

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**O problema de Dirichlet assintótico para a
equação das superfícies mínimas em uma
variedade Cartan-Hadamard rotacionalmente
simétrica**

Dissertação de Mestrado

FABIANO PEREIRA

Porto Alegre 14, de agosto de 2014

Dissertação submetida por Fabiano Pereira ¹, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Prof.^a Dr.^a Miriam Telichevesky

Banca examinadora:

Prof.^a Dr.^a Miriam Telichevesky (PPGMat - UFRGS)

Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll (PPGMat - UFRGS)

Prof.^a Dr.^a Patrícia Kruse Klaser (PPGMat - UFRGS)

Prof. Dr. Rodrigo Barbosa Soares (FURG)

¹Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e por ter me auxiliado a concluir essa etapa da minha vida. Agradeço aos meus pais e familiares que sempre me apoiaram durante o tempo em que estive ausente para fazer o mestrado.

Agradeço a minha orientadora Miriam Telichevesky por ter aceito o grande desafio de me orientar e pelo grande conhecimento matemático que me passaste, Miriam que tu continues sendo essa super pessoa e orientadora que com muita calma e dedicação me ajudaste a concluir este trabalho.

Quero agradecer aos meus amigos Hevans Vinícius por ter aceito a minha ideia e convite para fazer o mestrado na UFRGS, valeu mesmo; Paulinho Demeneghi um gaúcho gente boa e faceiro que sempre esteve junto dando apoio; e Everton Artuso mais um paranaense perdido lá pelas terras dos gaúchos, obrigado pessoal pelas várias e várias horas de conversas sobre matemática e outras culturas gerais e que na maioria das vezes acabavam em pizza.

Por último, agradeço a uma pessoa mais que especial para mim e que sofreu muito durante o tempo em que estivemos longe, a pessoa que até hoje ainda me aguenta quando começo a falar em matemática, por isso dedico esse trabalho a minha noiva Jessica Buezer, obrigado por tudo.

Resumo

Neste trabalho estudamos o problema de Dirichlet assintótico para a equação das superfícies mínimas em uma superfície de Cartan-Hadamard rotacionalmente simétrica com métrica dada por $dr^2 + f(r)^2 d\theta^2$ e mostramos que o problema é unicamente solúvel para qualquer dado contínuo em seu bordo assintótico se $\frac{1}{f} \in \mathcal{L}^1([r_0, \infty))$.

Palavras-chave: Problema de Dirichlet; variedades rotacionalmente simétricas; curvatura seccional negativa; equações diferenciais parciais elípticas.

Abstract

In this work we study the asymptotic Dirichlet problem for the minimal surface equation on rotationally symmetric Cartan-Hadamard surfaces with metric given by $dr^2 + f(r)^2 d\theta^2$. We prove that the problem is uniquely solvable for any continuous asymptotic boundary data under the condition $\frac{1}{f} \in \mathcal{L}^1([r_0, \infty))$.

Key-words: Dirichlet problem; rotationally symmetric manifolds; negative sectional curvature; elliptic partial differential equations.

Sumário

1	Introdução	1
2	Preliminares	5
2.1	Geometria riemanniana básica	5
2.1.1	Curvatura e campos de Jacobi	7
2.1.2	Teorema da comparação do Hessiano	10
2.2	Resultados em EDP	14
2.2.1	Espaços de Hölder e operadores lineares elípticos	15
2.2.2	O Método da continuidade	17
2.2.3	Barreiras e estimativas <i>a priori</i>	24
3	A geometria do problema	28
3.1	Variedades de Cartan-Hadamard e bordo assintótico	28
3.2	Variedades rotacionalmente simétricas	34
4	A demonstração do teorema	37
5	Apêndice	50
	Referências Bibliográficas	53

Capítulo 1

Introdução

Uma classe de problemas bastante estudados em equações diferenciais parciais são os chamados *problemas de Dirichlet*, os quais consistem em encontrar uma função que resolva uma EDP específica no interior de uma dada região e que toma valores prescritos na fronteira. Dentre os problemas de Dirichlet destacamos o problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas que consiste em determinar a existência e unicidade de uma função $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, solução do seguinte problema:

$$(\mathbf{P}) \begin{cases} \mathcal{M}(\tilde{u}) := \operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} \tilde{u}}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} \tilde{u}|^2}} \right) = 0 \text{ em } \Omega \\ \tilde{u}|_{\partial\Omega} = \psi \end{cases}$$

com $\psi \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$ dada. Notemos que se u é solução do problema (\mathbf{P}) então o conjunto $S = \{(x, y, u(x, y)); (x, y) \in \Omega\}$ é uma superfície mínima do \mathbb{R}^3 , isto é possui curvatura média nula, tal que $\partial S = \operatorname{graf}(\psi)$.

O primeiro resultado mais geral sobre o problema (\mathbf{P}) foi obtido por Radó em 1930, o qual mostrou que (\mathbf{P}) tem solução única se Ω é um domínio limitado e convexo. Em 1965 Finn mostrou que para todo domínio limitado e não convexo existem dados contínuos no bordo para os quais o problema (\mathbf{P}) não tem solução. Com base nos resultados de Radó e Finn, pode-se concluir então que: para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

O problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas é solúvel para arbitrários dados contínuos no bordo de um domínio limitado se, e somente se, o domínio é convexo.

Já no caso \mathbb{R}^n , em 1968, no trabalho [JS], Jenkins e Serrin mostraram que se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com bordo de classe \mathcal{C}^2 , então o problema de

Dirichlet para a equação das superfícies mínimas em Ω é solúvel para qualquer $\psi \in \mathcal{C}^2(\partial\Omega)$ se, e somente se, a curvatura média de $\partial\Omega$ é não negativa. O resultado continua válido caso $\psi \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$, ver Teorema 16.8 em [GT].

Com o desenvolvimento da geometria riemanniana e algumas respostas sobre gráficos mínimos em \mathbb{R}^n , alguns geômetras/analistas começaram a busca por superfícies mínimas em uma variedade riemanniana M , isto é, como encontrar em M *hipersuperfícies* minimizando área dentre todas as que possuem o mesmo bordo, ou pelo menos como garantir sua existência? Como se sabe no \mathbb{R}^n as hipersuperfícies mínimas que são gráficos de funções são muito interessantes, pois reduzem o problema à resolução de EDPs, levando analistas e geômetras a trabalharem juntos criando ferramentas, estimativas e até mesmo traduzindo as ferramentas utilizadas no estudo clássico das EDPs no \mathbb{R}^n para novos ambientes, como as variedades riemannianas.

Um assunto de pesquisa em geometria é o seguinte: estudar a existência e unicidade e outras questões relacionadas ao problema de Dirichlet para a equação das hipersuperfícies mínimas e de curvatura média constante em espaços produto da forma $M \times \mathbb{R}$ onde M é uma variedade riemanniana. Para o caso mínimo isto é, $\mathcal{M}(u) = 0 \Leftrightarrow$ o gráfico de u é uma hipersuperfície mínima em $M \times \mathbb{R}$, estuda-se a existência de hipersuperfícies mínimas que são gráficos de funções com certa regularidade, considerando em M hipóteses topológicas e sobre a sua curvatura. Para tal estudo as EDPs funcionam como ferramentas.

A geometria das hipersuperfícies mínimas nas variedades produto da forma $M \times \mathbb{R}$ tem sido estudada em muitos trabalhos. Embora tenhamos apenas falado no problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas, não podemos nos esquecer do problema de Dirichlet para a equação das superfícies de curvatura média constante que também é muito estudado e junto com o das mínimas podem ser encontrados em [MR], [MRR] [S] e [SY], entre muitos outros, como aqueles presentes nas suas referências.

Passamos agora a falar dos problemas de Dirichlet assintóticos, também chamados de problemas de Dirichlet no infinito. Tais problemas consistem em resolver o problema de Dirichlet em uma variedade de Hadamard para certos tipos de operadores elípticos e com dados contínuos prescritos em seu bordo assintótico. Sejam mais específicos: encontrar uma função u tal que

$$\begin{cases} \mathcal{Q}(\tilde{u}) = 0 \text{ em } M \\ \tilde{u}|_{\partial_\infty M} = \psi \end{cases}$$

com $\psi \in \mathcal{C}^0(\partial_\infty M)$, \mathcal{Q} um operador linear ou quasilinear elíptico e $\partial_\infty M$ é o bordo

assintótico de uma variedade de Hadamard M . Tal bordo foi introduzido no trabalho [EO], por P.Eberlain e B.O'Neill, neste trabalho na seção 3.1 apresentamos sua definição e algumas propriedades.

Quando $\mathcal{Q} = \Delta$, o operador Laplaciano, Anderson em [And] mostrou que o problema é unicamente solúvel quando a curvatura seccional K de M , satisfaz $-b^2 \leq K \leq -a^2$ com $0 < a \leq b$ (constantes). Sullivan, independentemente de Anderson, utilizando a mesma hipótese sobre a curvatura e analisando o comportamento do movimento Browniano na variedade mostrou que o problema é solúvel. Choi em [C1] mostrou que o problema é solúvel se $K \leq -a^2 < 0$ e quaisquer dois pontos de $\partial_\infty M$ podem ser separados por vizinhanças disjuntas, e uma delas convexa. Para a não existência citamos [Anc] e [B] os quais mostram que existem variedade com curvatura $K \leq -1$ que não admitem solução para o problema para certos dados no bordo assintótico.

Quando $\mathcal{Q}(u) = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, isto é, \mathcal{Q} é o operador p -Laplaciano citamos os trabalhos [H] e [HV], e para operadores mais gerais [RT2].

Neste trabalho estudamos o problema de Dirichlet assintótico para a equação das superfícies mínimas em uma superfície de Cartan-Hadamard, isto é, uma variedade riemanniana de Cartan-Hadamard de dimensão 2, e rotacionalmente simétrica com métrica em coordenadas polares geodésicas (r, θ) dada por $dr^2 + f(r)^2 d\theta^2$. O teorema central deste trabalho foi provado por Ripoll e Telichevesky em [RT1] é o que segue:

Teorema 1.0.1. *Seja M uma superfície de Cartan-Hadamard tal que:*

1) M é rotacionalmente simétrica;

2) $\int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{f(r)} < \infty$.

Seja $\psi \in \mathcal{C}^0(\partial_\infty M)$. Então existe $u \in \mathcal{C}^\infty(M) \cap \mathcal{C}^0(\overline{M})$ tal que

$$\begin{cases} \mathcal{M}(\tilde{u}) := \operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} \tilde{u}}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} \tilde{u}|^2}} \right) = 0 \text{ em } M \\ \tilde{u}|_{\partial_\infty M} = \psi. \end{cases} \quad (1.1)$$

Além disso, se S é uma superfície mínima propriamente imersa em $M \times \mathbb{R}$ tal que $\partial_\infty S = \operatorname{graf}(\psi)$ então $S = \operatorname{graf}(u)$.

Em [GR], os autores mostraram que o problema de Dirichlet assintótico para a equação das superfícies mínimas é solúvel com a hipótese de que a curvatura seccional K de M satisfaz $K \leq k < 0$ (k constante) e em seguida perguntam o que

acontece se somente assumir $K < 0$. Logo o teorema 1.0.1 dá uma resposta parcial a pergunta acima, deixada por [GR].

Corolário 1.0.2. *Seja M uma superfície de Cartan-Hadamard, rotacionalmente simétrica em um ponto $o \in M$ tal que a curvatura seccional satisfaz a condição*

$$K(r) \leq -\frac{1 + \epsilon}{r^2 \log r}, \quad r \geq r_0, \quad (1.2)$$

para algum $r_0 > 0$, $\epsilon > 0$, onde r é a função distância ao ponto o . Então, dado $\psi \in \mathcal{C}^0(\partial_\infty M)$ existe $u \in \mathcal{C}^\infty(M) \cap \mathcal{C}^0(\overline{M})$ solução de (1.1), e o gráfico de u é a única superfície mínima propriamente imersa em $M \times \mathbb{R}$ tendo $\text{graf}(\psi)$ como bordo assintótico.

Este corolário nos mostra uma conexão interessante entre o problema de Dirichlet assintótico para o operador Laplaciano e o das superfícies mínimas, pois Neel em [N] mostrou que a condição (1.2) é suficiente para mostrar que o problema de Dirichlet assintótico é solúvel para o operador Laplaciano em uma variedade de Cartan-Hadamard de dimensão 2. Como veremos o resultado não vale para $\epsilon = 0$.

No capítulo 2 apresentamos as definições necessárias da geometria riemanniana para a compreensão do texto, junto com as ferramentas necessárias da teoria das equações diferenciais parciais para a demonstração do Teorema 1.0.1. No capítulo 3 apresentamos o espaço ambiente onde o teorema é demonstrado, e por fim no capítulo 4 fazemos a demonstração do teorema o mais detalhadamente possível.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Geometria riemanniana básica

Nesta seção, enunciamos algumas definições e teoremas da geometria riemanniana. Os conceitos iniciais como variedades diferenciáveis, funções diferenciáveis entre variedades, espaço tangente, campo de vetores, conexão riemanniana e métrica são utilizados sem mais explicações, a referência básica é [dC1].

Quando pensamos em geometria pensamos em problemas relativos a medições de distâncias, comprimentos, ângulos, áreas, volumes, etc. A fim de que possamos fazer tais medições precisamos de ferramentas básicas para isso. Esta ferramenta em geometria riemanniana é justamente proporcionada pela métrica riemanniana que denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Denotaremos por $M = (M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade riemanniana de dimensão n , munida da sua métrica riemanniana.

∇ será a conexão riemanniana de M , ou seja, é a conexão que é simétrica e compatível com a métrica. $\mathfrak{X}(M)$ denotará o conjunto de todos os campos de vetores de classe \mathcal{C}^∞ em M .

Com o conceito de conexão riemanniana temos uma maneira de derivar campos de vetores ao longo de curvas definidas em M , em particular é possível falar em aceleração de uma curva em M e assim pensar nas curvas que minimizam a distância. Tal derivada denotamos por $\frac{DV}{dt} := V'$, onde V é um campo vetorial a longo de uma curva diferenciável $c : I \rightarrow M$.

As geodésicas são fundamentais para o estudo da geometria das variedades riemannianas, do mesmo modo que as retas são fundamentais para o estudo da geometria euclidiana, visto que são as curvas que realizam distância.

Definição 2.1.1. Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica se

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$$

$\forall t \in I$, ou seja, se γ possui aceleração nula.

Se γ é geodésica, então

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0$$

ou seja, o comprimento do vetor tangente $\frac{d\gamma}{dt}$ é constante, logo podemos supor que $|\frac{d\gamma}{dt}| = a \neq 0$, excluindo assim as geodésicas que se reduzem a pontos.

Como consequência do teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias, obtemos o seguinte resultado. Indicamos por T_pM o espaço tangente a M em p .

Proposição 2.1.2. Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, existem $\epsilon > 0$ e uma única geodésica $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Se $v \in T_pM$, vamos denotar por γ_v a única geodésica de M que passa por $p \in M$ com velocidade v .

Seja $U = \{v \in T_pM : \gamma_v \text{ está definida num intervalo contendo } [0, 1]\}$.

Definição 2.1.3. A aplicação $\exp_p : U \rightarrow M$ definida por $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$, é denominada aplicação exponencial.

É possível mostrar que \exp_p é diferenciável, e também que para cada $v \in T_pM$, a geodésica γ_v é dada por $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que os dois lados estão definidos.

Na maioria das aplicações utilizamos o seguinte resultado, que garante que em uma vizinhança da origem de T_pM a aplicação exponencial é um difeomorfismo, isso é muito útil pois podemos tomar a aplicação exponencial como uma carta local.

Proposição 2.1.4. Dado $p \in M$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\exp_p : B_\epsilon(0) \subset T_pM \rightarrow M$ é um difeomorfismo de $B_\epsilon(0)$ sobre um aberto de M .

Lema 2.1.5. (de Gauss) Seja $p \in M$ e seja $v \in T_pM$ tal que $\exp_p(v)$ esteja definida. Seja $w \in T_v(T_pM) \approx T_pM$. Então

$$\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

Note que o lema de Gauss diz que se um dos vetores é o radial então a métrica é preservada, podemos pensar nesse caso que \exp é uma “isometria radial”. O lema de Gauss será utilizado para se chegar na métrica de uma variedade rotacionalmente simétrica.

2.1.1 Curvatura e campos de Jacobi

Uma maneira de motivar curvatura é procurar pelos invariantes geométricos de uma variedade, ou seja dadas duas variedades queremos saber se elas são equivalentes de alguma forma, por exemplo se são isométricas, e a curvatura então é uma das formas de compará-las. Uma maneira intuitiva de pensar na curvatura é pensar que ela mede o quanto localmente uma variedade riemanniana deixa de ser o espaço euclidiano, como veremos a seguir.

Definição 2.1.6. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M)$$

Do mesmo modo como acontece com as superfícies na geometria diferencial o invariante geométrico básico segue sendo a curvatura. Contudo uma variedade pode se curvar em muitas direções e por isso a curvatura não é tão fácil de entender.

Um primeiro problema a se pensar é que, em geral as variedades riemannianas não são apresentadas como subvariedades do espaço euclidiano. Portanto, a ideia de curvatura seccional é feita da seguinte forma: selecionamos um subespaço bi-dimensional σ do espaço tangente a M em p , consideramos todas as geodésicas que passam por p com velocidade contida em σ . Isso dá lugar a uma subvariedade de dimensão 2, S_σ de M , que herda a estrutura riemanniana de M . Calculamos a curvatura de Gauss de S_σ em p (que pode ser calculada em termos da métrica). Logo temos um número denotado por $K(\sigma)$, que chamamos de *curvatura seccional*, de M em p associada ao subespaço σ . Equivalentemente temos a seguinte definição:

Definição 2.1.7. *Dado $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_p M$, o número*

$$K(\sigma) = K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x \wedge y|^2}$$

é chamado curvatura seccional de σ em p , onde $x, y \in \sigma$ são dois vetores linearmente independentes e $|x \wedge y|^2 := |x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2$

Uma observação importante é que $K(\sigma)$ não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Uma maneira de entender a relação da curvatura com a métrica é obter a expressão da métrica em algum sistema de coordenadas e então obtemos uma possível

motivação para curvatura: ela é a primeira correção não trivial que distingue uma métrica arbitrária de uma métrica euclidiana, esta motivação e suas contas em geral não são encontradas feitas na literatura.

Faremos as contas com o auxílio dos campos de Jacobi, para a métrica no sistema de coordenadas normais, via aplicação exponencial, e notaremos que aparece naturalmente a curvatura da variedade.

Definição 2.1.8. *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica de M . Um campo de vetores J ao longo de γ é um campo de Jacobi se satisfaz*

$$\frac{D^2 J}{dt^2}(t) + R(J(t), \gamma'(t)) \gamma'(t) = 0, \quad \text{para } t \in [0, a].$$

Como a equação acima é uma equação de segunda ordem linear em J , segue que um campo de Jacobi é determinado pelas condições iniciais $J(0)$ e $\frac{DJ}{dt}(0)$, e portanto existem $2n$ campos de Jacobi linearmente independentes ao longo de γ .

Um campo de Jacobi tal que $J(0) = 0$ e $\frac{DJ}{dt}(0) = w$ ao longo da geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, dada por $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ é da forma

$$J(t) = (d \exp_p)_{tv}(tw).$$

Esta é essencialmente a única maneira de construir campos de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$ com $J(0) = 0$.

Sejam J_1 e J_2 campos de Jacobi tais que $J_1(0) = J_2(0) = 0$ e $\frac{DJ_1}{dt}(0) = w_1$, $\frac{DJ_2}{dt}(0) = w_2$, $\gamma'(0) = v$, ao longo da geodésica $\gamma(t) = \exp_p(tv)$.

Fazendo a expansão de Taylor da função $F(t) = \langle J_1(t), J_2(t) \rangle$ em torno de $t = 0$, até a ordem 4, chegamos a seguinte expressão

$$F(t) = \langle w_1, w_2 \rangle t^2 - \frac{t^4}{6} \left(\langle R(v, w_1)v, w_2 \rangle + \langle R(v, w_2)v, w_1 \rangle \right) + R(t). \quad (2.1)$$

Com $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t)}{t^5} = 0$.

O que faremos agora é calcular os g_{ij} da métrica em coordenadas normais, via aplicação exponencial, isto pode ser feito pois de acordo com a proposição 2.1.4 \exp_p é um difeomorfismo numa vizinhança da origem.

Considere como sendo a carta local a aplicação $\exp_p : B_\epsilon \subset T_p M \rightarrow M$.

Fixe $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormal de $T_p M$, então sabemos que $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$, onde $X_i = (d \exp)_{tv}(e_i)$ com $i = 1, \dots, n$.

Fazendo $x = t_0 v$, $|v| = 1$, $v \in T_p M$, considere agora os campos de Jacobi

$$J_i(t) = (d \exp_p)_{tv}(te_i) = t(d \exp_p)_{tv}(e_i) = tX_i$$

ao longo da geodésica $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, $X_i \in T_{\exp_p(tv)}M$, logo $J_i(t) = tX_i$ são tais que $J_i(0) = 0$ e $\frac{DJ}{dt}(0) = e_i$.

Fazendo $J_1 = J_i$, $J_2 = J_j$, $w_1 = e_i$, $w_2 = e_j$ em (2.1) temos que

$$g_{ij} = \langle X_i(t_0v), X_j(t_0v) \rangle = \frac{1}{t_0^2} \langle J_i(t_0), J_j(t_0) \rangle$$

logo,

$$g_{ij} = \frac{1}{t_0^2} \left[\langle e_i, e_j \rangle t_0^2 - \frac{t_0^2}{6} \langle R \left(\frac{x}{t_0}, e_i \right) \frac{x}{t_0}, e_j \rangle - \frac{t_0^2}{6} \langle R \left(\frac{x}{t_0}, e_j \right) \frac{x}{t_0}, e_i \rangle \right] + R(t)$$

escrevendo $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$, e fazendo os cancelamentos segue que

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3} \sum_{k,l} \langle R(e_k, e_i) e_l, e_j \rangle x_k x_l + O(t^3)$$

se denotarmos $R_{kilj} = \langle R(e_k, e_i) e_l, e_j \rangle$, então

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3} \sum_{k,l} R_{kilj} x_k x_l + O(|x|^3)$$

é a expressão da métrica em coordenadas normais e assim R é a primeira correção não trivial que distingue a métrica em coordenadas normais da métrica Euclidiana.

Como os campos de Jacobi estão ligados com a curvatura é possível mostrar que $\|J(t)\|$ dada por

$$\|J(t)\| = t - \frac{1}{6} K(p, \sigma) t^3 + R(t) \quad (2.2)$$

mede o afastamento infinitesimal das geodésicas partindo de um ponto, e notamos que em curvatura negativa tal afastamento é mais rápido do que os casos onde a curvatura é nula ou positiva, e em curvatura positiva o afastamento ocorre de forma mais lenta e até mesmo como no caso da esfera as geodésicas voltam a se encontrar em tempo finito.

Para encerrar esta seção segue a definição de ponto conjugado.

Definição 2.1.9. *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica. O ponto $\gamma(t_0)$ é conjugado de $\gamma(0)$ ao longo de γ , $t_0 \in (0, a]$, se existe um campo de Jacobi J ao longo de γ , não identicamente nulo, com $J(0) = 0 = J(t_0)$.*

Um fato interessante a ser observado é que se M é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional não positiva então M não possui pontos conjugados, pois

se existisse um campo de Jacobi não nulo ao longo de uma geodésica $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ com $\gamma(0) = p$ e $J(0) = J(a) = 0$ então

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \left\langle \frac{DJ}{dt}, J \right\rangle &= \left\langle \frac{D^2 J}{dt^2}, J \right\rangle + \left\langle \frac{DJ}{dt}, \frac{DJ}{dt} \right\rangle \\ &= -|J|^2 K(\gamma', J) + \left| \frac{DJ}{dt} \right|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

logo a função $t \mapsto \left\langle \frac{DJ}{dt}, J \right\rangle$ é não decrescente em $[0, a]$ e como $J(0) = J(a) = 0$, então $\left\langle \frac{DJ}{dt}, J \right\rangle \equiv 0$, e por outro lado

$$\frac{d}{dt} \langle J, J \rangle = 2 \left\langle \frac{DJ}{dt}, J \right\rangle = 0 \Rightarrow |J|^2 = cte \Rightarrow |J|^2 = 0 \Rightarrow J \equiv 0$$

o que nos leva a um absurdo.

2.1.2 Teorema da comparação do Hessiano

Os teoremas de comparação na geometria possuem um papel muito importante, pois oferecem ferramentas para comparar as propriedades geométricas de variedades riemannianas diferentes. Existem diversos teoremas de comparação entre eles o de Rauch, do Laplaciano e do Hessiano. Aqui apenas falaremos do teorema da comparação do Hessiano.

Definição 2.1.10. *Dados $X, Y \in T_p M$, $f \in \mathcal{C}^2(M)$. O Hessiano de f é definida como $\text{Hess } f(X, Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f)$.*

O gradiente de f , denotado por $\text{grad } f$, é definido como sendo o único campo vetorial tal que $\langle \text{grad } f, X \rangle = X(f)$

Utilizando a definição de gradiente podemos escrever o Hessiano de f da seguinte maneira:

$$\text{Hess } f(X, Y) = \langle \nabla_X \text{grad } f, Y \rangle.$$

Antes de enunciar e provar o teorema da comparação do Hessiano, faremos algumas definições e falaremos um pouco sobre a função distância.

Considere a distância riemanniana de M , ou seja, $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(p, q) := \inf \{ l(c); c : [a, b] \rightarrow M \text{ com } c(a) = p \text{ e } c(b) = q \}$$

onde c é uma curva \mathcal{C}^∞ por partes e $l(c)$ denota o comprimento da curva c .

Mostra-se que com a distância d , M é um espaço métrico e que a topologia induzida por d em M coincide com a topologia inicial de M . Para mais detalhes ver [dC1].

Fixado $p \in U \subset M$, aberto consideremos $r : M \rightarrow \mathbb{R}$, $r(x) := d(x, p)$ a função distância a p . A função r satisfaz boas propriedades.

Consideremos o campo $\frac{\partial}{\partial r}$ obtido considerando coordenadas polares centradas em p .

Proposição 2.1.11. 1) $\text{grad } r = \frac{\partial}{\partial r}$

2) Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ então $\text{Hess } r \left(X, \frac{\partial}{\partial r} \right) = 0$

dem.:

1) Para cada θ fixado em $T_p M$, $\frac{\partial}{\partial r}$ é o vetor velocidade das geodésicas dadas pelas curvas $r \mapsto \exp_p(r\theta)$. Assim por um lado, utilizando definição de gradiente temos que

$$\left\langle \text{grad } r, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = \frac{\partial r}{\partial r} = 1.$$

Por outro lado

$$\left\langle \text{grad } r, \frac{\partial}{\partial \theta_i} \right\rangle = \frac{\partial r}{\partial \theta_i} = 0$$

pois r não depende de θ_i . Assim $\text{grad } r$ é múltiplo de $\frac{\partial}{\partial r}$, e pela conta acima o múltiplo de $\text{grad } r$ é igual a 1, logo segue que

$$\text{grad } r = \frac{\partial}{\partial r}.$$

2) Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$\text{Hess } r \left(X, \frac{\partial}{\partial r} \right) = X \left(\frac{\partial}{\partial r} (r) \right) - \left(\nabla_X \frac{\partial}{\partial r} \right) (r) = - \left\langle \nabla_X \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = - \frac{1}{2} X \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = 0$$

pois as geodésicas radiais são parametrizadas pelo comprimento de arco. ■

Seja M uma variedade riemanniana e $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica de M . Seja V um campo de vetores diferenciável por partes ao longo de γ . Para todo $t_0 \in [0, a]$, escreveremos

$$I_{t_0}(V, V) = \int_0^{t_0} \{ \langle V', V' \rangle - \langle R(\gamma', V')\gamma', V \rangle \} dt$$

para definir o índice de V em t_0 .

O próximo lema nos diz que se uma geodésica não possui pontos conjugados então os campos de Jacobi são os campos que minimizam o índice, mais precisamente temos o seguinte resultado.

Lema 2.1.12. (do Índice). *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ geodésica sem pontos conjugados a $\gamma(0)$ em $(0, a]$. Sejam J um campo de Jacobi ao longo de γ e V um campo de vetores diferenciável por partes ao longo de γ tais que*

$$(i) \quad J(0) = V(0) = 0$$

$$(ii) \quad \langle J, \gamma' \rangle = \langle V, \gamma' \rangle = 0$$

$$(iii) \quad J(t_0) = V(t_0) \text{ para certo } t_0 \in (0, a]$$

Então $I_{t_0}(J) \leq I_{t_0}(V)$. Além disso, se vale a igualdade, então $J(t) = V(t) \forall t \in [0, a]$.

A demonstração do lema do Índice pode ser encontrada em [dC1].

Como consequência do lema do Índice temos o teorema da comparação do Hessiano.

Teorema 2.1.13. (da comparação do Hessiano:) *Sejam M_1 e M_2 variedades riemannianas completas de dimensão n . Sejam $\gamma_i : [0, a] \rightarrow M_i$ geodésicas tais que $|\gamma'_i| = 1$ e que não possuem pontos conjugados a $\gamma_i(0)$. Sejam ρ_i as funções distância a $\gamma_i(0)$ em M_i e K_i as curvaturas seccionais de M_i . Suponha que em $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$, $t \in [0, a]$, tenhamos a seguinte desigualdade:*

$$K_1(u_1, \gamma'_1)(t) \geq K_2(u_2, \gamma'_2)(t),$$

onde u_i é um vetor unitário em $T_{\gamma_i(t)}M_i$ ortogonal a $\gamma'_i(t)$. Então

$$\text{Hess}(\rho_1)(u_1, u_1) \leq \text{Hess}(\rho_2)(u_2, u_2).$$

dem.: Afirmamos que

$$\text{Hess}(\rho_i)(u_i, u_i)(x) = I_{t_0}(J_i, J_i),$$

onde J_i é campo de Jacobi ao longo de γ_i tal que $J_i \perp \gamma'_i$, $J_i(0) = 0$ e $J_i(t_0) = u_i$, $t_0 \in [0, a]$.

De fato: fixado $q \in M$. Para $p \in M$ que não é conjugado a q , seja γ (omitindo o índice i) a geodésica minimizante ligando p a q , tal que $\gamma(0) = q$ e $\gamma(t_0) = p$,

$t_0 \in (0, a]$. Seja $u \in T_p M$ tal que $\langle u, \gamma' \rangle = 0$. Como q não é conjugado de p , podemos estender u a um campo de Jacobi J ao longo de γ tal que $J(0) = 0 \in T_q M$ e $J(t_0) = u \in T_p M$ e que $[J, \gamma'] = 0$, isto pode ser feito mostrando apenas que $\text{grad } \rho(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ que segue pela propriedade 1 da função distância, com isso em mãos e sabendo que $J(0) = 0$ então J é da forma $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$, onde

$$f(s, t) = \exp_q(tv(s)), v(0) = \gamma'(0), v'(0) = J'(0) = \nabla_{\gamma'} J(0)$$

dai segue que $\text{grad } \rho(f(s, t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(s, t)$, logo temos $[J, \gamma'] = \left[\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right] = 0$.

Além disso,

$$\begin{aligned} \text{Hess}(\rho)(x)(u, u) &= \langle \nabla_u \text{grad } \rho, u \rangle(x) = \langle \nabla_J \text{grad } \rho, J \rangle \\ &= \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} \langle \nabla_J \text{grad } \rho, J \rangle(\gamma(t)) dt \\ &= \int_0^{t_0} \{ \langle \nabla_{\gamma'} \nabla_J \text{grad } \rho, J \rangle + \langle \nabla_J \text{grad } \rho, \nabla_{\gamma'} J \rangle \} dt \end{aligned}$$

Com as observações feitas acima temos que $\nabla_J \text{grad } \rho - \nabla_{\text{grad } \rho} J = 0$.

Observamos novamente que $\text{grad } \rho = \gamma'$ e que, seguindo a notação que estamos usando, $\nabla_{\gamma'} J = J'$.

Com estas duas observações, podemos concluir a afirmação:

$$\begin{aligned} \text{Hess}(\rho)(u, u)(x) &= \int_0^{t_0} \langle \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} J, J \rangle + \langle \nabla_{\gamma'} J, \nabla_{\gamma'} J \rangle dt = \int_0^{t_0} \langle J'', J \rangle + \langle J', J' \rangle dt \\ &= \int_0^{t_0} \langle J', J' \rangle + \langle R(\gamma', J)\gamma', J \rangle dt = I_{t_0}(J, J). \end{aligned}$$

Com a afirmação demonstrada, resta agora mostrar então que $I_{t_0}(J_1, J_1) \leq I_{t_0}(J_2, J_2)$. E para mostrar isso faremos o seguinte: pegamos o campo J_2 e levamos para a variedade M_1 e dai aplicamos o Lema do Índice. Faremos isso escolhendo referenciais paralelos, isto é, considere $\{e_1(s) = \gamma'_1(s), e_2(s) \dots, e_n(s)\}$ referencial paralelo ortonormal ao longo de γ_1 e $\{\tilde{e}_1(s) = \tilde{\gamma}'(s), \tilde{e}_2(s) \dots, \tilde{e}_n(s)\}$ referencial paralelo ortonormal ao longo de γ_2 .

Podemos supor que $e_2(s) = \frac{J_2(s)}{|J_2(s)|}$ e $\tilde{e}_2(s) = \frac{J_1(t_0)}{|J_1(s)|}$, pois os campos de Jacobi são sempre ortogonais às geodésicas.

Escrevemos $J_2(s) = \sum_{i=1}^n a_i(s)e_i(s)$, então para $s = t$, $a_2(t) = |J_2(t)|$, $a_j(t) = 0$ se $j \geq 3$.

Agora construímos um campo “artificial” V em M_1 , tal que V e J_2 possuem as mesmas propriedades.

Definimos $V(s) = \sum_{i=2}^n a_i(s)\tilde{e}_i(s)$. Portanto $V(t) = \frac{|J_2(t)|}{|J_1(t)|}J_1(t)$ é um campo de Jacobi em M_1 , daí pelo lema do índice temos que

$$I_t \left(\frac{|J_2(t)|}{|J_1(t)|}J_1, \frac{|J_2(t)|}{|J_1(t)|}J_1 \right) \leq I_t(V, V)$$

logo segue que

$$\frac{1}{2} \frac{|J_2(t)|^2}{|J_1(t)|^2} \langle J_1, J_1 \rangle'(t) \leq \int_0^t |V'|^2 - \langle R(\gamma'_1, V)\gamma'_1, V \rangle dt = \int_0^t |V'|^2 - |V|^2 K_1(V, \gamma'_1) dt$$

por hipótese $K_1(V, \gamma'_1) \geq K_2(J, \gamma'_2) \Rightarrow -K_1(V, \gamma'_1) \leq -K_2(J, \gamma'_2)$ e como $|V'|^2 = |J'|^2$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{|J_2(t)|^2}{|J_1(t)|^2} \langle J_1, J_1 \rangle'(t) &\leq \int_0^t |J_2'|^2 - |J_2|^2 K_2(\gamma'_2, J_2) dt = \int_0^t |J_2'|^2 - \langle R(\gamma'_2, J_2)\gamma'_2, J_2 \rangle dt \\ &= \frac{1}{2} \langle J_2, J_2 \rangle'(t). \end{aligned}$$

Agora note que

$$\frac{1}{2} \langle J_1, J_1 \rangle'(t) = \int_0^t |J_1'|^2 - \langle R(\gamma'_1, J_1)\gamma'_1, J_1 \rangle = I_t(J_1, J_1)$$

e

$$\frac{1}{2} \langle J_2, J_2 \rangle'(t) = \int_0^t |J_2'|^2 - \langle R(\gamma'_2, J_2)\gamma'_2, J_2 \rangle = I_t(J_2, J_2).$$

Logo para $t = t_0$ temos que $|J_1(t_0)| = |u_1| = 1$ e $|J_2(t_0)| = |u_2| = 1$, com estas considerações concluimos que

$$I_{t_0}(J_1, J_1) \leq I_{t_0}(J_2, J_2)$$

como queríamos demonstrar. ■

2.2 Resultados em EDP

Para a demonstração do Teorema 1.0.1 utilizaremos algumas ferramentas da teoria das equações diferenciais parciais elípticas, a referência é [GT], ver apêndice para o enunciado de todos os resultados de [GT] utilizados neste texto.

Em [GT], os teoremas são específicos para quando o espaço ambiente é o \mathbb{R}^n , no entanto eles valem para uma variedade como a que estamos trabalhando, pois são resultados a respeito de operadores que envolvem apenas o divergente e o gradiente, que são operadores ditos *geométricos*, ou seja, podem ser definidos intrinsecamente, isto é, independem de parametrizações.

2.2.1 Espaços de Hölder e operadores lineares elípticos

Usaremos a notação de multi-índice para denotar a derivada parcial

$$D^\beta u(x) = \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}(x)$$

onde $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ e $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$.

Seja $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R}^n)$ o espaço vetorial das aplicações contínuas em um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. Lembremos que se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então qualquer $u \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$ é uniformemente contínua. Neste caso, munido da norma

$$\|u\|_{\mathcal{C}^0(K)} = \|u\|_{0,K} = \sup_K |u|$$

$\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio (aberto e conexo). Dado um inteiro não negativo k , definimos

$$\mathcal{C}^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : D^\beta u \in \mathcal{C}^0(\Omega), \text{ para todo } |\beta| = k\}$$

e

$$\mathcal{C}^k(\bar{\Omega}) = \{u \in \mathcal{C}^k(\Omega) : u \text{ e } D^\beta u \text{ possuem extensão contínua para } \bar{\Omega}, \forall |\beta| = k\}.$$

Se o domínio Ω é limitado, então seu fecho $\bar{\Omega}$ é compacto e assim $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$ é Banach com a seguinte norma,

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})} = \|u\|_{k;\bar{\Omega}} = \sum_{j=0}^k \|D^j u\|_{0;\bar{\Omega}}$$

onde $\|D^j u\|_{0;\bar{\Omega}} = \sup_{|\beta|=j} \sup_{\bar{\Omega}} |D^\beta u|$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Definição 2.2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Dizemos que uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é Hölder contínua com expoente α , se*

$$\sup_{x,y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty$$

para $x \neq y$ e para algum $0 < \alpha \leq 1$.

Neste caso, denotamos $u \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega)$, além disso, denotamos também

$$[u]_{\alpha;\Omega} = \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}, \quad x \neq y.$$

Em particular, note que se u é Hölder contínua com expoente α em Ω , então

$$|u(x) - u(y)| \leq [u]_{\alpha;\Omega} |x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Note que se uma função é Hölder contínua em Ω , então ela é contínua em Ω ; na verdade, ela é uniformemente contínua em Ω . Uma função Hölder contínua com expoente $\alpha = 1$ é uma função contínua de Lipschitz.

O espaço

$$\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \mathcal{C}^\alpha(\overline{\Omega}) = \{u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : [u]_{\alpha;\overline{\Omega}} < \infty\}$$

é Banach com a seguinte norma

$$|u|_{\mathcal{C}^\alpha(\overline{\Omega})} = |u|_{0,\alpha;\overline{\Omega}} = |u|_{0;\overline{\Omega}} + [u]_{\alpha;\overline{\Omega}}.$$

Para k inteiro não negativo definimos os *espaços de Hölder* $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ como sendo os subespaços de $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ consistindo das funções cujas derivadas parciais até a ordem k são todas Hölder contínuas com expoente α em Ω :

$$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) : D^\beta u \in \mathcal{C}^\alpha(\overline{\Omega}), \text{ para todo } |\beta| = k\}$$

munido da norma

$$|u|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = |u|_{k,\alpha;\overline{\Omega}} = |u|_{k;\overline{\Omega}} + [D^k u]_{\alpha;\overline{\Omega}}$$

onde $[D^k u]_{\alpha;\overline{\Omega}} = \sup_{|\beta|=k} [D^\beta u]_{\alpha;\overline{\Omega}}$. Pode-se mostrar que com esta norma, $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ é de Banach.

Também denotamos por $\mathcal{C}_0^{k,\alpha}(\Omega)$ o espaço das funções em $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$ que possuem suporte compacto em Ω , isto é, o espaço das funções tal que o conjunto

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$$

é compacto.

Por simplicidade, vamos escrever

$$\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) = \mathcal{C}^\alpha(\Omega), \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \mathcal{C}^\alpha(\overline{\Omega}), \mathcal{C}^{k,0}(\Omega) = \mathcal{C}^k(\Omega) \text{ e } \mathcal{C}^{k,0}(\overline{\Omega}) = \mathcal{C}^k(\overline{\Omega});$$

com essa notação, podemos considerar os espaços de classe $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ com $0 \leq \alpha \leq 1$.

Para finalizar esta seção, segue a definição de operador linear elíptico.

Um operador linear de segunda ordem num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear da forma:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_{ij} u(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) D_i u(x) + c(x) u(x)$$

onde $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, a_{ij}, b_i, c são funções reais contínuas definidas em Ω , e $a_{ij} = a_{ji}$.

Diremos que L é *elíptico* em Ω quando a matriz $A = (a_{ij})$ é positiva definida para todo $x \in \Omega$, ou seja se $\langle A\xi, \xi \rangle > 0 \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, isto é,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j > 0.$$

Equivalentemente, se $\lambda(x)$ denota o autovalor mínimo de A e $\Lambda(x)$ o autovalor máximo, então L é elíptico se

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2.$$

Além disso se

$$\lambda = \inf_{x \in \Omega} \lambda(x) \text{ e } \Lambda = \sup_{x \in \Omega} \Lambda(x)$$

diremos que o operador L é *estritamente elíptico* em Ω se existe uma constante $\lambda_0 > 0$ tal que $0 < \lambda_0 \leq \lambda$, e também se existir uma constante Λ_0 tal que $\Lambda < \Lambda_0$ então L é dito *fortemente elíptico*, e se $\frac{\Lambda}{\lambda}$ é limitado em Ω dizemos que L é *uniformemente elíptico*.

2.2.2 O Método da continuidade

Para investigar a existência de soluções para o problema de Dirichlet associado à equação das superfícies mínimas usamos o método da continuidade, o qual passamos a descrever agora.

Consideramos M uma variedade riemanniana e Ω um domínio limitado de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ e consideramos a seguinte família de problemas de Dirichlet indexadas por $t \in [0, 1]$:

$$\begin{cases} \mathcal{M}(u) = 0 \text{ em } \Omega, u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \\ u|_{\partial\Omega} = t\psi \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\partial\Omega) \end{cases} \quad (2.3)$$

A ideia agora é considerar o conjunto

$$V := \{t \in [0, 1]; \exists u_t \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega}), \mathcal{M}(u_t) = 0 \text{ e } u_t|_{\partial\Omega} = t\psi\}$$

e mostrar que V é um subconjunto não-vazio de $[0, 1]$ que é aberto e fechado em $[0, 1]$, e portanto é todo o intervalo. Observe que para $t = 0$ o problema admite uma solução, que é a solução trivial ($u \equiv 0$), logo V é não-vazio, e estamos interessados em saber se há solução para $t = 1$. Primeiramente provaremos a abertura de V e em seguida o seu fechamento.

(1) A abertura de V .

Dado $t_0 \in V$, queremos mostrar que existe $\epsilon > 0$ tal que $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \cap [0, 1] \subseteq V$. E para isso é suficiente utilizar o Teorema da Função Implícita para espaços de Banach.

Consideremos o conjunto

$$\mathcal{C}_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{h \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) : h|_{\partial\Omega} = 0\},$$

e $\tilde{\psi}$ uma extensão $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ de ψ a $\bar{\Omega}$, que por simplicidade denotaremos também por ψ . Agora definimos o operador $T : \mathcal{C}_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}^\alpha(\bar{\Omega})$ dado por

$$T(v, t) = \mathcal{M}(v + t\psi).$$

Seja $t_0 \in V$, então existe $u_{t_0} \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ tal que $\mathcal{M}(u_{t_0}) = 0$ e $u_{t_0}|_{\partial\Omega} = t_0\psi$, assim definindo $v_0 := u_{t_0} - t_0\psi$, temos que $T(v_0, t_0) = \mathcal{M}(v_0 + t_0\psi) = \mathcal{M}(u_{t_0}) = 0$ e $v_0 \in \mathcal{C}_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Queremos mostrar que a equação

$$T(v, t) = 0$$

define uma função $v = v(t)$ em uma vizinhança de t_0 com $v_0 = v(t_0)$. Para isso faremos o uso do Teorema da Função Implícita em espaços de Banach, que tem o seguinte enunciado

Teorema 2.2.2. *Sejam E, F, G espaços de Banach e $T : E \times F \rightarrow G$ uma função de classe \mathcal{C}^1 . Seja $(v_0, t_0) \in E \times F$ tal que $T(v_0, t_0) = 0$ e $D_1T(v_0, t_0) : E \rightarrow G$ um homeomorfismo linear de E sobre G . Então existe uma vizinhança aberta $U \times V$ de (v_0, t_0) em $E \times F$ tal que, para todo $t \in U$ existe um e somente um $v = v(t) \in V$ satisfazendo*

$$T(v(t), t) = 0 \quad e \quad v(t_0) = v_0.$$

Além disso, a função $v : U \rightarrow V$ é \mathcal{C}^1 .

Para aplicarmos o teorema citado ao nosso problema temos que mostrar que o operador $T : \mathcal{C}_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}^\alpha(\bar{\Omega})$ é de classe \mathcal{C}^1 e que o operador $L := D_1T(v_0, t_0) : \mathcal{C}_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}^\alpha(\bar{\Omega})$ é um homeomorfismo linear, ou seja, uma bijeção contínua com inversa contínua.

Proposição 2.2.3. *T é um operador \mathcal{C}^1 e*

$$(D_1T(v_0, t_0)(h))(x) = \left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(v_0 + t_0\psi) E_i(E_j(h)) + \sum_{i=1}^n B_i(v_0 + t_0\psi) E_i(h) \right) (x)$$

onde

$$A_{ij}(w) = (1 + |\text{grad } w|^2)^{-1/2} \delta_{ij} - (1 + |\text{grad } w|^2)^{-3/2} E_i(w) E_j(w)$$

e

$$B_i(w) = (1 + |\text{grad } w|^2)^{-3/2} \left[\text{div grad } w - \sum_{j=1}^n E_j(w) E_i(E_j(w)) \right]$$

e $\{E_1, \dots, E_n\}$ é um referencial geodésico em x .

dem: Observamos que T é \mathcal{C}^1 se e somente se \mathcal{M} é \mathcal{C}^1 , e este é um fato que tem demonstração um pouco trabalhosa e por isso vamos omiti-la. No entanto, não é muito difícil de nos convenceremos disso.

Supondo que \mathcal{M} é \mathcal{C}^1 , calculamos sua derivada (que é a derivada de T em relação à primeira variável) num ponto v onde $\mathcal{M}(v) = 0$. Começamos modificando convenientemente a expressão de \mathcal{M} , ou seja escrevemos \mathcal{M} em sua forma não divergente:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(u) &= \text{div} \frac{\text{grad } u}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|^2}} = \frac{\text{div grad } u}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|^2}} + \left\langle \text{grad} \frac{1}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|^2}}, \text{grad } u \right\rangle \\ &= \frac{\text{div grad } u}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|^2}} - \frac{1}{2} (1 + |\text{grad } u|^2)^{-3/2} \langle \text{grad} \langle \text{grad } u, \text{grad } u \rangle, \text{grad } u \rangle \\ &= (1 + |\text{grad } u|^2)^{-3/2} \left[(1 + |\text{grad } u|^2) \text{div grad } u - \frac{1}{2} \langle \text{grad} \langle \text{grad } u, \text{grad } u \rangle, \text{grad } u \rangle \right]. \end{aligned}$$

Sejam $v, h \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega)$ e s pequeno, com $\mathcal{M}(v) = 0$. Então

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(v + sh) &= (1 + |\text{grad}(v + sh)|^2)^{-3/2} \left[(1 + |\text{grad}(v + sh)|^2) \text{div grad}(v + sh) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \langle \text{grad} \langle \text{grad}(v + sh), \text{grad}(v + sh) \rangle, \text{grad}(v + sh) \rangle \right]. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathcal{M}(v + sh) \Big|_{s=0} &= \left(\frac{d}{ds} \left((1 + |\text{grad}(v + sh)|^2)^{-3/2} \right) \Big|_{s=0} \right) (1 + |\text{grad } v|^2)^{3/2} \mathcal{M}(v) \\ &\quad + (1 + |\text{grad } v|^2)^{-3/2} \left[\frac{d}{ds} |\text{grad}(v + sh)|^2 \Big|_{s=0} \text{div grad } v \right. \\ &\quad + (1 + |\text{grad } v|^2) \frac{d}{ds} \text{div grad}(v + sh) \Big|_{s=0} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\langle \frac{d}{ds} \text{grad} \langle \text{grad}(v + sh), \text{grad}(v + sh) \rangle \Big|_{s=0}, \text{grad } u \right\rangle \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left\langle \text{grad} \langle \text{grad } v, \text{grad } v \rangle, \frac{d}{ds} \text{grad}(v + sh) \Big|_{s=0} \right\rangle \right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(1 + |\text{grad } v|^2)^{3/2} \frac{d}{ds} \mathcal{M}(v + sh) \Big|_{s=0} &= 2 \langle \text{grad } v, \text{grad } h \rangle \text{div grad } v \\
&+ (1 + |\text{grad } v|^2) \text{div grad } h \\
&- \langle \text{grad } \langle \text{grad } v, \text{grad } h \rangle, \text{grad } v \rangle \\
&- \frac{1}{2} \langle \text{grad } |\text{grad } v|^2, \text{grad } h \rangle.
\end{aligned}$$

Seja $\{E_1, \dots, E_n\}$ um referencial geodésico em x . Logo $\text{grad } u = \sum E_i(u)E_i$, e $\text{div grad } u = \sum E_i(E_i(u))$, e analogamente para h .

$$\begin{aligned}
(1 + |\text{grad } v|^2)^{3/2} \frac{d}{ds} \mathcal{M}(v + sh) \Big|_{s=0} &= 2 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n E_j(E_j(v)) \right) E_i(v)E_i(h) \\
&+ (1 + |\text{grad } v|^2) \sum_{i=1}^n E_i(E_i(h)) \\
&- \left\langle \text{grad} \left(\sum_{i=1}^n E_i(v)E_i(h) \right), \sum_{j=1}^n E_j(v)E_j \right\rangle \\
&- \frac{1}{2} \left\langle \text{grad} \left(\sum_{j=1}^n E_j(v)^2 \right), \sum_{i=1}^n E_i(h)E_i \right\rangle.
\end{aligned}$$

Observamos que

$$\text{grad} \left(\sum_{i=1}^n E_i(v)E_i(h) \right) = \sum_{i,j=1}^n (E_j(E_i(v))E_i(h) + E_i(v)E_j(E_i(h)))E_j$$

e analogamente para $\text{grad} \left(\sum_{j=1}^n E_j(v)^2 \right)$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\left\langle \text{grad} \left(\sum_{i=1}^n E_i(v)E_i(h) \right), \sum_{j=1}^n E_j(v)E_j \right\rangle \\
= \sum_{i,j=1}^n (E_j(E_i(v))E_j(v)E_i(h) + E_i(v)E_j(v)E_i(E_j(h)))
\end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{2} \left\langle \text{grad} \left(\sum_{j=1}^n E_j(v)^2 \right), \sum_{i=1}^n E_i(h)E_i \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n E_i(E_j(v))E_j(v)E_i(h).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(1 + |\text{grad } v|^2)^{3/2} \left. \frac{d}{dt} \mathcal{M}(v + th) \right|_{t=0} &= (1 + |\text{grad } u|^2) \sum_{i=1}^n E_i(E_i(h)) \\
&- \sum_{i,j=1}^n E_i(v) E_j(v) E_i(E_j(h)) + 2 \sum_{i,j=1}^n E_j(E_j(v)) E_i(v) E_i(h) \\
&- \sum_{i,j=1}^n E_j(E_i(v)) E_j(v) E_i(h) - \sum_{i,j=1}^n E_i(E_j(v)) E_j(v) E_i(h)
\end{aligned}$$

ou ainda

$$(1 + |\text{grad } v|^2)^{3/2} \left. \frac{d}{dt} \mathcal{M}(v + th) \right|_{t=0} = \sum_{i,j=1}^n \tilde{A}_{ij}(v) E_i(E_j(h)) + \sum_{i=1}^n \tilde{B}_i(v) E_i(h),$$

onde

$$\tilde{A}_{ij}(v) = (1 + |\text{grad } v|^2) \delta_{i,j} - E_i(v) E_j(v)$$

e

$$\tilde{B}_i(v) = \sum_{j=1}^n (2E_j(E_j(v)) E_i(v) - E_j(E_i(v)) E_j(v) - E_i(E_j(v)) E_j(v)),$$

o que conclui a demonstração. ■

Vejamos que L é estritamente elíptico. De fato, sejam $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ então

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n \tilde{A}_{i,j}(v_0 + t_0 \psi) \xi_i \xi_j &= \sum_{i,j=1}^n (1 + |D(v_0 + t_0 \psi)|^2) \delta_{i,j} \xi_i \xi_j - \sum_{i,j=1}^n D_i(v_0 + t_0 \psi) D_j(v_0 + t_0 \psi) \xi_i \xi_j \\
&= (1 + |D(v_0 + t_0 \psi)|^2) \|\xi\|^2 - \sum_{i,j=1}^n \xi_i D_i(v_0 + t_0 \psi) \xi_j D_j(v_0 + t_0 \psi) \\
&= (1 + |D(v_0 + t_0 \psi)|^2) \|\xi\|^2 - \sum_{i=1}^n \xi_i D_i(v_0 + t_0 \psi) \sum_{j=1}^n \xi_j D_j(v_0 + t_0 \psi) \\
&= (1 + |D(v_0 + t_0 \psi)|^2) \|\xi\|^2 - \langle \xi, D(v_0 + t_0 \psi) \rangle^2.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\langle \xi, D(v_0 + t_0 \psi) \rangle &\leq \|\xi\| \|D(v_0 + t_0 \psi)\| \Rightarrow -\langle \xi, D(v_0 + t_0 \psi) \rangle^2 \geq -\|\xi\|^2 \|D(v_0 + t_0 \psi)\|^2 \\
&\implies \sum_{i,j=1}^n \tilde{A}_{i,j} \xi_i \xi_j \geq (1 + |D(v_0 + t_0 \psi)|^2) \|\xi\|^2 - \|\xi\|^2 \|D(v_0 + t_0 \psi)\|^2 = \|\xi\|^2.
\end{aligned}$$

Segue que conforme a notação para operadores lineares elípticos, L possui $c = 0$.

Note que L é contínuo, vejamos então que L é injetivo, sobrejetivo e L^{-1} é contínuo.

- **L é injetivo.**

Dados h_1 e h_2 pertencentes a $\mathcal{C}_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, temos que se $L(h_1) = L(h_2)$ então $L(h_1 - h_2) = 0$. Como $(h_1 - h_2)|_{\partial\Omega} = 0$, pelo Corolário 5.0.6 temos que $h_1 = h_2$ em Ω , logo concluímos que L é injetivo.

- **L é sobrejetivo.**

Como L é estritamente elíptico em Ω , com $c = 0$, o Teorema 5.0.11 nos garante que dada $g \in \mathcal{C}^\alpha(\overline{\Omega})$, existe um único $h \in \mathcal{C}_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que $L(h) = g$, o que implica que L é sobrejetivo.

- **L^{-1} é contínuo.**

Sejam $f, g \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ e $u = L^{-1}(f)$, $v = L^{-1}(g) \in \mathcal{C}_0^{2,\alpha}$. Então o Teorema 5.0.10 nos dá

$$|u - v|_{2,\alpha} \leq C(|u - v|_0 + |f - g|_\alpha).$$

Por outro lado o Teorema 5.0.7 nos dá $|u - v|_0 \leq C|f - g|_0$, e então

$$|L^{-1}(f) - L^{-1}(g)|_{2,\alpha} = |u - v|_{2,\alpha} \leq C|f - g|_{0,\alpha}$$

e portanto L^{-1} é contínuo.

Logo concluímos então que L é um homeomorfismo linear. Aplicando o Teorema da Função Implícita, obtemos que V é aberto.

Na verdade a abertura de V vale em qualquer situação, isto é, seja qual for o domínio suave e limitado Ω e seja qual for o dado no bordo $\psi \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ (com relação ao operador em questão, evidentemente).

(2) O fechamento de V .

Dada uma sequência $\{t_m\}$ em V tal que $t_m \rightarrow t \in [0, 1]$, queremos mostrar que $t \in V$.

Como $t_m \in V \Rightarrow \exists u_{t_m} \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que $\mathcal{M}(u_{t_m}) = 0$ e $u_{t_m}|_{\partial\Omega} = t_m\psi$.

Iremos mostrar que a sequência $\{u_{t_m}\}$ contém uma subsequência convergindo a uma função $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ na norma $\mathcal{C}^{2,\alpha}$. Supondo isto válido conforme vimos, a aplicação T definida anteriormente é contínua logo

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(u) &= T(u - t\psi, t) \\ &= T\left(\lim_{m \rightarrow \infty} (u_{t_m} - t_m\psi, t_m)\right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} T(u_{t_m} - t_m\psi, t_m) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{M}(u_{t_m}) = 0. \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$u|_{\partial\Omega} = \lim_{m \rightarrow \infty} u_{t_m}|_{\partial\Omega} = \lim_{m \rightarrow \infty} t_m \psi = t\psi.$$

Destas considerações podemos concluir que $t \in V$.

Para provar que u_{t_m} converge a uma certa $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ na norma \mathcal{C}^0 é suficiente mostrar que $\exists C > 0$ tal que

$$\sup_{\Omega} |u_{t_m}| \leq C \quad \text{e} \quad \sup_{\Omega} |\text{grad } u_{t_m}| \leq C$$

ou mais forte que isso, que $\exists C > 0$ tal que $\forall u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\forall t \in [0, 1]$ satisfazendo $\mathcal{M}(u) = 0$ e $u|_{\partial\Omega} = t\psi$, valer $|u|_1 \leq C$, ou seja, temos uma estimativa *a priori*.

Provamos a seguir que V é fechado admitindo que temos uma estimativa *a priori*. Na seção 2.2.3 discutimos como encontrar tais estimativas.

Suponhamos sem perda de generalidade que C satisfaz também $|\psi|_2 \leq C$. Pelo Teorema 5.0.15, $\exists \beta = \beta(C, n, \Omega)$ tal que $|u_{t_m}|_{1,\beta} \leq C$. Defina $\gamma := \min\{\alpha, \beta\}$, então Ω é um domínio $\mathcal{C}^{2,\gamma}$.

Definimos para cada m o operador linear $L_m : \mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}^{\gamma}(\overline{\Omega})$ dado por

$$L_m(h) := \text{div} \left(\frac{\text{grad } h}{\sqrt{1 + |\text{grad } u_{t_m}|^2}} \right).$$

Note agora que $u_{t_m} \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ é solução de $L_m = 0$. Pelo Teorema 5.0.10 existe C tal que

$$|u_{t_m}|_{2,\gamma} \leq C \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Aplicando o Teorema de Arzelá-Ascoli, $\{u_{t_m}\}$ possui uma subsequência convergindo uniformemente na norma \mathcal{C}^2 para $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Ainda, tem-se $\mathcal{M}(u) = 0$ e $u|_{\partial\Omega} = t\psi$.

Além disso, o Teorema 5.0.13 nos dá a regularidade desejada, isto é, $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, e portanto $t \in V$ o que prova que V é fechado, com isso o problema (2.3) possui solução para $t = 1$.

De acordo com o que vimos até aqui, podemos dizer que a abertura de V ocorre sempre que Ω é um domínio limitado de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$. O fechamento em geral é falso e de acordo com o que vimos o fechamento só é possível mediante as estimativas *a priori*, e é de tais estimativas que falaremos na próxima seção.

2.2.3 Barreiras e estimativas *a priori*

Nesta seção veremos em quais condições é possível encontrar estimativas *a priori* para a norma \mathcal{C}^1 das soluções dos problemas com t variando.

Precisamos para isso, estimar $|u|$ em Ω e $|\text{grad } u|$ em $\partial\Omega$. Uma maneira de obter essas estimativas é construir *barreiras*. Um modo de obter barreiras é encontrar *supersolução* e *subsolução* para o problema.

Definição 2.2.4. *Uma função $v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ é dita supersolução para o problema $\mathcal{M} = 0$ se $\mathcal{M}(v) \leq 0$. Analogamente, v é dita uma subsolução se $\mathcal{M}(v) \geq 0$.*

Note que pelo corolário 5.0.6, qualquer supersolução com condições de fronteira maior ou igual àquela dada no problema está de fato acima da solução, se esta existir (análogo para subsolução).

A definição anterior é bastante útil em vários contextos, mas precisamos também de uma definição mais geral, que engloba uma classe maior de funções.

Definição 2.2.5. *Uma função $v \in \mathcal{C}^0(M)$ é dita supersolução (generalizada) para o problema $\mathcal{M} = 0$ se, dado qualquer aberto limitado $U \subset M$ e dado uma solução u do problema em U , a condição $u \leq v$ em ∂U implicar $u \leq v$ em todo U . Análogo para subsolução, apenas invertendo as desigualdades.*

O princípio do máximo nos dá que toda supersolução é supersolução generalizada. Além disso, esta nova definição nos permite obter boas propriedades.

Proposição 2.2.6. *Se v_1 e v_2 são supersoluções de $\mathcal{M} = 0$, então $v := \min\{v_1, v_2\}$ é também supersolução. Análogo para o máximo entre subsoluções.*

dem.: Seja $U \subset M$ um aberto e limitado e u tal que $\mathcal{M}(u) = 0$ em U , $u \leq v$ em ∂U , então em particular $u \leq v_1$ e $u \leq v_2$ em ∂U , e portanto $u \leq v_1$ e $u \leq v_2$ em U . ■

Proposição 2.2.7. *Sejam U e V abertos de M com $\bar{V} \subset U$. Suponha que $v_1 \in \mathcal{C}^0(M)$ e $v_2 \in \mathcal{C}^0(U)$ sejam supersoluções para $\mathcal{M} = 0$ em M e que satisfaçam*

$$\begin{aligned} v_1 &\leq v_2 && \text{em } \bar{U} \setminus V \\ v_2 &\leq v_1 && \text{em } V. \end{aligned}$$

Defina $w : M \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$w(x) = \begin{cases} v_1(x) & \text{se } x \in M \setminus V \\ v_2(x) & \text{se } x \in V. \end{cases}$$

Então $w \in \mathcal{C}^0(M)$ é supersolução generalizada de $\mathcal{M} = 0$ em M em Ω .

dem.: Seja W aberto limitado de M e seja $u \in \mathcal{C}^2(W) \cap \mathcal{C}^0(\overline{W})$ solução de $\mathcal{M} = 0$ em W satisfazendo $u|_{\partial W} \leq w|_{\partial W}$. A mostrar: $u \leq w$ em W .

Observe inicialmente que w é contínua pois em ∂V temos $v_1 = v_2$. Observe também que se $W \subset V$ ou $W \subset M \setminus V$, então não há o que fazer.

Note que pela definição de w , temos que $w \leq v_1$ em todo M . Então, como v_1 é supersolução, temos que $u \leq v_1$ em W . Resta mostrar que $u \leq v_2$ em $W \cap V$.

Defina $S := \partial V \cap W$ e $T := \partial(W \cap V) \setminus S$. Então $\partial(W \cap V) = S \cup T$. Note que em S temos que $v_1 = v_2$ e portanto já vale que $u \leq v_2$. Já em T , temos por hipótese que $u \leq w$, mas $w = v_2$ em V e portanto em T . Desta forma, $u \leq v_2$ em $\partial(W \cap V)$ e como v_2 é supersolução, vale que $u \leq v_2$ em $(W \cap V)$. ■

Uma proposição análoga evidentemente pode ser feita para subsoluções, com as devidas adaptações.

Já as barreiras podem ser definidas localmente; dado $x_0 \in \partial\Omega$, dizemos que o problema admite barreiras locais superior e inferior em x_0 se existe uma vizinhança \mathcal{N}_{x_0} de x_0 em $\overline{\Omega}$ e funções $w_{x_0}, v_{x_0} \in \mathcal{C}^2(\overline{\mathcal{N}_{x_0}})$ tais que

$$v_{x_0}(x_0) = \psi(x_0) = w_{x_0}(x_0) \quad (2.4)$$

$$\mathcal{M}(w_{x_0}) \leq 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{M}(v_{x_0}) \geq 0 \quad \text{em } \mathcal{N}_{x_0} \quad (2.5)$$

e, se u é uma solução do problema então

$$v_{x_0}(x) \leq u(x) \leq w_{x_0}(x) \quad \forall x \in \mathcal{N}_{x_0}. \quad (2.6)$$

Existe também a noção de barreira global pedindo que as funções $w_{x_0}, v_{x_0} \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ e satisfaçam (2.4), e (2.5) em $\overline{\Omega}$ e se u for uma solução então (2.6) vale para todo $x \in \partial\Omega$. Além disso, tais funções devem ter o gradiente limitado no bordo de Ω , isto é, devem ser tais que

$$\sup_{x_0 \in \partial\Omega} \max\{|\text{grad } w_{x_0}(x_0)|, |\text{grad } v_{x_0}(x_0)|\} \leq C$$

para alguma constante C .

O seguinte lema nos permite obter uma estimativa para $|\text{grad } u|$ em $\partial\Omega$.

Lema 2.2.8. *Dados $w, u, v \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $x_0 \in \partial\Omega$, então temos a seguinte estimativa: se $w(x_0) = u(x_0) = v(x_0)$ e $w \leq u \leq v$, então*

$$|\text{grad } u(x_0)| \leq \max\{|\text{grad } w(x_0)|, |\text{grad } v(x_0)|\}.$$

dem.: Seja $C = \max\{|\text{grad } w(x_0)|, |\text{grad } v(x_0)|\}$ e η o vetor unitário normal a $\partial\Omega$ em x_0 apontando para o interior de Ω . Seja a um vetor unitário tal que $\langle a, \eta \rangle \geq 0$ e seja $\gamma : [0, l] \rightarrow \bar{\Omega}$ tal que $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma'(0^+) = a$. Pela definição de derivada em $\partial\Omega$, dado $\epsilon > 0$ existe $0 < \delta \leq l$ tal que para todo $t \in (0, \delta)$,

$$-C - \epsilon \leq \frac{w(\gamma(t)) - w(x_0)}{t} \leq \frac{u(\gamma(t)) - u(x_0)}{t} \leq \frac{v(\gamma(t)) - v(x_0)}{t} \leq C + \epsilon,$$

de modo que

$$\left| \frac{u(\gamma(t)) - u(x_0)}{t} \right| \leq C + \epsilon.$$

Fazendo t tender a zero obtemos

$$\langle \text{grad } u(x_0), a \rangle = \text{grad } u(\gamma(0))\gamma'(0^+) = \left| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(\gamma(t)) - u(x_0)}{t} \right| \leq C + \epsilon.$$

Portanto, fazendo ϵ tender a zero por sua vez chegamos a

$$\langle \text{grad } u(x_0), a \rangle \leq C.$$

Por fim tomando $a = \text{grad } u(x_0)$ segue que

$$|\text{grad } u(x_0)|^2 = \langle \text{grad } u(x_0), \text{grad } u(x_0) \rangle \leq C.$$

■

Com super e subsoluções obtemos estimativas da altura de uma solução (segue da definição). Com as barreiras, obtemos estimativas para a altura do gradiente no bordo. Assim, quando construímos super e subsoluções que servem como barreiras superior e inferior, conseguimos obter as estimativas *a priori* da norma \mathcal{C}^1 de uma solução.

Para finalizar esta seção enunciamos dois resultados que serão utilizados na demonstração do Teorema 1.0.1.

O princípio do máximo assintótico pode ser encontrado em [C1] para o operador Δ e em [T] para operadores mais gerais.

Proposição 2.2.9. (Princípio do Máximo Assintótico:) *Sejam σ e Σ sub e supersolução de $\mathcal{M} = 0$ em M , respectivamente, tais que*

$$\limsup_{p \rightarrow x} \sigma(p) \leq \liminf_{p \rightarrow x} \Sigma(p) \quad \forall x \in \partial_\infty M.$$

Então

$$\sigma \leq \Sigma \quad \text{em } M.$$

Enunciamos o Teorema 1.1 de [S].

Teorema 2.2.10. *Seja $u \in C^3(\Omega)$ uma solução não negativa de $\operatorname{div}\left(\frac{Du}{W}\right) = nH(x)$, $W = (1 + |Du|^2)^{1/2}$. Então*

$$|W(P)| \leq 32 \max\left(1, \left(\frac{u(P)}{\rho}\right)^2\right) e^{16Cu(P)} e^{16C\left(\frac{u(P)}{\rho}\right)^2}$$

onde a constante C é independente de u , mas depende na norma C^1 de $H(x)$, de um limite inferior as curvaturas seccionais de M e de um limite superior para Δd^2 em Ω .

No teorema 2.2.10 ρ é tal que a bola geodésica de centro P e raio ρ está contida em Ω , isto é, $B_\rho \subset \Omega$, para $\rho < R(P)$, o raio de injetividade de M em P . Observamos que no nosso caso ($H = 0$) a constante C obtida no teorema 2.2.10, não depende de u só depende da geometria do domínio.

Capítulo 3

A geometria do problema

3.1 Variedades de Cartan-Hadamard e bordo assintótico

Nesta seção falaremos sobre as variedades de Cartan-Hadamard, suas propriedades básicas e sobre o bordo assintótico de uma variedade Cartan-Hadamard.

A seguinte definição é feita para uma variedade riemanniana qualquer.

Definição 3.1.1. *Uma variedade riemanniana M é dita completa se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial, \exp_p , está definida para todo $v \in T_pM$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

Definição 3.1.2. *Uma variedade riemanniana completa, simplesmente conexa de curvatura seccional não positiva é chamada de variedade de Cartan-Hadamard.*

Em geral se dá o nome de Hadamard quando a curvatura é estritamente negativa e de Cartan-Hadamard quando a curvatura puder ser zero, ou ir para zero.

O Teorema de Hopf e Rinow (Teorema 2.8 p.168 de [dC1]) nos diz que se \exp_p está definida em todo o T_pM então M é completa como espaço métrico e além disso para todo $q \in M$ existe uma geodésica γ ligando p a q com $l(\gamma) = d(p, q)$.

A partir de agora, M será sempre uma variedade de Cartan-Hadamard. Enunciamos agora o Teorema de Hadamard, que pode ser encontrado em [dC1].

Teorema 3.1.3. *(Hadamard). Seja M uma variedade riemanniana de Cartan-Hadamard. Então M é difeomorfa a \mathbb{R}^n , $n = \dim M$; mais precisamente a aplicação $\exp_p : T_pM \rightarrow M$ é um difeomorfismo.*

O Teorema de Hadamard assegura que se M é uma variedade de Cartan-Hadamard, então M tem a mesma topologia e estrutura diferenciável do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Além destas propriedades topológicas e diferenciais, são conhecidas algumas propriedades geométricas análogas a do espaço euclidiano, como: dado dois pontos existe uma única geodésica os ligando, uma versão da lei dos cossenos (que aqui chamaremos simplesmente de lei dos cossenos) que diz que $c^2 \geq a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$ onde a, b, c são os lados de um triângulo geodésico e θ é ângulo oposto a c . Estas propriedades serão utilizadas mais adiante.

Passemos a falar um pouco sobre o bordo assintótico de uma variedade C-H. Mas antes faremos alguns comentários.

Uma característica importante das variedades de curvatura negativa que precisamos ter em mente é que as suas geodésicas se afastam ao longo do tempo, isto também ocorre em variedades de curvatura zero, exemplo \mathbb{R}^n , cujas geodésicas são retas, mas este afastamento ocorre mais rapidamente no caso de variedades de curvatura negativa. Os campos de Jacobi nos fornecem informações sobre a velocidade de afastamento das geodésicas, e tal informação é captada pela expressão (2.2).

Seja $p \in M$, denotamos por $\mathbb{S}_p := \mathbb{S}^{n-1}$ a esfera unitária contida em $T_p M$ e por B_p a bola unitária com centro em 0 contida em $T_p M$, logo $\partial B_p = \mathbb{S}_p$.

Se $v, w \in \mathbb{S}_p$, o ângulo $\theta = \sphericalangle(v, w)$ é o único número $0 \leq \theta \leq \pi$ tal que $\langle v, w \rangle = \cos \theta$.

Se $p \neq q \in M$, seja γ_{pq} a única geodésica tal que $\gamma_{pq}(0) = p$ e $\gamma_{pq}(s) = q$, $s = d(p, q)$. O ângulo $\sphericalangle_p(m, n)$ entre os pontos m e n de M a partir de um ponto distinto p , é definido como $\sphericalangle_p(m, n) := \sphericalangle(\gamma'_{pm}(0), \gamma'_{pn}(0))$.

Definição 3.1.4. Chamamos de raios geodésicos as geodésicas $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ com velocidade $|\gamma'| = 1$. Dois raios geodésicos γ_1 e γ_2 são ditos assintóticos se existe $C > 0$ tal que $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq C \forall t \in [0, \infty)$.

Como exemplo, tomando $M = \mathbb{R}^n$ com a métrica usual, então $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1 \parallel \gamma_2$.

Diretamente da definição acima temos os seguintes resultados:

- 1) A relação assintótica é uma relação de equivalência. Isto segue diretamente da desigualdade triangular.
- 2) Se γ_1 é assintótica a γ_2 e possuem um ponto em comum, então elas são as mesmas.

De fato, supondo que elas não sejam as mesmas, então $\theta := \sphericalangle(\gamma'_1(0), \gamma'_2(0)) > 0$ e utilizando a lei dos cossenos temos que

$$d^2(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \geq 2t^2(1 - \cos \theta) \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

nos levando assim a uma contradição.

Antes de enunciarmos a próxima proposição fazemos a seguinte observação: se γ_1 e γ_2 são geodésicas de M , então a função $t \mapsto d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ é \mathcal{C}^∞ e convexa, e este fato segue do Teorema da comparação do Hessiano, Teorema 2.1.13.

Proposição 3.1.5. *Sejam α geodésica em M , $p \in M$, $\{t_n\} \rightarrow \infty$ em \mathbb{R} . Se β_n é geodésica ligando p a $\alpha(t_n)$, então $\beta'_n(0)$ converge a um vetor $v \in \mathbb{S}_p$ e $\beta := \gamma_v$ é assintótica a α .*

dem.: Podemos supor sem perda de generalidade que $|\beta'_n(t)| = 1$, logo $\{\beta'_n(0)\}$ possui subsequência convergente, que por abuso de notação indicamos por $\beta'_n(0)$, portanto $\beta'_n(0) \rightarrow v \in \mathbb{S}_p$.

Mostremos agora que a geodésica $\beta := \gamma_v$ é assintótica a α . Seja $C > 0$ tal que $d(p, \alpha(0)) \leq C$, considere a sequência s_n tal que $\beta_n(s_n) = \alpha(t_n)$. Pela desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} d(\alpha(0), \alpha(t_n)) &\leq d(\alpha(0), p) + d(p, \beta_n(s_n)) \Leftrightarrow \\ d(\alpha(0), \alpha(t_n)) - d(p, \beta(s_n)) &\leq d(p, \alpha(0)) \Leftrightarrow \\ t_n - s_n &\leq d(p, \alpha(0)) \end{aligned}$$

novamente pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} d(p, \beta(s_n)) &\leq d(p, \alpha(0)) + d(\alpha(0), \alpha(t_n)) \Leftrightarrow \\ d(p, \beta(s_n)) - d(\alpha(0), \alpha(t_n)) &\leq d(p, \alpha(0)) \Leftrightarrow \\ s_n - t_n &\leq d(p, \alpha(0)) \end{aligned}$$

logo

$$|s_n - t_n| \leq d(p, \alpha(0)) \leq C, \text{ em particular } \{s_n\} \rightarrow \infty.$$

Agora fixe $s \geq 0$ e seja n suficientemente grande tal que $s \leq s_n$, como a função $t \mapsto d(\beta_n(t), \alpha(t))$ é convexa, segue que

$$d(\beta_n(s), \alpha(s)) \leq \max\{d(\beta_n(0), \alpha(0)), d(\beta_n(s_n), \alpha(s_n))\}$$

note que $d(\beta_n(0), \alpha(0)) \leq C$ e também que

$$d(\beta_n(s_n), \alpha(s_n)) = d(\alpha(t_n), \alpha(s_n)) = |t_n - s_n| \leq C$$

logo

$$d(\beta_n(s), \alpha(s)) \leq C. \quad (3.2)$$

Considere agora $\beta := \gamma_v$ então $d(\alpha(s), \beta(s)) \leq d(\alpha(s), \beta_n(s)) + d(\beta_n(s), \beta(s))$, devido ao fato de que $\beta'_n(0) \rightarrow v$, segue que $\exists n \gg 0$ tal que (renomeando constantes todas por C) $d(\beta_n(s), \beta(s)) \leq C$ e utilizando (3.2) segue que

$$d(\alpha(s), \beta(s)) \leq C, \text{ logo } \alpha \sim \beta. \quad \blacksquare$$

Um corolário da Proposição 3.1.5, que será muito utilizado é o seguinte.

Corolário 3.1.6. *Dada uma geodésica α em M e um ponto $p \in M$. Existe uma única geodésica β tal que $\beta(0) = p$ e β é assintótica a α .*

dem.: A existência segue diretamente da Proposição 3.1.5, e a unicidade é feita da mesma maneira que (3.1). ■

Considere o conjunto $\Gamma = \{\gamma : [0, \infty) \rightarrow M; \gamma \text{ é geodésica e } |\gamma'(t)| \equiv 1\}$, considerando a relação de equivalência dada na definição 2.2.4 em Γ temos a seguinte definição.

Definição 3.1.7. *O quociente Γ / \sim é chamado de bordo assintótico de M e denotado por $\partial_\infty M$, a classe a qual pertence o raio geodésico γ é denotada por $\gamma(\infty) = \{\alpha \in \Gamma; \alpha \sim \gamma\}$, logo $\partial_\infty M := \{\gamma(\infty); \gamma \in \Gamma\}$*

Intuitivamente podemos pensar que duas curvas estão relacionadas se elas “terminam no mesmo lugar no infinito”, e portanto é intuitivo pensar que $\partial_\infty M$ representa o conjunto de pontos de M que estão no infinito.

Na figura 3.1 a circunferência maior representa o bordo assintótico e as menores as esferas em $T_p M$, note que há uma correspondência biunívoca (isso será provado mais a frente) entre o bordo assintótico e as esferas em $T_p M$.

No nosso caso, como é uma superfície de Cartan-Hadamard, e portanto difeomorfa ao \mathbb{R}^2 , o bordo assintótico nada mais é que um círculo. Como outro exemplo apresentamos o bordo assintótico da variedade $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Olhando a representação cilíndrica de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, como as geodésicas laterais são retas, logo são assintóticas, então o bordo assintótico de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é representado pela figura 3.2.

Sabemos, via Teorema de Hadamard, que dados $p, q \in M$ existe uma única geodésica γ com $|\gamma'| = 1$ ligando p a q . Agora pelo Corolário 3.1.6 temos que

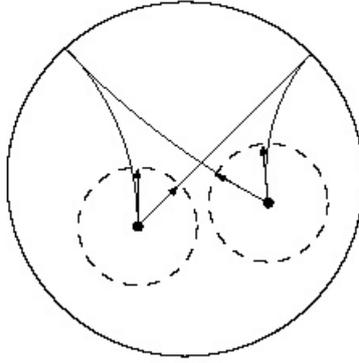


Figura 3.1: Bordo Assintótico. Fonte:[K]

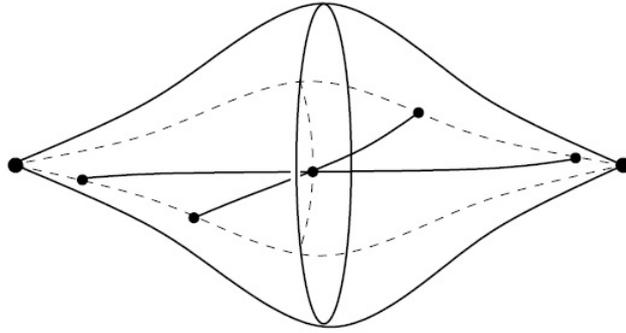


Figura 3.2: Bordo Assintótico de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Fonte:[K]

se $p \in M$ e $x \in \partial_\infty M$ existe uma única geodésica, denotada por γ_{px} , tal que $\gamma_{px}(0) = p$ e $\gamma_{px}(\infty) = x$ (note que esta última igualdade faz sentido, com a notação previamente fixada). Informalmente falando, existe uma única geodésica unindo um ponto finito ao um ponto no infinito.

A partir do Corolário 3.1.6 temos que todos os pontos de $\partial_\infty M$ podem partir de um mesmo ponto $p \in M$ fixado, e devido a unicidade citada acima podemos escrever

$$\partial_\infty M = \{\gamma(\infty); \gamma \text{ é raio geodésico e } \gamma(0) = p\}.$$

Definindo $\overline{M} := M \cup \partial_\infty M$, em [EO] prova-se que existe uma topologia em \overline{M} tal que \overline{M} é homeomorfo a bola fechada unitária em \mathbb{R}^n e $\partial_\infty M$ é homeomorfo a esfera \mathbb{S}_p .

O que faremos é apresentar uma base para essa topologia e mostrar os homeomorfismos citados. Denotamos por $B_r(p)$ a bola geodésica de centro p e raio r , ou seja, $B_r(p) = \{q \in M; d(p, q) < r\}$.

Definição 3.1.8. *Seja $v \in \mathbb{S}_p \subset T_pM$, ϵ tal que $0 < \epsilon < \pi$. Então o conjunto*

$$C_p(v, \epsilon) := \{x \in \overline{M}; \sphericalangle(v, \gamma'_{px}(0)) < \epsilon\}$$

é chamado de cone com vértice p , eixo v e abertura ϵ , e o conjunto

$$T_p(v, \epsilon, r) := C_p(v, \epsilon) \setminus \overline{B_r(p)}$$

de cone truncado com vértice p , eixo v e abertura ϵ .

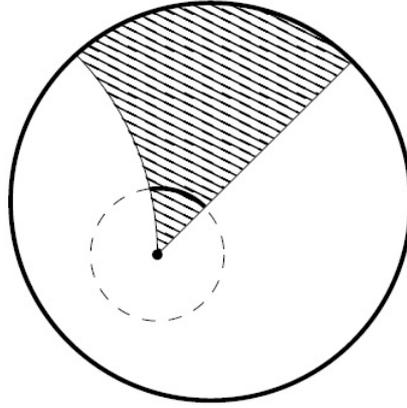


Figura 3.3: Cone e cone truncado. Fonte:[K].

Assim, fixado p , a topologia cuja base é constituída por todos os cones truncados $T_p(v, \epsilon, r)$ e pelas bolas abertas de M é chamada de *topologia dos cones* para \overline{M} (para maiores detalhes ver [EO]).

Mostraremos agora que com a topologia dos cones temos os homeomorfismos citados acima, mas antes vejamos que \mathbb{S}_p e $\partial_\infty M$ estão em correspondência biunívoca. Observe que a figura (3.1) nos dá uma intuição de que exista tal correspondência.

Proposição 3.1.9. *Seja $p \in M$. Então \mathbb{S}_p e $\partial_\infty M$ estão em correspondência biunívoca.*

dem.: Seja $v \in \mathbb{S}_p$ e seja γ_v a geodésica tal que $\gamma_v(0) = p$ e $\gamma'_v(0) = v$. Note que pela lei dos cossenos temos que se $v \neq w$ então γ_v não é assintótica a γ_w .

Por outro lado, seja α uma geodésica em M e seja $v_n \in \mathbb{S}_p$ o vetor tangente à geodésica que liga p e $\alpha(n)$, n inteiro. Então pela Proposição 3.1.5 segue que v_n converge para algum v e $\gamma_v(\infty) = \alpha(\infty)$. ■

Teorema 3.1.10. *Sejam $p \in M$ e $\overline{B_p}$ a bola fechada unitária em T_pM , cujo bordo $\partial B_p = \mathbb{S}_p$. Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ um homeomorfismo. Então a função*

$$\varphi : \overline{B_p} \rightarrow \overline{M} \text{ tal que } \varphi(v) = \exp_p(f(\|v\|)v)$$

é um homeomorfismo levando \mathbb{S}_p em $\partial_\infty M$.

Antes de demonstrarmos o teorema observamos que quando fechamos no infinito no homeomorfismo f queremos dizer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty$.

dem.: Como $\overline{B_p}$ é compacto e \overline{M} é Hausdorff, pois dois pontos distintos de $\partial_\infty M$ podem ser separados por cones com mesmo vértice, então para mostrar que φ é um homeomorfismo basta mostrar que φ é contínua em $v \in \mathbb{S}_p$, para isto consideremos a vizinhança truncada $T = T_p(v, \epsilon, r)$ de $\varphi(v)$, então

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(T) &= \{x \in \overline{B_p}; \exp_p(f\|x\|x) \in T_p(v, \epsilon, r)\} \\ &= \{\angle(x, v) < \epsilon \text{ e } f(\|x\|)\|x\| > r\} \\ &= \{\angle(x, v) < \epsilon\} \cap \{f(\|x\|)\|x\| > r\} \end{aligned}$$

Logo temos a interseção de dois abertos, e portanto φ é contínua. ■

Considerando agora a restrição de φ a \mathbb{S}_p , temos o homeomorfismo entre \mathbb{S}_p e $\partial_\infty M$, mais precisamente temos a função $\varphi_p : \mathbb{S}_p \rightarrow \partial_\infty M$ dada por

$$\varphi_p(v) = \gamma_v(\infty).$$

3.2 Variedades rotacionalmente simétricas

Nesta seção falaremos um pouco sobre as variedades rotacionalmente simétricas, citando suas principais propriedades. Para esta parte indicamos as referências [GW], [C1] e [C2].

As variedades rotacionalmente simétricas são variedades topologicamente simples. Como se pode ver em [C2] (Proposição 1), as variedades simplesmente conexas e rotacionalmente simétricas são difeomorfas a \mathbb{R}^n ou \mathbb{S}^n .

Em geometria riemanniana as variedades rotacionalmente simétricas são utilizadas como modelo de comparação, pois possuem uma métrica simples de se trabalhar.

Passamos agora a definição de variedade rotacionalmente simétrica, consideramos o caso onde $p \in M^n$ é um pólo, isto é, $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é um difeomorfismo. A seguinte definição é encontrada em [GW].

Definição 3.2.1. *Uma variedade M com um pólo p é rotacionalmente simétrica se qualquer isometria linear $\phi : T_p M \rightarrow T_p M$ é realizada como a diferencial de uma isometria $\Phi : M \rightarrow M$ com $\Phi(p) = p$, isto é, $d\Phi_p = \phi$.*

Uma propriedade importante provada nas referências citadas é que se M é rotacionalmente simétrica, a imagem de qualquer subespaço linear de $T_p M$ pela aplicação exponencial é uma subvariedade totalmente geodésica de M .

Com a propriedade acima mostra-se também que se M é rotacionalmente simétrica em p e $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ é uma geodésica tal que $\gamma(0) = p$, então qualquer campo de Jacobi ao longo de γ , ortogonal a γ' , com $J(0) = 0$ é múltiplo do transporte paralelo ao longo de γ , isto é, $J(t) = f(t)W(t)$ com $W(t)$ transporte paralelo ao longo de γ .

Com estas duas propriedades pode-se então mostrar agora que a métrica das variedades rotacionalmente simétricas em coordenadas normais é

$$dr^2 + f(r)^2 d\theta^2$$

onde r é a distância ao ponto p e $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é não negativa e diferenciável, tal que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$ e $d\theta^2$ é métrica canonica na esfera \mathbb{S}^{n-1} . Este fato pode ser encontrado provado em uma das referências por exemplo em [GW], vamos dar uma ideia de sua demonstração.

Primeiramente deve-se lembrar que um campo de Jacobi com $J(0) = 0$ ao longo de uma geodésica γ de M , com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$ é da forma $J(t) = (d\exp_p)_{tv}(tw)$, $J'(0) = w$, daí utilizar o fato de que em uma variedade rotacionalmente simétrica os campos de Jacobi são múltiplos do transporte paralelo, e por fim a parte mais difícil que é calcular o pull back da métrica de M pela aplicação exponencial e utilizar o lema de Gauss para se chegar a $\exp_p^*(g) = dr^2 + f(r)^2 d\theta^2$, onde g é a métrica riemanniana em M .

Segue assim da equação de Jacobi e da expressão da métrica que a curvatura seccional de M é dada por $f''(r) + K(r)f(r) = 0$, ou seja

$$K(r) = -\frac{f''(r)}{f(r)}.$$

Como exemplo de variedades rotacionalmente simétricas temos \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n e \mathbb{H}^n se $K = 0$, $K = 1$ e $K = -1$ respectivamente e com

$$f(r) = r, \quad f(r) = \sin(r) \quad \text{e} \quad f(r) = \sinh(r).$$

Com estas considerações, M é rotacionalmente simétrica se possui métrica da forma

$$dr^2 + f(r)^2 d\theta^2.$$

Note que os coeficientes da métrica de uma superfície rotacionalmente simétrica são:

$$g_{rr} = 1 \quad g_{r\theta} = g_{\theta r} = 0 \quad g_{\theta\theta} = f^2.$$

Calcularemos agora o Hessiano da função distância de uma superfície rotacionalmente simétrica.

Consideremos os campos $E := \text{grad } r$ e $T = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \theta}$, como vimos $E = \frac{\partial}{\partial r}$ e olhando os coeficientes da métrica temos que E e T são unitários e ortogonais. Logo $\text{Hess}(E, E) = 0$, e $\text{Hess}(E, T) = 0$, calculemos então o Hessiano da distância para campos X, Y ortogonais a E .

Note que $\text{Hess } r(T, T) = \left\langle \nabla_T \frac{\partial}{\partial r}, T \right\rangle = \frac{1}{f^2} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = \frac{1}{f^2} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle$.
Derivando $g_{\theta\theta}$ em relação a r obtemos

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = f f', \quad \text{logo} \quad \text{Hess } r(T, T) = \frac{f'}{f}.$$

Assim para campos X, Y que são ortogonais a E , segue que $X = aT$ e $Y = bT$, com a e b funções. Assim $\text{Hess } r(X, Y) = \frac{f'}{f} ab$.

Capítulo 4

A demonstração do teorema

Nesta seção faremos a demonstração do teorema principal. A prova consistirá em encontrar barreiras superior e inferior para o problema de Dirichlet assintótico, através da construção de sub e supersolução, e com a ajuda da teoria das EDPs mostrar a existência de solução do problema de Dirichlet em discos geodésicos abertos, assumindo o valor da extensão radial de ψ no bordo do disco, e novamente com a ajuda das EDPs conseguimos extrair subsequência que converge uniformemente em compactos para uma solução do problema.

Seja M uma superfície de Cartan-Hadamard rotacionalmente simétrica, isto é, M é uma variedade riemanniana de Cartan-Hadamard rotacionalmente simétrica e dimensão $n = 2$. Então em coordenadas polares geodésicas (r, θ) dadas pela aplicação exponencial \exp_p , como visto em 3.2, a métrica riemanniana de M toma a forma

$$dr^2 + f(r)^2 d\theta^2$$

com $f \in \mathcal{C}^\infty([0, \infty))$ satisfazendo $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$. A curvatura seccional de M é $K(r) = -f''(r)/f(r)$, r é a distância de x ao pólo. Note que se $K < 0$ então $-f''(r)/f(r) < 0$ o que implica $-f''(r) < 0$, logo $f''(r) > 0$, ou seja f é estritamente convexa. Como veremos, a convexidade de f desempenha um papel importante nas construções feitas no decorrer do texto.

Relembramos o enunciado do Teorema.

Teorema 1.0.1. *Seja M , uma superfície de Cartan-Hadamard tal que:*

1) M é rotacionalmente simétrica;

2) $\int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{f(r)} < \infty$.

Seja $\psi \in \mathcal{C}^0(\partial_\infty M)$. Então existe $u \in \mathcal{C}^\infty(M) \cap \mathcal{C}^0(\overline{M})$ tal que

$$\begin{cases} \mathcal{M}(\tilde{u}) := \operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} \tilde{u}}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} \tilde{u}|^2}} \right) = 0 \text{ em } M \\ \tilde{u}|_{\partial_\infty M} = \psi. \end{cases} \quad (1.1)$$

Além disso, se S é uma superfície mínima propriamente imersa em $M \times \mathbb{R}$ tal que $\partial_\infty S = \operatorname{graf}(\psi)$ então $S = \operatorname{graf}(u)$.

Fixamos a notação a ser utilizada.

Consideramos M rotacionalmente simétrica no ponto $o \in M$ com $E := \operatorname{grad} r$ e T campo de vetores diferenciáveis em $M \setminus \{o\}$, com T unitário e ortogonal a E . Como vimos $\operatorname{grad} r = \partial/\partial r$, e os coeficientes da métrica são:

$$g_{rr} = 1 \quad g_{r\theta} = g_{\theta r} = 0 \quad g_{\theta\theta} = f^2,$$

logo temos que

$$E = \frac{\partial}{\partial r} \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Como vimos na seção 3.1, podemos identificar $\partial_\infty M$ com o círculo unitário centrado na origem de $T_o M$, que denotamos por \mathbb{S} , através do homeomorfismo $v \mapsto \gamma_v(\infty)$, onde $\gamma_v : [0, \infty) \rightarrow M$ é o raio geodésico tal que $\gamma_v(0) = o$ e $\gamma'_v(0) = v$.

Uma observação importante é que dado $v \in \mathbb{S}$ então v está unicamente determinado pelo ângulo $\theta \in \mathbb{S}$ e vice-versa, isto é, podemos escrever $v = (\cos \theta, \sin \theta)$.

Com isto em mente, podemos definir $\psi_o \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$ por

$$\psi_o(\theta) := \psi(\gamma_v(\infty)), \text{ onde } v = (\cos \theta, \sin \theta).$$

Primeiramente assumiremos que $\psi_o \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})$, o caso \mathcal{C}^0 é feito por aproximação no final.

- O caso $\psi_o \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})$.

Seja $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M \setminus \{o\})$ a extensão radial de ψ_o , isto é, $\varphi(r, \theta) = \psi_o(\theta)$. Então como φ só depende de θ , temos que a sua derivada na direção E , $E(\varphi)$, é nula.

Proposição 4.0.2. *Sejam $y := T(\varphi)(r, \theta)$ e $z := T(T(\varphi))(r, \theta)$. Então*

$$y(r, \theta) = \frac{y(r_0, \theta)f(r_0)}{f(r)} \quad (4.1)$$

e

$$z(r, \theta) = \frac{z(r_0, \theta)f(r_0)^2}{f(r)^2} \quad (4.2)$$

dem.: Note que

$$\begin{aligned}
 [E, T](\varphi) &= E(T(\varphi)) - T(E(\varphi)) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{f} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right) \\
 &= -\frac{f'}{f^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \\
 &= -\frac{f'}{f} \frac{1}{f} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\
 &= -\frac{f'}{f} T(\varphi).
 \end{aligned}$$

Por outro lado, como $E(\varphi) = 0$, temos que

$$E(T(\varphi)) = [E, T](\varphi) = -\frac{f'}{f} T(\varphi)$$

logo

$$E(y(r, \theta)) = -\frac{f'}{f} y(r, \theta).$$

Resolvendo a EDO acima segue que

$$y(r, \theta) = \frac{y(r_0, \theta) f(r_0)}{f(r)}.$$

De mesmo modo temos que $[E, T](T(\varphi)) = -\frac{f'}{f} T(T(\varphi))$, e por outro lado

$$\begin{aligned}
 E(T(T(\varphi))) &= [E, T](T(\varphi)) + T(E(T(\varphi))) \\
 &= -\frac{f'}{f} T(T(\varphi)) - T\left(\frac{f'}{f} T(\varphi)\right) \\
 &= -\frac{f'}{f} T(T(\varphi)) - T\left(\frac{f'}{f} T(\varphi)\right) - \frac{f'}{f} T(T(\varphi)) \\
 &= -2\frac{f'}{f} T(T(\varphi)).
 \end{aligned}$$

Portanto

$$E(z(r, \theta)) = -\frac{f'}{f} z(r, \theta),$$

logo resolvendo esta EDO, temos que

$$z(r, \theta) = \frac{z(r_0, \theta) f(r_0)^2}{f(r)^2},$$

como queríamos demonstrar. ■

Construiremos agora a sub e supersolução.

Seja $G = G_h : M \setminus \{o\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $G(r, \theta) = g(r) + \varphi(\theta)$, onde $g = g_h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função \mathcal{C}^2 , a ser determinada.

Vamos calcular $\mathcal{M}(G) = \operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} G}{\sqrt{1+|\operatorname{grad} G|^2}} \right)$. Para isso observe que como $\{E, T\}$ formam um referencial ortonormal local, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} G &= g'E + yT, \\ |\operatorname{grad} G|^2 &= g'^2 + y^2, \\ \operatorname{grad} |\operatorname{grad} G|^2 &= 2 \left(g'g'' + y \frac{\partial y}{\partial r} \right) E + 2yzT, \\ \Delta G &= g'' + g' \frac{f'}{f} + z. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Podemos escrever \mathcal{M} em sua forma não divergente, isto é

$$\mathcal{M}(G) = (1 + |\operatorname{grad} G|^2)^{-1/2} \operatorname{div} \operatorname{grad} G + \langle \operatorname{grad} (1 + |\operatorname{grad} G|^2)^{-1/2}, \operatorname{grad} G \rangle$$

e multiplicando os dois lados por $(1 + |\operatorname{grad} G|^2)^{3/2}$ e utilizando a regra da cadeia temos

$$(1 + |\operatorname{grad} G|^2)^{3/2} \mathcal{M}(G) = (1 + |\operatorname{grad} G|^2) \Delta G - \frac{1}{2} \langle \operatorname{grad} G, \operatorname{grad} |\operatorname{grad} G|^2 \rangle,$$

agora, utilizando (4.1) junto com as relações de (4.3) obtemos

$$\begin{aligned} (1 + |\operatorname{grad} G|^2)^{3/2} \mathcal{M}(G) &= (1 + g'^2 + y^2)(g'' + g' \frac{f'}{f} + z) - g'^2 g'' + g' \frac{f'}{f} y^2 - y^2 z \\ &= (1 + y^2)g'' + g' \frac{f'}{f} + z + g'^2 g'' + g'^3 \frac{f'}{f} + g'^2 z \\ &\quad + 2y^2 g' \frac{f'}{f} + y^2 z - g'^2 g'' - y^2 z, \end{aligned}$$

que simplificando, podemos escrever da seguinte forma

$$(1 + |\operatorname{grad} G|^2)^{3/2} \mathcal{M}(G) = g'' + g' \frac{f'}{f} + z + y^2 \left(g'' + 2g' \frac{f'}{f} \right) + g'^2 \left(g' \frac{f'}{f} + z \right). \tag{4.4}$$

Agora definimos a função $g = g_h$ por

$$g_h(r) = h \int_r^\infty \frac{1}{f(s)} \int_{r_0}^s \frac{1}{f(t)} dt ds,$$

onde $h > 0$ é uma constante a ser determinada. Pela hipótese de que $\frac{1}{f} \in \mathcal{L}^1([r_0, \infty))$, g está bem definida. Além do mais, $g(r_0) > 0$ e $\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 0$.

Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo segue que a primeira e a segunda derivada de g são

$$g'(r) = -\frac{h}{f(r)} \int_{r_0}^r \frac{1}{f(s)} ds$$

e

$$g''(r) = \frac{h}{f(r)^2} + h \frac{f'(r)}{f(r)^2} \int_{r_0}^r \frac{1}{f(s)} ds.$$

Assim segue que

$$g''(r) + g'(r) \frac{f'(r)}{f(r)} = -\frac{h}{f(r)^2} \quad (4.5)$$

substituindo (4.5) em (4.4), obtemos:

$$(1 + |\text{grad } G|^2)^{3/2} \mathcal{M}(G) = -\frac{h}{f(r)^2} + z + y^2 \left(g'' + 2g' \frac{f'(r)}{f(r)} \right) + g'^2 \left(g' \frac{f'(r)}{f(r)} + z \right).$$

Seja $m := \max_{C_{r_0}} |z|$, onde C_{r_0} é o círculo geodésico de raio r_0 , de (4.2) segue que

$$z \leq \frac{m}{f(r)^2},$$

o que implica que

$$-\frac{h}{f(r)^2} + z \leq \frac{m-h}{f(r)^2}.$$

Utilizando a convexidade de f temos que

$$g'' + 2g' \frac{f'}{f} \leq 0$$

e portanto

$$(1 + |\text{grad } G|^2)^{3/2} \mathcal{M}(G) \leq \frac{m-h}{f(r)^2} + g'^2 \left(g' \frac{f'(r)}{f(r)} + z \right).$$

Agora utilizando o fato de que a integral é uma função crescente e que f' também é crescente, devido a convexidade de f , segue que para $r \geq r_0 + 1$ obtemos:

$$g'(r) \frac{f'(r)}{f(r)} + z \leq \frac{1}{f(r)^2} \left(m - hf'(r_0) \int_{r_0}^{r_0+1/2} \frac{1}{f(s)} ds \right).$$

Portanto

$$(1 + |\text{grad } G|^2)^{3/2} \mathcal{M}(G) f(r)^2 \leq m - h + g'^2 \left(m - hf'(r_0) \int_{r_0}^{r_0+1/2} \frac{1}{f(s)} ds \right).$$

Logo podemos escolher h_0 grande o suficiente tal que para todo $h \geq h_0$ teremos

$$(1 + |\text{grad } G_h|^2)^{3/2} \mathcal{M}(G_h) f(r)^2 \leq -1.$$

Em particular, G_h é supersolução para \mathcal{M} em $M \setminus D_{r_0+1}(o) \quad \forall h \geq h_0$, onde $D_{r_0+1}(o)$ é o disco geodésico aberto de raio $r_0 + 1$ com centro o .

Agora observamos que se trocarmos g por $-g$ obtemos uma função $G^- = G_h^- : M \setminus \{o\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $G^-(r, \theta) = -g(r) + \varphi(\theta)$ tal que

$$(1 + |\text{grad } G_h^-|^2)^{3/2} \mathcal{M}(G_h^-) = -g'' - g' \frac{f'}{f} + z + y^2 \left(-g'' - 2g' \frac{f'}{f} \right) + g'^2 \left(-g' \frac{f'}{f} + z \right)$$

observando que $-m = -\max_{C_{r_0}} |z| \leq \min_{C_{r_0}} z$ e fazendo contas análogas as que foram feitas para G , obtemos que é possível escolher h_0 suficientemente grande tal que

$$(1 + |\text{grad } G_h^-|^2)^{3/2} \mathcal{M}(G_h^-) f(r)^2 \geq 1 \quad \forall h \geq h_0.$$

Em particular G_h^- é subsolução para \mathcal{M} em $M \setminus D_{r_0+1}(o) \quad \forall h \geq h_0$.

Como G não está definida em toda a variedade, ela não é supersolução para o problema. No entanto podemos obter uma supersolução generalizada.

Seja $h_1 \geq h_0$ tal que $G_{h_1} > 2 \max |\varphi|$ no círculo geodésico de raio $r_0 + 2$, então existe $r_1 \in (r_0 + 2, \infty)$ tal que $l := \min_{C_{r_1}} G_{h_1} > 2 \max |\varphi|$. A partir de agora denotaremos G_{h_1} simplesmente por G , logo podemos definir a seguinte função $w : M \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$w(x) := \begin{cases} \min\{G(x), l\}, & \text{se } x \in M \setminus D_{r_0+2}(o) \\ l, & \text{se } x \in D_{r_0+2}(o). \end{cases}$$

Conforme seção 2.2.3, w é supersolução generalizada para \mathcal{M} em \overline{M} e tal que se $x \in \partial_\infty M$ então $w(x) = \psi(x)$.

Semelhantemente, consideramos $-l < -2 \max |\varphi|$ e definimos a seguinte função $v : M \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$v(x) := \begin{cases} \max\{G^-(x), -l\}, & \text{se } x \in M \setminus D_{r_0+2}(o) \\ -l, & \text{se } x \in D_{r_0+2}(o). \end{cases}$$

que é uma subsolução generalizada para \mathcal{M} em \overline{M} , tal que se $x \in \partial_\infty M$ então $v(x) = \psi(x)$.

Com supersolução e subsolução para o problema, pretendemos aplicar o método da continuidade para encontrar solução para o problema, mas antes veremos que $\forall k \geq r_2$, $w = G^+$ e conseqüentemente $v = G^-$ em $\partial D_k(o)$. De fato:

$$G(r, \theta) - l = g(r) + \varphi - l \leq g(r) + \max |\varphi| - l \leq g(r) - \max |\varphi|$$

fazendo $r \rightarrow \infty$ então $G - l < -\max |\varphi|$, logo existe r_2 tal que $\forall r \geq r_2$, $G - l < 0$, ou seja $G < l$, com isto garantimos que $\min\{G, l\} = G$, e portanto $\forall k \geq r_2$, $w = G$ em $\partial D_k(o)$. Analogamente $v = G^-$.

Considere então a seguinte família de problemas de Dirichlet indexadas por t em $D_k(o)$, $k \geq r_2$ e $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} \mathcal{M}(\tilde{u}) = 0 \text{ em } D_k(o) \\ \tilde{u}|_{\partial D_k(o)} = t\varphi|_{\partial D_k(o)} \end{cases} \quad (4.6)$$

Através do método da continuidade é possível mostrar que para cada k existe u_k solução de (4.6). Para isto considere o conjunto

$$A_k = \{t \in [0, 1]; \exists u_t \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{D_k(o)}) \text{ solução de (4.6)}\}.$$

Queremos mostrar que $A_k = [0, 1]$, e conforme visto na seção 2.2.2, precisamos apenas nos preocupar com o fechamento de A_k , e para isto devemos apenas obter barreiras que tenham limitação uniforme da altura e do gradiente na fronteira de $D_k(o)$.

Construiremos agora as barreiras, dado $k \in \mathbb{N}$, $k \geq r_2$, sejam $w_k, v_k : \overline{D_k(o)} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$w_k(x) := w(x) - g(k) \quad v_k(x) := v(x) + g(k).$$

Então as barreiras, superior $w_{k,t} = tw_k$ e inferior $v_{k,t} = tv_k$ possuem limitação por cima e por baixo para sua altura uniforme em $t \in [0, 1]$. De fato, como

$$-\max |\varphi| \leq \varphi \leq \max |\varphi| \quad \text{então} \quad -t \max |\varphi| \leq t\varphi \leq t \max |\varphi|$$

e em $\partial D_k(o)$, $w_{k,t} = t\varphi$ e $v_{k,t} = t\varphi$, logo

$$-\max |\varphi| \leq -t \max |\varphi| \leq w_{k,t} \leq t \max |\varphi| \leq \max |\varphi|,$$

analogamente para $v_{k,t}$.

Utilizando o fato que $v \leq v_k \leq w$ e $v \leq w_k \leq w$ então

$$|v_k|_0 \leq \max\{|v|_0, |w|_0\} \quad \text{e} \quad |w_k|_0 \leq \max\{|v|_0, |w|_0\},$$

ou seja, $|v_k|_0$ e $|w_k|_0$ são limitadas por uma constante que não depende de k , e também

$$|\text{grad } w_k|_{\partial D_k(o)} = |\text{grad}(g + \varphi)| \leq |\text{grad } g| + |\text{grad } \varphi| \leq C$$

analogamente $|\text{grad } v_k|_{\partial D_k(o)} \leq C$, ou seja os gradientes de v_k e w_k também são limitados por uma constante que não depende de k .

Podemos então aplicar o método da continuidade e encontrar $u_k \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{D_k(o)})$ solução de (4.6), e como v_k e w_k são sub e supersolução, respectivamente, então

$$v_k \leq u_k \leq w_k \quad \text{e se } x \in \partial D_k(o) \text{ temos } v_k(x) = u_k(x) = w_k(x),$$

logo temos a seguinte limitação, $|u_k|_0 \leq \max\{|v_k|_0, |w_k|_0\}$ e pelo Lema 2.2.8 temos a limitação para o gradiente $|\text{grad } u_k|_{\partial D_k(o)} \leq \max\{|\text{grad } v_k|_{\partial D_k(o)}, |\text{grad } w_k|_{\partial D_k(o)}\}$.

Uma constante que limita $|\text{grad } u_k|_0$ pode ser escolhida uniformemente em $D_1(o)$ via Teorema 2.2.10, para isto basta utilizarmos uma limitação de $|u_k|_0$ e $|\text{grad } u_k|_{\partial D_2(o)}$. Por Arzelá-Ascoli, existe subsequência de $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a qual chamamos de $(u_{k_j^1})_{j=1}^\infty$ que converge uniformemente a uma função contínua em $\overline{D_1(o)}$.

Usando as estimativas que existem na fronteira de $D_3(o)$, aplicamos o mesmo procedimento, via Teorema 2.2.10 e encontramos uma subsequência de $(u_{k_j^1})_{j=1}^\infty$ a qual chamamos de $(u_{k_j^2})_{j=1}^\infty$ que converge uniformemente a uma função contínua em $\overline{D_2(o)}$, continuando o processo temos uma sequência $(u_{k_j^m})_{j=1}^\infty$ cada uma subsequência de $(u_{k_j^{m-1}})_{j=1}^\infty$, $m = 3, 4, \dots$ que converge uniformemente a uma função contínua em $\overline{D_m(o)}$ para cada m . Assim

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{u_{k_1^1}} & u_{k_2^1} & u_{k_3^1} & u_{k_4^1} & \dots & & \\ u_{k_1^2} & \mathbf{u_{k_2^2}} & u_{k_3^2} & u_{k_4^2} & \dots & & \\ u_{k_1^3} & u_{k_2^3} & \mathbf{u_{k_3^3}} & u_{k_4^3} & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{array}$$

podemos considerar a sequência diagonal $u_{k_j} = u_{k_j^j}$, $j = 1, 2, \dots$, esta sequência é uma subsequência de cada uma das $(u_{k_j^m})_{j=1}^\infty$ e logo converge uniformemente a uma função contínua em $\overline{D_m(o)}$, para cada m . Podemos então definir uma função contínua $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$u(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_{k_j}(x)$$

e assim se K é qualquer compacto de M segue que $u_{k_j} \rightarrow u$ uniformemente em K , além disso $\mathcal{M}(u) = 0$ em M . Como temos as barreiras em \overline{M} que satisfazem

$$w|_{\partial_\infty M} = \psi = v|_{\partial_\infty M} \quad \text{e} \quad v \leq u_k \leq w,$$

u se estende continuamente a \overline{M} e $u|_{\partial_\infty M} = \psi$.

Precisamos agora mostrar que $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Para isto mostraremos primeiramente que $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(M)$ e utilizando a teoria de regularidade concluiremos que $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Para mostrar que $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(M)$ precisamos ao menos de uma subsequência de (u_k) que converge a u na norma $\mathcal{C}^{2,\alpha}$.

Fixe K compacto de M , podemos supor sem perda de generalidade que $K = \overline{D_{r'}(p)}$ para algum $p \in M$. Seja k tal que $k \geq r'$. Assim $K \subset \overline{D_k(o)}$ e portanto u_k está definida em K . Denotaremos por \tilde{K} o disco geodésico fechado de raio $r'/2$ centrado no mesmo ponto que K , isto é, $\tilde{K} = \overline{D_{r'/2}(p)}$, nestas condições o Teorema 5.0.14 nos dá que existem $\beta_k = \beta_k(n, |u_k|_{1;K}$, coeficientes de \mathcal{M}) e $C_k = C_k(n, |u_k|_{1;K}$, coeficientes de \mathcal{M}) tais que

$$\sup_{x,y \in \tilde{K}, x \neq y} \frac{|Du_k(x) - Du_k(y)|}{|x - y|^{\beta_k}} = [Du_k]_{\beta_k; \tilde{K}} \leq C_k \left(\frac{r'}{2} \right)^{-\beta_k}.$$

Como temos uma limitação uniforme em k para $|u_k|_{1;D_k(o)}$ em M , e assim em particular em K , então β_k e C_k podem ser escolhidos uniformemente para todo $k \geq r'$. Então existem β e C dependendo de n e dos coeficientes de \mathcal{M} tais que (renomeando sempre constantes por C)

$$|u_k|_{1,\beta;\tilde{K}} = |u_k|_{1;\tilde{K}} + [Du_k]_{\beta;\tilde{K}} \leq C.$$

Definimos agora a seguinte família de operadores lineares uniformemente elípticos $L_k : \mathcal{C}^{2,\delta}(\tilde{K}) \rightarrow \mathcal{C}^\delta(\tilde{K})$ onde $\delta := \min\{\alpha, \beta\}$

$$L_k(h) = \operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} h}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} u_k|^2}} \right).$$

Como $u_k \in \mathcal{C}^{1,\delta}(D_k(o))$, os coeficientes de L_k pertencem a $\mathcal{C}^{0,\delta}(D_k(o))$. Além disso, temos que $L_k(u_k) = 0$ e notemos também que a família L_k , de acordo com o que foi feito até agora, tem coeficientes uniformemente limitados na norma $\mathcal{C}^{0,\delta}$.

Utilizando o Teorema 5.0.9, junto com a observação 5.0.8, obtemos que

$$|u_k|_{2,\delta;\hat{K}} \leq C,$$

onde $\hat{K} = \overline{D_{r'/4}(p)}$. Então temos que $u_{k_j}|_{\operatorname{int}(\hat{K})} \rightarrow u|_{\operatorname{int} \hat{K}} \in \mathcal{C}^2(\operatorname{int} \hat{K})$ na norma \mathcal{C}^2 e também que $\mathcal{M}(u) = 0$ em $\operatorname{int} \hat{K}$. Aplicando iteradamente o Teorema 5.0.12 obtemos que $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Acabamos de demonstrar então que se $\psi \in \mathcal{C}^\infty$ então existe $u \in \mathcal{C}^\infty(M) \cap \mathcal{C}^0(\overline{M})$ solução de (1.1).

Logo concluímos aqui o caso $\psi_o \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})$.

- O Caso $\psi_o \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$.

Consideremos sequências $\psi_n^+ \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})$ e $\psi_n^- \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})$, com ψ_n^+ monótona decrescente e ψ_n^- monótona crescente, tais que convergem a ψ_o na norma \mathcal{C}^0 , ou seja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\psi_n^+ - \psi_o|_0 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\psi_n^- - \psi_o|_0 = 0.$$

Consideremos também as funções $u_n^\pm : M \rightarrow \mathbb{R}$, $u_n^\pm \in \mathcal{C}^\infty(M) \cap \mathcal{C}^0(\overline{M})$, soluções do problema

$$\begin{cases} \mathcal{M}(\tilde{u}) = 0 \text{ em } M \\ \tilde{u}|_{\partial_\infty M} = \psi_n^\pm \end{cases}$$

ou seja, $\mathcal{M}(u_n^\pm) = 0$ em M e $u_n^\pm|_{\partial_\infty M} = \psi_n^\pm$, com u_n^+ decrescente e u_n^- crescente. Segue do princípio do máximo que as sequências (u_n^\pm) são uniformemente limitadas na norma \mathcal{C}^0 para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso para conseguirmos aplicar a mesma ideia feita no caso anterior, temos que obter uma estimativa interior para o gradiente das (u_n^\pm) . Iremos fazer somente para a (u_n^+) , pois é análogo para (u_n^-) .

Fixando D_1 e D_2 discos geodésicos abertos centrados em o de raios r_1 e r_2 respectivamente, aplicamos o Teorema 2.2.10 em D_2 e obtemos uma constante C que não depende de n tal que $|\text{grad } u_n^+|_0 \leq C$ e com isso temos uma estimativa para a norma \mathcal{C}^1 da sequência (u_n^+) e então fazendo a mesma construção feita no caso anterior segue que (u_n^+) possui uma subsequência convergindo uniformemente na norma \mathcal{C}^2 a uma solução $u_{D_1}^+ \in \mathcal{C}^\infty(D_1)$ de $\mathcal{M}(\tilde{u}) = 0$ em D_1 e além disso temos que $u_{D_1}^+ \leq u_n^+|_{D_1}$ para todo n .

Considerando agora um disco geodésico D_3 , aplicamos novamente o teorema 2.2.10 em D_3 e obtemos uma estimativa para a norma \mathcal{C}^1 da sequência (u_n^+) e assim obtemos uma subsequência convergindo uniformemente na norma \mathcal{C}^2 a uma solução $u_{D_2}^+ \in \mathcal{C}^\infty(D_2)$, tal que $u_{D_2}^+ \leq u_n^+|_{D_2}$, observe que $u_{D_2}^+|_{D_1} = u_{D_1}^+$.

Considerando o disco D_k aplicamos o teorema 2.2.10 em D_{k+1} e obtemos uma estimativa para a norma \mathcal{C}^1 da sequência (u_n^+) e logo obtemos uma subsequência convergindo uniformemente na norma \mathcal{C}^2 a uma solução $u_{D_k}^+ \in \mathcal{C}^\infty(D_k)$, tal que $u_{D_k}^+ \leq u_n^+|_{D_k}$ e $u_{D_k}^+|_{D_{k-1}} = u_{D_{k-1}}^+$. Então pelo método diagonal obtemos uma função $u^+ : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{M}(u^+) = 0$ em M e $u^+ \leq u_n^+$ para todo n .

Analogamente fazendo todo o processo para a sequência (u_n^-) , obtemos uma função $u^- : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{M}(u^-) = 0$ em M e $u^- \leq u_n^-$.

Afirmção: $u^- = u^+$ em M e $u^\pm|_{\partial_\infty M} = \psi$.

De fato, como vale

$$u_n^- \leq u^- \leq u^+ \leq u_n^+ \quad \forall n$$

e para $x \in \partial_\infty M$ temos

$$u_n^+(x) = \psi_n^+(x) \rightarrow \psi_o(x), \quad u_n^-(x) = \psi_n^-(x) \rightarrow \psi_o(x)$$

segue que

$$u^+|_{\partial_\infty M} = \psi, \quad u^-|_{\partial_\infty M} = \psi$$

utilizando o princípio do máximo assintótico concluimos que

$$u^+ = u^- \quad \text{em } M.$$

Logo definindo $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ por $u := u^+$ segue que $u \in C^\infty(M) \cap C^0(\overline{M})$, $\mathcal{M}(u) = 0$ em M e $u|_{\partial_\infty M} = \psi$, ou seja u é solução de (1.1).

- Unicidade.

Antes de mostrarmos a unicidade, enunciamos um resultado clássico que será utilizado, este resultado é o chamado Princípio da Tangência.

Enunciamos o Princípio da Tangência em \mathbb{R}^3 , mas ele é válido em qualquer espaço ambiente, com qualquer dimensão.

Teorema 4.0.3. (Princípio da Tangência:) *Sejam S_1 e S_2 superfícies de curvatura média constante do \mathbb{R}^3 e seja $p \in S_1 \cap S_2$ um ponto de tangência entre S_1 e S_2 ($T_p S_1 = T_p S_2$). Sejam N_1 e N_2 campos unitários e normais a S_1 e S_2 e tais que $N_1(p) = N_2(p)$. Suponha que S_1 e S_2 tenham curvaturas médias H_1 e H_2 respectivamente, com relação aos campos N_1 e N_2 . Suponha que S_2 esteja acima de S_1 em uma vizinhança de p com relação ao vetor normal $N_1(p)$. Então $H_2 \geq H_1$ e vale a igualdade se, e somente se, S_1 e S_2 coincidem em uma vizinhança de p . Se S_1 e S_2 são completas (ou completas até o bordo e com mesmo bordo), conexas e $H_1 = H_2$ então $S_1 = S_2$.*

Demonstração da unicidade.

Seja S uma superfície mínima propriamente imersa em $M \times \mathbb{R}$ e suponha que $\partial_\infty S = \text{graf}(\psi)$. A mostrar: $S = \text{graf}(u)$.

Suponha então que $S \neq \text{graf}(u)$, logo existe $(p, s) \in S$ tal que $s \neq u(p)$, suponha que $s > u(p)$. Considerando então qualquer levantamento positivo do gráfico de u que denotamos por $L(\text{graf } u)$ e como $\partial_\infty S = \text{graf}(\psi)$ e u satisfaz o problema de Dirichlet assintótico segue que $\partial_\infty L(\text{graf}(u)) \cap S = \emptyset$, ou seja, em uma vizinhança do infinito $L(\text{graf}(u)) \neq S$, mas consideramos o levantamento até que tal levantamento possua um ponto de tangência com S , por exemplo um ponto q , logo em uma vizinhança de q tem-se $L(\text{graf}(u)) = S$, e como ambas são superfícies mínimas e conexas então deve ocorrer que $L(\text{graf}(u)) = S$ pelo Princípio da Tangência, mas

isto não acontece em uma vizinhança do infinito, gerando então um absurdo. Logo devemos ter

$$S = \text{graf}(u).$$

O mesmo absurdo acontece se supormos $s < u(p)$. ■

Com isto acabamos a prova do Teorema 1.0.1. Vejamos agora o seu corolário.

Corolário 1.0.2. *Seja M superfície de Cartan-Hadamard, rotacionalmente simétrica em um ponto $o \in M$ tal que a curvatura seccional satisfaz a condição*

$$K(r) \leq -\frac{1 + \epsilon}{r^2 \log r}, \quad r \geq r_0, \quad (1.2)$$

para algum $r_0 > 0$, $\epsilon > 0$, onde r é a função distância ao ponto o . Então, dado $\psi \in \mathcal{C}^0(\partial_\infty M)$ existe $u \in \mathcal{C}^\infty(M) \cap \mathcal{C}^0(\overline{M})$ solução de (1.1), e o gráfico de u é a única superfície mínima propriamente imersa em $M \times \mathbb{R}$ tendo $\text{graf}(\psi)$ como bordo assintótico.

Antes de demonstrar o corolário, vejamos que o resultado não vale para $\epsilon = 0$. De fato: para $\epsilon = 0$ temos

$$\frac{f''}{f} = \frac{1}{r^2 \log r}$$

resolvendo esta EDO temos que $f(r) = r \log r$ e assim $\frac{1}{f(r)} = \frac{1}{r \log r}$, portanto integrando de r_0 até s temos

$$\int_{r_0}^s \frac{dr}{f(r)} = \int_{r_0}^s \frac{1}{r \log r} = \log(\log r) \Big|_{r_0}^s = \log(\log s) - \log(\log r_0),$$

daí se $s \rightarrow \infty$ segue que $\log(\log s) \rightarrow \infty$ e com isto temos que

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{f(r)} = \infty,$$

implicando assim em Liouville por [RS], isto é, todo gráfico mínimo globalmente limitado é de função constante.

Para a demonstração do corolário vamos precisar do seguinte lema devido a Milnor [M].

Lema 4.0.4. *Sejam h_1 e h_2 funções positivas e estritamente crescentes em $[a, \infty)$.*

Se $h_1(a) < h_2(a)$, $h_1'(a) < h_2'(a)$ e $\frac{h_1''}{h_1} \leq \frac{h_2''}{h_2}$ em $[a, \infty)$. Então

$$h_1 < h_2 \quad \text{em} \quad [a, \infty).$$

Demonstração do Corolário 1.0.2:

Vamos mostrar que se vale (1.2) então $\int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{f(r)} < \infty$.

Primeiramente vejamos que para qualquer α , $1 < \alpha < 1 + \epsilon$ existe $r_0 > a$ tal que $\forall r \geq r_0$ tem-se $f(r) > r(\log r)^\alpha$.

Defina $g(r) = Cr(\log r)^\alpha$, onde C é uma constante a ser determinada.

Assim calculando g' e g'' e fazendo $\frac{g''}{g}$ temos

$$\frac{g''}{g} = \frac{\alpha}{r^2 \log r} \left[1 + \frac{\alpha - 1}{\log r} \right],$$

como $\alpha < 1 + \epsilon$ existe $r_0 > a$ tal que $\forall r \geq r_0$ tem-se

$$\frac{g''}{g} \leq \frac{1 + \epsilon}{r^2 \log r} \leq \frac{f''}{f}.$$

Seja C constante suficientemente pequena tal que $g(a) < f(a)$ e $g'(a) < f'(a)$, então pelo Lema 4.0.4 segue que

$$g(r) < f(r) \quad \text{ou seja} \quad Cr(\log r)^\alpha < f(r) \Rightarrow \frac{1}{f(r)} < \frac{1}{Cr(\log r)^\alpha}$$

integrando de r_0 até s temos

$$\int_{r_0}^s \frac{dr}{f(r)} < \int_{r_0}^s \frac{1}{Cr(\log r)^\alpha} = \frac{(\log s)^\alpha}{C(1 - \alpha)} \Big|_{r_0}^s$$

fazendo $s \rightarrow \infty$ segue que

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{f(r)} < -\frac{\log r_0}{C(1 - \alpha)(\log r_0)^\alpha}.$$

Logo temos que $\int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{f(r)} < \infty$.

Demonstramos então que se temos $K(r) \leq -\frac{1 + \epsilon}{r^2 \log r}$ $r \geq r_0$ então temos $\int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{f(r)} < \infty$ e assim pode-se fazer toda a construção que foi feita no Teorema 1.0.1 para mostrar que o problema de Dirichlet assintótico é unicamente solúvel para uma superfície de Cartan-Hadamard rotacionalmente simétrica. ■

Capítulo 5

Apêndice

Aqui enunciamos os principais resultados de [GT] utilizados no texto, em cada resultado indicamos a página em que tal resultado se encontra.

Teorema 5.0.5 (p.32). *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. L um operador elíptico com $c = 0$. Se $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ satisfaz $Lu \geq 0$, então*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$$

Um mesmo resultado é válido para o ínfimo, basta supor $Lu \leq 0$.

Corolário 5.0.6 (p.33). *Sejam $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$. Se $Lu \geq Lv$ em Ω , $u \leq v$ em $\partial\Omega$, então $u \leq v$ em Ω .*

Teorema 5.0.7 (p.36). *Seja L elíptico, $Lu \geq f (= f)$ em um domínio limitado Ω , $c \leq 0$, e $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$. Então*

$$\sup_{\Omega} u(|u|) \leq \sup_{\partial\Omega} u^+(|u|) + C \sup_{\Omega} \frac{|f^-|}{\lambda} \left(\frac{|f|}{\lambda} \right),$$

onde C é uma constante que depende somente do diâmetro de Ω e de $\beta = \sup \frac{|b|}{\lambda}$.

A seguinte observação pode ser encontrada como (4.17)" na página 61 de [GT].

Observação 5.0.8. *Se $\Omega' \subset\subset \Omega$ e $\sigma = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ então*

$$\min(1, \sigma^{k+\alpha}) |u|_{k,\alpha;\Omega'} \leq |u|_{k,\alpha;\Omega}^*$$

Teorema 5.0.9 (p.90). *Seja Ω um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n , e seja $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega)$ limitada em Ω e solução da seguinte equação*

$$Lu = a^{ij} D_{ij} u + b^i D_i u + cu = f,$$

onde $f \in C^\alpha$ e existem constantes positivas λ, Λ tais que os coeficientes satisfazem

$$a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$$

e

$$|a^{ij}|_{0,\alpha;\Omega}^{(0)}, |b^i|_{0,\alpha;\Omega}^{(1)}, |c|_{0,\alpha;\Omega}^{(2)} \leq \Lambda.$$

Então

$$|u|_{2,\alpha;\Omega}^* \leq C(|u|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega}^{(2)})$$

onde $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda)$.

Teorema 5.0.10 (p.98). *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio $C^{2,\alpha}$ e seja $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma solução de $Lu = f$, onde L é estritamente elíptico, $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ e os coeficientes de L satisfazem, para constantes positivas λ e δ*

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad e \quad |a_{ij}|_{0,\alpha}, |b_i|_{0,\alpha}, |c|_{0,\alpha} \leq \delta.$$

Seja $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e suponha que $u = \varphi$ em $\partial\Omega$. Então existe uma constante $C = C(n, \alpha, \lambda, \delta, \Omega)$ tal que

$$|u|_{2,\alpha;\Omega} \leq C(|u|_{0;\Omega} + |\varphi|_{2,\alpha;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega})$$

O seguinte teorema prova a sobrejetividade de um operador estritamente elíptico com coeficientes em $C^\alpha(\overline{\Omega})$ e $c \leq 0$.

Teorema 5.0.11 (p.107). *Seja L um operador estritamente elíptico em um domínio limitado Ω , com coeficientes em $C^\alpha(\overline{\Omega})$ e $c \leq 0$. Seja $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$. Suponha que Ω é um domínio $C^{2,\alpha}$ e que $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então o problema de Dirichlet*

$$Lu = f \quad \text{em } \Omega, \quad u = \varphi \quad \text{em } \partial\Omega,$$

tem uma única solução e esta pertence a $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Os próximos dois teoremas nos dão a regularidade de uma solução.

Teorema 5.0.12 (p.109). *Seja $u \in C^2(\Omega)$ solução da equação $Lu = f$ em um conjunto aberto Ω . Suponha que f e os coeficientes do operador elíptico L pertençam a $C^{k,\alpha}(\Omega)$. Então $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$. Se f e os coeficientes de L estão em $C^\infty(\Omega)$, então $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Teorema 5.0.13 (p.111). *Seja Ω um domínio $C^{k+2,\alpha}$ ($k \geq 0$) e seja $\varphi \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Suponha que u é uma função $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfazendo $L(u) = f$ em Ω , $u = \varphi$ em $\partial\Omega$, onde f e os coeficientes do operador estritamente elíptico linear L pertencem a $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então $u \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$.*

Os próximos dois teoremas são resultados para operadores quase-lineares.

Teorema 5.0.14 (p.328). *Seja $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que $Qu = 0$ em Ω , onde Q é elíptico em Ω e seus coeficientes $a^{ij} \in \mathcal{C}^1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $b \in \mathcal{C}^0(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Então para qualquer $\Omega' \subset\subset \Omega$ temos a seguinte estimativa*

$$[Du]_{\alpha;\Omega'} \leq Cd^{-\alpha}$$

onde $C = C(n, K, \mu_K/\lambda_K, \text{diam } \Omega)$, $K = |u|_{1;\Omega'}$, $d = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ e $\alpha = \alpha(n, K, \mu_K/\lambda_K)$.

Teorema 5.0.15 (p.331). *Seja $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ tal que $Qu = 0$ em Ω , onde Q é elíptico em $\overline{\Omega}$ e os seus coeficientes $a^{ij} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $b \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Então se $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$, $\varphi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ com $u = \varphi$ em $\partial\Omega$, temos a seguinte estimativa*

$$[Du]_{\alpha;\Omega} \leq C$$

onde $C = C(n, K, \mu_K/\lambda_K, \Omega, \Phi)$, $K = |u|_{1;\Omega}$, $\Phi = |\varphi|_{2;\Omega}$, $\alpha = \alpha(n, K, \mu_K/\lambda_K, \Omega) > 0$.

Referências Bibliográficas

- [Anc] A. Ancona.: “*Convexity at infinity and Brownian motion on manifolds with unbounded negative curvature*”. Revista Matemática Iberoamericana. **10** (1):189-220, 1994.
- [And] M. T. Anderson.: “*The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature*”, J. Differ. Geom., **18** (4):701-721, 1983.
- [B] A. Borbély.: “*The nonsolvability of the Dirichlet problem on negatively curved manifolds*”. Differential Geometry and its Applications **8**: 217-237, 1998.
- [C1] H. I. Choi.: “*Asymptotic Dirichlet problems for harmonic functions on Riemannian manifolds*”. Trans. Am. Math. Soc., **281** (2): 691-716, 1984.
- [C2] H. I. Choi.: “*Characterizations of simply connected rotationally symmetric manifolds*”. Transactions of the American Mathematical Society, 275 (2), 1983.
- [dC1] do Carmo, Manfredo Perdigão.: “*Geometria Riemmanina*” 5ed. IMPA (2011).
- [dC2] do Carmo, Manfredo Perdigão.: “*Geometria Diferencial de curvas e superfícies*”, SBM, 5ed. (2012).
- [DR] Dajczer, M. Ripoll, J.: “*An extension of a theorem of Serrin to graphs in warped products*”, Journal of Geometric Analysis **15**(2)(2005), 193-205.
- [EO] P.Eberlein and B.O’Neill.: “*Visibility Manifolds*”, Pacific Journal of Mathematics Vol.46, N°1: 45-109, (1973).
- [GR] J. A. Gálvez, H. Rosenberg.: “*Minimal surfaces and harmonic diffeomorphisms from the complex plane onto certain Hadamard surfaces*”. American Journal of Mathematics **132** (5): 1249-1273, 2010.

- [GT] Gilbarg, D., Trudinger, N.: “*Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*”, Springer-Verlag (1998).
- [GW] R.Greene and H.Wu.: “*Function theory on manifolds which possess a pole*”, Lectures notes in math, vol. 699, Springer-Verlag, Berlin and New York, (1979).
- [H] I. Holopainen.: “*Asymptotic Dirichlet problem for the p -Laplacian on Cartan-Hadamard manifolds*”. Proc. Amer. Math. Soc. **130** (11): 3393-3400 (electronic), 2002.
- [HV] I. Holopainen and A. Vähäkangas.: “*Asymptotic Dirichlet problem on negatively curved spaces*”. Proceedings of the international conference on Geometric Function Theory, Special Functions and Applications (ICGFT) Editors: R.W Barnard and S. Ponnusamy. J. Analysis **15**: 63-110, 2007.
- [JS] H. Jenkins, J. Serrin.: “*The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimension*”. J. Reine Angew. Math **229** (1968), 170-187.
- [K] Kloeckner, B.: “*Differentiable compactifications of symmetric spaces*”. UMPA, ÉNS Lyon & Institut Fourier, Grenoble. October 10, 2007.
- [M] Milnor, J.: “*On deciding whether a surface is parabolic or hyperbolic*”. Am. Math. Mon. **84**, 43-46 (1977).
- [MR] Meeks, W. H., Rosenberg, H. “*The theory of minimal surfaces in $M \times \mathbb{R}$* ”. Comment. Math. Helv **80** (2005).
- [MRR] Mazet, L., Rodríguez, M.M., Rosenberg, H.: “*The Dirichlet problem for the minimal surface equation, with possible infinite boundary data, over domains in a Riemannian surface*”. London Mathematical Society, 2010.
- [N] Neel, R.W.: “*Brownian motion and the Dirichlet problem at infinity on two-dimensional Cartan-Hadamard manifolds*”.arXiv: 0912.0330v1 (2009).
- [R] Ripoll, J.: “*O Problema de Dirichlet para equação das superfícies de curvatura média constante*”, preprint.
- [RS] Rigolli, M., A. Setti.: “*Liouville type theorems for φ -subharmonic functions*”. Rev. Mat. Iberoam **17**: 471-520, 2001.

- [RT1] J. Ripoll, M. Telichevesky.: “*Complete minimal graphs with prescribed asymptotic boundary on rotationally symmetric Hadamard surfaces*”. *Geometriae Dedicata*, 2012 (online, DOI:10.1007/s10711-012-9706-4).
- [RT2] J. Ripoll, M. Telichevesky.: “*Regularity at infinity of Hadamard manifolds with respect to some elliptic operators and applications to asymptotic Dirichlet problems*”. To appear in the *Transaction of the AMS* (2013).
- [S] Spruck, J. “*Interior gradient estimates and existence theorems for constant mean curvature graphs in $M^n \times \mathbb{R}$* ”. *Pure and Applied Mathematics Quarterly* **3** (3) (Special Issue: In honor of Leon Simon, part 1 of 2): 785-800, 2007.
- [SY] Schoen, R. and Yau, S-T.: “*Lectures on differential geometry*”. Conference proceedings and Lecture notes in Geometry and Topology, Vol I, International Press (1994).
- [T] Telichevesky, M. “*Regularidade no infinito de variedades de Hadamard e alguns problemas de Dirichlet assintóticos*”. Tese de doutorado, Instituto de Matemática UFRGS, 2012.