero, 2005; Kohout, 2001].

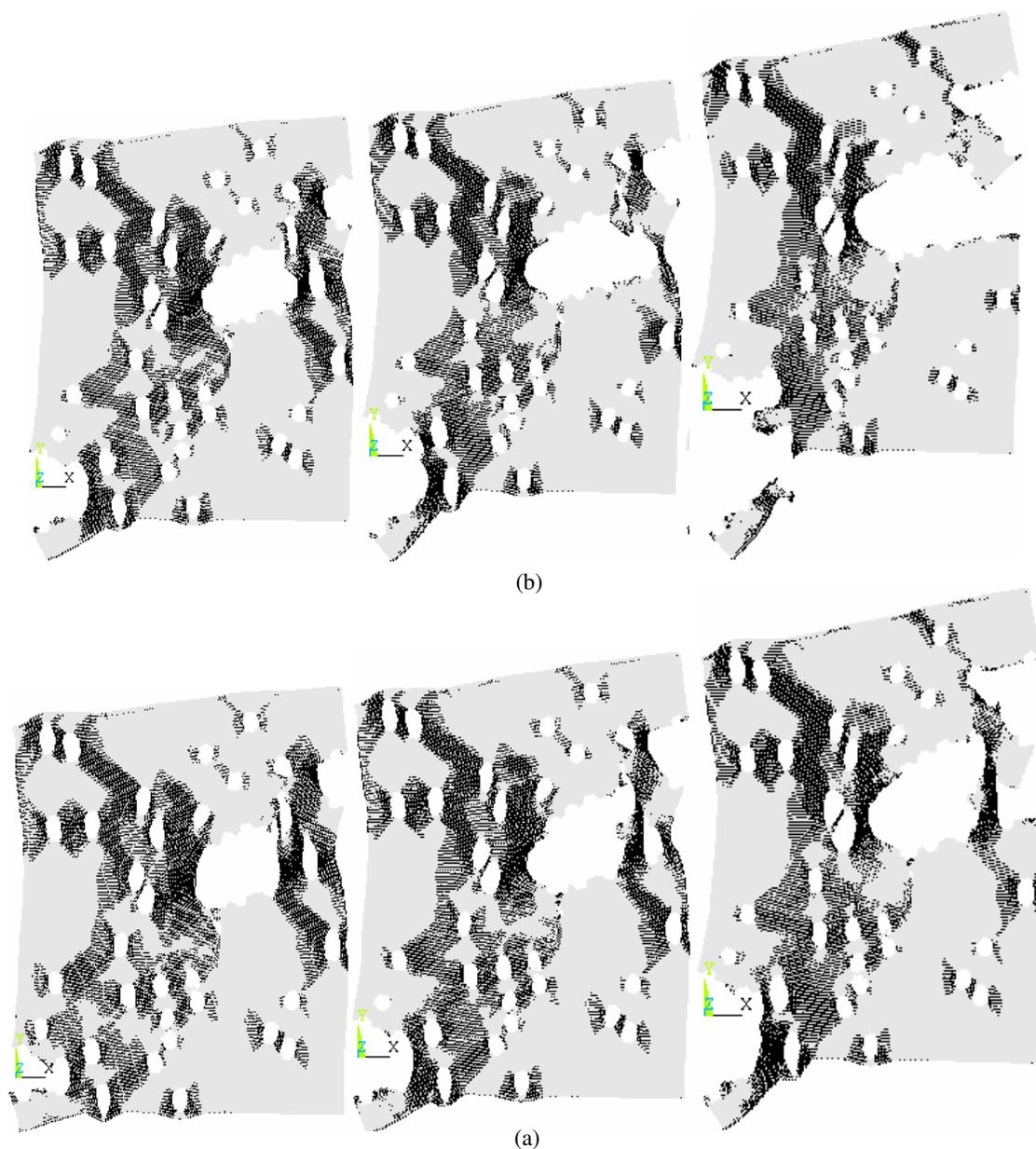


Figura 6.44. Configuração deformada do modelo considerando os nódulos como grafite (b) e como vazios (a).

6.4. Influência da Triaxialidade nas Tensões.

O estado de triaxialidade nas tensões tem influência direta na evolução dos vazios formados na microestrutura do material. Resultados obtidos por Kim *et al.*, 2004 ao investigar a influência do nível de triaxialidade na evolução da fração de volume de vazios, indicam que quanto maior o nível de triaxialidade nas tensões, menor a fração de volume de vazios de coalescência (f_c) obtida, isto resulta coerente uma vez que a existência de triaxialidade nas tensões inibe a deformação plástica.

Dentre os estudos computacionais que estudam a influencia da triaxialidade na evolução do dano em materiais microporosos podem ser mencionados aqueles realizados por Faleskog *et al.*, 1998 e Kim *et al.*, 2004. Nesses estudos foi utilizada a hipótese de periodicidade e os modelos numéricos consistiram numa única célula cúbica com um vazio central. Os níveis de triaxialidade utilizados por estes dois pesquisadores correspondem aos níveis encontrados na frente de trincas para diversos materiais, sob diversas condições de carga, onde a tensão normal em duas das direções ortogonais está entre 0,55 e 0,75 do valor da tensão na terceira direção ortogonal. Esta relação entre as tensões se designa com a letra ψ e desta forma fica $0,55 \leq \psi \leq 0,75$. Kim *et al.*, 2004, define a triaxialidade nas tensões como o parâmetro T obtido da relação entre a tensão hidrostática (σ_m) e a tensão equivalente de von Mises (σ_e) ($T = \sigma_m / \sigma_e$). Assim, considerando a faixa de valores da relação entre as tensões mencionada anteriormente ($0,55 \leq \psi \leq 0,75$), o parâmetro T assume valores aproximados entre $1,55 \leq T \leq 3,33$ respectivamente.

Considerando os modelos bidimensionais em estado plano de tensões que foram utilizados até aqui, e aplicando a esses modelos tensões prescritas mantendo-se a relação entre as tensões entre $0,55 \leq \psi \leq 0,75$, são obtidos valores de triaxialidade de $0,59 \leq T \leq 0,64$. Como era de esperar-se, nessas condições a triaxialidade é menor que os níveis usualmente analisados na verificação da sua influência na evolução do dano ($1,55 \leq T \leq 3,33$). Por outro lado, apenas existe diferença entre os níveis de triaxialidade obtidos, impossibilitando nessas condições a realização do estudo pretendido. Assim para que possa ser realizada a verificação da influência do nível de triaxialidade na evolução do f se impõe a necessidade da abordagem do problema em 3 dimensões.

Tomando como base a determinação do EVR realizada para duas dimensões, para a análise em três dimensões, estima-se que um modelo contendo 40 nódulos constitui um elemento de volume estatisticamente representativo da pseudo-microestrutura considerada. A Figura 6.45 (a) e (b) mostra uma das distribuoes de 40 nódulos em 3D geradas no MATLAB e a respectiva representação dos nódulos no modelo em MED.

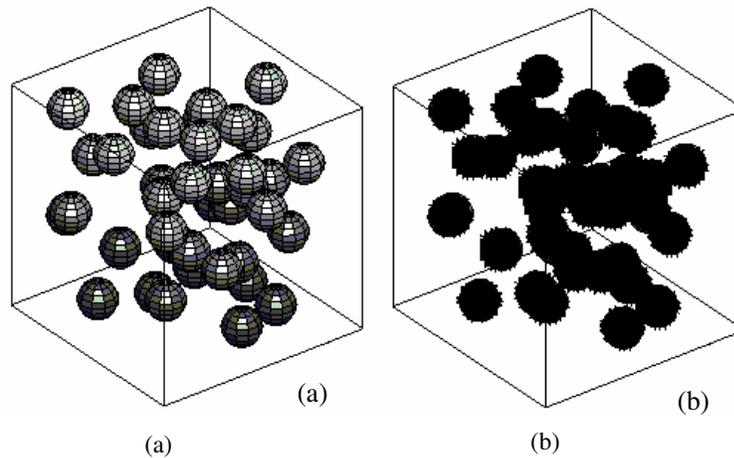


Figura 6.45. Distribuição de nódulos em 3D. a) distribuição gerada de forma automática, b) Correspondente representação no modelo em MED.

Para verificar a influencia da triaxialidade nas tensões na evolução de f , serão utilizadas as mesmas condições de contorno de triaxialidade constante que foram utilizadas por Kim *et al.*, 2004 e Faleskog *et al.*, 1998. Antes de aplicar estas condições de contorno diretamente num EVR de 40 nódulos (Figura 6.45), considerou-se conveniente realizar um estudo paramétrico inicial, implementando as condições de contorno de triaxialidade constante, numa geometria simples que facilite qualquer verificação pertinente. Para tanto, foi utilizado um modelo em MED que consistiu num cubo maciço de 15x15 elementos como se ilustra na Figura 6.46 (a).

Nas condições de contorno de triaxialidade constante, se impõe que a relação entre as forças aplicadas seja constante ao longo de todo o carregamento e satisfaça a eq.(6.1). Desta forma $P_x=P_z=P_y$. ψ [Faleskog *et al.*, 1998 e Kim *et al.*, 2004].

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{P_z}{P_y} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \psi \quad (6.1)$$

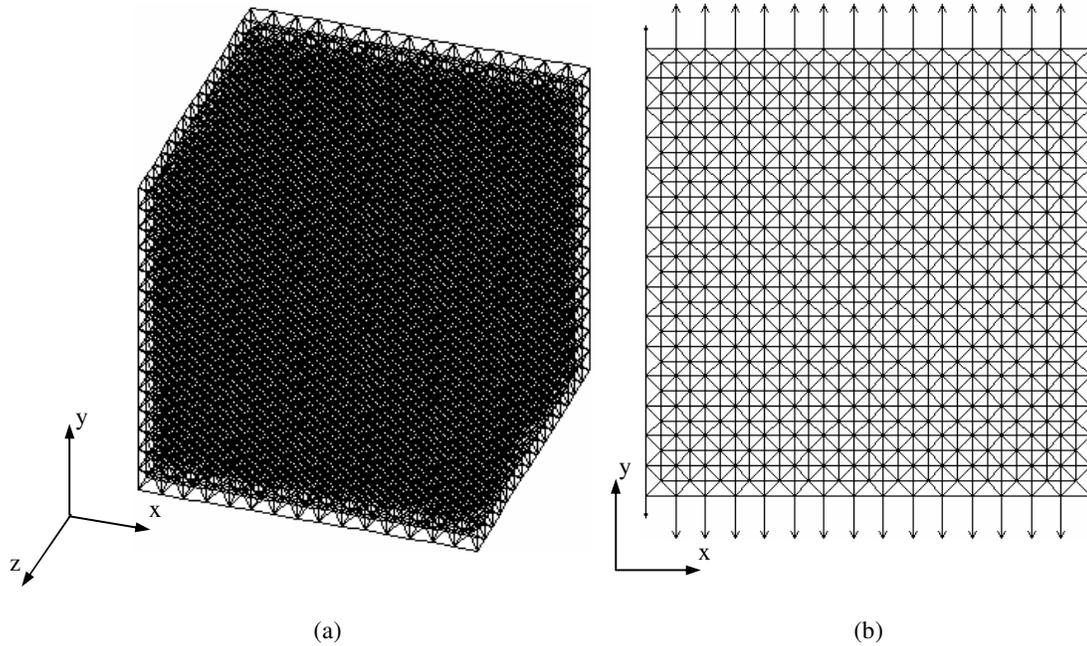


Figura 6.46 Modelo utilizado para implementar as condições de contorno de triaxialidade constante a) Vista geral, b) Condições de contorno de carregamento axial

A relação entre as cargas apresentada na eq.(6.1) produz uma resultante $P_0 = P_y \cdot \sqrt{1 + \psi^2}$, tal que poderia ser escrita a relação representada pela eq.(6.2)

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = P_0 \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \beta_1 \\ P_0 \beta_2 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

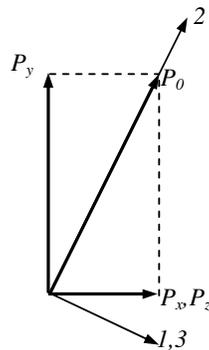


Figura 6.47. Relação entre os sistemas de coordenadas utilizados na implementação das condições de contorno de triaxialidade constante.

Considerando um outro sistema de coordenadas cartesianas cujo eixo 2 esteja alinhado na direção de P_0 (Figura 6.47), e sabendo que a mudança do sistema de coordenadas (1,2,3) para (x,y,z) é realizada através da relação apresentada na eq.(6.3)

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_r \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 P_r - \beta_1 P_z \\ \beta_1 P_r + \beta_2 P_z \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Onde: $\beta_1 = \frac{\psi}{\sqrt{1+\psi^2}}$ e $\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\psi^2}}$ representam os cosenos diretores entre os sistemas

(1,2,3) e (x,y,z).

Considerando a eq.(6.2) e substituindo na eq.(6.3) os parâmetros P_y e P_z chega-se à relação apresentada pela eq.(6.4).

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 P_0 \beta_1 - \beta_1 P_0 \beta_2 \\ \beta_1 P_0 \beta_1 + \beta_2 P_0 \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1^2 P_0 + \beta_2^2 P_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_0 (\beta_1^2 + \beta_2^2) \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Onde, a partir da eq.(6.1) e da Figura 6.47 pode-se escrever a eq.(6.5).

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_0 (\beta_1^2 + \beta_2^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_0 \left(\frac{\psi^2}{1+\psi^2} + \frac{1}{1+\psi^2} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_0 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Assim, no sistema de coordenadas (1,2,3), haverá carregamento axial na direção 2.

Considerando o estado uniaxial de carga representado pela equação eq.(6.5) e a mudança de coordenadas do sistema (1,2,3) para o sistema (x,y,z), obtém-se a relação representada pela eq.(6.6) entre as deformações de ambos sistemas.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 \varepsilon_1 + \beta_1 \varepsilon_2 \\ -\beta_1 \varepsilon_1 + \beta_2 \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Escrevendo a deformação em função do deslocamento e considerando o comprimento instantâneo chega-se à relação representada pela eq.(6.7)

$$\begin{aligned} u_x &= (L/2 + u_x) \cdot (\beta_2 \varepsilon_1 + \beta_1 \varepsilon_2) \\ u_y &= (L/2 + u_y) \cdot (-\beta_1 \varepsilon_1 + \beta_2 \varepsilon_2) \\ u_z &= u_x \end{aligned} \quad (6.7)$$

Escrevendo as relações apresentadas na (6.7) como taxa de deslocamento e deformação, chega-se às condições de contorno de deslocamento prescrito com triaxialidade constante utilizadas por Faleskog *et al.* 1998 e Kim *et al.*, 2004, ((6.8)), as quais serão utilizadas nesta neste trabalho.

$$\begin{aligned} \dot{u}_x &= (L/2 + u_x) \cdot (\beta_2 \dot{\varepsilon}_1 + \beta_1 \dot{\varepsilon}_2) \\ \dot{u}_y &= (L/2 + u_y) \cdot (-\beta_1 \dot{\varepsilon}_1 + \beta_2 \dot{\varepsilon}_2) \\ \dot{u}_z &= \dot{u}_x \end{aligned} \quad (6.8)$$

Onde:

$\dot{\epsilon}_1$ e $\dot{\epsilon}_2 =$ são as taxas de deformação na direção de aplicação da carga e na direção transversal respectivamente, correspondentes a um ensaio uniaxial previamente realizado no modelo a ser analisado (Figura 6.47).

Utilizando as condições de contorno de triaxialidade constante sob deslocamentos prescrito apresentadas na eq.(6.8), foi analisado o modelo em MED apresentado na Figura 6.47. Os resultados obtidos em termos da relação entre as tensões σ_x e σ_y são mostrados na Figura 6.48. Pode observar-se que em ambos os casos analisados, o parâmetro $\psi = \sigma_x/\sigma_y$ se mantém aproximadamente constante até aproximadamente a deformação $\epsilon_y = 0,001$, onde começa a aumentar com tendência ao valor 1.

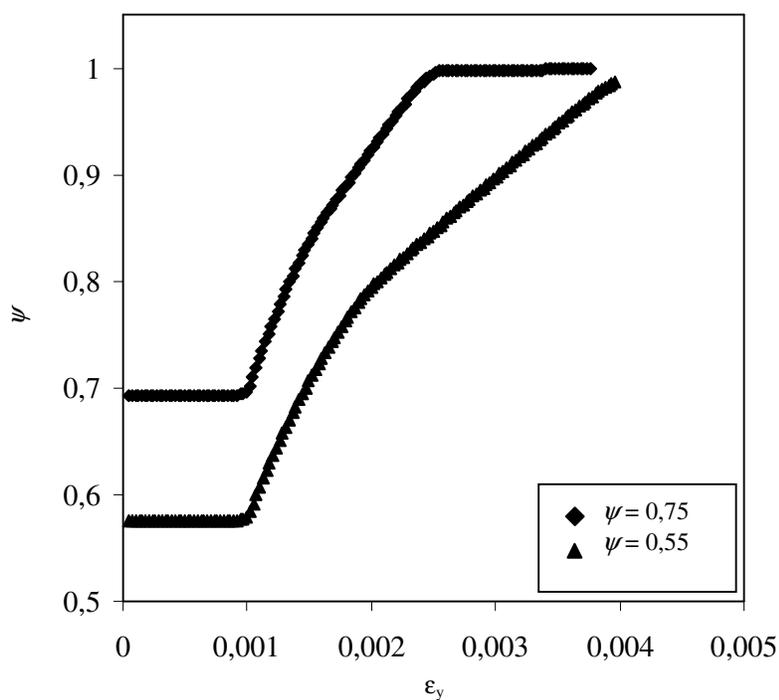


Figura 6.48. Comportamento da relação ψ nos modelos analisados.

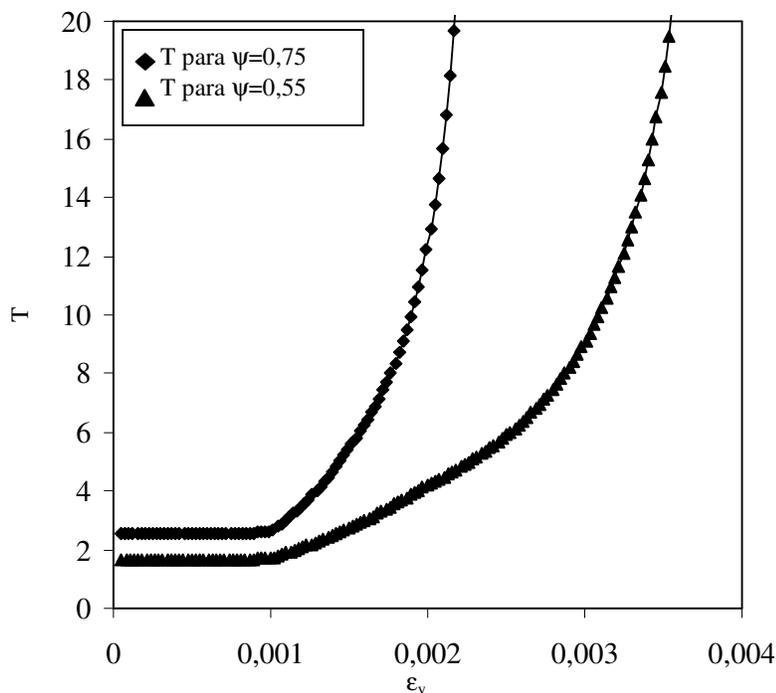


Figura 6.49. Comportamento do parâmetro T para os casos analisados.

Tendência similar pode ser observada no comportamento do parâmetro T mostrado na Figura 6.49, onde a partir de $\epsilon_y = 0,001$ também começa a aumentar o valor de T.

O comportamento evidenciado pelos modelos em relação aos parâmetros ψ e T, indica que a formulação em MED utilizada é insensível ao estado de triaxialidade presente. Ou seja, mesmo que sejam impostas condições de contorno de triaxialidade constante, a relação constitutiva das barras do modelo não capta esta situação. Sobrepondo o comportamento das tensões σ_x e σ_y com o comportamento do parâmetro T ou a relação σ_x/σ_y . É possível observar que os dois parâmetros mantêm os valores constantes somente durante o comportamento predominantemente linear elástico do modelo (Figura 6.50), que é aproximadamente até a deformação $\epsilon_y=0,001$.

Verifica-se que, independentemente da relação de tensões utilizada, após ser atingida a deformação $\epsilon_y=0,001$ o incremento de tensão diminui na direção Y em ambos os casos analisados, ou seja, a partir desta deformação existe uma considerável quantidade de barras carregadas na direção Y que atingem o trecho decrescente da relação constitutiva trilinear, e para valores maiores de deformação as tensões em todas as direções praticamente se igualam. A tensão equivalente tende a zero, e assim os valores do parâmetro T se incrementam de forma significativa, e do parâmetro ψ tendem a 1.

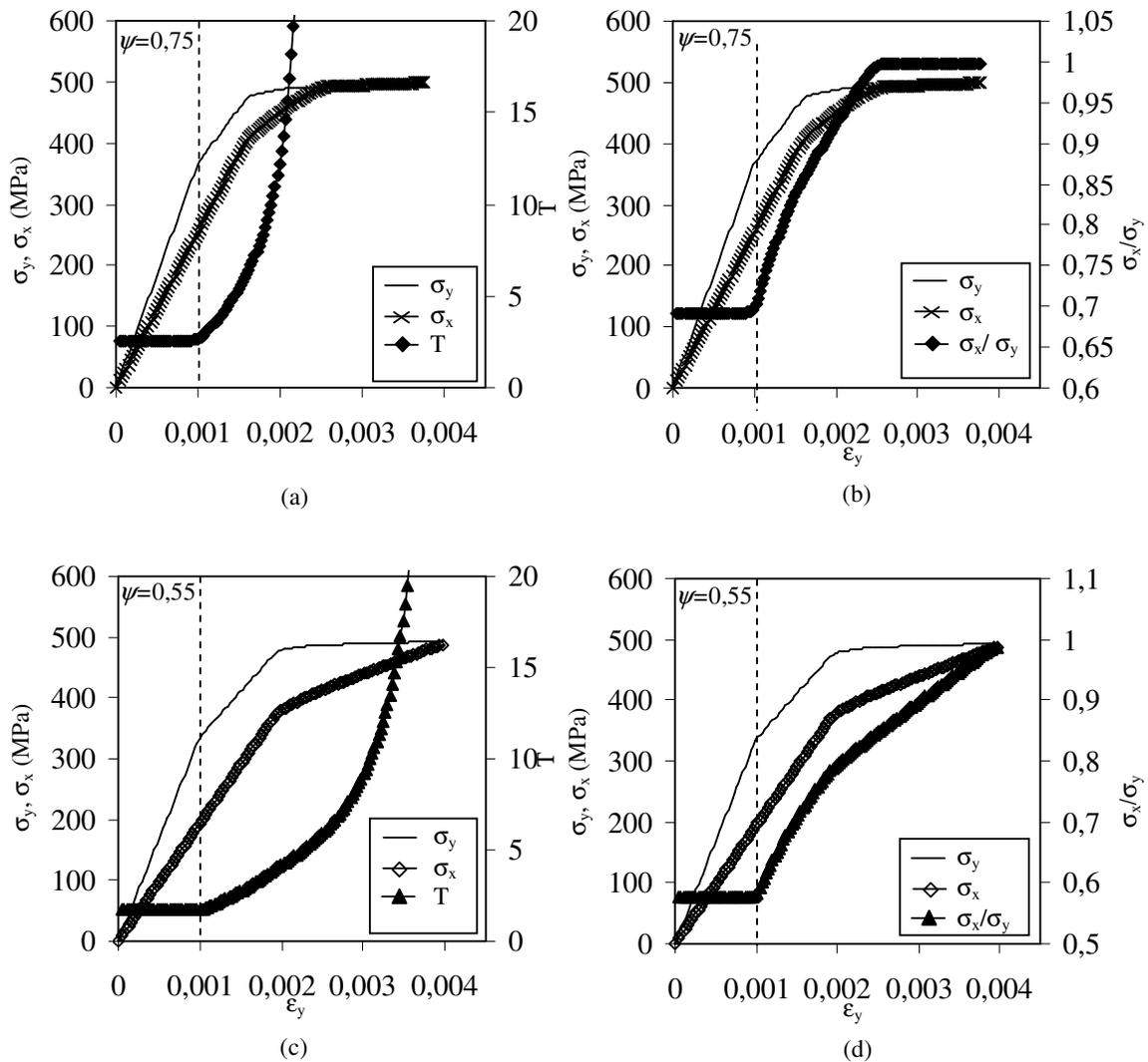


Figura 6.50. Variação das tensões normais médias nas direções x, y, e o parâmetro T com a deformação na direção y, a) Evolução da tensão nas direções x e y e do parâmetro T com a deformação para $\psi=0,75$, b) Evolução da tensão nas direções x e y e da relação σ_x/σ_y com a deformação para $\psi=0,75$, c) Evolução da tensão nas direções x e y e do parâmetro T com a deformação para $\psi=0,55$, d) Evolução da tensão nas direções x e y e da relação σ_x/σ_y com a deformação para $\psi=0,55$.

Para que a formulação em MED se torne sensível ao estado de triaxialidade presente, é necessário que seja modificada a relação constitutiva das barras. Uma alternativa pesquisada é mostrada de forma esquemática na Figura 6.51, Observa-se que considerando-se os parâmetro T ou ψ de cada módulo durante a aplicação da carga, a relação constitutiva das barras do módulo segue a curva OABC, ou a curva OADE. Até o ponto A (comportamento linear elástico do modelo) as duas curvas são iguais. Uma vez ultrapassado o ponto A, caso a triaxialidade verificada seja alta, a relação força-deformação da barra segue a curva ADE. Caso a triaxialidade nas tensões seja baixa a relação força-deformação segue a curva ABC. A implementação desta

alternativa na formulação em MED foi utilizada, entretanto, os resultados ainda não são conclusivos.

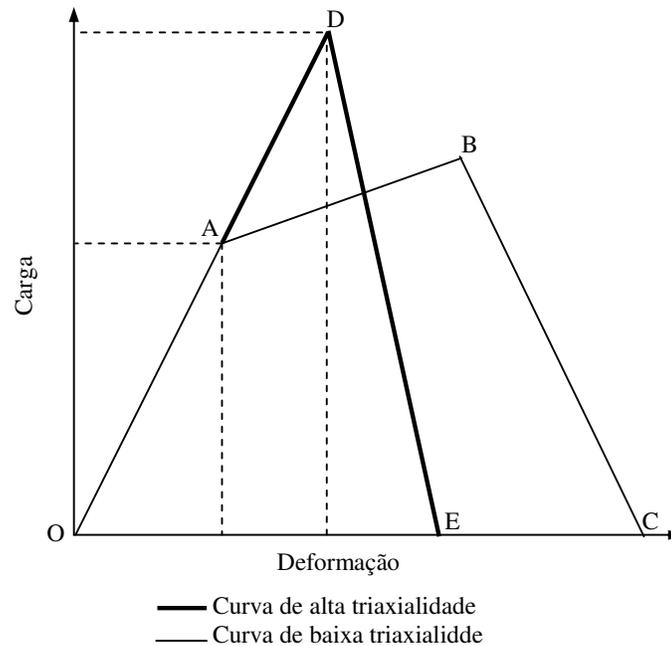


Figura 6.51. Figura esquemática da modificação a lei constitutiva da barra em função do nível de triaxialidade presente.

Considerando-se as limitações da formulação em MED utilizadas para captar a triaxialidade nas tensões, não será verificada a influência desta variável na evolução da fração de volume de vazios.

Foi verificada a evolução da fração de volume de vazios para alguns EVRs de 40 nódulos em três dimensões como o mostrado na Figura 6.45 sob carregamento axial. Neste caso foram considerados os nódulos como vazios e foi verificada a fração de volume de vazios de coalescência, utilizando a mesma metodologia descrita anteriormente para a análise em duas dimensões. Na Figura 6.52 é mostrada a fração de volume de vazios de coalescência (f_c) obtida para os cinco EVRs de 40 nódulos analisados, cujo valor médio e dispersão (desvio padrão), estão representados por uma linha tracejada e duas linhas contínuas respectivamente. Pode-se observar que os valores obtidos estão na mesma faixa da fração de volume de vazios de coalescência obtidos para duas dimensões com valor médio $f_c = 0,128$ e valores máximo e mínimo de $0,112 \leq f_c \leq 0,143$ o qual é coerente com o baixo índice de triaxialidade medido para este caso de carregamento uniaxial, ($T=0,33$). Este resultado preliminar vislumbra a possibilidade de se aplicar a metodologia de medição do f a três dimensões.

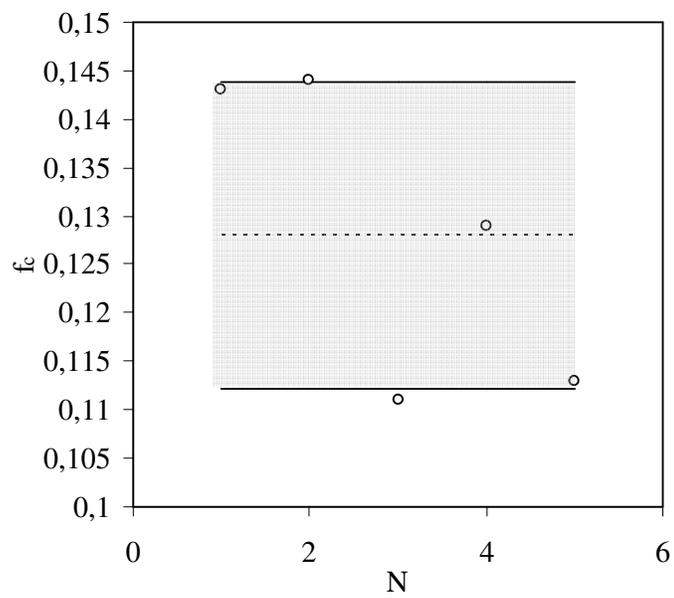


Figura 6.52. Resultados de cinco réplicas em 3D para a fração de volume de vazios de coalescência (f_c).

7. CONCLUSÕES.

Durante o desenvolvimento deste trabalho, foram realizadas algumas implementações dentro da formulação em elementos discretos utilizada, visando sua aplicação ao estudo micro-mecânico do dano em materiais micro-porosos de matriz metálica. Tais implementações incluem a obtenção dos tensores de tensões e deformações correspondentes a um módulo cúbico, modificação da lei constitutiva bilinear para trilinear, e por último foi implementada uma metodologia para a obtenção da fração de volume de vazios e a verificação da sua evolução. Juntamente com as implementações foram realizados alguns exemplos de verificação com o objetivo de estabelecer critérios em relação à resposta dos modelos e aspectos tais como discretização, número de camadas a serem utilizadas, comportamento em fratura dos modelos, etc. Finalmente, utilizando as possibilidades das implementações desenvolvidas, foi realizado um estudo da micro-mecânica do dano num ferro fundido nodular ferrítico.

Considerando-se os resultados obtidos nas diferentes etapas desenvolvidas durante o andamento do trabalho, conclui-se:

Em relação à metodologia de determinação das tensões

- a) A metodologia proposta para determinação das tensões consegue mapear a distribuição de tensões nos modelos desenvolvidos em MED de maneira satisfatória, uma vez que as comparações, ou com a solução analítica, ou com modelos análogos utilizando métodos consagrados como o método dos elementos finitos, apontam diferenças pequenas.
- b) Em estado plano de tensões, os modelos em MED devem utilizar duas camadas de elementos na espessura. Além disso, a discretização vai depender do problema analisado, embora, de um modo geral, os resultados sugerem que, no mínimo, devem ser utilizados quarenta elementos na dimensão do lado do modelo, visando a obtenção de melhores resultados.

Em relação à metodologia de determinação da fração de volume de vazios

Foi escolhida como variável de dano a ser verificada a fração de volume de vazios (f), e a metodologia proposta para a sua determinação se mostrou eficiente, tanto na determinação dos valores iniciais quanto dos valores correspondentes às etapas de crescimento e coalescência dos vazios. O valor de f correspondente à coalescência dos vazios obtido é coerente com os valores consultados na bibliografia para o material estudado.

Em relação à lei trilinear proposta, pode-se concluir o seguinte:

d) A modificação da lei constitutiva bilinear permite que a resposta tensão deformação dos modelos em MED se ajuste melhor à resposta tensão deformação de materiais que apresentam um comportamento não-linear acentuado antes da ruptura.

e) A modificação na lei constitutiva é consistente, visto que a mesma mantém a proporcionalidade entre a área abaixo da curva e a energia específica, conforme proposto por Rocha, [1989] para a lei bilinear.

Em relação à determinação do elemento de volume representativo, e sob as considerações realizadas neste trabalho, pode-se concluir que:

f) Para o material estudado, em regime linear, pode-se afirmar que um volume de controle que compreenda 10 nódulos pode ser considerado um elemento de volume representativo e, portanto, as propriedades obtidas a partir dele podem ser consideradas efetivas.

g) Em regime não-linear, a resposta média das variáveis de campo entre os diferentes volumes de controle analisados se estabiliza para volumes maiores que em regime linear, o que sugere a utilização de volumes de controle maiores. Estabelecendo um compromisso entre custo computacional e dispersão nos resultados obtidos, ficou estabelecido que trabalhar com volumes, da pseudo-microestrutura considerada, contendo 40 nódulos permitiria a obtenção de resultados com dispersão dentro da qual aparentemente se encontra o comportamento do material real. Utilizar volumes maiores não melhora de modo significativo a resposta dos modelos e aumenta consideravelmente o custo computacional.

h) A dispersão obtida entre os volumes de controle analisados depende da variável de campo analisada, e do regime verificado. De modo geral, para regime linear as dispersões obtidas são menores que para regime não linear, onde se obtém dispersões até de 12%.

g) Foi verificado que o tamanho do EVR depende da propriedade a ser homogeneizada. Isso já havia sido observado em outros trabalhos.[Kanit, 2003; Kouznetsova, 2001; Ostoja-Starzewsky, 2006].

Análise da resposta micro-mecânica de um ferro fundido nodular ferrítico.

i) A metodologia proposta de determinação da coalescência se apresentou eficiente e os resultados obtidos para a pseudo-microestrutura analisada mostrou-se coerente com os resultados consultados na bibliografia para o material real.

j) Foi comprovado que existe diferença na resposta mecânica e na evolução do dano dos modelos ao considerar a hipótese de periodicidade da microestrutura ou distribuição aleatória da mesma. De modo geral os modelos de microestrutura periódica se mostraram mais resistentes e tenazes

que os de microestrutura aleatória. Também foi verificado que, utilizando o critério de coalescência proposto, que na micro-estrutura de distribuição aleatória a coalescência se apresenta quase que simultaneamente com a ruptura do modelo.

k) Nos modelos computacionais de ferro fundido nodular ferrítico, ao considerar os nódulos como grafite ou como vazio, nas condições em que foram realizadas as análises foi observado o seguinte: Não se modifica consideravelmente a resposta mecânica dos modelos, no entanto, são observadas diferenças significativas em relação à evolução da variável de dano f , com valores maiores obtidos quando são considerados os nódulos como vazios.

l) A formulação em elementos discretos, não permite verificar a influência da triaxialidade nas tensões na evolução do variável f . Isto se deve a que a relação constitutiva das barras é insensível à presença de triaxialidade nas tensões.

m) A metodologia utilizada para verificar a evolução do dano pode ser estendida às análises em três dimensões.

SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.

a) Utilizar as possibilidades de programação em paralelo para poder realizar a análise utilizando tamanhos de volumes de controle maiores e análise em três dimensões.

b) Implementação de uma lei constitutiva da barra que permita captar a triaxialidade nas tensões para verificar sua influência na evolução do dano.

c) Verificar a influência da aleatoriedade no tamanho dos nódulos da pseudo-micro-estrutura no tamanho do EVR obtido e na evolução do dano.

d) Realizar o ajuste das propriedades do ferro fundido tomando como referência o valor médio de vários corpos de prova do material.

REFERÊNCIAS

Absi, E., 1971, “**Théorie des equivalences-determination de quelques éléments types**”, Anales de L’institut Technique Du Balument el des Travau Publics, №281, pp. 83-86.

Aidun, J.B., Lo D.C. S., Trucano, T.G., Fye, R.M., 1999, “**Representative Volume Size: A Comparison of Statistical Continuum Mechanics and Statistical Physics**”, Sandia National Laboratories Albuquerque, New Mexico.

Aliabadi, M.H. e Rooke, D.P., 1991 “**Numerical Fracture Mechanics**”, Computational Mechanics Publications, Kluwer Academics Publishers, Great Britain.

Anderson, T.L., 1995. “**Fracture Mechanics**”, CRC Press, Second Edition. Department of Mechanical Engineering, Texas A&M University, College Station, Texas, USA.

Argon, A.S., Im, J., Safoglu, R., 1975, “**Cavity Formation from in Ductile Fracture.**”, Metallurgical transactions, V. 6A, pp. 825-837

Armero, F., Oller, S., 2000, “**A General Framework, for Continuum Damage Models. II. Integration Algorithms, With Applications to the Numerical Simulation of Porous Metals**”, International Journal of Solid and Structures, vol. 37, pp. 7437-7464.

Barrios D'Ambra Ricardo, Iturrioz Ignacio, Fasce Laura A., Frontini Patricia M., Cisilino Adrián P., 2002, “**Utilización del método de los elementos discretos en la simulación numérica de ensayos de impacto para caracterización de materiales compuestos poliméricos**” MECOM 2002- Santa Fé- Paraná, Argentina, Mecánica Computacional Vol. XXI. ISSN 1666-6070. pp. 1121-1134.

Batista R. G., Iturrioz I. e Cisilino A. “**Caracterização micromecânica do dano em materiais microporosos utilizando o método dos elementos discretos**”, 2º Congresso de Ciência e Engenharia de Materiais do Mercosul (SULMAT'2004), Joinville, SC , Brasil.

Benscoter, A.O., e Bramfitt, B.L., 2002, “**Metallographer’s Guide: Practices and Procedures for Irons and Steels**”, ASM International.

Berdin, C., Dong M. J., Prioul, C., 2001, “**Local Approach of Damage and Fracture Toughness for Nodular Cast Iron**”, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 68, Elsevier Science, England, pp. 1107-1117, 2001.

Bermont O M.V., 2000, “**Fractura em Fundiciones de Hierro**”, Tesis de doctorado, Universidad Nacional de Mar Del Plata, Facultad de Ingeniería, (INTEMA), Mar del plata.

Bonora, N. and Ruggiero, N, 2005, “**Micromechanical Modeling of Ductile Cast Iron Incorporating Damage – Part I Ferritic Ductile Cast Iron**”, J. of Solids and Structures, 42, Issues 5-6, , pp. 1401-1424

Brara A., Camborde F., Klepaczko J. R., Mariotti C., 2001, “**Experimental and Numerical Study of Concrete at High Strain Rates in Tension**”, Mechanics of Material, vol. 33, pp. 33-45.

Brocks, W., Sun D.-Z., Honig A., 1995, “**Verification of the transferability of Micromechanical parameters by cell model calculations with visco-plastic materials**”, International; Journal of Plasticity, vol. 11, pp. 971-989.

Brown, L. M., Embury J. D., 1973, “**The initiation and growth of voids at second phase particles**”. IN: 3ed. Int. Conf. On Strength of Metals and Alloys, Institute of Metals, 164-169, London

Cailletaud, G., Forest, S., Jeulin, D., Feyel, F., Galliet, I., Mounoury, V., Quilici S., 2003, “**Some elements of microstructural mechanics**”, Computational Materials Science, vol. 27, pp. 351–374.

Camborde F, Mariotti C. Donzé F. V., 2000, “**Numerical Study of Rock and Concrete Behavior by Discrete Element Modeling**”, Computer Geotechnics, vol. 27 pp. 225-247.

Carter, S., F., e Donobo. C. K., 1964, “**Mantaining High Impact Properties in Ductile Iron**”, Foundry Trade Journal. V.92, p. 80-84.

Chaboche, J.L., 1977, “**Sur L’utilisation des Variables D’état Interne pour la Description du Comportement Viscoplastique et de la Rupture par Endommagement**”, Symp. Franco-Polonais de Rhéologie et Mécanique, Cravovie.

Chaboche, J.L., 1987, “**Continuum Damage Mechanics: Present State and Future Trends**”, Nuclear Engineering and Design, vol. 105, pp. 19-33.

Chou, C.S., Tseng, C.Y., Smid, J., Kuo, J.T., Hsiau, S.S., 2000, “**Numerical Simulation of Flow Patterns of Disks in the Asymmetric Louvered-Wall Moving Granular Filter Bed**”, Powder Technology, vol.110, pp. 239-245.

Cundall, P.A., 1971, “**A computer model for simulating progressive large scale movements in block rock systems**”, Symposium International Society of Rock Mechanics, Nancy, France.

Cundall, P.A., Strack O.D.L., 1979, “**A distinct element model for granular assemblies**”, Geotechnique, vol.29:47, pp. 65.

Dalguer, A., Irikura, K., Riera, J.D., 2003, “**Generations of New Cracks Accompanied by Dynamic Shear Rupture Propagation of the 2000 Tottori (Japan), Earthquake**”, Bulletin of the Seismological Society of America, vol. 93, pp. 2236-2252.

Edolky, L. e Voigth, R. C., 1986, “**Fracture of ferritic ductile Cast Iron**”, AFS transaction V. 94, pp. 621-636

Ewalds, H. L., Wanhill, P. J. H., 1985, “**Fracture Mechanics**” 3rd ed., Arnold.

Faleskog, J., Xiaosheng, G., e Fong Shih C., 1998, “**Cell Model for Nonlinear Fracture Analysis-I. Micromechanics Calibration**”, International Journal of Fracture 89, pp. 355-373.

Fedriço F. 2001, “**Aplicação de Interfaces Coesivas na Mecânica da Fratura Via Método dos Elementos Finitos**”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC), Porto Alegre, 2001.

Garrison, W.M., e Moody, N.R., 1987, “**Ductile Fracture**”, Journal of the Physics and Chemistry of Solids. V. 48, N11, pp. 1035-1047.

Gethin D.T., Ransing R.S., Lewis R.W., Dutko M., Crook A.J.L., 2001, “**Numerical Comparison of a Deformable Discrete Element Model and an Equivalent Continuum Analysis for the Compaction of Ductile Porous Material**”, Computers and Structures, vol. 79, pp. 1287-1294.

Goods S. H. and Brown L. M., 1979, “**The nucleation of cavities by plastic deformation**”, Acta Metallurgica Vol 27, Issue 1, 1-159

Goth H., Sakai, T., 1997, “**Numerical Simulation of Sheet flow as Granular Material**”, Journal of Waterway Port Coast and Ocean Engineering, vol. 123, pp. 329-336.

Graham, S., Yang, N., 2003, “**Representative volumes of materials based on microstructural statistics**”, Scripta Materialia, vol. 48, pp. 269–274.

Griffith, A.A., 1920, “**The Phenomena of Rupture and Flow of Solids**”, Philosophical Transaction, Royal Society, A 221, pp. 163-198

Gurson, A. L., 1977, “**Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I- Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media**”, Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 99, p. 2-15.

Hayashi, N., 1982, “**Sobre um Modelo de discretização de estruturas tridimensionais aplicado a dinâmica não linear**”. Tese M Sc., CPGEC, Universidade Federal de Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Hollister, S., Kikuchi, N., 1997, “**Computacional Methods in Biomechanics**”, Notas de aula da disciplina, Michigan University, Capítulo III.

Hrennikoff A., 1942, “**Solution of Problems of Elasticity bay the Framework Method**”, Annual Meeting of The American Society of Mechanical Engineers, New York, USA.

<http://www.ndsm.urfrgs.br,2007>

Ibijola, E.A., 2002, “**On Some Fundamental Concepts of Continuum Damage Mechanics**”, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 191, pp. 1505-1520.

Irwin, G.R., 1957, “**Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate**”, Journal of Applied Mechanics, vol. 24, pp. 361-364.

Iturrioz I., 1995, “**Aplicação do método dos elementos discretos ao estudo de estruturas laminares de concreto armado**”. Tese de Doutorado, CPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pp. 157.

Iturrioz, I., Morquio, A., Bittencourt, E. e Rosito d'Avila, V.M., 2007, “**Performance of the Discrete Element Method to Represent the Scale Effect**”, Mechanics of Solids in Brazil, Marcilio alves&H.S da Costa Mattos, ABEM

Jonas, J.J., Baudelet, B., 1977, “**Effect of crack and cavity generation on tensile stability**”, Acta Metallurgica, vol.25, pp. 43-50.

Kamiński, M. e Figiel, Ł., 2001, “**Effective Elastoplastic Properties of the Periodic Composites**”, Computational Materials Science, vol. 22, pp.221-239.

Kanit, T., Forest, S., Galliet, I., Mounoury, V. e Jeulin, D., 2003, “**Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach**”, International Journal of Solids and Structures, vol. 40, pp. 3647–3679.

Kanninen, M.F. e Popelar, C.H., 1985, “**Advanced Fracture Mechanics**”, Oxford University Press, New York

Kim, J., Gao X., Srivatsan T.S., 2004, “**Modeling of void growth in ductile solids: effects of stress triaxiality and initial porosity**”, Engineering Fracture Mechanics, vol. 71 pp.379–400.

Knott, J.F., 1993, “**The Science and Engineering of Fracture**”, Advanced in Fractures Resistance and Structural Integrity, selected papers from the 8th International Conference on Fracture (ICF8), Kyiv, Ukraine.

Kohout, J., 2001, “**A simple relation for deviation of grey and nodular cast irons from Hooke's law**”, Materials Science and Engineering A 313, pp 16-23

Kouznetsova, V., Brekelmans W.A.M., Baaijens F.P.T., 2001 “**An Approach to Micro-macro Modeling of Heterogeneous Materials**”, Computational Mechanics, vol. 27, pp. 37-48.

Krempel, E., 1977, “**On phenomenological failure laws for metals under repeated and sustained loading (fatigue and creep)**”, Conf. on Environmental Degradation of Engineering Materials, Blacksburg, Virginia.

Ladislav E. E Dutko M., 2003, “**Large Scale Fracturing and Rock Flow Using Discrete Element Method, 2D Application for Block Caving**”, Numerical Methods in Continuum Mechanics, Žilina, Slovak Republic.

- Lemaitre, J., Chaboche, J.L., 1985, “**Mécanique des Matériaux Solides**”, Dunod, Paris.
- Lin, C-J., Wei, W-C.J., Iwai, T., Hong, C-W., Greil, P., 2000, “**Discrete Element Method (DEM) Simulation and Processing of Mo/Al₂O₃ Granules in a Fluidizing Bed**”, Proceeding of the National Science Council of the Republic of China, vol. 24, pp. 394-404.
- Liu, J.H., Hao, X.Y., Li, G.L. e Liu, G.Sh., 2002, “**Microvoid evaluation of ferrite ductile iron under strain**”, Materials Letters , vol.56, pp. 748–755
- Liu, J.H., Li, G.L., Liu,eG Hao.Sh. e, X.Y. 2004 “**Damaged evaluation of ferrite ductile iron with electric resistance**”, Materials Letters, vol. 58, pp. 1051-1055.
- Miguel L. F. F., Riera, J.D., e Dalguer L. A., 2006, “**Macro constitutive law for rupture dynamics derived from micro constitutive law measured in laboratory**”, Geophysical Research Letters V. 33, L03302, doi:10.1029/2005GL024912, 2006
- Milton, G.W., 2002, “**The Theory of Composites**”, Cambridge University Press, United Kingdom.
- Moura Branco C. Fernandes A. A. Tavares de Castro P. M. S., 1986, “**Fadiga dos Metais**”, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Munjiza A., Bangash T. e John N.W.M. 2004, “**The Combined Finite-Discrete Element Method for Structural Failure and Collapse**”, Engineering Fracture Mechanics, vol. 71, pp469-483.
- Murakami,S., Ohno, N., 1981, “**A continuum theory of creep and creep damage**”, Proceedings of the Iutam Symposium on the Creep in Structures, Leicester, 1980, Berlin, pp. 422-443.
- Nayfeh, A. H., Hefzy M. S., 1978, “**Continuum Modelling of Three-Dimensional Truss-Like Space Structures**”, AIAA Journal, Vol. 16 pp. 779-787
- Needleman, A., 1987, “**A Continuum Model for Void Nucleation by inclusion debonding**”, Journal of Applied Mechanics, v.54, pp.525-531.
- Nemat-Nasser S. and Hori M., 1999, “**Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials**”. Second Edition. North-Holland

Nygårds M. 2003, “**Microstructural Finite Element Modeling of Metals**” Doctoral Thesis no.53, 2003, ISRN KTH/HLF/R-03/02SE Department of Solid Mechanics Royal Institute of Technology SE-100 44 Stockholm, SWEDEN.

Ole Sigmund., 1994, “**Materials with prescribed constitutive parameters: An inverse homogenization problem**” International Journal of Solids and Structures, Volume 31, Issue 17, pp. 2313-2329.

Ostojca-Starzewski, M., 2006, “**Material Spatial Randomness: From Statistical to Representative Volume Element**”, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol21, pp.112-132.

Petry Muniz Cíntia Cristiane, 1999, “**Avaliação das propriedades de impacto e dos mecanismos de fractura de ferros fundidos nodulares ferríticos**”, Dissertação para a obtenção do título de mestre, PPGEM,

Pradoem, T., e Hutchinson, J.W., 2003, “**Micromechanics-based Model for in Toughness of Ductile Metals**”, Acta Materialia, 51 pp. 133-148

Prahl, U., Aboutayeb M., Weichert, D., Achenbach U., Wang, X., 1999, “**Damage Evolution in Experiment and Simulation in a Construction Steel**”, Computational Materials Science, vol. 16, pp. 206-212.

Procházka P. P. , 2004, “**Application of Discrete Element Methods to Fracture Mechanics of Rock Bursts**”, Engineering Fracture Mechanics, vol. 71, pp. 601-618

Puttick, K. E., 1959, “**Ductile Fracture in Metals**”, Philosophical magazine a: physics of condensed matter, defects and mechanical properties, vol. 4, pp 964-969

Rice, J.R., 1968, “**A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentrations, by Notches and Cracks**”, Journal of Applied Mechanics, vol. 35, pp. 379-386.

Riera, J.D. and Iturrioz, I., 1998, “**Discrete Element Model for Evaluating Impact and Impulsive Response of Reinforced Concrete Plates and Shells Subjected to Impulsive Loading**”, Nuclear Engineering and Design, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, pp. 179, 135-144.

Riera, J.D., 1980, “**A Critical Reappraisal of Nuclear Power Plant Safety Against Accidental Aircraft Impact**”, Nuclear Engineering and Design, vol. 57, pp. 193-206, North Holland Publishing Company.

Riera, J.D., 1984, “**Local Effects in Impact Problems on Concretes Structures**”, Proceedings, Conference on Structural Analysis and Design of Nuclear Power Plants, Porto Alegre, Brasil, CPGEC/UFRGS, Porto Alegre V. III, pp.57-79.

Riera, J.D., Iturrioz, I., 1995, “**Discrete Element Dynamic-Response of Elastoplastic Shells Subjected to Impulsive Loading**”, Communications in Numerical Methods in Engineering, vol. 11, pp. 417-426, Wiley & Sons, U. K.

Rios, R. D.; Riera, J. D., 2004 “**Size effects in reinforced concrete structures engineering structures**”, A SER PUBLICADO, 2004.

Rios, R.D.; 1995, “**Determinação das propriedades dinâmicas das estruturas mediante o emprego de modelos em escala reduzida**”. Tese de mestrado em engenharia civil PPGEC/UFRGS

Rocha, M.M., 1989, “**Ruptura e Efeitos de Escala em Materiais não Homogêneos**”, Dissertação de Mestrado, CPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brazil.

Rooke, D.P. & Cartwright., D.J., 1976. “**Compendium of Stress Intensity Factors**”, Her Majesty's Stationery Office.

Ruggieri C. 2004, “**Numerical Investigation of Constraint Effects on Ductile Fracture in Tensile Specimens**”, ABCM, Vol. XXVI, N°2, Abril-Junho

Sawamoto Y., Tsubota H., Kasai Y. Koshika N. e Morikawa H., 1998, “**Analytical Studies on Local Damage to Reinforced Concrete Structures Under Impact Loading by Discrete Element Method**”, Nuclear Engineering and Design, vol. 179, pp. 157-177.

Schafer, B.C., Quingley S.F. e Chan, A.H.C., 2002, “**Implementation of the Discrete Element Method Using Reconfigurable Computing (FGPAS)**”, 15th ASCE Engineering Mechanics Conference, Columbia University , New York, USA.

Segurado, J. e Llorca J., 2004 “**A New Three-Dimensional Interface Finite Element to Simulate Fracture in Composites**”, International Journal of Solids and Structures, vol. 41, pp. 2977–2993.

Shimada, S., 1985, ”**Computational Geometry for Structural Engineering**”, IABSE Proceedings, pp. 87-85.

Spencer, A.J.M., 1980, “**Continuum Mechanics**”, Longman Group, Great Britain

Staub, C., Boyer, J.C., 1998, “**A ductile growth model for Elastoplastic material**”, Journal of Materials Processing Technology, vol. 77, pp. 9-16.

Terada, K., Muneo, H., Kyoya, T., e Kikuchi, N., 2000, “**Simulation of the Multi-Scale Convergence in Computational Homogenization Approach**”, International Journal of Solid and Structure, vol. 37, pp. 2285-2311.

Tvergaard, V. e Needleman, A., 1984, “**Analysis of the Cup-Cone Fracture in Round Tensile Bar**”, Acta Metallurgica, V. 32, pp. 157-169.

Thomason, P. F., 1990, **Ductile fracture of metals**. Oxford: Pergamon, c. x, 219 p.

Tvergaard, V. e Hutchinson, W., 2002, “**Two mechanisms of ductile fracture: Void by void growth versus multiple void interaction**”, International Journal of Solids and Structures, 39 pp. 3581-3597.

Tvergaard, V. e Needleman, A. 1982, “**On Localization in Ductile Materials Containing Spherical Voids**”, International Journal of Fracture, v.18, p. 237-252

Van der Sluis, O, Schreurs, P.J.G. e Meijer, H.E.H., 1999, “**Effective Properties of a Viscoplastic Constitutive Model Obtained by Homogenization**”, Mechanics of Materials, vol. 31, pp.743-759

Wells, A.A., “**Application of Fracture Mechanics at and Beyond General Yielding**”, British Welding Journal, vol. 10, pp. 563-570.

Wittel F. K., Schulte_Fishedick J., Kun F. Kroplin B-H. e FrieB M., 2003, “**Discrete Element Simulation of Transverse Cracking During the Pyrolysis of Carbon Fibre**

Reinforced Plastics to Carbon/Carbon Composites", Computational Materials Science, vol. 28, pp. 1-15

Wriggers, P., Zavarise, G e Zohdi T. I., 1998, "**A Computational Study of Interfacial Debonding Damage in Fibrous Composite Materials**", Computational Materials Science, vol. 12 pp. 39-56

Zohdi T.I., 2002, "**Advanced School on Computational Micromechanics of Materials Science, Course Notes**", International Centre for Mechanical Sciences, Udine, Italia.

Zohdi, T.I. e Wriggers, P., 2005, "**Introduction to Computational Micromechanic**", LNACM 20, pp. 1-6., Springer-Verlag Berlin Heidelberg.