

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

JUNIOR DOS SANTOS BREHM

MÚLTIPLOS E DIVISORES DE NÚMEROS NATURAIS  
UM ESTUDO NO QUINTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

PORTO ALEGRE

2015

JUNEOR DOS SANTOS BREHM

MÚLTIPLOS E DIVISORES DE NÚMEROS NATURAIS  
UM ESTUDO NO QUINTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL.

Dissertação de mestrado elaborada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador: Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

PORTO ALEGRE

2015

JUNIOR DOS SANTOS BREHM

MÚLTIPLOS E DIVISORES DE NÚMEROS NATURAIS  
UM ESTUDO NO QUINTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação aprovada em 20 de abril de 2015

Banca Examinadora:

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Aline Silva de Bona (IFRS/Campus Osório)

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Elisabete Zardo Búrigo (IM/UFRGS)

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Fernanda Wanderer (PPGEDU/UFRGS)

PORTO ALEGRE

2015

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais João e Luci pelo incentivo ao estudo

À minha esposa sempre companheira Marilda e meu filho Davi que iluminam minha vida

A todos os professores que ajudaram em minha formação

A meu orientador que sempre foi uma pessoa maravilhosa, me ajudando desde a graduação

À FAPERGS- Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul, pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho

## RESUMO

Este trabalho é resultado de pesquisa desenvolvida no ano de 2013 em uma escola estadual de Ensino Fundamental, no Município de Itati, no Estado do Rio Grande do Sul, tendo como campo empírico a realização de dez encontros com uma turma do quinto ano do Ensino Fundamental com seis estudantes. A pesquisa abordou o estudo de múltiplos e divisores com auxílio do material didático “*segredo dos números*” via realização de atividades que viessem a auxiliar os alunos na construção dos conceitos de múltiplos e divisores de um número. O “*segredo dos números*” é um material didático criado pela professora Esther Pillar Grossi constituído por cartas nas quais os fatores primos dos números naturais são representados por símbolos. Na análise dos dados foi utilizada a Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud, com ênfase no campo conceitual multiplicativo. Constatou-se que os alunos evoluíram do ponto de vista da aprendizagem, nos conceitos relativos a múltiplos e divisores, desde o reconhecimento de um número primo, até as construções das maquetes de um número, que passa pela identificação de todos os divisores desse número.

**Palavras-chave:** “*segredo dos números*”, Campos Conceituais, Múltiplos, Divisores, Construção de Maquetes.

## **ABSTRACT**

This work is the result of research conducted in 2013 in a state school of Primary Education in Itati City, in the state of Rio Grande do Sul - Brazil, it has as the empirical field the realization of ten meetings with a class of fifth grade of Elementary School with six students. The research addressed the study about multiples and dividers with the help of teaching materials "secret of the numbers" through the realization of activities that were to assist students in the building of concepts of multiple and dividers of a number. The "secret of numbers" is a didactic material created by Professor Esther Pillar Grossi composed of letters in which the prime factors of natural numbers are represented by symbols. In the data's analysis it was used the Theory of Conceptual Fields of Gerard Vergnaud, emphasizing the multiplicative conceptual field. It was found that students progressed from the point of view of learning in the concepts related to multiple and dividers, from the recognition of a prime number, to the construction of models of a number, which includes the identification of all divisors of that number.

Keywords: "secret numbers," Conceptual Fields, Multiples, dividers, Models construction.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Esquema sobre as transformações do campo aditivo.....	19
Figura 2: esquema montado para solucionar um problema do texto sobre laranjas.....	20
Figura 3: esquema para solucionar exemplos discutidos no texto.....	22
Figura 4: esquema para mostrar análise da correspondência vertical.....	23
Figura 5: esquema para mostrar a análise da correspondência horizontal.....	24
Figura 6: esquema montado para solucionar exemplos discutidos no texto.....	25
Figura 7: esquema utilizado para solucionar um exemplo discutido no texto.....	26
Figura 8: esquema utilizado para solucionar outro exemplo discutido no texto.....	26
Figura 9: esquema utilizado para solucionar um problema trabalhado no texto.....	27
Figura 10: esquema utilizado para solucionar um problema discutido no texto.....	28
Figura 11: esquema que mostra duas maneiras de resolver um problema.....	29
Figura 12: exemplo da construção da carta que representa o número dez.....	30
Figura 13: exemplo da multiplicação retangular.....	30
Figura 14: combinação entre quatro moças e cinco rapazes.....	31
Figura 15: imagem da escola onde foi aplicada a pesquisa.....	34
Figura 16: imagem dos alunos nas construções das maquetes.....	35
Figura 17: cartas do “segredo dos números” que formam o número dez.....	38
Figura 18: cartas do “segredo dos números”, os divisores primos do número 30.....	39
Figura 19: imagem de cartas do “segredo dos números”.....	40
Figura 20: cartas que representam divisores não primos do número 30.....	40
Figura 21: cartas do “segredo dos números”.....	42
Figura 22: cartas representadas por dois símbolos diferentes.....	43
Figura 23: cartas representadas por dois símbolos iguais.....	43
Figura 24: cartas representadas por três símbolos.....	44
Figura 25: esquema que ajuda explicar os divisores do número 30.....	44
Figura 26: lista das cartas sugeridas na atividade para os alunos.....	45
Figura 27: cartas com figuras repetidas.....	46
Figura 28: maquete que representa a estrutura do número 16.....	47
Figura 29: maquete que representa a estrutura do número 12.....	48
Figura 30: maquete que representa a estrutura do número 30.....	49
Figura 31: cartas do “segredo dos números” utilizadas nas atividades com os alunos.....	50
Figura 32: cartas utilizadas nas atividades sobre raiz quadrada.....	50
Figura 33: cartas do “segredo dos números”.....	62

Figura 34: cartas do “ <i>segredo dos números</i> ” com três ou quatro divisores primos.....	70
Figura 35: cartas do “ <i>segredo dos números</i> ” compostas por dois símbolos.....	74
Figura 36: cartas e suas relações de múltiplos e divisores.....	77
Figura 37: reprodução do esquema feito pelo aluno JOA.....	78
Figura 38: reprodução do esquema feito pelo aluno GIL.....	79
Figura 39: esquema que representa os divisores dos números 90 e 30.....	80
Figura 40: reprodução do esquema feito pelo aluno YUR.....	82
Figura 41: reprodução do esquema feito pelo aluno HEN.....	83
Figura 42: reprodução do esquema feito pela aluna NAT.....	83
Figura 43: reprodução do esquema feito pela aluna LAU.....	84
Figura 44: algumas cartas do “ <i>segredo dos números</i> ” com um único símbolo.....	85
Figura 45: resultado da terceira rodada do jogo da batalha dos divisores de 60.....	90
Figura 46: resultado da quinta rodada do jogo da batalha dos divisores de 60.....	90
Figura 47: resultado da nona rodada do jogo da batalha dos divisores de 60.....	91
Figura 48: resultado da décima partida do jogo da batalha dos divisores de 60.....	91
Figura 49: maquete do número 16.....	93
Figura 50: maquete do número 12.....	93
Figura 51: maquete do número 30.....	94
Figura 52: maquete produzida em aula por os alunos e o pesquisador.....	95
Figura 53: maquete do número 20.....	96
Figura 54: maquete do número 55 refeita através da maquete feita pelo aluno JOA.....	96
Figura 55: maquete do número 72 construída pelos alunos GIL e JOA.....	97
Figura 56: maquete do número 42 construída pelo aluno HEN.....	98
Figura 57: esquema que representa os divisores dos números 58, 42 e 60.....	106
Figura 58: esquema que representa os divisores do número 1800.....	108
Figura 59: esquema reproduzido conforme feito pela professora SIL.....	110
Figura 60: esquema que representa os divisores do número 1260.....	112



## LISTA DE EXTRATOS

Extrato 1: retirado da escrita da aluna NAT.....	53
Extrato 2: retirado da escrita do aluno JOA.....	53
Extrato 3: retirado da escrita do aluno JOA.....	55
Extrato 4: retirado da escrita da aluna LAU.....	56
Extrato 5: retirado da escrita da aluna NAT.....	57
Extrato 6: retirado da escrita do aluno GIL.....	57
Extrato 7: retirado da escrita da aluna LAU.....	59
Extrato 8: retirado da escrita do aluno HEN.....	60
Extrato 9: retirado da escrita do aluno GIL.....	60
Extrato 10: retirado da escrita do aluno HEN.....	61
Extrato 11: retirado da escrita da aluna LAU.....	63
Extrato 12: retirado da escrita do aluno GIL.....	63
Extrato 13: retirado da escrita da aluna NAT.....	64
Extrato 14: retirado da escrita do aluno JOA.....	65
Extrato 15: retirado da escrita do aluno HEN.....	67
Extrato 16: retirado da escrita da aluna NAT.....	68
Extrato 17: retirado da escrita do aluno JOA.....	68
Extrato 18: retirado da escrita da aluna NAT.....	71
Extrato 19: retirado da escrita do aluno JOA.....	72
Extrato 20: retirado da escrita da aluna LAU.....	72
Extrato 21: retirado da escrita da aluna LAU.....	74
Extrato 22: retirado da escrita do aluno JOA.....	75
Extrato 23: retirado da escrita do aluno YUR.....	76
Extrato 24: retirado da escrita do aluno JOA.....	78
Extrato 25: retirado da escrita do aluno GIL.....	80
Extrato 26: retirado da escrita do aluno YUR.....	82
Extrato 27: retirado da escrita da aluna LAU.....	86
Extrato 28: retirado da escrita do aluno YUR.....	87
Extrato 29: retirado da escrita da aluna NAT.....	101
Extrato 30: retirado da escrita da professora MIL.....	113

## SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	12
	1.1.PROBLEMA DE PESQUISA.....	14
	1.2.OBJETIVOS.....	15
2.	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	17
	2.1 CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO.....	19
	2.1.1 PROPORÇÃO SIMPLES.....	21
	2.1.2 PROPORÇÕES MÚLTIPLAS.....	25
	2.1.3 COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA.....	27
	2.1.4 PRODUTO DE MEDIDAS.....	28
3.	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	32
	3.1.LOCAL E PÚBLICO DA PESQUISA.....	34
	3.2.COLETA DE DADOS.....	35
4.	SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES.....	37
	4.1. ATIVIDADES APLICADAS AOS ALUNOS-ETAPA 1.....	37
	4.1.1.PRIMEIRO MOMENTO-EM BUSCA DO SEGREDO.....	37
	4.1.2.SEGUNDO MOMENTO-RESOLVENDO PROBLEMAS.....	38
	4.1.3.TERCEIRO MOMENTO - BUSCA POR DIVISORES.....	39
	4.1.4. QUARTO MOMENTO – OS NÚMEROS PRIMOS.....	40
	4.1.5. QUINTO MOMENTO – DIVISIBILIDADE.....	41
	4.1.6.SEXTO MOMENTO – QUANTIDADE DE DIVISORES.....	42
	4.1.7.SÉTIMO MOMENTO – CITAR OS DIVISORES.....	44
	4.1.8.OITAVO MOMENTO – POTÊNCIAS E RAIZ QUADRADA.....	45
	4.1.9.NONO MOMENTO – JOGO DA BATALHA.....	46
	4.1.10. DÉCIMO MOMENTO – CONSTRUÇÃO DAS MAQUETES.....	47
	4.2. ATIVIDADES APLICADAS AOS ALUNOS-ETAPA 2.....	49

4.3.	ATIVIDADES APLICADAS A UM GRUPO DE PROFESSORES.....	51
5	ANÁLISE DOS DADOS.....	52
5.1	ANÁLISES DAS ATIVIDADES APLICADAS DURANTE A ETAPA 1.....	52
5.1.1	CONHECENDO O MATERIAL.....	52
5.1.2	CONCEITOS SOBRE MÚLTIPLOS.....	58
5.1.3	CONCEITOS SOBRE DIVISORES.....	61
5.1.4	O CONCEITO DE NÚMERO PRIMO.....	65
5.1.5	OS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE.....	69
5.1.6	A QUANTIDADE DE DIVISORES DE UM NÚMERO.....	73
5.1.7	A POSSIBILIDADE DE DESCOBRIR SE FORAM ENUMERADOS TODOS OS DIVISORES DE UM NÚMERO.....	76
5.1.8	A IDEIA INTUITIVA DE POTÊNCIAS E RAIZ QUADRADA DE UM NÚMERO.....	85
5.1.9	O JOGO DA BATALHA DOS DIVISORES DO NÚMERO 60.....	88
5.1.10	AS MAQUETES DE UM NÚMERO.....	92
5.2	ANÁLISES DAS ATIVIDADES APLICADAS NA ETAPA 2.....	99
5.3	ANÁLISES DAS ATIVIDADES APLICADAS ÀS PROFESSORAS.....	109
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	115
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	119
8	APÊNDICES.....	120
8.1	PRODUTO DIDÁTICO.....	120
8.2	TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO DOS ALUNOS.....	151
8.3	CONSENTIMENTO INFORMADO DAS PROFESSORAS.....	152

## 1 INTRODUÇÃO

Ao longo dos últimos anos tenho ficado inquieto, quando trabalho com alunos que vão desde o sexto ano do Ensino Fundamental até o terceiro ano do ensino médio. É fácil perceber que eles têm pouco conhecimento sobre a estrutura de um número, ou seja, quando questionados sobre quais são os divisores de um determinado número, dão respostas incompletas.

Nas escolas em que trabalho, percebe-se que alguns dos alunos que ali estudam estão saindo da escola, ao final do ensino médio, sem saber a diferença entre múltiplos e divisores de um número. Alguns alunos citam como múltiplos os divisores do número que está em discussão, e isso é um indicativo de que esses alunos não sabem diferenciar um do outro.

A pesquisa foi desenvolvida através da discussão do problema central: como podemos ensinar múltiplos e divisores com o auxílio do material concreto “*segredo dos números*”. A escolha do tema aconteceu devido a várias dificuldades encontradas pelo professor/pesquisador quando trabalha com assuntos em sala de aula que necessitam de conhecimento sobre múltiplos e divisores.

Com esse trabalho, busca-se esclarecer que os múltiplos e divisores estão implícitos na fatoração de qualquer número em seus fatores primos. Ao desenvolver esta ideia, espera-se que os alunos consigam compreender que a divisibilidade está relacionada aos fatores primos de cada número. Por exemplo: se um número é ímpar, nunca será divisível por qualquer número par. Esta conjectura pode facilitar a divisão, visto que, quando o aluno ficar ciente disso, não precisará ficar testando se o número em questão é divisível por 2, 4, 6, 8, 10, ou qualquer outro número par.

Esta pesquisa foi realizada no ano de 2013, na Escola Estadual de Ensino Fundamental Guilherme Schmitt, localizada no Município de Itati, no Estado do Rio Grande do Sul, escola que atende cerca de 80 alunos oriundos da zona rural. A turma em que a pesquisa foi feita era uma turma de quinto ano com seis alunos que estudavam no turno da tarde.

Foi feita uma atividade com um grupo de 19 professoras da rede municipal do Município de Terra de Areia, no Estado do Rio Grande do Sul, em que a formação predominante é Pedagogia, sendo que elas trabalham no Ensino Fundamental e na educação infantil. Esta atividade foi feita com intenção de mostrar a existência deste material para as professoras e incentivar um possível uso em sala de aula, tornando assim, esse material mais útil para a educação.

Esta escola municipal foi escolhida porque o autor comandou um projeto com os alunos do terceiro, quarto e quinto anos, desta escola, durante um ano. Através de encontros semanais, em que eram discutidos conceitos pertinentes ao aprendizado destes alunos. Nos quartos e quintos anos, o assunto trabalhado foi sobre múltiplos e divisores. Desta maneira, a escolha justifica-se porque os professores sabiam do trabalho e alguns já haviam participado de oficinas que discutiram como pode ser trabalhado com múltiplos e divisores através da utilização do material concreto “*segredo dos números*”.

Através do desenvolvimento do trabalho, procura-se alguma solução para o ensino de múltiplos e divisores, onde se trabalha com material concreto na sala de aula de maneira que os alunos tenham contato e possam explorar o material, para assim terem a capacidade de construir seus conceitos. Os alunos foram questionados sobre qual deve ser o significado das figuras que aparecem em cada carta, e daí para frente foi desenvolvido um trabalho que pode ajudar os alunos a compreender porque cada carta contém símbolos diferentes.

O “*segredo dos números*” é formado por 100 cartas que representam os números que vão do um até o número 100. Cada número primo é representado por um símbolo diferente. As cartas que representam os números compostos contêm os símbolos referentes a cada número primo da sua fatoração. Na medida em que os números compostos vão aparecendo, os símbolos começam a se repetir para formar tais números. Desta maneira, se constrói os números em questão e é possível explorar as diferenças que cada número esconde por trás de suas estruturas. Isso ficará mais claro ao longo do trabalho.

O material concreto “*segredo dos números*” foi criado originalmente por Ester Pillar Grossi em 1986 e refeito com adaptações no ano de 2012 compondo o material utilizado na investigação apresentada nessa dissertação. As mudanças foram feitas com a intenção de tornar o material mais atrativo e interessante para os alunos. Esta é uma opinião com base num experimento feito em uma sala de aula para testar o material.

O autor fez dois testes com o material “*segredo dos números*”, onde os alunos foram convidados a resolverem problemas com a utilização do material. Nestes testes o material foi construído pelos alunos durante os encontros, assim cada aluno escolhia o símbolo que quisesse. Nesse momento o autor pensou ser melhor entrar com o material pronto e provocar os alunos quanto a seu segredo.

O ensino da multiplicação e divisão está necessitando de estratégias que além de chamar atenção dos alunos, os levem a se sentirem desafiados e interessados pelo assunto. Esta proposta de ensino contribui para a aprendizagem da estrutura de um número em relação

a sua construção através de seus fatores primos, onde se podem observar os passos pelos quais cada número composto é formado, ou seja, cada número tem uma estrutura única.

Este trabalho foi dividido em oito capítulos. O capítulo 1 trata da introdução dando ênfase ao problema de pesquisa e os objetivos. No capítulo 2 é apresentado o referencial teórico: Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud, dando ênfase ao campo conceitual multiplicativo. O capítulo 3 trata dos procedimentos metodológicos e o capítulo 4 da sequência de atividades aplicadas aos alunos e ao grupo de professores. O capítulo 5 aborda as análises dos dados coletados durante a aplicação das atividades e no capítulo 6 apresentamos as considerações finais. O capítulo 7 trata das referências bibliográficas e, finalmente, no capítulo 8 encontra-se o produto didático dessa dissertação.

## 1.1 PROBLEMA DE PESQUISA

Ao longo de dez anos trabalhando com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, foram surgindo várias questões sobre o que poderia ser feito para amenizar sérios problemas enfrentados pelos estudantes frente a problemas sobre múltiplos e divisores.

Foi pensando nisso que nasceu o projeto desta dissertação, e assim foram levantadas as questões que orientaram o trabalho.

A questão central é: como podemos ensinar a multiplicação e divisão para alunos do quinto ano do Ensino Fundamental com o auxílio do “*segredo dos números*”? A seguir, serão citadas questões auxiliares que poderão ajudar no desenvolvimento do trabalho:

Como trabalhar os conceitos de múltiplos e divisores?

Como encontrar um número primo?

Qual a importância do material concreto na divisão?

Como os esquemas podem ajudar a encontrar os divisores de um número?

Como o material concreto pode ajudar nos critérios de divisibilidade?

Como o jogo da batalha dos divisores do número 60 pode ajudar o aluno a criar seus conceitos?

Como a construção das maquetes pode desenvolver conceitos e conjecturas sobre múltiplos e divisores?

Na próxima seção serão discutidas as questões citadas neste capítulo levando aos objetivos pretendidos com a aplicação deste trabalho.

## 1.2 OBJETIVOS

No final desta pesquisa, espera-se que os alunos consigam diferenciar múltiplos e divisores de um número, saber reconhecer e diferenciar um número primo de um número composto, ser capaz de encontrar múltiplos de um número, encontrar divisores de um número, saber quantos divisores deve ter um número, prever os divisores de um número. Para isso devem alcançar pequenos objetivos que levará o aluno a obter um conhecimento sobre o assunto. A seguir serão discutidos estes objetivos de maneira individual, que levarão ao grande objetivo da pesquisa, que é a capacidade da resolução de problemas que envolvam conceitos sobre múltiplos e divisores.

Para alcançar estes objetivos, foi trabalhada uma sequência didática com questões que exploram cada ponto em questão. Assim, os alunos foram postos a frente de várias situações, em que utilizaram o material para desenvolver estes conceitos pertinentes a cada objetivo.

Esperava-se que os alunos conseguissem aprender o que são múltiplos e divisores e ao final da pesquisa, fossem capazes de diferenciar um múltiplo e um divisor.

Esperava-se que os alunos soubessem dizer o que é e como se pode descobrir se um número é primo ou não, explicando a situação. Sabe-se que todos os números naturais ou são primos, ou são compostos. Então, ao identificar um número primo, o aluno estaria construindo os conceitos de múltiplos e divisores.

Esperava-se que os alunos construíssem conceitos de múltiplos e divisores através da utilização do material durante as atividades propostas em todos os momentos do estudo.

Os alunos deveriam ter a capacidade de encontrar divisores de um número qualquer ao analisar sua fatoração em primos e com o uso do material, ter a capacidade de encontrar divisores apenas analisando a parte simbólica das cartas.

Através do uso do material podem-se descobrir todos os divisores de um número qualquer. Esperava-se que os alunos conseguissem listar todos os divisores de um número.

Esperava-se que os alunos construíssem critérios de divisibilidade dos números Naturais, utilizando o “*segredo dos números*”.

Ao jogar o jogo da batalha dos divisores de 60, esperava-se que os alunos criassem estratégias a partir do recebimento das cartas, de maneira a tentar ganhar o jogo. Também deveriam pensar sobre quem é múltiplo de quem e quem é divisor de quem. Em alguns momentos eles deveriam tomar decisões sobre qual carta precisariam jogar, e estas decisões acarretariam em resultados positivos ou negativos.

Nas construções das maquetes, esperava-se que os alunos utilizassem todos os conceitos estudados durante a pesquisa para desenvolverem as maquetes. Neste momento os alunos tiveram a oportunidade de trabalhar com a distribuição dos fatores primos e os divisores de algum número.



## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Na análise dos dados e apresentação dos resultados obtidos na pesquisa foi utilizada como embasamento a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. Vergnaud é Doutor em Psicologia e teve sua tese orientada por Jean Piaget pela Universidade de Paris Sorbonne. Ele exerceu, por vários anos, a função de diretor de pesquisa do CNRS (Centre National de Recherches Scientifiques), na área de psicologia do desenvolvimento cognitivo. Por sua contribuição teórica e como participante ativo na criação, na França, de grupos e institutos de pesquisa na área da educação matemática e científica, Gérard Vergnaud é considerado um dos pilares do movimento francês conhecido como movimento da didática da matemática.

Para explorar a teoria dos campos conceituais é necessário discutir o que é um conceito, que para Vergnaud é uma trinca de conjuntos,  $C = (S, I, L)$  onde:

S: conjunto de situações que dão sentido ao conceito (referência).

I: conjunto das invariantes em que se baseia a operacionalidade dos esquemas; (significado).

L: é o conjunto das formas de linguagem (ou não) que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante). (VERGNAUD, 1993, p. 9)

As situações podem ocorrer de diversas maneiras, os conceitos de adição e subtração, por exemplo, recebem um significado frente a um conjunto de situações e classes variadas de problemas dos quais é necessária uma análise das características e a classificação de maneira precisa.

É importante ressaltar que existem dois tipos de situações.

Classes de situações em que o sujeito dispõe, no seu repertório, em dado momento de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação.

Classes de situações em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas, levando-o eventualmente ao sucesso ou ao fracasso. (VERGNAUD, 1993, p. 2)

No primeiro tipo de situação, pode-se perceber que o sujeito deve resolver um problema com a utilização de um único esquema de maneira automatizada, levando ao sucesso. A seguir serão analisados exemplos que ajudam a esclarecer esta ideia.

Quando é feita uma subtração e encontra-se um valor como resultado, este pode até ser representado por um mesmo número que foi obtido aparentemente da mesma maneira, mas cada problema nos remete a situações diferentes como podem ser analisadas nos exemplos a

seguir: João tem quatro balas e Maria tem sete balas, quem tem mais e quantas a mais? José tinha cinco figurinhas, agora tem nove, o que aconteceu neste evento? Lucas tinha oito biscoitos e comeu seis, quantos ele ainda tem?

Observando estes problemas pode-se perceber que os mesmos devem ser resolvidos através da subtração, mas cada problema revela uma situação diferente. O primeiro nos remete a uma comparação, onde os grupos são conhecidos e buscamos pela relação entre a quantidade de balas de cada um. O segundo nos remete a ideia de ganho que Vergnaud chamou de transformação, onde é conhecido o estado inicial e o estado final e procura-se pela transformação da quantidade de figurinhas. O terceiro nos leva a ideia de perda que também foi classificado como problema de transformação, onde são conhecidos o estado inicial e uma transformação e procura-se o estado final.

No segundo tipo de situação, pode-se perceber que a solução de um problema passa pela análise de diversos esquemas que podem competir entre si, levando à solução desejada.

Os invariantes podem ser objetos, propriedades, relações e teoremas. Eles aparecem quando se analisam várias classes de situações que necessitam de operações de pensamentos precisos. Os teoremas-em-ação e os conceitos-em-ação ajudam a entender um pouco melhor os invariantes. Eles ajudam a esclarecer a ideia de invariantes, sendo que apresentam estreita relação embora tenham diferenças:

A diferença é que um teorema pode ser verdadeiro ou falso, enquanto um conceito não é verdadeiro nem falso, mas apenas pertinente ou não pertinente. Na vida nós selecionamos uma pequena parte da informação. E não só na matemática, mas na vida social, ao dirigir um automóvel. E são justamente esses conceitos em ação que nos permitem selecionar a informação pertinente. (VERGNAUD, 1996, p. 16)

Os significantes podem ser mais bem entendidos quando se analisa um esquema de representação de alguma situação.

Para prosseguir é necessário entender o que vem a ser um esquema, “uma totalidade organizada, que permite gerar uma classe de condutas diferentes, em função das características particulares de cada uma das situações da classe a qual se dirige” (Vergnaud, 1991, p. 180).

O esquema de pensamento compreende os seguintes elementos:

Invariantes operatórios, onde estão os teoremas em ação e os conceitos em ação.  
Objetivos principais e secundários, expectativas e antecipações da meta a ser atingida.

Regras de ação (do tipo “se... então...”), de informação e de controle.  
Inferências, raciocínios ou cálculo de regras e de antecipações, feitas a partir de informações sobre a situação vivida e do sistema de invariantes operatórios de que o sujeito dispõe. (VERGNAUD, 2001, p. 17)

Em outras palavras, um esquema comporta invariantes que ajudam o sujeito a tomar decisões sobre a situação que deseja resolver, chegando a casos, antecipações e a raciocínios que o levarão até o cálculo para solucionar o problema.

Agora será analisado um possível esquema para representar a situação do problema. “Roberto acaba de ganhar quatro bolas de gude, agora ele tem nove. Quantas ele tinha antes de jogar?”

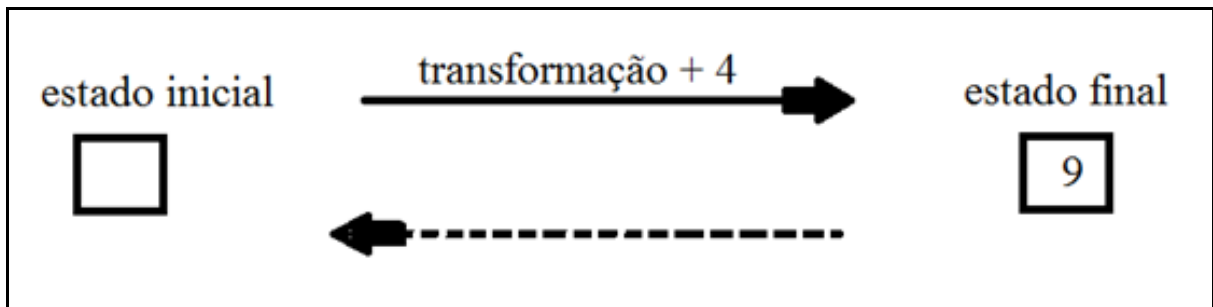


Figura 1: esquema sobre as transformações do campo aditivo

O esquema sagital acima é um significativo particular. A utilização deste esquema com seus símbolos pode auxiliar jovens alunos a compreender certas situações que envolvam a adição e subtração. Pode-se perceber que este esquema mostra que Roberto precisa descobrir quantas bolas de gude ele tinha em um estado inicial, sabendo que ele ficou com nove bolas de gude após sofrer uma transformação que é representada no esquema pela seta contínua, desta maneira pode ser notado que a seta tracejada levará ao estado inicial que é o objetivo do problema. Esta seta tracejada representa a transformação inversa da adição, que é a subtração. Assim, é possível chegar ao resultado do problema efetuando  $9 - 4 = 5$ .

Após estas discussões pode-se observar que um conceito conduz a muitas situações, com muitos invariantes possíveis em vários esquemas diferentes através de várias representações simbólicas. Assim, pode-se atacar um problema de vários ângulos diferentes, construindo um conceito sobre um determinado assunto de maneira ampla, com vários pontos de vista.

## 2.1 CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO

Com este trabalho, busca-se explorar conceitos relacionados a multiplicação e divisão com seus múltiplos e divisores, deve-se estudar de maneira mais detalhada o campo conceitual da multiplicação.

É possível separar este campo em duas relações multiplicativas que podem ser as relações quaternárias ou as relações ternárias, aos quais levam a uma multiplicação ou a uma

divisão. Uma parte significativa de problemas multiplicativos podem ser resolvidos utilizando a relação quaternária e não a relação ternária como o ensino básico sugere e como se pode constatar via análise da relação habitual da multiplicação:  $a \times b = c$ , a qual comporta somente três termos e, portanto, constitui-se em uma relação ternária.

Para prosseguir neste campo é necessário distinguir as relações ternárias e quaternárias. Segue-se com a análise do problema: “Um pacote de laranjas custa R\$ 3,00. Quanto pagarei por seis pacotes de laranjas”?

Este tipo de problema geralmente é resolvido em nossas escolas como relação ternária:  $a \times b = c$  ( $3 \times 6 = 18$ ). Mas percebe-se implicitamente que esta situação é uma relação quaternária entre duas quantidades de natureza diferentes que pode ser mostrada no esquema a seguir:

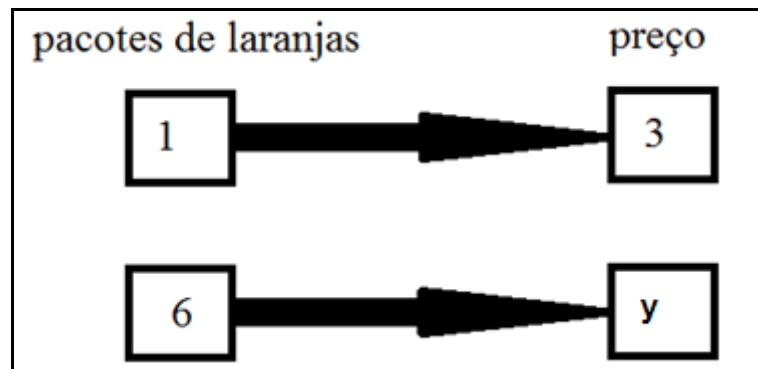


Figura 2: esquema montado para solucionar o problema das laranjas, citado logo acima

Este problema é um típico exemplo de relação quaternária onde se tem duas quantidades medidas como pacotes de laranjas e outras duas medidas como o preço, ou seja, todo problema que tiver alguma relação deste tipo onde existir duas quantidades medidas utilizando certa unidade e outras duas quantidades medidas através de outra unidade, existirá uma relação quaternária (VERGNAUD, 2009, p.239). Esta abordagem dos campos conceituais ajuda no entendimento dos alunos de como se pode multiplicar o valor seis que representa pacotes de laranjas pelo valor três que representa o preço e chegar a uma resposta em reais, que nada mais é do que o preço dos produtos, ou seja, estão sendo multiplicadas grandezas diferentes e obtendo uma delas como resposta, como isso é possível? Esta questão poderá ser analisada mais à frente quando será trabalhado um problema com as formas de resoluções horizontais e verticais. Qual seria outra vantagem desta abordagem? A análise da situação a seguir deve ajudar a esclarecer estas questões:

Três pacotes de laranjas custam R\$ 9,00. Quanto deve custar sete pacotes de laranjas?

Nesta situação pode-se perceber a mesma relação discutida anteriormente (preço por pacote), mas não faz sentido pensar em uma solução da forma  $a \times b = c$ , e sim na relação quaternária.

A relação ternária acontece quando o produto de duas quantidades de mesma natureza ou grandeza gera uma terceira quantidade. Por exemplo, pode-se pensar no cálculo da área de uma sala que mede três metros de largura por quatro metros de comprimento, assim obtém-se a área de 12 metros quadrados, obedecendo a relação no plano numérico e no plano dimensional.

No plano numérico pode-se observar que  $3 \times 4 = 12$ , e no plano dimensional observa-se que metros  $\times$  metros = metros quadrados. Estes argumentos tornam necessário, do ponto de vista didático, a discussão de maneira separada das duas relações: a quaternária e a ternária.

A seguir, serão discutidos eixos que compõe as relações quaternárias e também as relações ternárias.

### 2.1.1 PROPORÇÃO SIMPLES

Trata-se de uma relação quaternária. Relação de quatro quantidades, de natureza distinta duas a duas como nos exemplos: pacotes de laranjas e preço, litros de combustível e custo, peso e custo, tempo e gasto, entre outros. A relação proporção simples pode ser dividida em duas subclasses: a) correspondência um para muitos; b) correspondência muitos para muitos.

**a) correspondência um para muitos.** A seguir serão analisados exemplos que ajudarão a entender o que vem a ser esta tal correspondência um para muitos.

Exemplo 1: “Davi tem dois pacotes de bolacha recheada. Cada pacote contém 12 bolachas. Quantas bolachas ele tem”?

Exemplo 2: “Maria quer comprar tecidos para fazer lençóis sendo que o custo é de R\$ 18,70 o metro. Ela precisa de 4,50 metros. Quanto ela deverá gastar”?

Exemplo 3: “Paguei R\$ 15,00 por cinco garrafas de suco. Quanto custa cada garrafa?”

Exemplo 4: “Pedro tem R\$ 16,00 e quer comprar pacotes de balas a R\$ 4,00 o pacote. Quantos pacotes ele pode comprar”?

A seguir serão analisados esquemas que ajudam a resolver os quatro problemas citados anteriormente.

exemplo 1		exemplo 2		exemplo 3		exemplo 4	
pacotes	bolachas	metros	reais	garrafas	reais	pacotes	reais
1	→ 12	1	→ 18,70	1	→ x	1	→ 4
2	→ x	4,50	→ x	5	→ 15	x	→ 16

Figura 3: esquemas para os exemplos 1, 2, 3 e 4

Na figura três pode-se notar que todos os esquemas partem da unidade. Por isso são chamados de correspondência um para muitos.

O exemplo um destaca o tipo de correspondência que é chamado de multiplicação, já que este problema pode ser resolvido através da multiplicação dos dois valores contidos no enunciado. Foi visto que este tipo de problema pode ser confundido com relação ternária, exatamente porque não é necessária a utilização da relação mostrada na figura três, basta multiplicar  $2 \times 12 = 24$  bolachas.

O exemplo dois também é um exemplo de multiplicação, a diferença é que este problema envolve maior dificuldade porque utiliza números decimais tornando os cálculos mais difíceis para as crianças.

Nestes dois exemplos discutidos acima pode-se perceber a diferença entre números inteiros e números decimais, entre grandezas discretas e grandezas contínuas. (VERGNAUD, 2009, p. 241)

Para resolver os exemplos três e quatro é necessário utilizar a divisão. No exemplo três busca-se o valor unitário que pode ser obtido ao fazer uma divisão de unidades diferentes, no caso do exemplo, dividem-se reais por garrafas. No exemplo quatro busca-se a quantidade de unidades que se pode obter ao fazer a divisão de reais por reais.

A seguir será resolvido um problema passo a passo explorando tanto a resolução vertical como a resolução horizontal, analisando as maneiras e diferentes formas de resolução.

Exemplo 5: “Um pacote contém cinco canetas, quantas canetas terão em seis pacotes”?

De acordo com o exemplo cinco citado acima, é possível perceber a propriedade fundamental da proporção (correspondência vertical) entre as quantidades de mesma natureza e a indicação do esquema de ação, baseado no operador escalar. (SANTOS, 2012, p. 104)



Figura 4: representação do exemplo para a correspondência vertical

$$\frac{6 \text{ pacotes}}{1 \text{ pacote}} = \frac{y \text{ canetas}}{5 \text{ canetas}}$$

Multiplicando os dois lados da equação por cinco canetas temos:

$$\frac{\cancel{6 \text{ pacotes}}}{\cancel{1 \text{ pacote}}} \times 5 \text{ canetas} = \frac{y \text{ canetas}}{\cancel{5 \text{ canetas}}} \times \cancel{5 \text{ canetas}}$$

$$\frac{6 \times 5 \text{ canetas}}{1} = y \text{ canetas}$$

Pode-se notar que os números um e seis representam a quantidade de pacotes, ou seja, na situação acima eles representam medidas. Também se pode notar que cinco e y são representantes da quantidade de canetas, que não deixam de serem medidas, mas de outra natureza. Dessa forma os operadores verticais (x6) são operadores sem dimensão. Esse aspecto pode ser constatado ao simplificar as quantidades segundo sua terminologia o que implica, que o número seis não possui mais dimensão e está apresentado como a razão entre duas quantidades de mesma natureza (pacote/pacote) (SANTOS, 2012, p. 105)

$$30 \text{ canetas} = y \text{ canetas}$$

Este seria um dos modos que se pode utilizar para resolver o exemplo cinco. Outra maneira de resolução desta mesma situação é a utilização do operador funcional, o qual relaciona horizontalmente as duas quantidades (caneta/pacote).

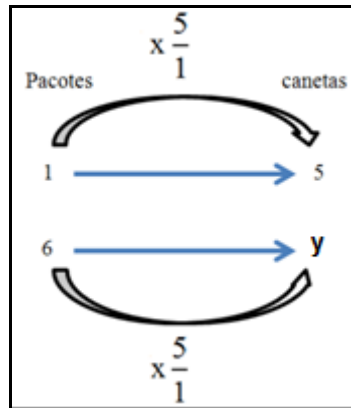


Figura 5: análise da correspondência horizontal

$$\frac{y \text{ canetas}}{6 \text{ pacotes}} = \frac{5 \text{ canetas}}{1 \text{ pacote}}$$

Multiplicando os dois lados da equação por seis “pacotes”:

$$\frac{y \text{ canetas}}{\cancel{6 \text{ pacotes}}} \times \cancel{6 \text{ pacotes}} = 5 \frac{\text{canetas}}{\text{pacote}} \times 6 \text{ pacotes}$$

$$y \text{ canetas} = 5 \frac{\text{canetas}}{\cancel{\text{pacotes}}} \times \cancel{6 \text{ pacotes}}$$

$$y \text{ canetas} = 5 \text{ canetas} \times 6$$

$$y \text{ canetas} = 30 \text{ canetas}$$

O número cinco aparece como taxa de variação (canetas/pacotes) e pode ser representado como função linear  $f(x) = 5x$  ( $f: \mathbb{N}, \mathbb{N}$ ), onde  $f(x)$  representa o número total de canetas e  $x$  a quantidade de pacotes de canetas.

Assim pode-se perceber que em situações de “correspondência um para muitos” existirão sempre duas estratégias de solução: operador escalar e operador funcional. Tanto no operador escalar como no operador funcional tem-se, no espaço do Campo Conceitual Multiplicativo, duas operações possíveis: a multiplicação e a divisão.

**b) correspondência muitos para muitos.** A seguir, serão analisados exemplos que ajudarão a dar uma melhor compreensão desta relação.

Exemplo 6: “Uma corrida de motos tem 125,458 km de estrada a ser percorrida. Uma moto gasta 5,218 litros a cada 100 km. Quantos litros esta moto consumirá durante essa corrida”?

Exemplo 7: “Sei que 12 garrafas de vinho custam R\$ 50,00. Quanto pagarei se comprar três garrafas deste mesmo vinho”?

Exemplo 8: “Sabendo que três novelos de lã pesam 200 gramas. Quantos novelos desta mesma lã haverá em um pacote que pesa 800 gramas”?



Na figura abaixo podem ser vistos três esquemas que ajudarão na resolução dos três problemas citados acima.

exemplo 6		exemplo 7		exemplo 8	
km	litros	garrafas	reais	novelos	gramas
100	→ 5,218	3	→ x	3	→ 200
125,458	→ x	12	→ 50	x	→ 800

Figura 6: esquemas montados para os exemplos 6, 7 e 8

Os exemplos da figura seis são mais complexos em relação aos quatro primeiros, da Figura 3, mas também fazem parte da relação quaternária.

Pode-se perceber que os esquemas utilizados na Figura 6 são também o mesmo esquema fundamental de correspondência observado nos quatro primeiros exemplos (VERGNAUD, 2009, p. 246). Uma das diferenças é que nestes esquemas não há relação com a unidade. No exemplo seis, precisa-se calcular a quantidade de litros que será um número decimal, e para chegar até esta solução é necessário operar com números decimais com algumas casas depois da vírgula, o que dificulta na resolução. No exemplo sete, é preciso fazer uma divisão em que se obtém resultado não inteiro, e que também impõe uma dificuldade na hora da resolução. Estes três problemas são típicos da regra de três simples que geralmente é estudada no Ensino Fundamental, sendo que o problema de número oito é mais simples, já que se sabe através da relação vertical que se tem um operador vertical ( $200 (x4) = 800$ ), e com esta informação sobre o problema pode-se chegar a solução sem muitas dificuldades.

### 2.1.2 PROPORÇÕES MÚLTIPLAS

Trata-se da relação quaternária, envolvendo mais de duas quantidades relacionadas duas a duas. Por exemplo: (operários, consumo e dias trabalhados). (SANTOS, 2012, p. 113)

Exemplo 1: Correspondência um para muitos: sabendo que uma pessoa deve consumir sete litros de água em três dias. Quantos litros de água serão consumidos por quatro pessoas em trinta dias?

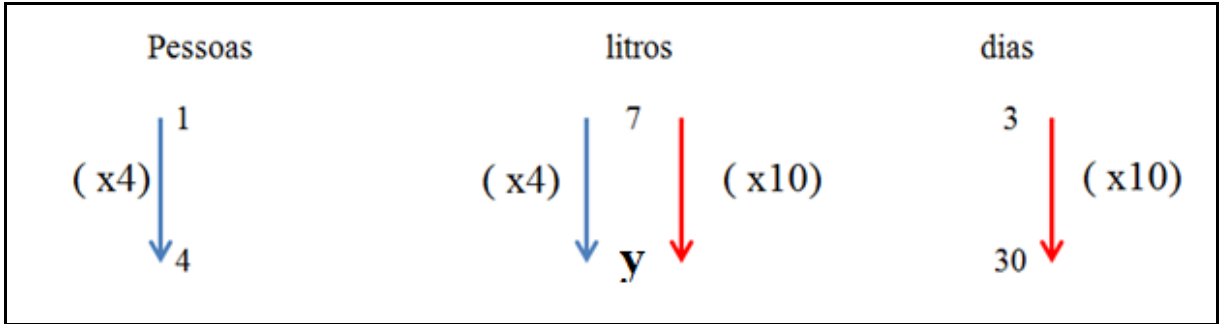


Figura 7: esquema utilizado para encontrar a solução do exemplo 1

O esquema montado na Figura 7 mostra que se pode utilizar dois operadores verticais para resolver este problema de correspondência um para muitos, problema este que é conhecido como proporcionalidade, e pode ser desenvolvido no Ensino Fundamental. A solução deste problema através do uso do esquema da Figura 7 inicia com a ideia de que se uma pessoa consome sete litros de água em um dia, logo, quatro pessoas deverão consumir  $4 \times 7 = 28$  litros de água em um dia. Por outro lado se sabe que se uma pessoa consome sete litros de água em três dias, então uma pessoa consumirá  $7 \times 10 = 70$  litros em 30 dias. Juntando estas informações chega-se à solução em que quatro pessoas deverão consumir 280 litros em 30 dias, cálculo este que pode ser feito através do uso de dois operadores verticais (x4) e (x10) utilizados em sequência, ou seja,  $7 \times 4 \times 10 = 280$ . O uso do esquema acima torna mais simples a resolução de problemas do tipo do exemplo um, já que basta organizar nas colunas os valores referentes às mesmas unidades de medidas, logo a seguir calcular os operadores verticais e, ao final, calcular a multiplicação entre os operadores verticais e o valor da unidade procurada.

Exemplo 2: Correspondência muitos para muitos: certa empresa tem oito máquinas e a cada cinco dias produz 800 peças. Quantas peças serão produzidas por 32 máquinas durante 15 dias?

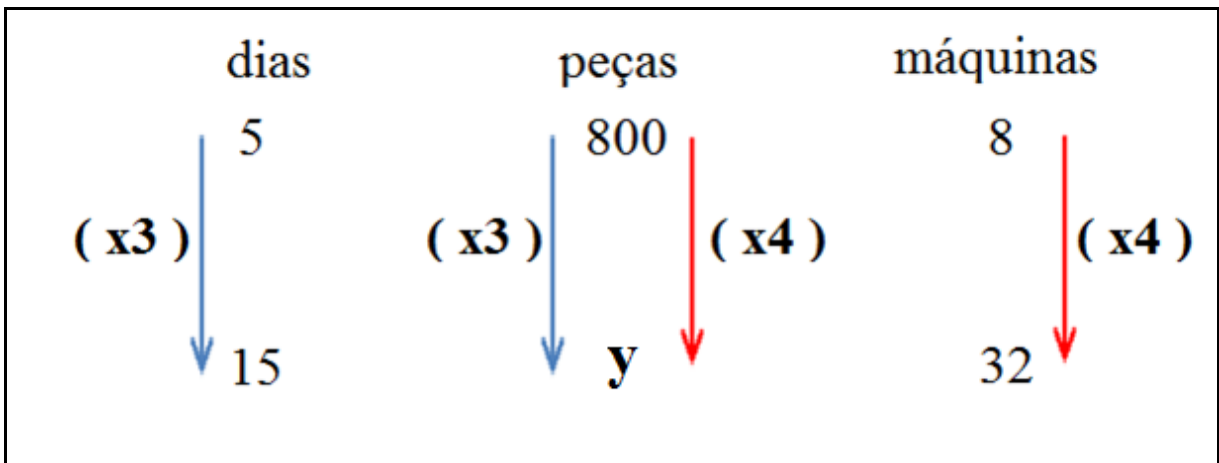


Figura 8: esquema utilizado para encontrar a solução do exemplo 2.

O exemplo dois representado na Figura 8 nos mostra como funciona a correspondência muitos para muitos em que, assim como no exemplo um, deve-se fazer a correspondência entre três quantidades diferentes, onde a quantidade de peças produzidas depende do número de dias e de máquinas no trabalho. Como se sabe que 800 peças serão produzidas por oito máquinas em cinco dias, pode-se concluir que em 15 dias se podem produzir 2400 peças pelas mesmas oito máquinas, por isso utiliza-se o operador vertical ( $\times 3$ ). Da mesma maneira se sabe que como 800 peças são produzidas por oito máquinas em cinco dias, pode-se concluir que 32 máquinas produzirão 3200 peças em cinco dias, justificando assim o operador vertical ( $\times 4$ ). Assim para resolver esta correspondência da Figura 8, pode-se operar ( $800 \times 3 \times 4$ ), obtendo assim o resultado do problema proposto.

Desta maneira podem-se resolver problemas que relacione mais de duas quantidades, analisando qual deve ser o operador vertical em cada caso e ao final fazer uma multiplicação envolvendo os operadores e o valor inicial da quantidade a ser calculada.

### 2.1.3 COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA

As situações que fazem parte desse eixo envolvem a noção de comparação entre duas quantidades de mesma natureza e exige que pensemos a situação em termos de uma relação ternária (SANTOS, 2012, p. 115). Podemos encontrar situações desse tipo desde as séries iniciais, em que são exploradas as relações de dobro, triplo, metade, terça parte, e outras.

Existem situações que exigem maior atenção para serem resolvidas, por isso serão vistos exemplos para ilustrar essa ideia.

Exemplo 1: Em uma loja de brinquedos, um jogo de dominó custa R\$ 7,00 e uma bola de basquete custa oito vezes mais que o dominó. Quanto custa a bola de basquete? A seguir pode ser visto a representação deste problema através de um esquema:

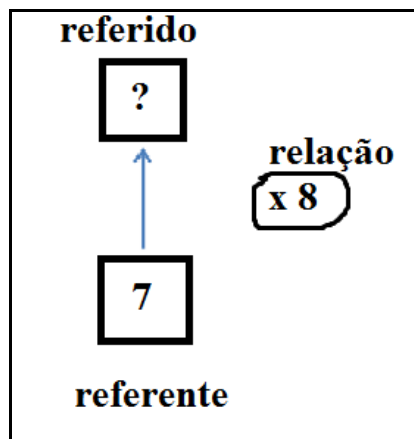


Figura 9: esquema que representa a solução do exemplo 1

Na situação da figura nove conhece-se o referente (valor do jogo de dominó), a relação (vezes oito) e deve-se calcular o valor da bola de basquete que está relacionado ao valor do jogo de dominó. Para resolver deve-se fazer uma multiplicação, onde obtemos referente x relação = referido ( $7 \times 8 = 56$ ).

Exemplo 2: Comprei um suco por R\$ 15,00 e um iogurte por R\$ 3,00. Quantas vezes o suco foi mais caro que o iogurte?

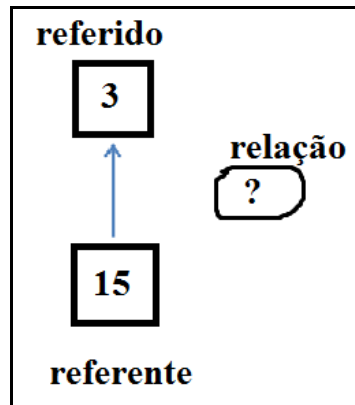


Figura 10: esquema que representa a solução do exemplo 2

Nesta situação é conhecido o referente (o preço do suco) e o referido (preço do iogurte) e deve-se calcular a relação que existe entre esses dois valores. Nesta situação é necessário fazer uma divisão: referente / referido = relação ( $15 / 3 = 5$ ).

#### 2.1.4 PRODUTO DE MEDIDAS

Essa forma de relação consiste em uma relação ternária entre três quantidades, das quais uma é produto das duas outras, ao mesmo tempo no plano numérico e no plano dimensional (VERGNAUD, 2009, p. 253).

A seguir será analisado o exemplo: “em um grupo de quatro moças e cinco rapazes queremos saber quantos casais podemos formar, sendo que cada rapaz deve formar casal com cada moça”. Este problema pode ser resolvido através da utilização da relação quaternária “um para muitos”, discutida no eixo das proporções simples.

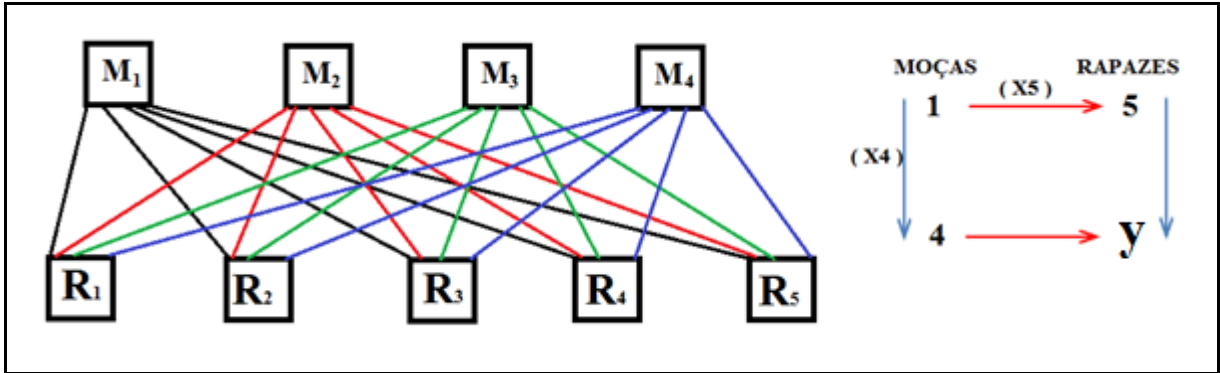


Figura 11: esquema que mostra duas maneiras de solucionar o exemplo discutido anteriormente

Através da análise da figura 11 onde  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  e  $M_4$  representam as quatro moças e  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  e  $R_5$  representam os cinco rapazes, pode-se observar através das ligações de cada  $M$  a cada  $R$  que se obtêm cinco ligações para cada  $M$ , como são quatro Moças, obtêm-se um total de quatro x cinco ligações, ou seja, obtêm-se 20 casais. Esta maneira de solucionar o problema utiliza a relação ternária onde  $a = 4$ ,  $b = 5$  e  $c = 20$ .

Mas no esquema da direita da figura 11, pode ser percebido que é possível chegar ao resultado de  $x = 20$  através do operador vertical  $(x4)$ , ou através do operador funcional  $(x5)$ , como foi visto na relação “um para muitos”, relação essa que foi estudada nos eixos anteriores. O problema desta maneira de resolução é que o valor  $x=20$  que foi encontrado como solução da questão deve ser relacionado a quantidade de casais (formados por moças e rapazes) e não à quantidade de rapazes como sugere a relação quaternária vista na figura. Por isso não deve ser utilizado a relação quaternária neste tipo de problema devido à confusão simbólica que pode ser encontrada. Logo, deve-se resolver esse problema como produto de medidas em que o número de casais deve ser encontrado através da multiplicação de quatro por cinco resultando no valor vinte ( $4 \times 5 = 20$ ).

Pode-se dividir o produto de medidas em duas classes: classe 1- situações que envolvem a ideia de organização retangular, classe 2- situações envolvendo a ideia de combinatória.

Classe 1: configuração retangular: pode-se pensar em uma classe de situações que desenvolve a ideia de organização retangular. Pode-se representar essa configuração retangular através do modelo matemático ( $a \times b = c$  ou  $c / a = b$ ).

Exemplo 1: Em um teatro as cadeiras estão organizadas em 12 fileiras e 15 colunas. Quantas cadeiras há nesse teatro?

Este problema é resolvido pela multiplicação do número de fileiras pelo número de colunas, assim o número de cadeiras deve ser obtido através da multiplicação  $12 \times 15 = 180$ . Esse resultado faz parte do produto de medidas onde  $a = 12$ ,  $b = 15$  e  $c = 180$ .

Exemplo 2: Qual deve ser o valor da carta do “*segredo dos números*” representada por um triângulo azul e um círculo preto?

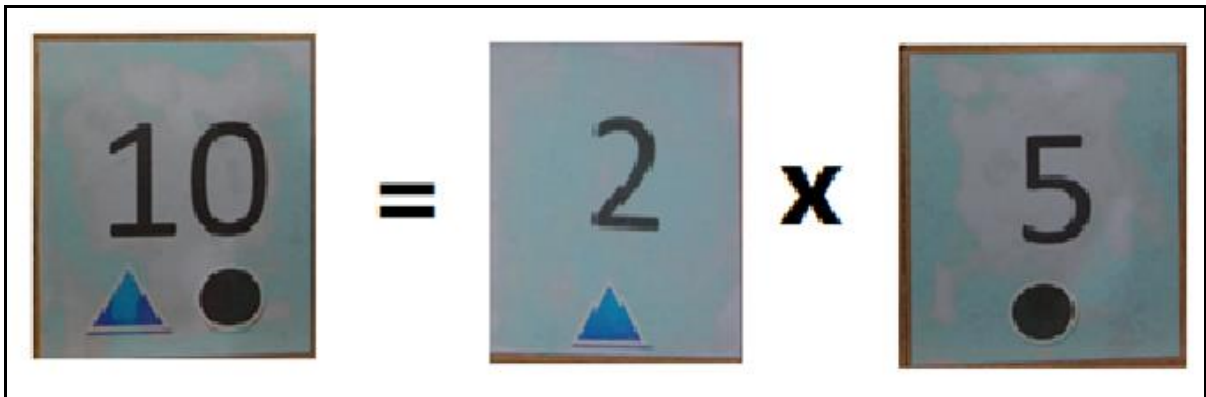


Figura 12: exemplo da formação da carta referente ao número dez

Através da análise do esquema da figura 12 pode-se perceber que o signo “triângulo azul” representa o valor dois (significado). Já o signo “círculo preto” representa o valor cinco (significado). Obtém-se o valor 10 através da multiplicação dos valores  $2 \times 5$ . Pode-se perceber que o valor 10 (significado) da figura 12 representa um produto de medidas onde  $a = 2$ ,  $b = 5$  e  $c = 10$ .

Exemplo 3: Uma sala retangular tem 4 metros de largura e 5 metros de comprimento. Qual deve ser a sua área?

A área pode ser encontrada ao fazer um produto de medidas (configuração retangular) onde  $a = 4$  m,  $b = 5$  m e conseqüentemente  $c = 20$  m<sup>2</sup>, que será a área desta sala. Pode-se decompor esta sala em quadrados de lado medindo 1 metro, como na figura 13.

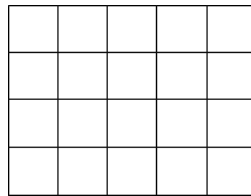


Figura 13: exemplo da multiplicação retangular

$$x \text{ metros quadrados} = 4 \text{ metros} \times 5 \text{ metros}$$

para os números

$$x = 4 \times 5$$

para as dimensões

$$\text{metros quadrados} = \text{metros} \times \text{metros}$$

Pode-se perceber que a área do retângulo da figura 13 é igual a 20 metros quadrados, já que cada quadrado da figura tem medida de um metro de lado.

A noção de metro quadrado tem, assim, dois sentidos complementares, aquele de quadrado de um metro de lado, e aquele de produto de duas medidas de comprimento (metro x metro). (VERGNAUD, 2009, p. 255)

Classe 2: situações envolvendo a ideia de combinatória: está presente nas situações envolvendo a combinatória se assemelha ao esquema da tabela de dupla entrada, pois é a noção de produto cartesiano que justifica a estrutura matemática subjacente a essas situações (SANTOS, 2012, p. 121). Agora se pode voltar ao problema representado na figura 11. “Em um grupo de quatro moças e cinco rapazes queremos saber quantos casais podemos formar, sendo que cada rapaz deve formar casal com cada moça”. A seguir será analisada a distribuição cartesiana relativa a esse problema.

Foi visto que as moças podem ser representadas por M1, M2, M3 e M4 e os rapazes podem ser representados por R1, R2, R3, R4 e R5.

rapazes moças	R1	R2	R3	R4	R5
M1	M1 e R1	M1 e R2	M1 e R3	M1 e R4	M1 e R5
M2	M2 e R1	M2 e R2	M2 e R3	M2 e R4	M2 e R5
M3	M3 e R1	M3 e R2	M3 e R3	M3 e R4	M3 e R5
M4	M4 e R1	M4 e R2	M4 e R3	M4 e R4	M4 e R5

Figura 14: representação da combinação entre quatro moças e cinco rapazes

Através da análise da figura 14 é possível perceber que os casais são formados via multiplicação cartesiana de um elemento da primeira coluna com um elemento da primeira linha, ou seja, formando pares “moça” com cada “rapaz”. O número total de casais pode ser obtido através da multiplicação do número de moças pelo número de rapazes (4 moças x 5 rapazes = 20 casais). Na análise numérica temos  $4 \times 5 = 20$  e na análise das dimensões temos: casais = moças x rapazes.

### 3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este trabalho busca explorar a evolução conceitual no campo multiplicativo, mais precisamente, apresenta um estudo sobre como a turma 51 trabalhou com os conceitos de múltiplos e divisores durante e após a aplicação da sequência didática que foi desenvolvida através da exploração do material didático “*segredo dos números*”.

Segundo (YIN, 2001) os estudos de caso representam a estratégia preferida quando se colocam questões do tipo “como” e “porquê”, quando o pesquisador tem pouco controle sobre os eventos e quando o foco se encontra em fenômenos contemporâneos inseridos em algum contexto da vida real.

Assim, é possível assumir que esta pesquisa se desenvolveu via estudo de caso, sendo feita com um pequeno grupo de pessoas e explorando um comportamento destas frente a um estudo particular de como estes alunos reagiram ao enfrentarem problemas que visavam explorar os conceitos de múltiplos e divisores de um determinado número.

Segundo (YIN, 2001), para fins de ensino, um estudo de caso não precisa conter uma interpretação completa ou acurada, em vez disso, seu propósito é estabelecer uma estrutura de discussão e debate entre os estudantes.

Esta ideia discutida acima fica clara quando se observam as filmagens feitas durante os encontros referentes à pesquisa. É fácil perceber a interação dos alunos quando estão discutindo como devem fazer para resolver as atividades, também se questionam entre eles sobre o que deve significar tal questão: “como você fez aquela questão”, “porque você encontrou aquela solução”, “será que é possível encontrar outra solução”, entre outras.

Também pode-se analisar o que disse Yin (2001): o estudo de caso, como outras estratégias de pesquisa, representa uma maneira de se investigar um tópico empírico seguindo-se um conjunto de procedimentos pré-especificados.

Neste trabalho, foi seguida uma sequência didática produzida anteriormente à pesquisa com todos os passos definidos de antemão; os alunos foram observados durante os encontros e também deveriam relatar suas descobertas a cada passo.

Na Educação Matemática, os estudos de caso estão sendo utilizados na investigação sobre questões de aprendizagem dos alunos e também sobre o conhecimento e as práticas profissionais de professores, além de programas de formação de professores. Este trabalho enquadra-se nesta situação, já que será feita uma análise de como os alunos reagiram, tendo como referência o estudo dos campos conceituais, segundo a fundamentação teórica de Gerard Vergnaud.



É importante ressaltar que a ideia deste trabalho surgiu através da análise e estudo do projeto da professora Esther Pillar Grossi, quando o autor estava na graduação, e assim foi amadurecendo até chegar a esta dissertação.

Auxiliando o que foi dito anteriormente, podemos observar o que Ponte diz sobre as características de um estudo de caso:

Um estudo de caso é uma investigação de natureza empírica. Baseia-se fortemente em trabalho de campo ou em análise documental. Estuda uma dada entidade no seu contexto real, tirando todo o partido possível de fontes múltiplas de evidência como entrevistas, observações, documentos e artefatos (Yin, 1984). Além disso, trata-se de um tipo de pesquisa que tem sempre um forte cunho descritivo. Para isso apoia-se numa “descrição grossa” (thickdescription), isto é, factual, literal, sistemática e tanto quanto possível completa, do seu objeto de estudo. No entanto um estudo de caso não tem de ser meramente descritivo – de um modo geral, quando isso acontece o seu valor é muito reduzido. Na verdade, um estudo de caso pode ter um profundo alcance analítico, interrogando a situação, confrontando-a com outras situações já conhecidas e com as teorias existentes. Pode assim ajudar a gerar novas teorias e novas questões para futura investigação. Este tipo de investigação não é experimental. Usa-se quando o investigador não pretende modificar a situação, mas compreendê-la tal como ela é. (PONTE, 2006, P. 8)

A seguir serão discutidas questões pertinentes para o trabalho:

- a) onde foram coletados os dados.
- b) quem são os sujeitos da pesquisa.
- c) como foram coletados os dados.
- d) que dados foram coletados.

O Município de Itati está localizado no litoral norte do Rio Grande do Sul, a cerca de 150 km de Porto alegre, e é um pequeno Município com cerca de 2580 habitantes. Seu território está localizado numa zona de transição entre a praia e a serra e é cortado pela rodovia estadual RS 486, conhecida como Rota do Sol. Como esta rodovia tem muito movimento de turistas principalmente no verão, houve um aumento do número de pessoas envolvidas com os comércios de beira de estrada, onde os pequenos empresários constroem seus comércios (conhecidos como tendas) e vendem produtos da própria região, além de outros.

Este Município é basicamente de economia rural, composto por pequenas propriedades, onde os agricultores plantam diversos produtos. Alguns desses produtos estão sendo comercializados nas tendas, principalmente a produção de bananas, abacaxi e milho verde. Outros produtos, como tomates, couve-flor, beterrabas, repolhos, cenouras e outros, são levados até o CEASA do Rio Grande do Sul, que fica em Porto Alegre. CEASA é uma sigla que significa Central de Abastecimento S.A.

### 3.1 LOCAL E PÚBLICO DA PESQUISA

A escola onde a pesquisa foi aplicada é uma escola da rede estadual do Rio Grande do Sul, e fica na localidade de Três Pinheiros. A Escola Estadual de Ensino Fundamental Guilherme Schmitt é uma pequena escola com cerca de 80 alunos que estão matriculados no Ensino Fundamental, nos turnos da manhã e da tarde, onde os alunos do sexto ao nono ano estudam pela manhã, e os outros, do primeiro ao quinto ano, estudam no turno da tarde. (Ver foto ilustrativa da escola na Figura 15)



**Figura 15: imagem da escola onde foi aplicada a pesquisa**

Também foi feita uma atividade com um grupo de 19 professores da rede municipal de Terra de Areia, em que a Pedagogia é a formação predominante. Esses profissionais trabalham nas séries iniciais do Ensino Fundamental e na educação infantil. Os professores trabalhavam na escola que o professor/pesquisador trabalha.

Os sujeitos da pesquisa são seis alunos da turma 51 que estudavam no turno da tarde. Os alunos da turma eram JOA, HEN, GIL, YUR, NAT e LAU. Quatro meninos e duas meninas, todos com 10 anos de idade.

Os alunos moram na redondeza da escola, seus pais são pequenos agricultores que trabalham desde a produção de hortaliças, até a produção de bananas.



Figura 16: imagem dos alunos no encontro das construções das maquetes

A figura 19 dá uma ideia de como foram feitas as construções das maquetes sobre os números trabalhados com o “*segredo dos números*”.

### 3.2 COLETA DE DADOS

Os dados da pesquisa foram coletados através da filmagem total dos encontros que ocorreram no intervalo entre 19 de agosto e 12 de setembro de 2013. Além disso, os alunos resolveram uma sequência de exercícios pré-definidos. Os encontros foram divididos em momentos e cada momento teve a duração de cerca de uma hora, dependendo do assunto que estava sendo discutido.

Através de atividades programadas pelo pesquisador, os alunos foram conduzidos ao trabalho com o material “*segredo dos números*” em que cada aluno foi convidado a resolver uma série de atividades e escrever o que fizeram durante os encontros. Então além da filmagem dos encontros, os alunos também escreveram suas construções a respeito das atividades, colocando data e seus nomes nos registros escritos.

Também foi feito um jogo pedagógico chamado batalha dos divisores do número 60. Nesse dia os dados foram coletados de maneira que o pesquisador anotou os resultados das partidas do jogo entre os alunos. Como o total de alunos era relativamente pequeno, foi possível dividi-los em dois pequenos grupos que competiram entre si, tornando assim possível que fossem anotados os resultados das partidas.

No último momento foram construídas as maquetes dos divisores de um número qualquer. Neste momento, ocorreu a construção das maquetes pelos alunos.

Então, no final da coleta dos dados no campo da pesquisa foi construído um relatório com as observações feitas durante os encontros. Neste relatório constam as atividades resolvidas pelos alunos durante a pesquisa, além de observações extras feitas pelo professor /pesquisador durante as análises das filmagens.

Os dados referentes a atividade desenvolvida com o grupo de professores foram coletados através de filmagem dos encontros, além de material escrito a respeito do assunto em questão. Os professores reuniram-se em grupos de três ou quatro componentes e assim pensaram nas atividades propostas naquele encontro.

Este trabalho aconteceu durante uma oficina ministrada pelo pesquisador, na qual se questionava sobre como podemos trabalhar com conceitos de múltiplos e divisores com auxílio do material concreto “*segredo dos números*”. O pesquisador mostrou o material aos professores, e através da análise de exemplos, discutiu as propriedades que podem ser percebidas através da visualização das cartas. Depois disso, os professores foram convidados a resolver um grupo de questões que tratavam dos múltiplos e divisores de um número.

## 4 SEQUÊNCIAS DE ATIVIDADES

Este capítulo trata das atividades desenvolvidas durante o trabalho. Atividades que foram divididas em três partes: a primeira parte trata de atividades aplicadas aos alunos durante a pesquisa, a segunda parte trata das atividades aplicadas aos alunos alguns dias depois de encerrada a pesquisa, e a terceira parte trata das atividades aplicadas a um grupo de professores.

### 4.1 ATIVIDADES APLICADAS COM OS ALUNOS - ETAPA 1

As atividades aplicadas aos alunos foram divididas em momentos, em que cada momento trata de alguns conceitos. A seguir podemos observar a sequência de atividades aplicada na sala de aula.

#### 4.1.1 PRIMEIRO MOMENTO-EM BUSCA DO SEGREDO

No primeiro encontro os alunos receberam o “*segredo dos números*” e foram convidados a tentar descobrir qual seria o segredo que estava escondido naquelas cartas. Durante este tempo eles não receberam dicas a respeito de como seria o funcionamento do “*segredo dos números*”, a única dica que receberam, é que o nome do material era “*segredo dos números*”. Eles tiveram cerca de 30 minutos para trabalhar com o material, onde poderiam mexer e revirar, e ainda procurar por detalhes que chamassem sua atenção. Na medida em que o tempo foi passando eles deveriam escrever tudo que descobriam, ou ainda foram convidados a escrever sobre o que estavam pensando sobre o material que estavam analisando. Esta produção foi recolhida separadamente ao final desse período.

No próximo instante, os alunos receberam dicas:

- Cada símbolo diferente representa um único número.
- Todas as cartas são construídas através da multiplicação dos valores referente a cada símbolo, ou seriam representantes de algum número primo. Aqui foi explicado que deve ser feito um cálculo de multiplicação para encontrar valores de cartas com dois símbolos ou mais, para isso acontecer, basta pegar os valores referentes a cada símbolo e multiplicá-los, então será possível chegar ao valor que está escrito na carta. Ver exemplo na figura 20.

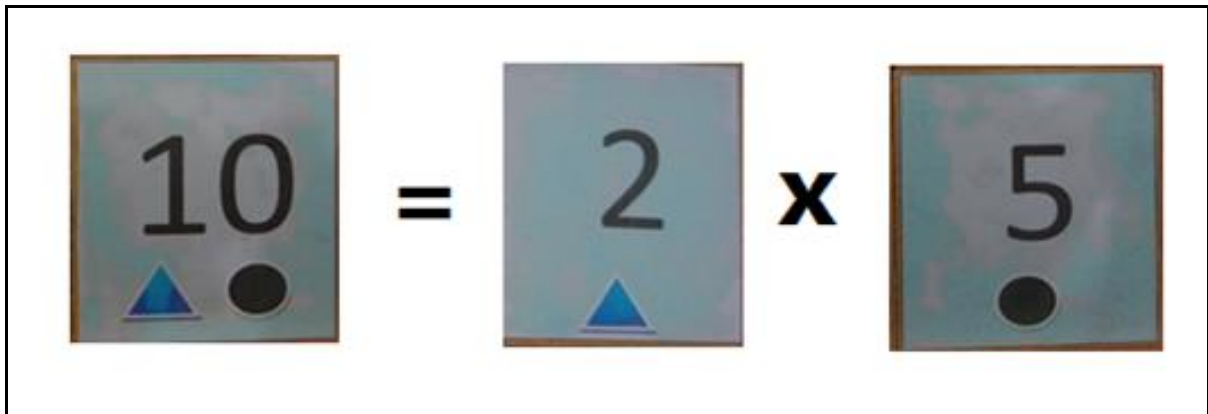


Figura 17: cartas do “segredo dos números” que ajudam a formar o número 10

Assim a primeira tarefa dos alunos foi descobrir os valores da maioria dos símbolos que conseguissem e relacionar estes com as cartas em que eles aparecem como foi visto na figura 20, em que o triângulo azul representa o fator dois e o círculo preto representa o fator cinco, logo  $2 \times 5 = 10$ . Então os alunos deveriam criar situações em que a combinação entre símbolos representariam novas cartas. Para isso, eles foram lembrados que deveriam anotar todas as suas construções, sendo reservada uma hora para essa atividade.

#### 4.1.2 SEGUNDO MOMENTO - RESOLVENDO PROBLEMAS

Os alunos deveriam resolver os seguintes problemas:

- Em quantas cartas haveria a presença dos triângulos azuis, aqui foi explicado aos alunos que eles deveriam procurar por todas as cartas com o triângulo azul. Então os alunos foram convidados a pensar sobre a questão. Por que estas cartas têm sempre triângulos azuis em sua representação? Aqui o principal objetivo era de explorar a ideia de múltiplos do número dois.
- Em quantas cartas haveria o quadrado vermelho, os alunos foram alertados para não esquecer cartas. Por que será que temos esta quantidade de cartas contendo quadrados?
- Em quantas cartas haveria o círculo preto, aqui os alunos foram convidados a explicar porque estas cartas que eles encontraram deveriam ter o círculo preto em suas representações.
- Em quantas cartas haveria o coração na sua representação? Porque os alunos acharam aquela quantidade de corações?
- Os alunos foram questionados sobre porque a quantidade de cartas em cada questão acima estava diminuindo, na medida em que os valores dos números estudados cresceram. Deveria haver 50 cartas com triângulos, 33 cartas com quadrados, 20 com

círculos e 14 com corações. Depois desta discussão, os alunos foram convidados a tentar explicar porque acontecem estas diferenças nas quantidades das cartas discutidas anteriormente, ou seja, porque devemos ter mais números da tabuada do número dois do que da tabuada do número três, comparando todos os casos até o número 100.

Nesta atividade foi trabalhada a construção dos múltiplos de um número qualquer, onde os alunos foram questionados sobre as quantidades de múltiplos em um determinado grupo e se possível, construir articulações. Para esta atividade foi prevista uma hora.

#### 4.1.3 TERCEIRO MOMENTO - BUSCA POR DIVISORES

Nesta atividade os alunos deveriam escrever quais números que podem dividir um número pedido, para isso, eles deveriam observar a figura 18.



Figura 18: cartas do “segredo dos números” que representam os divisores primos do número 30 e o próprio

Na figura 18 pode-se perceber que os números 2, 3 e 5 dividem o número 30, isso porque os símbolos que representam os três números fazem parte da carta que representa o número 30. Uma questão pensada foi sobre a possibilidade da existência dos três números acima serem os únicos divisores do número 30, ou não. Será que existiriam outros divisores para o número 30? O que deveria ser feito para encontrar estes divisores, e quais seriam estes divisores? Os alunos deveriam explicar suas conclusões.

A atividade neste momento seria encontrar divisores das cartas da figura 19.





Figura 19: fotografia de cartas do “segredo dos números”

Nesta atividade os alunos foram questionados sobre como deveriam proceder para construir divisores através da utilização das cartas e seus símbolos. No exemplo da figura 18 pode-se perceber que os números dois, três e cinco são divisores do número 30, que foram chamados de divisores diretamente pela observação já que cada um destes números teve seu símbolo representado na carta do número 30. Mas não é difícil constatar que existem outros divisores para o número 30, como seria possível encontrar esses divisores? Ao juntar os símbolos dois a dois, podem ser formados outros divisores do número 30, como pode ser observado na figura 20.



Figura 20: cartas formadas pela união de dois divisores primos do número 30

Foi prevista cerca de uma hora para resolver as questões trabalhadas neste momento.

#### 4.1.4 QUARTO MOMENTO – OS NÚMEROS PRIMOS

Agora que já foi trabalhado com múltiplos e divisores, seria trabalhado com os conceitos referentes aos números primos. Este foi um momento para tentar responder questões



do tipo, como reconhecer se um número é primo. Para construir este conceito os alunos deveriam pensar sobre por que algumas cartas possuem somente um símbolo?

Os alunos deveriam citar todos os números que possuíssem apenas um símbolo. Este momento foi quando se pode discutir a construção do “*segredo dos números*”, desde a construção do símbolo que deveria representar o número dois, até a construção da carta que deveria representar o número 100.

Para o número dois foi atribuído o símbolo do triângulo azul, depois foi criado o símbolo para representar o número três, (o quadrado vermelho), estas duas cartas podem ser vistas na figura 21. Aí surgiu a questão de como se deveria prosseguir, a construção deveria ser feita através da utilização da multiplicação dos valores dos símbolos que já são conhecidos, aí então é possível construir todas as cartas até chegar ao número 100. Como  $2 \times 2 = 4$ , não é necessário criar um novo símbolo para o número quatro, que será representado por dois triângulos azuis. Já o número cinco teria um novo símbolo, o círculo preto. Como  $6 = 2 \times 3$ , a carta para representá-lo terá um triângulo azul e um quadrado vermelho que pode ser visualizada na figura 20. O número sete não pode ser construído através da multiplicação entre os números dois, três ou cinco, então foi criado o coração como símbolo para representar o número sete. Seguindo este raciocínio podem ser construídas todas as cartas do *segredo dos números* até o número que se queira, neste caso foi construído até a carta do número 100.


Os alunos foram questionados se os números 107, 115, 123, 139 e 143 teriam um novo símbolo ou não e explicar suas respostas. Os alunos tiveram cerca de uma hora para desenvolver estas atividades.

#### **4.1.5 QUINTO MOMENTO – DIVISIBILIDADE**

Este foi um momento dedicado ao estudo dos critérios de divisibilidade com o auxílio das cartas do “*segredo dos números*”. Como é possível saber se um número é divisível por dois. Para esclarecer este conceito foi feito uma análise das cartas contida na figura 21.



Figura 21: cartas do “segredo dos números”

O número 42 é divisível por dois? Sim, porque sua carta contém um triângulo. Estas conclusões são todas visuais, basta olhar para a carta referente ao número e é possível saber dizer se este número é divisível ou não por algum número. Assim pode-se dizer que o número 42 é divisível por dois, por três e por sete. Também é possível relacionar os símbolos e descobrir outros critérios, como por exemplo, é possível afirmar que o número 42 é divisível pelo número seis já que  $2 \times 3 = 6$  e pode-se encontrar na carta do número 42 o triângulo e o quadrado .

Esta discussão leva a uma importante propriedade dos divisores que diz que toda carta que conter os símbolos do triângulo azul e o quadrado vermelho representaria algum número que deveria ser divisível por seis.

O número 27 pode ser dividido pelo número três e pelo número nove, pelo número três porque possui um quadrado vermelho em sua representação figural e pelo número nove porque possui dois quadrados vermelhos. Esta discussão poderia levar à propriedade do “segredo dos números” que diz que toda carta que tiver dois quadrados vermelhos em sua representação figural, seria divisível pelo número nove.

Agora os alunos deveriam responder quais seriam os números que poderiam dividir o número 70 e também o número 84 que podem ser visualizados na figura 21. Eles deveriam escolher mais três cartas de números maiores que 40 e analisar suas cartas quanto à possibilidades de divisibilidade. Para esta atividade foi prevista uma hora.

#### 4.1.6 SEXTO MOMENTO – QUANTIDADE DE DIVISORES

Qual deve ser a quantidade de divisores de um número? A resposta desta pergunta pode ser encontrada através da análise de sua carta. Para ajudar a esclarecer esta ideia é importante observar a figura 22.



Figura 22: foto de cartas que são representadas por dois símbolos diferentes

Através da observação podemos descobrir quantos divisores tem um número qualquer. Se pegar como exemplo a carta que representa o número 22, é possível descobrir que a mesma tem os números 1, 2, 11 e 22 como seus divisores, totalizando quatro divisores. Isso ocorre porque a carta contém dois símbolos diferentes, o triângulo azul e o losango laranja, como o triângulo azul representa o número dois, pode-se descobrir que o losango laranja vale 11, visto que  $2 \times 11 = 22$ . Como esta carta só tem dois símbolos, não terá outras combinações entre os símbolos, além da que forma o número 22, então basta juntar o número um que divide todos os números e foi mostrada a origem dos quatro divisores do número 22. Procedendo da mesma forma pode-se dizer que os números 34, 46 e 91 devem ter quatro divisores cada um. A ideia desta atividade seria que os alunos descobrissem esta propriedade através das resoluções das atividades, na medida em que eles já teriam trabalhado com esses conceitos, onde foi possível encontrar os divisores de um número. Então foi mostrado que os divisores do número 22 seriam os números 1, 2, 11 e 22 e também foram perguntados quais seriam os divisores dos números 34, 46 e 91.



Figura 23: cartas do “segredo dos números” com dois símbolos iguais

Os alunos também deveriam estudar a quantidade de divisores das cartas da figura 23. Depois disso, explicar porque os números estudados teriam a quantidade de divisores que eles acharam.

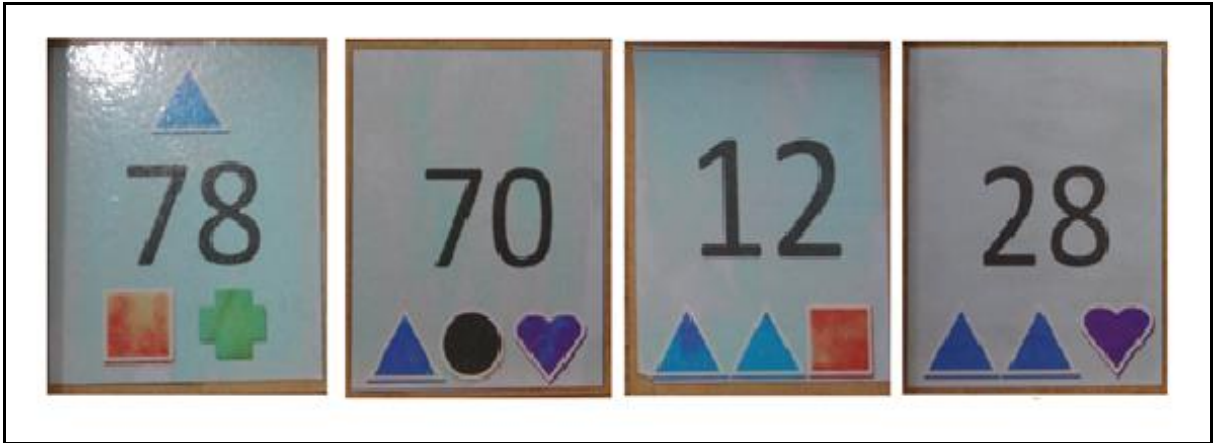


Figura 24: cartas do “segredo dos números” com três fatores primos

Outra questão proposta aos alunos foi que descobrissem quantos divisores teriam nas cartas da figura 24. Será que pode existir alguma generalização para a quantidade de divisores de acordo com a quantidade de símbolos? Então, os alunos foram convidados a tentar explicar.

Para esta atividade foi prevista uma hora.

#### 4.1.7 SÉTIMO MOMENTO – CITAR OS DIVISORES

Como descobrir se foram enumerados todos os divisores de um número?

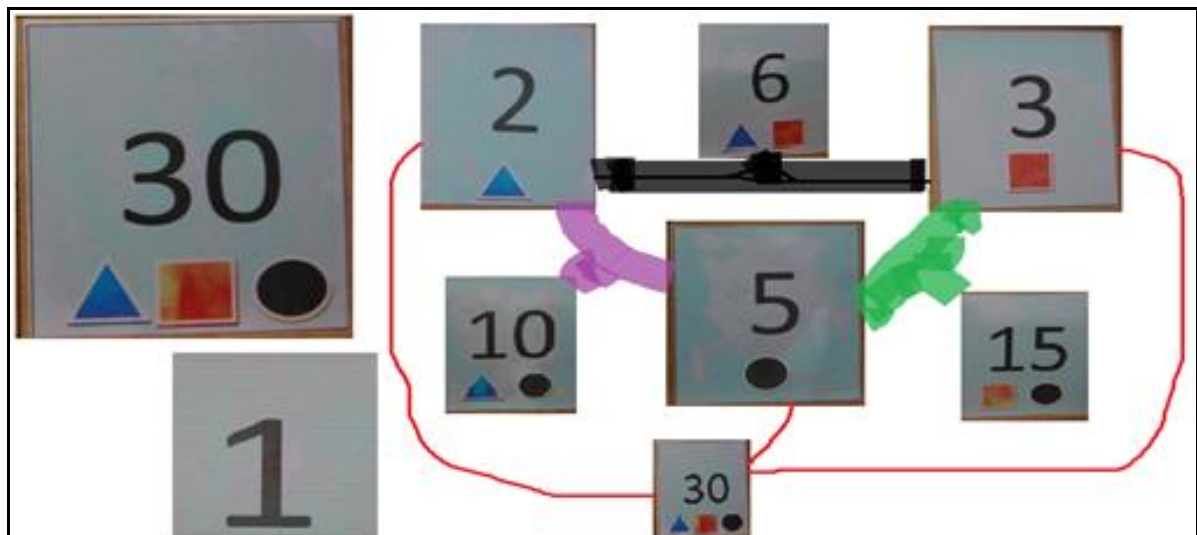


Figura 25: esquema que ajuda a explicar os divisores do número 30

Quais seriam os divisores do número 30? Ao analisar a figura 25 pode-se conjecturar que o número 30 têm os divisores primos triviais, e outros divisores que podem ser formados por dois fatores primos ou por três fatores primos. Além do número um, que não é primo, e nem composto.

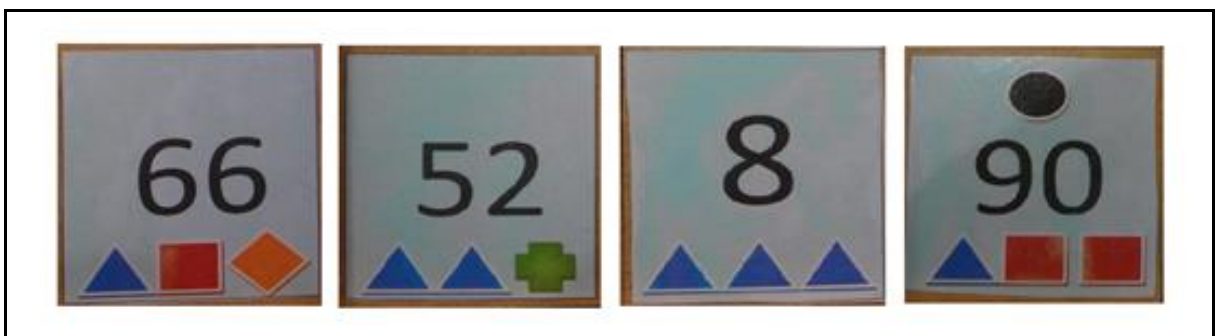
O primeiro tipo de divisor seria aquele em que aparece apenas um símbolo em cada carta, logo neste grupo estariam os números das cartas 2, 3 e 5, que são chamados de divisores primos do número 30.

O segundo tipo pode ter dois símbolos em cada carta, então aqui neste caso relacionam-se os números 6, 10 e 15, que receberiam o apelido de divisores com dois símbolos. Números estes que seriam os números compostos e teriam em sua composição, um ou dois números primos.

O terceiro tipo pode ter três símbolos em cada carta, em nosso caso seria o próprio número 30, que também seria um número composto e teria em sua composição, um, dois ou três fatores primos.

Como o número 30 só tem três símbolos, não teria mais nenhum divisor para este número.

Após este estudo os alunos podem explicar como são formados os divisores dos números a seguir e se possível, garantir que não exista mais nenhum divisor em cada caso estudado. Os alunos foram convidados a procurar todas as cartas que dividissem os números da figura 26, mostrando suas cartas em algum desenho, e ainda explicando sua resposta.



**Figura 26:** lista de cartas do “segredo dos números” sugerida para atividades dos alunos

Para esta atividade foi prevista uma hora.

#### **4.1.8 OITAVO MOMENTO – POTÊNCIAS E RAIZ QUADRADA**

Este momento é para estudar a ideia de potência e raiz quadrada de maneira intuitiva. A análise da figura 27 pode ajudar a esclarecer este novo conceito.



Figura 27: cartas do “segredo dos números” com símbolos repetidos

A questão a ser resolvida neste momento seria quais os números que podem ser escritos por uma única figura repetida algumas vezes.

Depois dos alunos acharem as cartas que seriam compostas por um mesmo símbolo repetido várias vezes, foram convidados a pensar quais daqueles números que poderiam possuir raízes quadradas?

Dos números listados na figura 27, quais seriam os números que têm raiz quadrada? Seriam aqueles que podem ser originados de uma quantidade par do mesmo símbolo, e a raiz será representada pela carta que conter a metade dos símbolos. O número 16 tem quatro triângulos azuis, então este número tem raiz quadrada que deve ser representada por uma carta com dois triângulos azuis, que representa o número quatro. O número oito não tem raiz quadrada, visto que ele é composto por três quadrados azuis.

Será que só as cartas contendo apenas um símbolo poderiam possuir raiz quadrada? Então qual deveria ser a generalização através do estudo dos símbolos de cada carta para descobrir a raiz quadrada de um número apenas observando-os. Quais seriam os outros números que têm raiz quadrada?

Para esta atividade foi prevista uma hora de trabalho.

#### 4.1.9 NONO MOMENTO – JOGO DA BATALHA

Neste momento foi aplicado o jogo da batalha com os divisores de 60. Para isso é preciso descrever todo o funcionamento deste jogo.

O jogo da batalha com os divisores de 60 que são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60, números estes que estão escritos em 12 cartas. O jogo funciona de maneira que os alunos são divididos em dois grupos. Cada grupo recebe seis cartas. O ganhador do jogo será aquele grupo que ficar com mais cartas ao final. Em cada rodada um jogador deve colocar uma carta sobre a mesa e o outro grupo deve colocar outra carta. Ganhará a rodada quem jogar um

número que for múltiplo do outro e maior, caso os números em questão não sejam múltiplos eles ficarão na mesa para a próxima rodada, quando alguém ganhar leva todas as cartas que estejam sobre a mesa.

Esta seria uma atividade lúdica que provocaria os alunos a estudarem possibilidades de ganhar o jogo. Esta situação didática deveria fazer com que os alunos trabalhassem as relações binárias “ser múltiplo de”, “ser divisor de” e “ser não comparável” entre os divisores de 60, através da multiplicação e divisão.

A ideia era de repetir este jogo cerca de 100 partidas, onde foram tabeladas todas as partidas e ainda relatar o histórico de algumas.

Para esta atividade foram previstas duas horas e meia.

#### 4.1.10 DÉCIMO MOMENTO – CONSTRUÇÃO DAS MAQUETES

Décimo momento: este será o momento para a construção das maquetes de números que foram estudados ou novos números.

As maquetes que são representações espaciais das relações... é divisor de... Com o material concreto das maquetes pode-se trabalhar a ideia de cada direção diferente do espaço representar um operador diferente. Nas maquetes, os operadores são representados por palitos que simbolizam os números primos geradores. Para melhor compreensão foram estudados exemplos de maquetes.

A maquete do número 16 teria um só gerador repetido quatro vezes.

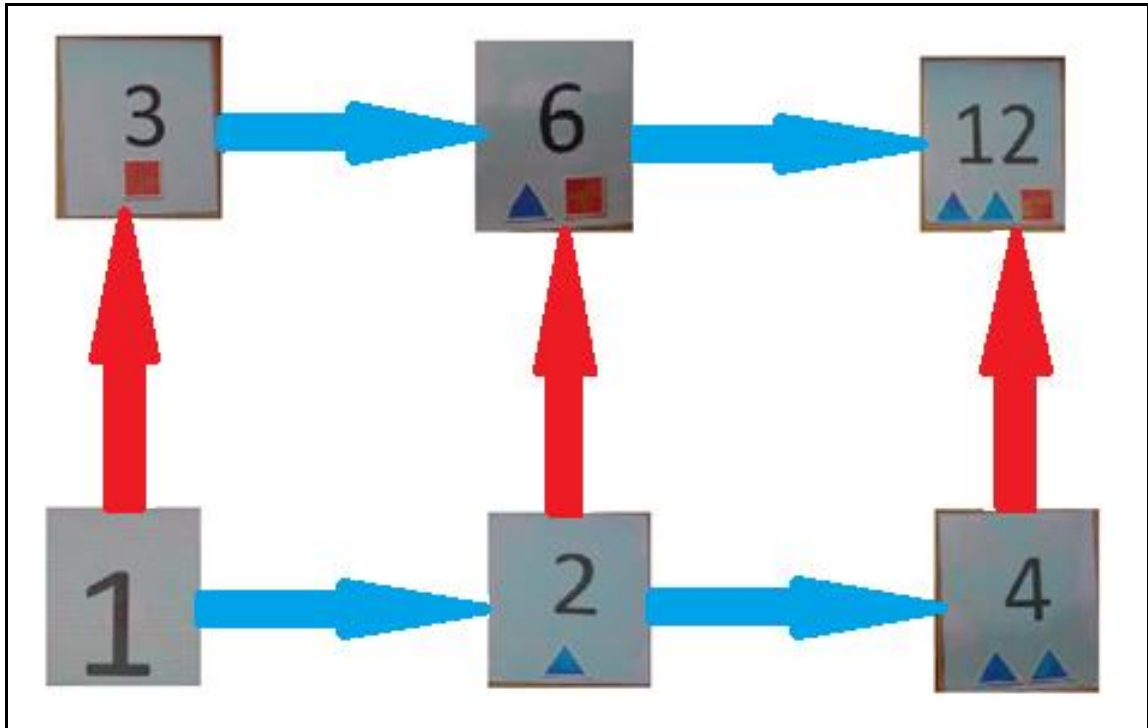


Figura 28: maquete que representa o número 16

A figura 28 mostra que para construir a maquete do número 16 precisamos partir do número um e ir acrescentando triângulos azuis a cada transformação que acontece, até chegar à quantidade de quatro triângulos que representarão o número 16 já que as quatro setas em azul representam o produto “ $x2x2x2x2$ ”.

É possível construir maquetes de vários números, a do número 12, por exemplo, deve ser de duas dimensões, já que o número 12 pode ser representado pela multiplicação  $2x2x3$ . A figura 29 mostra esta construção.





**Figura 29: maquete do número 12**

Na figura 29 pode ser analisada a maquete do número 12 que foi formada por dois fatores primos que são representados pelos números dois e três, por isso esta maquete teria duas dimensões que estariam representadas pelas flechas azuis e vermelhas, as flechas azuis representando um produto pelo número dois e as flechas vermelhas representando um produto pelo número três.

Como o número 12 tem dois fatores representantes do número dois temos duas flechas azuis para a direita e como temos só um fator representante do número três, teremos uma flecha vermelha para cima.

Através da construção da maquete do número 12 podem-se descobrir todos os divisores do número 12, que estariam listados na própria maquete. A maquete começa pelo número um e cada flecha significa uma multiplicação por dois ou três, depende da cor da flecha como já foi falado anteriormente.



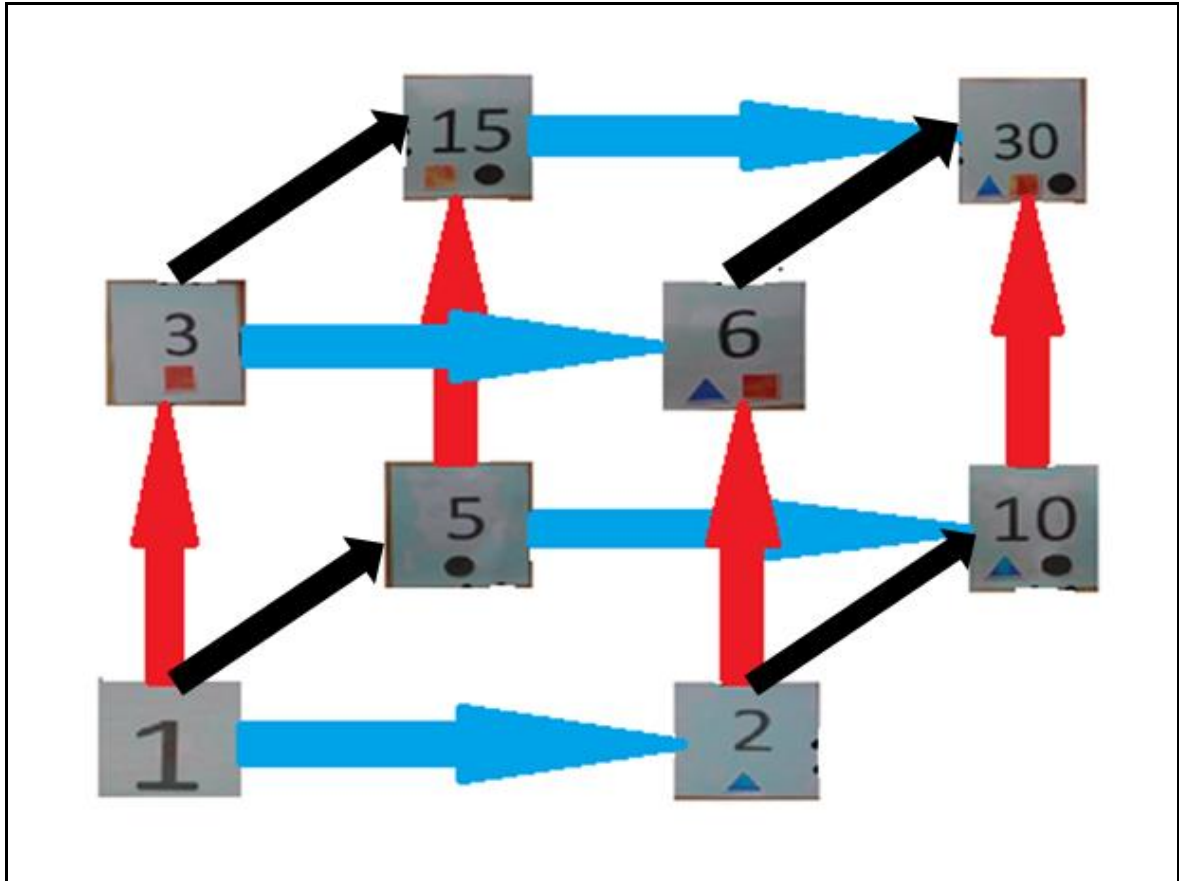


Figura 30: maquete do número 30

Na figura 30 foi mostrada a construção da maquete do número 30, esta maquete deve ser de três dimensões porque o número 30 tem três divisores primos diferentes que são os números 2, 3 e 5. Assim cada flecha azul continua sendo um fator de multiplicação pelo número dois, a flecha vermelha é um fator de multiplicação pelo número três e a flecha preta é um fator de multiplicação pelo número cinco.

Explorando os números até 100 teremos como representar qualquer um destes números com uma maquete que será de uma, duas ou três dimensões no máximo.

A tarefa dos alunos neste momento foi de escolher números e construir a maquete que o representa. Além disso, eles também construiriam uma maquete escolhida pelo pesquisador.

Para esta atividade foi previsto um tempo de três horas.

#### 4.2 ATIVIDADES APLICADAS AOS ALUNOS - ETAPA 2

Esta atividade foi desenvolvida pelos alunos cerca de 20 dias depois do trabalho ter sido aplicado na sala de aula, onde os mesmos deveriam resolvê-las utilizando conhecimentos adquiridos durante as oficinas.

Questão 1: Os alunos deveriam citar cinco múltiplos do número quatro e a seguir explicar o que significa dizer que um número é múltiplo de outro.

Questão 2: Neste exercício, os alunos deveriam citar divisores dos números (40, 52 e 72), e em seguida explicar o que entenderam por divisor de um número.

Questão 3: Através da análise da figura 31, o aluno deveria escolher quatro destas cartas e dizer quais seriam os seus divisores.



Figura 31: cartas do “segredo dos números”

Questão 4: Neste momento o aluno foi convidado explicar o que é um número primo e como ele se comporta a respeito da divisão (quais números que dividem um número primo), podendo citar exemplos.

Questão 5: Nesta questão, o aluno deveria mostrar como é possível saber se um número pode ser dividido por dois, por três, por sete, por quatro, por seis, por 15 ou por 21 (critérios de divisibilidade). Eles deveriam explicar utilizando os conceitos trabalhados nas oficinas.

Questão 6: Como é possível saber a quantidade de divisores que existe em um número? Por exemplo, quantos divisores tem o número 58 representado na figura34? Quantos divisores deveriam ter os números 50 e 42. Quais deles têm mais divisores, e qual seria o motivo desta diferença, visto que os dois têm três símbolos cada um.

Questão 7: Quais dos números da figura 32 têm raiz quadrada, e quais que não têm, explique por que.



Figura 32: cartas do “segredo dos números”

Questão 8: Nesta atividade, o aluno foi convidado a tentar descobrir qual número que deveria ser formado e a seguir escrever alguns divisores deste número. Sendo que a carta deve

ter três triângulos azuis, dois quadrados vermelhos e duas bolas pretas, todos em uma mesma figura.

### **4.3 ATIVIDADES APLICADAS A UM GRUPO DE PROFESSORES**

Questões para serem pensadas e resolvidas pelos participantes.

Questão 1: Construa cinco múltiplos de um número qualquer através do uso dos símbolos que você viu?

Questão 2: Escolham algumas cartas citadas e descubram quais serão seus divisores?

Questão 3: Observando os números primos destacados você deve escolher um deles e formar três novas cartas que contenham este símbolo escolhido.

Questão 4: Construa uma nova carta que contenha dois triângulos azuis, dois quadrados vermelhos, um círculo preto e um coração. Qual será o valor desta nova carta? Cite alguns divisores desta nova carta explorando seus símbolos.

## 5 ANÁLISES DOS DADOS

Agora será feita a análise dos dados obtidos durante a pesquisa feita com os alunos, com apoio da teoria dos campos conceituais de Vergnaud. Este será o momento que será discutida a importância do material didático trabalhado durante a pesquisa segundo a visão dos alunos que participaram da mesma, ou seja, analisaremos se o material ajuda na construção dos conceitos multiplicativos ou não, e como os alunos desenvolveram seus conceitos nesta área. Nos extratos dos trabalhos dos sujeitos da pesquisa, foi preservada integralmente a escrita original, ainda que elas possam apresentar erros gramaticais ou ortográficos.

### 5.1 ANÁLISES DAS ATIVIDADES APLICADAS DURANTE A ETAPA 1

Nesta etapa será feita a análise dos dados obtidos através da aplicação da sequência didática discutida no capítulo III.

#### 5.1.1 MOMENTO QUE OS ALUNOS CONHECERAM O MATERIAL

No primeiro momento os alunos receberam o material e foram convidados a tentar descobrir qual seria o “*segredo dos números*” que estava escondido nas cartas. Durante este primeiro momento foi dito aos alunos que o nome do material é “*segredo dos números*” e não foi dada mais nenhuma informação. Neste instante, o principal objetivo era observar os pensamentos dos alunos ao se defrontar com aquele material sem terem informação alguma sobre seu funcionamento. Então a expectativa era que alguns alunos fizessem ligação do material com a Matemática, e que, em alguns casos, relacionassem os símbolos a valores numéricos. Os alunos tiveram cerca de trinta minutos para explorarem o material, onde puderam observar com suas próprias mãos, procurando por detalhes que despertassem alguma curiosidade. Foi pedido aos alunos que anotassem o que eles estavam descobrindo, ou o que estavam pensando sobre o material analisado.

Quando distribuí o material, alguns alunos perguntaram se poderiam fazer casinha com as cartinhas, mostrando intenção em brincar com o material. Logo que começaram a mexer nas cartinhas, o aluno HEN já observou que a carta referente ao número um não tinha figura nenhuma. Durante o tempo de observação do material, os alunos trocaram algumas informações sobre o que viam nas cartas. Cada aluno montou uma estratégia diferente para explorar o material, enquanto o aluno HEN olhava as cartas uma a uma, a aluna LAU separou todas as cartas em cima da mesa e depois começou suas anotações. Os alunos conversaram

entre eles, mas quase nada sobre o material, apenas mostraram algumas cartas uns aos outros, cartas estas que continham figuras que chamaram sua atenção.

O número 34 é alibre, o 61 parece uma placa tem várias citar, o 100 é comum o 46 parece que vive na lua, o 4 e passa o tempo rapidinho, o 29 parece bravos e entrigados, o 91 é afuchonado e salva verdas, o 38 te raivozo e gordinho.

Extrato 1: retirado da escrita da aluna NAT

Analisando a escrita dos alunos, pude perceber que a grande maioria não relacionou as figuras com os valores dos números. Isso pode ser notado observando o extrato um que foi retirado da escrita da aluna NAT.

Como este problema parece ser completamente novo para a aluna NAT, podemos lembrar o que Vergnaud diz:

A solução de problemas muito novos é impossível sem a linguagem, sobretudo quando essa solução evoca conceptualizações novas e a transformação de certos elementos em objetos de pensamento bem identificados. (VERGNAUD, 1993, p. 24)

A aluna tentou buscar em alguma situação de sua vida esquemas que pudessem ajudar a resolver o problema que surgiu ao analisar o material; como o material era totalmente novo, a mesma não enxergou a matemática que ali estava representada e fez referências a ideias que surgiram ao fazer as observações.

Número 10 tem três triângulos azuis.  
 Número vinte tem um quadrado vermelho e um coração rosa.  
 Número 100 tem dois quadrados laranjas.  
 Número sete tem um coração rosa.  
 Número dez mil tem um raio verde.  
 Número dez tem um triângulo azul e uma bola preta.  
 Número dez mil tem um círculo amarelo.  
 Número 1000 tem um losango laranja.

Extrato 2: retirado da escrita do aluno JOA

No extrato dois retirado da escrita do aluno JOA é possível observar que o aluno fez uma descrição das cartas em relação ao que viu, ou seja, falou sobre os números e os símbolos que aparecem em cada carta. É importante salientar que ele apenas citou as cartas e seus elementos não estabelecendo relações entre eles.

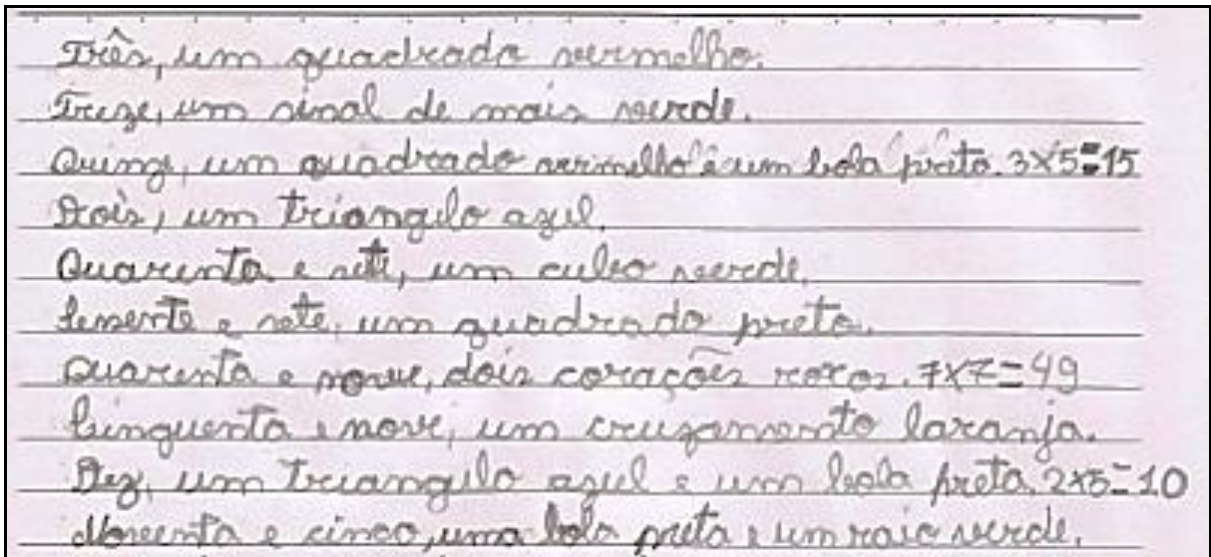
Ainda no mesmo dia, depois dos alunos terem construído suas primeiras impressões sobre o material, partimos para outro momento em que os alunos receberam dicas sobre o material: cada símbolo diferente que aparece nas cartas representa um único número. Todas as cartas foram construídas através da multiplicação entre os valores referentes a cada símbolo, ou representam algum número primo.

Nesta atividade os alunos devem tentar descobrir quais números que cada símbolo representa. Seguindo o raciocínio, era esperado que os alunos começassem a discutir o que acontece quando se junta mais de um símbolo numa mesma carta.

Logo que foi distribuído o material, os alunos receberam a informação que as figuras representavam algum número e para formar as cartinhas era utilizada a multiplicação, ou seja, “as contas de vezes”. Então os alunos já começaram a falar sobre possíveis valores para as cartas. O aluno HEN disse que o quadrado vermelho representava o número nove, a aluna LAU disse que poderia ser o número seis e o aluno JOA disse que era o três. O aluno HEN pensou que o nove era representado pelo quadrado já que na carta que representa o número em questão possui quadrado vermelho, não levando em conta que são dois. A aluna LAU observou a carta do número seis e notou que a mesma tinha um quadrado, não levando em conta a presença do triângulo. Então foi perguntado para JOA porque ele achava ser o número três e ele pegou a cartinha que tinha o número três e mostrou. Como a única figura que tem na carta do número três é o quadrado vermelho, então o quadrado vermelho deve valer três.

Os alunos questionaram sobre como deveriam proceder nas anotações e aí começaram a escrever em suas folhas. Durante o trabalho pode-se perceber que os alunos mostraram muita dedicação e mexeram bastante nas cartas tentando descobrir o máximo de informação sobre o material. O aluno JOA comentou que o a bolinha preta deveria representar o número cinco, visto que o número 15 era representado pelo quadrado e pela bolinha preta e que  $3 \times 5 = 15$ . Durante a aula foram dadas dicas do material conforme as dúvidas foram surgindo. Os alunos mexeram muito nas cartinhas, olhando-as e provavelmente pensando sobre. O aluno HEN observou: “professor o um não vale nada”. Em um momento a aluna LAU me perguntou qual número representava a figura do raio, que estava na carta do número 38, então o aluno JOA achou a carta só com a figura do raio e disse todo feliz, o raio vale 19.



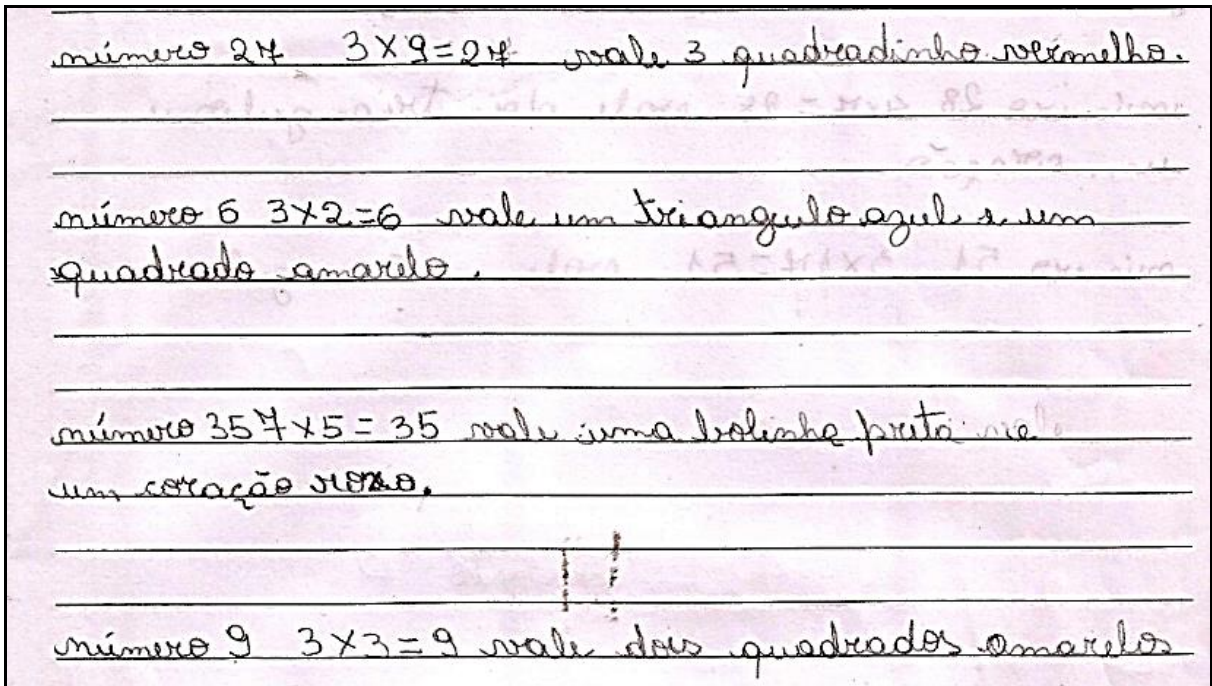


Extrato 3: retirado da escrita do aluno JOA

Observando a escrita dos alunos pode-se perceber que o aluno JOA, extrato três, descobriu e citou vários valores de símbolos escritos nas cartas. Ele escreveu os valores de alguns símbolos fazendo a ligação entre o símbolo e seu significado.

Neste momento podemos perceber que o aluno conseguiu fazer a descoberta de alguns signos e seus significados, mantendo uma estreita relação entre eles. Quando juntou dois signos em uma mesma carta, esta união forma um novo número que pode ser descoberto através da multiplicação entre os valores de cada signo. Como exemplo podemos analisar a carta que representa o número dez, citado no recorte três, retirado da escrita do aluno JOA. “dez é um triângulo azul e uma bola preto.  $2 \times 5 = 10$ ”. Então o triângulo azul é o signo que representa o número dois, e o círculo preto, citado pelo aluno como bola preto, é o signo que representa o número cinco. Assim ficou claro que ao juntarmos estes dois signos, devemos multiplicar seus valores obtendo assim o número dez.

O aluno também citou o número noventa e cinco, dizendo que é representado por uma bola preto e um raio verde. O curioso é que o aluno não transportou esta escrita para a simbologia matemática. Ele já sabia que o número cinco é representado pelo círculo preto, também sabia que o raio verde representava o número dezenove.



Extrato 4: retirado da escrita da aluna LAU

O extrato quatro retirado da escrita da aluna LAU nos mostra que ela descobriu a relação entre alguns signos e seus significados, mostrando que o coração roxo representa o número sete, então uma bola preta e um coração roxo representam o número trinta e cinco, mostrando que esta aluna conseguiu encontrar novos números através da união de alguns símbolos. A aluna não mostrou aparentemente nenhuma carta que tivesse três símbolos, mas fazendo uma análise foi possível perceber que o número vinte e sete, citado no extrato quatro é originado de uma carta que contém três quadrados vermelhos. A aluna LAU mostrou que o nove é igual a três multiplicado por três e depois mostrou que vinte e sete é igual a nove multiplicado por três. Na verdade, podemos perceber que ela mostrou de outra maneira, gerando uma dúvida sobre a construção inicial do conceito de multiplicação contendo três ou mais elementos. Ou seja, não mostrou entendimento sobre a combinação de três ou mais símbolos em uma mesma carta.



$5 \times 17 = 85$  O sol vale 17 e a bolinha preta o 5.  
 $2 \times 5 = 10$  O triângulo azul vale 2 e a bolinha preta vale 5.  
 $2 \times 3 \times 5 = 30$  O triângulo azul vale 2 o quadrado vermelho vale 3 e a bolinha preta vale 5.  
 $3 \times 3 = 9$  O quadrado vermelho vale 3 e a lua azul vale 3.  
 $2 \times 19 = 38$  O triângulo azul vale 2 e o raio verde vale 19.  
 $3 \times 3 = 9$  O quadrado vermelho vale 3.

Extrato 5: retirado da escrita da aluna NAT

A aluna NAT referida no extrato cinco parece estar mais avançada em relação a seus colegas, visto que ela conseguiu mostrar claramente a origem do número trinta, que é formado por três símbolos. A aluna mostrou-se mais competente que os outros, competência que para Vergnaud é formada pelo conhecimento de conceitos explícitos e conhecimentos implícitos, onde problemas teóricos e práticos levam a formação de conceitos.

O quadrado vale  $3 \times 7 = 9$   
 O sol é o 17  
 O cubo vale 47  
 O quadrado rotacionado vale 67  
 A lua azul é 43  
 O quadrado e o sol é o 51  
 O diamante azul é o 37  
 A roda laranja é o 83  
 O proibido é 9  
 A aranha é 53

Extrato 6: retirado da escrita do aluno GIL

O aluno GIL analisado no extrato seis construiu apenas a relação entre os signos e os significados. Podemos perceber que ele praticamente não chegou a nenhuma carta com dois símbolos ou mais, mostrando apenas que o número 51 é representado pelo quadrado e o sol,

mas não montou a relação matemática “ $3 \times 17 = 51$ ” e nem citou de maneira escrita por extenso que pode ser outra maneira simbólica de representação. Neste momento, este aluno era um dos mais atrasados em relação à atividade proposta inicialmente.

Na maioria dos casos, os alunos construíram conceitos sobre os valores de cada número e, em alguns casos, eles chegaram até a representação de alguns números através da combinação de dois ou mais símbolos, utilizando a estrutura multiplicativa. A expectativa inicial era que os alunos conseguissem trabalhar com a combinação de dois símbolos ou mais e formassem novos números. Durante as observações foi possível perceber que alguns alunos estudaram a formação de cartas que contém dois ou mais símbolos e inclusive fizeram anotações mostrando estas ideias. Com isso a expectativa inicial foi parcialmente correspondida e os alunos conseguiram descobrir alguns valores dos símbolos e também relacionar estes símbolos para então formar novas cartas, ou pelo menos observando as cartas prontas eles descobriram como elas foram formadas.

### 5.1.2 CONCEITOS SOBRE MÚLTIPLOS

Em um segundo momento, a proposta visava contribuir para que os alunos construíssem seus próprios conceitos sobre múltiplos de algum número. Para provocar os alunos, eles foram convidados a resolver problemas com o objetivo de construir o conceito de múltiplo.

Para colaborar com essa ideia foi programada uma situação que os levasse a descobrir listas de múltiplos de algum número e, depois de escrever e discutir sobre esta ideia por algum tempo, era esperado que os alunos saíssem deste momento com algum conhecimento a mais sobre múltiplos. Neste momento aproveitou-se para discutir sobre a ideia de um número qualquer ter uma quantidade infinita de múltiplos, contrastando com a maneira trabalhada nas séries iniciais do Ensino Fundamental e ensinada aos alunos, a de tabuada dos números que contém dez múltiplos. Pode-se perceber que vários alunos questionaram sobre a quantidade de múltiplos encontrados para cada carta pedida, principalmente porque foi forçado o uso do termo “tabuada do número três, por exemplo”. Sempre que o valor procurado era maior que um múltiplo de dez, os alunos mostravam insegurança em utilizar o termo da tabuada desse número, isso ficou mais claro ao ser observado o exemplo do aluno HEN: como o número 36 é igual a  $12 \times 3$ , pode-se dizer que esse número representa um múltiplo do número três.

Os alunos foram postos frente a frente com as questões: em quantas cartas teríamos a presença dos triângulos azuis, porque estas cartas têm sempre triângulos em sua representação, qual a ligação entre os símbolos e os números que são formados? Em quantas

cartas teríamos os quadrados vermelhos, em quantas cartas teríamos o círculo preto e quantas cartas contendo o coração em sua representação?

Depois dos alunos trabalharem e pensarem sobre estas questões, eles foram questionados sobre a quantidade de cartas que acharam com triângulos, com quadrados, com círculos e com corações. Por que teríamos mais triângulos do que quadrados? Por que teríamos mais quadrados do que círculos? Por que teríamos mais círculos do que corações?

TABUADA 2	
98, 40, 84, 64, 100, 36, 50, 68, 18, 42, 54, 4,	
74, 58, 80, 82, 62, 50, 34, 92, 14, 66, 52, 90,	
24, 30, 48, 76, 88, 70, 96, 72, 2, 8, 22, 32, 20	
38, 28, 26, 78, 60, 94, 12, 16, 44, 6.	
TABUADA 3	46 CARTAS
	102
24, 21, 23, 45, 63, 99, 51, 9, 69, 39, 33, 3,	
75, 15, 54, 84, 81, 18, 42, 30, 12, 24, 6, 96, 72,	
60, 48, 54, 66, 72, 36, 90,	
	32 CARTAS 103

Extrato 7: retirado da escrita da aluna LAU

O extrato sete pode mostrar que a aluna LAU citou quase todos os múltiplos de dois e de três, listando-os conforme encontrava nas cartas. Essa atividade ajudou esta aluna na construção dos múltiplos de algum número, construindo o conceito que existem infinitos múltiplos de um número qualquer. É importante ressaltar que ela escreveu: “tabuada do número dois e tabuada do número três”, assim deve ter quebrado o conceito de que a tabuada de um número deve ter apenas dez múltiplos.

A escrita de maneira aparentemente desorganizada dos múltiplos de dois e de três deve ter ocorrido devido à leitura feita dos símbolos de cada carta, ou seja, toda carta que contiver pelo menos um triângulo azul, representará um número múltiplo de dois. Assim a aluna LAU separou as cartas com triângulos e depois tomou nota dos números escritos naquelas cartas.

Esta atividade trabalhou a construção de múltiplos, onde os alunos foram convidados a pensar sobre as quantidades de múltiplos em um determinado grupo e se possível, construir algumas articulações.

O dois é mais usado nas cartinhas porque é um número pequeno e usado nas cartinhas.

O sete é um número menor usado porque ele é muito alto e o número é menor usado na cartinha

Extrato 8: retirado da escrita do aluno HEN

Através da escrita retirada do extrato oito pode-se observar que o aluno HEN fez uma comparação interessante ao dizer que o número dois é mais utilizado nas cartinhas porque é menor que o número sete, e que o número sete é menos utilizado porque é maior. Desta maneira pode-se supor que o aluno compreendeu que quanto maior for um número qualquer, menor será sua quantidade de divisores. Este próprio aluno chegou a levantar a hipótese de que o número dezessete, representado nas cartas do “segredo dos números” pela figura de um sol apareceria sete vezes, ou seja, teria sete múltiplos de dezessete até o número cem. Então o aluno foi questionado de como que ele teria encontrado sete sóis e ele respondeu que deveriam caber umas sete vezes, neste momento ele pensou um pouco e respondeu sem utilizar lápis e caderno, fazendo um cálculo mental. A partir deste pensamento do aluno HEN, todos ficaram sabendo que existem cinco figuras contendo o sol, já que  $5 \times 17 = 85$  e  $6 \times 17 = 102$ .

Como achar as cartinhas da tabuada do 6?

24

12

6

36

42

Extrato 9: retirado da escrita do aluno GIL

Em outro momento foi perguntado aos alunos como saber que uma cartinha era da “tabuada do número quatro” e os alunos responderam rapidamente que precisaria ter dois triângulos azuis. Resposta correta, mas poderia ser melhorada dizendo que pode ter dois ou mais triângulos azuis, então, a partir daí todos os alunos começaram a separar os múltiplos do número quatro através da análise das cartinhas.

Depois de trabalhar com os múltiplos do número quatro, foi perguntado aos alunos sobre quais figuras seriam necessárias estar em uma mesma carta para que ela fosse da



tabuada do número seis. Neste momento foi possível perceber que alguns alunos ainda pensavam o material como sendo de princípio aditivo, isso porque alguns deles disseram que o número seis deveria conter dois quadrados vermelhos, e como o quadrado vermelho representa o número três, é sabido que  $3 \times 3 = 9$  e que  $3 + 3 = 6$ . Como  $2 \times 3 = 6$ , uma carta precisará ter pelo menos um triângulo e um quadrado para ser múltiplo do número seis.

Foi possível perceber, a partir da pergunta citada, uma confusão entre o pensamento aditivo e o pensamento multiplicativo.

Pode-se observar nos extratos nove e 10, retirados das escritas dos alunos GIL e HEN respectivamente, que eles citaram múltiplos de seis de maneira aleatória, levando à conclusão de que os mesmos acharam estes múltiplos apenas através da análise das figuras, ou seja, procuraram as cartas que possuíam triângulo azul e quadrado vermelho. Também foi possível perceber que o aluno GIL apenas citou os múltiplos sem explicar como deve procurá-los, já o aluno HEN explicou ser necessário “misturar o dois com o três para formar múltiplos de seis”.

Esse “misturar os números dois e três” escrito pelo aluno HEN, mostra que o mesmo está utilizando o pensamento multiplicativo. O aluno montou um teorema em ação com sua escrita mostrando que todos os números que possuírem os números primos dois e três em sua formação, representarão um múltiplo do número seis. Assim,  $2^m \times 3^n$  “qualquer outro número” sempre será um múltiplo do número seis.

Como achar as cartinhas da tabuada do 6? tem que misturar o dois com o três 18, 6, 60, 12, 24

Extrato 10: retirado da escrita do aluno HEN

Como a expectativa deste momento era de construir conceitos sobre múltiplos, o encontro foi proveitoso, já que ao longo do tempo foram feitas várias discussões que mostraram um crescimento dos alunos e possivelmente uma criação de conceitos sobre o assunto múltiplo. Pode-se observar através da análise feita neste segundo momento que os alunos listaram quase todos os múltiplos pedidos durante o encontro e também escreveram sobre as questões levantadas explicando alguns porquês.

### 5.1.3 CONCEITOS SOBRE DIVISORES

Neste terceiro momento o objetivo era construir o conceito de divisores de um número qualquer. Para isso, espera-se através de exemplos trabalhados com o “segredo dos números”, encontrarem divisores de qualquer número em questão e provocar os alunos a

enunciar e reconhecer os divisores deste número qualquer. Através da análise das cartas, podem-se encontrar vários divisores do número em estudo. Esta ideia foi explorada e trabalhada com os alunos tentando construir os conceitos necessários para que um aluno saiba o que é um divisor.

No início da aula, foi dito que neste dia seriam estudados conceitos sobre divisão. Questionou-se os alunos se alguém sabia o que era divisão. A aluna LAU usou como exemplo a situação em que falava ter oito balas para dividir entre os seis colegas que estavam na sala de aula, aí se questionou se esta divisão seria exata<sup>1</sup>, de maneira que cada colega recebesse a mesma quantidade de balas e não sobrasse nenhuma por distribuir. Então ela respondeu com um gesto de dúvida não falando mais nada. Então se discutiu que se cada aluno recebesse uma bala, ainda sobrariam duas, que seria o resto da divisão, e desta maneira mostrou-se que a divisão não seria exata e por isso alguns alunos receberiam duas balas e outros receberiam uma. Quando perguntados quais números dividem o número 14, o aluno HEN disse que seria possível dividir pelo número dois e pelo número sete. Depois de destacados todos os divisores do número 30 e discutidos como eles são encontrados, os alunos foram convidados a destacar divisores dos números cujas cartas estão contidas na figura 33.



Figura 33: foto de cartas do “segredo dos números”

É possível observar, via extrato 11, que a aluna LAU destacou todos os divisores que são originados dos símbolos escritos nas cartas (divisores primos), e quase não citou números vindos da multiplicação entre os divisores primos; em alguns casos ela, até escreveu alguns divisores dos números estudados, mas não explicitou essa situação. Para esclarecer a última frase pode ser observado o exemplo da explicação dela sobre os divisores do número 27, onde ela destacou três vezes o número três e, ao lado, escreveu que  $3 \times 9 = 27$ . Nos números que

<sup>1</sup>A expressão divisão exata refere-se à situação na qual o resto da divisão entre números naturais é zero.

ela estudou, juntou alguns divisores primos formando alguns números compostos e através de alguma multiplicação, chegou até o número original.

Nesta situação a aluna LAU utilizou esquemas para chegar aos valores utilizados nos cálculos finais de cada caso, onde mostrou que deve ser utilizado o princípio multiplicativo. Em alguns casos, utilizou a multiplicação de dois divisores primos para formar os números utilizados, já em outros casos, utilizou a multiplicação de três divisores primos, embora não tenha escrito estas operações.

70 △○♥	2 10 5 x4 4 40	27 □□□	3 9 3 x3 3 27	50 400	2 5 5 5 x10 50
84 △△□	7 12 2 x4 2 84 3	16 △△△	2 4 2 x4 2 16	58 △◇	2 29 29 x2 58

Extrato 11: retirado da escrita da aluna LAU

Conforme se pode conferir no extrato 12, o aluno GIL citou apenas alguns divisores primos do número estudado, e em nenhum momento fez relações entre estes divisores formando outros divisores através da multiplicação dos primos.

○ 58 pode ser dividido por 2 e 29	○ 80 pode ser 2 e 5
○ 84 pode ser 2 e 3 e 7	
○ 76 pode ser 2	○ 90 pode ser 2 e 3
○ 27 pode ser 3	○ 50 pode ser 2 e 5
○ 42 pode ser 2 e 3	○ 18 pode ser 2 e 3

Extrato 12: retirado da escrita do aluno GIL

Ao analisar o extrato 13 retirado da escrita da aluna NAT, pode-se notar que a mesma foi quem citou o maior número de divisores dos números estudados. Ela mostrou os divisores primos e através da multiplicação destes, encontrou outros divisores, como é possível observar no extrato 13. Ao analisar os divisores do número 42, pode-se notar que a aluna destacou os divisores primos 2, 3 e 7. Depois multiplicando estes divisores dois a dois, chegou aos números seis, 21 e 14. E, no final, chegou ao número 42, ao multiplicar os três divisores. Aí acrescentou o número um a esse grupo chegando a todos os divisores do número 42.

Ao analisar os divisores do número 80 citados pela aluna NAT, pode-se perceber que a mesma esqueceu de citar os divisores 16, 20 e 40. Isso pode ter ocorrido devido à carta que representa o número 80 ter cinco fatores primos, enquanto que a carta que representa o número 42 tem apenas três fatores primos. Como a carta que representa o número 80 tem cinco fatores primos, precisam-se encontrar os fatores primos (2 e 5); a seguir os divisores formados pela multiplicação de dois fatores primos obtendo os números (4 e 10); depois pela multiplicação de três fatores primos obtendo os números (8 e 20); pela multiplicação de quatro fatores primos obtendo os números (16 e 40) e, finalmente, pela multiplicação dos cinco fatores primos obtendo o número (80). Juntando com o número um que não têm símbolo nenhum para representá-lo, obtêm-se os dez divisores do número 80.

Pode-se supor que a aluna não conseguiu encontrar todos os divisores porque precisaria utilizar um esquema contendo mais combinações para encontrar os divisores do número 80 em relação aos divisores do número 42. Já que a carta do número 42 tem três símbolos, enquanto a carta que representa o número 80 tem cinco símbolos, sendo quatro deles iguais. Assim a aluna precisaria combinar estes cinco símbolos para encontrar seus divisores, que com certeza é mais difícil do que combinar três símbolos diferentes.

The image shows three handwritten mathematical schemes:

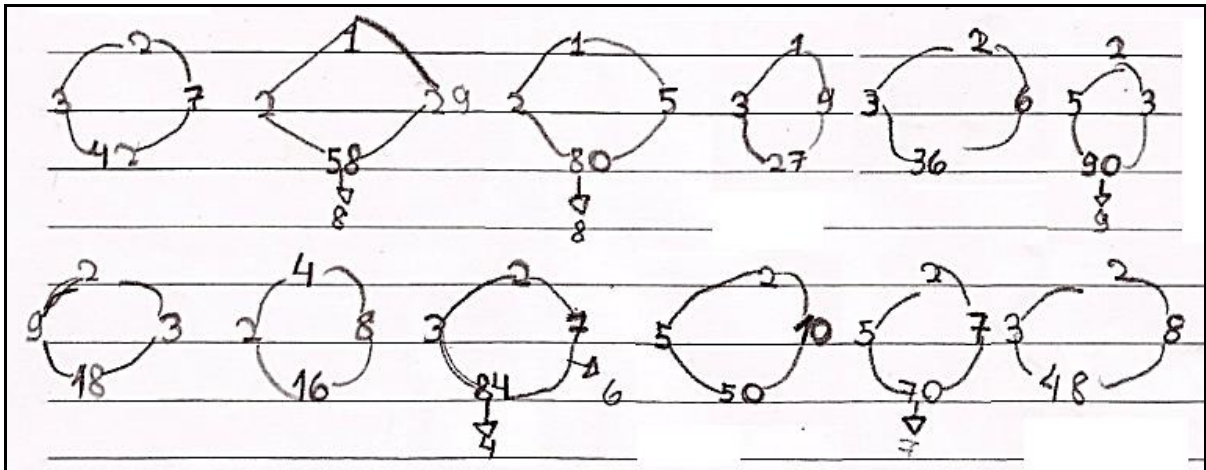
- Top Left:** A box containing the number 58, its prime factors 2 and 29, and a list of divisors: 1, 2, 29, 58. Symbols  $\Delta$  and  $\square$  are used to represent the divisors.
- Top Middle:** A box containing the number 27, its prime factors 3, 3, 3, and a list of divisors: 1, 3, 9, 27. Symbols  $\square$  and  $\square$  are used to represent the divisors.
- Top Right:** A box containing the number 16, its prime factors 2, 2, 2, 2, and a list of divisors: 1, 2, 4, 8, 16. Symbols  $\Delta$  and  $\Delta$  are used to represent the divisors.
- Bottom Left:** A box containing the number 42, its prime factors 2, 3, 7, and a list of divisors: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42. Symbols  $\Delta$ ,  $\square$ , and  $\square$  are used to represent the divisors.
- Bottom Middle:** A box containing the number 30, its prime factors 2, 3, 5, and a list of divisors: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Symbols  $\Delta$ ,  $\square$ , and  $\square$  are used to represent the divisors.
- Bottom Right:** A box containing the number 80, its prime factors 2, 2, 2, 2, 5, and a list of divisors: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80. Symbols  $\Delta$  and  $\Delta$  are used to represent the divisors.

Extrato 13: retirado da escrita da aluna NAT

O aluno JOA, em sua escrita mostrada no extrato 14, montou um esquema colocando os números de uma maneira circular para expor os divisores, onde escreveu divisores primos, compostos e até o número um, que quase não tinha sido lembrado até aquele momento. Ao escrever os divisores do número 84 ele citou os números dois, três, sete e 84 montando um esquema na forma circular e depois escreveu os números quatro e seis no entorno. Neste caso percebeu-se que o aluno deixou de citar além do número um, os divisores 12, 14, 21, 28 e 42. Seus esquemas não analisaram os divisores construídos passo a passo, formados através da multiplicação dos divisores primos que levam à construção de todos os divisores de um número.



Pode-se notar que seus esquemas não mostraram os divisores primos repetidos, como no caso do número 84, 80 e outros, mas é de fato uma boa maneira de listar os divisores de um número. Para melhorar estes esquemas, basta que o aluno cite todos os divisores primos destacado sobre uma circunferência imaginária, e depois combine estes dois a dois, três a três e assim por diante até combinar todos os fatores primos, chegando a todos os divisores desse número.



Extrato 14: retirado da escrita do aluno JOA

Podem-se perceber através das observações feitas durante o terceiro momento que os alunos deram retorno de maneira diferenciada em relação ao estudo dos divisores, alguns apenas citaram os divisores que viram nas figuras que representam os números estudados (divisores primos) e outros construíram alguns divisores a mais multiplicando os divisores primos. Muitos deles esqueceram que o número um pode dividir qualquer número em questão; acredita-se que isso ocorreu porque em poucos momentos ele foi lembrado e inclusive não têm um símbolo que o representasse. É importante lembrar que a aluna NAT conseguiu destacar quase todos os divisores dos números estudados. Através desta análise pode-se dizer que o objetivo foi parcialmente alcançado, que era de estudar e citar os divisores de algum número. Isso fica visível quando os alunos mostraram que todos os números estudados têm como divisores os valores dos símbolos que estão escritos em cada carta (divisores primos).

### 5.1.4 O CONCEITO DE NÚMERO PRIMO

No quarto momento foi trabalhado o conceito de número primo. Como neste instante os alunos já tinham trabalhado com conceitos de múltiplos e divisores, acreditava-se que teriam capacidade de compreender a diferença entre um número primo e um número composto. Para

a construção deste conceito, foram exploradas questões do tipo: “como reconhecer se um número é primo”, “por que algumas cartas possuem somente um símbolo”?

Após discussões, os alunos chegaram à conclusão de que todos os números que tivessem um único símbolo seriam representantes de um número primo, isso está correto, visto que um número primo é aquele que pode ser dividido somente por um e por ele mesmo. A partir daí os alunos foram convidados a encontrar todos os números primos do “*segredo dos números*” e escrevê-los em suas anotações.

Nesse momento começaram a surgir questões do tipo:

Porque o número dois tem um triângulo azul que o representa?

Porque o número três tem um quadrado vermelho?

Porque o número cinco tem um círculo preto?

Porque o número sete tem um coração roxo?

Porque alguns números como o número quatro e o número seis não tem um único símbolo para representá-los?

Então se chegou o momento em que o professor mostrou como foi formado o “*segredo dos números*”.

Para representar o número dois foi atribuído o símbolo do triângulo azul, depois se criou o número três e foi atribuído o quadrado vermelho para representá-lo. A construção foi feita utilizando apenas a multiplicação de valores representados por símbolos já conhecidos, até esse momento já se conhecia as cartas que representavam os números dois e três. Como  $2 \times 2 = 4$ , não foi necessário criar um novo símbolo para o número quatro, que foi representado por dois triângulos azuis. Já para representar o número cinco foi criado um novo símbolo, o círculo preto. Como  $2 \times 3 = 6$ , a carta que representa o número seis foi formada com um triângulo azul e um quadrado vermelho. Como o número sete não pode ser construído através da multiplicação dos números dois, três e cinco, então foi inventado o coração roxo para representar o número sete. Sabe-se que  $2 \times 2 \times 2 = 8$ , então a carta que representa o número oito contém três triângulos azuis. Seguindo este raciocínio foi possível construir todas as cartas, até a carta que representa o número 100.

Depois dos alunos reconhecerem um número primo, partiu-se para a questão de como saber se um número qualquer é primo ou não. Então os alunos deveriam citar números maiores que 100 para serem testados se seriam números primos ou compostos. Aí eles disseram alguns números de maneira aleatória e a partir desse momento o professor/pesquisador mostrou aos alunos que é suficiente testar todos os divisores primos que tenham valor menor que a raiz quadrada do número em questão. Quando questionados

quanto ao número 101 ser primo ou não, foi discutido ser suficiente testar se o mesmo poderia ser divisível por dois, três, cinco ou sete, para descobrir se ele era primo (divisão exata, com resto igual a zero). Então foram feitos os cálculos e descobriu-se que o número 101 é um número primo, porque nas quatro divisões que foram testadas (por dois, por três, por cinco e por sete), obteve-se resto diferente de zero. Os alunos participaram da aula respondendo várias questões e apontando divisores dos números que os colegas citavam como exemplos.

O professor/pesquisador através de discussões com os alunos chegou à conclusão que o único número primo e par é o número dois, visto que todos os outros pares serão sempre múltiplos de dois. E também todos os números terminados com o algarismo cinco serão múltiplos de cinco e então não poderão ser primos.

Depois de estudado como deve ser um número primo, os alunos foram convidados a testar se os números 107, 115, 123, 139 e 143 teriam um novo símbolo ou não e explicar suas respostas. Ou seja, os alunos deveriam descobrir se os números citados são primos ou compostos.

Os números			
107, 115, 123, 139, 143. exemplos			
$\begin{array}{r} 107 \overline{) 115} \\ \underline{10} \phantom{5} \\ 07 \phantom{5} \\ \underline{06} \\ 01 \end{array}$	$\begin{array}{r} 115 \overline{) 12} \\ \underline{10} \phantom{5} \\ 05 \phantom{7} \\ \underline{04} \\ 01 \end{array}$	$\begin{array}{r} 115 \overline{) 13} \\ \underline{9} \phantom{3} \\ 38 \phantom{8} \\ \underline{35} \\ 03 \end{array}$	$\begin{array}{r} 115 \overline{) 15} \\ \underline{10} \phantom{5} \\ 05 \phantom{7} \\ \underline{05} \\ 00 \end{array}$
O 115 não é número primo			

Extrato 15: retirado da escrita do aluno HEN

O aluno HEN disse que o número 115 não seria um número primo porque ele dividiu por cinco e obteve o resultado 23 com resto zero, ver extrato 15. Também se pode perceber que o aluno HEN não fez a divisão do número 115 por sete porque não se faz necessário, já que ele sabia que o número não era primo.

Os números 107, 115, 123, 139 e 143 são primos ou não. Explique? O 139 é número primo

$\begin{array}{r} 139 \overline{) 1269} \\ \underline{12} \phantom{69} \\ 019 \\ \underline{18} \\ 01 \end{array}$	$\begin{array}{r} 139 \overline{) 46} \\ \underline{12} \\ 019 \\ \underline{78} \\ 01 \end{array}$	$\begin{array}{r} 139 \overline{) 27} \\ \underline{10} \\ 039 \\ \underline{35} \\ 04 \end{array}$	$\begin{array}{r} 139 \overline{) 7} \\ \underline{7} \\ 069 \end{array}$
--	---	---	---

Extrato 16: retirado da escrita da aluna NAT

A aluna NAT, extrato 16, disse que o número 139 seria um novo número primo; a aluna mostrou com cálculos, que podem ser visto no extrato 16, que o número 139 não seria divisível por dois, nem por três, nem por cinco e nem por sete. Para sua resposta ficar completa ela precisaria ter testado se o número 139 poderia ser divisível por 11, mas mesmo assim ela teve um raciocínio interessante. Acredita-se que a aluna NAT testou só até o divisor primo sete porque no exemplo discutido sobre a condição do número 101 ser primo ou não, não era necessário testar a condição de divisibilidade por 11.

$\begin{array}{r} 107 \overline{) 2} \\ \underline{10} \\ 007 \\ \underline{6} \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 107 \overline{) 3} \\ \underline{9} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 02 \end{array}$	$\begin{array}{r} 107 \overline{) 5} \\ \underline{10} \\ 007 \\ \underline{5} \\ 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 107 \overline{) 7} \\ \underline{7} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 02 \end{array}$	$\begin{array}{r} 107 \overline{) 11} \\ \underline{99} \\ 08 \end{array}$	$\begin{array}{r} 107 \overline{) 13} \\ \underline{104} \\ 003 \end{array}$
					é primo
					$\begin{array}{r} 2 \\ 13 \end{array}$
					$\begin{array}{r} 2 \\ 13 \end{array}$
					$\begin{array}{r} 11 \\ 11 \end{array}$
					$\begin{array}{r} \times 8 \\ \times 9 \\ \times 9 \end{array}$
					$\begin{array}{r} 104 \\ 117 \\ 99 \end{array}$

Extrato 17: retirado da escrita do aluno JOA

O aluno JOA testou se o número 107 seria divisível pelos números dois, três, cinco, sete, 11 e 13 e disse que o número seria primo porque em todas as contas sempre teve resto diferente de zero, como se pode notar no extrato 17. A aluna LAU disse que 123 não é primo porque pode ser dividido por três e dá resto zero.

Ao final deste quarto momento pode-se dizer que os alunos conseguiram citar os números primos até o número 100 utilizando o “segredo dos números”, usando a idéia de que todas as cartas que contenham um único símbolo serão representantes de um número primo. Quando foi feito o pedido para os alunos estudarem os números 107, 115, 123, 139 e 143,

mostrando quais deles seriam representantes de novos números primos ou não, foi necessário que o professor/pesquisador ajudasse os alunos nas divisões para que eles chegassem a alguma conclusão. É possível que alguns deles tenham pensado que toda carta que conter um único símbolo representará um número primo.

Apesar de encontrar alguma dificuldade com o desenvolvimento deste conceito, após as dicas do professor/pesquisador, os alunos conseguiram reconhecer que um número será primo, quando tiver uma única figura que o represente, e isso os levou a conclusão que os divisores só podem ser o número um e o número em questão. Pode-se dizer que todos eles tiveram uma evolução significativa a respeito do reconhecimento dos números primos. A explicação para essa conclusão será apresentada nas considerações finais.

### **5.1.5 OS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE**

No quinto momento, foram estudados os critérios de divisibilidade com o auxílio das cartas do “*segredo dos números*”, onde se procurou respostas a perguntas do tipo: como podemos saber se um número é divisível por dois?

No começo, foram observados alguns divisores dos números destacados para a aula e os alunos ajudaram a citar os divisores. Quando utilizada a carta que representa o número 72, os alunos disseram que os números dois, três, quatro e oito, dividiriam o número 72, e também foram certos ao dizer que o número cinco não dividiria 72 porque não tem “bolinha preta” na carta. Também disseram que o número sete não dividiria porque não tem coração na carta. Quando perguntados sobre os possíveis divisores do número 40? Os alunos logo disseram que o número dois e o cinco são divisores do número 40, e os outros que são encontrados através da multiplicação dos fatores primos, são o número quatro, o número 10, o número 20 e o número oito, e ainda o número um e o número 40. Para estudar e esclarecer este conceito foram analisadas as cartas da figura 34.





Figura 34: foto de cartas do “segredo dos números”

Nessa exploração, desse conjunto de cartas, os alunos foram questionados sobre a possibilidade de o número 42 ser divisível por dois. A resposta foi sim, porque sua carta contém um triângulo. Segundo os alunos, estas conclusões são todas visuais, basta olhar para a carta referente ao número e pode-se dizer se este número é divisível ou não por tal número. Então disseram que o número 42 é divisível por dois, por três e por sete.

Também se pode relacionar os símbolos e descobrir outros critérios, como por exemplo, pode-se afirmar que o número 42 é divisível por seis já que  $2 \times 3 = 6$  e porque é possível encontrar na carta do número 42 o triângulo e o quadrado. Desta última observação pode-se concluir que toda carta que conter os símbolos do triângulo azul e o quadrado vermelho representará algum número que é divisível por seis. Ver extrato 10 sobre o aluno HEN.

O número 27 pode ser dividido por três e por nove, por três porque possui um quadrado vermelho e por nove porque possui dois quadrados vermelhos. Daqui pode-se concluir que toda carta que tiver dois quadrados vermelhos será divisível por nove. Conjectura do pesquisador.

Após estas discussões, os alunos deveriam responder quais seriam os números que poderiam dividir 70 e 84, que podem ser vistos na figura 34. Além disso, eles deveriam escolher mais três cartas de números maiores que 40 e analisá-las quanto à sua divisibilidade.

Através da observação do extrato 18, pode-se notar que a aluna NAT destacou vários divisores para as cartas estudadas, no caso da carta referente ao número 70 ela disse que o número pode ser dividido pelos números primos (2, 5 e 7) e pelos números compostos (10, 14 e 35). O problema é que aluna não citou em nenhum momento o número um como divisor e nem o próprio número.

Na carta do número 84, ela citou alguns divisores, esquecendo-se de citar os divisores primos (2, 3 e 7), os divisores não primos (21 e 42), o número um e o próprio número 84. Esta informação mostra que a aluna encontrou os possíveis divisores de cada número de maneira

aleatória, porque se ela tivesse utilizado algum esquema, provavelmente não teria esquecido os divisores primos desta situação.

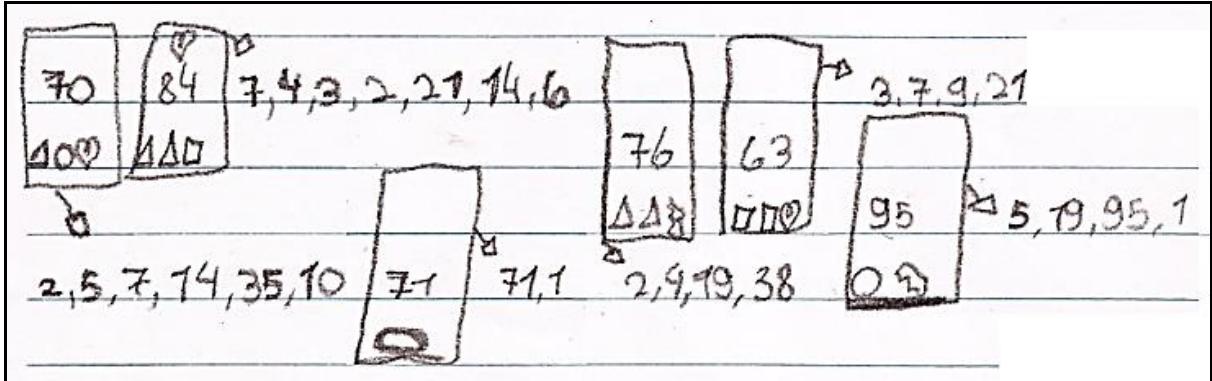
A aluna mostrou que ao, juntarmos dois triângulos azuis, dois quadrados vermelhos e um círculo preto, formaríamos o número 180. Ela também citou alguns divisores, entre eles, os divisores primos (2, 3 e 5), os divisores formados através da multiplicação dos divisores primos dois a dois (6, 10 e 15, esquecendo-se dos divisores 4 e 9), os divisores formados através da multiplicação dos divisores primos três a três (12, 20 e 30, esquecendo-se dos divisores 18 e 45), não citou nenhum divisor formado através da multiplicação dos divisores primos quatro a quatro (36, 60 e 90), e ainda não citou os divisores 1 e 180. Com estas observações, pode-se perceber que a aluna teve dificuldades em enumerar os divisores, na medida em que necessitava combinar um número maior de símbolos para obter novos divisores. Por outro lado, através da observação das construções referentes a esta questão, pode-se notar que esta aluna foi quem mais destacou divisores deste número, mostrando-se estar um passo à frente dos colegas na construção dos divisores de um número.

The image shows handwritten student work on lined paper. It consists of several boxes and lists of numbers and symbols. The top row contains three boxes: the first with '70' and symbols  $\Delta$ ,  $\square$ ,  $\heartsuit$ ; the second with '84' and symbols  $\Delta$ ,  $\Delta$ ,  $\square$ ; the third with '76' and symbols  $\Delta$ ,  $\heartsuit$ . To the right of these boxes are lists of numbers: 2, 5, 7, 10, 14, 35; 4, 14, 6, 12, 28; 38, 4, 2, 19, 76. Below this is a box with '63' and symbols  $\square$ ,  $\square$ ,  $\heartsuit$ , with a list of numbers 3, 21, 7, 42, 28. To the right of this is a box with '180' and symbols  $\Delta$ ,  $\Delta$ ,  $\square$ , with a list of numbers 2-20, 3-15, 5-30, 6, 12, 10. Above the '180' box is the handwritten question '(Que número seria este?)'. The caption below the image reads 'Extrato 18: retirado da escrita da aluna NAT'.

Extrato 18: retirado da escrita da aluna NAT

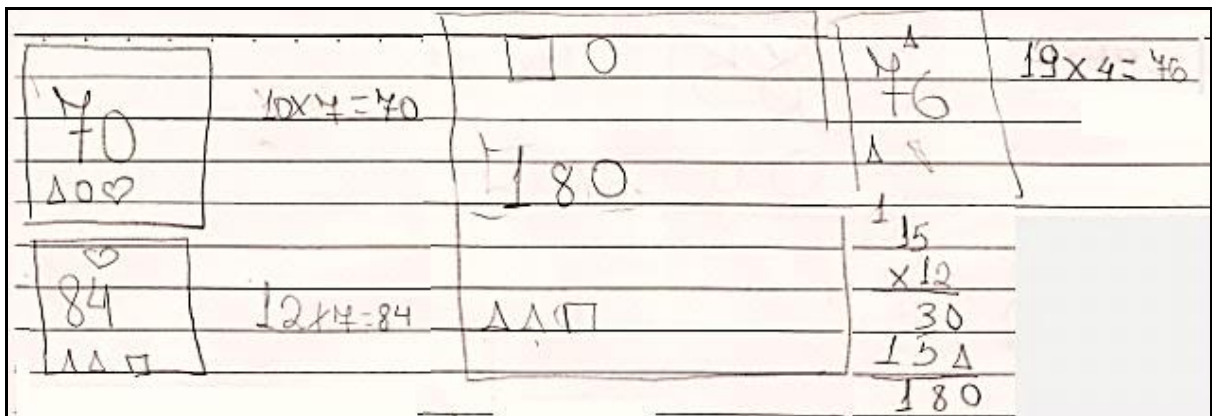
Observando o extrato 19, notou-se que o aluno JOA escreveu que o número 76 pode ser dividido pelos números dois, quatro, 19 e 38 e o número 63 pode ser dividido por três, sete, nove e 21 esquecendo-se dos divisores um e o próprio número. Quando analisou a carta referente ao número 71 (número primo, porque tem apenas uma figura), citou como divisores os números um e 71. Quando analisou a carta do número 95 (número composto formado por duas figuras diferentes), citou os quatro divisores (1, 5, 19 e 95). Com as observações feitas na escrita deste aluno pode-se levantar a ideia de que os alunos enfrentam dificuldades em encontrar divisores criados através da combinação de um número maior de divisores primos,

visto que nos números contendo menor quantidade de divisores primos ele citou todos os divisores. Quando aumentou o número de fatores do número representado, o aluno não conseguiu citar todos os divisores, deixando de mencionar os divisores formados pelo produto de mais fatores primos.



Extrato 19: retirado da escrita do aluno JOA

A aluna LAU, destacada no extrato 20, escreveu  $(4 \times 19 = 76)$  e  $(7 \times 9 = 63)$  e o número formado é  $15 \times 12 = 180$ . Podemos notar que esta aluna trabalhou com os divisores de maneira sucinta, sem citar muitos deles. Ela apenas formou dois números que ao serem multiplicados venham a formar o número em questão, como na carta do número 180 que ela mostra que  $15 \times 12 = 180$ . Ela juntou o quadrado e o círculo, formando assim o número 15 que está representado logo acima do número 180 na carta, depois disso juntou os dois triângulos com o quadrado e formou o número 12 que está logo abaixo do número 180 em sua carta. Podemos perceber que a aluna LAU procedeu quase sempre desta maneira, juntando alguns símbolos e formando dois divisores que viriam a formar o valor referente da carta em questão.



Extrato 20: retirado da escrita da aluna LAU

Através das análises deste quinto momento, pode-se perceber que foi atingida uma grande parte dos objetivos (estudar e criar critérios de divisibilidade através do estudo dos símbolos). No início os alunos já sabiam responder que o número dois dividiria o número 84,



e que o número cinco não poderia dividir o número 84. Não poderia porque a figura que representa o número cinco não faz parte da carta (ver cartas na figura 34), onde o número dois divide o número 84 porque a carta que o representa tem um triângulo azul. Também podemos observar que o número cinco não dividiria o número 42 porque a carta que representa este número não contém o círculo preto.

Ao longo do trabalho percebeu-se que alguns alunos aprofundaram a ideia dos critérios e outros tomaram apenas os divisores visíveis ao olhar para a carta (divisores primos). A maioria não formou critérios de divisibilidade para números criados através da combinação de dois ou mais fatores primos, mas acredita-se que saibam que um número pode ser dividido por dois, quando tiver triângulo azul e por três quando tiver quadrado vermelho, e ainda por outros números, quando tiver suas respectivas figuras.

### 5.1.6 A QUANTIDADE DE DIVISORES DE UM NÚMERO

No sexto momento os alunos tiveram a oportunidade de descobrir qual deveria ser a quantidade de divisores de um número. Este trabalho foi feito com base na quantidade de símbolos que cada carta possui, ou seja, ao analisar uma carta com três símbolos diferentes poderia saber quantos divisores esta carta teria e dali em diante toda carta com estas características possuiria sempre a mesma quantidade de divisores.

No início deste encontro perguntou-se aos alunos quais seriam os divisores do número sete e eles responderam que seriam o número um e o número sete, sendo assim dois divisores. Aí foi sugerido aos alunos que procurassem algum número que tivesse só um símbolo, logo o aluno HEN mostrou a carta do número 23 que tem só um símbolo e disse que seus divisores seriam o número um e o número 23, sendo assim dois divisores. Então, o professor e os alunos fizeram cálculos tentando encontrar divisores do número 23 e de outros números que eram representados por uma única figura e não encontraram outro divisor além dos números um e ele mesmo. Esse resultado levou a conclusão que toda carta que tivesse uma única figura teria sempre dois divisores.

Também foram discutidas e analisadas cartas com dois símbolos diferentes e constatou-se que todas as cartas estudadas teriam sempre quatro divisores. Assim generalizou-se uma propriedade quanto à quantidade de divisores de um número. Toda carta que contiver dois divisores primos diferentes e sem repetição, como na figura 35, terá sempre quatro divisores. Isso ocorre porque o número terá dois fatores primos que o compõe de maneira que os

divisores serão o número um, os dois fatores primos e o produto destes que gera o próprio número.



Figura 35: fotos de cartas do “segredo dos números”

A ideia desta atividade possibilitou aos alunos descobrirem a quantidade de divisores de acordo com a quantidade de símbolos em cada carta através da prática, já que eles já trabalharam com a divisão, onde se podem descobrir os divisores de um número.

Os alunos poderiam descobrir quantos divisores teria em uma carta com dois símbolos iguais? Quantos divisores teriam uma carta com três símbolos diferentes? Quantos divisores teriam uma carta com três símbolos, sendo dois iguais?

A aluna LAU respondeu que quando temos duas figuras iguais diminui um divisor. Isso ocorre porque a figura repetida representa o mesmo número, assim aparece duas vezes o mesmo número representado, por esta razão existe um divisor a menos. Este “a menos” está ligado à ideia que anteriormente foi vista, quantos divisores teriam um número com duas figuras diferentes. Ela também escreveu que o menor número que existe com quatro símbolos diferentes seria o número 210 que, segundo ela, teria um triângulo, um quadrado, uma bolinha preta e um coração, então ela fez  $35 \times 6 = 210$ , como se pode perceber no extrato 21.

Para que até o momento sem, teremos uma cartinha que contenha 4 figuras diferentes? mão

210	<sup>3</sup> 35
	X6
Δ □ ○ ♥	210

Esse é o menor número com 4 divisores com números primos diferentes.

Extrato 21: retirado da escrita da aluna LAU

O aluno JOA (extrato 22) mostrou com análises feitas em algumas cartas que todo número que tivesse duas figuras iguais teria três divisores. Também concluiu, como se pode notar através da análise do extrato 22, que cada número que tivesse três símbolos diferentes teria oito divisores. Nesta análise o aluno escreveu o número 27 como sendo divisor do número 78, mas sabe-se que o divisor correto é o número 26 que pode ser calculado através da multiplicação dos valores representados em cada símbolo (triângulo azul que representa o número dois e um sinal de “mais” verde que representa o número 13). O aluno também estudou o comportamento das cartas com dois símbolos iguais (dois números primos iguais) e outro diferente; percebe-se nos três casos estudados pelo aluno, que ele sempre obteve seis divisores em cada um deles, mas não escreveu seus resultados enunciando a propriedade.

Handwritten notes by student JOA:

1. Todos os números que tem um símbolo tem 2 divisores  
 22 | 31 | 91 | 46 |  
 1, 2, 11, 22 | 1, 2, 13, 31 | 1, 7, 13, 91 | 1, 2, 23, 46

2. Todos os números que tem 2 símbolos tem 4 divisores  
 12 | 22 | 21 | 13 | 31 | 17 | 13 | 91 | 12 | 23 | 46

3. Cada número que tem 2 figuras iguais tem 3 divisores  
 25 | 4 | 9 | 49 |  
 1, 5, 25 | 1, 2 | 1, 3, 9 | 1, 7, 49

4. Cada número que tem 3 símbolos tem 8 divisores  
 78 | 70 | 30 |  
 1, 2, 3, 13, 78, 6, 27, 39 | 1, 2, 5, 7, 70, 14, 35, 70 | 1, 2, 3, 5, 30, 10, 15, 6

5. Cada número que tem 3 símbolos tem 8 divisores  
 12 | 28 | 98 |  
 1, 2, 3, 12, 6 | 1, 2, 4, 14, 7, 28 | 1, 2, 7, 14, 49, 98

Extrato 22: retirado da escrita do aluno JOA

No extrato 22 pode-se perceber que o aluno JOA enunciou teoremas em ação, onde todos são verdadeiros e funcionam como propriedades dos divisores de algum número quanto à quantidade de divisores.

“Todos os números que tem dois símbolos tem quatro divisores”. Este teorema é verdadeiro desde que se acrescente depois de símbolos, a palavra “diferentes”.

“Cada número que tem duas figuras iguais tem três divisores”. Este é um teorema completo e verdadeiro, não necessita de nenhum ajuste.

“Cada número que tem três símbolos tem oito divisores”. Este também é um teorema que necessita do acréscimo da palavra “diferentes” depois de símbolos para ficar completo e verdadeiro.

No caso dos divisores dos números 12, 28 e 98, o aluno escreveu os divisores de cada um, mas não escreveu nada sobre a quantidade de divisores.

O aluno YUR (extrato 23) não descobriu todos os divisores dos números 70 e 78, talvez porque este aluno tenha faltado em s momentos anteriores, mas o que chamou a atenção foi o fato do aluno ter criado o número 3059 que, segundo ele, seria representado por um coração (signo que representa o número sete), um raio (signo que representa o número dezenove) e uma estrela (signo que representa o número 23), dizendo que seus divisores seriam os números 3059, 24, 19 e 7. Sabe-se que os símbolos citados pelo aluno realmente representam o número 3059, visto que  $7 \times 19 \times 23 = 3059$ , mas não temo número 24 como divisor do número em questão. O aluno pode ter confundido o valor referente ao signo “estrela”, porque ele também criou a carta que deveria representar o número 529 e escreveu que entre os divisores deste número está o número 24.

40	70	Todos os números são o 40 e	529	529	Todos os números são o 529
40	7	o 4 e o 5 e o 2 e o 1	24	24	o 24 e o 24 e o 1
1	78	Todos os números são o 2 e o 78	3059	3059	Todos os números são o 3059
78	13	e o 13 e o 3 e o 2 e o 1	24	24	e o 24 e o 4 e o 4
12	?		4	4	

Extrato 23: retirado da escrita do aluno YUR

Pode-se constatar que os alunos conseguiram entender a relação entre quantidade de símbolos e a quantidade de divisores. Isso nos casos que as cartas tinham um único símbolo, dois símbolos diferentes ou dois símbolos iguais. Alguns até exploraram casos com mais símbolos, mas estes casos precisaram de ajuda para chegar a alguma construção. Notou-se que nesta aula o interesse dos alunos foi menor que nos outros dias, mas mesmo assim foi gratificante e pode-se ver que ao passar da aula alguns alunos participavam e respondiam várias perguntas intermediárias que viriam a ajudar na construção dos conceitos sobre a quantidade de divisores de cada número de acordo com a quantidade de símbolos que o representam.

### 5.1.7 A POSSIBILIDADE DE DESCOBRIR SE FORAM ENUMERADOS TODOS OS DIVISORES DE UM NÚMERO

No sétimo momento, os alunos tiveram a oportunidade de estudar como descobrir se foram enumerados todos os divisores de um número. Para ajudar a esclarecer como funciona esta relação de um número com seus divisores foi feito o estudo conforme se pode observar na figura 36.

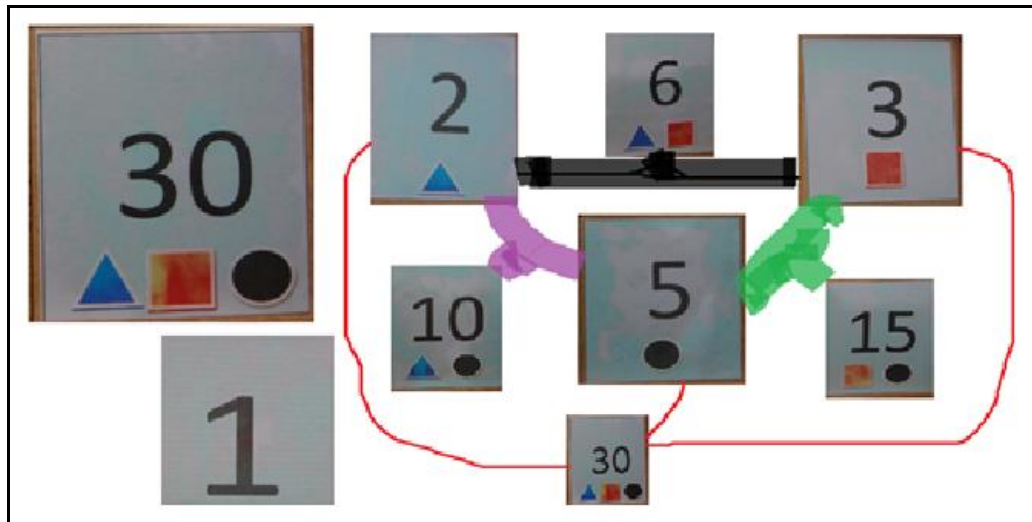


Figura 36: foto de cartas do “segredo dos números” e suas relações

A partir da carta do número trinta, os alunos foram questionados sobre quais seriam os divisores deste número. Ao analisar a figura 36, foi possível perceber que o número trinta têm três tipos de divisores que foram estudados logo a seguir. Também teria o divisor um, que não se enquadraria em nenhum dos tipos de divisores citados anteriormente, já que o número um é o divisor universal no conjunto dos números naturais.

O primeiro tipo de divisor seria aquele em que aparece apenas um símbolo em cada carta, logo neste grupo podem-se citar os números dois, três e cinco, que são os divisores primos do número 30.

O segundo tipo tem dois símbolos em cada carta, então aqui neste caso citam-se os números seis, 10 e 15, que foram chamados de divisores com dois símbolos. Números estes que são os números compostos e tem em sua composição, um ou dois números primos.

O terceiro tipo tem três símbolos em cada carta. No caso estudado, existe o próprio número 30, que também seria um número composto e teria em sua composição, um, dois ou três números primos. Como este número só tem três símbolos, não existe mais nenhum divisor possível para ele.

Após este estudo foi pedido aos alunos que explicassem como deveriam ser formados os divisores dos números 66, 52, oito e 90. Eles também deveriam garantir que não existiria mais nenhum divisor em cada caso estudado.

A figura 37 representa um esquema elaborado pelo aluno JOA, conforme é possível perceber no extrato 24. Neste esquema, o aluno colocou os três divisores primos (2, 3 e 11), e entre eles colocou os divisores ( $6=2 \times 3$ ,  $33=3 \times 11$  e  $22=2 \times 11$ ), no centro ele citou o próprio número 66, e no lado de fora do esquema ele citou o número um.



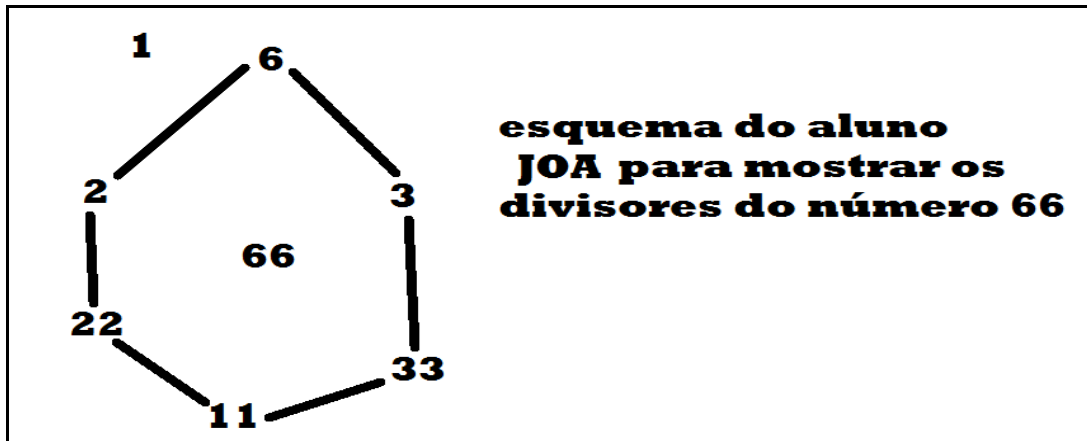
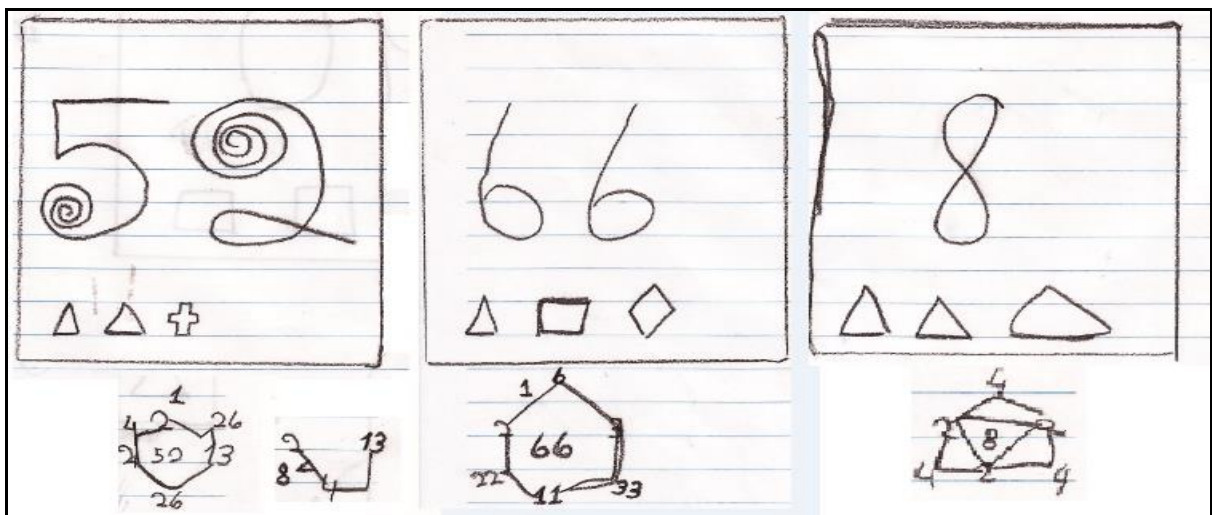


Figura 37: reprodução do esquema feito pelo aluno JOA

Observa-se que o aluno JOA enumerou todos os divisores do número 66, seu esquema ficou bem elaborado, mostrando que os números seis, 22 e 33 são originados através da combinação dos números primos que a eles estão diretamente ligados. Já o número 1 é divisor universal e não altera o valor dos outros divisores. Mas em relação ao número 66 não se sabe se o aluno colocou-o no centro do esquema porque ele seria a junção de todos os divisores primos, ou simplesmente fez esta escolha pelo fato deste número ser o estudado.

O esquema utilizado pelo aluno, conforme pode ser observado no extrato 24 sugere que o mesmo colocou o número oito no centro do esquema, porque este foi formado pela combinação dos três divisores primos, note que o aluno juntou os três divisores primos de valor dois e colocou o valor oito no centro daquele triângulo formado. Também foi possível perceber que o aluno escreveu todos os divisores que podem ser formados ao multiplicar seus divisores primos dois a dois, inclusive escrevendo os repetidos. Assim, pode-se supor que o aluno escreveu os números a serem divididos no centro dos esquemas porque entendeu que os mesmos seriam formados ao multiplicar os divisores primos desse mesmo número.



Extrato 24: retirado da escrita do aluno JOA

Ao analisar a figura 38, que é a representação de um dos esquemas retirado do extrato 25, da escrita do aluno GIL, pode-se notar que seu esquema é similar ao do aluno JOA. A diferença é que o aluno GIL não citou os divisores um e nem o próprio número. O esquema da figura 38 retrata os divisores do número 52 (2, 2 e 13), por isso tem em sua representação a presença de dois números dois, onde os dois números 2 formam o número 4 e a combinação entre o número 2 e o número 13 forma o número 26.

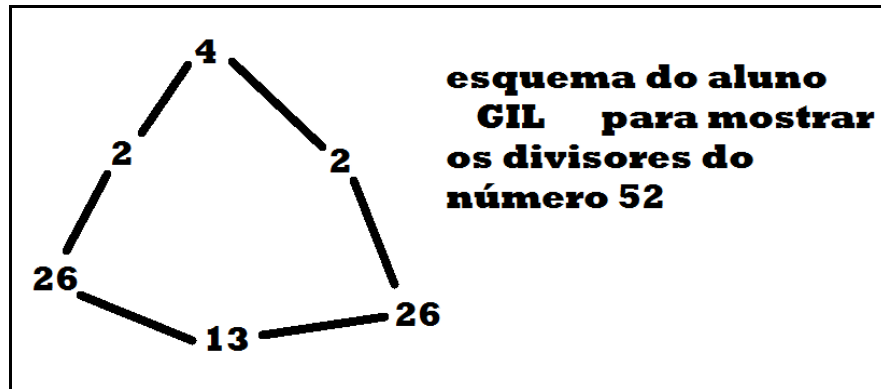
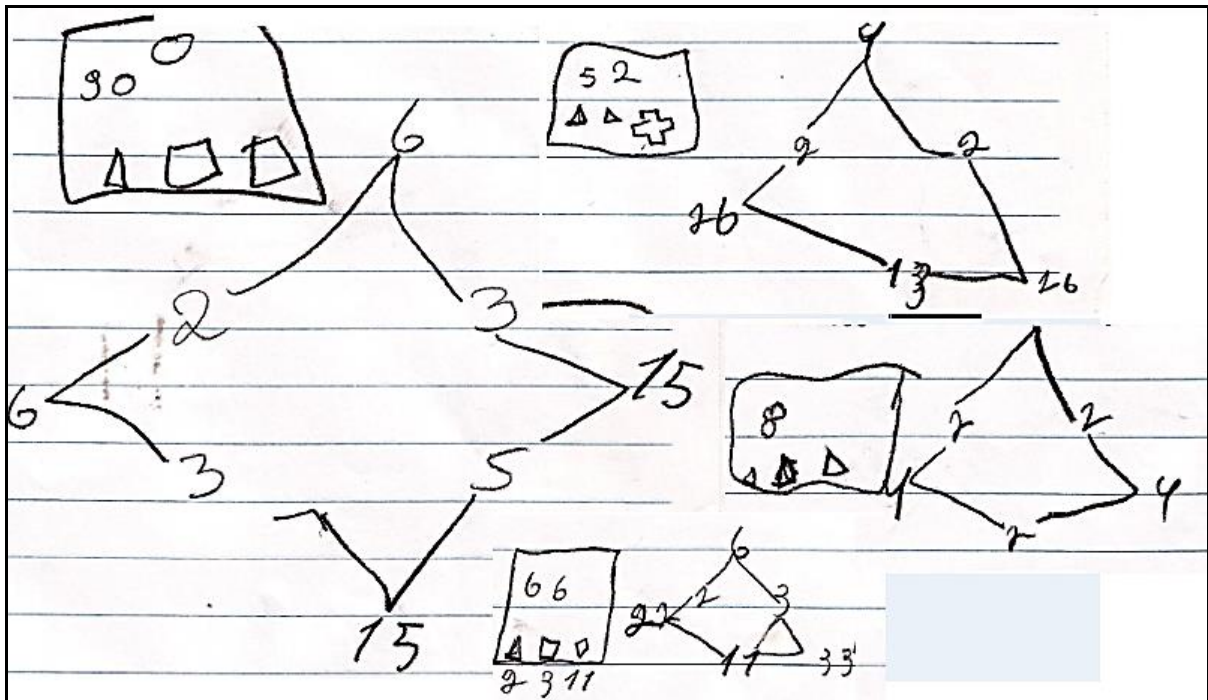


Figura 38: reprodução do esquema feito pelo aluno GIL

No extrato 25 pode-se perceber que o aluno GIL montou um esquema para mostrar os divisores do número 90. Mas é fácil perceber que ele citou apenas os divisores primos ( 2, 3 e 5) e dois divisores originados da multiplicação dois a dois ( 6 e 15), esquecendo-se dos divisores (  $9=3 \times 3$  e  $10=2 \times 5$ ) e ainda não citou nenhum dos divisores originados da multiplicação três a três (  $18=2 \times 3 \times 3$ ,  $30=2 \times 3 \times 5$  e  $45=3 \times 3 \times 5$ ). Ele pode ter construído seu esquema com o pensamento de que os divisores seriam formados através da multiplicação de dois primos vizinhos no esquema e assim formar outro divisor (ver esquema para a divisão do número noventa no extrato 25). É possível que os números com mais de três divisores primos necessitem de maior abstração na hora de encontrar seus divisores. Desta maneira é possível supor que, na medida em que são buscados divisores com mais de dois números primos combinados, a dificuldade dos alunos encontrarem estes números torna-se maior porque seus esquemas ficarão mais complexos.



Extrato 25: retirado da escrita do aluno GIL

Esta interpretação feita pelo aluno GIL, ocorreu de tal maneira que o mesmo utilizou como regra que alguns divisores são formados por dois divisores primos que fiquem vizinhos na montagem do esquema. Esta regra pode ser considerada um teorema em ação, que é verdadeiro para números com até três fatores primos, e falso para casos de números com mais de três fatores primos.

Na figura 39 pode-se perceber como o esquema dos divisores do número 90 é mais complexo de ser montado de que o esquema dos divisores do número 30.

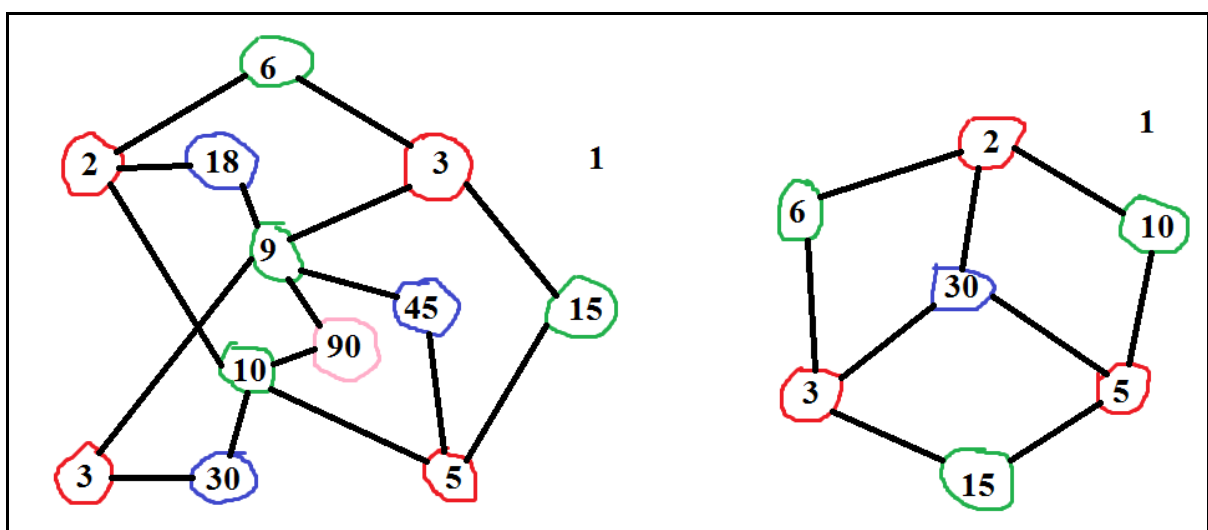


Figura 39: esquema que representa os divisores dos números 90 e 30.

Na figura 39 pode-se perceber que os divisores primos do número 90 estão circulos de vermelho (2, 3 e 5), os divisores encontrados através da multiplicação dois a dois estão



circulados de verde (6, 9, 10 e 15), os divisores que são formados através da multiplicação de seus fatores primos três a três estão circulados de azul (18, 30 e 45). Neste caso, estes três números foram obtidos através da combinação dos divisores circulados de verde (compostos dois a dois) com outro divisor circulado de vermelho (divisor primo) que não foi utilizado na construção dos divisores verdes em questão. O último a ser obtido é o próprio número 90, divisor que é obtido através da multiplicação dos quatro fatores primos e está circulado de rosa. No esquema, o número 90 foi obtido através da multiplicação do número nove pelo número dez. Porque isso é válido? Porque o número  $9=3 \times 3$ , e o número  $10=2 \times 5$ , sendo que os números dois, três repetido duas vezes e o cinco são os quatro fatores primos do número 90 que estão ligados diretamente na composição deste divisor.

No esquema para os divisores do número 30 pode-se observar uma menor complexidade no momento de encontrar seus valores. Começando pelos primos circulados de vermelho (2, 3 e 5), depois os compostos dois a dois circulados de verde (6, 10 e 15) e os compostos três a três circulados de azul (30). Além de ser visualmente mais simples, o esquema que representa o número trinta, é matematicamente mais fácil por envolver combinações apenas de dois a dois números primos, e quando combinados três a três, chega-se ao número 30 que é o próprio número estudado.

Na figura 40 pode-se notar que o aluno YUR montou um esquema para representar os divisores do número 48 ( $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 48$ ), assim o número tem cinco fatores primos. O aluno não citou os divisores um e 48, citando os divisores primos (2 e 3), os divisores encontrados através da multiplicação dos fatores primos dois a dois (4 e 6), os divisores encontrados através da multiplicação três a três (8 e 12) e não citou os divisores que contenham quatro fatores primos (16 e 24). O aluno mostrou alguma dificuldade em encontrar os divisores através da combinação mais complexa, com mais fatores primos envolvidos, mas foi possível perceber que ele encontrou alguns divisores através da multiplicação de seus fatores primos da forma três a três, que não foi percebida por alguns de seus colegas.

Embora o número quatro não tenha ligação marcada no gráfico mostrando sua origem, é possível supor que o aluno criou o número através da ligação dos dois números dois que estão mais próximos do próprio número. O mesmo acontece com o número oito, que apesar de não ter ligação gráfica com os três números dois, sugere uma combinação entre os três fatores primos. O número 12 apareceu quando o aluno ligou o número três ao número quatro conforme o esquema sugere.

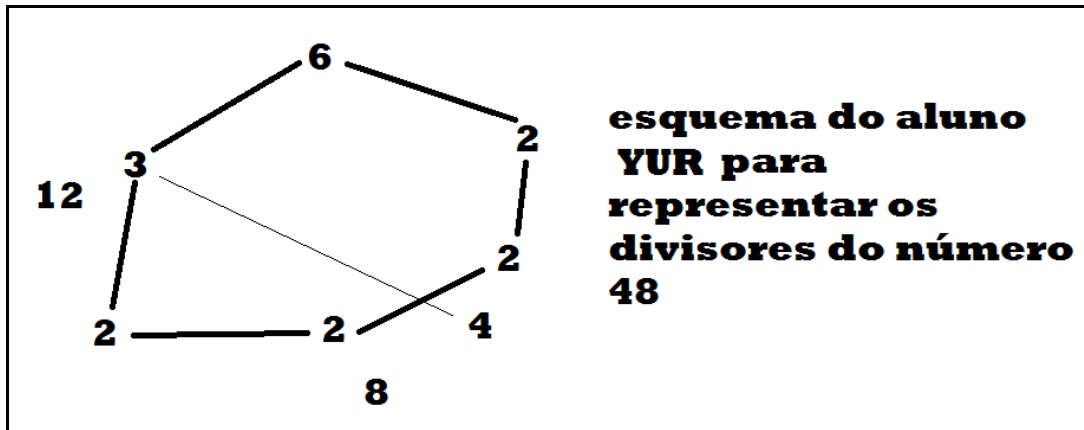


Figura 40: reprodução do esquema feito pelo aluno YUR.

No extrato 26, retirado da escrita do aluno YUR, é possível perceber que o mesmo fez um esquema para representar os divisores do número 90. Seu esquema mostrou alguns divisores do número 90, destacando que a multiplicação dos divisores primos formam os outros divisores que não são primos.

90	90	todos números não 90, 2, 3, 6, 15, 10, 6, 18 9, 18	
2	2		
3	3		
6	6		
1	1		
18, 10, 9, 15			

Extrato 26: retirado da escrita do aluno YUR

O aluno HEN, conforme pode ser percebido na figura 41 montou um esquema para a representação dos divisores do número 90, onde destacou os divisores primos (2, 3, 3 e 5), e através das multiplicações entre esses fatores primos, chegou aos divisores formados pela combinação dois a dois desses fatores ( $15=3 \times 5$ ,  $10=2 \times 5$ ,  $6=2 \times 3$  e  $9=3 \times 3$ ). Pode-se observar que o aluno não citou os divisores formados através da combinação dos números primos três a três ( $18=2 \times 3 \times 3$ ,  $30=2 \times 3 \times 5$  e  $45=3 \times 3 \times 5$ ). Além disso, o aluno colocou em seus esquemas os divisores um e o próprio número (neste caso o número 90) sempre no centro de sua representação.

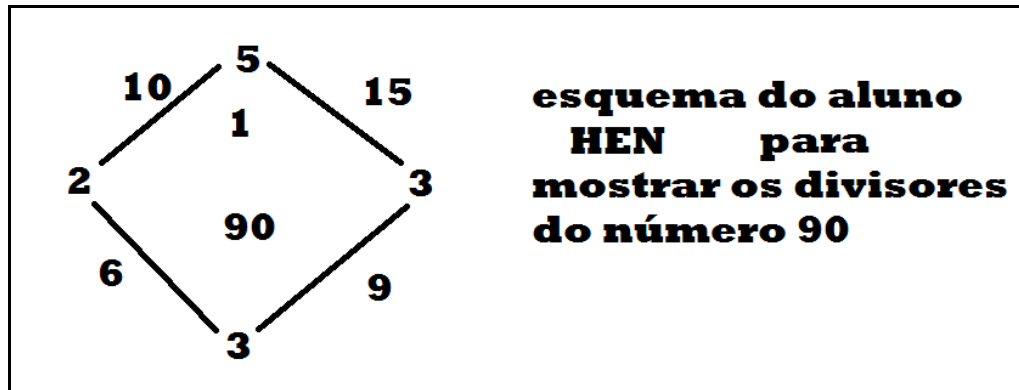


Figura 41: reprodução do esquema feito pelo aluno HEN.

É possível notar que este aluno criou um esquema de maneira bem elaborada em que os números primos aparecem como os principais divisores, e depois deles começam a surgir os outros divisores que dependerão dos primos para sua formação. O aluno não mostrou os divisores mais complexos, provavelmente por não conseguir perceber que poderia ligar três daqueles primos em questão formando outros divisores que ainda não teria destacado.

Ao analisar a figura 42, retirado da escrita da aluna NAT, pode-se perceber que a mesma montou um esquema para mostrar os divisores do número 52 e suas relações. A aluna privilegiou os divisores primos (2 e 13) em um primeiro momento, deixando estes no centro do esquema, e através da combinação destes divisores formou os divisores (4 e 26). Um detalhe importante sobre a construção da aluna NAT, é que ela colocou os números um e 52, meio que de lado do esquema, como se o número 52 não tivesse relação com seus divisores. Sabe-se que o número 52 pode ser obtido como divisor que combina todos os seus fatores primos.

A aluna NAT utilizou o teorema em ação que diz que o número um e o próprio número, neste caso o número 52, sempre serão divisores de qualquer número em questão, por isso ela colocou os números um e 52 separados do esquema em que montou.

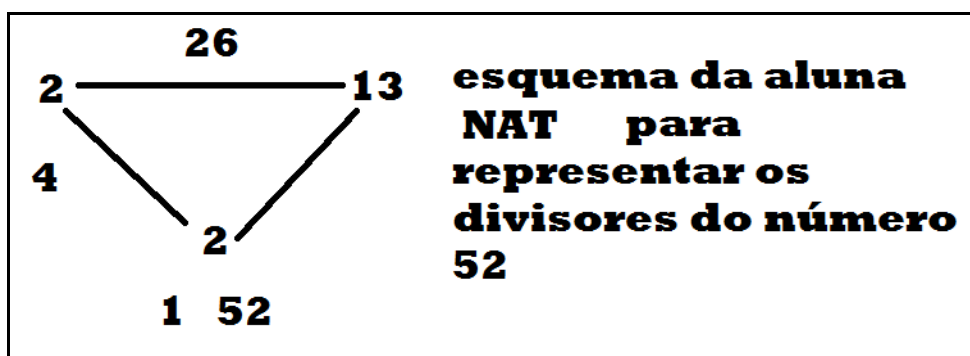


Figura 42: reprodução do esquema feito pela aluna NAT.

No esquema representado pela aluna LAU, que pode ser visto na figura 43, pode-se destacar uma particularidade utilizada pela aluna, ela colocou o número um junto com os

divisores primos do número 66, e também escreveu os outros divisores próximos aos divisores primos deixando dúvida sobre as origens de cada número. Mesmo assim seu esquema ficou muito bom, mostrando todos os divisores do número 66 dando maior importância aos divisores primos. Seria importante questionar a aluna sobre o porquê de o número um estar ali naquele lugar.

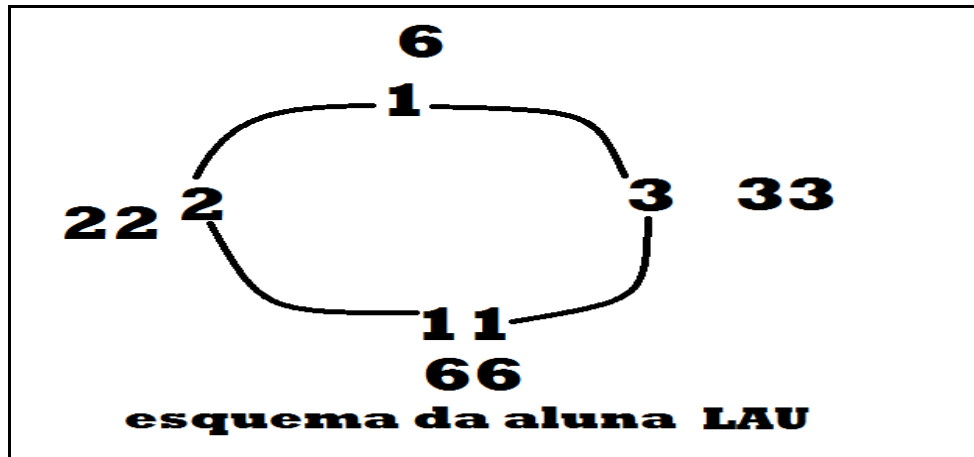


Figura 43: reprodução do esquema feito pela aluna LAU.

Este momento foi importante, porque foi possível perceber que cada aluno construiu seus esquemas de maneira particular como foi mostrado nos estudos desenvolvidos anteriormente. As expectativas do professor/pesquisador realmente aconteceram, ou seja, aquela dificuldade esperada por tratar-se de abstração em maior grau por parte dos alunos foi percebida em alguns casos, mas todos fizeram uma construção satisfatória sobre a quantidade de divisores. Pode-se perceber que alguns divisores ficaram esquecidos, principalmente aqueles originados da multiplicação de três ou mais fatores primos, mas os esquemas montados pelos alunos mostram muitas informações importantes sobre os números trabalhados. Através das observações dos esquemas, ocorreu a ideia de ter trabalhado este assunto no mesmo momento dos divisores. Poderia ser o melhor momento para introduzir os esquemas, já que os mesmos ajudam a descobrir vários divisores dos números estudados. Pela produção dos alunos acredita-se que os mesmos construíram conceitos sobre a quantidade de divisores de cada número enriquecendo seus campos conceituais sobre a multiplicação e divisão, embora eles tenham focado mais em achar divisores e não em contar divisores garantindo que teriam encontrado todos os divisores do número em questão.

### 5.1.8 A IDEIA INTUITIVA DE POTÊNCIAS E RAIZ QUADRADA DE UM NÚMERO

O oitavo momento foi dedicado ao estudo de uma ideia intuitiva de potência e raiz quadrada de um número qualquer através da exploração do “*segredo dos números*”. Esperava-se que os alunos tivessem dificuldades em construir os conceitos sobre potências e raiz quadrada de um número, visto que os mesmos buscam generalizar propriedades como a repetição de fatores primos para a formação de um número. Mas mesmo assim previa-se que eles deveriam construir conceitos sobre raiz quadrada e potências.

Neste momento os alunos foram convidados a procurar por cartas que tivessem apenas uma figura repetida algumas vezes na sua composição (número que tem apenas um fator primo), como pode ser notado na figura 44, e depois disso construir ideias sobre estas repetições e que relações importantes elas podem gerar.

Após algum tempo, os alunos começaram a perguntar o que deveriam fazer com aqueles números encontrados que possuíam em sua formação a presença de um só tipo de símbolo. Foi quando se introduziu a ideia de potência. Primeiro foi perguntado aos alunos quantas vezes uma determinada figura repetia naquela carta, e depois trabalhada a maneira de escrever em forma de potência.



Figura 44: foto de cartas do “*segredo dos números*”

Então foi levantada a questão sobre os números representados na figura 44:

— Quais seriam os números que têm raiz quadrada?

Os alunos com a ajuda do professor/pesquisador chegaram a conclusão que seriam aqueles que foram originados de uma quantidade par de símbolos repetidos (exemplo: número 16 da figura 44 tem quatro símbolos iguais), sua raiz quadrada será representada pela carta que conter a metade dos símbolos. Como o número 16 tem quatro triângulos azuis, então este número tem raiz quadrada que será representada pela carta que possuir dois triângulos azuis

(carta que representa o número 4). O número oito não terá raiz quadrada, visto que ele é composto por três triângulos azuis.

Alguns alunos questionaram sobre a possibilidade da raiz quadrada de oito ser igual a quatro, porque  $4 + 4 = 8$ , então ficou claro que após os estudos envolvendo o campo conceitual multiplicativo, alguns alunos ainda estavam operando no campo aditivo.

Após esta análise surgiram questões sobre a possibilidade de encontrar outras cartas que representassem números que possuam raiz quadrada:

Quais outros números pertencentes ao “segredo dos números” que possuem raiz quadrada?

Será que só as cartas que têm apenas um símbolo em sua representação (repetido várias vezes), seriam as que possuem raiz quadrada?

Então como se pode formalizar uma propriedade quanto à distribuição dos símbolos que representam números que possuem raízes quadradas, apenas observando as cartas e os seus símbolos.

A carta precisa ter uma quantidade par de cada símbolo, ou seja, um número terá raiz quadrada quando tiver uma quantidade par de cada fator primo contido em sua fatoração.

24 7 3 24 não é raiz quadrada

64 4 3 64 é raiz quadrada

49 9 2 49 é raiz quadrada

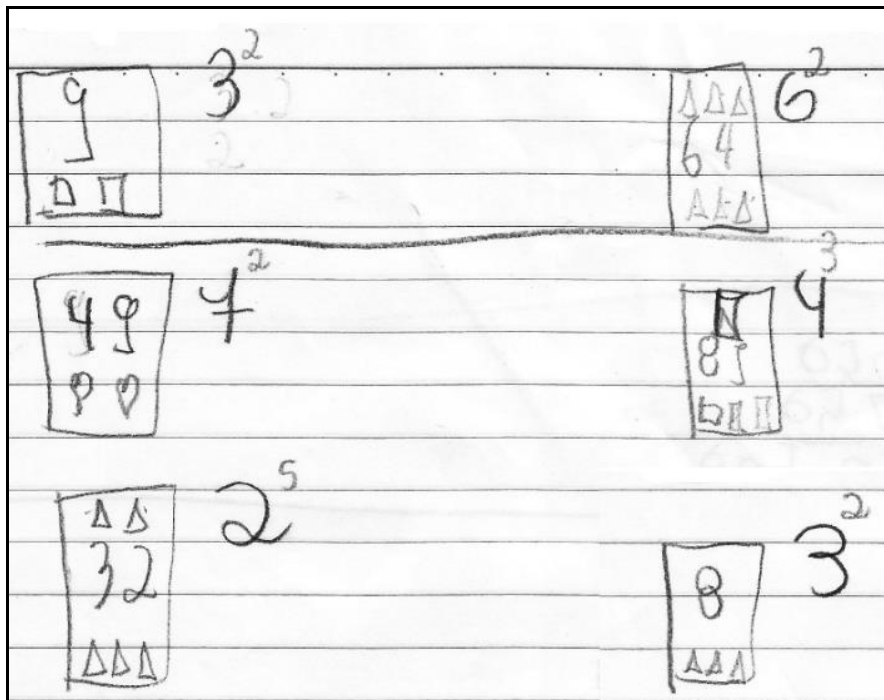
100 00 2 100 tem raiz quadrada  
10, tem dois grupos iguais

Extrato 27: retirado da escrita da aluna LAU

Todas as potências escritas pela aluna NAT (ver extrato 27), foram escritas de maneira correta. Ela também escreveu que o número que não possui raiz quadrada, não formaria grupos iguais. Pode-se entender esta sua ideia ao analisar sua explicação sobre o fato do número cem ter raiz quadrada. Ela também escreveu que o número 32 não tem raiz quadrada “porque ele é ímpar”. Esta resposta não se pode deixar de comentar. Para alguém que olhar esta resposta de maneira isolada, poderá dizer que ela é absurda, mas esta é uma resposta muito boa quando pensada no contexto de sua aplicação. Como o número 32 pode ser escrito da forma  $2^5=32$ , e essa escrita é facilmente vista na distribuição dos símbolos na carta, o ímpar que a aluna pode estar referindo-se é sobre a quantidade de símbolos presente na carta, que são cinco triângulos. Como foi visto que para um número ter raiz quadrada deve ter uma quantidade par de símbolos, ela escreveu que o número 32 não possui raiz quadrada.

A aluna NAT utilizou um teorema em ação que diz que toda potência escrita com uma quantidade par de repetições de cada fator, representará um número que possui raiz quadrada.

O aluno YUR, conforme pode ser observado no extrato 28 escreveu os seguintes resultados ( $3^2 = 9$ ,  $7^2 = 49$  e  $2^5 = 32$ ), todos de maneira correta. Também escreveu que ( $3^2 = 8$ ,  $6^2 = 64$  e  $4^3 = 81$ ). Pode-se perceber uma confusão de conceitos nesta segunda lista de resultados. O aluno escreveu os valores numéricos de maneira trocada, onde deveria escrever a base da potência ele escreveu o expoente, onde se pode perceber que ( $2^3 = 8$ ,  $2^6 = 64$  e  $3^4 = 81$ ).



Extrato 28: retirado da escrita do aluno YUR

O aluno GIL fez pouca produção escrita, aparentemente não construiu conceito algum sobre este assunto. Aluno que durante a aula quase não se concentrou em tentar resolver as situações propostas. Ele escreveu que ( $3^3 = 9$  e  $5^5 = 25$ ) mostrando confusão sobre os conceitos estudados neste encontro. O aluno cometeu um erro que não é tão incomum assim nas salas de aula quando é trabalhado com o estudo das potências no *Ensino Fundamental*, ele considerou que  $3 \times 3 = 9$  e  $5 \times 5 = 25$ , confundindo o conceito de potência.

O aluno GIL pode ter utilizado um teorema em ação que soma todas as parcelas repetidas na forma de potência. Como  $3^3 = 3 \times 3 \times 3$ , ele somou  $3 + 3 + 3$  chegando ao resultado nove. E também que  $5^5 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ , ele somou  $5 + 5 + 5 + 5 + 5$  obtendo o resultado 25.

Após estes estudos sobre as ideias de potências e raiz quadrada, pode-se perceber que alguns alunos mostraram pouco interesse no assunto, mas percebeu-se a construção de conceitos sobre potências e raiz quadrada de um número qualquer, principalmente quando um número possui raiz quadrada e quando não possui. Na escrita dos alunos pode-se perceber que houve evoluções variadas na construção deste conhecimento em questão, onde alguns alunos conseguiram listar de maneira correta potências e até escrever observações sobre raiz quadrada e já em outros casos pode-se perceber que o aluno praticamente não saiu do lugar. Mas o objetivo de introduzir os conceitos sobre potências e raiz quadrada de maneira intuitiva foi alcançado, já que alguns alunos conseguiram diferenciar números que tem raiz quadrada de números que não tem, e a maioria escreveu as potências referentes aos números estudados.

### 5.1.9 O JOGO DA BATALHA DOS DIVISORES DO NÚMERO 60

No nono momento foi trabalhado com o jogo da batalha dos divisores do número 60. Este jogo tentou levar os alunos a estudarem possibilidades de ganhar o jogo e para isso eles teriam que trabalhar relações binárias “ser múltiplo de”, “ser divisor de” e “ser não comparável” entre os divisores de 60, sempre explorando a ideia de multiplicação e divisão. Aqui neste momento os alunos deveriam montar estratégias para ganhar o jogo, e estas estratégias passariam pelos conceitos estudados nos momentos anteriores. Esperavam-se algumas dificuldades, porque neste momento os alunos precisariam abstrair os conceitos trabalhados e articulá-los de alguma maneira para que pudessem construir uma estratégia para ganhar o jogo.

O jogo da batalha com os divisores de 60 que tem os números (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60), representados em 12 cartas, funciona de maneira que os alunos devem ser divididos em dois grupos. Cada grupo recebe seis cartas. Em cada rodada um jogador deve



colocar uma carta sobre a mesa e o outro grupo deve colocar outra carta. Ganha a rodada quem jogar um número que, além de ser maior que o outro, também deve ser múltiplo do outro; caso os números em questão não sejam múltiplos eles ficarão na mesa para a próxima rodada, quando alguém ganhar leva todas as cartas que estejam sobre a mesa. Ganharia o jogo aquele grupo que ficasse com mais cartas após as seis rodadas.

O primeiro momento da aula foi dedicado ao entendimento de como funciona o jogo, explicando e mostrando as regras e simulando partidas para esclarecer o funcionamento. Como a turma tem seis alunos, foram separados em dois grupos de três alunos, (grupo um composto pelos alunos NAT, YUR e LAU e o grupo dois, formado pelos alunos HEN, GIL e JOA). O jogo foi desenvolvido através do duelo dos dois grupos. Uma observação importante foi que mesmo lembrando que eles estavam em grupo, eles não se ajudaram muito. Quando um pegava as cartas ele quase não pedia ajuda e jogava conforme suas ideias. Ao observar alguns confrontos, pôde-se constatar que os alunos simplesmente jogavam as cartas sobre a mesa de maneira aleatória sem pensar muito sobre qual carta deveria jogar.

Pode-se perceber através da análise da figura 45, em que foi relatado o resultado da terceira partida: em que nas duas primeiras rodadas houve empate porque nenhum grupo jogou algum múltiplo, na terceira rodada o grupo dois ganhou e recolheu as seis cartas porque jogou o número seis que é múltiplo do número três, na quarta rodada o grupo um ganhou porque jogou o número 60 que é múltiplo do número 20, na quinta rodada houve empate porque o número 30 não é múltiplo do número quatro e na sexta e última rodada o grupo dois ganhou e levou as quatro cartas porque o número um perde para qualquer número. Desta maneira o grupo dois ganhou a rodada ficando com 10 cartas e o grupo um ficou com apenas duas cartas. Pode-se perceber que o grupo um, apesar de conter as cartas dos números 30 e 60, e além de começar jogando, ganhou apenas uma rodada da partida. Isso mostra que este aluno não utilizou estratégias, não levando em conta o papel privilegiado do número 60, não levando em conta as cartas do adversário, procedendo jogadas sem coerência com os valores das cartas e as relações de múltiplo e divisor.

<b>PARTIDA 3</b>					
<b>GRUPO 1</b>					
10	5	3	60	30	1
<b>GRUPO 2</b>					
15	2	6	20	4	12

Figura 45: resultado da terceira partida entre os grupos um e dois

Aqui se analisa o desenrolar da partida cinco que pode ser observado na figura 46, onde a aluna LAU (grupo um) começou jogando suas cartas altas, e como ela tinha as três maiores cartas, o aluno HEN (grupo dois) não teria como ganhar, aí cometeu o primeiro erro, jogando suas maiores cartas contra cartas das quais não poderia ganhar. Então ele poderia ter colocado suas cartas menores entregando as três primeiras rodadas, e assim poderia vencer as outras três empatando o jogo. Através da análise desta partida, fica claro que é possível criar uma sexta estratégia muito importante para a condução do jogo. Seria a opção de jogar a segunda carta, onde o jogador poderia entregar jogadas para poder vencer jogadas futuras.

<b>PARTIDA 5</b>					
<b>GRUPO 1</b>					
20	30	60	6	4	3
<b>GRUPO 2</b>					
15	12	10	5	2	1

Figura 46: resultado da quinta partida entre os dois grupos

Pode-se analisar através da observação da partida nove, relatada na figura 47, que o grupo um possuía cinco das seis maiores cartas e mesmo assim perdeu o jogo por 10 x 2. Esse resultado pode ter ocorrido através da utilização de estratégias do grupo dois, como a própria sexta estratégia definida anteriormente (poder jogar a segunda carta), principalmente a estratégia de ser não comparável e também a importância do número 60, acrescentada a

alguns erros do grupo um, acabou resultando em uma vitória não previsível e com uma grande vantagem.

<b>PARTIDA 9</b>					
<b>GRUPO 1</b>					
3	15	12	10	30	20
<b>GRUPO 2</b>					
2	6	5	4	60	1

Figura 47: resultado da nona partida entre os dois grupos

Na medida em que as disputas foram evoluindo, os alunos começaram a se unir e pensar um pouco antes de jogar, geralmente os componentes dos grupos discutiam qual carta que deveriam jogar. Daí em diante, em cada partida que passava, era possível perceber estratégias e o jogo começou a ficar mais interessante do ponto de vista matemático.

Em vários momentos foi possível perceber que os alunos jogavam o número 30 em cima do número 20, (como pode ser percebido na figura 48), pensando que ganhariam a rodada, mostrando que não estavam entendendo a regra do jogo ou a multiplicação e divisão.

<b>PARTIDA 10</b>					
<b>GRUPO 1</b>					
15	10	20	60	4	2
<b>GRUPO 2</b>					
5	12	30	1	6	3

Figura 48: resultado da décima partida entre os dois grupos

Em certa rodada o aluno que tinha a carta do número 60 deixou de levar a metade das cartas e depois entregou oito cartas porque eles acharam que tinha que deixar a carta do número 60 para o final da partida.

Em muitos casos os alunos jogavam o número maior e contavam como ganha a jogada, mas esqueciam da necessidade de ser um número maior e ainda múltiplo do outro (ver figura 48). Esta combinação das condições levava os alunos com certa frequência a alguma confusão sobre as regras.

Ao longo dos jogos foi possível perceber que a maioria dos alunos não se preocupou em criar estratégias para ganhar o jogo pensando em múltiplos e divisores que era o grande objetivo deste jogo, também se pode perceber certa confusão entre jogar a maior ser suficiente para ganhar a partida, não levando em conta a necessidade de ser múltiplo de, além de ser maior que. Mas mesmo assim alguns alunos conseguiram dar-se conta de aspectos importantes do jogo. Como a importância do número 60, que ganha sempre àquela rodada, e que o número um perde sempre. E muitos, quando possuíam a carta do número 60, conduziam o jogo empatando o máximo possível até levar o máximo de cartas com o uso da carta 60. Esta foi uma estratégia percebida e utilizada pelos alunos.

Durante a disputa foram dadas dicas, mas ao observar partidas pode-se notar claramente que a maioria das jogadas ocorreram de forma aleatória sem planejamento. Somente no final alguns começaram a tomar consciência de propriedades do jogo e tentar ganhar as rodadas através do uso de estratégias. Para os alunos, quem saía com a carta do número 60 deveria ser o ganhador no final da partida, mas pode-se perceber que isso não é verdade; claro que possuir o número 60 auxilia muito, mas isso não é suficiente para ganhar o jogo.

Apesar das dificuldades encontradas durante as rodadas do jogo, percebeu-se que alguns alunos se dedicaram e provavelmente construíram conhecimentos sobre o assunto. Muitos construíram conceitos dos quais não tomaram consciência.

#### **5.1.10 SOBRE AS MAQUETES DE UM NÚMERO**

No décimo momento buscou-se construir estruturas que viessem a mostrar todos os divisores de qualquer número explorando a ideia de dimensões de acordo com a quantidade de figuras diferentes (números primos) que cada carta pode conter. Por outro lado, foram trabalhados os fatores primos que construíram múltiplos dos divisores do número em questão.

Para criar estes conceitos foram trabalhados com a construção das maquetes dos números na sala de aula, onde os alunos construíram as maquetes para os divisores de diversos números do “*segredo dos números*”, maquetes estas que podem ser de uma, duas ou de três dimensões.

As maquetes que são representações espaciais das relações... “é divisor de...”, ...“é múltiplo de...”. Através da análise do material concreto das maquetes pode-se perceber que cada direção diferente do espaço representa um operador diferente. Nas maquetes, os operadores são representados por palitos que simbolizam os números primos geradores.

Nas maquetes, cada direção diferente do espaço representa um operador diferente do reticulado. Nas maquetes, os operadores são representados por palitos que simbolizam os números primos geradores do reticulado.

Nas maquetes, cada palito representa duas funções: uma multiplicação e uma divisão, cada uma num sentido, recíproca uma da outra e ligando dois elementos consecutivos de um reticulado de divisores (GROSSI, 1986, P. 13).

Para melhor compreensão, pode ser visto exemplos de maquetes.



Figura 49: maquete do número 16 construída pelo autor

Pode-se perceber que a maquete referente ao número 16 (figura 49), possui um único gerador (o número primo dois), repetido quatro vezes. Por isso a carta que representa o número 16 tem quatro triângulos azuis em sua representação.

A maquete relaciona tanto a multiplicação (no mesmo sentido da flecha), como a divisão (no sentido contrário da flecha).

Podem-se construir maquetes para qualquer número Natural, a do número 12, por exemplo, deve possuir duas dimensões, já que 12 é igual a  $2 \times 2 \times 3$ , contendo assim dois fatores primos distintos (2 e 3) que definem a dimensão da maquete. Esta maquete pode ser observada na figura 50.

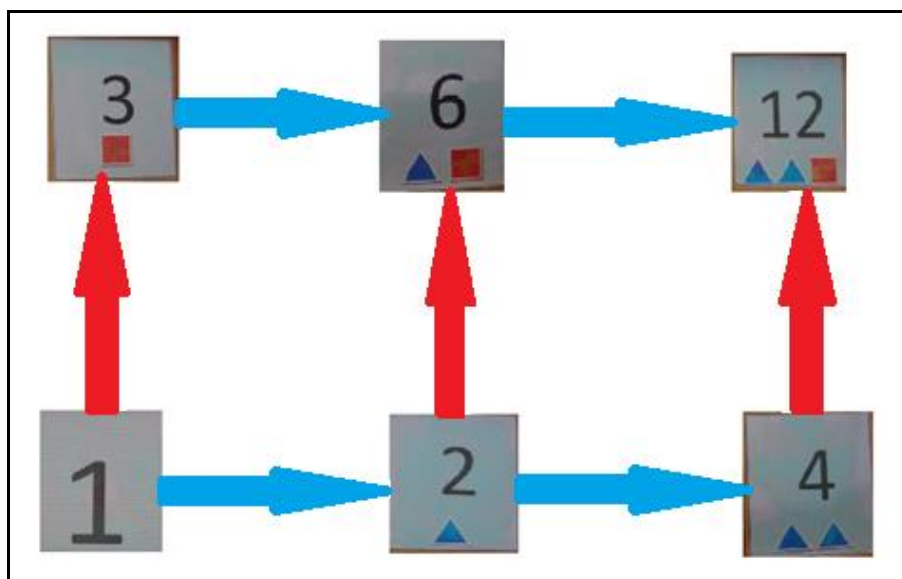
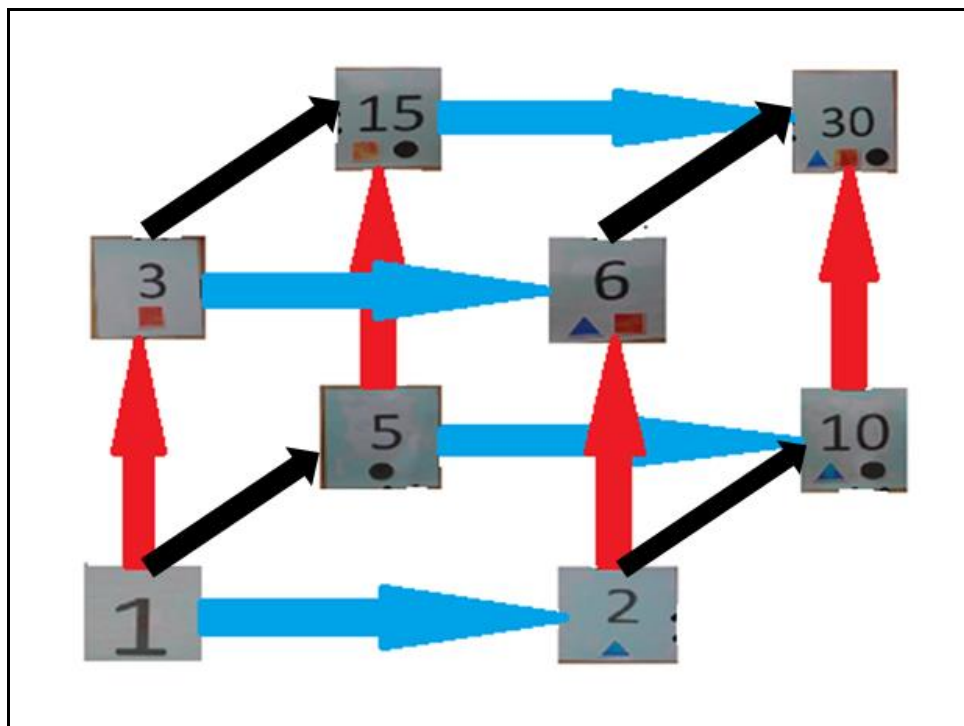


Figura 50: maquete do número 12 construída pelo autor

Na figura 50 pode ser observada a maquete do número 12 que é formada por dois fatores primos (2 e 3), por isso tem duas dimensões que estão representadas pelas flechas azuis e vermelhas, as flechas azuis representam uma multiplicação pelo número primo dois e as flechas vermelhas representam uma multiplicação pelo número primo três. Como se têm dois fatores representantes do número dois, usa-se duas flechas azuis para a direita, e como se tem só um fator que representa o número três, usa-se uma flecha vermelha para cima.

Através da construção da maquete do número 12 podem ser descobertos todos os divisores do número 12, que aparecem listados na própria maquete. A maquete começa pelo número um e cada flecha significa uma multiplicação pelo número dois ou pelo número três, depende da cor da flecha como já foi falado anteriormente.

Também se pode explorar a ideia de divisores do número 12, basta analisar a maquete observando-a do número maior para o número menor, ou seja, no sentido contrário das flechas. Assim pode ser dito que o número 12 dividido pelo número dois é igual a seis, 12 dividido pelo número três é igual quatro e outras divisões através da análise da maquete.



**Figura 51: maquete do número 30 construída pelo autor**

Na figura 51 pode ser observada a maquete do número 30, esta maquete é de três dimensões porque o número 30 tem três divisores primos diferente que são os números dois, três e cinco. Assim cada flecha azul continua sendo um fator de dois, a flecha vermelha representa um fator de três e a flecha preta representa um fator de cinco.

No início da aula foi trabalhado como seria a construção de uma maquete e o que seria uma maquete. Então os alunos foram apresentados aos palitos de ligação, que poderiam ser azuis, vermelho, preto, roxo, laranja representando os fatores de multiplicação 2, 3, 5, 7 e 11.

A primeira construção foi a da maquete do número 20, conforme pode ser observado na figura 52. A construção foi feita de maneira que em um primeiro momento, era preciso descobrir quais números fariam parte desta maquete. Através da análise da carta representante do número 20 foi possível perceber que os números dois e cinco seriam seus divisores primos e assim definiriam as duas dimensões da maquete. Então a construção da maquete iniciou com o número um, que foi ligado aos números dois e cinco pelos palitos de cor azul e de cor preta respectivamente.



**Figura 52: produção da primeira maquete em sala de aula, maquete do número 20**

Através da análise da figura 53 pode-se perceber que a maquete do número 20 possui seis números em sua formação (1, 2, 4, 5, 10 e 20), três palitos pretos e quatro palitos azuis. Após esta construção, os alunos foram questionados sobre quais seriam os divisores do número 20. Então a aluna LAU citou todos os números através da análise da maquete. Neste momento ficou claro que a construção das maquetes não deixa nenhum divisor esquecido, ou seja, para a construção da maquete ser uma forma retangular, é necessário que todos os seus divisores sejam utilizados.

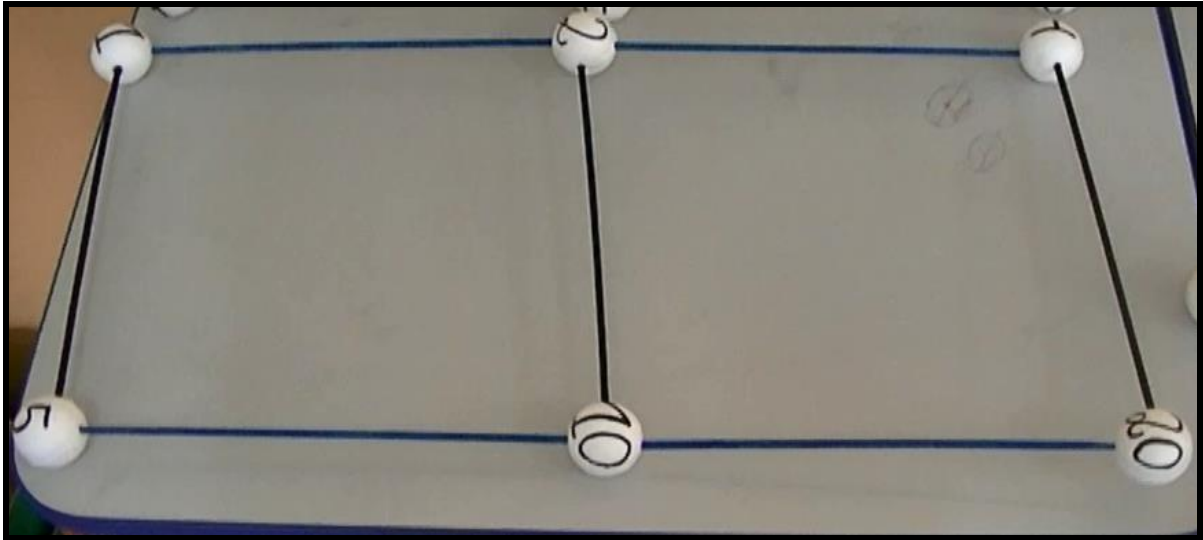


Figura 53: maquete do número 20

O aluno JOA construiu a maquete referente ao número 55 onde utilizou palitos da cor preta (representando o fator  $\times 5$ ), e da cor laranja (representando o fator  $\times 11$ ). Quando montou sua maquete o aluno cometeu um pequeno erro que foi logo percebido pelo aluno HEN (ligou o número um com o número 55 usando como ligação o palito preto). Então foi discutido entre todos porque o número 55 não poderia ser ligado ao número um e foi possível chegar à conclusão que cada palito serve como multiplicação por algum fator conforme sua cor (neste caso o produto deveria ser por cinco, já que o palito era da cor preta). E então, após algumas tentativas, o aluno JOA conseguiu montar a maquete referente ao número 55 de maneira correta conforme podemos observar na figura 54.

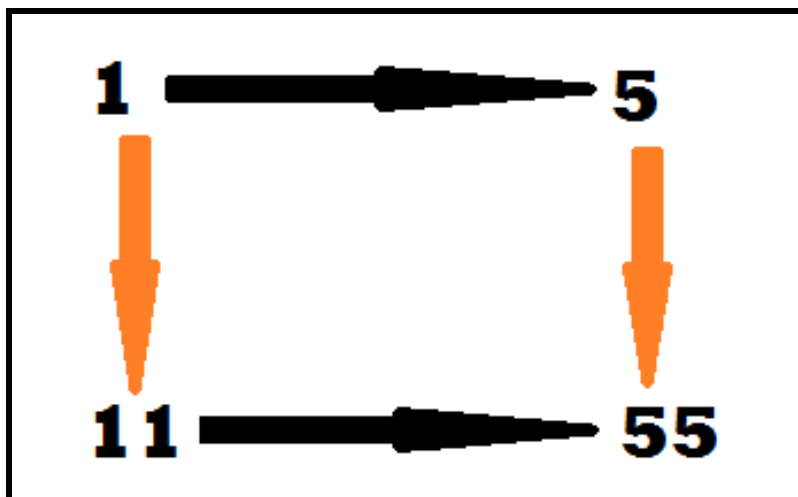


Figura 54: maquete do número 55 refeita através da maquete produzida pelo aluno JOA

Os alunos JOA e GIL construíram a maquete do número 72. O número 72 originou uma maquete de tamanho bem grande já que o mesmo possui dois fatores primos do número três e três fatores primos do número dois, ou seja,  $3^2 \times 2^3 = 72$ , onde os primos três e dois determinam que a maquete deva ter duas dimensões e os expoentes dois e três determinam



duas flechas para um lado e três flechas para o outro lado. Esta construção foi importante para a evolução dos conceitos dos alunos GIL e JOA, que através desta construção exploraram alguns múltiplos e divisores dos números dois e três. Esta maquete também mostrou aos alunos a visualização dos divisores do número 72, ou seja, os alunos trabalharam em uma construção que ao final, levou-os a uma representação espacial e concreta de todos os divisores de um número. Observar figura 55.

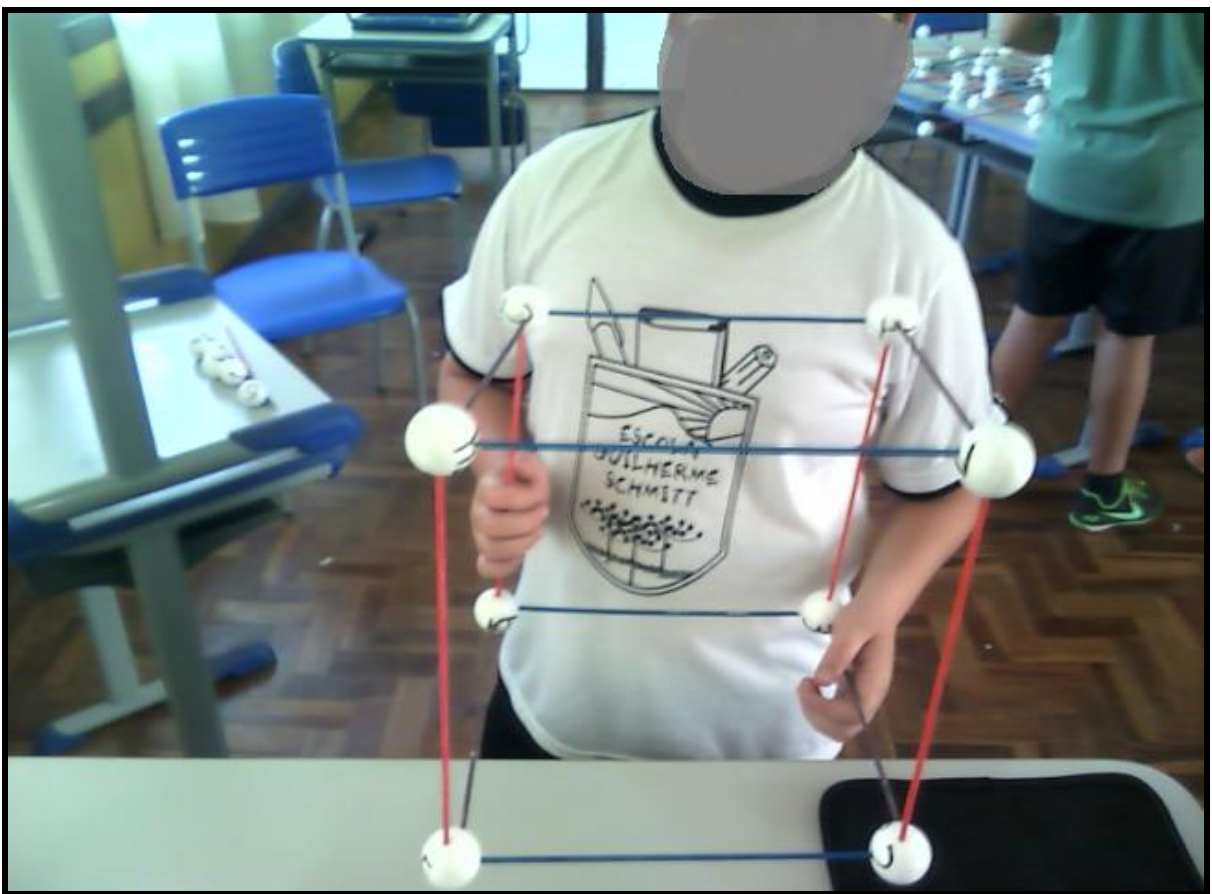


**Figura 55: construção da maquete do número 72 feita pelos alunos GIL e JOA**

O aluno HEN construiu a maquete do número 42, contida na figura 56, que deve ser de três dimensões porque o número 42 tem os números dois, três e sete como seus divisores primos, ou seja,  $2 \times 3 \times 7 = 42$ . Durante a discussão, o aluno HEN perguntou como deveria fazer uma maquete, o que determinaria a quantidade de dimensões. Nesse momento o aluno deveria ter tempo para trabalhar e assim descobrir como construir a maquete do número 42 através de erros e acertos. Mas o pesquisador/professor deu uma dica dizendo que a quantidade de dimensões depende de quantos divisores primos diferente o número em questão tem (quantas figuras diferentes estão na carta), em vez de deixar o aluno progredir através do uso de suas ideias. A partir daí ele resolveu escolher a carta do número 42 e tentar fazer a sua maquete, que segundo ele utilizaria três cores de palitos porque a carta referente ao número 42 tem três

figuras diferentes em sua formação. Depois disso ele procurou os números e os palitos e montou a maquete sem ajuda de outros colegas ou do professor/pesquisador.

Esta atividade foi importante para o aluno, porque ele precisou relacionar os números com três fatores de multiplicação, assim da bolinha que representa o número um saíram três palitos, sendo um da cor azul, outro da cor vermelha e um terceiro da cor roxa. E todas as bolinhas sempre teriam ligação com três palitos das cores azul, vermelha e roxa. É como montar um quebra cabeça. Ao final, após instruções e discussões, o aluno percorreu os caminhos da maquete e disse que deveria estar correta porque todos os caminhos levavam de maneira correta até o número 42. Ver figura 56.



**Figura 56: maquete do número 42 construída pelo aluno HEN**

Estas construções, provavelmente, ajudaram os alunos a construir os conceitos de multiplicação e divisão porque eles utilizaram tanto a multiplicação quanto a divisão nas construções que fizeram durante o encontro. Os alunos participaram construindo várias maquetes durante a aula.

As discussões durante a aula foram importantes porque os alunos levantaram questões sobre como montar as maquetes e quais números deveriam colocar em cada lugar para chegar ao número desejado de maneira correta.

As maquetes construídas pelos alunos durante a aula foram expostas na biblioteca da escola durante alguns dias, onde os alunos da escola tiveram acesso.

## 5.2 ANÁLISES DAS ATIVIDADES APLICADAS NA ETAPA 2

A primeira questão pedia que os alunos citassem cinco múltiplos do número quatro e a seguir explicassem o que significa dizer que um número é múltiplo de outro.

O aluno JOA escreveu os números “40, 32, 8, 16 e 48”. A aluna LAU escreveu os números “4, 20, 8 e 12- tem que ter na tabuada”. O aluno YUR escreveu os números “4, 8, 12, 16 e 20”. O aluno HEN escreveu os números “8, 12, 16, 20 e 24”. A aluna NAT escreveu os números “16, 8, 12, 4 e 20 – múltiplos são os números que estão na tabuada”. O aluno GIL escreveu os números “1, 2, 4, 8 e 16”.

Os alunos escreveram os múltiplos. O único problema ocorreu com o aluno GIL que escreveu os números um e dois como possíveis múltiplos do número quatro. Este aluno confundiu os conceitos de múltiplos e divisores porque os números citados são múltiplos ou divisores do número quatro.

Para o aluno GIL não ficou claro que para um número ser múltiplo de outro ele deve ser maior ou igual ao número pedido.

As alunas NAT e LAU disseram que um número deve ser da tabuada para ser múltiplo do outro. É importante ressaltar que foi discutido nos encontros que os números têm uma tabuada tão grande quanto se quer, e não apenas dez representantes como são mostrados em algumas escolas, principalmente nas escolas que o professor/pesquisador já trabalhou. Nos encontros foram construídos múltiplos de alguns números até atingir o valor 100. Através desta definição de múltiplos adotada neste trabalho pode-se dizer que a resposta das duas alunas foi ótima.

Os alunos mostraram boa compreensão da questão que pedia a citação de cinco múltiplos do número quatro, causando impressão que construíram conceitos sobre múltiplos de um número, visto que esta atividade foi a primeira e não mostrou nenhuma figura das cartas estudadas que poderia ter ajudado os alunos em suas respostas.

A segunda questão pedia que os alunos citassem divisores dos números (40, 52 e 72) e a seguir, explicassem o que entenderam por divisor de um número.

O aluno JOA escreveu “40 = 2, 4, 5 e 8; 72 = 9, 8 e 2; 52 = 2 e 26”. A aluna LAU escreveu “40 = 1, 40, 2, 4, 5 e 10; 52 = 1, 52, 13, 4 e 2; 72 = 1, 72, 9 e 8”. O aluno HEN escreveu “40 = 2, 8, 5, 4 e 1; 72 = 9, 8, 2 e 1; 52 = 2, 13 e 1”. A aluna NAT escreveu “40 = 2,

5, 4, 8 e 1;  $52 = 1, 2$  e 0;  $72 = 1, 0$ ,”. O aluno YUR escreveu “40 a do número 5, 8”. O aluno GIL escreveu “1-72 e 40-1”.

Nesta questão é possível perceber que alguns alunos citaram divisores conforme o exercício estava pedindo. Podem-se destacar problemas como o caso da aluna NAT que citou o número zero como divisor dos números 52 e 72. O aluno GIL foi muito econômico ao citar os divisores deixando dúvidas quanto a sua compreensão a respeito dos divisores de um número. É importante lembrar que ele também teve problemas com o exercício dos múltiplos e como o objetivo é a discussão do campo conceitual multiplicativo, podemos supor que este aluno está com dificuldades em construir conceitos relativos a esse campo.

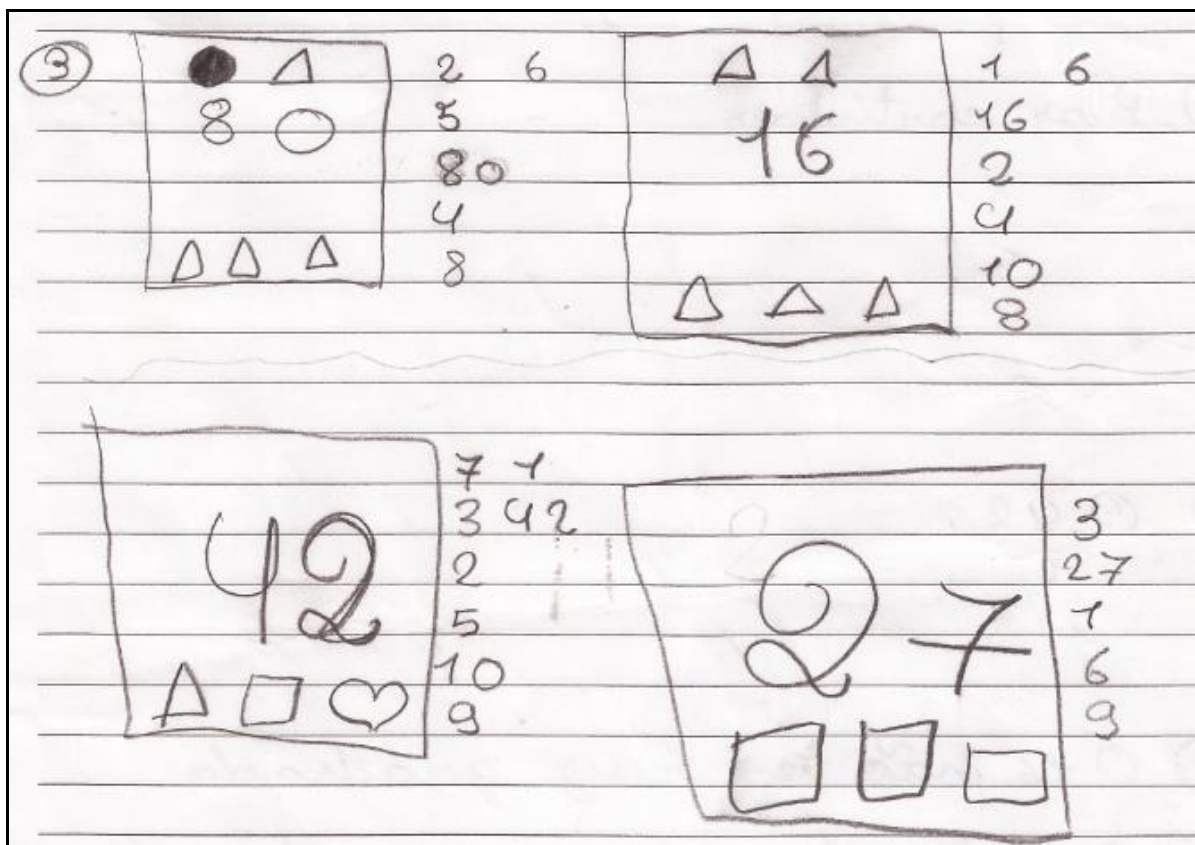
A aluna NAT mostrou os divisores do número 40 de maneira correta e depois disse que o zero seria divisor dos números 52 e 72. Uma possível hipótese para sua resposta é que ela tenha citado o zero como divisor, confundindo com o conceito de múltiplo que fora discutido nos encontros e que dizia que o zero seria múltiplo de todos os números naturais.

Esta aluna não utilizou o conceito que diz que os divisores de um número devem ser formados através da utilização de seus divisores primos, ou como foram discutidos nos encontros, os divisores são formados através da combinação dos valores dos símbolos que representam cada número.

Esta questão teve um alcance satisfatório da parte dos alunos em suas respostas. Pode-se perceber através de seus relatos que alguns citaram uma quantidade suficiente de divisores para cada um dos números estudados. Os alunos resolveram esta questão sem auxílio de qualquer figura do “*segredo dos números*”, por isso, acredita-se que construíram algum conceito sobre os divisores de um número.

A terceira questão pedia para os alunos escolher quatro números entre as cartas (58, 18, 80, 16, 90, 50, 42, 27, 70 e 84), e a seguir dizer quais seriam os divisores daquela carta.

O aluno HEN escolheu os números “ $50 = 2, 25, 10$  e 1;  $90 = 3, 6, 9, 10$  e 1;  $70 = 1, 2, 5, 7, 10$  e 35;  $42 = 1, 6, 3, 2$  e 7”. A aluna LAU escolheu os números “ $70 = 5, 1, 70, 2, 7, 35$  e 14;  $18 = 2, 3, 1, 18$  e 6;  $42 = 2, 3, 7, 1, 42, 6, 14$  e 21”. Os alunos JOA, YUR e GIL citaram alguns divisores de alguns números de maneira parecida com os exemplos dos alunos já citados. A aluna NAT fez suas escolhas como se pode observar no extrato 29.



Extrato 29: recorte retirado da escrita da aluna NAT

O aluno HEN citou a maioria dos divisores dos números que escolheu mostrando um conhecimento satisfatório sobre divisores de algum número. A diferença desta questão para a anterior é que esta trata de encontrar os divisores de um número a partir da análise da carta, e esta condição de poder analisar a carta e seus símbolos sugere os divisores primos que seriam os representantes de cada símbolo. O aluno escreveu alguns divisores primos e outros compostos mostrando conhecimento sobre o assunto.

A aluna LAU esqueceu poucos divisores dos números que escolheu, apesar de ter citado três cartas com seus divisores ao invés de quatro cartas como o exercício pedia. A aluna mostrou conhecimento no assunto divisores de maneira similar ao aluno HEN, principalmente quando ela escreveu os divisores primos, divisores originados da multiplicação entre divisores primos e ainda o número um e o próprio número em questão. Esta aluna mostrou conhecimento sobre os divisores de um número, com destaque ao fato de que o número um é sempre divisor de qualquer número, embora este divisor não transforme o número em questão, ou seja, dividir pelo número um não cria um novo divisor.

Nesta questão os alunos GIL, JOA e YUR produziram pouco, apesar de terem citado divisores de alguns dos números pedidos no exercício, escreveram dois ou três divisores de cada número escolhido e escolheram poucos números. O aluno JOA escolheu o número 90 e citou os números (5, 2 e 9) deixando dúvidas sobre seus conhecimentos sobre divisores de um

número. Os alunos YUR e GIL escolheram o número 27 e citaram o número três como seu divisor. Aqui se pode dizer que o número três é o único número que aparece na carta representada pelo símbolo quadrado vermelho, esta informação pode ser o motivo destes dois alunos terem citados apenas o número três como divisores do número 27. Durante os encontros, os alunos foram estimulados a procurar os divisores através das análises das cartas, podendo encontrar os primos e os compostos que podem ser formados através da multiplicação dos fatores primos. Esses alunos conseguiram reconhecer os divisores representados pelas figuras e.

A aluna NAT construiu alguns divisores intrigantes das cartas que escolheu, conforme podemos observar no extrato 29. Ela citou alguns divisores que podem ter sido obtidos através da adição dos símbolos das cartas, como o caso da carta do número 80, onde ela citou o número seis como seu divisor. Como a carta tem quatro triângulos e um círculo preto, a aluna pode ter somado os valores de três triângulos obtendo o número seis. O caso dos possíveis divisores do número 16 citados pela aluna, seis e 10, também levam à hipótese de aluna ter somado os valores dos símbolos. O número 27 também tem citado um possível divisor através da soma dos símbolos que novamente seria o número seis.

A aluna NAT utilizou pensamento aditivo na análise do número 42 que pode ser visto no extrato 29, ao invés de utilizar pensamento multiplicativo, que seria o correto.

A hipótese da utilização de conceitos aditivos utilizados pela aluna NAT tornou-se mais evidente ao analisar a carta referente ao número 42 e seus divisores. Ela escreveu os números sete, três e dois como divisores primos, onde cada número representa um símbolo, então logo abaixo ela escreveu os números cinco, 10 e nove, que não são divisores do número 42. Mas pode-se mostrar que os números obtidos pela aluna seriam resultados das somas dos divisores primos ( $5=2+3$ ,  $10=7+3$  e  $9=7+2$ ). Através desta discussão ficou evidente que a aluna NAT se mostrou confusa entre usar a ideia aditiva ou a multiplicativa. Apesar dela citar os fatores primos de maneira correta, mostrando conhecimento em relação aos valores de cada símbolo representado nas cartas.

Nesta questão os alunos chegaram a uma quantidade significativa de divisores, mostrando um conhecimento dos conceitos de divisão estudados durante as aulas. Também se analisou o caso da aluna NAT que mostrou confusa sua citação de divisores, misturando ideias do campo conceitual aditivo com o campo conceitual multiplicativo.

A quarta questão foi dedicada ao estudo dos números primos, onde os alunos deveriam explicar o que seria um número primo e como ele se comportaria a respeito da divisão.

A aluna NAT escreveu “número primo é aquele que se divide por ele mesmo, tipo sete, se divide por ele mesmo e pelo um, o dois, etc.”. A aluna LAU escreveu “ele é sozinho e só divide por um”. O aluno YUR escreveu “o número primo é que se divide por ele e por um”. O aluno JOA escreveu “aquele que pode ser dividido por ele e por outro número”. O aluno HEN citou os números “2, 7, 9, 5 e 3”. O aluno GIL escreveu “o número primo é que se divide por ele e por um, 7, 9 e 16”.

A aluna NAT mostrou com suas palavras que um número primo deve ser divisível por um e por ele mesmo, citando os números sete e dois. Esta foi a definição trabalhada durante os encontros, então ela pode ter lembrado as discussões e escrito seu conceito, que está de acordo porque ela citou alguns números que realmente são primos.

A aluna LAU escreveu que o número primo deve ser sozinho e só divide por um. Uma hipótese que pode justificar esta sua escrita está ligada à sequência didática aplicada durante os encontros, onde foi discutido como deveria ser a carta representante de um número primo, e foi concluído que toda carta que tivesse apenas um símbolo seria representante de um número primo. Possivelmente, esta tenha sido a razão da aluna ter escrito a palavra, “sozinho”, referindo-se ao símbolo que cada carta deve ter.

A aluna LAU utilizou o teorema em ação que diz que toda carta que contiver um único símbolo, será representante de um número primo.

O aluno JOA disse que o número primo pode ser dividido por ele e por outro número. Seria fácil dizer que sua resposta está errada, mas é possível levantar a hipótese de este outro número ser o número um. Um número que pode ser dividido apenas por ele e por outro número, com certeza, terá o número um como seu divisor. Esta interpretação do conceito de número primo torna possível a hipótese levantada a respeito da resposta do aluno JOA. Mas mesmo assim, o aluno JOA mostrou-se confuso em relação ao conceito de número primo.

O aluno HEN apenas citou os números sem escrever nada, os números 2, 3, 5 e 7 são os números primos mais utilizados na escola básica devido à sua facilidade de manipulação com multiplicações e divisões não elevando os valores dos resultados. O problema do aluno foi que ele disse que o número nove seria um número primo. Uma hipótese de porque isso aconteceu é que o aluno cometeu uma pequena confusão em relação ao conceito de número primo trabalhado durante os encontros. Conceito que dizia que toda carta que tivesse apenas um símbolo, representaria um número primo. Analisando a carta que representa o número nove, que tem dois quadrados vermelhos, o aluno pode ter pensado que não importava a quantidade de símbolos que a carta tivesse desde que fosse só de um tipo.



No caso da análise do aluno HEN sobre o número nove, ele utilizou um teorema em ação que diz que toda carta que contiver apenas um símbolo, representará um valor de um número primo. Este teorema é falso porque cria números compostos.

Neste momento o aluno deve ter analisado a carta do número nove sem considerar a repetição dos símbolos.

O aluno GIL não deixou dúvidas em relação a sua resposta; ele disse que número primo deve ser divisível por um e por ele mesmo e depois disso citou os números sete, nove e 16 como exemplos destes números. Esta sua resposta sugere que este aluno desenvolveu parcialmente seus conceitos sobre campo conceitual multiplicativo, porque os números nove e 16 têm outros divisores além dos triviais. Essa conduta também sugere a mesma hipótese levantada no caso do aluno HEN, que trata do equívoco da quantidade de símbolos que uma carta necessita ter para ser representante de um número primo.

Ao citar os números nove e 16 como candidatos a números primos, o aluno possivelmente acredite que um número, para ser primo, precise ter em sua representação um único tipo de símbolo, e não apenas um símbolo, que seria o conceito correto.

Apesar de problemas conceituais sobre os números primos, os alunos mostraram conhecimento sobre o que vêm a ser um número primo. Em alguns casos citaram números primos e explicaram o que deve acontecer para que eles sejam considerados primo. Um fator a ser considerado é que esta questão não tinha figuras para que os alunos pudessem utilizar como base. Então os alunos devem ter usados seus conhecimentos e possíveis conjecturas sobre os estudos que fizeram sobre o “*segredo dos números*”.

A quinta questão tratava dos critérios de divisibilidade, onde os alunos foram questionados sobre como saber se um número pode ser dividido pelos números dois, três, sete, quatro, seis, 15 ou 21.

O aluno JOA escreveu “por causa dos símbolos”, o aluno HEN escreveu “porque tem o número na carta”, a aluna NAT escreveu “pelas cartinhas”, os alunos GIL e YUR não responderam esta questão, a aluna LAU respondeu “ele pode se dividir ou por um”.

Esta questão trata de um assunto onde os alunos deveriam criar novos conceitos através de conjecturas dos conceitos de múltiplos e divisores estudados no primeiro momento. Aqui existe um nível de dificuldade mais elevado em relação às questões anteriores, já que estão sendo discutidas propriedades sobre os divisores de um número, ou ainda como um número pode ser dividido, e tudo isso antes mesmo de dividir o tal número.

O aluno JOA respondeu de acordo com algumas propriedades criadas durante os encontros, que diziam que toda carta que tivesse um triângulo azul seria divisível pelo número

dois, que tivessem um quadrado vermelho seria divisível pelo número três, e assim por diante. Os símbolos escritos em cada carta determinariam seus possíveis divisores, assim uma carta que tivesse um quadrado vermelho e um coração roxo desenhado, teria um número múltiplo do número 21. O problema da resposta do aluno é que ele não mostrou estes detalhes citados neste momento e por isso sua resposta é vaga e não explica quase nada sobre os critérios de divisibilidade.

Sobre a resposta do aluno HEN, uma hipótese possível, sugere que o mesmo cita os números como representantes dos símbolos, ou seja, toda carta que contiver um coração, segundo o aluno “o número sete”, deve conter um número múltiplo de sete e por tanto este número deve ser divisível por sete.

A aluna NAT também passa a ideia trabalhada durante os encontros, que através das análises feitas nas cartas podem-se dizer quais seriam os divisores dos números em questão. Este foi um conceito discutido durante as aulas e estes alunos escreveram suas respostas conforme seus pensamentos, o problema é que eles escreveram de maneira vaga com pouca explicação e sem citar exemplos.

A aluna LAU parece ter entendido a questão de maneira equivocada, sendo que ela disse que os números podem ser divididos por um e por ele mesmo, que é o conceito de número primo.

Esta questão buscava pelo conhecimento mais profundo em relação aos conceitos trabalhados durante os encontros, então era esperado que os alunos mostrassem dificuldades em chegar neste nível. Mesmo assim, alguns alunos mostraram ter compreensão de como se deve proceder para descobrir os critérios de divisibilidade de um número através da análise de sua carta, apenas através das observações dos símbolos que a mesma possui.

A sexta questão trata sobre a quantidade de divisores que existe em um número, onde os alunos deveriam responder esta questão, além de pensarem e citarem quantos divisores teria o número 58? Também deveriam descobrir quantos divisores têm os números 50 e 42, todos com suas cartas expostas na questão número três. Ao final da questão, os alunos ainda deveriam escrever sobre quais dos dois números acima teriam mais divisores, o porquê desta diferença, se os dois números têm três símbolos cada um.

Esta questão pode ser resolvida através de um esquema, que facilita o encontro de todos os divisores dos números em questão, também é uma questão com nível de dificuldade elevado, embora os alunos tivessem as cartas para analisar, e todos estes procedimentos foram feitos durante os encontros.

O aluno HEN escreveu “o quarenta e dois tem três, o cinquenta e oito tem dois e o cinquenta tem três divisores”, a aluna NAT escreveu “42”, a aluna LAU escreveu “58= 2 divisores, 50= 3 divisores e 42= 3 divisores, porque sim”, o aluno JOA escreveu “50= 2, 5, 5 e 42= 2, 3, 7”, os alunos GIL e YUR não responderam esta questão.

Os alunos HEN, LAU e JOA disseram que os divisores de um número são seus divisores primos, por isso disseram que o número 58 tem dois divisores (sendo que o número tem dois divisores primos, os números dois e 29), o número 42 tem três divisores (os divisores primos do número 42 são os números dois, três e sete) e ainda escreveram que o número 50 tem três divisores (os símbolos da carta referente ao número 50 são um triângulo e dois círculos). Os alunos devem ter respondido as questões pensando nos divisores primos de cada número e ainda cometeram um erro ao escreverem que o número 50 teria três divisores já que sua figura tem três símbolos.

A aluna NAT escreveu 42. Ela deve ter respondido a pergunta sobre qual dos três números teria mais divisores, e realmente o número 42 é o que possui mais divisores, isso ocorre porque para construir os divisores de um número é necessário combinar os divisores primos, e quando temos menos divisores primos, teremos um menor número de divisores como podemos observar na figura 57.

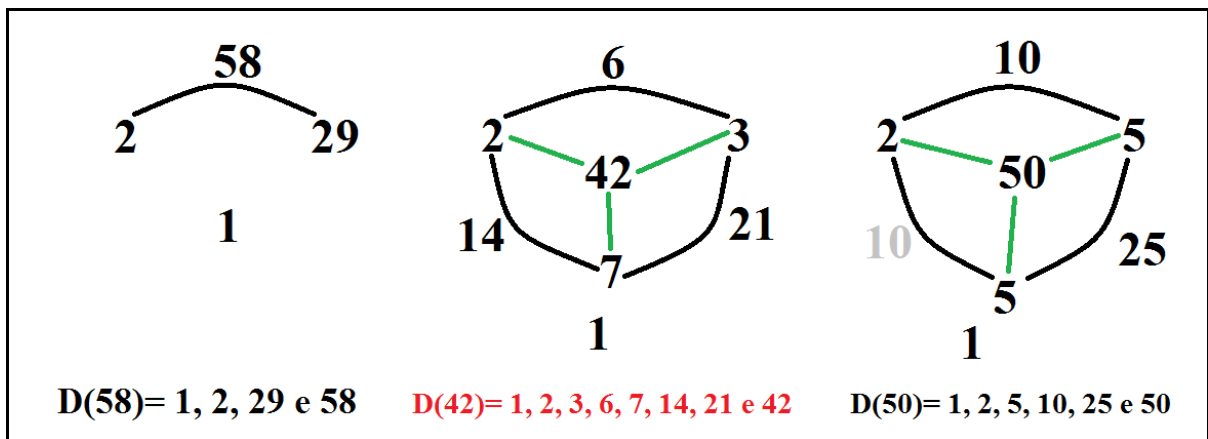


Figura 57: esquema que representa os divisores dos números 58, 42 e 50

O fato de o divisor primo cinco ser repetido nos divisores do número 50 justifica a quantidade de divisores serem menor que a quantidade de divisores do número 42, sendo que ao número ser repetido, diminui dois divisores, sendo um primo e outro não, como pode ser observado na figura 57.

A sétima questão tratava da ideia de raiz quadrada de um número e questionava os alunos sobre a possibilidade dos números 16, 8, 9 e 49 terem ou não raiz quadrada, sendo que os alunos tinham as cartas impressas junto aos exercícios e ainda deveriam explicar suas respostas.

A aluna LAU escreveu “16 tem a raiz quadrada que é o 4, 8 não tem raiz quadrada, nove tem a raiz quadrada que é o 3 e 49 tem raiz quadrada que é o 7”. O aluno HEN escreveu “16=4, 8=não, 9=3 e 49=7”. O aluno JOA escreveu “ $4 \times 4 = 16$ ,  $2 \times 4 = 8$ ,  $3 \times 3 = 9$  e  $7 \times 7 = 49$ ”. A aluna NAT escreveu “o 16 não tem raiz quadrada, o 8 não tem raiz quadrada, o 9 tem raiz quadrada e o 49 tem raiz quadrada”. Os alunos GIL e YUR não responderam esta questão.

Segundo os conceitos trabalhados e discutidos pelos alunos em conjunto com o professor ao final do trabalho com potências e raiz quadrada, uma carta terá raiz quadrada quando tiver uma quantidade par de figuras iguais, podendo ter símbolos diferentes. Assim, por exemplo, o número 36 terá raiz quadrada porque sua carta possui dois triângulos azuis e dois quadrados vermelhos.

A aluna LAU e o aluno HEN mostraram de maneira correta quais números que teriam raiz quadrada e qual não teria. Estes alunos usaram os conceitos de raiz quadrada estudados durante as aulas da pesquisa porque eles não tinham estudado este assunto em suas aulas regulares.

Eles utilizaram o teorema em ação que diz que toda carta que contiver uma quantidade par de cada símbolo ali representado, será representante de um número que terá raiz quadrada.

O aluno JOA montou a ideia de como se deve proceder para descobrir se um número tem raiz quadrada. O problema é que ele não escreveu nada sobre a condição de ter ou não raiz quadrada, também não concluiu qual dos números estudados seriam quadrados de outro número. Desta maneira não é possível concluir sobre a resposta do aluno.

A aluna NAT se confundiu ao dizer que o número 16 não tem raiz quadrada. Como o número oito tem três triângulos em sua representação e não tem raiz quadrada, é possível que a aluna tenha construído um conceito de maneira equivocada sobre as raízes quadradas “se tem duas figuras, o valor de uma figura será a raiz quadrada do número em questão”. Então a aluna disse que o número 16 não teria raiz quadrada, porque tem quatro triângulos em sua representação e não dois, de acordo com a hipótese de só ter raiz quadrada aquele número que possuir duas figuras apenas.

Ela utilizou o teorema em ação que diz que só terá raiz quadrada aquele número que for representado por duas figuras iguais. Este teorema é verdadeiro, só que é incompleto, porque faltam os casos que contém mais de duas figuras.

Pode-se concluir que tivemos alunos que conseguiram construir noções sobre raiz quadrada de um número. Também é interessante discutir sobre a importância das cartas neste assunto, principalmente sobre a quantidade de figuras que acaba determinando a possibilidade de um número ter raiz quadrada.

A oitava questão foi feita para testar se os alunos conseguiam manipular os símbolos e formar novas cartas com novos valores. Qual seria o valor da carta formada por três triângulos azuis, dois quadrados vermelhos e dois círculos pretos. Além de descobrir o valor desta carta, os alunos deveriam citar alguns divisores.

Este exercício foi feito de maneira correta pelos alunos JOA e NAT que chegaram ao número 1800, onde o aluno JOA fez os cálculos e mostrou que  $24 \times 3 = 72$ , depois  $72 \times 5 = 360$  e finalmente  $360 \times 5 = 1800$ . Mas nenhum aluno citou divisores deste número. Uma questão a ser pensada sobre este momento é será que eles não sabiam o que fazer, ou simplesmente não quiseram fazer pelo fato desta ser a última questão e ser trabalhosa.

Estes dois alunos utilizaram o teorema em ação que diz que qualquer número deve ser formado pela multiplicação de todos os seus fatores primos.

Os alunos HEN e LAU escreveram o número 60 como resposta para esta questão, o aluno HEN mostrou cálculos e através da análise feitas nestes cálculos foi possível perceber que seus cálculos estavam incompletos e por isso sua resposta foi 60.

Os alunos YUR e GIL não responderam esta questão. Estes dois alunos mostraram-se desinteressados em grande parte da pesquisa.

Nesta questão os alunos poderiam ter montado esquemas para explorar a ideia de divisores, pela quantidade de símbolos, este número deve ter muitos divisores, esta seria uma análise intuitiva deste caso.

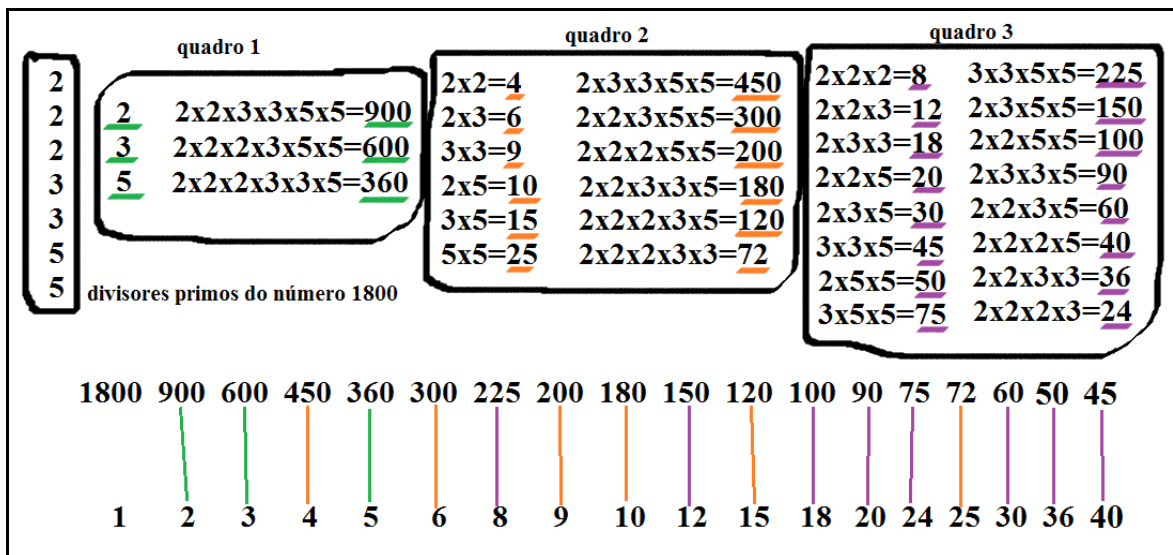


Figura 58: esquema que representa a construção dos divisores do número 1800

Na figura 58 pode ser feita uma análise da quantidade de divisores referente ao número 1800, este número teria 36 divisores. É possível perceber que os divisores estão dispostos aos pares, de maneira que o divisor dois está ao lado do divisor 900 pelo fato de  $2 \times 900 = 1800$ , desta maneira este grupo terá três pares de divisores. O divisor quatro está ao lado do divisor

450 pelo fato de  $4 \times 450 = 1800$ , desta maneira teremos seis pares de divisores neste grupo. O divisor oito está ao lado do divisor 225 pelo fato de  $8 \times 225 = 1800$ , desta maneira teremos oito pares de divisores neste grupo.

### 5.3 ANÁLISES DAS ATIVIDADES APLICADAS COM AS PROFESSORAS

Durante os últimos anos foram feitas três oficinas com professores das séries iniciais do Ensino Fundamental da escola municipal Marechal Mascarenhas de Moraes no Município de Terra de Areia no estado do Rio Grande do Sul. Nestas oficinas os professores foram apresentados ao material didático “*segredo dos números*”, onde foi mostrado como deve ser construído, e também atividades que foram programadas para desenvolver conceitos sobre múltiplos e divisores.

O pesquisador convidou os professores da escola com o apoio da direção e da Secretaria de Educação Municipal da cidade de Terra de Areia para participarem destas oficinas que falavam sobre como podem ser desenvolvidos conceitos sobre múltiplos e divisores com o auxílio do “*segredo dos números*”.

Então, depois de apresentadas explicações do funcionamento e da lógica de formação do material, os professores foram convidados a resolver questões relacionadas ao campo conceitual multiplicativo, o qual estava sendo discutido e explorado durante o início da oficina.

Este estudo com as professoras foi interessante porque serviu para mostrá-las o material “*segredo dos números*” e atividades que podem ser feitas através da utilização deste mesmo. Como este foi construído pensando em uma aplicação para alunos do quinto ano do Ensino Fundamental, foi considerado relevante que os professores destes anos sejam conhecedores deste objeto e de seu funcionamento. Além de mostrá-lo, também foi possível fazer uma análise de como os professores desse grupo pensam sobre os conceitos de múltiplos e divisores.

A seguir podem-se observar as questões aplicadas a um grupo de 19 professores no dia sete de outubro de 2013, na escola Mascarenhas de Moraes.

Questão 1: Construa 5 múltiplos de um número qualquer através do uso dos símbolos que você viu?

Questão 2: Escolham algumas cartas citadas e descubram quais serão seus divisores?

Questão 3: Observando os números primos destacados você deve escolher um deles e formar três novas cartas que contenham este símbolo escolhido.

Questão 4: Construa uma nova carta que contenha dois triângulos azuis, dois quadrados vermelhos, um círculo preto e um coração. Qual será o valor desta nova carta? Cite alguns divisores desta nova carta explorando seus símbolos.

Através da análise das respostas das professoras referentes à primeira questão, foi possível constatar que a metade das professoras citou divisores de algum número que escolheram gerando dúvida sobre seus conceitos em relação ao que vem a ser múltiplo de um número. Uma professora que rubricou o trabalho desenhou a carta referente ao número 40 (três triângulos e um círculo), e logo após citou os números 1, 2, 4, 8 e 5.

Algumas professoras construíram um esquema que chamou a atenção, como podemos observar na figura 59.

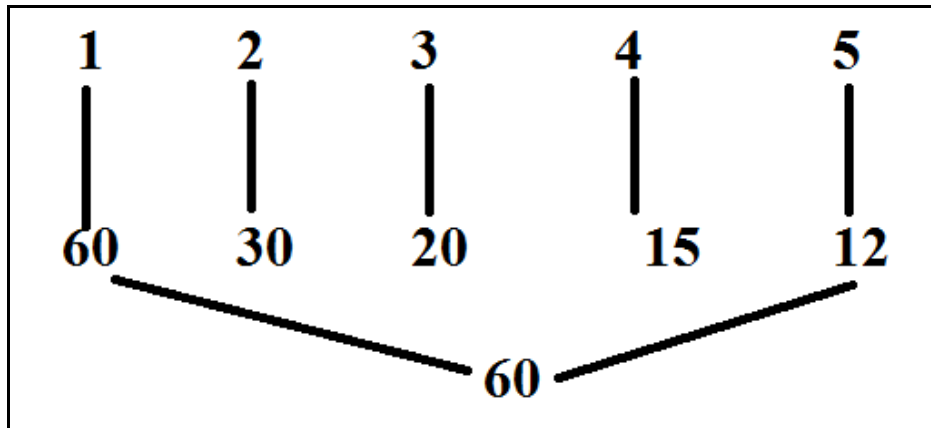


Figura 59: esquema reproduzido conforme feito pela professora SIL

Este esquema foi utilizado durante o trabalho para mostrar os divisores do número 60. Mas a questão neste momento era sobre múltiplos de um número. O que será que a professora tentou mostrar com esse seu esquema? Como a questão tratava de cinco múltiplos de um número, será que SIL relacionou os divisores do número 60 de maneira que seus pares formem o próprio número. Também podemos levantar a hipótese de que essas professoras tenham confundido os conceitos de múltiplos e divisores, escrevendo os divisores ao invés de múltiplos.

A professora DEN escreveu “10 (divisores 1, 2, 5, 10) e 20 (divisores 1, 2, 5, 10, 20)”. Neste caso ela reforça a confusão ao escrever duas vezes a palavra “divisores” e ainda citar os divisores, como pode ser visto no relato.

A metade das professoras escreveu e citou os múltiplos pedidos na questão. A professora LUC escreveu “(2) = 2, 4, 8, 16, 32”, já a professora JAN escreveu “(2) = 4, 6, 8,



10, 12”, e a professora GIS desenhou a carta do número cinco, e ao lado, outras cinco cartas (cartas dos números 10, 15, 20, 25 e 30), todas utilizando os símbolos de maneira correta.

A professora LUC citou múltiplos do número dois, fazendo sempre o dobro do anterior, ou seja, escreveu os múltiplos de dois na forma de potência. A professora JAN escreveu os múltiplos de maneira crescente e contínua, ou seja, uma sequência de números pares. A professora GIS resolveu a questão utilizando as informações que nela continham, ela usou as cartas que possuíam o mesmo símbolo, ou seja, cartas que tiver o símbolo do círculo preto sempre representarão números que serão múltiplos do número cinco.

A professora LUC utilizou um teorema em ação que diz que o dobro de qualquer número sempre representará um múltiplo de dois.

A questão dois foi resolvida pelas professoras de maneira correta, sendo que a maioria escolheu um número do “*segredo dos números*” e citou seus divisores. A professora FAB escreveu “12 = divisores: 1, 2, 3, 4, 6, 12”. Uma professora que não se identificou, a qual será chamada de professora XXX, desenhou a carta referente ao número 10 e logo ao lado escreveu: “2 e 5, escrevendo abaixo,  $2 \times 5 = 10$ ”. A professora ELI desenhou a carta referente ao número 40 escrevendo: “ $2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40$ , ainda ao lado desenhou algumas cartas representando os números 8, 16, 20, 12 e 10”.

A professora FAB escreveu os divisores do número 12 de maneira formal como geralmente são estudados nas escolas, ela listou os divisores de maneira ordenada sem montar um esquema que poderia ajudar na explicação de porque aqueles números seriam os divisores do número 12, e somente aqueles.

A professora XXX utilizou um esquema interessante para descobrir os divisores do número 10, citando os números dois e cinco referindo-se aos valores representantes dos símbolos “triângulo azul e círculo preto”. Ao lado ela ainda citou os números um e 10, completando a lista de divisores do número 10.

A professora ELI montou alguns dos divisores do número 40 juntando as figuras que estavam na carta, por isso chegou aos números oito e 20, para representar o número 10, ela representou com seis triângulos que não supõe nenhuma interpretação lógica. Ela desenhou uma carta com dois triângulos e um círculo, dizendo que esta carta deveria representar o número 12 ao invés de 20 que seria a resposta correta. Ainda desenhou uma carta com quatro triângulos, que formou o número 16, o único detalhe equivocado é que o número 16 não é divisor do número 40, ele tem um triângulo a mais.

Em relação às respostas da questão número três é importante destacar que oito professoras citaram os três múltiplos de algum primo que deveriam escolher. Nove

professoras desenharam as cartas que representam os números dois, três e cinco e duas não responderam.

Algumas professoras citaram os múltiplos do número escolhido como foi o caso da professora MIL “5 = 15-25-50”, enquanto outras desenharam as cartas como no caso da professora CRI “desenhou as cartas dos números 3, 6 e 9” e da professora GIS “desenhou a carta do número 11 e ao lado desenhou as cartas referentes aos números 22, 33 e 44”.

A professora MIL escolheu o número primo cinco e logo ao lado escreveu três de seus múltiplos, ela não citou o próprio número como sendo múltiplo.

A professora CRI desenhou três cartas, onde colocou o número três como próprio múltiplo do número primo três. Neste caso ela utilizou as cartas com suas figuras que ajudam a identificar os múltiplos de um número, ou seja, as cartas que tiver um quadrado vermelho serão cartas que representarão os múltiplos do número três.

A professora GIS desenhou a carta do número 11 e logo a seguir desenhou outras três, sendo que estas tinham um losango laranja ( $2 \times 11 = 22$ ,  $3 \times 11 = 33$  e  $4 \times 11 = 44$ ). Desta maneira além de citar três divisores, ela ajudou a mostrar que para uma carta ser múltipla do número 11, deve ter um losango laranja que é o signo representante do número primo 11.

Na questão número quatro, os professores deveriam montar uma nova carta com dois triângulos azuis, dois quadrados vermelhos, um círculo preto e um coração roxo. A junção destes símbolos em uma única carta representaria o número 1260. A expectativa era como que as professoras fariam para citar divisores deste número. Na figura 60 pode-se analisar um esquema que representa os divisores do número 1260.

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>12</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>18</b>	<b>20</b>	<b>21</b>	<b>28</b>	<b>30</b>	<b>35</b>
1260	630	420	315	252	210	180	140	126	105	90	84	70	63	60	45	42	36
	<b>2</b>				<b>2</b>			<b>3</b>		<b>3</b>			<b>5</b>		<b>7</b>		

**Figura 60: esquema que representa os divisores do número 1260**

Ao analisar a figura 63 foi visto que o número 1260 possui 36 divisores, estes divisores podem ser encontrados através da análise de seus seis divisores primos, ou seja, primeiro devem ser listados os divisores de maneira individual (2, 3, 5, e 7), depois combinados dois a dois ( $2 \times 2 = 4$ ,  $2 \times 3 = 6$ ,  $3 \times 3 = 9$ ,  $2 \times 5 = 10$ ,  $2 \times 7 = 14$ ,  $3 \times 5 = 15$ ,  $3 \times 7 = 21$  e  $5 \times 7 = 35$ ), também devem ser combinados três a três ( $2 \times 2 \times 3 = 12$ ,  $2 \times 3 \times 3 = 18$ ,  $2 \times 2 \times 5 = 20$ ,  $2 \times 2 \times 7 = 28$ ,  $2 \times 3 \times 5 = 30$ ,  $2 \times 3 \times 7 = 42$ ,  $3 \times 3 \times 5 = 45$ ,  $3 \times 3 \times 7 = 63$ ,  $2 \times 5 \times 7 = 70$  e  $3 \times 5 \times 7 = 105$ ), combinados quatro a quatro ( $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$ ,  $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ ,  $2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$ ,  $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$ ,  $2 \times 3 \times 3 \times 7 = 126$ ,  $2 \times 2 \times 5 \times 7 = 140$ ,  $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$  e  $3 \times 3 \times 5 \times 7 = 315$ ) e ainda é possível combinar cinco a cinco ( $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180$ ,  $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 252$ ,

$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$  e  $2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 630$ ). Juntando o número um e o próprio 1260, se obteria todos os divisores do número 1260, listados através deste critério.

Das 19 professoras tivemos apenas uma que não encontrou o número 1260. Algumas mostraram o número obtido através da multiplicação dos divisores citados, mas não apresentaram seus divisores. A professora DEN escreveu “divisores: 2, 4, 3, 5, 7, 35, 45 e 1260”. A professora MIL utilizou uma estratégia interessante que será mostrada no extrato 30.

Handwritten work by Professor MIL:

4

$$\begin{array}{c} 1.260 \\ ? \\ \Delta \Delta \square \square \\ \circ \heartsuit \end{array}$$

$\Delta \rightarrow 2$   
 $\square \rightarrow 3$   
 $\circ \rightarrow 5$   
 $\heartsuit \rightarrow 7$

$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 =$   
 $\checkmark$   
 $4 \times 3 = 12 \times 3 = 36 \times 5 = 180 \Rightarrow \times 7 = 1260 -$

divisores: 1 - 2 - 5 - 10 - 20 - 40 - 80 - 160 - 320 - 640 - 1.260.

1.260	2
640	2
320	2
160	2
80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	1

Extrato 30: retirado da escrita da professora MIL

A escrita da professora DEN representou a maneira como a maioria das professoras citaram alguns divisores do número 1260. Através da análise da escrita da professora MIL no extrato 30 é possível notar que ela utilizou uma estratégia diferente das outras professoras para citar os divisores. Estratégia que é interessante porque ao dividir um número pelos seus fatores primos, vão surgindo vários divisores pelo caminho, e a professora mostrou este conhecimento ao citar os divisores que podem ser observados no extrato 30.

Ocorre que a professora cometeu um erro ao dividir 1260 por dois; ela colocou o resultado de 640 ao invés de 630, e daí para frente, ela passou a encontrar alguns divisores que não são divisores do número 1260. O curioso neste momento é que a professora MIL não ligou os fatores primos do número aos seus divisores deixando dúvida sobre seu domínio em relação aos fatores de um número e seus divisores.

Apesar de parte de o grupo confundir os conceitos de múltiplos e divisores, foi possível encontrar estratégias que ajudam no desenvolvimento desses conceitos. Seria importante fazer um trabalho entre estas professoras e um professor de matemática para enriquecer seus conceitos e assim poder ajudar estas professoras em suas aulas de matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse momento é importante lembrar as questões referentes à pesquisa, tendo como problema central: “Como podemos ensinar a múltiplos e divisores para alunos do quinto ano do Ensino Fundamental com o auxílio do “*segredo dos números*”?” Acredita-se que este problema terá respostas assim que forem respondidas as questões auxiliares deste tema e que serão citadas a seguir:

O que são múltiplos e divisores?

Qual a importância de conhecermos e trabalharmos com números primos?

Como achar divisores com auxílio do material “*segredo dos números*”?

Como reconhecer se um número é primo?

Como descobrir se encontrei todos os divisores de um número?

Como podemos explorar os critérios de divisibilidade com o auxílio do “*segredo dos números*”?

Como relacionar a quantidade de divisores com a quantidade de símbolos de acordo com o “*segredo dos números*”?

Como utilizar jogos para auxiliar no aprendizado da sala de aula?

Como construir maquetes dos números através de seus fatores primos?

Depois dos alunos tomarem conhecimento do funcionamento do material didático referente a este trabalho, onde os mesmos aprenderam sobre os significados dos símbolos de cada carta e como deveriam ser construídas as cartas dos números compostos, reforçando a ideia de que todas as operações utilizadas na construção dos valores das cartas deveriam ser de multiplicação entre os valores dos símbolos contidos em cada uma delas. Aí, passamos a trabalhar os conceitos fundamentais deste trabalho.

A primeira questão que foi trabalhada em aula foi sobre a construção de múltiplos de algum número. Neste momento os alunos construíram vários múltiplos de alguns números escolhidos pelo pesquisador. Quando eles procuraram múltiplos de algum número primo, não tiveram muitas dificuldades em listar vários números, atribuo este sucesso ao fato de que foi construída uma propriedade que toda carta que conter o símbolo referente ao número primo será múltiplo daquele número, esta propriedade facilitou o encontro dos múltiplos dos números primos.

Quanto aos múltiplos de números compostos, não foram tão simples de serem encontrados, mas o procedimento foi similar ao anterior. Como o número quatro contém dois triângulos azuis, então toda carta que contiver dois triângulos azuis será um múltiplo do

número quatro. Assim podemos dizer que a construção dos múltiplos foi satisfatória. Neste ponto os símbolos e suas cores foram fundamentais no desenvolvimento desta atividade e na construção de conceitos referentes ao campo conceitual multiplicativo. Alguns alunos tomavam uma carta que era representada por dois símbolos, por exemplo, um triângulo azul e um quadrado vermelho e, então, diziam que toda carta que tivesse estas duas figuras seriam representantes de múltiplos desse número.

No momento em que foi trabalhado com os múltiplos, também foi introduzida a ideia de divisores de um número. Nesse caso, foi possível observar que os alunos não encontraram dificuldades em listar divisores nas atividades em que foram questionados. As cartas sempre contêm seus fatores primos ali representados pelos símbolos, então os alunos citavam todos os divisores primos. Encontraram algumas dificuldades em citar alguns divisores. Pode-se dizer que foi uma dificuldade gradativa, na medida em que era necessário encontrar divisores através da combinação de três símbolos ou mais, a dificuldade aumentava.

Mesmo com dificuldades em encontrar alguns divisores mais difíceis de serem percebidos, os alunos conseguiram cumprir a maioria das atividades referentes aos divisores. O certo é que não conseguiram citar todos os divisores de um número que possui muitos divisores, e foram poucos os casos em que os alunos citaram todos e, nesse caso, geralmente eram números com poucos divisores.

Os números primos foram destacados pela construção, ou seja, na medida em que uma carta possua um único símbolo, ela será representante de um número primo. Esta facilidade está ligada ao fato do uso do “*segredo dos números*”, já que não é tão fácil reconhecer um número primo. Quando os alunos foram questionados sobre quais seriam os números primos do “*segredo dos números*”, eles não tiveram dúvida em separar as cartas com um único símbolo. É importante ressaltar que foi trabalhado com os alunos o conceito de número primo, aquele que pode ser dividido por um e por ele mesmo, e ainda, os alunos constataram que cartas com um único símbolo possuíam somente os divisores triviais, que seria o um e o próprio número.

Pelas análises e estudos feitos com esses alunos, posso concluir que o “*segredo dos números*” contribui no desenvolvimento dos conceitos sobre números primos, principalmente no reconhecimento dos números através de seus símbolos. O conceito pode ter sido construído de maneira parcial entre os alunos, pelo menos eles podem saber que os números primos só têm os divisores triviais.

Na parte que trata de saber se todos os divisores foram encontrados, os alunos conseguiram citar vários divisores, mas não conseguiram chegar ao total de divisores, principalmente, nos casos com vários fatores primos.

Neste momento, os esquemas são fundamentais para que não seja esquecido nenhum divisor. Este assunto foi discutido durante o trabalho e pude perceber que o uso dos esquemas não foi completamente dominado pelos alunos, isso porque estes esquemas exigem conjecturas mais avançadas que talvez estes alunos não tenham alcançado de maneira integral.

Os critérios de divisibilidade foram construídos por alguns alunos já que estão diretamente relacionados aos divisores de um número. A diferença é que é preciso saber de antemão, se um número pode ser dividido sem ser feito nenhum cálculo. Assim, é possível dizer que os alunos construíram conceitos sobre a divisibilidade, principalmente em relação aos números primos, critério facilitado pelo uso do “*segredo dos números*”. E em alguns casos foi possível perceber que alguns alunos criaram conceitos mais elaborados.

O jogo da batalha trabalhou várias conjecturas sobre múltiplos e divisores de algum número. Durante o jogo os alunos mostraram algumas dificuldades em montar estratégias para ganhar, com a evolução das partidas houve uma pequena melhora, então alguns dos alunos começaram a entender como deveriam agir para ganhar algumas rodadas. Mas não chegaram a utilizar de maneira satisfatória o “poder” da carta do número 60 e não aprenderam a utilizar o empate a seu favor, no sentido de ganhar o jogo.

Acredito que os alunos poderiam ter obtido melhores resultados no jogo se tivéssemos mais rodadas, porque na medida em que as partidas foram passando, foi possível notar uma evolução nas atitudes e maneiras como eles jogavam.

Este jogo pode ajudar nas construções de conceitos mais complexos do campo conceitual multiplicativo, conceitos do tipo, todos os números formados pelos fatores primos do número 60 são divisores do próprio número, mas existem alguns dos divisores que não tem relação de ser múltiplos ou divisores uns dos outros.

No que diz respeito às maquetes, posso dizer que foi o melhor momento de todas as atividades, onde os alunos interagiram e procuraram soluções para os problemas que foram surgindo durante as construções. Durante as análises foi possível perceber que os alunos construíram maquetes de vários números, atingindo os objetivos propostos para este momento.

As maquetes ajudaram na construção dos conceitos do campo conceitual multiplicativo porque os alunos trabalharam a ideia de múltiplos e divisores ao mesmo tempo, quando um palito azul ligava dois números, em um sentido, a operação a ser feita era uma multiplicação

pelo fator primo dois, enquanto que para o sentido oposto, a operação era uma divisão pelo mesmo fator primo dois.

Acredito que após estas discussões sobre as questões auxiliares a respeito do trabalho com múltiplos e divisores, posso dizer que construí uma maneira de ensinar múltiplos e divisores a alunos do quinto ano do Ensino Fundamental com o auxílio do material didático “*segredo dos números*”.

Este trabalho levou os alunos a trabalharem com conceitos sobre múltiplos e divisores, e após as análises dos encontros é possível dizer que os mesmos apresentaram crescimento em seus conceitos sobre o assunto. O que foi possível constatar em tarefa aplicada alguns dias após os primeiros encontros.

Sobre o trabalho aplicado com o grupo de professoras, o principal objetivo era apresentar uma maneira alternativa de trabalhar com os múltiplos e divisores de algum número. Este trabalho foi proveitoso porque, ao mesmo tempo em que as professoras trabalharam com o campo conceitual multiplicativo, também foi possível discutir sobre as dificuldades enfrentadas pelos alunos na construção dos conceitos desse grupo.

Aqui surge uma questão sobre a qualidade do ensino ofertada atualmente. Acredito que através de trabalho cooperativo, os professores podem qualificar-se e, com isso, podem promover mudanças na qualidade da educação.

Estas análises nos mostram que é possível trabalhar em conjunto para melhorar o conhecimento dos alunos. Esta ideia pode ser aplicada através de grupos cooperativos. Estes grupos podem ser formados por professores das séries iniciais e professores especialistas em educação matemática, pautado por atitudes cooperativas. Em um próximo trabalho, pretendo propor a formação de um grupo dedicado aos estudos sobre ensinar Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental. É preciso criar grupos preocupados em melhorar a educação matemática em todas as escolas, principalmente nas escolas públicas.

O produto didático que pode ser encontrado no apêndice foi criado para ajudar os alunos a desenvolverem conceitos sobre os múltiplos e divisores. Este produto foi criado através de atividades aplicadas durante a pesquisa e outras que podem ajudar no desenvolvimento de conceitos sobre múltiplos e divisores.

Após o desenvolvimento deste trabalho pode-se notar que este produto poderá ajudar outros professores a desenvolver conceitos sobre múltiplos e divisores.

Este trabalho pode contribuir no processo de compreensão da multiplicação e divisão, operações que seguidamente estão sendo utilizadas de maneira equivocada pelos alunos.



## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GROSSI, Esther Pillar. **Psicogênese e Aprendizagem do Conceito de Múltiplo**. GEEMPA, Porto Alegre, 1986.

MERLINI, Vera Lucia. **As potencialidades de um processo formativo para a reflexão na e sobre a prática de uma professora das séries iniciais: um estudo de caso**. PUC/SP. Doutorado em Educação Matemática, São Paulo, 2012.

MOREIRA, Marco Antônio. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciência e a Pesquisa nesta Área**. RS, Porto Alegre: Instituto de Física, UFRGS, junho de 2002.

PONTE, João Pedro da. (2006). **Estudos de caso em educação matemática**. Bolema, 25, 105-132.

SANTOS, Aparecido dos. **Processos de formação colaborativa com foco no Campo Conceitual Multiplicativo: um caminho possível com professores polivalentes**. PUC / SP. Doutorado em Educação Matemática, São Paulo, 2012.

VERGNAUD, Gérard. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar/ Gérard Vergnaud; tradução Maria Lucia Faria Moro; revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares**. -Curitiba: Ed. Da UFPR, 2009.

VERGNAUD, Gérard. **A Trama dos Campos Conceituais na Construção dos Conhecimentos**. Revista do GEMPA, Porto Alegre, Nº 4: 9-19. 1996.

VERGNAUD, Gérard. **Conceitos e Esquemas numa Teoria Operatória da Representação**. Psychologie Française, 30-3/4: 245-252. 1985.

VERGNAUD, Gérard. **La Théorie des Champs Conceptuels**. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10 (23): 133-170. 1990.

VERGNAUD, Gérard. **O Campo Conceitual da Multiplicação**. GEEMPA, Seminário internacional sobre Didática da Matemática. São Paulo e Porto Alegre, setembro de 2001.

VERGNAUD, Gerard. **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas**. Análise Psicológica, volume 1: 75-90. 1986.

YIN, Robert K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. Trad. Daniel Grassi -2.ed- Porto Alegre: Bookman, 2001.

## 8 APÊNCICE

### 8.1 PRODUTO DIDÁTICO

O produto pedagógico produzido ao final desta dissertação será o novo “*segredo dos números*”, que recebeu este nome porque foi baseado no trabalho da professora Ester P. Grossi no ano de 1986 conforme foi discutido durante o trabalho. Este produto será chamado de novo porque sofreu modificações em relação ao produto anterior, como o aumento dos números até a carta contendo o número 100, criação de símbolos com cores para representar cada número primo e todo número primo menor que o número 100 terá seu representante.

Este material foi produzido através da impressão das cartas que foram feitas pelo pesquisador. As cartas utilizadas neste trabalho foram feitas através da impressão das cartas em folha de papel comum, depois foram coladas em placas de MDF (7 cm x 10 cm) com fina espessura. Por cima das cartas foi colada uma folha plástica transparente, que tornou o material mais resistente.

Este material pode ser feito com folhas de papel cartaz ou outro material que julgar possível, que torna o custo menor e ainda facilita a produção. Em outros momentos, foi construído um material semelhante a este em sala de aula, utilizando cartolina e canetas coloridas para desenhar os símbolos. A diferença deste outro trabalho, é que foram os alunos que escolheram os símbolos para cada número primo que descobriam. Assim os alunos começaram a discutir os conceitos sobre múltiplos e divisores durante a construção que eles próprios fizeram.

A seguir será discutido como foi construído o “*segredo dos números*” utilizados na pesquisa, desde como foram escolhidos os símbolos, até porque foram construídas cem cartas. É importante ressaltar que cada número primo terá um símbolo diferente que o represente, assim teremos símbolos para representar os números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 e 97. Os outros números serão formados através da multiplicação dos primos, como exemplo pode-se destacar:  $2 \times 2 = 4$ , assim o número quatro terá dois triângulos azuis, “figura que representa o número dois”.

O “*segredo dos números*” pode ser feito através da escolha de algum símbolo que deve representar o número dois, “em nosso caso foi escolhido um triângulo azul para representá-lo”. O próximo passo é escolher outro símbolo para representar o número três, “em nosso caso foi escolhido um quadrado vermelho”. Como  $2 \times 2 = 4$ , o número quatro não necessitaria de um novo símbolo para representá-lo, “em nosso material foi representado por dois triângulos azuis”. O número cinco precisaria de outro símbolo, “que foi escolhido o círculo preto”.

Como  $2 \times 3 = 6$ , surgiu um novo número composto, “que foi representado por um triângulo azul e um quadrado vermelho”. O número sete precisaria outro símbolo porque não seria possível criá-lo através da multiplicação de outros primos, “então foi criado o coração roxo para representar o número sete”. Como  $2 \times 2 \times 2 = 8$ , surgiu o primeiro número composto com três símbolos, “que foi representado por três triângulos azuis por construção, já que basta substituir os três fatores dois por triângulos azuis”. Como  $3 \times 3 = 9$ , surgiu outro número composto, “que foi representado por dois quadrados vermelhos”. Como  $2 \times 5 = 10$ , criou-se mais um número composto, “que foi representado por um triângulo azul e um círculo preto”. Para o número onze surgiu à necessidade de se criar um novo símbolo, “então foi criado um losango laranja”. Como  $2 \times 2 \times 3 = 12$ , aí estava outro número composto, “que foi representado por dois triângulos azuis e um quadrado vermelho”. O número treze não pode ser obtido através do produto de outros primos, então surgiu à necessidade de outro símbolo, “que foi representado por um sinal de ambulância da cor verde”. Como  $2 \times 7 = 14$ , “foi representado por um triângulo azul e um coração roxo”. Assim seguiu a construção, utilizando símbolos que já estavam definidos para a criação de novos números compostos e na medida em que foram surgindo novos números primos, foram criados novos símbolos para representá-los. Você poderá conferir como ficaram as cartas do “*segredo dos números*” no seguimento deste trabalho.

Além do material, também foi sugerida uma sequência de atividades relatadas a seguir.

**Uma primeira questão a ser desenvolvida é sobre a curiosidade dos alunos.**

É importante que os alunos tenham algum tempo para entrar em contato com o material e poder pensar sobre o que pode ser aquilo e porque aquelas cartas contêm aqueles símbolos. Por isso a primeira atividade colocará os alunos frente a frente com o material “*segredo dos números*”, onde terão tempo suficiente para explorar livremente sem receber nenhuma informação.

**Uma segunda questão deverá tratar dos múltiplos de um número.**

Então os alunos podem ser questionados sobre quantas cartas deverão ter triângulos azuis e porque eles acreditam que isso ocorre.

O que é um múltiplo de um número?

Como é possível saber se um número é múltiplo do número três através das análises das cartas? Quantas cartas devem fazer parte deste grupo? Como você explicaria esta quantidade de cartas.

Como descobrir as cartas que representam os múltiplos do número cinco? Como pode ser resolvida esta questão.

Como encontrar as cartas que representam os múltiplos do número sete? Qual seria a primeira carta maior que 100 que seria um múltiplo do número sete?

Como é possível construir múltiplos do número quatro através das análises das cartas?

Quais símbolos devem existir em uma carta para que essa seja considerada um múltiplo do número quatro?

Qual relação pode ser formada entre a quantidade de múltiplos do número dois e a quantidade de múltiplos do número quatro? Porque isso aconteceu?

Como é possível afirmar que uma carta seja representante de um múltiplo de seis?

Como se pode afirmar que uma carta represente um múltiplo do número oito?

Como reconhecer se uma carta faz parte do grupo dos múltiplos do número dez.

Como saber se um número deve ser múltiplo do número quatorze através da análise de seus símbolos?

É importante salientar que estamos trabalhando com o “*segredo dos números*”, que possui cartas que representam até o número 100. E que todas estas questões discutidas nesta segunda questão tratam dos múltiplos de algum número.

**A terceira questão trata dos divisores de algum número através das análises das cartas do “*segredo dos números*”.**

O que é um divisor?

Cite divisores do número dez. Como é possível afirmar que estes números citados são divisores do número dez. Será que o número três pode ser divisor do número dez. Explique sua resposta.

Cite divisores do número dezesseis. Será que o número cinco pode ser divisor do número dezesseis. Explique sua resposta.

Cite divisores do número dezoito. Será que existem outros divisores deste número que não foram listados. Será que o número sete é divisor do número dezoito. Explique sua resposta.

Cite divisores do número trinta. Será que o número quinze pode ser divisor do número trinta. Explique sua resposta. Será que o número onze pode ser divisor do número trinta. Explique sua resposta.

Cite divisores do número setenta e dois. Como você escolheu estes divisores. Será que existem mais divisores deste número.

Cite divisores do número sessenta e sete. Como você chegou até estes números. Será que existem mais divisores deste número.

**A quarta questão deve ajudar a conceituar os números primos.**

O que é um número primo?

Como reconhecer se um número é primo através da análise das cartas do “*segredo dos números*”.

Será que todos os números primos seguirão alguma propriedade em relação à quantidade de figuras. Quantos divisores deve ter um número primo?

Será que o número trinta e oito é um número primo. Justifique sua resposta.

**A quinta questão discutirá os critérios de divisibilidade através do estudo das cartas do “*segredo dos números*”.**

O que é critério de divisibilidade?

Como é possível dizer que uma carta contém um número que pode ser dividido pelo número dois. Explique sua resposta.

Que símbolos uma carta necessita ter para ser divisível pelo número três? Explique sua resposta.

Por qual número será divisível toda carta que tiver um triângulo azul e um quadrado vermelho? Explique sua resposta.

Por qual número será divisível toda carta que tiver dois triângulos azuis? Explique sua resposta. Será que ela será divisível por outros números. Explique.

Qual número dividirá as cartas que tiver um círculo preto e um quadrado vermelho? Explique esta resposta.

**A sexta questão irá tratar da quantidade de divisores de um número em relação à quantidade de símbolos.**

Quantos divisores têm o número 13? Como explicar esta resposta. Será que existem outras cartas que contenham a mesma quantidade de divisores do número 13. Quais seriam? Explique sua resposta.

Quantos divisores têm o número 9? Como pode ser explicada esta quantidade. Você acha que existem outras cartas que contenham a mesma quantidade de divisores do número nove. Cite algumas. Explique esta conclusão.

Quantos divisores têm o número 15? Como você pode explicar esta quantidade. Cite outras cartas que você acha que tenham a mesma quantidade de divisores do número 15. Explique porque você escolheu estes números.

Quantos divisores devem ter o número oito? Como explicar esta resposta. Será que existem outros casos como estes nas cartas do “*segredo dos números*”. Explique suas conclusões.

Quantos divisores têm o número 30? Explique sua resposta. Será que existe algum divisor que não foi citado. Como saber se foram citados todos os divisores deste número.

**A sétima questão discute a quantidade de divisores de um número.**

Tente representar os divisores do número 14?

O que é um esquema? Como montar um esquema?

Construir um esquema para mostrar os divisores do número 45, de maneira que não se esqueça de nenhum. Será que isso é possível?

Construir um esquema para mostrar os divisores do número 42. Como saber se todos os divisores foram citados?

**A oitava questão trata da ideia de potência e raiz quadrada de um número através das observações feitas nas cartas do “segredo dos números”.**

O que é potência de um número? Como relacionar os símbolos do “segredo dos números”.

O que raiz quadrada de um número? O “segredo dos números” pode ajudar a encontrar a raiz quadrada de algum número?

Será que o número 16 é representante de uma potência. A qual número primo esta potência deve se referir. Explique sua conclusão.

Cite uma carta que seja potência do número cinco. Por que escolheu esta carta. Explique sua resposta.

O número 49 tem raiz quadrada. Qual deve ser a raiz quadrada deste número? Explique sua resposta.

Como saber se uma carta está representando uma potência. Cite alguns exemplos.

Como podemos dizer que uma carta possui raiz quadrada. Cite alguns exemplos.

Será que o número 36 representa uma potência. Explique sua resposta.

**A nona questão será sobre a construção das maquetes dos números.** Acredito que esta seja a atividade que irá fechar as atividades com aplicações dos conceitos estudados durante as outras atividades. Aqui os alunos deverão montar as maquetes, que serão construídas através da multiplicação dos divisores primos, onde estas multiplicações serão representadas por palitos.

Construir a maquete referente ao número 32. Como será esta maquete? Qual deve ser a sua dimensão? Qual a relação da dimensão com a quantidade de divisores primos do número 32? Como explicar isso.

Construir a maquete referente ao número 24. Como será esta maquete? Qual será a sua dimensão? Explique.

Construir a maquete referente ao número 70. Qual deve ser a sua dimensão? Explique por que esta maquete ocupa esta forma no espaço.

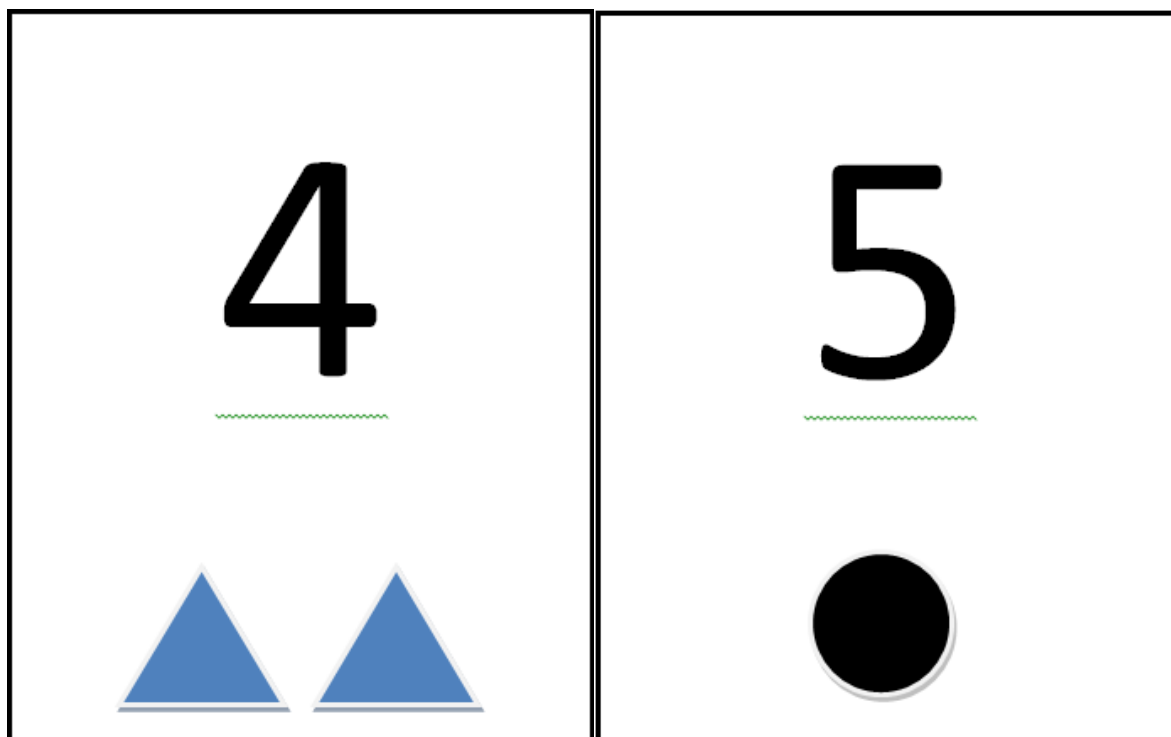
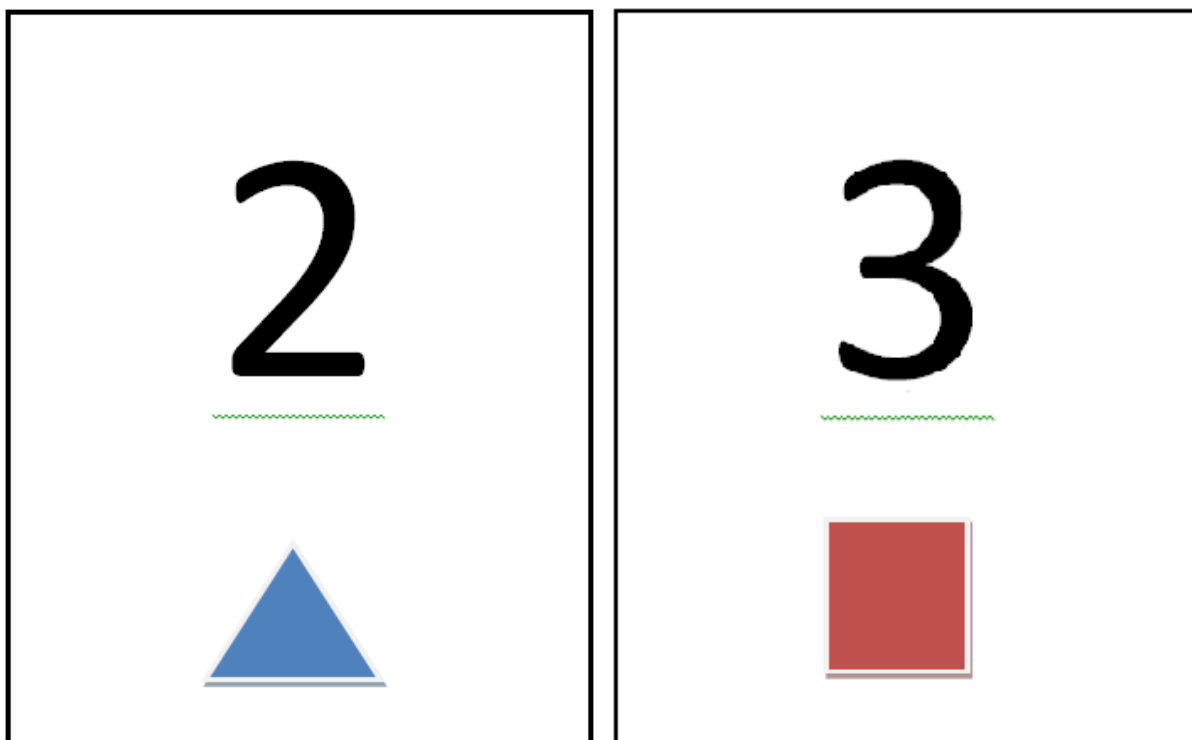
A respeito das cartas serem construídas até o número 100, foi em razão de explorar a ideia de tabuada trabalhada nas escolas, então teria cartas de todos os múltiplos que são chamados de tabuada.

As cores foram escolhidas com a intenção de auxiliar na visualização dos múltiplos de algum número em questão. Entende-se que esta informação, somada à informação de termos figuras diferentes, auxilia na caracterização de cada carta.

Estas atividades trabalhadas durante algum tempo devem ajudar na construção dos campos conceituais multiplicativo, onde os alunos devem construir conceitos sobre múltiplos e divisores, além de construírem conjecturas sobre os assuntos trabalhados durante as atividades.

**MATERIAL DIDÁTICO “segredo dos números”**

A seguir serão listadas as cartas do “segredo dos números” criado durante este trabalho.





6



7



8



9



10



11



12



13



14



15



16



17



18



19



20



21



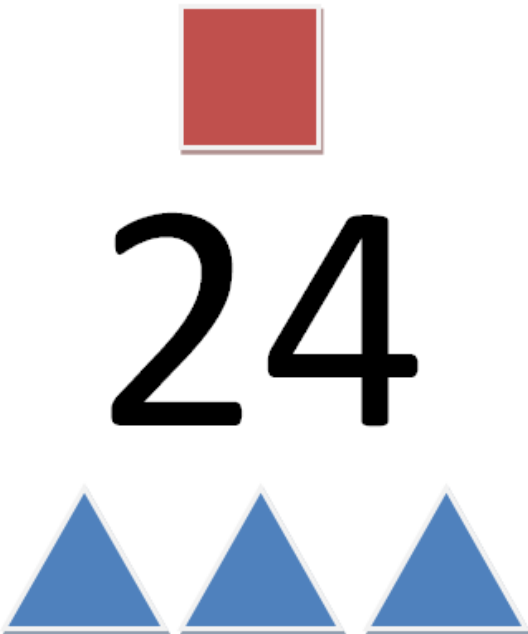
22



23



24



25



26



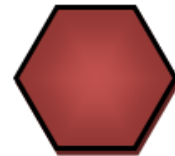
27



28



29



30



31



32



33



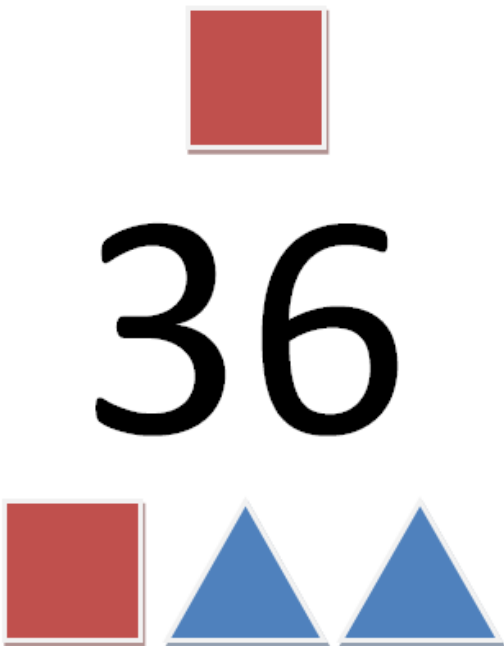
34



35



36



37





38



39



●  
40



41



42



43



44



45



46



47



48



49



50



51

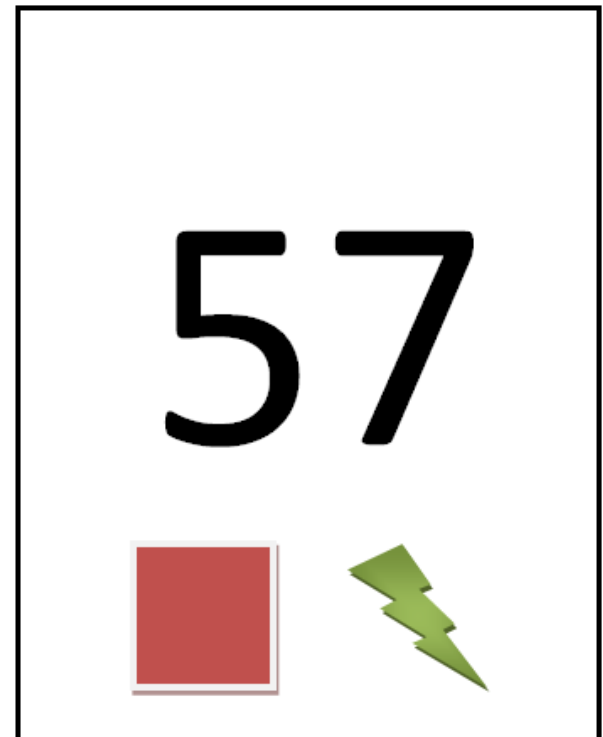
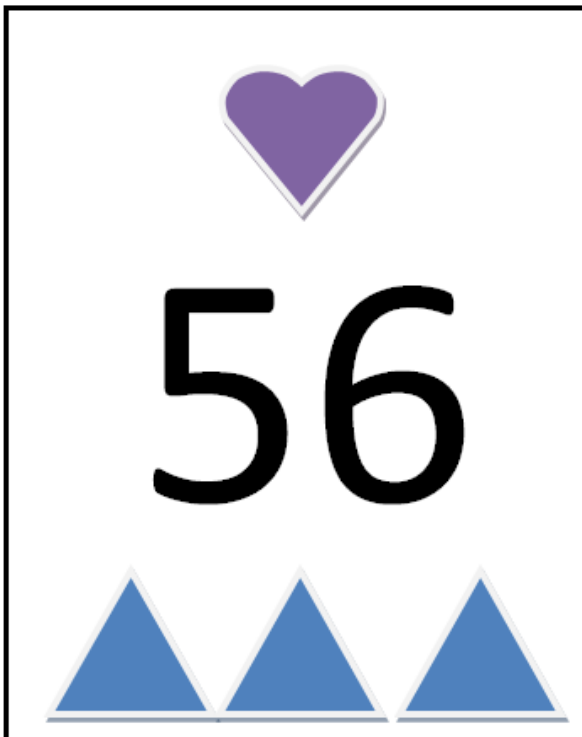
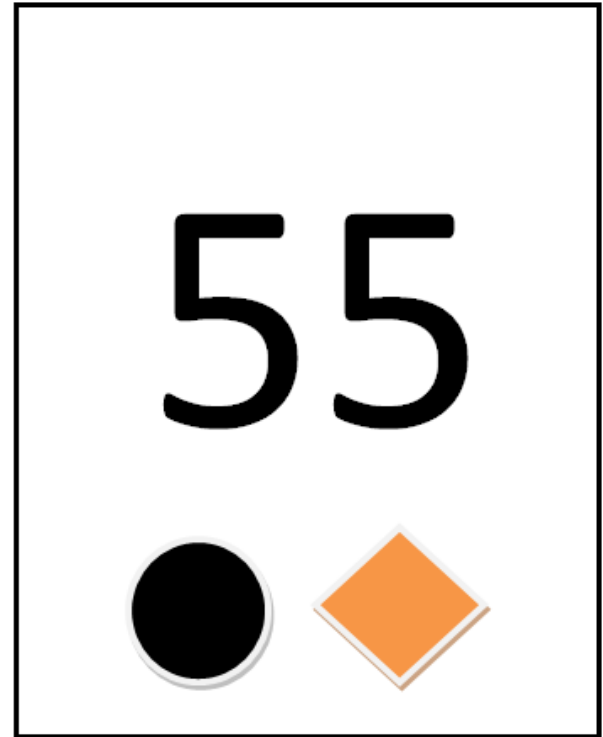
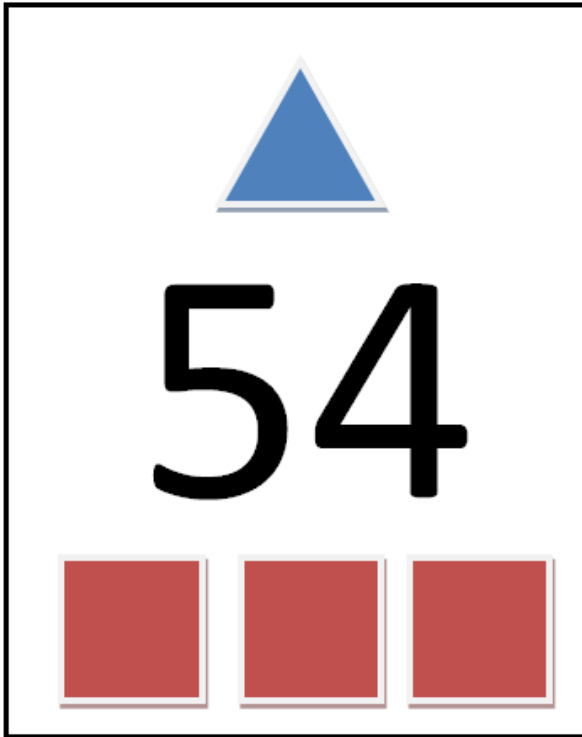


52

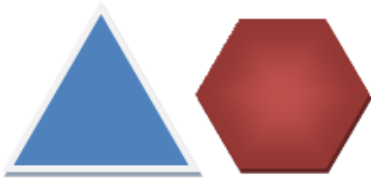


53





58



59



●  
60



61



62



63



64



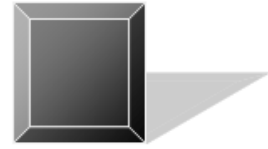
65



66



67



68



69





70



71



72



73



74



75



76



77



78



79



80



81



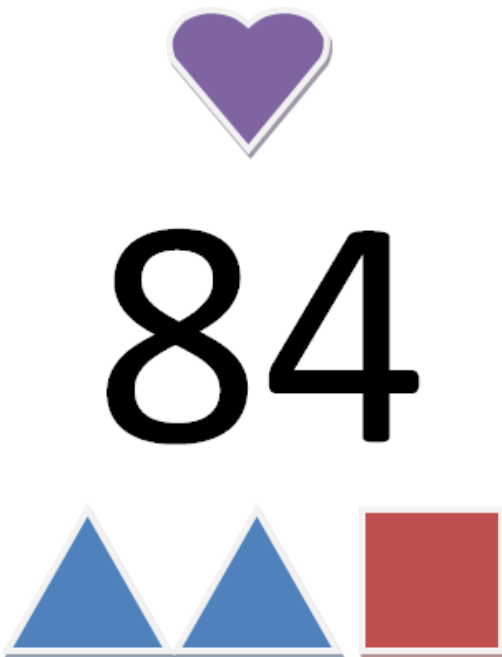
82



83



84



85



86



87

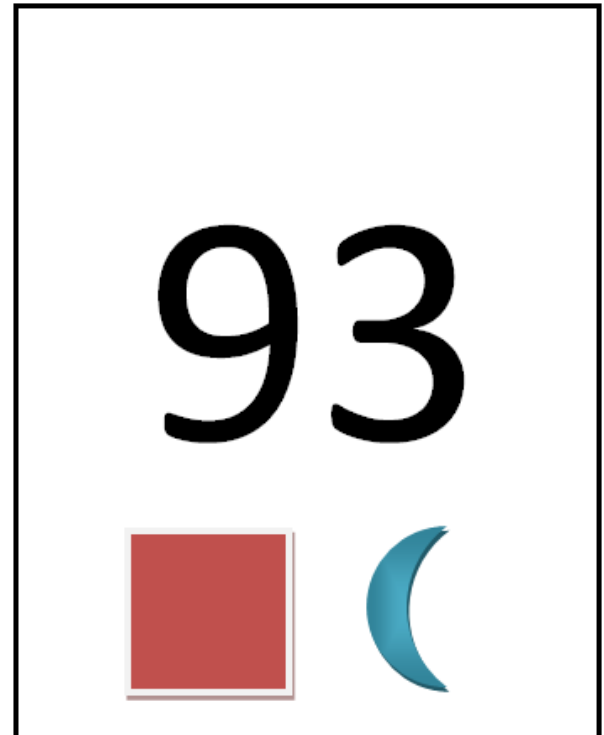
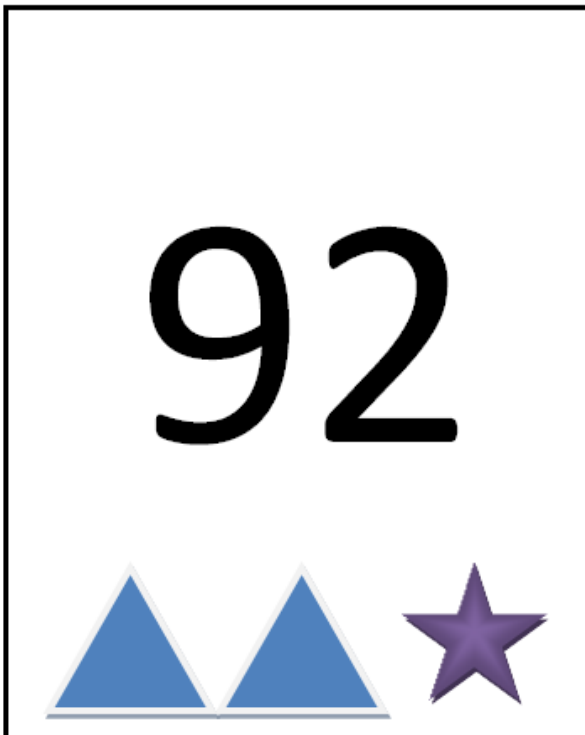
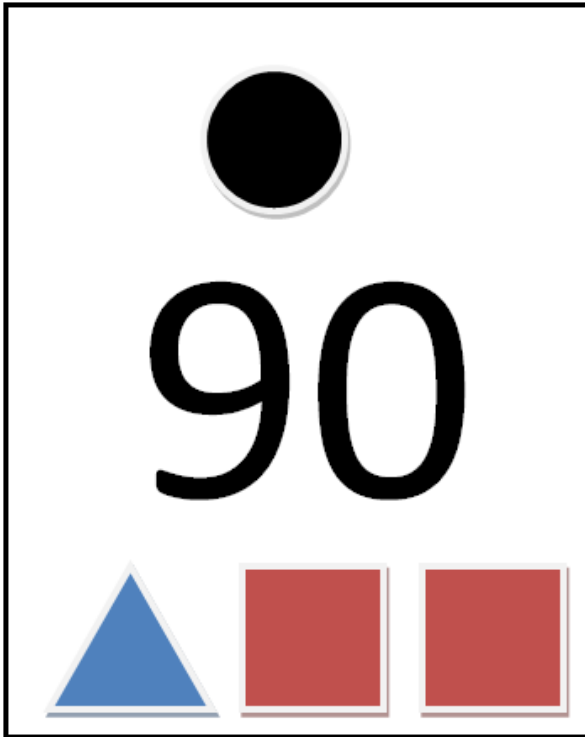


88



89





94



95



96



97



98



99



●  
100



1





## 8.2 TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO DOS ALUNOS

Eu, \_\_\_\_\_, R.G. \_\_\_\_\_, responsável pelo (a) aluno (a) \_\_\_\_\_, da turma 51 da Escola Estadual Guilherme Schmitt, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o (a) aluno (a) participe da pesquisa intitulada “Como Podemos Ensinar a Multiplicação e Divisão para Alunos do Quinto Ano do Ensino Fundamental com o Auxílio do *“segredo dos números”* desenvolvida pelo pesquisador Juneor dos Santos Brehm. Fui informado (a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Marcus Basso, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone \_\_\_\_\_ ou e-mail (mbasso@ufrgs.br).

Tenho ciência de que a participação do (a) aluno (a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado (a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

Trabalho que visa descobrir a contribuição do uso do material pedagógico intitulado *“segredo dos números”* na sala de aula, para isso os alunos serão convidados a resolver atividades manipulando o material e tentando solucionar alguns problemas. Nos últimos encontros teremos um jogo pedagógico e a construção de um material chamado maquete dos números.

Fui também esclarecido (a) de que o uso das informações oferecidas pelo (a) aluno (a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do (a) aluno (a) se fará por meio da participação nas oficinas/aulas/encontros/palestras, em que ele (ela) será observado (a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do (a) aluno (a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc., sem identificação. Quanto à filmagem tenho ciência de que será apenas para que o pesquisador possa revisar os resultados do trabalho em sua casa. A colaboração do (a) aluno (a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado (a), poderei contatar o (a) pesquisador (a) responsável no endereço Rua José Quadros número 3000, e-mail jsbrehm@hotmail.com.

Fui ainda informado (a) de que o (a) aluno (a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do (a) pesquisador (a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

### 8.3 TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO DAS PROFESSORAS

Eu, \_\_\_\_\_, R.G. \_\_\_\_\_, professor da escola Marechal Mascarenhas de Moraes declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada “Como Podemos Ensinar a Multiplicação e Divisão para Alunos do Quinto Ano do Ensino Fundamental com o Auxílio do *segredo dos números*” desenvolvida pelo pesquisador Juneor dos Santos Brehm. Fui informado (a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Marcus Basso, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone \_\_\_\_\_ ou e-mail (mbasso@ufrgs.br).

Tenho ciência de que minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado (a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

Trabalho que visa descobrir a contribuição do uso do material pedagógico intitulado “*segredo dos números*” no ensino de conceitos sobre múltiplos e divisores e que será desenvolvida uma pequena atividade onde o material será apresentado a todos (as). Depois disso teremos a aplicação de um jogo pedagógico.

Fui também esclarecido (a) de que o uso das informações por mim oferecidas será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A minha colaboração se fará por meio da participação nas oficinas/aulas/encontros/palestras, em que serei observado (a) e minha produção analisada. No caso de fotos, obtidas durante a minha participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc., sem identificação. Quanto à filmagem tenho ciência de que será apenas para que o pesquisador possa revisar os resultados do trabalho em outro momento. A minha colaboração se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado (a), poderei contatar o (a) pesquisador (a) responsável no endereço Rua José Quadros número 3000, e-mail jsbrehm@hotmail.com.

Fui ainda informado (a) que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do (a) pesquisador (a):

Assinatura do Orientador da pesquisa: