

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA**

**REGULARIDADE DOS CONJUNTOS DE JULIA  
Paulo Ricardo da Silva**

**Dissertação submetida ao Curso de Pós-Graduação em  
Matemática como requisito parcial para obtenção  
do grau de Mestre**

**Orientador  
Prof. Dr. Claus Ivo Doering**

**Porto Alegre, Dezembro de 1990**

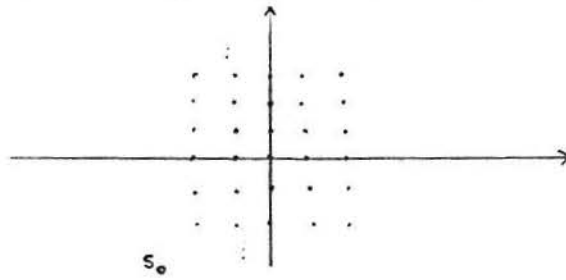
## ÍNDICE

Resumo .....	II
Abstract .....	III
Introdução .....	IV
§1. Famílias Normais .....	1
§2. A Dinâmica na Esfera de Riemann .....	16
§3. Os Conjuntos de Julia são Uniformemente Perfeitos .....	26
§4. A Regularidade do Conjunto de Julia .....	34
Bibliografia .....	39

## Abstract

In this work we present a sistematic exposition of a result due to R. Mañé and L. Rocha, who proved that the Julia set of a rational map of the Riemann sphere is uniformly perfect. We start with necessary basic concepts and close with a proof of a result of C. Pommerenke which allows us to conclude the Dirichlet regularity of the Julia set.

Sejam  $S_m = \{2^{-m}(n + ip) : n, p \in \mathbb{Z}\}$  e  $S = \bigcup_m S_m$



Consideremos  $\tilde{S}$  como sendo  $S$  sem repetições.  $\tilde{S}$  é enumerável,  $\tilde{S} = \{z_1, z_2, \dots\}$ . É claro que  $\tilde{S}$  é denso em  $K$ .

Seja  $\{f_\alpha(z_1)\}$  na esfera. Denotamos  $\omega_1 = \liminf_n f_{1,n}(z_1)$  onde  $f_{1,n}$  é uma subsequência de  $f_\alpha$ . Construímos agora uma subsequência  $f_{2,n}$  de  $f_{1,n}$  da seguinte forma: temos que  $\{f_{1,n}(z_2)\}$  tem subsequência convergente e denotamos  $\omega_2 = \liminf_n f_{2,n}(z_2)$ . Assim  $f_{2,n}$  converge em  $z_1$  e em  $z_2$ . Seguindo o raciocínio obtemos  $\mathcal{F} \supset \{f_{1,n}\} \supset \{f_{2,n}\} \supset \dots$  onde  $\lim_{m,n} \rho(f_{k,m}(z_j), f_{k,n}(z_j)) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, k$ .

Para simplificar a notação denotamos  $f_n = f_{n,n}$ . Temos assim que  $f_n$  é equicontínua em  $K$ .

Dado  $\epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon)$  tal que  $\rho(f_n(z_1), f_n(z_2)) < \epsilon \quad \forall z_1, z_2 \in K$  desde que  $|z_1 - z_2| < \delta$ .

Tomamos  $m_0$  tal que  $2^{-m_0} < \delta$  e  $\{z_1, \dots, z_N\}$  um subconjunto finito de  $\{z_k\}$  exigindo  $m \leq m_0$  em  $2^{-m}(n + ip)$ .

Sejam  $z \in K$  e  $z_k$  do finito tal que  $|z - z_k| < \delta$ . Então

$$\rho(f_m(z), f_n(z)) \leq \rho(f_m(z), f_m(z_k)) + \rho(f_m(z_k), f_n(z_k)) + \rho(f_n(z_k), f_n(z)) \cdot \{f_n(z_k)\}$$

é convergente para  $k = 1, 2, \dots, N$  e portanto  $\exists p = p(\epsilon, N)$  tal que  $\rho(f_m(z_k), f_n(z_k)) < \epsilon$  e para  $m, n > p$  e  $k \leq N$ . A estimativa vale uniformemente para  $z$  em  $K$  e portanto  $\{f_n\}$  converge uniformemente em  $K$ . Pela convergência uniforme a função limite é meromorfa em  $K$ .

Para passar de  $K$  para todo  $D$  consideramos  $D_0, D_1, \dots, D_0 = K$ , tal que  $\overline{D_{k-1}} \subset D_k \subset D \quad \forall k$  e tal que  $\forall z \in D \exists m$  tal que  $z \in D_k$  para  $k > m$ .

Assim  $(f_n)_n$  converge uniformemente em  $D_0$  e contém subsequência que converge uniformemente em  $D_1$ . Segue-se com o mesmo raciocínio e aplica-se o método da diagonal novamente.  $\diamond$

### 1.5 Teorema

Uma família  $\mathcal{F}$  de funções  $f_\alpha$ ,  $\alpha \in \Lambda$ , analíticas em um domínio  $D \subseteq \mathbb{C}$ , é normal em  $D$  se para qualquer subconjunto compacto  $S$  de  $D$  existe um número finito  $M(S)$  tal que  $|f_\alpha(z)| \leq M(S)$ ,  $z \in S$ ,  $\forall \alpha \in \Lambda$ .

Demonstração:

Consideremos  $D_0 \subset D_1 \subset \overline{D_1} \subset D$  tais que  $\partial D_1$  é retificável. Denotamos  $C_1 = \partial D_1$ . Temos que  $d(D_0, C_1) = \delta > 0$  onde  $d(D_0, C_1) = \inf_{\substack{x \in D_0 \\ y \in C_1}} d(x, y)$ .

Dados  $z_1, z_2$  em  $D_0$  temos:

$$f_\alpha(z_1) - f_\alpha(z_2) = (z_1 - z_2) \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f_\alpha(t)}{(t - z_1)(t - z_2)} dt$$

e

$$|f_\alpha(z_1) - f_\alpha(z_2)| \leq |z_1 - z_2| \frac{M(\overline{D_1}) \ell(C_1)}{2\pi \delta^2}$$

onde  $\ell(C_1)$  é o comprimento da curva  $C_1$ .

As aplicações são uniformemente equicontínuas no sentido ordinário em  $D_0$ . Assim temos equicontinuidade esférica. Logo  $\mathcal{F}$  é normal.  $\diamond$

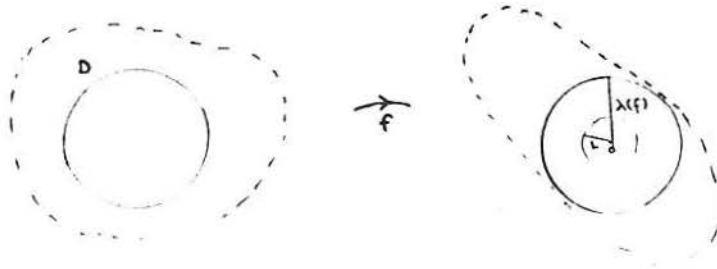
O objetivo agora é obter uma demonstração do Teorema de Montel. Existe uma demonstração do teorema bem sucinta que pode ser encontrada em [S]. Porém tal demonstração utiliza levantamento analítico. Aqui apresentaremos a demonstração que utiliza apenas o Teorema de Schottky.

Passamos agora à demonstração do Teorema de Schottky.

### 1.6 Definição

Seja  $\mathcal{F}$  uma família de funções analíticas em uma região contendo o fecho da bola  $B(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  e satisfazendo que  $f(0) = 0$  e  $f'(0) = 1$ .

Definimos  $\lambda(f) = \sup \{r : f(B(0,1)) \text{ contém um disco de raio } r\}$ . A constante de Landau  $L$  é definida por  $L = \inf \{\lambda(f) : f \in \mathcal{F}\}$



O valor exato de  $L$  é desconhecido mas é possível provar que  $0.5 \leq L \leq 0.56$ .  
Veja [C<sub>2</sub>].

### 1.7 Proposição

Seja  $f \in \mathcal{F}$ . Então  $f(B(0,1))$  contém um disco de raio  $L$ .

Demonstração:

Basta mostrarmos que  $f(B(0,1))$  contém um disco de raio  $\lambda = \lambda(f)$ .

Dado  $n \in \mathbb{N}$  existe  $\alpha_n \in f(B(0,1))$  tal que se  $|\alpha - \alpha_n| < \lambda - \frac{1}{n}$  então  $\alpha \in f(B(0,1))$ .

Como  $f(B(0,1)) \subset f(\overline{B}(0,1))$  então  $\exists \alpha \in f(\overline{B}(0,1))$  e  $(\alpha_{n_k})_k$  tal que  $\lim_k \alpha_{n_k} = \alpha$ . Sem perda de generalidade assumimos que  $\alpha = \lim_n \alpha_n$ .

Se  $|\omega - \alpha| < \lambda$  escolhemos  $n_0$  tal que  $|\omega - \alpha| < \lambda - \frac{1}{n_0}$ . Assim  $\exists n_1 > n_0$  tal que  $|\alpha_n - \alpha| < \lambda - \frac{1}{n_0} - |\omega - \alpha|$  para  $n \geq n_1$ . Portanto  $|\omega - \alpha_n| < |\omega - \alpha| + |\alpha - \alpha_n| < \lambda - \frac{1}{n_0} < \lambda - \frac{1}{n}$  se  $n \geq n_1$ . Logo  $\omega \in B(\alpha_n, \lambda - \frac{1}{n}) \subset f(B(0,1))$  (onde  $B(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ ). Como  $\omega$  era arbitrário segue-se que  $B(\alpha, \lambda) \subset f(B(0,1))$ .  $\diamond$

### 1.8 Corolário

Se  $f$  é analítica em uma região que contém  $\overline{B}(0, R)$  então  $f(B(0, R))$  contém um disco de raio  $R|f'(0)|L$ .

### 1.9 Lema

Seja  $G \subset \mathbb{C}$  uma região simplesmente conexa e  $f$  uma função analítica em  $G$  que não assume os valores 0 e 1. Então existe uma função analítica  $g$  em  $G$  tal que  $f(z) = -\exp(i\pi \cosh 2g(z))$ .

#### Demonstração:

Já que  $f$  não assume 0 existe  $\ell$ , ramo de  $\log f$ , definido em  $G$ , isto é,  $\exp \ell = f$ .

Seja  $F(z) = (2\pi i)^{-1} \ell(z)$ . Como  $f(a) \neq 1 \forall a \in G$  temos que  $F(a) \neq n$ ,  $n$  inteiro qualquer.

Definimos  $H(z) = \sqrt{F(z)} - \sqrt{F(z) - 1}$  e resulta  $H(z) \neq 0$ . Assim é possível definir  $g$ , um ramo de  $\log H$  em  $G$ .

Assim temos:

$$\cosh(2g) + 1 = \frac{1}{2}(e^{2g} + e^{-2g}) + 1 = \frac{1}{2}(e^g + e^{-g})^2 = \frac{1}{2}\left(H + \frac{1}{H}\right)^2 = 2F = \frac{1}{\pi i} \cdot \ell.$$

Logo

$$f = e^\ell = -\exp(\pi i \cosh(2g)) \quad \diamond$$

### 1.10 Lema

Sejam  $G, f$  e  $g$  como no lema anterior. Então  $g(G)$  não contém discos de raio 1.

#### Demonstração:

Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $m$  um inteiro qualquer.

Suponhamos que exista  $a \in G$  tal que  $g(a) = \pm \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + \frac{1}{2} im\pi$ .

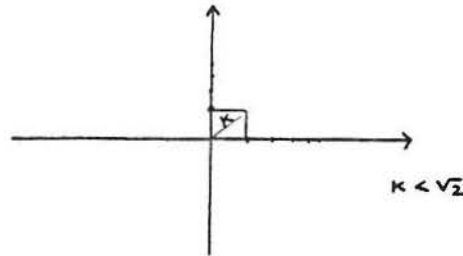
Assim temos

$$\begin{aligned} 2\cosh(2g(a)) &= e^{2g(a)} + e^{-2g(a)} = e^{im\pi} (\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\pm 2} + \\ &+ e^{-im\pi} (\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\pm 2} = (-1)^m [(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2 + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^2] = \\ &= (-1)^m [2(2n-1)]. \end{aligned}$$

Logo  $\cosh [2g(a)] = (-1)^m (2n - 1)$  e  $2n - 1$  é ímpar. Portanto  $f(a) = 1$  e  $g$  não pode assumir os valores

$$\left\{ \pm \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + \frac{1}{2} im\pi ; n \geq 1, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}.$$

Os pontos acima formam os vértices de um reticulado do plano.



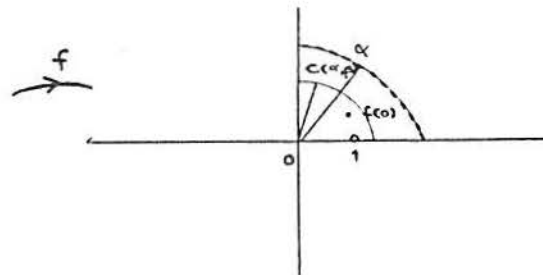
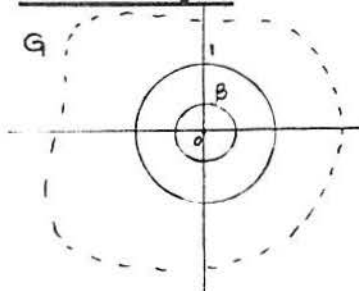
A largura é  $\log(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) - \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) > 0$ . Como  $\varphi(x) = \log(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) - \log(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})$  é uma função decrescente a largura de um retângulo é menor que  $\varphi(1) = \log(1 + \sqrt{2}) < \log e = 1$ . Assim a diagonal de um retângulo qualquer é menor que  $\sqrt{2}$ .  $\diamond$

Seja  $f$  definida numa região simplesmente conexa contendo  $B(0, 1)$ . Suponhamos que  $f$  não assume os valores 0 e 1. Sejam  $\ell$ , um ramo de  $\log f$ ,  $F = \frac{1}{2\pi i} \ell$ ,  $H = \sqrt{F} - \sqrt{F-1}$  e  $g$  um ramo de  $\log H$ . Na escolha dos ramos  $\ell$  e  $g$  exigimos  $0 \leq \text{Im } \ell(0) < 2\pi$  e  $0 \leq \text{Im } g(0) < 2\pi$ .

### 1.11 Teorema de Schottky

Dados  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $0 < \alpha < \infty$  e  $0 \leq \beta \leq 1$ , existe  $C(\alpha, \beta)$  tal que se  $f$  é analítica em uma região simplesmente conexa contendo  $B(0, 1)$  a qual omite os valores 0 e 1 e tal que  $|f(0)| \leq \alpha$  então  $|f(z)| \leq C(\alpha, \beta)$  para  $2 \leq \alpha < \infty$  e  $|z| \leq \beta$ .

Demonstração:





1º caso

Suponhamos que  $\frac{1}{2} \leq |f(0)| \leq \alpha$ .

Assim

$$|F(0)| = \frac{1}{2\pi} |\log |f(0)| + i \operatorname{Im} \ell(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \log \alpha + 1$$

pois

$$e^\ell = f \rightarrow e^{\operatorname{Re}(\ell) + i \operatorname{Im}(\ell)} = |f| e^{i \arg f} \rightarrow e^{\operatorname{Re}(\ell)} \cdot e^{i \operatorname{Im}(\ell)} = |f| e^{i \arg f} \rightarrow \operatorname{Im}(\ell) = \arg(f)$$

e

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{2\pi i} \ell \rightarrow F(0) = \frac{1}{2\pi i} \ell(0) \rightarrow |F(0)| &= \frac{1}{2\pi} |\ell(0)| = \frac{1}{2\pi} |\log f(0)| = \\ &= \frac{1}{2\pi} |\log (|f(0)| e^{i \arg f(0)})| = \frac{1}{2\pi} |\log |f(0)| + \\ &+ i \arg f(0)| = \frac{1}{2\pi} |\log |f(0)| + i \operatorname{Im} \ell(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \log \alpha + 1. \end{aligned}$$

Seja  $C_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \log \alpha + 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Assim temos } |\sqrt{F(0)} \pm \sqrt{F(0) - 1}| &\leq |\sqrt{F(0)}| + |\sqrt{F(0) - 1}| \\ &\leq \exp\left(\frac{1}{2} \log |F(0)|\right) + \exp\left(\frac{1}{2} \log |F(0) - 1|\right) = \\ &= |F(0)|^{\frac{1}{2}} + |F(0) - 1|^{\frac{1}{2}} \leq C_0(\alpha)^{\frac{1}{2}} + (C_0(\alpha) + 1)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Seja  $C_1(\alpha) = C_0(\alpha)^{\frac{1}{2}} + (C_0(\alpha) + 1)^{\frac{1}{2}}$ .

Assim se  $|H(0)| \geq 1$ ,

$$|g(0)| = |\log |H(0)| + i \operatorname{Im} g(0)| \leq \log |H(0)| + 2\pi \leq \log C_1(\alpha) + 2\pi.$$

Se  $|H(0)| < 1$ ,

$$\begin{aligned} |g(0)| &\leq -\log |H(0)| + 2\pi = \log \left( \frac{1}{|H(0)|} \right) + 2\pi = \\ &= \log |\sqrt{F(0)} + \sqrt{F(0) - 1}| + 2\pi \leq \log C_1(\alpha) + 2\pi. \end{aligned}$$

Seja  $C_2(\alpha) = \log C_1(\alpha) + 2\pi$ .

Se  $|a| < 1$  então  $g(B(a, 1 - |a|))$  contém um disco de raio  $L(1 - |a|)|g'(a)|$ . O lema 1.10 diz que  $g(B(0, 1))$  não contém discos de raio 1. Portanto  $|g'(a)| < [L(1 - |a|)]^{-1}$  para  $|a| < 1$ .

Para  $|a| < 1$  seja  $\gamma = [0, a]$ . Então

$$\begin{aligned} |g(a)| &\leq |g(0)| + |g(a) - g(0)| \leq C_2(\alpha) + \left| \int_{\gamma} g'(z) dz \right| \leq \\ &\leq C_2(\alpha) + |a| \max \{ |g'(z)| : z \in [0, a] \} \leq C_2(\alpha) + \frac{|a|}{L(1 - |a|)}. \end{aligned}$$

Seja

$$C_3(\alpha, \beta) = C_2(\alpha) + \beta [L(1 - \beta)]^{-1}.$$

Assim  $|g(z)| \leq C_3(\alpha, \beta)$  se  $|z| \leq \beta$ . Portanto

$$\begin{aligned} |z| \leq \beta &\rightarrow |f(z)| = |\exp[\pi i \cosh 2g(z)]| \leq \\ &\leq \exp[\pi |\cosh 2g(z)|] \leq \exp[\pi e^{2|g(z)|}] \leq \exp[\pi e^{2C_3(\alpha, \beta)}]. \end{aligned}$$

Definimos

$$C_4(\alpha, \beta) = \exp \{ \pi [\exp[2 C_3(\alpha, \beta)]] \}.$$

2º caso

Suponhamos  $0 < |f(0)| < \frac{1}{2}$ . Então  $1 - f$  satisfaz as condições do caso 1.

De fato:

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \leq 1 - |f(0)| < |1 - f(0)| \leq 1 + |f(0)| \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < \alpha$$

pois  $\alpha \geq 2$ .

Portanto  $|1 - f(z)| \leq C_4(2, \beta)$  se  $|z| \leq \beta$  e assim  $|f(z)| \leq 1 + C_4(2, \beta)$  logo basta definirmos

$$C(\alpha, \beta) = \max \{ C_4(\alpha, \beta), 1 + C_4(2, \beta) \}. \quad \diamond$$

### 1.12 Corolário

Seja  $f$  analítica numa região simplesmente conexa contendo  $B(0, R)$  e suponhamos que  $f$  omite 0 e 1. Se  $C(\alpha, \beta)$  é a constante do Teorema de Schottky e  $|f(0)| \leq \alpha$  então  $|f(z)| \leq C(\alpha, \beta)$  para  $|z| \leq \beta R$ .

### 1.13 Teorema de Montel I

Se  $\mathcal{F}$  é a família de funções analíticas em uma região  $G$  na qual  $f \in \mathcal{F}$  não assume os valores 0 e 1 então  $\mathcal{F}$  é normal.

Demonstração:

Fixemos  $z_0 \in G$  e consideremos

$$\mathcal{G} = \{f \in \mathcal{F} : |f(z_0)| < 1\} \text{ e } \mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F} : |f(z_0)| \geq 1\}$$

Mostremos que  $\mathcal{G}$  é normal no conjunto das analíticas e  $\mathcal{H}$  é normal em  $C(G, \mathbb{C})$ .

Para obtermos a normalidade de  $\mathcal{G}$  é suficiente mostrarmos que  $\mathcal{G}$  é localmente uniformemente limitada.

Sejam  $a \in G$  e  $\gamma$  uma curva em  $G$  de  $z_0$  até  $a$ . Sejam  $D_0, D_1, \dots, D_n$  discos em  $G$  com centros  $z_0, z_1, \dots, z_n = a$  em  $\gamma$  e tais que  $z_{k-1}$  e  $z_k$  estão em  $D_{k-1} \cap D_k$  para  $1 \leq k \leq n$  e  $\overline{D_k} \subset G$  para  $0 \leq k \leq n$ .

Aplicamos o teorema de Schottky para  $D_0$  e  $f \in \mathcal{G}$  ( $D_0 = B(z_0, r)$  e  $R > r$  é tal que  $\overline{B(z_0, R)} \subset G$  então  $|f(z)| \leq C(1, \beta)$  para  $z$  em  $D_0$  e  $f \in \mathcal{G}$  quando  $\beta$  é escolhido com  $r < \beta R$ ). Segue que  $\exists C_0$  tal que  $|f(z)| \leq C_0$  para  $z$  em  $D_0$  e  $f \in \mathcal{G}$ . Assim  $\mathcal{G}$  é uniformemente limitada por uma constante  $C_1$  em  $D_1$ . Continuando nós temos que  $\mathcal{G}$  é uniformemente limitada em  $D_n$ . Já que  $a$  era arbitrário isto dá que  $\mathcal{G}$  é localmente limitada e portanto  $\mathcal{G}$  é normal no conjunto das analíticas.

Agora consideremos  $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F} : |f(z_0)| \geq 1\}$ . Se  $f \in \mathcal{H}$  então  $\frac{1}{f}$  é analítica em  $G$  pois  $f$  não se anula. Já que  $f$  não assume 1,  $\frac{1}{f}$  também não assume nem 0 nem 1. Além disso  $\left| \left( \frac{1}{f} \right) (z_0) \right| \leq 1$ , portanto  $\mathcal{H} = \left\{ \frac{1}{f} : f \in \mathcal{H} \right\} \subset \mathcal{G}$  e  $\mathcal{H}$  é normal. Assim se  $(f_n)_n$  é uma seqüência em  $\mathcal{H}$  então  $\exists (f_{n_k})_k$  tal que  $\left( \frac{1}{f_{n_k}} \right)_k$  converge para uma aplicação analítica  $h$ . De acordo com o Teorema de Hurwitz  $h \equiv 0$  ou  $h$  nunca se anula. Se  $h \equiv 0$  então  $\lim_k f_{n_k}(z) = \infty$  uniformemente em compactos de  $G$ . Se  $h$  nunca se anula então

$\frac{1}{h}$  é analítica e segue que  $\lim_k f_{n_k}(z) = \frac{1}{h(z)}$  uniformemente em compactos de  $G$ .  $\diamond$

O teorema provado acima considera funções analíticas em  $G \subseteq \mathbb{C}$ , ou seja, com  $f(G) \subseteq \mathbb{C}$ . Para funções meromorfas  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  obtemos a seguinte versão:

#### 1.14 Teorema de Montel II

Uma família de funções meromorfas é normal se nenhuma função da família assume os valores 0, 1 e  $\infty$ .

Vamos agora adaptar o Teorema de Montel aos nossos propósitos, que é o de aplicações  $f : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  com  $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  aberto. Dizemos que uma tal aplicação é analítica se o for como aplicação da esfera na esfera, com parametrizações locais  $z$  e  $\frac{1}{z}$ . Mais precisamente, seja  $a \in U$  dado; se  $a \in \mathbb{C}$  exigimos que  $f$  é meromorfa numa vizinhança de  $a$  em  $U \cap \mathbb{C}$  e se  $a = \infty$  exigimos que  $f\left(\frac{1}{z}\right)$  é meromorfa numa vizinhança de 0.

Com esta terminologia temos que toda aplicação analítica  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  que não é sobrejetiva é constante (Teorema de Liouville) e mais: sempre é uma aplicação racional. Com efeito, se  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  é analítica, tem no máximo finitos pólos: caso contrário estes pólos teriam um ponto de acumulação no qual  $f$  deixaria de ser meromorfa. Sejam  $b_1, \dots, b_n$  os pólos de  $f$  e  $H_1, \dots, H_n$  as correspondentes partes principais de  $f$ . Então  $F(z) = f(z) - \sum_{j=1}^n H_j(z)$  define uma aplicação analítica de  $\overline{\mathbb{C}}$  em  $\overline{\mathbb{C}}$ , constante pelo Teorema de Liouville. Segue-se que  $f$  é uma aplicação racional.

Aplicações analíticas bijetivas de  $\overline{\mathbb{C}}$  em  $\overline{\mathbb{C}}$  são denominadas lineares e constituem exatamente as transformações de Möbius. Para estas aplicações temos o seguinte critério de normalidade:

#### 1.15 Proposição

Dado  $M > 0$ , a família das transformações de Möbius  $g : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  dadas

por  $g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ , com  $\alpha\delta - \gamma\beta = 1$  e  $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|, |\delta| < M$  é uma família normal.

### Demonstração

Seja  $(g_n)_n$  uma seqüência em  $\mathcal{F}$  isto é  $g_n(z) = \frac{\alpha_n z + \beta_n}{\gamma_n z + \delta_n}$ . Sem perda de generalidade podemos supor que  $\exists \alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  tais que  $\lim \alpha_n = \alpha, \lim \beta_n = \beta, \lim \gamma_n = \gamma$  e  $\lim \delta_n = \delta$  já que  $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n, (\gamma_n)_n$  e  $(\delta_n)_n$  são seqüências limitadas.

Assim temos que  $g_n$  converge simplesmente para a aplicação  $g$  dada por  $g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ .

Mostremos agora que se  $\lim \alpha_n = \alpha, \lim \beta_n = \beta, \lim \gamma_n = \gamma, \lim \delta_n = \delta$  e  $\lim z_n = z$  então

$$\lim \frac{\alpha_n z_n + \beta_n}{\gamma_n z_n + \delta_n} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

De fato se  $z \neq \infty$  e  $\gamma z + \delta \neq 0$  então não há dificuldade. Se  $z \neq \infty$  e  $\gamma z + \delta = 0$  então  $\alpha z + \beta \neq 0$  e

$$\lim \frac{\gamma_n z_n + \delta_n}{\alpha_n z_n + \beta_n} = \frac{\gamma z + \delta}{\alpha z + \beta} = 0.$$

Finalmente se  $z = \infty$  procedemos analogamente trabalhando com

$$\omega = \frac{\alpha + \beta \cdot \frac{1}{z}}{\gamma + \delta \cdot \frac{1}{z}}$$

Queremos mostrar que a seqüência  $g_n$  acima converge uniformemente. Suponhamos que isto não ocorra. Assim  $\exists \epsilon > 0$  tal que  $\forall n \exists t_n, k_n > n$  e  $\exists z_n$  tal que  $\rho(g_{t_n}(z_n), g_{k_n}(z_n)) > \epsilon$ . Passando a uma subseqüência se necessário podemos supor que:

$$\begin{aligned} \lim z_n &= z_0 \\ \lim \alpha_{t_n} &= \alpha \quad , \quad \lim \alpha_{k_n} = \alpha \\ \lim \beta_{t_n} &= \beta \quad , \quad \lim \beta_{k_n} = \beta \\ \lim \gamma_{t_n} &= \gamma \quad , \quad \lim \gamma_{k_n} = \gamma \\ \lim \delta_{t_n} &= \delta \quad , \quad \lim \delta_{k_n} = \delta . \end{aligned}$$

Portanto temos  $\lim g_{l_n}(z_n) = g(z_0)$  e  $\lim g_{k_n}(z_n) = g(z_0)$ , implicando uma contradição ao fato  $\rho(g_{l_n}(z_n), g_{k_n}(z_n)) > \varepsilon$ .

O que acabamos de fazer prova que  $\mathcal{F}$  é uma família normal.  $\diamond$

### 1.16 Proposição

Dado  $N > 0$ , a família das transformações de Möbius  $g: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  tais que

$$\rho(g(0), g(1)) \cdot \rho(g(1), g(\infty)) \cdot \rho(g(\infty), g(0)) > \frac{1}{N^2}$$

é uma família normal.

#### Demonstração

Dada uma Möbius  $\omega = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  denotamos  $\omega_0 = \beta/\delta$ ,  $\omega_1 = \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta}$  e  $\omega_\infty = \alpha/\gamma$  as imagens de 0, 1 e  $\infty$ . Consideremos o produto

$$\rho(\omega_0, \omega_1) \rho(\omega_1, \omega_\infty) \cdot \rho(\omega_\infty, \omega_0) = \frac{|\alpha\delta - \beta\gamma|^3}{(|\alpha|^2 + |\gamma|^2)(|\beta|^2 + |\delta|^2)(|\alpha + \beta|^2 + |\gamma + \delta|^2)}.$$

Suponhamos que  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  são tais que  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$  e  $M > 0$  é tal que  $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|, |\delta| < M$ . Então o produto acima é maior que  $1/N^2$  onde  $N$  é uma constante. Reciprocamente suponhamos que o produto é maior que  $1/N^2$ . Então  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ . Podemos supor  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$  e queremos provar  $(|\alpha|^2 + |\gamma|^2)(|\beta|^2 + |\delta|^2)(|\alpha + \beta|^2 + |\gamma + \delta|^2) < N^2$ . Mas  $\alpha = \alpha\delta(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\gamma + \delta)$ , e  $|\alpha| \cdot |\delta| \cdot |\alpha + \beta| < N$  e  $|\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\gamma + \delta| < N$  implicam  $|\alpha| < 2N$ . Analogamente obtemos  $|\beta| < 2N$ ,  $|\gamma| < 2N$  e  $|\delta| < 2N$ . Assim provamos que as transformações de Möbius que satisfazem  $\rho(\omega_0, \omega_1) \cdot \rho(\omega_1, \omega_\infty) \cdot \rho(\omega_\infty, \omega_0) > 1/N^2$  constituem uma família normal.  $\diamond$

Dizemos que 3 pontos  $p_1, p_2$  e  $p_3 \in \mathcal{C}$  estão  $\tau$ -separados,  $\tau > 0$ , se  $\rho(p_i, p_j) > \tau$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ . Enunciemos então o último resultado deste parágrafo:

### 1.17 Teorema de Montel III

Seja  $U \subset \mathcal{C}$  aberto e  $\mathcal{F}$  uma família de funções analíticas de  $U$  em  $\mathcal{C}$  tal que  $\exists \tau > 0$  tal que  $\forall f \in \mathcal{F} \exists p_1, p_2, p_3$   $\tau$ -separados tais que  $f(U)$  não contém  $p_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Então  $\mathcal{F}$  é normal.

Demonstração:

Dada  $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}$  onde  $f_\alpha$  omite  $p_{1\alpha}, p_{2\alpha}$  e  $p_{3\alpha}$  e tais pontos são  $\tau$ -separados consideremos

$$T_\alpha(z) = \frac{z - p_{1\alpha}}{z - p_{3\alpha}} \cdot \frac{p_{2\alpha} - p_{3\alpha}}{p_{2\alpha} - p_{1\alpha}}.$$

Vale que  $T_\alpha(p_{1\alpha}) = 0, T_\alpha(p_{2\alpha}) = 1$  e  $T_\alpha(p_{3\alpha}) = \infty$ . Assim  $\{T_\alpha \circ f_\alpha\}$  omite  $0, 1$  e  $\infty$  e portanto pelo Teorema de Montel II  $\{T_\alpha \circ f_\alpha\}$  é normal. Para mostrarmos que  $\{f_\alpha\}$  é normal basta mostrarmos que  $\{T_\alpha^{-1}\}$  é normal.

Temos por definição

$$(T_\alpha)^{-1}(0) = p_{1\alpha}$$

$$(T_\alpha)^{-1}(1) = p_{2\alpha}$$

$$(T_\alpha)^{-1}(\infty) = p_{3\alpha}$$

Já que  $\rho(p_{1\alpha}, p_{2\alpha}) \cdot \rho(p_{1\alpha}, p_{3\alpha}) \cdot \rho(p_{2\alpha}, p_{3\alpha}) > C^3 = 1/N^2$  onde  $N = 1/C^{3/2}$  temos  $\{T_\alpha^{-1}\}$  é normal. Logo  $\{f_\alpha\}$  é uma família normal.  $\diamond$

## §2. A Dinâmica na Esfera de Riemann

Neste parágrafo iremos introduzir alguns conceitos básicos a respeito da Dinâmica na Esfera de Riemann.

### 2.1 Os endomorfismos em $\mathcal{C}$

Estudar a dinâmica em um conjunto quer dizer, a partir de uma função  $R$  e um determinado ponto  $z$  ver o que ocorre com o conjunto  $\{z, R(z), R(R(z)), \dots\}$  dos iterados de  $z$  por  $R$ . Surgem questões naturais como por exemplo:

Quais são os pontos limites deste conjunto?

Quais são as propriedades topológicas e analíticas de todos pontos limites?

Já que nosso objetivo é estudar a Dinâmica na Esfera de Riemann o primeiro passo é conhecermos bem a classe de funções com as quais iremos trabalhar. A nossa classe de funções será dada pelas funções  $R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  analíticas que não são lineares e nem constantes. Tais funções são chamadas de endomorfismos da esfera.

Temos que a nossa classe é exatamente a classe das aplicações racionais  $R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ .

Dada uma  $R$  como acima, definimos o grau de  $R$  por  $gr(R) = \#R^{-1}(p)$  onde  $p \in \mathcal{C}$  é um valor regular. A definição independe de  $p$  e o nosso espaço é composto por funções da forma

$$R(z) = \frac{\sum_{i=0}^{k_1} a_i z^i}{\sum_{j=0}^{k_2} b_j z^j}$$

onde  $a_j, b_j \in \mathcal{C}$  e  $k_1, k_2 \in \mathcal{N}$ .

### 2.2 Definição

Seja  $R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  uma aplicação racional

i) Definimos  $O^+(z_0) = \{R^n(z_0) : n \geq 0\}$  e  $O^-(z_0) = \bigcup_{n < 0} R^n(z_0)$  as órbitas positiva e negativa de  $z_0$ . Definimos  $O(z_0)$ , a órbita de  $z_0$ , por  $O(z_0) = O^+(z_0) \cup O^-(z_0)$ .

ii) Dado  $p \in \mathcal{C}$  tal que  $\exists k \in \mathcal{N}$  tal que  $R^k(p) = p$  dizemos que  $p$  é um



periódico de  $R$ .  $k$  é chamado o período de  $R$  se  $k = \min\{\ell \in \mathbb{N} | R^\ell(p) = p\}$ .

iii) Seja  $z_0$  um ponto periódico de período  $n$ . Então  $\lambda_{z_0} = (R^n)'(z_0)$  é o auto-valor da órbita periódica.  $\lambda_{z_0}$  é um invariante da órbita  $O^+(z_0)$  já que é o produto das derivadas nos pontos da órbita.

iv)  $O^+(z_0)$  periódica é dita ATRATORA se  $0 < |\lambda| < 1$ , SUPER ATRATORA se  $|\lambda| = 0$ , REPULSORA se  $|\lambda| > 1$  e NEUTRA se  $|\lambda| = 1$ .

### 2.3 Definição

Um ponto  $z \in \mathcal{C}$  é um elemento do Conjunto de Fatou de  $R$  ( $F(R)$ ) se existe uma vizinhança  $U$  de  $z$  em  $\mathcal{C}$  tal que  $\{R^n|U\}$  é uma família normal. O Conjunto de Julia de  $R$  ( $J(R)$ ) é o complementar do Conjunto de Fatou.

### 2.4 Teorema

O Conjunto de Julia é um conjunto completamente invariante, compacto e não vazio.

#### Demonstração:

$F(R)$  é aberto por definição. Já que  $R$  é contínua e aberta temos que  $F$  é completamente invariante isto é se  $z \in F$  então  $R(z) \in F$  e  $R^{-1}(z) \in F$ . Conseqüentemente  $J(R)$  é completamente invariante e fechado. Logo  $J(R)$  é compacto.

Suponhamos que  $J(R) = \phi$ . Então  $F(R) = \mathcal{C}$  e portanto  $(R^n)_i$  converge uniformemente a uma aplicação meromorfa  $S$ . Assim o grau de  $R^n$  tende ao mesmo tempo para o grau de  $S$  e para  $\infty$ . Mas o grau de  $S$  é finito. Logo  $J(R) \neq \phi$   $\diamond$

### 2.5 Proposição

Seja  $z \in J(R)$ . Se  $U$  é uma vizinhança de  $z$  então o conjunto  $E_U = \mathcal{C} - \cup_{n>0} R^n(U)$  contém no máximo 2 pontos. Tais pontos são ditos excepcionais.

#### Demonstração:

Supondo que  $\exists U$  tal que  $\# E_U \geq 3$  então pelo Teorema de Montel  $\{R^n|U\}$  é normal e portanto  $z \in F(R)$  o que é uma contradição.  $\diamond$

## 2.6 Proposição

Se  $O^+(z_0)$  é uma órbita periódica (super) atratora então  $O^+(z_0) \subset F(R)$ .  
Se  $O^+(z_0)$  é repulsora então  $O^+(z_0) \subset J(R)$ .

### Demonstração:

Temos que existe  $n$  tal que  $R^n(z_0) = z_0$ . Suponhamos que  $|(R^n)'(z_0)| < 1$ . Se mostrarmos que existe  $D$ , disco aberto contendo  $z_0$ , tal que  $R^n(D) \subseteq D$  então  $\bigcup_k (R^n)^k(D) \subseteq D$ . Mas se  $z \in J(R) \cap D$  temos que  $\bigcup_k (R^n)^k(D)$  cobre  $\bar{D}$  a menos de 2 pontos e teremos uma contradição.

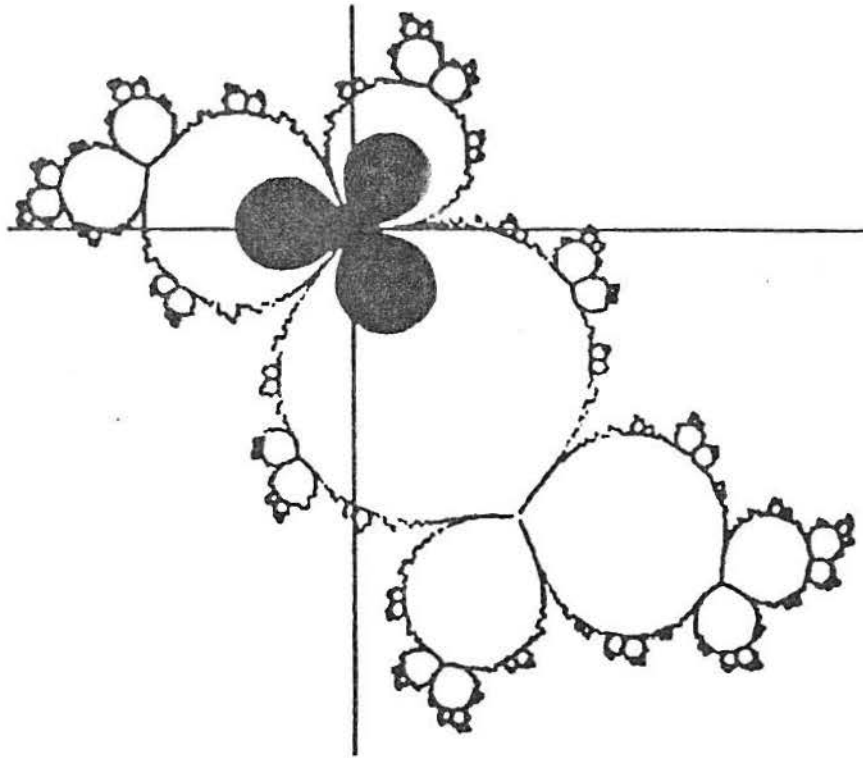
Seja  $\lambda < \lambda_0 < 1$  tal que  $|(R^n)'(z_0)| = \lambda < 1$ . Temos que  $(R^n)'$  é  $C^0$  e portanto  $\exists r > 0$  tal que  $|(R^n)'(z)| \leq \lambda_0 \forall |z - z_0| < r$ . Logo  $R^n : D(z_0, r) \rightarrow D(z_0, r)$  pois  $|R^n(z) - z_0| = |R^n(z) - R^n(z_0)| \leq \lambda_0 |z - z_0| < \lambda_0 r < r$ .  $\diamond$

## 2.7 Exemplos

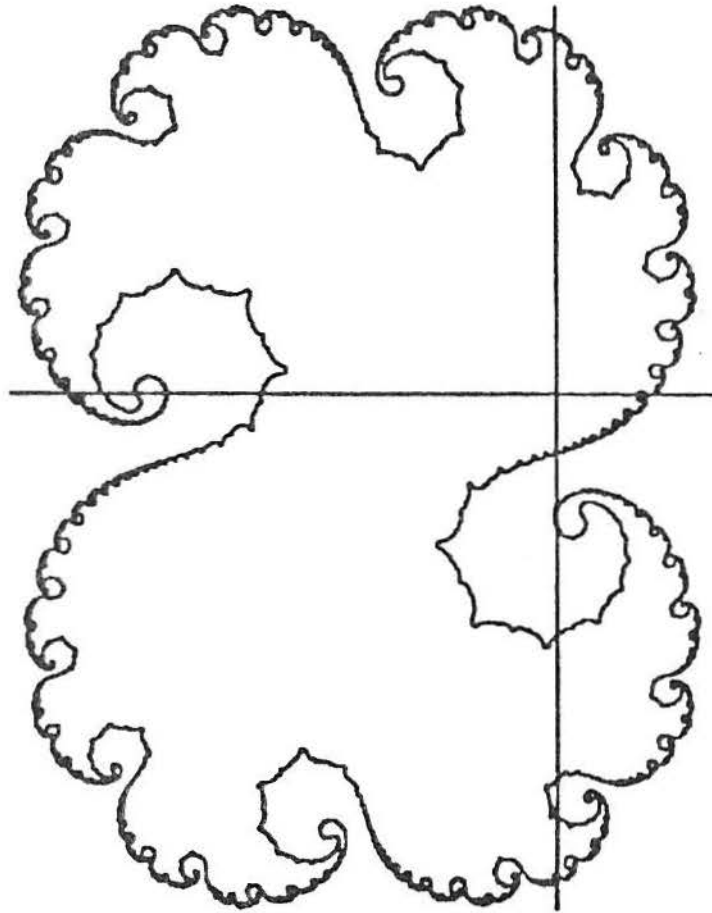
i) Consideremos a aplicação  $R(z) = z^2$ . Seja  $z_0$  tal que  $|z_0| < 1$ . Então  $\exists U$ , vizinhança de  $z_0$ , tal que  $R^n|_U$  converge para a constante 0  $\forall z \in U$ . Portanto o interior do círculo é um subconjunto de  $F$ . Analogamente o exterior também o é. Porém em  $|z| = 1$   $\{R^n\}$  não é equicontínua. Logo  $J(R) = S^1$ .

ii) Consideremos um polinômio  $p(z)$ . O ponto  $\infty$  é um ponto fixo isto é  $p(\infty) = \infty$  e ainda vale que  $p^{-1}(\infty) = \{\infty\}$ . O  $\infty$  é um ponto fixo super atrator para  $p(z)$ . Logo  $J(p) \subset C$ . Como  $\bigcup_{n \geq 0} p^n(C) = C$ , isto é, deixa de cobrir somente o  $\infty$ , que está no  $F(p)$ , vemos que  $\infty$  é um ponto excepcional.

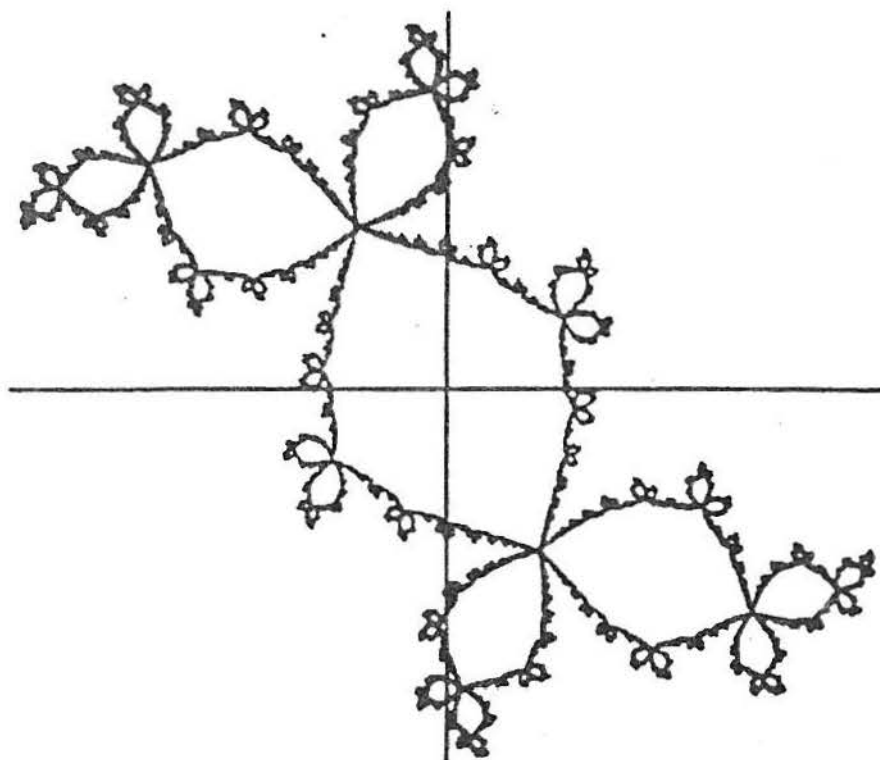
iii) A título de curiosidade apresentamos um esboço dos conjuntos de Julia de alguns polinômios de grau 2:



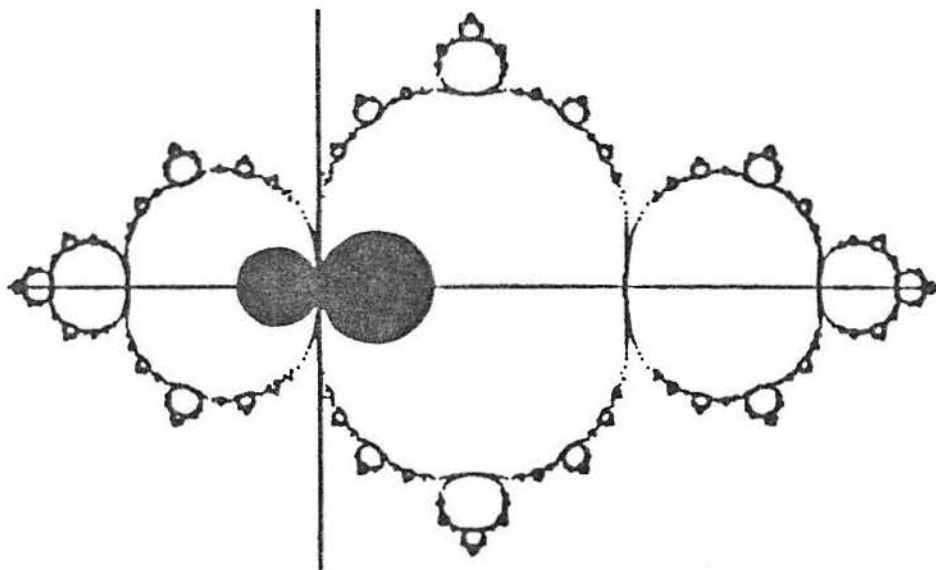
$$R(z) = e^{2\pi i/5} z + z^2$$



$$R(z) = e^{2\pi i/20} z + z^2$$



$$R(z) = z^2 + C$$
$$C \simeq -0.12256117 + 0.74486177i$$



$$R(z) = -z + z^2$$

## 2.8 Proposição

Se  $\text{int}(J(R)) \neq \emptyset$  então  $J(R) = \overline{C}$ .

### Demonstração

Seja  $U$  um domínio contido no interior de  $J(R)$  já que  $J(R)$  é invariante temos que  $J(R) \supset \bigcup_{n \geq 0} R^n(U) = \overline{C} - E$ . ( $E$  denota o conjunto dos pontos excepcionais). Além disso  $J(R)$  é fechado e  $E$  contém no máximo 2 pontos. Logo  $J(R) = \overline{C}$ .  $\diamond$

## 2.9 Proposição

Se  $z \in \overline{C} - E$  então  $J(R)$  está contido no conjunto de pontos de acumulação da órbita negativa de  $z$  isto é  $J \subset \{ \text{pontos de acumulação de } \bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z) \}$ . Conseqüentemente se  $z \in J(R)$  então  $J(R) = \overline{\bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z)}$ .

### Demonstração:

Sejam  $z \in \overline{C} - E$ ,  $\omega \in J(R)$  e  $U$  uma vizinhança de  $\omega$  suficientemente pequena. Assim  $\bigcup_{n \geq 0} R^n(U)$  cobre  $C - \{2 \text{ pontos}\}$ . Como  $z \in \overline{C} - E$  temos que  $\exists n$  tal que  $z \in R^n(U)$ . Então  $\exists u \in U$  tal que  $u = R^{-n}(z)$ . Assim  $U \cap R^{-n}(z) \neq \emptyset$  e portanto  $\omega$  é ponto de acumulação de  $\bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z)$ .

Suponhamos que  $z \in J(R)$ . Já que  $J$  é invariante segue que  $\overline{\bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z)} \subset J(R)$ , o que completa a nossa demonstração.  $\diamond$

Observemos que este último resultado pode ser usado para obter os desenhos de 2.7.

## 2.10 Lema

Se  $a \in J(R)$  então  $\exists b \in J(R)$  tal que  $a \in O^+(b)$  mas  $b \notin O^+(a)$ .

Demonstração:

1) Suponhamos que  $a$  não é periódico. Seja  $b \in R^{-1}(a)$ . Então  $R(b) = a$  e portanto  $a \in O^+(b)$ . Se  $b \in O^+(a)$  então existiria  $n$  tal que  $R^n(a) = b$  e então  $R(R^n(a)) = R(b) = a$  e  $a$  seria periódico.

2) Suponhamos agora que  $a$  é periódico de período  $n$ . Seja  $S = R^n$  e consideremos a equação  $S(z) = a$ . Se  $a$  é a única solução da equação conjugamos  $S$  a um polinômio  $p$ . Já que  $\infty \in F(p)$  teríamos que  $a \in F(S)$  o que é uma contradição. Logo  $\exists b \neq a$  tal que  $S(b) = a$  e  $b \notin O^+(a)$  pois  $a$  é a única solução em  $O^+(a)$ .  $\diamond$

2.11 Teorema

O Conjunto de Julia é perfeito.

Demonstração:

Sejam  $a \in J(R)$  e  $U$  uma vizinhança de  $a$ . Tomemos  $b \in J(R) - O^+(a)$ . Assim  $\exists k$  tal que  $b \in R^k(U)$ .

Seja  $c \in U$  tal que  $R^k(c) = b$ . Temos que  $c \neq a$  pois  $b \notin O^+(a)$  e  $c \in J(R)$  pois  $J(R)$  é  $R^{-1}$ -invariante.



$\diamond$



### 2.12 Teorema

Sejam  $U$  aberto tal que  $J(R) \cap U \neq \emptyset$  e  $K \subset \bar{U}$  compacto tal que  $K \cap E = \emptyset$ . Então  $\exists N > 0$  tal que  $R^n(U) \supset K \quad \forall n \geq N$ .

Demonstração:

Suponhamos que o teorema é falso. Então existem  $N_1 < N_2 < \dots$  e  $p_1, p_2, \dots$  em  $K$  tais que  $p_i \notin R^{N_i}(U) \quad \forall i$ . Assim  $R^{-2}(p_i) \cap R^{N_i-2}(U) = \emptyset \quad \forall i$ . Temos que  $\{p_i\} \subset K$ ,  $K$  limitado e  $K$  tem uma distância positiva dos pontos excepcionais pois é compacto.

Afirmamos que  $\exists \tau > 0$  tal que  $R^{-2}(p_i)$  contém uma terna  $\tau$ -separada. De fato se  $\forall \tau > 0 \exists i$  tal que em  $R^{-2}(p_i)$  para qualquer 3 pontos podemos escolher 2 com distância menor que  $\tau$  então tomando  $\tau = 1/n$ ,  $\exists i_n$  tal que em  $R^{-2}(p_{i_n})$  podemos escolher 2 pontos com distância menor que  $1/n$ . Como  $K$  é compacto  $\exists p \in K$  e  $(p_{i_{n_k}})_K$  tal que  $p_{i_{n_k}}$  converge a  $p$  e então  $R^{-2}(p)$  teria um único ponto. Logo  $p$  seria excepcional o que é um absurdo.

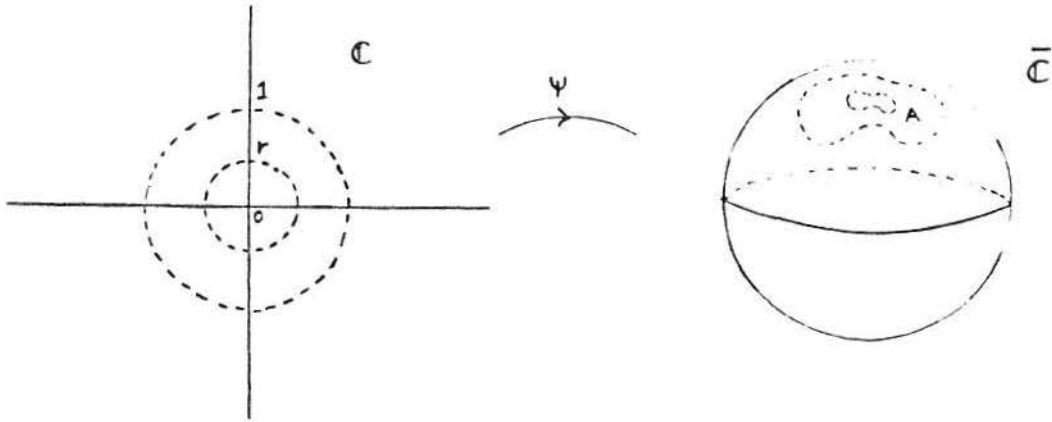
Assim  $\{R^{N_i-2} | U\}$  é normal o que é uma contradição pois  $U$  contém pontos do Conjunto de Julia. ◇

### §3. Os Conjuntos de Julia são Uniformemente Perfeitos

#### 3.1 Anéis na Esfera de Riemann

##### 3.1.1 Definição

Seja  $A \subset \mathcal{C}$ . Dizemos que  $A$  é um anel se  $A$  é conformemente equivalente a um anel do plano, isto é,  $\exists 0 < r < 1$ ,  $\exists \psi : \{z \in \mathcal{C} : r < |z| < 1\} \rightarrow A$  representação conforme (bijeção holomorfa cuja derivada em cada ponto é não nula).



##### 3.1.2 Definição

Definimos o módulo do anel  $A$  por  $mod(A) = \log(1/r)$ . O módulo de um anel varia em  $(0, \infty)$ .

Para verificar que o módulo está bem definido devemos provar que os dois anéis do tipo  $\{z \in \mathcal{C} : r_i < |z| < 1\} (i = 1, 2)$  são conformemente equivalentes se e somente se  $r_1 = r_2$ . O teorema a seguir resolve:

##### 3.1.3 Teorema

Dois anéis do plano  $A(r_i, R_i) = \{z \in \mathcal{C} \mid r_i < |z| < R_i\}$ ,  $i = 1, 2$ , são conformemente equivalentes se e somente se  $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2}$ .

##### Demonstração:

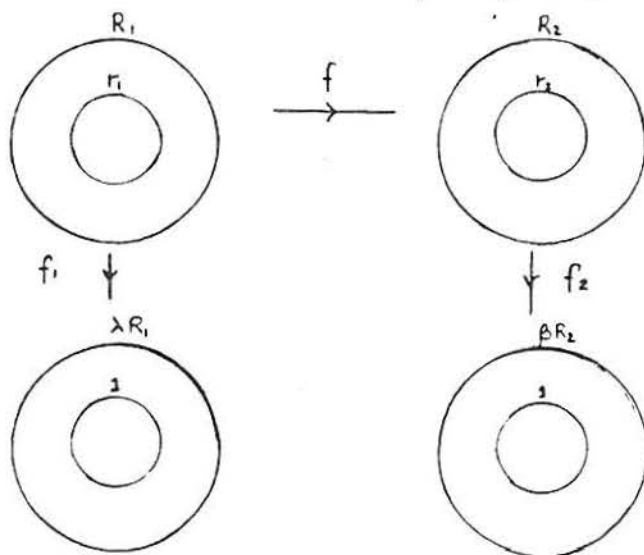
Se  $\lambda > 0$  então  $z \mapsto \lambda z$  aplica  $A(r_1, R_1)$  em  $A(\lambda r_1, \lambda R_1)$ . Portanto  $A(r_1, R_1)$  e  $A(r_2, R_2)$  são conformemente equivalentes se  $R_1/r_1 = R_2/r_2$ .

Mostremos que a condição é necessária. Sem perda de generalidade podemos supor  $r_1 = r_2 = 1$  pois se  $r_1 \neq r_2$  teríamos  $f : A(r_1, R_1) \rightarrow A(r_2, R_2)$  conforme e  $f_1 : A(r_1, R_1) \rightarrow A(1, \lambda R_1)$ ,  $f_2 : A(r_2, R_2) \rightarrow A(1, \beta R_2)$  conformes. Então

$$f_2 \circ f \circ f_1^{-1} : A(1, \lambda R_1) \rightarrow A(1, \beta R_2)$$

é uma aplicação conforme. Como

$$r_2 = \frac{1}{\lambda} \text{ e } r_2 = \frac{1}{\beta}, \quad \frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2}$$



Provemos então o resultado para  $r_1 = r_2 = 1$  e sejam  $A_1 = A(1, R_1)$  e  $A_2 = A(1, R_2)$ . Suponhamos que  $\exists f$  injetiva tal que  $f(A_1) = A_2$ . Assim  $|f(z)|$  tende a 1 ao  $|z|$  tender a 1 ou  $|f(z)|$  tende a  $R_2$  ao  $|z|$  tender a 1. No segundo caso trocamos  $f$  por  $\frac{R_2}{f}$ . Assim nós podemos supor que  $|f(z)|$  tende a  $R_2$  ao  $|z|$  tender a  $R_1$  e  $|f(z)|$  tende a 1 ao  $|z|$  tender a 1.

Chamamos  $\alpha = \frac{\log R_2}{\log R_1}$  e  $u(z) = \log |f(z)| - \alpha \log |z|$ .  $f$  não tem zeros em  $A_1$  portanto  $\log |f|$  é harmônica em  $A_1$  e assim, pela escolha de  $\alpha$ , temos  $u(z)$  tendendo a zero ao  $|z|$  tender a 1 e  $|z|$  a  $R_1$ . Assim podemos estender  $u$  a uma função contínua em  $\overline{A_1}$  a qual é zero na fronteira de  $A_1$ . Já que funções harmônicas não constantes não tem mínimos ou máximos locais concluímos que  $u = 0$ . Assim  $|f(z)| = |z|^\alpha$  com  $z \in A_1$ .

Seja  $D$  um disco em  $A_1$ . Existe uma  $g$  holomorfa em  $D$  tal que  $f = \exp(g)$  em  $D$ . Então  $\left| \frac{1}{z} \exp \left\{ \frac{g(z)}{\alpha} \right\} \right| = 1$ .

Portanto  $\exp \left( \frac{g}{\alpha} \right) = \lambda z$  onde  $\lambda$  é uma constante e  $|\lambda| = 1$ . Derivando temos  $g'(z) = \frac{\alpha}{z}$ . Portanto  $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha}{z}$ . Como  $D$  era arbitrário a fórmula acima vale para todo  $z \in A_1$ . Dividindo por  $2\pi i$  e integrando no círculo orientado positivamente com centro 0 e raio  $\sqrt{R_1}$  temos que o lado esquerdo resulta  $\pm 1$ . O lado direito resulta  $\alpha$ . Portanto  $\alpha = 1$  e assim  $R_1 = R_2$ .  $\diamond$

### 3.1.4 Definição

Seja  $K \subset \mathcal{C}$  um compacto. Dizemos que um anel  $A$  divide  $K$  se  $K$  intersecciona ambas componentes conexas de  $A^c$  e  $K \cap A = \emptyset$ .



### 3.1.5 Definição

Um conjunto compacto  $K$  com pelo menos dois pontos é dito uniformemente perfeito se existe  $m_0 > 0$  tal que cada anel que divide  $K$  tem módulo  $\leq m_0$ .

### 3.1.6 Exemplos

É fácil verificar que todo compacto uniformemente perfeito é perfeito; também é óbvio que a imagem de um compacto uniformemente perfeito por uma transformação de Möbius é ainda uniformemente perfeito, já que o módulo de um anel é um invariante conforme. Qualquer compacto conexo é uniformemente perfeito, bem como os conjuntos de Cantor lineares. Tomando-se uma união de conjuntos de Cantor, um em cada intervalo  $\left[ \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$  e cada um com maior proporção,

obtemos (acrescentando a origem) um conjunto perfeito que não é uniformemente perfeito.

### 3.2 Preliminares

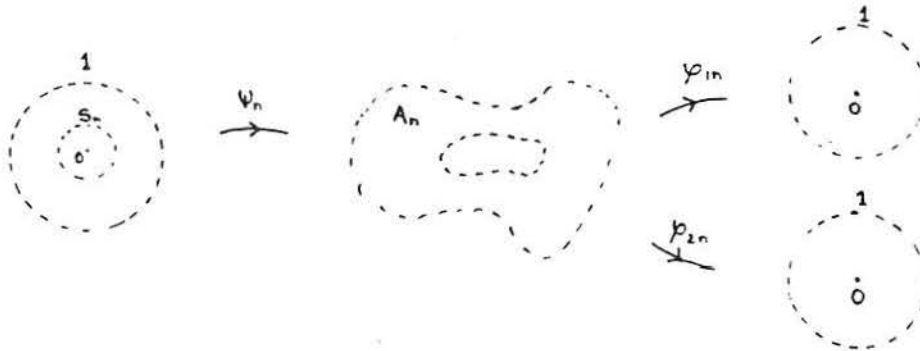
Passamos a provar uma série de lemas necessários para provar o Teorema de Ricardo Mañé e Luiz Fernando Carvalho da Rocha.

#### 3.2.1 Lema

Consideremos anéis  $A_n$  em  $\mathcal{C}$  tais que  $\text{mod}(A_n) > n$ . Então para cada  $n$  existe  $K_n$ , componente conexa de  $A_n^c$  tal que o diâmetro de  $K_n$  ( $\text{diam } K_n$ ) tende a zero.

#### Demonstração:

Se  $A_n$  é tal que  $\text{mod}(A_n) > n$  então  $\forall n$   $A_n$  tem representação conforme  $\psi_n$  com o anel  $A(s_n, 1)$  onde  $s_n$  decresce a zero ao  $n$  tender a infinito.



Temos que  $A_n^c = F_n \cup F_n^*$ , isto é, tem 2 componentes conexas. Definimos  $\varphi_{1n} : A_n \cup F_n \rightarrow B(0, 1)$  e  $\varphi_{2n} : A_n \cup F_n^* \rightarrow B(0, 1)$ , pelo Teorema de Riemann. Assim  $h_{1n} = \varphi_{1n} \circ \psi_n$  está definido em  $A(s_n, 1)$  com contra-domínio em  $B(0, 1)$ . Do mesmo modo temos  $h_{2n} = \varphi_{2n} \circ \psi_n : A(s_n, 1) \rightarrow B(0, 1)$ .

$$\begin{array}{l}
h_{11} \ h_{21} \ h_{12} \ h_{22} \ h_{13} \ h_{23} \ h_{14} \ h_{24} \ \dots \ A(s_1, 1) \rightarrow B(0, 1) \\
\phantom{h_{11} \ } h_{12} \ h_{22} \ h_{13} \ h_{23} \ h_{14} \ h_{24} \ \dots \ A(s_2, 1) \rightarrow B(0, 1) \\
\phantom{h_{11} \ } \phantom{h_{12} \ } h_{13} \ h_{23} \ h_{14} \ h_{24} \ \dots \ A(s_3, 1) \rightarrow B(0, 1)
\end{array}$$

-----

Seja  $\mathcal{F}_k = \{h_{1n}, h_{2n} : n \geq k\}$ .  $\mathcal{F}_k$  é uma família uniformemente limitada em  $A(s_k, 1)$  e portanto normal em  $A(s_k, 1) \forall k$ . Dessa forma existe subsequência  $(h_n^1)_n$  de termos em  $\mathcal{F}_1$  convergente em  $A(s_1, 1)$ . Novamente  $\exists (h_n^2)_n$  subsequência de  $(h_n^1)_n$  convergindo em  $A(s_2, 1)$  e assim sucessivamente. Consideremos a seqüência  $(h_n^n)_n$ . Para  $k$  fixo,  $(h_n^n)_{n \geq k}$  é uma subsequência de  $(h_n^k)_n$ . Logo  $\exists h : B(0, 1) - \{0\} \rightarrow B(0, 1)$ , holomorfa, tal que  $h_n^n$  converge a  $h$  uniformemente em  $A(s_k, 1) \forall k$ .

Utilizemos  $h_n$  para denotar  $(h_n^n)$ . Escolhemos  $K_n$  como sendo a componente conexa envolvida na definição de  $h_n$ . Queremos mostrar que  $\text{diam } K_n$  tende a zero. Para isto basta mostrarmos que  $\text{diam } [B(0, 1) - h_n(A(s_n, 1))]$  tende a zero.

Temos que  $h$  é holomorfa em  $B(0, 1) - \{0\}$  e é limitada. Logo zero é uma singularidade removível de  $h$  e então sem perda de generalidade, podemos supor  $h$  holomorfa em  $B(0, 1)$ . Assim  $\lim \text{diam}[B(0, 1) - h(A(s_n, 1))] = 0$  pois  $B(0, 1) - h(A(s_n, 1)) = h(B(0, 1) - A(s_n, 1))$  e  $\text{diam } [B(0, 1) - h(A(s_n, 1))] = \text{diam } h(B(0, 1) - A(s_n, 1)) \leq L \text{diam } (B(0, 1) - A(s_n, 1)) \xrightarrow{n} 0$  onde  $L$  é uma constante.

Seja  $\varepsilon > 0$ .  $\exists k > 0$  tal que  $\text{diam } h(S(0, s_{k-1})) \leq \varepsilon/2$  onde  $S(0, s_{k-1})$  é a fronteira de  $B(0, s_{k-1})$ . Então para  $n \geq k$   $A(s_k, 1) \subseteq A(s_n, 1)$  e assim  $h_n(A(s_k, 1)) \subseteq h_n(A(s_n, 1))$  e portanto  $B(0, 1) - h_n(A(s_n, 1)) \subseteq B(0, 1) - h_n(A(s_k, 1))$ . Logo  $\text{diam } [B(0, 1) - h_n(A(s_n, 1))] \leq \text{diam } [B(0, 1) - h_n(A(s_k, 1))] \leq \text{diam } h_n(S(0, s_{k-1}))$ .  $\exists n_0$  tal que para  $n \geq n_0$   $\text{diam } h_n(S(0, s_{k-1})) \leq \text{diam } h(S(0, s_{k-1})) + \varepsilon/2$ . Então ficamos com  $\text{diam } (B(0, 1) - h_n(A(s_n, 1))) \leq \text{diam } h(S(0, s_{k-1})) + \varepsilon/2 \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ .  $\diamond$

### 3.2.2 Lema

Sejam  $A_n$  um anel em  $\mathcal{C}$  e  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  uma aplicação racional. Denotando  $K_n$  a componente conexa mencionada no lema 3.2.1 e  $K'_n$  a outra vale que  $\inf \text{diam } K'_n > 0$  quando  $A_n$  divide  $J(f)$ .

#### Demonstração:

Suponhamos que  $\inf \text{diam } K'_n = 0$ . Então  $\exists K'_{n_k}$  subsequência de componentes conexas de  $A_{n_k}^c$  tal que  $\text{diam } K'_{n_k}$  tende a zero. Sem perda de generalidade chamamos  $K_n$  e  $K'_n$ . Assim  $\lim \text{diam } K_n = 0$  e  $\lim \text{diam } K'_n = 0$ . Dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists A_{n_0}$  tal que  $A_{n_0}$  divide  $J(f)$ ,  $\text{diam } K_{n_0} < \varepsilon$  e  $\text{diam } K'_{n_0} < \varepsilon$ . Já que  $A_{n_0}$  divide  $J(f)$  temos que  $J(f)$  está contido num subconjunto de diâmetro tão pequeno quanto queiramos. Assim  $\# J(f) \leq 2$  o que contraria o fato de ser perfeito.  $\diamond$

### 3.2.3 Lema

Utilizando a mesma notação anterior sejam  $1 > r_n > \rho_n$  tais que  $\lim r_n = 0$  e  $\lim \rho_n = 0$ . Sejam  $D'_n = \{z \in \mathcal{C} : |z| < \rho_n\}$  e  $\varphi_n$  representação conforme de  $A_n \cup K_n$  em  $B(0,1)$  tal que  $\varphi_n(0) \in K_n$ . Se  $\{\varphi_n\}$  é normal então  $\lim \text{diam } \varphi_n(D'_n) = 0$ .

#### Demonstração:

Queremos verificar que dado  $\varepsilon > 0 \exists n_0$  tal que  $\text{diam } \varphi_n(D'_n) < \varepsilon$  para  $n \geq n_0$ . Pela equicontinuidade da família normal existe  $V_\varepsilon$ , vizinhança de zero tal que  $\text{diam } \varphi_{n_k}(V_\varepsilon) < \varepsilon$ . Mas  $\lim \text{diam } D'_n = 0$  e portanto  $\exists n_0$  tal que se  $n \geq n_0$  então  $D'_n \subseteq V_\varepsilon$ . Logo  $\text{diam } \varphi_{n_k}(D'_{n_k}) < \text{diam } \varphi_{n_k}(V_\varepsilon) < \varepsilon$ .  $\diamond$

### 3.2.4 Lema

Utilizando a mesma notação do anterior sejam  $c > 0$  e  $m_n$  o primeiro inteiro tal que  $\text{diam } f^{m_n} \varphi_n(D'_n) \geq c$ . Então vale que  $\liminf m_n = \infty$ .

#### Demonstração:

A existência de  $m_n$  é devida ao Teorema 2.12. Suponhamos que  $\lim m_n \neq \infty$  isto é,  $\exists M > 0$  tal que  $\forall N \exists n > N$  com  $m_n \leq M$ ,  $m_n$  um número natural.

Ou seja existe um determinado tempo  $M$  e uma subsequência  $n_k$  tal que  $m_{n_k}$  é uma constante  $s$  e  $\text{diam } f \circ \varphi_{n_k}(D'_{n_k}) \geq c$ . Mas  $\{f \circ \varphi_{n_k}\}$  é normal e como  $\lim \text{diam } D'_{n_k} = 0$  deveríamos ter  $\lim \text{diam } f \circ \varphi_{n_k}(D'_{n_k}) = 0$  o que é uma contradição.  $\diamond$

### 3.3. Teorema (Mañé - Rocha)

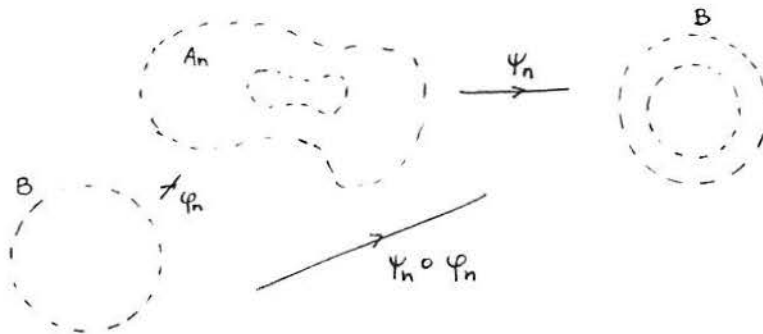
Seja  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  uma função racional. Então  $J(f)$  é uniformemente perfeito.

#### Demonstração:

Queremos mostrar que existe  $m_0 > 0$  tal que cada anel que divide  $J(f)$  tem módulo menor ou igual a  $m_0$ .

Suponhamos que para cada  $n \exists A_n$  dividindo  $J(f)$  mas com  $\lim \text{mod}(A_n) = \infty$ . Sejam  $K_n$  e  $K'_n$  as componentes conexas do complementar de  $A_n$ . Pelo lema 3.2.1  $K_n$  pode ser escolhida tal que  $\lim \text{diam } K_n = 0$ . Pelo lema 3.2.2  $\inf \text{diam } K'_n > 0$ . Denotemos  $B = B(0, 1)$ .

Pelo Teorema de Riemann existe  $\varphi_n : B \rightarrow A_n \cap K_n$  representação conforme tal que  $\varphi_n(0) \in K_n$ . Seja  $\psi_n$  obtida da definição de anel.



Compondo  $\psi_n$  e  $\varphi_n$  temos que  $\text{mod}(B - \varphi_n^{-1}(K_n)) = \text{mod}(A_n)$  já que  $B - \varphi_n^{-1}(K_n)$  tem  $\psi_n(A_n)$  como representação conforme. Assim  $\lim \text{diam} \varphi_n^{-1}(K_n) = 0$ .

Consideremos  $1 > r_n > \rho_n > 2 \text{diam } \varphi_n^{-1}(K_n)$  tal que  $\lim \rho_n/r_n = 0$ ,  $\lim r_n = 0$  e  $\lim \rho_n = 0$ . Sejam  $D_n = \{z \in \mathcal{C} : |z| < r_n\}$  e  $D'_n = \{z \in \mathcal{C} : |z| < \rho_n\}$ .



A família  $\{\varphi_n\}$ ,  $\varphi_n : B \rightarrow \mathcal{C}$ , é normal pois  $\inf_n \text{diam } \varphi_n(B)^c \geq \inf_n \text{diam } K'_n > 0$ . Já que  $\lim \text{diam } D'_n = 0$  e  $\{\varphi_n\}$  é normal o lema 3.3.3 implica que  $\lim \text{diam } \varphi_n(D'_n) = 0$ .

$\varphi_n(D'_n)$  é um aberto que contém pontos de  $J(f)$  (compacto), então  $\exists t_n$  tal que  $f^{t_n}(\varphi_n(D'_n)) \supset J(f)$ .

Sejam  $0 < c < \text{diam } J(f)$  e  $m_n$  o menor inteiro tal que  $\text{diam } f^{m_n} \varphi_n(D'_n) \geq c$ . Assim  $\lim m_n = \infty$ .

Seja  $L$  uma constante de Lipschitz de  $f$ . Assim  $\text{diam } f^{m_n-1} \varphi_n(D'_n) < c$  e  $c \leq \text{diam } f^{m_n} \varphi_n(D'_n) < Lc$ .

Seja  $S$  um conjunto com 4 pontos distintos de  $J(f)$  e tomemos  $c$  tal que se  $\text{diam } H < Lc$  então  $H$  não contém 3 deles.  $\forall n \geq 1$   $f^{m_n} \varphi_n(D'_n)$  não cobre 3 pontos de  $S$ .

Definimos  $\alpha_n : B \rightarrow \mathcal{C}$  por  $\alpha_n(z) = f^{m_n} \varphi_n(r_n z)$ . Mostremos que  $\{\alpha_n\}$  é normal. Seja  $z \in B$ . Então ou  $\rho_n/2 < |r_n z| < r_n$  ou  $|r_n z| \leq \rho_n/2$ . No primeiro caso  $\text{diam } \varphi_n^{-1}(K_n) < \rho_n/2 < r_n$  pela escolha de  $\rho_n$ . Portanto  $r_n z \notin \varphi_n^{-1}(K_n)$  (pois  $|r_n z - 0| > \frac{\rho_n}{2} > \text{diam } \varphi_n^{-1}(K_n)$ ). Assim  $\varphi_n(r_n z) \notin K_n$  e  $\varphi_n(r_n z) \in A_n - K_n \subset J(f)^c$ . Logo  $\alpha_n(z) \notin J(f)$ . Se  $|z| < \rho_n/r_n$  ( $(\rho_n/2) < (\rho_n/r_n)$ ) temos  $|r_n z| < \rho_n$  o que implica  $\alpha_n(z) = f^{m_n} \varphi_n(r_n z) \in f^{m_n} \varphi_n(D'_n)$  que não cobre 3 pontos de  $S$ . Assim  $\alpha_n(B)$  não contém pelo menos 3 pontos de  $S$   $\forall n$  e portanto  $\{\alpha_n\}$  é normal pelo Teorema de Montel.

Sendo  $\{\alpha_n\}$  normal, dado  $\varepsilon > 0 \exists V$ , vizinhança de 0, tal que  $\text{diam } \alpha_n(V) \leq \varepsilon \forall n \geq 1$ . Tomando  $n$  suficientemente grande tal que  $V \supset \{z \in \mathcal{C} : |z| < \rho_n/r_n\}$  temos  $c < \text{diam } f^{m_n} \varphi_n(D'_n) = \text{diam } \varphi_n\left(\{z \in \mathcal{C} : |z| < \frac{\rho_n}{r_n}\}\right) \leq \text{diam } \varphi_n(V) \leq \varepsilon$ , o que é uma contradição.  $\diamond$

## §4. Regularidade do Conjunto de Julia

O objetivo deste parágrafo é provar que o Conjunto de Julia de uma aplicação racional é regular no sentido de Dirichlet.

### 4.1 Definição

Dizemos que um conjunto compacto  $K \subset \mathcal{C}$ , é regular (no sentido de Dirichlet) se cada função contínua  $\phi : K \rightarrow R$  possui uma extensão harmônica contínua, isto é, existe  $\tilde{\phi} : \mathcal{C} \rightarrow R$  contínua tal que  $\tilde{\phi}|_K = \phi$  e  $\tilde{\phi}|_{\mathcal{C} - K}$  é harmônica.

Por exemplo, qualquer conjunto finito com dois ou mais pontos não é regular, pelo teorema de Liouville. Já qualquer círculo é regular: de fato, em cada um dos dois discos complementares ao círculo, podemos estender harmonicamente qualquer função contínua via núcleo de Poisson. Em outras palavras, em cada um dos dois discos complementares resolvemos o clássico problema de Dirichlet. Sob este ponto de vista, dizemos que uma região  $G \subseteq \mathcal{C}$  é uma região de Dirichlet se toda função contínua  $\phi : \partial G \rightarrow R$  da fronteira de  $G$  possuir extensão contínua  $\tilde{\phi} : \mathcal{C} \rightarrow R$  que é harmônica em  $G$ . O complementar de qualquer compacto é uma união (no máximo enumerável) de regiões e prova-se que um compacto  $K \subseteq C$  é regular se e só se cada componente conexa do complementar  $\mathcal{C} - K$  é uma região de Dirichlet. (Para uma prova desta última afirmação, veja [0], pg. 29, Teorema 1.36; para os conceitos básicos relativos à regiões de Dirichlet, veja [Co], capítulo X). É evidente que o conceito de regularidade é invariante por transformações de Möbius.

Para estudar a regularidade de compactos é conveniente introduzir mais um conceito.

### 4.2 Diâmetro Transfinito

Seja  $E \subseteq C$  um conjunto compacto do plano. Para cada  $n = 2, 3, \dots$  seja

$$\Delta_n(E) = \max_{z_1, \dots, z_n \in E} \prod_{1 \leq \mu \neq \nu \leq n} |z_\mu - z_\nu|.$$

O diâmetro transfinito de  $E$  é definido por

$$\tau(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\Delta_n(E)]^{\frac{1}{n(n-1)}}$$

Verifica-se que o diâmetro transfinito de um disco fechado, ou de um círculo é igual ao raio; já o diâmetro transfinito de um intervalo é a quarta parte de seu comprimento. Em geral, o diâmetro transfinito de um compacto conexo  $E \subseteq C$  é maior do que ou igual à quarta parte de seu diâmetro ( ver [T]).

#### 4.3. Critério de Wiener

Seja  $K \subseteq C$  um compacto. Dados  $p \in K$  e  $0 < \lambda < 1$  denotamos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , por

$$K_n = K_n(p, \lambda) = K \cup A(p, \lambda^{n+1}, \lambda^n)$$

a parte de  $K$  à distância entre  $\lambda^{n+1}$  e  $\lambda^n$  de  $p$ . Uma relação entre o diâmetro transfinito e a regularidade é estabelecida pelo seguinte critério devido a Wiener (ver [T]). A componente conexa ilimitada  $G \subseteq \mathcal{C}$  do complementar de um compacto  $K \subseteq C$  com diâmetro transfinito positivo é uma região de Dirichlet se e somente se

$$\sum_n \frac{n}{\log \frac{1}{\tau(K_n)}} = \infty$$

para cada  $p \in \partial G$  e  $0 < \lambda < 1$ .

Com este critério é fácil obter exemplos simples de compactos não pontuais e não regulares. Basta tomar  $K = \{0\} \cup \dots \cup I_{n+1} \cup I_n \cup \dots \cup I_1$ , com  $I_n$  qualquer intervalo compacto de comprimento  $\leq 4e^{-n^2}$  contido em  $(\lambda^{n+1}, \lambda^n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . De fato,  $K_n = K_n(0, \lambda) = I_n$  e  $\tau(I_n) = e^{-n^2}$ , de modo que a série  $\sum_n \frac{n}{\log \frac{1}{\tau(K_n)}} = \sum_n \frac{1}{n^2}$  converge; segue-se que a única componente conexa de  $\mathcal{C} - K$  não é uma região de Dirichlet e portanto  $K$  não é regular.

Um corolário do critério de Wiener, que será utilizado a seguir, é o seguinte: dado um compacto  $K \subseteq C$ , com diâmetro transfinito positivo, a componente conexa ilimitada  $G \subseteq \mathcal{C}$  do complementar de  $K$  é uma região de Dirichlet se

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\tau(K \cup B(p, r))}{r} > 0$$

para cada  $p \in \partial G$ .

O teorema seguinte é devido a Ch. Pommerenke [P].

#### 4.4 Teorema

Todo compacto uniformemente perfeito é regular.

##### Demonstração:

Sejam  $K$  um compacto uniformemente perfeito da esfera de Riemann e  $G$  uma componente conexa do complementar de  $K$ . Pelo observado em 4.1, basta provar que  $G$  é uma região de Dirichlet. Como ambos os conceitos envolvidos são invariantes por transformações de Möbius e o caso  $K = \bar{U}$  não interessa, podemos supor que  $K$  é um compacto uniformemente perfeito do plano complexo e que  $G$  é a componente conexa ilimitada do complementar de  $K$ . Pelo corolário do critério de Wiener, basta provar que existem  $0 < c_0 < 1$  e  $r_0 > 0$  tais que

$$\tau(K \cap B(a, r)) \geq c_0 r$$

para cada  $a \in K$  e  $0 < r < r_0$  suficientemente pequeno para concluir que  $G$  é uma região de Dirichlet.

Para provar isto, observemos inicialmente que existem  $0 < c < 1$  e  $r_0 > 0$  tais que para cada  $z \in K$  e  $0 < r < r_0$  vale

$$K \cup \bar{A}(z, cr, r) \neq \phi.$$

De fato, caso contrário, obteríamos para cada  $n \in \mathbb{N}$  um ponto  $z_n \in K$  e um raio  $0 < r_n < \frac{1}{n}$  tais que  $K \cap \bar{A}(z_n, \frac{r_n}{n}, r_n) = \phi$  e, em particular,  $K \cap A(z_n, \frac{r_n}{n}, r_n) = \phi$ . Sem perda de generalidade,  $z_n \rightarrow z \in K$  e, como  $K$  possui pelo menos um outro ponto  $w \in K$ , teríamos que  $w \in \bar{U} - B(z_n, r_n)$  para  $n$  suficientemente grande; como  $z_n \in B(z_n, \frac{r_n}{n})$ , resultaria que  $A(z_n, \frac{r_n}{n}, r_n)$  divide  $K$ , o que é impossível, pois  $K$  é uniformemente perfeito e  $\text{mod}(A(z_n, \frac{r_n}{n}, r_n)) = \log n \rightarrow \infty$ .

Tomamos, então, tais  $0 < c < 1$  e  $r_0 > 0$  e introduzimos  $\rho = \frac{c}{8}$ . Para cada  $z \in K$ ,  $0 < r < r_0$  e  $k \in \mathbb{N}$  existe  $\varphi_k(z) \in K$  tal que

$$c \frac{r \rho^k}{2} \leq |\varphi_k(z) - z| \leq \frac{r \rho^k}{2}.$$

Seja  $a \in K$ . Tomamos  $\omega(\phi) = a$  e definimos  $\omega(j_1, \dots, j_k)$  para  $j_l =$

$0, 1$  ( $\ell = 1, \dots, k$ ) e  $k = 0, 1, \dots$  recursivamente por

$$\omega(j_1, \dots, j_k, j_{k+1}) = \begin{cases} \omega(j_1, \dots, j_k) & \text{se } j_{k+1} = 0 \\ \varphi_k(\omega(j_1, \dots, j_k)) & \text{se } j_{k+1} = 1 \end{cases}$$

Para  $k$  fixo seja  $E_k$  o conjunto de todos os pontos obtidos deste modo. É claro que  $E_k \subset K$ . Sejam agora  $z = \omega(j_1, \dots, j_k)$  e  $z' = \omega(j'_1, \dots, j'_k)$  pontos de  $E_k$ . Denotamos por  $m(z, z')$  o maior índice  $m$  tal que  $j_\ell = j'_\ell$  para  $1 \leq \ell \leq m$  e seja  $z^* = \omega(j_1, \dots, j_m)$ . Pela simetria nós podemos assumir que  $j_{m+1} = 0$  e  $j'_{m+1} = 1$ . Então

$$|z - z^*| = \left| \sum_{\ell=m+1}^{k-1} [\omega(j_1, \dots, j_{\ell+1}) - \omega(j_1, \dots, j_\ell)] \right|.$$

Cada diferença é zero ou é menor que  $\rho^l r/2$ . Assim  $|z - z^*| \leq (r/2)(\rho^{m+1} + \dots + \rho^{k-1}) < r\rho^{m+1}$  pois  $\rho < \frac{1}{2}$ . Também  $|z' - \varphi_m(z^*)| < r\rho^{m+2} < r\rho^{m+1}$ . Assim temos:

$$\begin{aligned} |z - z'| &= |z^* - \varphi_m(z^*) - z^* + z - z' + \varphi_m(z^*)| \geq \\ &\geq |z^* - \varphi_m(z^*)| - |z - z^*| - |z' - \varphi_m(z^*)| > \\ &> (cr/2)\rho^m - r\rho^{m+1} - r\rho^{m+1} = r\rho^m(c/2 - 2\rho) = (cr/4)\rho^m \end{aligned}$$

Temos que  $z, z' \in E_k$  são iguais se e somente se  $j_i = j'_i \forall i$  pois se existe  $i$  tal que  $j_i \neq j'_i$  então fazendo o raciocínio acima obteríamos  $|z - z'| > 0$ . Logo  $\# E_k = 2^k$ .

Dado  $z \in E_k$  e  $0 \leq \ell \leq k-1$ , temos  $2^{k-\ell-1}$  pontos distintos  $z'$  tais que  $z' \in E_k$  e  $m(z, z') = \ell$ . Assim:

$$\prod_{\substack{z' \in E_k \\ z' \neq z}} |z - z'| > \prod_{\ell=0}^{k-1} [(cr/4)\rho^\ell]^{2^{k-\ell-1}}.$$

Se  $z \in E_k$  então  $z = \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_m}(a)$ , de modo que  $|z - a| \leq (r/2)(1 + \rho + \dots) < r$  e portanto  $E_k \subset E := K \cap B(a, r)$ . Segue-se

$$\Delta_{2^k}(E) = \max_{z_1, \dots, z_k \in E} \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{2^k} \prod_{\nu=1}^{2^k} |z_\mu - z_\nu| \geq \prod_{z \in E_k} \prod_{\substack{z' \in E_k \\ z' \neq z}} |z - z'| >$$

$$> \prod_{z \in E_k} \prod_{\ell=0}^{k-1} ((cr/4)\rho^\ell)^{2^{k-\ell-1}} = \left( \prod_{\ell=0}^{k-1} ((cr/4)\rho^\ell)^{2^{k-\ell-1}} \right)^{2^k}.$$

Então

$$\log \Delta_{2^k}(E) > 2^k \sum_{\ell=0}^{k-1} 2^{k-\ell-1} (\ell \log \rho + \log(cr/4)).$$

Como

$$\tau(E) = \lim_k \Delta_{2^k}(E) \frac{1}{2^k(2^k - 1)},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \log \tau(E) &= \lim_k \frac{1}{2^k(2^k - 1)} \log \Delta_{2^k}(E) = \\ &= \lim_k \frac{1}{2^{2k} - 2^k} \log \Delta_{2^k}(E) \geq \\ &\geq \lim_k \frac{2^k}{2^{2k}} \sum_{\ell=0}^{k-1} 2^{k-\ell-1} (\ell \log \rho + \log(cr/4)) = \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} 1/2^{\ell+1} (\ell \log \rho + \log(cr/4)) = \\ &= \log \rho \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\ell}{2^{\ell+1}} + \log\left(\frac{cr}{4}\right) \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\ell+1}} \\ &= \log \rho \frac{cr}{4}, \end{aligned}$$

de modo que  $\tau(E) \geq \rho \frac{cr}{4} = \left(\frac{c^2}{32}\right)r$ . Isto prova que  $\tau(K \cup B(a, r)) \geq c_0 r$  para cada  $a \in K$  e  $r > 0$  suficientemente pequeno, de modo que  $K$  é regular.  $\diamond$

#### 4.5 Corolário

O Conjunto de Julia de uma aplicação racional da esfera de Riemann é regular no sentido de Dirichlet.

##### Demonstração:

Pelo Teorema 3.3 o Conjunto de Julia é uniformemente perfeito e portanto, pelo Teorema 4.4., é regular.  $\diamond$

### Bibliografia:

- [B] Blanchard, Paul - Complex Analytical Dynamics on the Riemann Sphere, Bulletin of the American Mathematical Society, 11 (1984), 85 - 141.
- [Ca] Caratheodory C. - Theory of Functions (2 vols.), Chelsea (1964).
- [Co] Conway, John B. - Functions of One Complex Variable, Springer (1973).
- [H] Hille, Einar - Analytic Function Theory (2 vols.) , Ginn and Co. (1959).
- [M] Mañé, R. e Rocha, L.F.C. - Os Conjuntos de Julia são Uniformemente Pefeitos (a ser publicado).
- [O] Othsuka, M. - Dirichlet Problem, Extremal Lenght and Prime Ends; Van Nostrand, (1970).
- [P] Pommerenke, Ch - Uniformly Perfect sets and the Poincaré Metric , Arch. Math, 32 (1979), 192 - 199 .
- [R] Rudin, W. - Real and Complex Analysis, McGraw-Hill (1966).
- [S] Sad, Paulo - Introdução à Dinâmica das Funções Racionais na Esfera de Riemann - 14 o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA (1983).
- [T] Tsuji, M. - Potential Theory in Modern Function Theory, Maruzen (1959).