UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Introdução à Teoria de Hamilton-Jacobi

Jonathan Meyer

Trabalho de Conclusão de Curso realizado sob a orientação do Dr. Luiz Fernando Ziebell, apresentado ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Bacharel em Física.

Porto Alegre
Novembro 2007

Ao meu filho.

Agradecimentos

- *Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais por tudo que fizeram por mim.*

- *Agradeço a minha companheira Camila pelo apoio e pela paciência.*

- *Agradeço também a minha irmã, Martina.*

- *Gostaria de agradecer ao Dr. Luiz Fernando Ziebell pela sua orientação, bem como aos professores que aprofundaram meus conhecimentos.*

- *Agradeço aos meus amigos, pela amizade e apoio:*
  - *Eduardo Barros Neves*
  - *Fabio Aresi*
  - *Pedro J. Luger*
  - *Thiago E. Colla*
  - *Hugo Henrique Kegler dos Santos*

Sumário

1 Introdução

Neste trabalho pretende-se descrever os fundamentos da teoria de Hamilton-Jacobi, que é um método poderoso para a resolução de problemas da mecânica. Para tanto, inicia-se com uma breve apresentação dos formalismos lagrangiano e hamiltoniano. A seguir, são vistos também de forma breve, alguns conceitos sobre transformações canônicas. Finalmente, a teoria de Hamilton-Jacobi é apresentada, juntamente com exemplos de aplicação da mesma, a saber, os problemas do oscilador harmônico simples e do oscilador harmônico amortecido.

Para finalizar, será mostrada uma analogia, que foi desenvolvida por Hamilton no período de 1828 a 1837, entre a teoria de Hamilton-Jacobi e a ótica geométrica.

É importante ressaltar que este trabalho é fortemente baseado na literatura [1, 2, 3, 4] e não pretende estabelecer nada de novo, visto que apenas descreve resultados já obtidos.

2 Equações de Lagrange do Movimento

Na formulação newtoniana da mecânica, o movimento de uma partícula em um sistema de referência inercial é descrito pela segunda lei de Newton. Assim, para resolvermos um dado problema, é necessário que conheçamos a força total $\vec{F}$ que atua sobre a partícula. As quantidades envolvidas na formulação newtoniana são essencialmente quantidades vetoriais.

No formalismo lagrangiano, a quantidade mais relevante é uma função escalar denominada lagrangiano $\mathcal{L}$, que é definida como

$$\mathcal{L} = T - V ,$$

onde T é a energia cinética e V é a energia potencial.

As equações de movimento da mecânica lagrangiana são chamadas equações de Lagrange. Estas podem ser obtidas com a aplicação do princípio de Hamilton. Para tal, enunciamos este princípio:

> "De todos os caminhos possíveis que um sistema dinâmico pode utilizar para mover-se de um ponto a um outro, em um dado intervalo de tempo, o caminho seguido é aquele que minimiza a integral:
>
> $$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt,$$
>
> onde $\mathcal{L} = T - V$ é o lagrangiano do sistema (T e V são as energias cinética e potencial respectivamente)."

Em termos do cálculo de variações, o Princípio de Hamilton torna-se,

$$\delta\, I = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,(q_j, \dot{q}_j, t)\, dt = 0 \qquad j = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

onde os q_j são as coordenadas generalizadas, que podem ser qualquer conjunto de quantidades que especificam completamente o estado de um sistema [2]. As derivadas $\dot{q}_j$ são chamadas velocidades generalizadas.

Partindo deste princípio podemos derivar as equações de Lagrange. Efetuando a variação da equação (1):

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\, \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\, \delta \dot{q}_j \right) dt = 0.$$

Notando que $\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt}(\delta q_j)$, e tendo em mente que $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$, integramos por partes o segundo termo do integrando,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt}(\delta q_j)\, dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_j \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\, dt,$$

portanto,

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j\, dt = 0.$$

As variações δq_j são independentes e arbitrárias. Assim, a equação acima será satisfeita se a expressão entre parênteses se anular. Obtemos então, as equações de Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0 \qquad j = 1, 2, ..., n. \tag{2}$$

Desta forma, se conhecemos o lagrangiano $\mathcal{L}$ de um sistema, então as equações de Lagrange estabelecerão as relações entre as acelerações, as velocidades e as coordenadas, ou seja, as equações (2) constituem as equações do movimento do sistema.

2.1 Conservação da Energia

Em um sistema de referência inercial o tempo é homogêneo, portanto, o Lagrangiano de um sistema fechado não depende explicitamente do tempo, ou seja:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

e a derivada total do Lagrangiano torna-se

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \,.$$

Com as equações de Lagrange (2), $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$, a equação acima será:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_j \dot{q}_j \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j$$

ou

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} - \sum_j \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{L} - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \,.$$

Assim, a quantidade entre parênteses é constante no tempo e denotamos esta constante por $-\mathcal{H}$:

$$\mathcal{L} - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = -\mathcal{H} \,. \tag{3}$$

Se a energia potencial V não depende explicitamente das velocidades $\dot{q}_j$, então

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T - V) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \,.$$

A equação (3) pode então ser escrita como

$$(T - V) - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = -\mathcal{H} \,.$$

Aplicando o teorema de Euler a respeito das funções homogêneas [2], obteremos:

$$T - V - 2T = -\mathcal{H} \,,$$

ou

$$T + V = E = \mathcal{H} = constante.$$

A função $\mathcal{H}$ é chamada hamiltoniano do sistema, e é igual à energia total E desde que a energia cinética seja uma função homogênea quadrática de $\dot{q}_j$ e a energia potencial seja independente de $\dot{q}_j$.

2.2 Conservação do Momentum Linear

A homogeneidade do espaço dá lugar a outra lei de conservação, a conservação do momentum linear. Por causa dessa homogeneidade, as propriedades mecânicas de um sistema fechado não mudam quando há um deslocamento do sistema inteiro no espaço.

Por simplicidade, consideraremos um sistema com apenas uma partícula e escreveremos o lagrangiano em termos de coordenadas cartesianas $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i)$. A variação em $\mathcal{L}$ causada por um deslocamento infinitesimal $\delta\vec{r} = \sum_i \delta x_i \vec{e_i}$ é

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\delta \dot{x}_i = 0.$$

Como os δx_i não são funções explícitas ou implícitas do tempo;

$$\delta\dot{x}_i = \delta\frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt}\delta x_i = 0,$$

portanto,

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}\delta x_i = 0,$$

que será satisfeita somente se $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$. Então, de acordo com as equações de Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad e \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = constante.$$

Portanto,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}(T - V) = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{1}{2}m\sum_i \dot{x}_i{}^2\right) = m\dot{x}_i = p_i = constante.$$

Este resultado sugere uma extensão para o conceito de momentum. O momentum generalizado associado à coordenada q_j deve ser definido como

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}. \tag{4}$$

Se o lagrangiano de um sistema não contiver uma dada coordenada q_j, então esta coordenada é denominada *cíclica.* Para uma coordenada cíclica a equação de Lagrange do movimento se reduz a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

ou, com a definição (4), temos

$$\frac{dp_j}{dt} = 0 \quad e \quad p_j = constante.$$

Consequentemente, podemos afirmar que o momentum generalizado conjugado a uma coordenada cíclica é conservado.

3 Equações de Hamilton do Movimento

Já vimos que o movimento de um sistema com n graus de liberdade é descrito pelas equações de Lagrange, que constituem um conjunto de n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem no tempo para as coordenadas generalizadas $q_1(t), ..., q_n(t)$. Porém, existe uma outra formulação que foi introduzida por Hamilton, onde as equações de movimento são $2n$ equações diferenciais ordinárias de primeira ordem no tempo.

Iremos agora, desenvolver brevemente essa 'nova' formulação.

Os momenta generalizados foram definidos como

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \, . \tag{5}$$

Com esta definição, as equações de Lagrange tornam-se

$$\dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \, , \tag{6}$$

e a equação (3) para o hamiltoniano pode ser escrita como

$$\mathcal{H} = \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} \, .$$

As equações (5) podem ser resolvidas para as velocidades generalizadas. Assim, a formulação hamiltoniana envolve a substituição das variáveis $(q_j, \dot{q}_j, t)$ por (q_j, p_j, t), em um procedimento conhecido como *transformação de Legendre*, e o hamiltoniano é expresso na forma

$$\mathcal{H}(q_k, p_k, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, t) \, .$$

A diferencial total de $\mathcal{H}$ é:

$$d\mathcal{H} = \sum_k \left(p_k d\dot{q}_k + \dot{q}_k dp_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \, . \tag{7}$$

Substituindo (5) e (6) em (7) temos

$$d\mathcal{H} = \sum_k (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \, . \tag{8}$$

Também podemos escrever a diferencial total de $\mathcal{H}$ como

$$d\mathcal{H} = \sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \, . \tag{9}$$

Comparando (8) e (9) notamos que

$$\dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \qquad e \qquad -\dot{p}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \, . \tag{10}$$

Essas são as equações de Hamilton do movimento, que formam um conjunto de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem no tempo.

Também pode ser notado que $-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$. Portanto, se $\mathcal{L}$ não é uma função explícita de t, então $\mathcal{H}$ é uma constante de movimento, como já visto na equação (3). Isto pode também ser visto se substituirmos as equações de Hamilton (10) na expressão para a derivada total do hamiltoniano em relação ao tempo, ou seja

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t},$$

então

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Uma coordenada que é cíclica em $\mathcal{L}$ é também cíclica em $\mathcal{H}$, portanto os teoremas de conservação vistos anteriormente para a formulação lagrangeana, podem ser transferidos para a formulação hamiltoniana por uma simples substituição de $\mathcal{L}$ por $\mathcal{H}$.

4 Transformações Canônicas

As equações de Lagrange são invariantes em relação a transformações que modificam as coordenadas q_j em outras grandezas independentes Q_j, onde $Q_j = Q_j(q, t)$ [1]. Na formulação hamiltoniana as variáveis independentes são q_j e p_j, portanto podemos considerar a transformação das variáveis independentes q_j e p_j nas novas variáveis P_j e Q_j de modo que

$$Q_j = Q_j(q_j, p_j, t), \qquad P_j = P_j(q_j, p_j, t).$$

Porém, temos interesse apenas em transformações nas quais Q e P são coordenadas canônicas. Para isso deve existir uma função $K(Q_j, P_j, t)$ tal que as equações de movimento para as novas variáveis tenham a forma hamiltoniana:

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial P_j}, \qquad \dot{P}_j = -\frac{\partial K}{\partial Q_j}.$$

Essas equações definem uma transformação canônica.

Sendo Q_j e P_j coordenadas canônicas, podemos escrever o princípio de Hamilton como:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_j P_j \dot{Q}_j - K(Q_j, P_j, t) \right) dt = 0. \tag{11}$$

Simultaneamente as velhas coordenadas satisfazem um princípio similar:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}(q_j, p_j, t) \right) dt = 0. \tag{12}$$

Uma condição suficiente para a validade comum de (11) e (12) é que os respectivos integrandos difiram pela derivada total em relação ao tempo de uma função arbitrária F, chamada função geradora. Então

$$\sum_j p_j\dot{q}_j - \mathcal{H} = \sum_j P_j\dot{Q}_j - K + \frac{dF}{dt}\,. \tag{13}$$

A função geradora pode ser escrita, convenientemente para cada problema, em uma das quatro formas possíveis:

$$F_1(q_j, Q_j, t)\,, \quad F_2(q_j, P_j, t)\,, \quad F_3(p_j, Q_j, t)\,, \quad F_4(p_j, P_j, t)\,.$$

Se é mais adequado escolhermos F_1 para um dado problema, então (13) toma a forma

$$\sum_j p_j\dot{q}_j - \mathcal{H} = \sum_j P_j\dot{Q}_j - K + \frac{dF_1}{dt}\,. \tag{14}$$

Por outro lado, a derivada total de F_1 em relação ao tempo é

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_j \frac{\partial F_1}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial F_1}{\partial Q_j}\dot{Q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial t}\,.$$

Comparando com (14), obtemos as equações de transformação:

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}\,, \quad P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}\,, \quad K = \mathcal{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t}\,. \tag{15}$$

Também podemos ter F_2 como a escolha mais adequada. A transição das variáveis q_j, Q_j para q_j, P_j pode ser feita mediante uma transformada de Legendre:

$$F_2(q_j, P_j, t) = F_1(q_j, Q_j, t) - \sum_j \frac{\partial F_1}{\partial Q_j}Q_j\,,$$

com $\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = -P_j$,

$$F_2(q_j, P_j, t) = F_1(q_j, Q_j, t) + \sum_j P_jQ_j\,. \tag{16}$$

Resolvendo para F_1 e substituindo em (14),

$$\sum_j p_j\dot{q}_j - \mathcal{H} = \sum_j P_j\dot{Q}_j - K + \frac{d}{dt}(F_2 - \sum_j P_jQ_j) = -\sum_j Q_j\dot{P}_j - K + \frac{d}{dt}F_2(q_j, P_j, t)\,. \tag{17}$$

Mas

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_j \frac{\partial F_2}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial F_2}{\partial P_j}\dot{P}_j + \frac{\partial F_2}{\partial t}\,,$$

comparando com (17) obtemos as equações de transformação:

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}\,, \quad Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j}\,, \quad K = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}\,. \tag{18}$$

Analogamente podemos fazer uma transformada de Legendre para obter a transição das variáveis q_j, Q_j para as novas variáveis p_j, Q_j. Neste caso a função geradora será $F_3(p_j, Q_j, t)$. Portanto

$$F_1(q_j, Q_j, t) = \sum_j q_j p_j + F_3(p_j, Q_j, t).$$

Utilizando o mesmo procedimento usado para F_1 e F_2, as equações de transformação encontradas são:

$$q_j = -\frac{\partial F_3}{\partial p_j}, \quad P_j = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_j}, \quad K = \mathcal{H} + \frac{\partial F_3}{\partial t}. \tag{19}$$

Quando p_j e P_j são as variáveis independentes, podemos relacionar $F_4(p_j, P_j, t)$ com $F_1(q_j, Q_j, t)$, realizando uma dupla transformada de Legendre:

$$F_4 = F_1 - \sum_j \frac{\partial F_1}{\partial q_j} q_j - \sum_j \frac{\partial F_1}{Q_j} Q_j,$$

mas $\frac{\partial F_1}{\partial q_j} = p_j$ e $\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = -P_j$, então

$$F_4(p_j, P_j, t) = F_1(q_j, Q_j, t) + \sum_j P_j Q_j - \sum_j p_j q_j.$$

Novamente, resolvemos para F_1 e substituimos em (14),

$$-\sum_j q_j \dot{p}_j - \mathcal{H} = -\sum_j Q_j \dot{P}_j - K + \frac{dF_4}{dt},$$

de modo que as equações de transformação serão:

$$q_j = -\frac{\partial F_4}{\partial p_j}, \quad Q_j = \frac{\partial F_4}{\partial P_j}, \quad K = \mathcal{H} + \frac{\partial F_4}{\partial t}. \tag{20}$$

Como exemplo, consideramos a função geradora [1]

$$F_1(q, Q) = \frac{m}{2} \omega q^2 \cot Q,$$

onde m e ω são constantes.

Das equações de transformação (15):

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q \tag{21}$$

e

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q}. \tag{22}$$

Resolvendo (22) para q, temos

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q. \tag{23}$$

Substituindo esse resultado em (21):

$$p = m\omega\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q \cot Q = \sqrt{2m\omega P}\cos Q\,. \tag{24}$$

A função geradora dada não depende explicitamente do tempo, então $K = \mathcal{H}$, pois $\frac{\partial F_1}{\partial t} = 0$. Se considerarmos o problema do oscilador harmônico, a energia potencial será dada por

$$V = \frac{kq^2}{2}\,,$$

e o hamiltoniano terá a forma

$$\mathcal{H} = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{kq^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}\,. \tag{25}$$

Substituimos agora as equações de transformação (23) e (24) em (25):

$$\mathcal{H} = \omega P\cos^2 Q + \frac{kP}{m\omega}\sin^2 Q\,.$$

Com $\omega^2 = k/m$, o hamiltoniano será

$$\mathcal{H} = \omega P\,.$$

Observamos então que Q é cíclica e o momentum conjugado P é constante. A equação do movimento para Q é

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P} = \omega\,,$$

com a solução:

$$Q = \omega t + \alpha\,,$$

onde α é uma constante de integração determinada pelas condições iniciais.

Finalmente, substituimos essa solução em (23) e obtemos a solução para q:

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin(\omega t + \alpha)\,,$$

que é a solução para um oscilador harmônico. E é a energia total constante do oscilador.

5 Teoria de Hamilton-Jacobi

Muitos problemas podem ser resolvidos com a ajuda de transformações canônicas. A teoria de Hamilton-Jacobi é um método construtivo que permite, em muitos casos, produzir uma transformação canônica que simplifica bastante as equações de movimento de um sistema, tornando trivial a integração destas equações.

5.1 Equação de Hamilton-Jacobi para a função de Hamilton principal

Seja um sistema mecânico com um dado hamiltoniano $\mathcal{H}(q,p,t)$, realizemos uma transformação canônica por meio de uma função geradora $S(q,P,t)$. Escolhemos S de tal modo que o novo hamiltoniano seja nulo, $K(Q,P,t)=0$. Dessa forma, as equações de movimento de Hamilton transformadas são

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \;\rightarrow\; Q_i = \beta_i$$

e

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \;\rightarrow\; P_i = \alpha_i\,,$$

onde os α_i e os β_i são constantes.

A relação entre o novo e o velho hamiltoniano é

$$K = \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}\,,$$

como $K=0$:

$$\mathcal{H}(q,p,t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\,. \tag{26}$$

Pela notação usada anteriormente, S é uma função geradora do tipo $F_2(q,P,t)$. Com as equações de transformação (18), temos

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}\,, \qquad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}$$

e a equação (26) torna-se

$$\mathcal{H}\left(q_1,...,q_n,\frac{\partial S}{\partial q_1},...,\frac{\partial S}{\partial q_n},t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\,. \tag{27}$$

Esta equação é conhecida como a equação de Hamilton-Jacobi, que é uma equação diferencial parcial de primeira ordem nas $n+1$ variáveis, $q_1,...,q_n,t$. A sua solução S é chamada função de Hamilton principal.

Uma solução completa da Eq. (27) deve envolver $n+1$ constantes de integração independentes: $\alpha_1,...,\alpha_n,\alpha_{n+1}$. Como S não aparece em (27), mas apenas suas derivadas, uma das constantes, a α_{n+1}, é meramente aditiva. Ou seja, qualquer solução contendo $n+1$ parâmetros é da forma $S+\alpha_{n+1}$. A constante aditiva α_{n+1} pode ser descartada, pois não modifica a transformação gerada por S.

Concluímos então que uma solução completa de (27) tem a forma

$$S = S(q_1,...,q_n,\alpha_1,...,\alpha_n,t)\,,$$

onde as α's são constantes de integração não aditivas. Fazendo a identificação $\alpha_i = P_i$, a função geradora $S(q,P,t)$ executa uma transformação canônica que reduz a zero o novo hamiltoniano. Com essa identificação, o movimento do sistema é determinado pelas equações

$$Q_i = \beta_i = \frac{\partial S(q_i,\alpha_i,t)}{\partial \alpha_i}\,, \qquad i = 1,...,n\,. \tag{28}$$

As constantes β's são obtidas com as condições iniciais, calculando o valor de $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ em $t = t_0$ com os valores iniciais de q_i. Então as equações (28) podem ser resolvidas para q em função de α_i, β_i e t:

$$q = q(\alpha_i, \beta_i, t)\,.$$

Em resumo, a função principal de Hamilton executa uma transformação canônica na qual as novas coordenadas e os novos momenta são constantes de movimento. Quando resolvemos a equação de Hamilton-Jacobi estamos ao mesmo tempo obtendo uma solução para o problema mecânico.

Em alguns casos é conveniente tomar um particular conjunto de n quantidades γ_i's como os novos momenta, onde

$$\gamma_i = \gamma_i(\alpha_i, ...\alpha_n)\,.$$

Com esta definição a função principal de Hamilton pode ser escrita em função de q_i, γ_i e t. Porém, este tipo de abordagem não será discutida aqui. Os interessados devem consultar a referência [1].

5.2 O problema do oscilador harmônico como exemplo de aplicação da teoria de Hamilton-Jacobi

O hamiltoniano para um oscilador harmônico unidimensional é

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}\,.$$

Para este caso a equação de Hamilton-Jacobi tem a forma

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\,.$$

Substituindo p por $\frac{\partial S}{\partial q}$ no hamiltoniano, temos

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{kq^2}{2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\,. \tag{29}$$

Uma solução para (29) pode ser obtida por separação de variáveis na forma de soma [1]:

$$S = W(q) + T(t)\,.$$

Introduzindo esta relação em (29) resulta

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{kq^2}{2} = -\frac{dT}{dt}\,. \tag{30}$$

Ambos os lados desta equação são iguais a uma mesma constante positiva, que chamaremos de α. Ficamos então, com as duas equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{kq^2}{2} = \alpha \tag{31}$$

e

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha \, .$$

A constante α coincide com o valor constante do hamiltoniano, pois $\frac{dW}{dq} = \frac{\partial S}{\partial q} = p$. A parte de S independente do tempo será

$$W = \sqrt{mk} \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2} \, ,$$

consequentemente, com $T(t) = -\alpha t$, temos

$$S(q, \alpha, t) = -\alpha t + \sqrt{mk} \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2} \, . \tag{32}$$

A solução da equação de movimento para q obtém-se de

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2}} - t \, . \tag{33}$$

Integrando[1] (33), obtemos a expressão

$$t + \beta = \sqrt{\frac{m}{k}} \arccos q \sqrt{\frac{k}{2\alpha}} \, ,$$

que pode ser resolvida para q, ou seja:

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \cos \omega (t + \beta) \, , \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \, .$$

Esta é a bem conhecida solução do problema do oscilador harmônico.

Supomos que em $t = 0$ a partícula esteja parada, $p_0 = 0$, mas deslocada da posição de equilíbrio de uma quantidade q_0. Podemos determinar α resolvendo (31) para $\frac{dW}{dq}$ e depois calcular em $t = 0$:

$$\frac{dW}{dq} = \sqrt{2m} \sqrt{\alpha - \frac{kq^2}{2}} \, .$$

Calculando em $t = 0$:

$$\left(\frac{dW}{dq} \right)_{t=0} = p_0 = 0 = \sqrt{2m} \sqrt{\alpha - \frac{kq_0^2}{2}} \, ,$$

portanto, temos

$$\alpha = \frac{kq_0^2}{2} \, ,$$

[1] A integral de (33) é tabelada e pode ser encontrada na referência [1], página 77: $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arccos \left(\frac{-b-2cx}{\sqrt{b^2-4ac}} \right)$

que é a energia inicial total do sistema. Este fato pode também ser visto com a relação

$$\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 .$$

De $S = W - \alpha t$, temos $\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha$, então

$$\mathcal{H} = \alpha .$$

A solução q em termos de seu valor inicial q_0 será

$$q = q_0 \cos \omega(t + \beta) , \tag{34}$$

e, das condições iniciais obtemos $\beta = 0$. Substituindo $\alpha = kq_0^2/2$ em (32), escrevemos a função principal de Hamilton como:

$$S = \sqrt{mk} \int dq \sqrt{q_0^2 - q^2} - \frac{kq_0^2}{2} t , \quad k = m\omega^2 .$$

Mas $\sqrt{q_0^2 - q^2} = \frac{1}{\sqrt{mk}} \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{p}{m\omega} = \dot{q}/\omega = -q_0 \sin \omega t$, então

$$S = m\omega^2 q_0^2 \int \left(\sin^2 \omega t - \frac{1}{2} \right) dt .$$

Portanto, S é a integral do lagrangiano em relação ao tempo, pois

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{m\omega^2 q^2}{2} = m\omega^2 q_0^2 (\sin^2 \omega t - \frac{1}{2}) .$$

Este resultado pode ser visto se tomarmos a derivada total de S em relação ao tempo:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} .$$

Com $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ e $\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$, teremos

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \mathcal{L} ,$$

portanto

$$S = \int \mathcal{L} dt + constante .$$

Infelizmente, essa equação é inútil para determinar S porque para calcular a integral que nela aparece, é preciso conhecer a solução q_i das equações de movimento, mas é exatamente com esta finalidade que se busca S.

5.3 Equação de Hamilton-Jacobi para a função característica

Uma separação de variáveis em forma de soma, como aquela feita no exemplo do oscilador harmônico, é possível sempre que o antigo hamiltoniano $\mathcal{H}$ não dependa explicitamente do tempo [1]. Neste caso a equação de Hamilton-Jacobi para S torna-se

$$\mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{35}$$

O primeiro termo depende apenas de q_i, o segundo, apenas de t. S pode então ser escrita na forma

$$S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - \alpha_1 t.$$

Substituindo essa forma em (35), temos

$$\mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1. \tag{36}$$

O tempo não está contido nesta equação e α_1 é igual ao valor constante do hamiltoniano.

A função W, conhecida como a função característica de Hamilton, gera uma transformação cujas propriedades são diferentes das propriedades da transformação gerada por S.

Consideremos uma transformação canônica na qual os novos momenta α_i são todos constantes e onde α_1 é igual ao hamiltoniano $\mathcal{H}$, ou seja

$$\mathcal{H}(q_i, p_i) = \alpha_1. \tag{37}$$

Com a função geradora do tipo $W(q, P)$, as equações de transformação são

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}..$$

Então a equação (37) torna-se

$$\mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1,$$

que é igual à equação (36).

Como W é independente do tempo ($\frac{\partial W}{\partial t} = 0$), o novo hamiltoniano K é igual ao antigo: $K = \mathcal{H}$ e $K = \alpha_1$. Portanto, em uma transformação gerada por W, todas as coordenadas são cíclicas e, consequentemente, os momenta são todos constantes:

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_i = \alpha_i.$$

As equações de movimento para $\dot{Q}_i$ são

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial K}{\partial \alpha_1} = 1$$

e

$$\dot{Q}_i = 0\,, \quad i \neq 1\,,$$

tendo como soluções

$$Q_1 = t + \beta_1 \quad e \quad Q_i = \beta_i\,, \quad i \neq 1\,. \tag{38}$$

Uma solução da eq. (36) deve ter n constantes de integração, mas novamente uma delas é aditiva. As $n-1$ constantes restantes, $\alpha_2, ..., \alpha_n$, juntamente com α_1 são tomadas como os novos momenta constantes. As n constantes de integração são determinadas pelas condições iniciais. As soluções (38) podem ser resolvidas para q_i em função de α_i, β_i, e do tempo t, determinando a solução do problema em consideração.

5.4 O problema do oscilador harmônico amortecido

Neste exemplo, que será baseado na referência [3], aplicaremos a teoria de Hamilton-Jacobi para resolver o problema do oscilador harmônico amortecido, onde o hamiltoniano depende explicitamente do tempo. O hamiltoniano para este oscilador é

$$\mathcal{H} = e^{-\lambda t}\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 e^{\lambda t}\,,$$

onde λ é o parâmetro de amortecimento. A equação de Hamilton-Jacobi correspondente é

$$\frac{e^{-\lambda t}}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2 e^{\lambda t} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\,.$$

Devido ao fato de $\mathcal{H}$ depender explicitamente do tempo, esta última equação não admite separação de variáveis em forma de soma. No entanto, a forma de $\mathcal{H}$ sugere a transformação canônica

$$Q = q e^{\lambda t/2}\,, \qquad P = p e^{-\lambda t/2}\,,$$

com a função geradora $F_2(q, P, t) = e^{\lambda t/2} q P$ e

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}\,, \qquad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}\,.$$

O novo hamiltoniano, que não depende explicitamente do tempo, é

$$K(Q,P) = \mathcal{H}(q,p,t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}Q^2 + \frac{\lambda}{2}QP\,.$$

A equação de Hamilton-Jacobi associada a K será

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}Q^2 + \frac{\lambda}{2}Q\frac{\partial S}{\partial Q} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\,.$$

Agora podemos separar S em forma de soma: $S = W - \alpha t$, onde

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dQ}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}Q^2 + \frac{\lambda}{2}Q\frac{dW}{dQ} = \alpha\,,$$

ou

$$\left(\frac{dW}{dQ}\right)^2 + m^2\omega^2 Q^2 - 2m\alpha + m\lambda Q\frac{dW}{dQ} = 0\,.$$

Resolvendo para $\frac{dW}{dQ}$:

$$\frac{dW}{dQ} = -\frac{m\lambda}{2}Q + \left[2m\alpha - \left(1 - \frac{\lambda^2}{4\omega^2}\right)m^2\omega^2Q^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Então

$$W = -\frac{m\lambda}{4}Q^2 + \int\left[2m\alpha - \left(1 - \frac{\lambda^2}{4\omega^2}\right)m^2\omega^2Q^2\right]^{\frac{1}{2}}dQ\,.$$

Consideremos o caso de subamortecimento ($\lambda < 2\omega$), de modo que $\frac{\lambda^2}{4\omega^2} < 1$. Podemos escrever S como

$$S = -\alpha t - \frac{m\lambda}{4}Q^2 + \int\left[2m\alpha - \left(1 - \frac{\lambda^2}{4\omega^2}\right)m^2\omega^2Q^2\right]^{\frac{1}{2}}dQ\,.$$

Portanto,

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial\alpha} = -t + m\int\frac{dQ}{\sqrt{2m\alpha - \left(1 - \frac{\lambda^2}{4\omega^2}\right)m^2\omega^2Q^2}}\,. \tag{39}$$

Integrando[2] a equação acima, obtemos

$$\beta = -t + \frac{1}{\omega\sqrt{B}}\arccos\left[\frac{\sqrt{B}m\omega Q}{\sqrt{2m\alpha}}\right],$$

onde $B \equiv 1 - \frac{\lambda^2}{4\omega^2}$. Resolvendo para Q e retornando à variável q, resulta

$$q = Ae^{-\lambda t/2}\cos\left(\Omega t + \delta\right), \tag{40}$$

onde definimos $A = \frac{\sqrt{2m\alpha}}{\sqrt{B}m\omega}$, $\delta = \sqrt{B}\beta\omega$ e $\Omega = \left(\omega^2 - \frac{\lambda^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$. A equação (40) é a solução para o oscilador harmônico amortecido no caso de subamortecimento. As constantes A e δ são determinadas pelas condições iniciais.

5.5 A teoria de Hamilton-Jacobi e a ótica geométrica

Para a seguinte discussão, consideraremos apenas sistemas para os quais o hamiltoniano é uma constante de movimento e é igual à energia total E, ou seja, $\mathcal{H} = E = \alpha_1$.

Neste caso teremos

$$S(q,P,t) = W(q,P) - \alpha_1 t = W(q,P) - Et\,.$$

[2] A integral da equação (39) tem a mesma forma da integral vista na seção (5.2)

Consideremos a família de superfícies no espaço de configuração definidas pela equação

$$S(q, P, t) = W(q, P) - Et = constante\,. \tag{41}$$

A função característica é independente do tempo. Assim, as superfícies $W = constante$ têm localizações fixas no espaço de configuração. Uma superfície caracterizada por um valor constante de S deve coincidir, em algum instante de tempo, com algum particular valor de W constante. Porém, de (41) pode ser notado que o valor de W varia com o tempo para um valor definido de S. Ou seja, em $t = 0$ a superfície $S = a$ ($a = constante$) coincide com a superfície $W = a$, mas, num tempo posterior dt, a superfície $S = a$ coincidirá com a superfície $W = a + Edt$. Então, no tempo dt, a superfície $S = a$ se moverá de $W = a$ para $W = a + Edt$.

O movimento da superfície no tempo é similar à propagação de uma frente de onda. Podemos então considerar as superfícies $S = constante$ como frentes de onda se propagando no espaço de configuração.

Por simplicidade, consideremos um sistema com somente uma partícula num potencial V, e tomemos as coordenadas cartesianas x, y e z, como coordenadas generalizadas. O espaço de configuração, neste caso, é o espaço tridimensional. A equação de Hamilton-Jacobi para a função característica tem a forma

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right] + V = E\,,$$

ou

$$(\nabla W)^2 = 2m(E - V)\,, \tag{42}$$

onde $\vec{p} = \nabla W$.

O gradiente de W determina a normal às superfícies de S ou W constantes. A direção da trajetória da partícula, em qualquer ponto no espaço, é determinada pela direção do momentum $\vec{p}$. Portanto, podemos concluir que em cada instante t a trajetória da partícula é perpendicular às superfícies S ou W constantes.

A velocidade da onda em um particular ponto sobre uma superfície $S = constante$ é dada por

$$u = \frac{ds}{dt}\,,$$

onde ds é a distância perpendicular que a frente de onda se moveu em um tempo infinitesimal dt.

No tempo dt a superfície S se moveu de uma superfície W para uma nova superfície na qual o valor da função característica é $W + dW$, onde $dW = Edt$. Com a relação $dW = |\nabla W| ds$, temos

$$u = \frac{ds}{dt} = \frac{E}{|\nabla W|}\,.$$

O módulo do gradiente de W é obtido da equação (42) e, consequentemente, a velocidade da onda será

$$u = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V)}}\,. \tag{43}$$

Com $p = |\nabla W| = \sqrt{2m(E-V)}$, a equação (43) também pode ser escrita como

$$u = \frac{E}{p} = \frac{E}{mv}, \tag{44}$$

onde v é a velocidade da partícula. A equação (44) nos informa que a velocidade de um ponto sobre uma superfície S constante é inversamente proporcional à velocidade da partícula, cujo movimento é descrito por S.

A trajetória de uma partícula é uma linha perpendicular às superfícies S ou W constantes. Esta conclusão é análoga à situação na ótica geométrica, na qual a trajetória de um raio de luz é uma linha perpendicular às superfícies de fase constante.

Consideremos uma onda com frequência angular ω se propagando através de um meio com índice de refração $n = c/u$ que depende da posição (x, y, z). O número de onda é dado por

$$k = k(x,y,z) = \frac{\omega}{u} = n\frac{\omega}{c}.$$

A equação da onda independente do tempo é

$$\nabla^2\varphi + k^2\varphi = 0, \tag{45}$$

que é satisfeita por

$$\varphi = Ae^{i\phi},$$

onde A e ϕ são a amplitude e a fase respectivamente, e dependem da posição (x, y, z). Calculando

$$\nabla\varphi = (\nabla A + iA\nabla\phi)e^{i\phi} \Rightarrow \nabla^2\varphi = (\nabla^2 A + 2i\nabla A \,.\, \nabla\phi + iA\nabla^2\phi - A(\nabla\phi)^2)e^{i\phi}$$

e substituindo na equação da onda obtemos

$$\nabla^2 A + 2i\nabla A \,.\, \nabla\phi + iA\nabla^2\phi - A(\nabla\phi)^2 + k^2 A = 0.$$

Esta equação é satisfeita se as partes real e imaginária forem separadamente iguais a zero:

$$\nabla^2 A - A(\nabla\phi)^2 + k^2 A = 0 \Rightarrow (\nabla\phi)^2 = k^2 + \frac{\nabla^2 A}{A} \tag{46}$$

e

$$2\nabla A \,.\, \nabla\phi + A\nabla^2\phi = 0.$$

Supomos que as propriedades do meio variam lentamente com a posição. Em particular, assumimos que a distância ℓ na qual a amplitude A varia apreciavelmente é muito maior que o comprimento de onda, então

$$\frac{\nabla^2 A}{A} \approx \frac{1}{\ell^2} \ll \frac{1}{\lambda^2} = \frac{k^2}{4\pi^2} \Rightarrow k^2 \gg \frac{\nabla^2 A}{A}..$$

Portanto a equação (46) pode ser escrita como

$$(\nabla\phi)^2 \approx k^2. \tag{47}$$

Esta é a equação do *eikonal* da ótica geométrica. Podemos ver que ela tem a mesma forma da equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo (42) para uma partícula de massa m e energia E se movendo em um potencial V,

$$(\nabla W)^2 = 2m(E - V)\,.$$

Podemos então fazer a correspondência

$$W \rightarrow \hbar\phi$$

e

$$\sqrt{2m(E-V)} \rightarrow \hbar k\,, \tag{48}$$

onde $\hbar$ é uma constante de proporcionalidade. Da mesma forma que φ satisfaz a equação da onda na ótica geométrica, deve existir uma quantidade Ψ na mecânica, que satisfaz uma equação da mesma forma da equação (45), ou seja

$$\nabla^2\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\Psi = 0\,,$$

com

$$k^2 \rightarrow \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\,.$$

Se tomarmos $\hbar$ como sendo a constante de Planck dividida por 2π, teremos então a equação de Schrödinger independente do tempo.

A equivalência entre a equação de Hamilton-Jacobi e a equação do eikonal foi percebida por Hamilton em 1834 [1]. Poderíamos pensar que se tivesse sido suficientemente audacioso, Hamilton poderia ter descoberto a equação de Schrödinger, antecipando em quase um século a mecânica quântica. No entanto, com a base de resultados experimentais disponíveis na época, a mecânica clássica era indiscutivelmente considerada correta, e Hamilton não tinha nenhum motivo para pensar numa nova teoria.

6 Conclusão

Este trabalho teve por objetivo descrever os aspectos fundamentais da teoria de Hamilton-Jacobi. Esta teoria é um método que permite produzir uma transformação canônica de forma que as equações de movimento de um sistema sejam simplificadas.

Primeiramente consideramos um sistema com um hamiltoniano que depende de q, p e t, e buscamos uma transformação canônica de modo que todas as novas coordenadas e todos os novos momenta são constantes de movimento. Para isso, fizemos a imposição de que o novo hamiltoniano K fosse nulo. Encontramos então as soluções $Q_i = \beta_i$, $P_i = \alpha_i$. A função geradora que produz essa transformação é a função principal de Hamilton $S(q, P, t)$, que satisfaz a eq. de Hamilton-Jacobi da forma

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Uma solução completa dessa equação contém n constantes de integração $\alpha_1, ..., \alpha_n$, que são escolhidas como sendo os novos momenta.

A solução para o problema em consideração é obtida calculando $Q_i = \partial S/\partial\alpha_i = \beta_i$ e resolvendo para q_i em função de β_i, α_i e t. As constantes β_i são obtidas com as condições iniciais.

Consideramos também um hamiltoniano que não depende explicitamente do tempo. Neste caso, obtivemos uma transformação canônica na qual todos os novos momenta eram constantes de movimento. Para isso, todas as novas coordenadas deveriam ser cíclicas. A função geradora que produz essa transformação é a função característica de Hamilton, que é a parte de S que independe do tempo. A eq. de Hamilton-Jacobi satisfeita pela função característica é

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) - \alpha_1 = 0,$$

cuja solução completa tem $n-1$ constantes de integração que, juntamente com α_1, formam um conjunto de n constantes independentes $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Novamente escolhemos essas constantes como sendo os novos momenta.

A solução para o problema é obtida de $Q_i = \partial W/\partial\alpha_i$, que pode ser resolvida para q_i em função de α_i, β_i e t.

Vimos também a analogia desenvolvida por Hamilton entre a teoria de Hamilton-Jacobi e a ótica geométrica, onde obtivemos a equivalência entre a equação de Hamilton-Jacobi e a equação do eikonal da ótica geométrica. Seguindo na analogia, encontramos uma equação da mesma forma da equação de Schrödinger independente do tempo. Portanto, além de ser um método poderoso para a resolução de problemas mecânicos, a teoria de Hamilton-Jacobi pode ser usada para fazer uma generalização da mecânica clássica para a mecânica ondulatória.

Referências

[1] Goldstein, H. Classical Mechanics, Cambridge, Addison-Wesley, 1950.

[2] Marion, Jerry B. and Thornton, Stephen T., Classical Dynamics of Particles and Systems, 5ª edição, Thomson Brooks/Cole, 2004.

[3] Lemos, Nivaldo A., Mecânica Analítica, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004, 1ª. edição.

[4] Landau, L. D. and Lifchitz, E. Mechanics. Reading, Addison-Wesley, 1960.