

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

ABORDAGEM ANALÍTICA PARA VIBRAÇÕES
TRANSVERSAIS DE VIGAS MULTI-SEGMENTADAS COM
SEÇÃO TRANSVERSAL CONTÍNUA

por

Nelson Jacomini

Dissertação para a obtenção do Grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Porto Alegre
Dezembro de 2002

**ABORDAGEM ANALÍTICA PARA VIBRAÇÕES
TRANSVERSAIS DE VIGAS MULTI-SEGMENTADAS COM
SEÇÃO TRANSVERSAL CONTÍNUA**

por

Nelson Jacomini
Especialista em Matemática

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, PPGMAp, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Área de Concentração: Vibrações, Controle e Sinais

Orientador: Prof. Dr. Julio Claeysen

Aprovada por:

Prof^ª. Dra. Rosemaira Dalcin Copetti (UFSM)

Prof. Dr. Germán Ramón Canahualpa Suazo (URI-FW)

Prof^ª. Dra. Teresa Tsukazan de Ruiz (PPGMAp-UFRGS)

Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Coordenador do PPGMAp

Porto Alegre, Dezembro de 2002

RESUMO

Neste trabalho é proposta uma abordagem analítica para o cálculo modal de diversas configurações de vigas de Euler-Bernoulli com propriedades da seção transversal contínuas sujeitas a condições de contorno clássicas e não clássicas. A metodologia proposta está baseada em condições de normalização para as soluções da equação modal, originando uma fórmula modal associada com propriedades físicas e matemáticas da viga. Para o caso de vigas monossegmentadas não é requerido o uso do computador no cálculo dos modos. As formas modais dos diversos tipos de vigas consideradas podem ser expressas em termos das funções de Bessel, funções triangulares e funções hiperbólicas. Para fins de ilustração, é apresentado um caso de rigidez flexural e massa linear do tipo polinomial de quarta ordem.

ABSTRACT

TITLE: "ANALYTICAL APPROACH FOR TRANSVERSE VIBRATIONS OF MULTISTEP BEAMS WITH CONTINUOUS CROSS SECTION"

In this work, it is proposed an analytical approach for the modal determination of various configurations of Euler-Bernoulli beams with continuous cross-section properties constrained with classical and non-classical boundary conditions. The proposed approach is based on normal conditions for the solutions of the modal equation, yielding a modal formula associated with mathematical and physical properties of the beam. For the mono-segmented case it is not required the use of computer for the modal determination. The modes of the various types of beam considered can be expressed in terms of Bessel, triangular and hyperbolic functions. For illustration, it is presented a case of fourth-order polynomial-type flexural stiffness and linear mass.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	ABORDAGEM ANALÍTICA PARA O CÁLCULO MODAL EM VIGAS MONOSSEGMENTADAS	3
2.1	Equação de Euler-Bernoulli	3
2.2	Estudo da Equação Modal	7
3	CÁLCULO ANALÍTICO DOS MODOS DE VIGAS CLÁSSICAS	12
3.1	Condições de Contorno Clássicas	12
3.2	Metodologia de Cálculo	15
3.3	Vigas Clássicas com Seção Transversal Constante	19
3.4	Vigas Clássicas com Seção Transversal Contínua	22
4	CÁLCULO MODAL PARA VIGAS NÃO UNIFORMES	26
4.1	Viga Fixa-Fixa	28
4.2	Viga Fixa-Apoiada	30
4.3	Viga Fixa-Deslizante	32
4.4	Viga Fixa-Livre	34
4.5	Viga Apoiada-Apoiada	36
4.6	Viga Apoiada-Deslizante	38

4.7	Viga Apoiada-Livre	40
4.8	Viga Deslizante-Deslizante	42
4.9	Viga Deslizante-Livre	44
4.10	Viga Livre-Livre	46
4.11	Comentários sobre os Resultados	48
5	CÁLCULO ANALÍTICO DOS MODOS DE VIGAS NÃO CLÁS- SICAS	49
5.1	Condições de Contorno Não Clássicas	49
5.2	Metodologia de Cálculo	54
5.3	Vigas Não Clássicas com Seção Transversal Contínua	58
6	CÁLCULO ANALÍTICO DOS MODOS DE VIGAS BISSEG- MENTADAS	59
6.1	Configurações de Vigas com Dispositivos Intermediários	59
6.2	Equação Modal e Condições de Continuidade	62
6.3	Metodologia de Cálculo Modal	64
7	CONCLUSÕES	67

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1	<i>Vibrações transversais $u(x, t)$ de uma viga com uma carga $p(x, t)$ arbitrária ao longo do seu eixo</i>	3
Figura 2.2	<i>Elemento de uma viga de Euler-Bernoulli</i>	4
Figura 3.1	<i>Viga fixa-livre</i>	15
Figura 4.1	<i>Viga do tipo fixa-fixa</i>	28
Figura 4.2	<i>Gráfico dos primeiros cinco modos de uma viga fixa-fixa</i>	29
Figura 4.3	<i>Viga do tipo fixa-apoiada</i>	30
Figura 4.4	<i>Gráfico dos primeiros cinco modos de uma viga fixa-apoiada</i>	31
Figura 4.5	<i>Viga do tipo fixa-deslizante</i>	32
Figura 4.6	<i>Gráfico dos primeiros cinco modos de uma viga fixa-deslizante</i>	33
Figura 4.7	<i>Viga do tipo fixa-livre</i>	34
Figura 4.8	<i>Gráfico dos primeiros cinco modos de uma viga fixa-livre</i>	35
Figura 4.9	<i>Viga do tipo apoiada-apoiada</i>	36
Figura 4.10	<i>Gráfico dos primeiros cinco modos de uma viga apoiada-apoiada</i>	37
Figura 4.11	<i>Viga do tipo apoiada-deslizante</i>	38
Figura 4.12	<i>Gráfico dos primeiros cinco modos de uma viga apoiada-deslizante</i>	39
Figura 4.13	<i>Viga do tipo apoiada-livre</i>	40
Figura 4.14	<i>Gráfico dos primeiros cinco modos de uma viga apoiada-livre</i>	41
Figura 4.15	<i>Viga do tipo deslizante-deslizante</i>	42

Figura 4.16	<i>Gráfico dos primeiros cinco modos de uma viga deslizante-deslizante</i>	43
Figura 4.17	<i>Viga do tipo deslizante-livre</i>	44
Figura 4.18	<i>Gráfico dos primeiros cinco modos de uma viga deslizante-livre</i>	45
Figura 4.19	<i>Viga do tipo livre-livre</i>	46
Figura 4.20	<i>Gráfico dos primeiros cinco modos de uma viga livre-livre</i>	47
Figura 5.1	<i>Viga de tipo mola lateral-mola torsional</i>	54
Figura 6.1	<i>Esquema de segmentação do modo $X(x)$</i>	62
Figura 6.2	<i>Viga do tipo $L - M_c - L$</i>	64

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 3.1	<i>Condições de Contorno Clássicas</i>	13
Tabela 3.2	<i>Siglas para as Condições de Contorno Clássicas</i>	14
Tabela 3.3	<i>Condições de Contorno para a Equação Modal para uma Viga com Condições de Contorno Clássicas</i>	14
Tabela 3.4	<i>Modos e equações características para diversas configurações clássicas de vigas (não-uniformes).</i>	18
Tabela 4.1	<i>Valores dos parâmetros</i>	27
Tabela 4.2	<i>Distribuição de cores para os modos</i>	27
Tabela 4.3	<i>Primeiros cinco valores do parâmetro c e das frequências características de uma viga fixa-fixa</i>	28
Tabela 4.4	<i>Primeiros cinco valores do parâmetro c e das frequências características de uma viga fixa-apoiada</i>	30
Tabela 4.5	<i>Primeiros cinco valores do parâmetro c e das frequências características de uma viga fixa-deslizante</i>	32
Tabela 4.6	<i>Primeiros cinco valores do parâmetro c e das frequências características de uma viga fixa-livre</i>	34
Tabela 4.7	<i>Primeiros cinco valores do parâmetro c e das frequências características de uma viga apoiada-apoiada</i>	36
Tabela 4.8	<i>Primeiros cinco valores do parâmetro c e das frequências características de uma viga apoiada-deslizante</i>	38

Tabela 4.9	<i>Primeiros cinco valores do parâmetro c e das frequências características de uma viga apoiada-livre</i>	40
Tabela 4.10	<i>Primeiros cinco valores do parâmetro c e das frequências características de uma viga deslizante-deslizante</i>	42
Tabela 4.11	<i>Primeiros cinco valores do parâmetro c e das frequências características de uma viga deslizante-livre</i>	44
Tabela 4.12	<i>Primeiros cinco valores do parâmetro c e das frequências características de uma viga livre-livre</i>	46
Tabela 5.1	<i>Siglas para as Condições de Contorno não Clássicas</i>	49
Tabela 5.2	<i>Condições de Contorno Não Clássicas</i>	50
Tabela 5.3	<i>Condições de Contorno Não Clássicas</i>	51
Tabela 5.4	<i>Condições de Contorno para a Equação Modal para uma Viga com Condições de Contorno não Clássicas</i>	53
Tabela 5.5	<i>Modos e equações características para diversas configurações não clássicas de vigas (não-uniformes).</i>	57
Tabela 6.1	<i>Dispositivos Mecânicos Intermediários</i>	60
Tabela 6.2	<i>Condições de Continuidade para os diversos Dispositivos Intermediários</i>	61
Tabela 6.3	<i>Condições de Continuidade para Vigas com um Dispositivo Intermediário Clássico ou Não Clássico</i>	63

1 INTRODUÇÃO

As vigas não-uniformes são amplamente utilizadas para conseguir arranjos ótimos da tensão e peso de estruturas, partes estruturais ou partes de maquinárias, e, às vezes para satisfazer requerimentos arquitetônicos e funcionais. O problema das vibrações livres de vigas não-uniformes tem sido o tema de diversas pesquisas devido à sua relevância na engenharia estrutural, mecânica e aeronáutica. Muitos tipos de estruturas e partes estruturais podem ser simplificados como vigas flexuais ou vigas de cisalhamento para uma análise das vibrações livres. Korçingskee, 1953, simplificou os prédios como se fossem vigas de cisalhamento do tipo fixa-livre na análise das vibrações livres e encontrou soluções fechadas para esse problema. Wang, 1958, sugeriu que os prédios poderiam ser simplificados como vigas de cisalhamento monossegmentadas com seção transversal continuamente variável; ele supôs que a massa de uma viga de cisalhamento é proporcional a sua rigidez e deduziu as soluções analíticas. Porém, esta suposição não é razoável para a maior parte dos prédios de muitos andares. Isto é devido ao fato que a massa dos andares é uma parte significativa da massa total de um prédio, e a variação da massa nos diferentes andares não é significativa. Assim, a distribuição da massa ao longo do altura do prédio não é necessariamente proporcional à distribuição da rigidez. Isto é confirmado mediante uma série de testes em prédios de vários tipos nos quais a massa e a rigidez dos prédios tem sido medidas e relatadas, [Jeary, 1997]. Para obter as soluções fechadas, Wang, 1963, propôs que os prédios poderiam ser tratados como vigas de cisalhamento especiais com massa uniforme mas rigidez variável na análise das vibrações livres para tais prédios. Chen, 1963, estudou a vibração de vigas uniformes com uma massa concentrada utilizando a transformada de Laplace. A vibração livre de uma viga fixa-livre carregada com uma massa uniformemente distribuída foi pesquisada por Chang et al., 1996. Foi deduzida uma equação de frequência a partir de um determinante 4×4 , e foram calculadas então as frequências

naturais. Lau, 1984, Lee & Kee, 1990, Auciello & Nole, 1998, encontraram soluções analíticas para a vibração livre de formas particulares de vigas não-uniformes.

Os dados de campo e resultados experimentais (Li et al., 1994; Li et al., 1998; Jeary, 1997) tem mostrado que a deformação flexural é dominante na deformação total de prédios altos com paredes de atrito nas suas vibrações horizontais. Li et al., 1994 e 1996, encontraram soluções exatas para determinar as frequências naturais e modos de prédios altos e estruturas elevadas que foram tratadas como vários tipos de vigas flexurais do tipo fixa-livre mono e multi-segmentadas ou vigas flexurais do tipo mola-livre com seção transversal continuamente variável. A distribuição de massa por unidade de comprimento das vigas consideradas em Li et al., 1994 e 1996, em geral, não é proporcional à distribuição da rigidez flexural.

Uma revisão da literatura técnica sobre o tema indica que, em geral, diversos autores tem direcionado seus esforços às funções especiais para descrever as distribuições de massa e de rigidez de vigas não-uniformes para deduzir soluções analíticas. Por este motivo, é necessária uma metodologia geral para a análise de vibrações de vigas não uniformes mono ou multi-segmentadas com condições de contorno clássicas ou não clássicas.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma abordagem geral, baseada em uma base não-clássica de funções, para determinar algebricamente as frequências e modos de vigas monossegmentadas. No caso das vigas bissegmentadas, este trabalho limitou-se a ilustrar a aplicação desta abordagem para uma configuração específica de viga. As vantagens mais notáveis são a generalidade do método, o baixo custo computacional e a relação direta com as propriedades físicas do problema.

2 ABORDAGEM ANALÍTICA PARA O CÁLCULO MODAL EM VIGAS MONOSSEGMENTADAS

Neste trabalho, consideramos vigas com distribuições contínuas de massa e rigidez, governadas pela equação de Euler-Bernoulli.

2.1 Equação de Euler-Bernoulli

Considere-se a viga reta da figura 2.1 com deslocamentos transversais $u(x, t)$ e sujeita a uma carga $p(x, t)$ arbitrária ao longo do seu eixo longitudinal (eixo x).

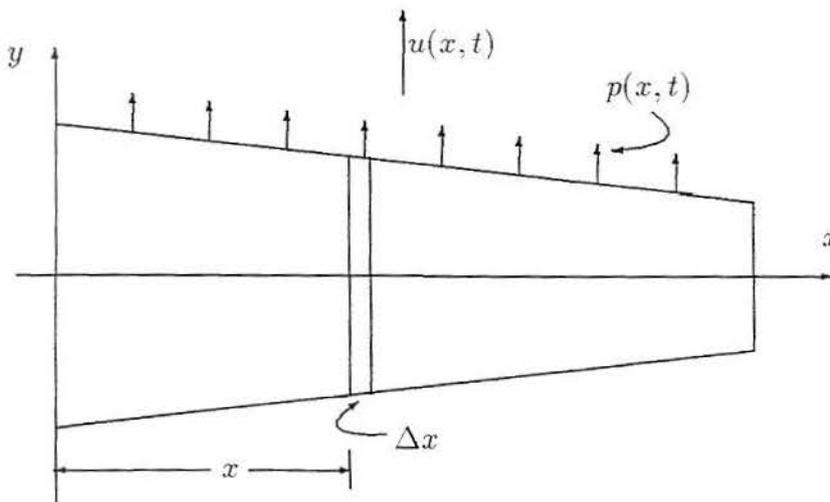


Figura 2.1 *Vibrações transversais $u(x, t)$ de uma viga com uma carga $p(x, t)$ arbitrária ao longo do seu eixo*

As hipóteses simplificativas de Euler-Bernoulli no elemento da viga são enumeradas a seguir

- a existência de uma linha neutra (eixo x), onde a viga não sofre tração nem compressão;

- as seções planas e perpendiculares à linha neutra permanecem planas e perpendiculares após a deformação, isto é, as deformações devidas ao cisalhamento são desprezadas;
- o material é elástico;
- as tensões σ_y e σ_z são desprezíveis comparadas à tensão axial σ_x ;
- o plano xy é um plano principal;
- a inércia rotacional da viga é desprezada.

Considere agora o elemento da viga como é mostrado na figura 2.2.

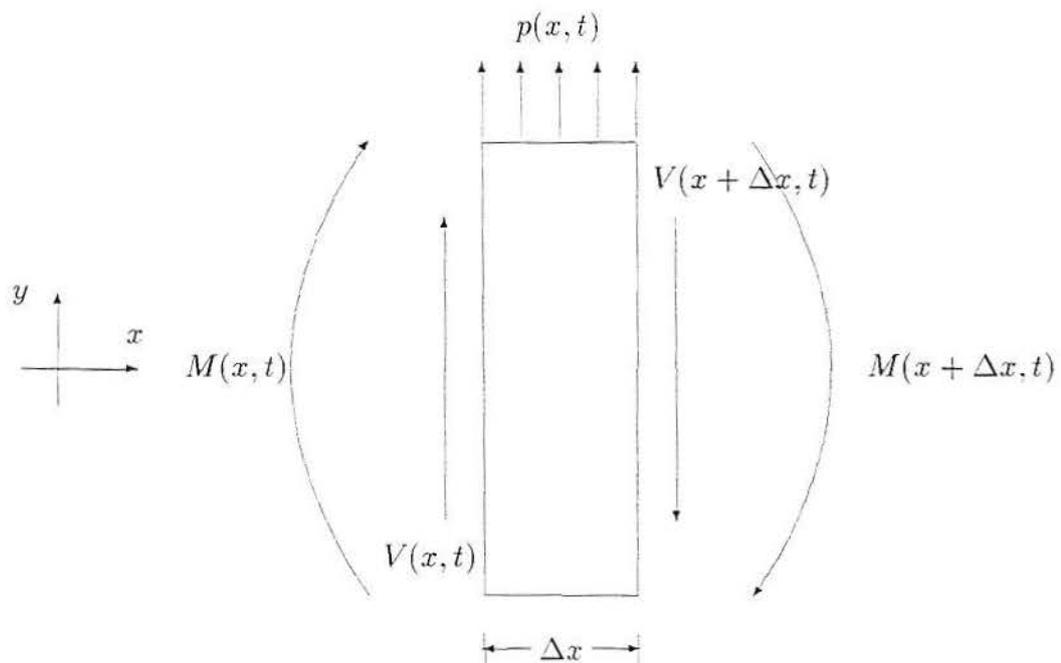


Figura 2.2 Elemento de uma viga de Euler-Bernoulli

Da cinemática, obtem-se a relação entre a curvatura χ e a deformação axial ε_x da viga

$$\varepsilon_x = -y\chi \quad (2.1)$$

sendo que

$$\chi = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (2.2)$$

onde y é a distância do ponto da seção transversal de deformação axial ε_x até o eixo x .

Se são assumidas pequenas deformações, pode-se escrever a equação (2.1) como

$$\varepsilon_x = -y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.3)$$

Proveniente da resistência dos materiais tem-se as seguintes relações

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -Ey \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.4)$$

$$M = \int_A -\sigma_x y \, dA = EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.5)$$

onde σ_x é a tensão na direção x e M é o momento fletor ao redor do eixo z .

Aplicando as leis de Newton para o balanço das forças e momentos no elemento da figura 2.2, obtêm-se as seguintes igualdades

$$V(x, t) - V(x + \Delta x, t) + p(x, t)\Delta x = \rho \mathcal{V} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.6)$$

$$-M(x, t) + M(x + \Delta x, t) - V(x, t) \frac{\Delta x}{2} - V(x + \Delta x, t) \frac{\Delta x}{2} = 0 \quad (2.7)$$

onde \mathcal{V} é o volume do segmento de viga, $V(x, t)$ é a força de cisalhamento, $M(x, t)$ é o momento fletor, ρ é massa específica do material e $p(x, t)$ é a carga distribuída ao longo do comprimento da viga.

Tomando limite às equações (2.6) e (2.7) quando $\Delta x \rightarrow 0$ tem-se

$$-\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{V(x + \Delta x, t) - V(x, t)}{\Delta x} \right] = \rho A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - p(x, t), \quad (2.8)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{M(x + \Delta x, t) - M(x, t)}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{V(x, t) + V(x + \Delta x, t)}{2} \right]. \quad (2.9)$$

Então, obtém-se

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = \rho A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - p(x, t), \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V(x, t), \quad (2.11)$$

e enfim, substituindo (2.10) e (2.11) e utilizando a igualdade (2.5), pode-se estabelecer a equação de Euler-Bernoulli

$$\boxed{\bar{m}(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[K(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = p(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0,} \quad (2.12)$$

onde

- $t =$ tempo, $t \geq 0$,
- $x =$ posição de um ponto da viga, $0 \leq x \leq L$,
- $u(x, t) =$ deslocamento da viga no tempo t e posição x
- $\bar{m}(x) = \rho A(x) =$ massa por unidade de comprimento da viga,
- $K(x) = EI(x) =$ rigidez flexural da viga,
- $p(x, t) =$ força aplicada
- $L =$ comprimento da viga

O modelo de Euler-Bernoulli fornece bons resultados para estruturas flexíveis longas e finas (razão de espessura-largura $\leq 1/10$), e para frequências baixas.

2.2 Estudo da Equação Modal

A procura de soluções de tipo harmônico

$$u(x, t) = e^{i\omega t} X(x) \quad (2.13)$$

para a forma homogênea

$$\bar{m}(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[K(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (2.14)$$

da equação (2.12), resulta em um problema de autovalor de Sturm-Liouville, denominado *equação modal* da viga.

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2} \left[K(x) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right] - \bar{m}(x) \omega^2 X(x) = 0,} \quad (2.15)$$

onde o parâmetro ω é denominado a *freqüência natural* da estrutura e a função $X(x)$ é referida como *autofunção* ou *modo* de (2.14).

A solução geral da equação (2.15) pode ser expressa como

$$X(x) = c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x) + c_3 \phi_3(x) + c_4 \phi_4(x) \quad (2.16)$$

onde c_i , $i = 1 : 4$ são constantes e $\phi_i(x)$, $i = 1 : 4$ são funções linearmente independentes que satisfazem a equação (2.15).

A metodologia proposta neste trabalho consiste na construção de um novo conjunto de funções $\bar{\phi}_i(x)$, $i = 1 : 4$, satisfazendo uma condição de normalização, a partir das funções $\phi_i(x)$, $i = 1 : 4$.

Tal condição de normalização é

$$\begin{bmatrix} \bar{\phi}_1(0) & \bar{\phi}'_1(0) & \bar{\phi}''_1(0) & \bar{\phi}'''_1(0) \\ \bar{\phi}_2(0) & \bar{\phi}'_2(0) & \bar{\phi}''_2(0) & \bar{\phi}'''_2(0) \\ \bar{\phi}_3(0) & \bar{\phi}'_3(0) & \bar{\phi}''_3(0) & \bar{\phi}'''_3(0) \\ \bar{\phi}_4(0) & \bar{\phi}'_4(0) & \bar{\phi}''_4(0) & \bar{\phi}'''_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

A construção do conjunto de funções $\bar{\phi}_i(x)$, $i = 1 : 4$ pode ser feita através da transformação

$$\begin{bmatrix} \bar{\phi}_1(x) \\ \bar{\phi}_2(x) \\ \bar{\phi}_3(x) \\ \bar{\phi}_4(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(0) & \phi'_1(0) & \phi''_1(0) & \phi'''_1(0) \\ \phi_2(0) & \phi'_2(0) & \phi''_2(0) & \phi'''_2(0) \\ \phi_3(0) & \phi'_3(0) & \phi''_3(0) & \phi'''_3(0) \\ \phi_4(0) & \phi'_4(0) & \phi''_4(0) & \phi'''_4(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \\ \phi_4(x) \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Utilizando a nova base de funções $\{\bar{\phi}_i(x)\}_{i=1}^4$, os modos $X(x)$ podem ser escritos como

$$X(x) = \bar{c}_1 \bar{\phi}_1(x) + \bar{c}_2 \bar{\phi}_2(x) + \bar{c}_3 \bar{\phi}_3(x) + \bar{c}_4 \bar{\phi}_4(x). \quad (2.19)$$

A equação (2.16) com a base $\{\bar{\phi}_j(x)\}$, $j = 1 : 4$, em $x = 0$ junto com a condição de normalização (2.17) produz

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X(0) \\ X'(0) \\ X''(0) \\ X'''(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1(0) & \bar{\phi}_2(0) & \bar{\phi}_3(0) & \bar{\phi}_4(0) \\ \bar{\phi}'_1(0) & \bar{\phi}'_2(0) & \bar{\phi}'_3(0) & \bar{\phi}'_4(0) \\ \bar{\phi}''_1(0) & \bar{\phi}''_2(0) & \bar{\phi}''_3(0) & \bar{\phi}''_4(0) \\ \bar{\phi}'''_1(0) & \bar{\phi}'''_2(0) & \bar{\phi}'''_3(0) & \bar{\phi}'''_4(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{c}_3 \\ \bar{c}_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{c}_3 \\ \bar{c}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{c}_3 \\ \bar{c}_4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Isto é,

$$\bar{c}_1 = X(0), \quad \bar{c}_2 = X'(0), \quad \bar{c}_3 = X''(0), \quad \bar{c}_4 = X'''(0) \quad (2.21)$$

Da mecânica dos materiais, temos que o momento fletor, $M(x, t)$, é expresso pela equação (2.5)

$$M(x, t) = K(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -K(x) e^{i\omega t} X''(x)$$

após utilizar (2.13). A expressão

$$\mathcal{M}(x) = -K(x) X''(x), \quad (2.22)$$

é denominada o *componente espacial do momento fletor* e então deduzimos facilmente que

$$X''(0) = -\frac{\mathcal{M}(0)}{K(0)}. \quad (2.23)$$

Além do mais, a força de cisalhamento, $V(x, t)$, está dada pela equação (2.11):

$$V(x, t) = \frac{\partial M}{\partial x}(x, t).$$

Similarmente a (2.22), a força de cisalhamento também tem um *componente espacial* $\mathcal{V}(x)$ que em termos de $\mathcal{M}(x)$ está dado por

$$\mathcal{V}(x) = \mathcal{M}'(x), \quad (2.24)$$

ou, utilizando (2.22),

$$\mathcal{V}(x) = -K'(x)X''(x) - K(x)X'''(x), \quad (2.25)$$

do qual resulta

$$X'''(0) = -\frac{1}{K(0)} \left(\mathcal{V}(0) - \frac{K'(0)}{K(0)} \mathcal{M}(0) \right) \quad (2.26)$$

após o uso da igualdade (2.23).

Então, o modo dado na equação (2.19) é

$$X(x) = X(0)\bar{\phi}_1(x) + X'(0)\bar{\phi}_2(x) - \frac{\mathcal{M}(0)}{K(0)}\bar{\phi}_3(x) - \frac{1}{K(0)} \left(\mathcal{V}(0) - \frac{K'(0)}{K(0)} \mathcal{M}(0) \right) \bar{\phi}_4(x), \quad (2.27)$$

onde $X(0)$, $X'(0)$, $\mathcal{M}(0)$, $\mathcal{V}(0)$ e $K(0)$ são o deslocamento, o giro, o componente espacial do momento fletor, o componente da força de cisalhamento e a rigidez flexural da viga na posição $x = 0$.

Esta equação tem uma importância fundamental para o cálculo simbólico dos modos e a determinação numérica das frequências naturais. Os coeficientes das funções de base normalizadas $\bar{\phi}_i(x)$, $i = 1 : 4$, tem significado físico direto. Além do mais, *qualquer configuração de viga tem como incógnitas só duas das grandezas enumeradas no parágrafo anterior: $X(0)$, $X'(0)$, $\mathcal{M}(0)$, $\mathcal{V}(0)$ e $K(0)$* . Para o caso

particular de vigas uniformes, $K'(0) = 0$, resultando

$$X(x) = X(0)\bar{\phi}_1(x) + X'(0)\bar{\phi}_2(x) - \frac{\mathcal{M}(0)}{K(0)}\bar{\phi}_3(x) - \frac{\mathcal{V}(0)}{K(0)}\bar{\phi}_4(x). \quad (2.28)$$

3 CÁLCULO ANALÍTICO DOS MODOS DE VIGAS CLÁSSICAS

Neste capítulo é descrito o procedimento de cálculo analítico dos modos e a construção da equação característica da viga. As raízes desta última são as frequências naturais da viga.

3.1 Condições de Contorno Clássicas

As condições de contorno apresentadas a seguir, tem sido utilizadas na literatura clássica, [Inman, 1994], baseam-se no deslocamento e giro no extremo da viga e carecem de dispositivos externos tais como molas e massas.

Basicamente existem quatro tipos de condições de contorno clássicas:

- *fixa*, que não permite o deslocamento nem o giro,
- *apoiada*, que não permite o deslocamento mas permite o giro,
- *deslizante*, que permite o deslocamento mas não permite o giro; esta é uma condição pouco freqüente nas aplicações, e
- *livre*, que permite ambos, o deslocamento e o giro.

Na tabela 3.1 são mostradas as expressões matemáticas para as condições de contorno clássicas no extremo esquerdo da viga junto com os esquemas físicos correspondentes. As condições para o extremo direito são as mesmas, porém com $x = 0$ substituído por $x = L$.

Para fins de simplificação, adotam-se siglas para denotar as diversas condições de contorno clássicas de uma viga. Tais siglas são mostradas na tabela 3.2.

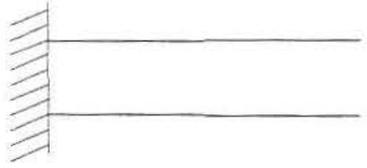
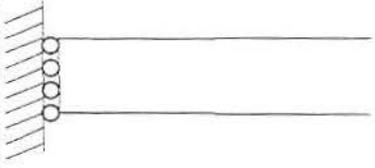
Contorno	Equações	Esquema Físico
Fixo	$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ deslocamento e giro nulos	
Apoiado	$u(0, t) = 0, \quad K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = 0$ deslocamento e momento fletor nulos	
Deslizante	$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (0, t) = 0$ giro e força de cisalhamento nulos	
Livre	$K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (0, t) = 0$ momento fletor e força de cisalhamento nulos	

Tabela 3.1 Condições de Contorno Clássicas

Na tabela 3.3, são mostradas as condições de contorno da equação modal (2.15)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[K(x) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right] - \bar{m}(x) \omega^2 X(x) = 0, \quad (3.1)$$

para ambos extremos da viga. Note-se que tais condições de contorno foram obtidas a partir das igualdades enunciadas na tabela 3.1. Pode-se observar que as condições permanecem as mesmas quando se muda de extremo.

Condição	Fixa	Apoiada	Deslizante	Livre
Sigla	F	A	D	L

Tabela 3.2 *Siglas para as Condições de Contorno Clássicas*

Caso	Extremo $x = 0$	Extremo $x = L$
F-F	$X(0) = 0, X'(0) = 0$	$X(L) = 0, X'(L) = 0$
F-A	$X(0) = 0, X'(0) = 0$	$X(L) = 0, \mathcal{M}(L) = 0$
F-D	$X(0) = 0, X'(0) = 0$	$X'(L) = 0, \mathcal{V}(L) = 0$
F-L	$X(0) = 0, X'(0) = 0$	$\mathcal{M}(L) = 0, \mathcal{V}(L) = 0$
A-A	$X(0) = 0, \mathcal{M}(0) = 0$	$X(L) = 0, \mathcal{M}(L) = 0$
A-D	$X(0) = 0, \mathcal{M}(0) = 0$	$X'(L) = 0, \mathcal{V}(L) = 0$
A-L	$X(0) = 0, \mathcal{M}(0) = 0$	$\mathcal{M}(L) = 0, \mathcal{V}(L) = 0$
D-D	$X'(0) = 0, \mathcal{V}(0) = 0$	$X'(0) = 0, \mathcal{V}(0) = 0$
D-L	$X'(0) = 0, \mathcal{V}(0) = 0$	$\mathcal{M}(0) = 0, \mathcal{V}(0) = 0$
L-L	$\mathcal{M}(0) = 0, \mathcal{V}(0) = 0$	$\mathcal{M}(0) = 0, \mathcal{V}(0) = 0$

Tabela 3.3 *Condições de Contorno para a Equação Modal para uma Viga com Condições de Contorno Clássicas*

3.2 Metodologia de Cálculo

Para fins ilustrativos, escolhe-se a configuração fixa-livre, como é mostrado na figura 3.1

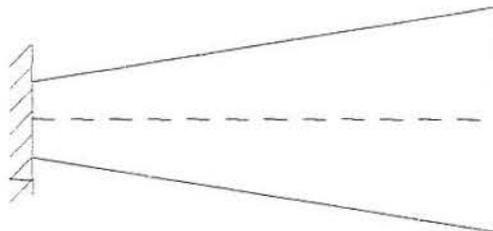


Figura 3.1 *Viga fixa-livre*

É sabido que uma viga com o extremo fixo em $x = 0$, tem o deslocamento e o giro nulos naquela posição, isto é,

$$X(0) = X'(0) = 0, \quad (3.2)$$

e então o modo pode ser expresso, a partir da equação (2.27), como

$$X(x) = -\frac{\mathcal{M}(0)}{K(0)}\bar{\phi}_3(x) - \frac{1}{K(0)}\left(\mathcal{V}(0) - \frac{K'(0)}{K(0)}\mathcal{M}(0)\right)\bar{\phi}_4(x). \quad (3.3)$$

A rigidez flexural $K(x)$ e sua derivada $K'(x)$ consideram-se conhecidas ao longo da viga, pois envolvem parâmetros estruturais da viga, sujeitos a medições experimentais. Por tanto, as incógnitas na equação (3.3) são $\mathcal{M}(0)$ e $\mathcal{V}(0)$.

Por outro lado, o extremo direito da viga, $x = L$, é livre, isto é, o momento fletor espacial, $\mathcal{M}(L)$, e a força de cisalhamento espacial, $\mathcal{V}(L)$, são nulos,

e portanto

$$\begin{cases} \mathcal{M}(L) = 0, & \text{isto é, } X''(L) = 0, \\ \mathcal{V}(L) = 0, & \text{isto é, } -K'(L)X''(L) - K(L)X'''(L) = 0 \text{ ou } X'''(L) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Usando a equação (3.3) junto com as condições (3.4) temos as duas igualdades

$$\begin{cases} -\frac{\mathcal{M}(0)}{K(0)}\bar{\phi}_3''(L) - \frac{1}{K(0)}\left(\mathcal{V}(0) - \frac{K'(0)}{K(0)}\mathcal{M}(0)\right)\bar{\phi}_4''(L) = 0, \\ -\frac{\mathcal{M}(0)}{K(0)}\bar{\phi}_3'''(L) - \frac{1}{K(0)}\left(\mathcal{V}(0) - \frac{K'(0)}{K(0)}\mathcal{M}(0)\right)\bar{\phi}_4'''(L) = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

e como $\mathcal{M}(0)$ e $\mathcal{V}(0)$ são as incógnitas, (3.5) pode ser escrita em forma matricial como

$$-\frac{1}{K(0)} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_3''(L) - \frac{K'(0)}{K(0)}\bar{\phi}_4''(L) & \bar{\phi}_4''(L) \\ \bar{\phi}_3'''(L) - \frac{K'(0)}{K(0)}\bar{\phi}_4'''(L) & \bar{\phi}_4'''(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{M}(0) \\ \mathcal{V}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

A equação (3.6) é um sistema linear algébrico homogêneo, e para obter soluções não nulas de tal sistema é preciso anular o determinante da matriz do sistema, isto é,

$$\begin{vmatrix} \bar{\phi}_3''(L) - \frac{K'(0)}{K(0)}\bar{\phi}_4''(L) & \bar{\phi}_4''(L) \\ \bar{\phi}_3'''(L) - \frac{K'(0)}{K(0)}\bar{\phi}_4'''(L) & \bar{\phi}_4'''(L) \end{vmatrix} = 0, \quad (3.7)$$

ou,

$$\boxed{\bar{\phi}_3''(L)\bar{\phi}_4'''(L) - \bar{\phi}_4''(L)\bar{\phi}_3'''(L) = 0}, \quad (3.8)$$

que é a equação característica das frequências naturais do sistema.

Impondo a condição (3.8) no sistema linear (3.6), este é reduzido a uma única equação

$$\left(\bar{\phi}_3''(L) - \frac{K'(0)}{K(0)} \bar{\phi}_4''(L) \right) \mathcal{M}(0) + \bar{\phi}_4''(L) \mathcal{V}(0) = 0 \quad (3.9)$$

e a solução é

$$\mathcal{V}(0) = -\frac{1}{\bar{\phi}_4''(L)} \left(\bar{\phi}_3''(L) - \frac{K'(0)}{K(0)} \bar{\phi}_4''(L) \right) \mathcal{M}(0), \quad \mathcal{M}(0) \text{ parâmetro livre.} \quad (3.10)$$

Substituindo (3.10) em (3.3), após alguma simplificação algébrica, o modo resulta

$$X(x) = \frac{\mathcal{M}(0)}{K(0)} \left(-\bar{\phi}_3(x) + \frac{\bar{\phi}_3''(L)}{\bar{\phi}_4''(L)} \bar{\phi}_4(x) \right). \quad (3.11)$$

Devido a que a amplitude do modo é indeterminada, $X(x)$ pode ser escrita também como

$$\boxed{X(x) = \bar{\phi}_3''(L) \bar{\phi}_4(x) - \bar{\phi}_4''(L) \bar{\phi}_3(x)}. \quad (3.12)$$

A forma funcional do modo, (3.12), tem a vantagem da simplicidade algébrica e da independência dos parâmetros estruturais da viga.

Um procedimento totalmente similar para calcular os modos e as frequências naturais pode ser adotado para qualquer configuração clássica de viga.

A tabela 3.4 mostra os resultados prontos para diversas configurações clássicas:

Viga	Equação Característica	Modo
F-F	$\bar{\phi}_3(L)\bar{\phi}'_4(L) - \bar{\phi}_4(L)\bar{\phi}'_3(L) = 0$	$\bar{\phi}_3(L)\bar{\phi}_4(x) - \bar{\phi}_4(L)\bar{\phi}_3(x)$
F-A	$\bar{\phi}_3(L)\bar{\phi}''_4(L) - \bar{\phi}_4(L)\bar{\phi}''_3(L) = 0$	$\bar{\phi}_3(L)\bar{\phi}_4(x) - \bar{\phi}_4(L)\bar{\phi}_3(x)$
F-D	$\bar{\phi}'_3(L)\bar{\phi}'''_4(L) - \bar{\phi}'_4(L)\bar{\phi}'''_3(L) = 0$	$\bar{\phi}'_3(L)\bar{\phi}_4(x) - \bar{\phi}'_4(L)\bar{\phi}_3(x)$
F-L	$\bar{\phi}''_3(L)\bar{\phi}'''_4(L) - \bar{\phi}''_4(L)\bar{\phi}'''_3(L) = 0$	$\bar{\phi}''_3(L)\bar{\phi}_4(x) - \bar{\phi}''_4(L)\bar{\phi}_3(x)$
A-A	$\bar{\phi}_2(L)\bar{\phi}''_4(L) - \bar{\phi}_4(L)\bar{\phi}''_2(L) = 0$	$\bar{\phi}_2(L)\bar{\phi}_4(x) - \bar{\phi}_4(L)\bar{\phi}_2(x)$
A-D	$\bar{\phi}'_2(L)\bar{\phi}'''_4(L) - \bar{\phi}'_4(L)\bar{\phi}'''_2(L) = 0$	$\bar{\phi}'_2(L)\bar{\phi}_4(x) - \bar{\phi}'_4(L)\bar{\phi}_2(x)$
A-L	$\bar{\phi}''_2(L)\bar{\phi}'''_4(L) - \bar{\phi}''_4(L)\bar{\phi}'''_2(L) = 0$	$\bar{\phi}''_2(L)\bar{\phi}_4(x) - \bar{\phi}''_4(L)\bar{\phi}_2(x)$
D-D	$-\bar{\phi}'_1(L)\bar{\phi}'''_3(L) + \bar{\phi}'_3(L)\bar{\phi}'''_1(L) + \frac{K'(0)}{K(0)}(\bar{\phi}'_1(L)\bar{\phi}'''_4(L) - \bar{\phi}'_4(L)\bar{\phi}'''_1(L)) = 0$	$-\bar{\phi}'_1(L)\bar{\phi}_3(x) + \bar{\phi}'_3(L)\bar{\phi}_1(x) + \frac{K'(0)}{K(0)}(\bar{\phi}'_1(L)\bar{\phi}_4(x) - \bar{\phi}'_4(L)\bar{\phi}_1(x))$
D-L	$-\bar{\phi}''_1(L)\bar{\phi}'''_3(L) + \bar{\phi}''_3(L)\bar{\phi}'''_1(L) + \frac{K'(0)}{K(0)}(\bar{\phi}''_1(L)\bar{\phi}'''_4(L) - \bar{\phi}''_4(L)\bar{\phi}'''_1(L)) = 0$	$-\bar{\phi}''_1(L)\bar{\phi}_3(x) + \bar{\phi}''_3(L)\bar{\phi}_1(x) + \frac{K'(0)}{K(0)}(\bar{\phi}''_1(L)\bar{\phi}_4(x) - \bar{\phi}''_4(L)\bar{\phi}_1(x))$
L-L	$\bar{\phi}''_1(L)\bar{\phi}'''_2(L) - \bar{\phi}''_2(L)\bar{\phi}'''_1(L) = 0$	$\bar{\phi}''_1(L)\bar{\phi}_2(x) - \bar{\phi}''_2(L)\bar{\phi}_1(x)$

Tabela 3.4 Modos e equações características para diversas configurações clássicas de vigas (não-uniformes).

A tabela 3.4 ilustra a generalidade da metodologia, isto é, os resultados são válidos para vigas não uniformes em geral.

Na seção a seguir, consideramos as vigas com seção transversal constante.

3.3 Vigas Clássicas com Seção Transversal Constante

No caso das vigas com seção transversal constante, a massa por unidade de comprimento é constante

$$\bar{m}(x) = \rho A, \quad (3.13)$$

onde ρ é a massa específica do material da viga e A é a área da seção transversal da viga. Também a rigidez flexural é constante:

$$K(x) = EI, \quad (3.14)$$

onde E é o módulo de elasticidade de Young e I é o momento de inércia da viga com respeito do eixo perpendicular à viga.

Neste caso, $K'(0) = 0$.

De (2.15), a equação modal resulta

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} - \beta^4 X(x) = 0 \quad (3.15)$$

sendo β um parâmetro definido por

$$\beta^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EI}. \quad (3.16)$$

A equação (3.15) é muito conhecida na literatura, e comumente a sua solução é escrita como

$$X(x) = c_1 \text{sen}(\beta x) + c_2 \text{cos}(\beta x) + c_3 \text{senh}(\beta x) + c_4 \text{cosh}(\beta x). \quad (3.17)$$

Desse modo, consegue-se o conjunto de funções

$$\{\phi_1(x) = \text{sen}(\beta x), \phi_2(x) = \text{cos}(\beta x), \phi_3(x) = \text{senh}(\beta x), \phi_4(x) = \text{cosh}(\beta x)\}. \quad (3.18)$$

Porém, o conjunto (3.18) não satisfaz a condição de normalização (2.17).

Mas a construção proposta em (2.18) implica que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1(x) \\ \bar{\phi}_2(x) \\ \bar{\phi}_3(x) \\ \bar{\phi}_4(x) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 & -\beta^3 \\ 1 & 0 & -\beta^2 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \beta^3 \\ 1 & 0 & \beta^2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \\ \phi_4(x) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\beta} & 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\beta^2} & 0 & \frac{1}{\beta^2} \\ -\frac{1}{\beta^3} & 0 & \frac{1}{\beta^3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \\ \phi_4(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

A partir da equação (3.19) pode ser identificada a nova base de funções:

$$\bar{\phi}_1(x) = \frac{1}{2}(\phi_2(x) + \phi_4(x)) = \frac{\text{cos}(\beta x) + \text{cosh}(\beta x)}{2} = h'''(x) \quad (3.20)$$

$$\bar{\phi}_2(x) = \frac{1}{2\beta}(\phi_1(x) + \phi_3(x)) = \frac{\text{sen}(\beta x) + \text{senh}(\beta x)}{2\beta} = h''(x), \quad (3.21)$$

$$\bar{\phi}_3(x) = \frac{1}{2\beta^2}(-\phi_2(x) + \phi_4(x)) = \frac{-\text{cos}(\beta x) + \text{cosh}(\beta x)}{2\beta^2} = h'(x), \quad (3.22)$$

$$\bar{\phi}_4(x) = \frac{1}{2\beta^3}(-\phi_1(x) + \phi_3(x)) = \frac{-\text{sen}(\beta x) + \text{senh}(\beta x)}{2\beta^3} = h(x). \quad (3.23)$$

É importante salientar que a função $h(x)$ é a solução da equação modal (3.15) sob condições impulsivas, isto é, $\bar{\phi}_4(x) = h(x)$ satisfaz

$$\begin{cases} \frac{d^4 X(x)}{dx^4} - \beta^4 X(x) = 0 \\ X(0) = X'(0) = X''(0) = 0, \quad X'''(0) = 1. \end{cases} \quad (3.24)$$

Pode-se afirmar, então, que a base de funções

$$\{ h'''(x), h''(x), h'(x), h(x) \} \quad (3.25)$$

é a base mais adequada para explicar as vibrações livres de vigas uniformes pelas suas vantagens algébricas (simplicidade e sistematização funcional), computacionais (simplicidade do cálculo simbólico) e físicas (relação direta com as grandezas físicas do modelo). Outra característica desejável é a robustez dessa base quando os parâmetros se anulam (ou, na prática, quando são muito próximos de zero). Em tal circunstância tem-se que

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} h'''(x) = 1, \quad (3.26)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} h''(x) = x, \quad (3.27)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} h'(x) = \frac{x^2}{2}, \quad (3.28)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} h(x) = \frac{x^3}{6}, \quad (3.29)$$

e tais limites sugerem o uso da base “estática”

$$\left\{ 1, x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{6} \right\}, \quad (3.30)$$

concordando plenamente com os resultados na literatura, [Claeyssen e Soder, 2002].

Desafortunadamente, tais aspectos da eficiência desaparecem quando é considerada a base “clássica”

$$\{ \text{sen}(\beta x), \text{cos}(\beta x), \text{senh}(\beta x), \text{cosh}(\beta x) \}.$$

O uso da base “impulsiva” (3.20-3.23) tem sido fortemente encorajada por Claeysen, 1999,2002.

3.4 Vigas Clássicas com Seção Transversal Contínua

Neste caso, a massa linear $\bar{m}(x)$ e a rigidez flexural $K(x)$ são funções contínuas. O modo é calculado de maneira geral como em (2.27):

$$X(x) = X(0)\bar{\phi}_1(x) + X'(0)\bar{\phi}_2(x) - \frac{\mathcal{M}(0)}{K(0)}\bar{\phi}_3(x) - \frac{1}{K(0)} \left(\mathcal{V}(0) - \frac{K'(0)}{K(0)}\mathcal{M}(0) \right) \bar{\phi}_4(x), \quad (3.31)$$

e para as configurações específicas, mediante a tabela 3.4.

Podem ser mencionados os seguintes casos de vigas com seção transversal contínua [Lin,2000]:

1. **Caso** $K(x) = \alpha(1 + \beta x)^{n+2}$, $\bar{m}(x) = a(1 + \beta x)^n$

Neste caso, uma base de funções não normalizadas está dada por

$$\begin{cases} \phi_1(x) = \left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)^{-n} J_n(\zeta), & \phi_2(x) = \left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)^{-n} Y_n(\zeta), \\ \phi_3(x) = \left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)^{-n} I_n(\zeta), & \phi_4(x) = \left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)^{-n} K_n(\zeta), \end{cases} \quad (3.32)$$

onde $J_n(\zeta)$ e $Y_n(\zeta)$ são as funções de Bessel de primeiro tipo, isto é, satisfazem a equação diferencial

$$x^2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + x \frac{dy(x)}{dx} + (x^2 - n^2)y(x) = 0.$$

$I_n(\zeta)$ e $K_n(\zeta)$ são as funções de Bessel de segundo tipo, isto é, satisfazem a equação diferencial

$$x^2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + x \frac{dy(x)}{dx} - (x^2 + n^2)y(x) = 0, \quad (3.33)$$

λ é uma constante definida por

$$\lambda = \frac{2}{|\beta|} \left(\frac{a\omega^2}{\alpha} \right)^{1/4}, \quad (3.34)$$

e ζ é uma variável definida em termos de x como

$$\zeta = \lambda(1 + \beta x)^{1/2}. \quad (3.35)$$

Os casos mais conhecidos são quando $n = 1$, que corresponde às vigas em forma de cunha, e o caso $n = 2$ que corresponde às vigas com variação linear na seção transversal.

2. **Caso** $K(x) = \alpha(1 + \beta x)^{n+4}$, $\bar{m}(x) = a(1 + \beta x)^n$

Neste caso, uma base de funções para o espaço solução da equação modal (2.15) está dada pelas funções $(1 + \beta x)^z$ sendo z solução da equação

$$z^4 + 2(n+1)z^3 + (n^2 + n - 1)z^2 - (n^2 + 3n + 2)z - \frac{a\omega^2}{\alpha\beta^4} = 0. \quad (3.36)$$

Para resolver (3.36), pode-se observar que tal equação é equivalente a

$$\left(z^2 + (n+1)z - \frac{n+2}{2} \right)^2 = \left(\frac{n+2}{2} \right)^2 + \frac{a\omega^2}{\alpha\beta^4}, \quad (3.37)$$

e pela simples utilização da fórmula de Báskara, a última equação fica resolvida como

$$z = -\frac{1}{2} \left(n+1 \pm \sqrt{n^2 - 3 \pm c^2} \right) \quad (3.38)$$

onde a constante c está definida pela relação

$$c^4 = \left(\frac{n+2}{2}\right)^2 + \frac{a\omega^2}{\alpha\beta^4}. \quad (3.39)$$

Então, a base de funções está dada por

$$\begin{cases} \phi_1(x) = (1 + \beta x)^{-\frac{1}{2}(n+1+\sqrt{n^2-3+c^2})}, & \phi_2(x) = (1 + \beta x)^{-\frac{1}{2}(n+1+\sqrt{n^2-3-c^2})}, \\ \phi_3(x) = (1 + \beta x)^{-\frac{1}{2}(n+1-\sqrt{n^2-3+c^2})}, & \phi_4(x) = (1 + \beta x)^{-\frac{1}{2}(n+1-\sqrt{n^2-3-c^2})}, \end{cases} \quad (3.40)$$

3. Caso $K(x) = \alpha(1 + \beta x)^4$, $\bar{m}(x) = a(1 + \beta x)^4$

Neste caso, uma base de funções não normalizadas está dada por

$$\begin{cases} \phi_1(x) = (1 + \beta x)^{-2} \sin(cx), & \phi_2(x) = (1 + \beta x)^{-2} \cos(cx), \\ \phi_3(x) = (1 + \beta x)^{-2} \sinh(cx), & \phi_4(x) = (1 + \beta x)^{-2} \cosh(cx). \end{cases} \quad (3.41)$$

onde c é uma constante definida por

$$c^4 = \frac{a\omega^2}{\alpha}. \quad (3.42)$$

Neste caso, a simplicidade algébrica dos resultados permite escrever explicitamente as funções normalizadas $\{\bar{\phi}_i\}_{i=1}^4$ como segue

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_1(x) = \frac{1}{c^2(1 + \beta x)^2} & \left(c\beta \sin(cx) + \frac{c^2 - 2\beta^2}{2} \cos(cx) + \right. \\ & \left. c\beta \sinh(cx) + \frac{c^2 + 2\beta^2}{2} \cosh(cx) \right), \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\bar{\phi}_2(x) = \frac{1}{c^3(1+\beta x)^2} \left(\frac{c^2 - 6\beta^2}{2} \text{sen}(cx) - 2c\beta \cos(cx) + \right. \\ \left. \frac{c^2 + 6\beta^2}{2} \text{senh}(cx) + 2c\beta \cosh(cx) \right), \quad (3.44)$$

$$\bar{\phi}_3(x) = \frac{1}{c^3(1+\beta x)^2} \left(-3\beta \text{sen}(cx) - \frac{c}{2} \cos(cx) + \right. \\ \left. 3\beta \text{senh}(cx) + \frac{c}{2} \cosh(cx) \right), \quad (3.45)$$

$$\bar{\phi}_4(x) = \frac{1}{2c^3(1+\beta x)^2} (-\text{sen}(cx) + \text{senh}(cx)) \quad (3.46)$$

4. Caso $K(x) = \alpha e^{-\beta x}$, $\bar{m}(x) = a e^{-\beta x}$

Aqui, uma base de funções está dada por

$$\begin{cases} \phi_1(x) = \exp \left[\left(\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\beta^2 + 4c^2} \right) x \right], & \phi_2(x) = \exp \left[\left(\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\beta^2 - 4c^2} \right) x \right], \\ \phi_3(x) = \exp \left[\left(\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\beta^2 + 4c^2} \right) x \right], & \phi_4(x) = \exp \left[\left(\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\beta^2 - 4c^2} \right) x \right], \end{cases} \quad (3.47)$$

onde $c^4 = \frac{a\omega^2}{\alpha}$.

No presente trabalho, as funções normalizadas, $\bar{\phi}_j(x)$, são mencionadas explicitamente só para o caso 3. Nos casos 1, 2 e 4, tais funções normalizadas não foram escritas aqui devido a seu tamanho.

4 CÁLCULO MODAL PARA VIGAS NÃO UNIFORMES

Neste capítulo, são consideradas vigas com a rigidez e a massa linear

$$K(x) = \alpha(1 + \beta x)^4, \quad \bar{m}(x) = a(1 + \beta x)^4, \quad (4.1)$$

respectivamente.

De acordo com os resultados da seção 3.4, tem-se que as soluções normalizadas da equação modal 2.15

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[K(x) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right] - \bar{m}(x) \omega^2 X(x) = 0, \quad (4.2)$$

estão dadas pelas funções

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_1(x) = & \frac{1}{c^2(1 + \beta x)^2} \left(c\beta \text{sen}(cx) + \frac{c^2 - 2\beta^2}{2} \cos(cx) + \right. \\ & \left. c\beta \text{senh}(cx) + \frac{c^2 + 2\beta^2}{2} \cosh(cx) \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_2(x) = & \frac{1}{c^3(1 + \beta x)^2} \left(\frac{c^2 - 6\beta^2}{2} \text{sen}(cx) - 2c\beta \cos(cx) + \right. \\ & \left. \frac{c^2 + 6\beta^2}{2} \text{senh}(cx) + 2c\beta \cosh(cx) \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_3(x) = & \frac{1}{c^3(1 + \beta x)^2} \left(-3\beta \text{sen}(cx) - \frac{c}{2} \cos(cx) + \right. \\ & \left. 3\beta \text{senh}(cx) + \frac{c}{2} \cosh(cx) \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\bar{\phi}_4(x) = \frac{1}{2c^3(1 + \beta x)^2} (-\text{sen}(cx) + \text{senh}(cx)) \quad (4.6)$$

onde o parâmetro c está dado por

$$c^4 = \frac{a\omega^2}{\alpha} \quad (4.7)$$

sendo ω a frequência característica.

Os valores dos parâmetros envolvidos são mostrados a seguir

Parâmetro	Valor
α	$1.78 \times 10^7 \text{ Nm}^2$
β	$-1.247 \times 10^{-1} \text{ m}^{-1}$
a	$3.65 \times 10^5 \text{ Kgm}$
L	1 m

Tabela 4.1 *Valores dos parâmetros*

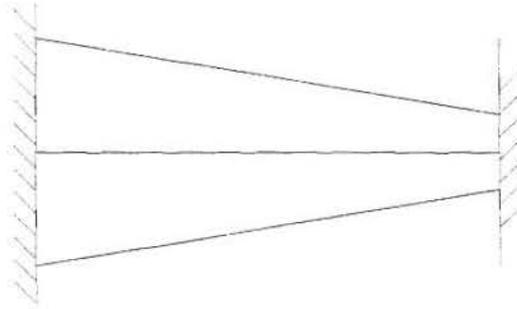
Para os diversos tipos de vigas clássicas, as equações características correspondentes são tomadas da tabela 3.4, com as funções $\bar{\phi}_1(x)$ substituídas pelas equações (4.3)-(4.6).

Nas figuras dos modos de cada configuração de viga, tem-se a seguinte distribuição entre as cores e os modos:

Modo	Cor
Primeiro	Verde
Segundo	Azul
Terceiro	Vermelha
Quarto	Preta
Quinto	Marron

Tabela 4.2 *Distribuição de cores para os modos*

4.1 Viga Fixa-Fixa

Figura 4.1 *Viga do tipo fixa-fixa*

Parâmetro c	Frequência Característica
4.730040745	156.24
7.853204624	430.68
10.99560784	844.31
14.13716549	1395.69
17.27875966	2084.92

Tabela 4.3 *Primeiros cinco valores do parâmetro c e das frequências características de uma viga fixa-fixa*

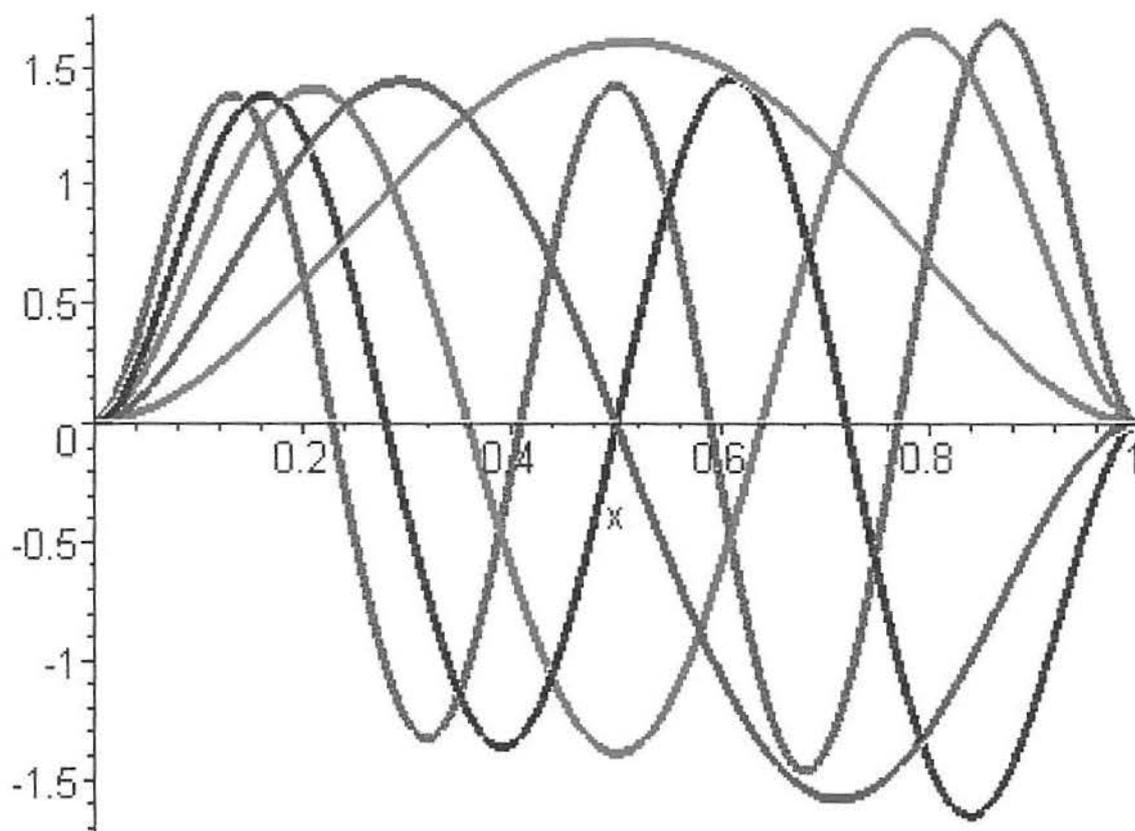
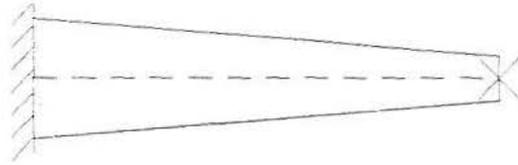


Figura 4.2 Gráfico dos primeiros cinco modos de uma viga fixa-fixa

4.2 Viga Fixa-Apoiada

Figura 4.3 *Viga do tipo fixa-apoiada*

Parâmetro c	Frequência Característica
3.996600295	111.54
7.107020613	352.73
10.23725132	731.86
13.37262816	1248.81
16.51032477	1903.60

Tabela 4.4 *Primeiros cinco valores do parâmetro c e das frequências características de uma viga fixa-apoiada*

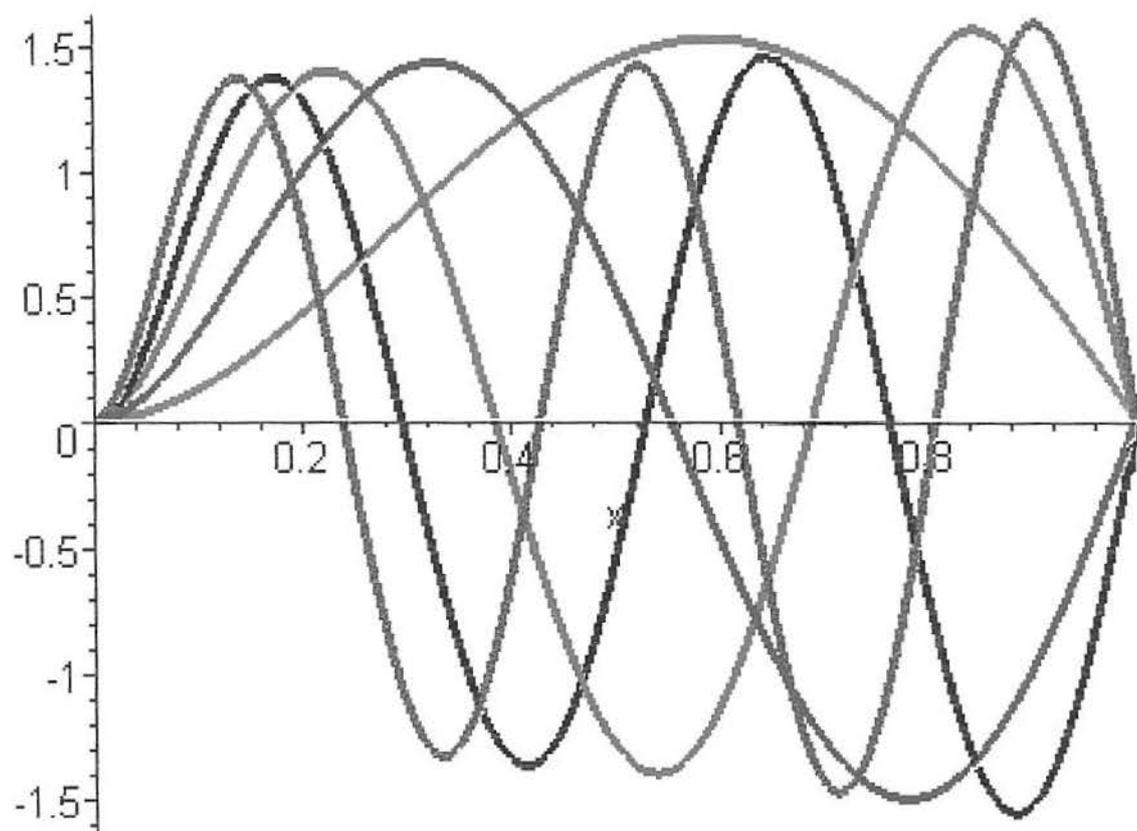


Figura 4.4 Gráfico dos primeiros cinco modos de uma viga fixa-apoiada

4.3 Viga Fixa-Deslizante

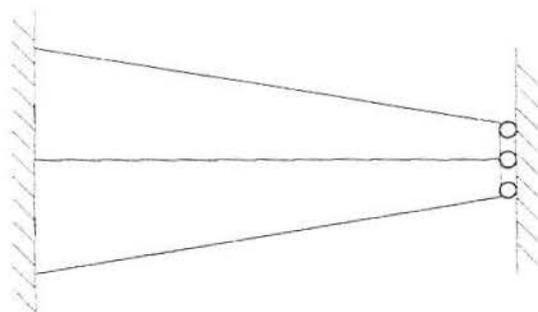


Figura 4.5 Viga do tipo fixa-deslizante

Parâmetro c	Frequência Característica
2.569721580	46.11
5.597032043	218.77
8.703783981	529.03
11.82857010	977.08
14.96029455	1562.95

Tabela 4.5 Primeiros cinco valores do parâmetro c e das frequências características de uma viga fixa-deslizante.

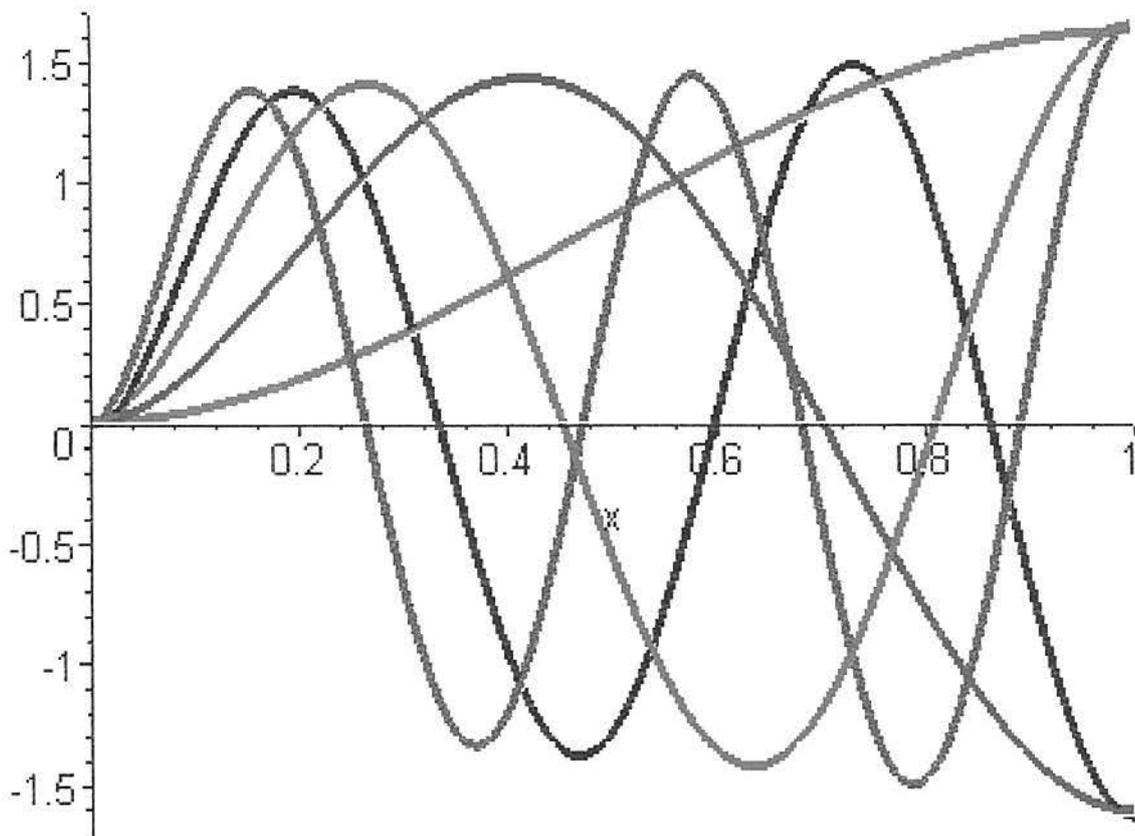


Figura 4.6 Gráfico dos primeiros cinco modos de uma viga fixa-deslizante

4.4 Viga Fixa-Livre

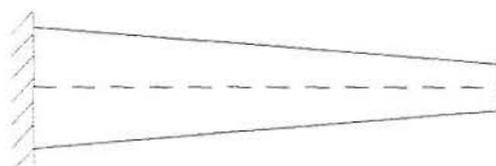


Figura 4.7 Viga do tipo fixa-livre

Parâmetro c	Frequência Característica
2.031982098	28.83
4.813021991	161.77
7.925304628	438.63
11.04648060	852.14
14.17696741	1403.56

Tabela 4.6 Primeiros cinco valores do parâmetro c e das frequências características de uma viga fixa-livre

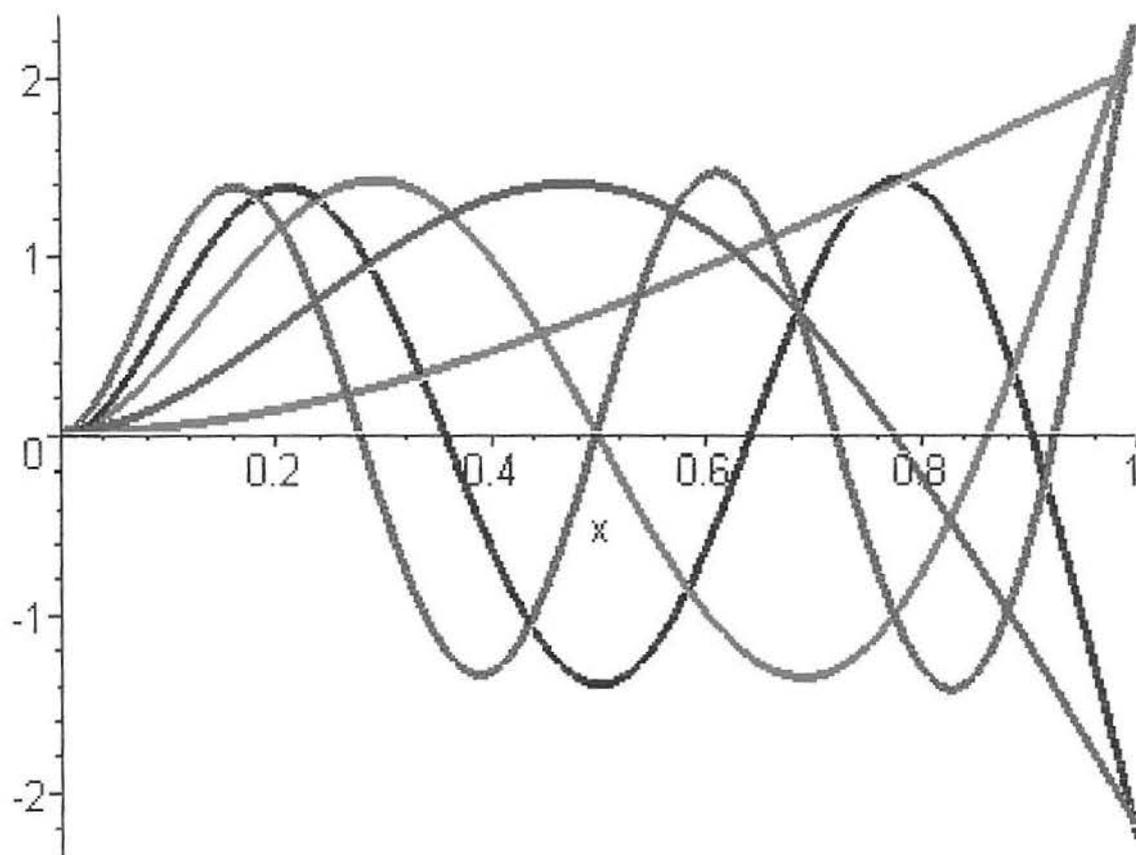


Figura 4.8 Gráfico dos primeiros cinco modos de uma viga fixa-livre

4.5 Viga Apoiada-Apoiada

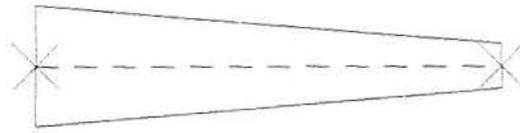


Figura 4.9 Viga do tipo apoiada-apoiada

Parâmetro c	Frequência Característica
3.137217303	68.73
6.285242449	275.87
9.426939352	620.59
12.56829248	1103.10
15.70964530	1723.44

Tabela 4.7 Primeiros cinco valores do parâmetro c e das frequências características de uma viga apoiada-apoiada

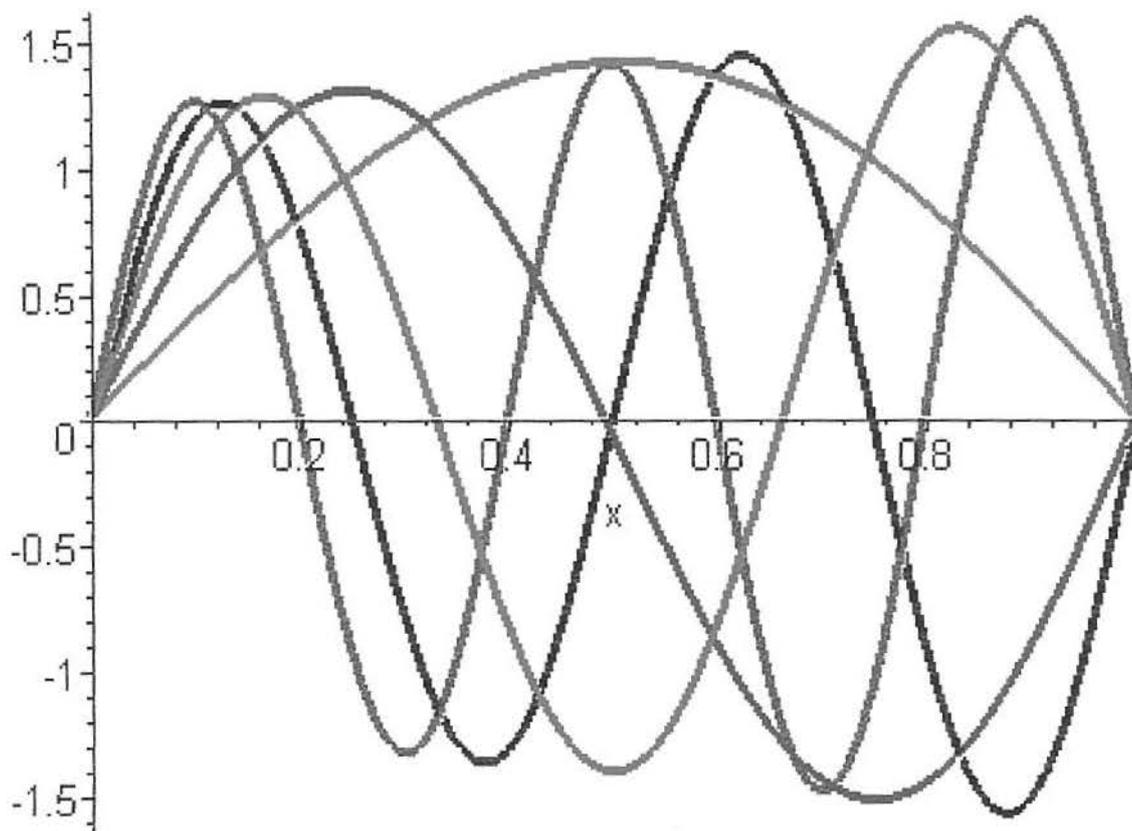


Figura 4.10 Gráfico dos primeiros cinco modos de uma viga apoiada-apoiada

4.6 Viga Apoiada-Deslizante

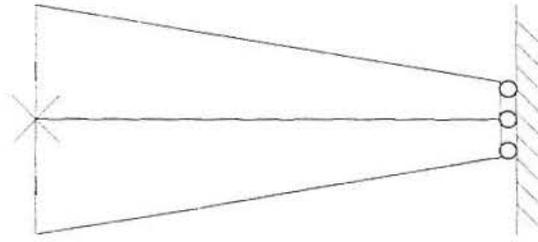


Figura 4.11 Viga do tipo apoiada-deslizante

Parâmetro c	Frequência Característica
1.709489875	20.41
4.773158208	159.10
7.892267118	434.98
11.02345894	848.59
14.15908171	1400.02

Tabela 4.8 Primeiros cinco valores do parâmetro c e das frequências características de uma viga apoiada-deslizante

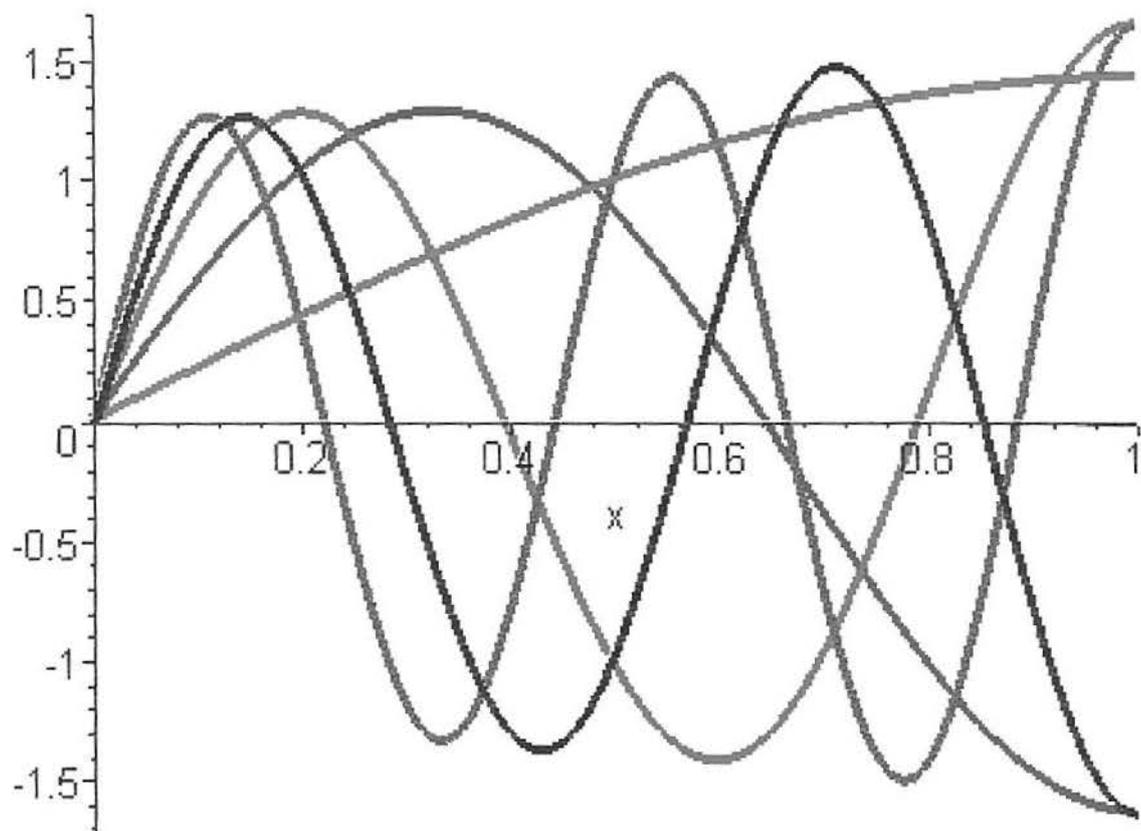
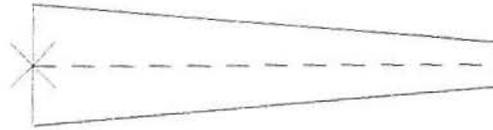


Figura 4.12 Gráfico dos primeiros cinco modos de uma viga apoiada-deslizante

4.7 Viga Apoiada-Livre

Figura 4.13 *Viga do tipo apoiada-livre*

Parâmetro c	Freqüência Característica
4.000960273	111.79
7.110761552	353.10
10.24011415	732.27
13.37493077	1249.24
16.51224505	1904.04

Tabela 4.9 *Primeiros cinco valores do parâmetro c e das freqüências características de uma viga apoiada-livre*

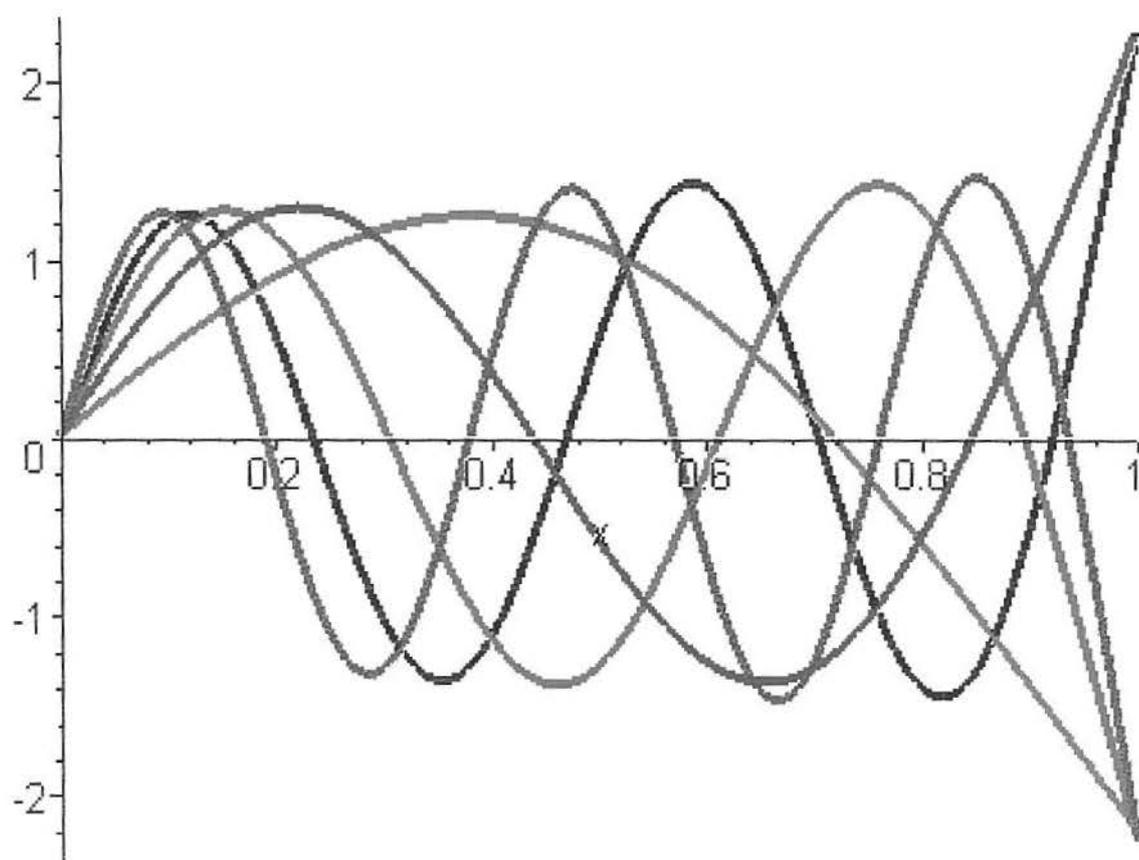


Figura 4.14 Gráfico dos primeiros cinco modos de uma viga apoiada-livre

4.8 Viga Deslizante-Deslizante

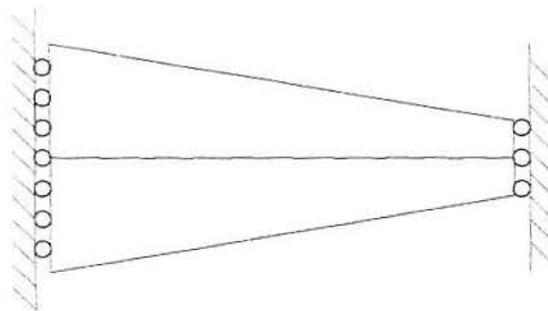


Figura 4.15 Viga do tipo deslizante-deslizante

Parâmetro c	Frequência Característica
3.233025423	72.99
6.331784691	279.97
9.457757648	624.65
12.59131118	1107.15
15.72801113	1727.47

Tabela 4.10 Primeiros cinco valores do parâmetro c e das frequências características de uma viga deslizante-deslizante

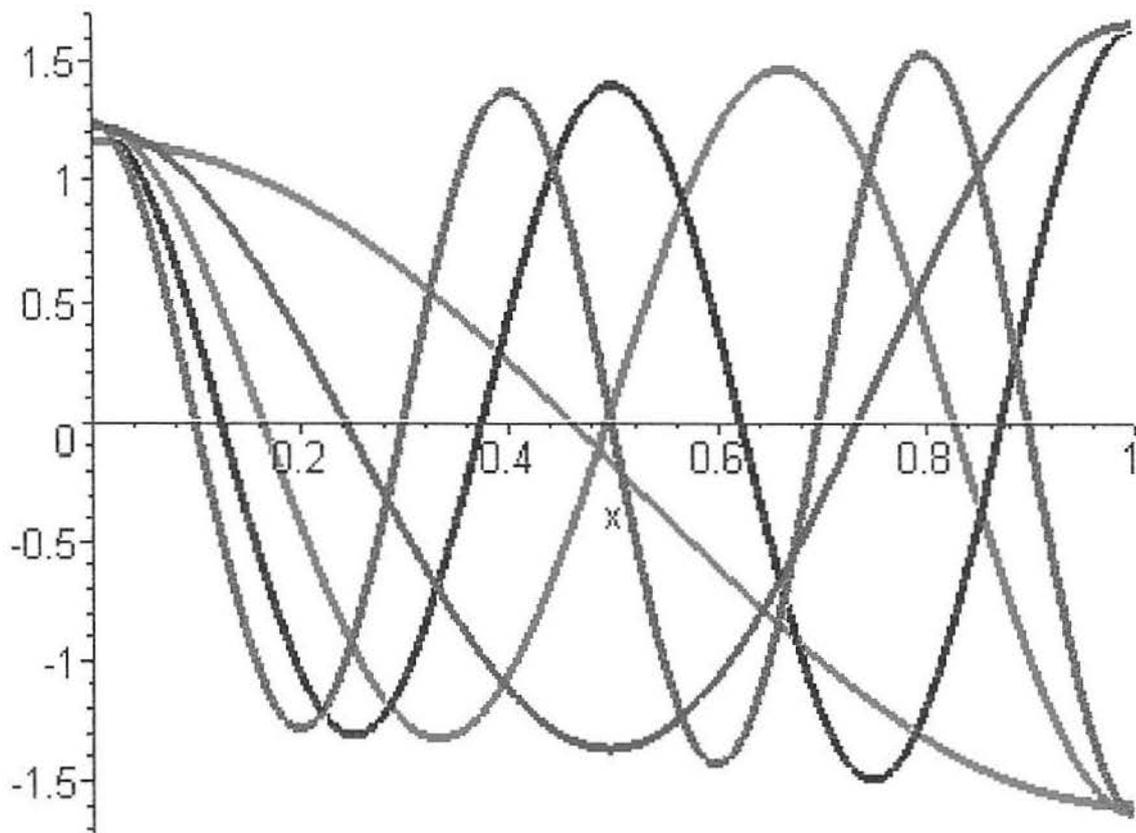


Figura 4.16 Gráfico dos primeiros cinco modos de uma viga deslizante-deslizante

4.9 Viga Deslizante-Livre

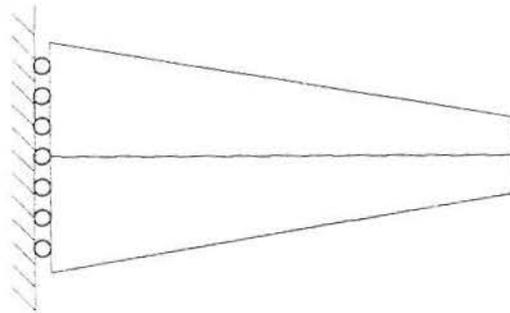


Figura 4.17 Viga do tipo deslizante-livre

Parâmetro c	Frequência Característica
2.479068249	42.92
5.552996773	215.34
8.675272223	525.57
11.80754304	973.61
14.94365239	1559.47

Tabela 4.11 Primeiros cinco valores do parâmetro c e das frequências características de uma viga deslizante-livre

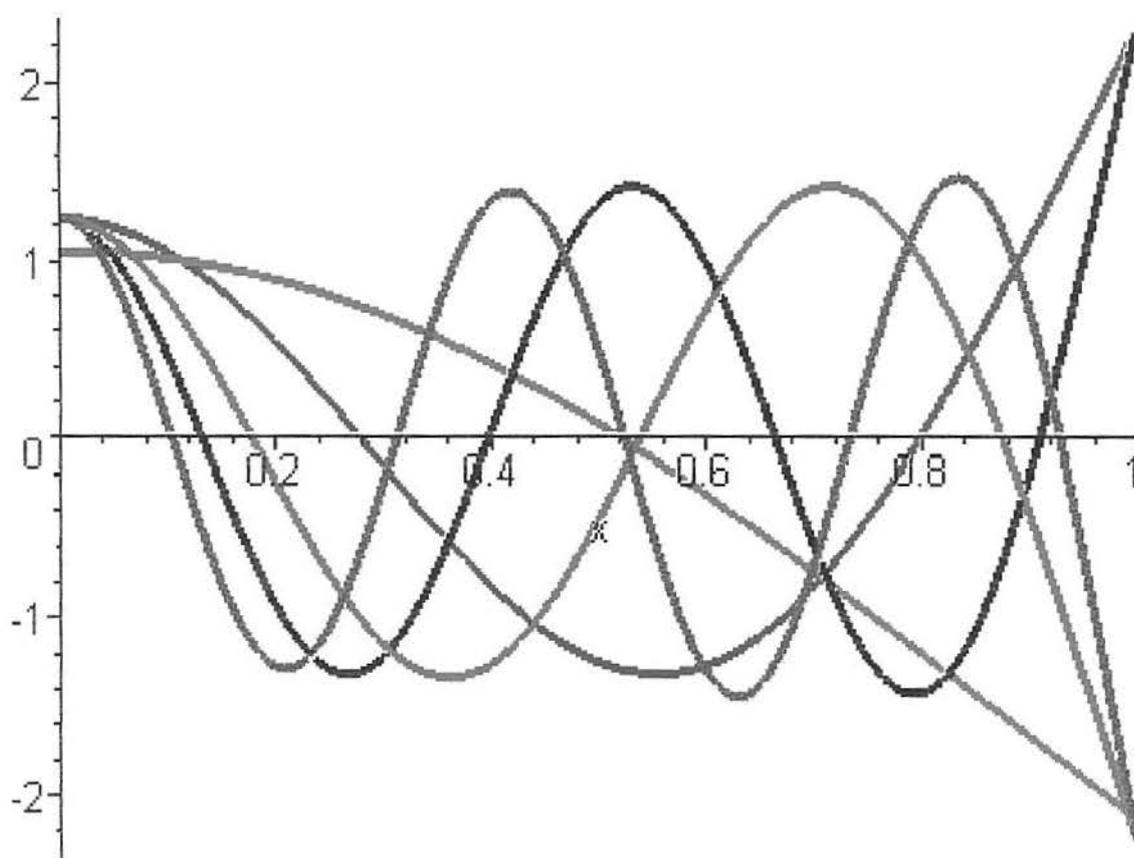


Figura 4.18 Gráfico dos primeiros cinco modos de uma viga deslizante-livre

4.10 Viga Livre-Livre

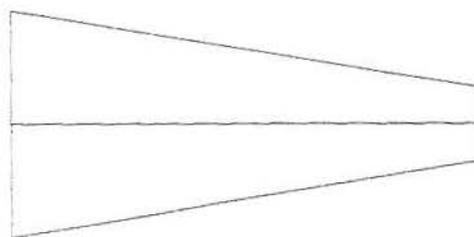


Figura 4.19 Viga do tipo livre-livre

Parâmetro c	Frequência Característica
4.738306594	156.79
7.859949861	431.42
11.00088703	845.12
14.14147581	1396.54
17.28239262	2085.79

Tabela 4.12 Primeiros cinco valores do parâmetro c e das frequências características de uma viga livre-livre

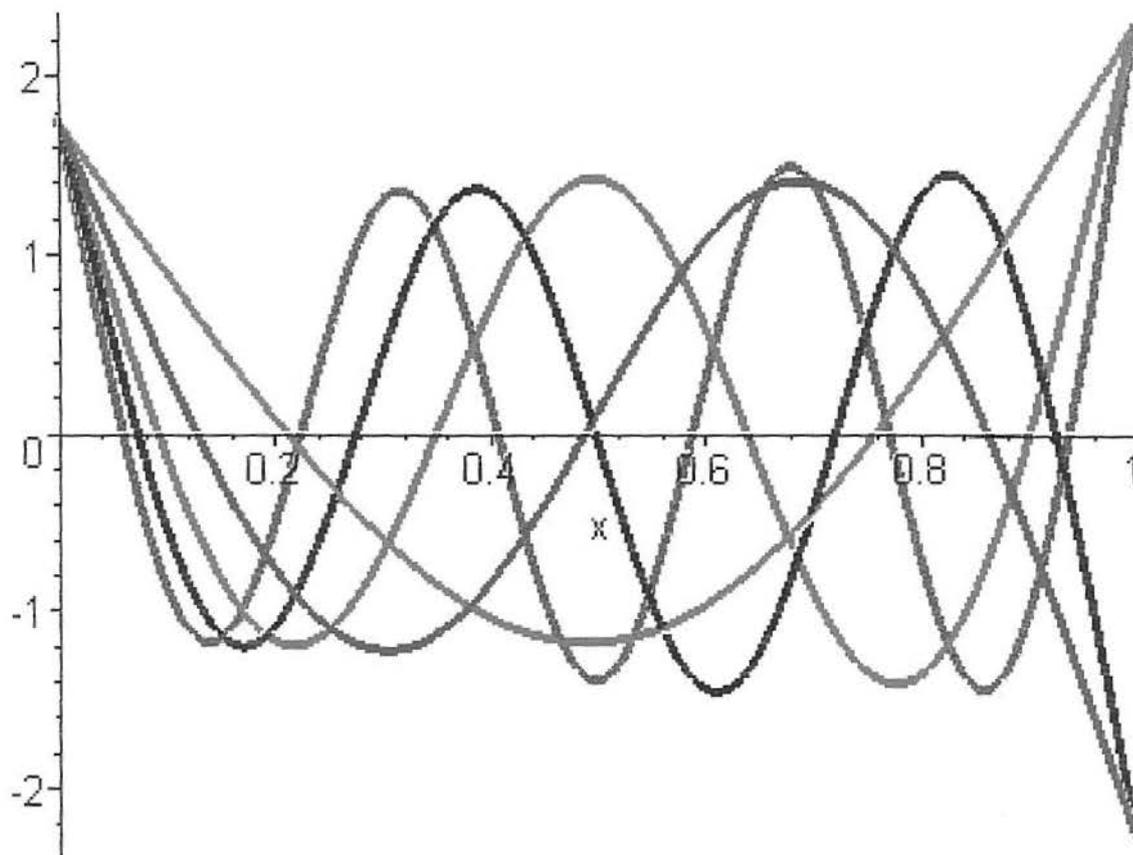


Figura 4.20 Gráfico dos primeiros cinco modos de uma viga livre-livre

4.11 Comentários sobre os Resultados

De acordo com os resultados obtidos, podem ser feitas as seguintes observações

- Quando o parâmetro β é negativo, a amplitude dos modos é pequena no extremo esquerdo e resulta maior no extremo direito da viga.
- Quando o parâmetro β é positivo, a amplitude dos modos é grande no extremo esquerdo e resulta menor no extremo direito da viga.
- Quando o parâmetro β é zero, a viga é uniforme e os modos coincidem com os das vigas já estudadas por Moschen, 1999.
- Quando o parâmetro β é, em geral, não nulo, as frequências características aumentam em relação às vigas uniformes.

5 CÁLCULO ANALÍTICO DOS MODOS DE VIGAS NÃO CLÁSSICAS

5.1 Condições de Contorno Não Clássicas

As condições de contorno aqui abordadas correspondem a reações restritivas lineares associadas a elementos elásticos e inerciais. Estas condições podem ocorrer sozinhas ou em conjunto com as outras.

Basicamente, neste trabalho, são consideradas quatro condições de contorno não clássicas, [Clough, 1993]: a mola lateral, a mola torsional, a massa concentrada e a massa inercial. Além destas existem muitas outras que aparecem com menos frequência.

Como no caso das condições de contorno clássicas, aqui também é requerido o cálculo simbólico dos modos utilizando as funções de base com condições normalizadas no extremo esquerdo ($x = 0$) da viga.

Similarmente à seção 3.1, para fins de simplificação, adotam-se siglas para denotar as diversas condições de contorno não clássicas de uma viga. Tais siglas são mostradas na tabela 5.1.

Condição	Mola Lateral	Mola Torsional	Massa Concentrada	Massa Rotacional
Sigla	K_m	K_r	M_c	I_c

Tabela 5.1 *Siglas para as Condições de Contorno não Clássicas*

Na tabela 5.2, são mostrados os esquemas que representam os diversos tipos de vigas com condições de contorno não clássicas consideradas.

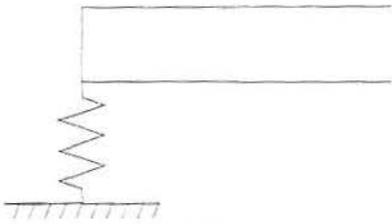
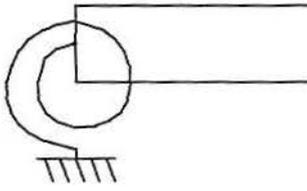
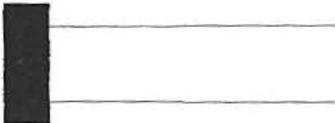
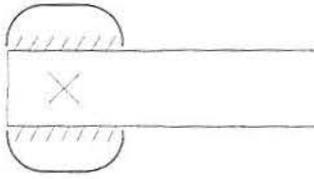
Tipo de Contorno	Esquema Físico
Mola lateral	
Mola torsional	
Massa concentrada	
Massa rotacional	

Tabela 5.2 Condições de Contorno Não Clássicas

A seguir, na tabela 5.3 são mostradas as equações correspondentes a cada condição de contorno não clássica. Cada condição de balanço de momento ou de força deve ser aumentada por uma condição em cada extremo, pois são requeridas duas em cada extremo. Um critério simples para determinar a condição adicional é observando que com a ausência do dispositivo o contorno fica livre, isto é, o momento fletor e a força de cisalhamento seriam nulos.

Outro fato importante de ser observado na tabela 5.3 é que existe mudança de sinais em um lado das igualdades quando se muda de extremo.

Extremo	Lado esquerdo	Lado direito
Mola Lateral	$\frac{\partial}{\partial x} \left[K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] (0, t) = -k_m u(0, t)$ $\left[K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] (0, t) = 0$	$\frac{\partial}{\partial x} \left[K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] (L, t) = k_m u(L, t)$ $\left[K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] (L, t) = 0$
Mola Torsional	$\left[K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] (0, t) = k_r \frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$ $\frac{\partial}{\partial x} \left[K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] (0, t) = 0$	$\left[K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] (L, t) = -k_r \frac{\partial u}{\partial x}(L, t)$ $\frac{\partial}{\partial x} \left[K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] (L, t) = 0$
Massa Concentrada	$\frac{\partial}{\partial x} \left[K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] (0, t) = -m_c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t)$ $\left[K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] (0, t) = 0$	$\frac{\partial}{\partial x} \left[K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] (L, t) = m_c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t)$ $\left[K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] (L, t) = 0$
Massa Rotacional	$\left[K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] (0, t) = i_c \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}(0, t)$ $\frac{\partial}{\partial x} \left[K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] (0, t) = 0$	$\left[K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] (L, t) = -i_c \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}(L, t)$ $\frac{\partial}{\partial x} \left[K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] (L, t) = 0$

Tabela 5.3 Condições de Contorno Não Clássicas

Na tabela 5.4, são mostradas as condições de contorno não clássicas da equação modal (2.15)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[K(x) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right] - \bar{m}(x) \omega^2 X(x) = 0, \quad (5.1)$$

para ambos extremos da viga. Pode-se observar que tais condições de contorno foram obtidas a partir das condições de contorno enunciadas na tabela 5.3.

As funções $\mathcal{M}(x)$ e $\mathcal{V}(x)$ já foram definidas nas equações (2.22) e (2.24) e representam os componentes espaciais do momento fletor e da força de cisalhamento, respectivamente.

Além do mais, tem-se incluído os parâmetros dos dispositivos

- k_m representa a rigidez da mola lateral,
- k_r representa a rigidez da mola torsional,
- m_c representa a massa colocada na extremidade da viga, e
- i_c representa o momento de inércia produzido pela massa rotacional.

Observa-se também que, como no caso da tabela 5.3, as condições na tabela 5.4 mudam de sinal quando se muda de extremo.

Caso	Extremo $x = 0$	Extremo $x = L$
$K_m - K_m$	$\mathcal{V}(0) = k_m X(0), \mathcal{M}(0) = 0$	$\mathcal{V}(L) = -k_m X(L), \mathcal{M}(L) = 0$
$K_m - K_r$	$\mathcal{V}(0) = k_m X(0), \mathcal{M}(0) = 0$	$\mathcal{M}(L) = k_r X'(L), \mathcal{V}(L) = 0$
$K_m - M_c$	$\mathcal{V}(0) = k_m X(0), \mathcal{M}(0) = 0$	$\mathcal{V}(L) = m_c \omega^2 X(L), \mathcal{M}(L) = 0$
$K_m - I_c$	$\mathcal{V}(0) = k_m X(0), \mathcal{M}(0) = 0$	$\mathcal{M}(L) = i_c \omega^2 X'(L), \mathcal{V}(L) = 0$
$K_r - K_r$	$\mathcal{M}(0) = -k_r X'(0), \mathcal{V}(0) = 0$	$\mathcal{M}(L) = k_r X'(L), \mathcal{V}(L) = 0$
$K_r - M_c$	$\mathcal{M}(0) = -k_r X'(0), \mathcal{V}(0) = 0$	$\mathcal{V}(L) = m_c \omega^2 X(L), \mathcal{M}(L) = 0$
$K_r - I_c$	$\mathcal{M}(0) = -k_r X'(0), \mathcal{V}(0) = 0$	$\mathcal{M}(L) = i_c \omega^2 X'(L), \mathcal{V}(L) = 0$
$M_c - M_c$	$\mathcal{V}(0) = -m_c \omega^2 X(0), \mathcal{M}(0) = 0$	$\mathcal{V}(L) = m_c \omega^2 X(L), \mathcal{M}(L) = 0$
$M_c - I_c$	$\mathcal{V}(0) = -m_c \omega^2 X(0), \mathcal{M}(0) = 0$	$\mathcal{M}(L) = i_c \omega^2 X'(L), \mathcal{V}(L) = 0$
$I_c - I_c$	$\mathcal{M}(0) = -i_c \omega^2 X'(0), \mathcal{V}(0) = 0$	$\mathcal{M}(L) = i_c \omega^2 X'(L), \mathcal{V}(L) = 0$

Tabela 5.4 *Condições de Contorno para a Equação Modal para uma Viga com Condições de Contorno não Clássicas*

5.2 Metodologia de Cálculo

Para fins de ilustração, considere-se a configuração de viga com mola lateral na extremidade esquerda e com mola torsional na extremidade direita, como é mostrado na figura 5.1

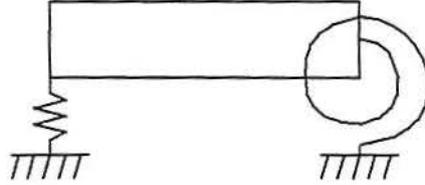


Figura 5.1 Viga de tipo mola lateral-mola torsional

Como sempre, a equação modal está dada por (2.15)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[K(x) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right] - \bar{m}(x) \omega^2 X(x) = 0,$$

sujeita a quatro condições de contorno.

De acordo com a tabela 5.4, tem-se então duas condições de contorno na extremidade esquerda

$$\mathcal{V}(0) = k_m X(0), \quad \mathcal{M}(0) = 0, \quad (5.2)$$

e duas condições de contorno na extremidade direita

$$\mathcal{M}(L) = k_r X'(L), \quad \mathcal{V}(L) = 0. \quad (5.3)$$

O modo de vibração da viga está dado, de maneira geral, pela igualdade (2.27)

$$X(x) = X(0) \bar{\phi}_1(x) + X'(0) \bar{\phi}_2(x) - \frac{\mathcal{M}(0)}{K(0)} \bar{\phi}_3(x) - \frac{1}{K(0)} \left(\mathcal{V}(0) - \frac{K'(0)}{K(0)} \mathcal{M}(0) \right) \bar{\phi}_4(x),$$

e então, devido às condições (5.2) tem-se que

$$X(x) = X(0)\bar{\phi}_1(x) + X'(0)\bar{\phi}_2(x) - \frac{k_m X(0)}{K(0)}\bar{\phi}_4(x). \quad (5.4)$$

A segunda das condições de contorno em (5.3),

$$\mathcal{V}(L) = 0 \quad (5.5)$$

implica que

$$K(L)X'''(L) + K'(L)X''(L) = 0 \quad (5.6)$$

e, utilizando a última igualdade junto com (5.4), tem-se que

$$X'(0) = \frac{\frac{k_m K(L)}{K(0)}\bar{\phi}_4'''(L) - K(L)\bar{\phi}_1'''(L) - K'(L)\bar{\phi}_1''(L) + \frac{k_m K'(L)}{K(0)}\bar{\phi}_4''(L)}{K(L)\bar{\phi}_2'''(L) + K'(L)\bar{\phi}_2''(L)} X(0). \quad (5.7)$$

Agora, pode-se substituir (5.7) em (5.4) e considerando que o modo é único exceto por um fator escalar, obtém-se

$$\begin{aligned} X(x) = & K(L)(\bar{\phi}_2'''(L)\bar{\phi}_1(x) - \bar{\phi}_1'''(L)\bar{\phi}_2(x)) + K'(L)(\bar{\phi}_2''(L)\bar{\phi}_1(x) - \bar{\phi}_1''(L)\bar{\phi}_2(x)) \\ & + \frac{k_m K(L)}{K(0)}(\bar{\phi}_4'''(L)\bar{\phi}_2(x) - \bar{\phi}_2'''(L)\bar{\phi}_4(x)) \\ & + \frac{k_m K'(L)}{K(0)}(\bar{\phi}_4''(L)\bar{\phi}_2(x) - \bar{\phi}_2''(L)\bar{\phi}_4(x)) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Pode-se conseguir maior simplicidade algébrica, definindo a função $\bar{\phi}_{ij,k}(x)$ para $i, j = 1, 2, 3, 4$ e $k = 0, 1, 2, 3$ como segue

$$\boxed{\bar{\phi}_{ij,k}(x) = \bar{\phi}_i^{(k)}(L)\bar{\phi}_j(x) - \bar{\phi}_j^{(k)}(L)\bar{\phi}_i(x)}, \quad (5.9)$$

onde

$$\bar{\phi}_i^{(k)}(L) = \left. \frac{d^k}{dx^k} \bar{\phi}_i(x) \right|_{x=L}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3 \quad (5.10)$$

com

$$\left. \frac{d^0}{dx^0} \bar{\phi}_i(x) \right|_{x=L} = \bar{\phi}_i(L). \quad (5.11)$$

A equação (5.9) permite escrever o modo $X(x)$ obtido na equação (5.8)

como

$$X(x) = K(L)\bar{\phi}_{21,3}(x) + K'(L)\bar{\phi}_{21,2}(x) + \frac{k_m K(L)}{K(0)}\bar{\phi}_{42,3}(x) + \frac{k_m K'(L)}{K(0)}\bar{\phi}_{42,2}(x). \quad (5.12)$$

A equação característica proveniente da primeira igualdade da equação (5.3),

$$\mathcal{M}(L) = k_r X'(L), \quad (5.13)$$

está dada por

$$k_r X'(L) + K(L)X''(L) = 0 \quad (5.14)$$

onde $X'(L)$ e $X''(L)$ são calculadas a partir da expressão algébrica para o modo $X(x)$ (5.12), e que em termos das funções $\bar{\phi}_{i,j,k}(x)$ pode ser rescrita como

$$k_r K(L)\bar{\phi}'_{21,3}(L) + k_r K'(L)\bar{\phi}'_{21,2}(L) + \frac{k_m k_r K(L)}{K(0)}\bar{\phi}'_{42,3}(L) + \frac{k_m k_r K'(L)}{K(0)}\bar{\phi}'_{42,2}(L) + K^2(L)\bar{\phi}''_{21,3}(x) + K(L)K'(L)\bar{\phi}''_{21,2}(x) + \frac{k_m K^2(L)}{K(0)}\bar{\phi}''_{42,3}(x) + \frac{k_m K(L)K'(L)}{K(0)}\bar{\phi}''_{42,2}(x) = 0 \quad (5.15)$$

Deve-se salientar que a definição (5.9) é muito útil, não só pela sua simplicidade algébrica mas pela facilidade com que pode ser inserido na programação simbólica para o cálculo das frequências características e dos modos de vibração de diversos tipos de configurações de vigas.

De maneira similar, foram calculados os modos para os outros tipos de vigas com condições não clássicas e os resultados obtidos foram arranjados na tabela 5.5. Por simplicidade, escolheu-se a forma compacta (5.14) da equação característica.

Viga	Modo $X(x)$	Equação Característica
$K_m - K_m$	$K(0)\bar{\phi}_{21,2}(x) + k_m\bar{\phi}_{42,2}(x)$	$k_m X(L) - K(L)X'''(L) = 0$
$K_m - K_r$	$K(L)\bar{\phi}_{21,3}(x) + K'(L)\bar{\phi}_{21,2}(x) + \frac{k_m K(L)}{K(0)}\bar{\phi}_{42,3}(x) + \frac{k_m K'(L)}{K(0)}\bar{\phi}_{42,2}(x)$	$k_r X'(L) + K(L)X''(L) = 0$
$K_m - M_c$	$K(0)\bar{\phi}_{21,2}(x) + k_m\bar{\phi}_{42,2}(x)$	$m_c \omega^2 X(L) + K'(L)X''(L) + K(L)X'''(L) = 0$
$K_m - K_r$	$K(L)\bar{\phi}_{21,3}(x) + K'(L)\bar{\phi}_{21,2}(x) + \frac{k_m K(L)}{K(0)}\bar{\phi}_{42,3}(x) + \frac{k_m K'(L)}{K(0)}\bar{\phi}_{42,2}(x)$	$i_c \omega^2 X'(L) + K(L)X''(L) = 0$
$K_r - K_r$	$K(L)\bar{\phi}_{12,3}(x) + K'(L)\bar{\phi}_{12,2}(x) + \frac{k_r K(L)}{K(0)}\bar{\phi}_{13,3}(x) + \frac{k_r K'(L)}{K(0)}\bar{\phi}_{13,2}(x)$	$k_r X'(L) + K(L)X''(L) = 0$
$K_r - M_c$	$K(0)\bar{\phi}_{13,2}(x) + K'(0)\bar{\phi}_{41,2}(x)$	$m_c \omega^2 X(L) + K'(L)X''(L) + K(L)X'''(L) = 0$
$K_r - I_c$	$K(L)\bar{\phi}_{12,3}(x) + K'(L)\bar{\phi}_{12,2}(x) + \frac{k_r K(L)}{K(0)}\bar{\phi}_{13,3}(x) + \frac{k_r K'(L)}{K(0)}\bar{\phi}_{13,2}(x)$	$i_c \omega^2 X'(L) + K(L)X''(L) = 0$
$M_c - M_c$	$\bar{\phi}_{21,2}(x) + \frac{m_c \omega^2}{K(0)}\bar{\phi}_{24,2}(x)$	$m_c \omega^2 X(L) + K'(L)X''(L) + K(L)X'''(L) = 0$
$M_c - I_c$	$K(L)\bar{\phi}_{21,3}(x) + K'(L)\bar{\phi}_{21,2}(x) + \frac{m_c \omega^2}{K(0)}(K(L)\bar{\phi}_{24,3}(x) + K'(L)\bar{\phi}_{24,2}(x))$	$i_c \omega^2 X'(L) + K(L)X''(L) = 0$
$I_c - I_c$	$K(L)\bar{\phi}_{12,3}(x) + K'(L)\bar{\phi}_{12,2}(x) + \frac{i_c \omega^2}{K(0)}(K(L)\bar{\phi}_{13,3}(x) + K'(L)\bar{\phi}_{13,2}(x)) + \frac{i_c \omega^2 K'(0)}{K^2(0)}(K(L)\bar{\phi}_{41,3}(x) + K'(L)\bar{\phi}_{41,2}(x))$	$i_c \omega^2 X'(L) + K(L)X''(L) = 0$

Tabela 5.5 Modos e equações características para diversas configurações não clássicas de vigas (não-uniformes).

5.3 Vigas Não Clássicas com Seção Transversal Contínua

A presença dos dispositivos mecânicos nas extremidades da viga só modifica as condições de contorno da equação modal. Os modos e frequências características da viga foram calculadas na seção anterior na tabela 5.5.

Por outro lado, o fato que a seção transversal da viga seja constante ou contínua em geral implica na utilização de funções de base que já foram vistas nas seções 3.3 e 3.4 para o caso constante ou variável, respectivamente. Tais funções podem ser utilizadas também no caso das condições de contorno não clássicas.

6 CÁLCULO ANALÍTICO DOS MODOS DE VIGAS BISEGMENTADAS

Neste capítulo, é feito o cálculo analítico dos modos relativos às vibrações transversais de vigas bissegmentadas, isto é, com a presença de dispositivos mecânicos intermediários, descritas pela equação de Euler-Bernoulli:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[K(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = p(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (6.1)$$

O cálculo dos modos é feito resolvendo a equação modal

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[K(x) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right] - \bar{m}(x) \omega^2 X(x) = 0, \quad (6.2)$$

correspondente à equação (6.1).

Na seção a seguir, aborda-se o problema de determinar o modo $X(x)$ perante a presença de dispositivos mecânicos intermediários. Na prática, podem aparecer configurações de vigas bem mais complicadas, que não serão abordadas neste trabalho, pela sua dificuldade algébrica.

6.1 Configurações de Vigas com Dispositivos Intermediários

Os tipos mais comuns de dispositivos intermediários encontrados na literatura, Clough & Penzien, 1993; são descritos na tabela 6.1.

Na tabela 6.2, são mostradas as condições de continuidade para os respectivos dispositivos intermediários. Supõe-se que o dispositivo está localizado na posição $x = \mu$.

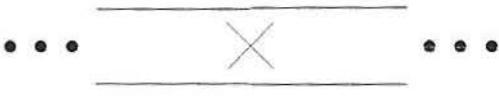
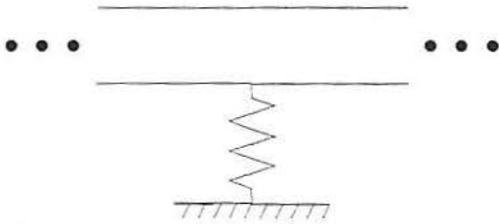
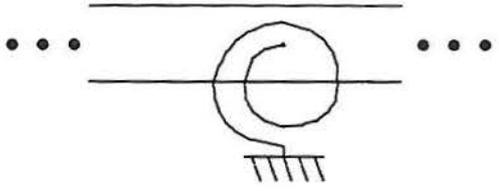
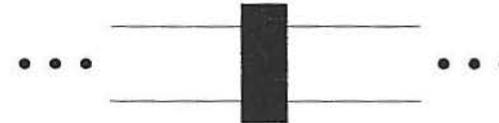
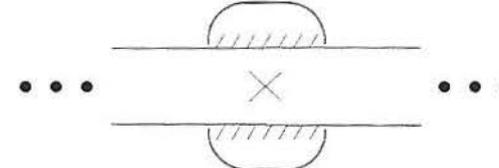
Tipo de Dispositivo	Esquema Físico
Apoio simples (A)	
Mola lateral (K_m)	
Mola torsional (K_r)	
Massa concentrada (M_c)	
Massa rotacional (I_c)	

Tabela 6.1 *Dispositivos Mecânicos Intermediários*

Dispositivo	Condições de Continuidade
Apoio Simples	$u(\mu^-, t) = u(\mu^+, t) = 0$ $u_x(\mu^-, t) = u_x(\mu^+, t)$ $M(\mu^-, t) = M(\mu^+, t)$
Massa Concentrada	$u(\mu^-, t) = u(\mu^+, t)$ $u_x(\mu^-, t) = u_x(\mu^+, t)$ $M(\mu^-, t) = M(\mu^+, t)$ $V(\mu^-, t) = V(\mu^+, t) + m_c u_{tt}(\mu^-, t)$
Massa Rotacional	$u(\mu^-, t) = u(\mu^+, t)$ $u_x(\mu^-, t) = u_x(\mu^+, t)$ $M(\mu^-, t) = M(\mu^+, t) + i_c u_{ttx}(\mu^-, t)$ $V(\mu^-, t) = V(\mu^+, t)$
Mola Lateral	$u(\mu^-, t) = u(\mu^+, t)$ $u_x(\mu^-, t) = u_x(\mu^+, t)$ $M(\mu^-, t) = M(\mu^+, t)$ $V(\mu^-, t) = V(\mu^+, t) + k_m u(\mu^-, t)$
Mola Torsional	$u(\mu^-, t) = u(\mu^+, t)$ $u_x(\mu^-, t) = u_x(\mu^+, t)$ $M(\mu^-, t) = M(\mu^+, t) + k_r u_x(\mu^-, t)$ $V(\mu^-, t) = V(\mu^+, t)$

6.2 Equação Modal e Condições de Continuidade

O cálculo dos modos é feito através da equação modal

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[K(x) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right] - \bar{m}(x) \omega^2 X(x) = 0, \quad (6.3)$$

sendo $X(x)$ o componente espacial do deslocamento da viga $u(x, t) = e^{i\omega t} X(x)$.

É conveniente calcular o modo $X(x)$ em duas parcelas, como é mostrado na figura 6.1

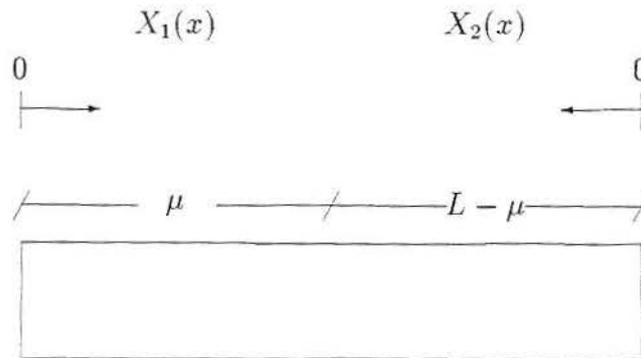


Figura 6.1 Esquema de segmentação do modo $X(x)$

O modo $X(x)$ é montado a partir de $X_1(x)$ e $X_2(x)$ como segue

$$X(x) = \begin{cases} X_1(x), & 0 \leq x \leq \mu \\ X_2(L - x), & \mu \leq x \leq L \end{cases} \quad (6.4)$$

As condições de continuidade que aparecem enumeradas na tabela 6.2, podem ser traduzidas de maneira que representem condições de continuidade para a função modal $X(x)$ na posição $x = \mu$. Isto pode ser visto na tabela 6.3.

Desta maneira, dada qualquer configuração de viga bissegmentada, com um dispositivo intermediário, ter-se-á um problema de valor de contorno con-

Caso	Deslocamento	Giro	Momento Fletor	Força de Cisalhamento
A	$X_1(\mu) = X_2(L - \mu) = 0$	$X_1'(\mu) = -X_2'(L - \mu)$	$X_1''(\mu) = X_2''(L - \mu)$	-
M_c	$X_1(\mu) = X_2(L - \mu)$	$X_1'(\mu) = -X_2'(L - \mu)$	$X_1''(\mu) = X_2''(L - \mu)$	$K'(\mu)X_1''(\mu) + K(\mu)X_1'''(\mu) =$ $-K'(\mu)X_2''(L - \mu) - K(\mu)X_2'''(L - \mu)$ $+m_c\omega^2 X_1(\mu)$
I_c	$X_1(\mu) = X_2(L - \mu)$	$X_1'(\mu) = -X_2'(L - \mu)$	$K(\mu)X_1''(\mu) = K(\mu)X_2''(L - \mu)$ $+i_c\omega^2 X_1'(\mu)$	$X_1'''(\mu) = -X_2'''(L - \mu)$
K_m	$X_1(\mu) = X_2(L - \mu)$	$X_1'(\mu) = -X_2'(L - \mu)$	$X_1''(\mu) = X_2''(L - \mu)$	$-K'(\mu)X_1''(\mu) - K(\mu)X_1'''(\mu) =$ $K'(\mu)X_2''(L - \mu) + K(\mu)X_2'''(L - \mu)$ $+k_m X_1(\mu)$
K_r	$X_1(\mu) = X_2(L - \mu)$	$X_1'(\mu) = -X_2'(L - \mu)$	$K(\mu)X_1''(\mu) = K(\mu)X_2''(L - \mu)$ $-k_r X_1'(\mu)$	$X_1'''(\mu) = -X_2'''(L - \mu)$

Tabela 6.3 *Condições de Continuidade para Vigas com um Dispositivo Intermediário Clássico ou Não Clássico*

siderando a equação diferencial (6.3) junto com quatro condições de contorno e quatro condições de continuidade.

6.3 Metodologia de Cálculo Modal

A abordagem apresentada a seguir, considera uma técnica algébrica mais ou menos simples para obter o modo normal e a frequência característica de uma viga: a informação das condições de contorno e de continuidade, junto com a forma modal calculada em (2.27).

De acordo com a forma modal geral, calculada em (2.27), tem-se

$$X(x) = X(0)\bar{\phi}_1(x) + X'(0)\bar{\phi}_2(x) - \frac{\mathcal{M}(0)}{K(0)}\bar{\phi}_3(x) - \frac{1}{K(0)} \left(\mathcal{V}(0) - \frac{K'(0)}{K(0)}\mathcal{M}(0) \right) \bar{\phi}_4(x). \quad (6.5)$$

Para fins de ilustração considere-se a viga do tipo $L - M_c - L$ mostrada na figura 6.2

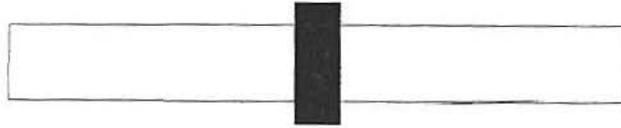


Figura 6.2 Viga do tipo $L - M_c - L$

Então, devido a que o momento fletor e a força de cisalhamento são nulos nos extremos livres, então tem-se que $\mathcal{M}(0) = \mathcal{V}(0) = 0$. Portanto, para o segmento esquerdo tem-se que

$$X_1(x) = X_1(0)\bar{\phi}_1(x) + X_1'(0)\bar{\phi}_2(x), \quad 0 \leq x \leq \mu, \quad (6.6)$$

e, para o segmento direito

$$X_2(x) = X_2(0)\bar{\phi}_1(L-x) + X_2'(0)\bar{\phi}_2(L-x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (6.7)$$

Nas equações (6.6) e (6.7), as incógnitas são $X_1(0)$, $X_1'(0)$, $X_2(0)$ e $X_2'(0)$. Para a determinação de tais quantidades, utilizam-se três das quatro condições de continuidade, e a restante condição de continuidade é utilizada para determinar a equação característica e portanto, para calcular a frequência característica.

Assim, são utilizadas as seguintes três condições de continuidade

$$\begin{aligned} X_1(\mu) &= X_2(L - \mu), \\ X_1'(\mu) &= -X_2'(L - \mu), \\ X_1''(\mu) &= X_2''(L - \mu), \end{aligned} \quad (6.8)$$

junto com as equações (6.6) e (6.7). Exceto por uma constante, o modo $X(x)$ está dado pelas componentes

$$\begin{aligned} X_1(x) &= [\bar{\phi}_2(\mu)\bar{\phi}_{21,12}(L - \mu, L - \mu) + \bar{\phi}_2'(\mu)\bar{\phi}_{21,02}(L - \mu, L - \mu) \\ &+ \bar{\phi}_2''(\mu)\bar{\phi}_{21,01}(L - \mu, L - \mu)]\bar{\phi}_1(x) + [\bar{\phi}_1(\mu)\bar{\phi}_{12,12}(L - \mu, L - \mu) \\ &+ \bar{\phi}_1'(\mu)\bar{\phi}_{12,02}(L - \mu, L - \mu) + \bar{\phi}_1''(\mu)\bar{\phi}_{12,01}(L - \mu, L - \mu)]\bar{\phi}_2(x) \end{aligned} \quad (6.9)$$

e

$$\begin{aligned} X_2(x) &= [\bar{\phi}_1'(\mu)\bar{\phi}_{22,20}(\mu, L - \mu) + \bar{\phi}_2'(\mu)\bar{\phi}_{12,20}(\mu, L - \mu) \\ &+ \bar{\phi}_2'(L - \mu)\bar{\phi}_{21,02}(\mu, \mu)]\bar{\phi}_1(x) + \bar{\phi}_2(x). \end{aligned} \quad (6.10)$$

A função $\bar{\phi}_{ij,kl}$ está definida algebricamente como

$$\bar{\phi}_{ij,kl}(x, y) = \bar{\phi}_i^{(k)}(y)\bar{\phi}_j^{(l)}(x) - \bar{\phi}_j^{(k)}(x)\bar{\phi}_i^{(l)}(y). \quad (6.11)$$

A equação característica está dada pela quarta condição de continuidade, expressa em termos de $X_1(x)$ e $X_2(x)$:

$$K(\mu)X_1'''(\mu) + K'(\mu)X_1''(\mu) = -K(\mu)X_2'''(L - \mu) - K'(\mu)X_2''(L - \mu) + m_c\omega^2 X_1(\mu). \quad (6.12)$$

7 CONCLUSÕES

Neste trabalho, apresentou-se uma metodologia simbólica destinada ao cálculo algébrico dos modos e a equação característica para configurações clássicas e não clássicas de vigas monossegmentadas e bissegmentadas com seção transversal contínua (constante ou variável). O ponto chave da metodologia está na imposição de uma condição de normalização nas funções de base para construir os modos normais. Isto facilita a interpretação dos modos como configurações estáticas do deslocamento com interrelações físico-matemáticas, que não aparecem quando são utilizadas outras funções de base que aparecem comumente na literatura.

A metodologia provou ser simples no caso de vigas monossegmentadas com condições clássicas e não clássicas, requerendo o auxílio do computador no caso de configurações bissegmentadas. Foi necessária a introdução de novas definições algébricas para simplificar mais ainda o forma funcional dos modos.

Esta abordagem provou ter uma característica unificadora pois pode ser utilizada para uma ampla variedade de tipos de vigas. Em diversas dissertações sobre o modelo de Euler-Bernoulli no PPGMAp, por exemplo, Moschen, 1999; Morelato, 2000; Pasin, 2001; Juver, 2002, entre outras, foi feita uma abordagem matricial com auxílio de software simbólico e de maneira independente. A metodologia proposta neste trabalho pode ser aplicada nos trabalhos mencionados acima.

Sugere-se, para dar continuidade à aplicação desta metodologia, a implementação de programas computacionais unificados para o cálculo modal dos diversos tipos de vigas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Auciello, N.M., Nole, G., 1998, "Vibrations of a cantilever tapered beam with varying section properties and carrying a mass at the free end", **Journal of Sound and Vibration**. Vol 214(1), pp. 105-119.

Chang, K.T., Leung, T.P, Wong, W.Q., 1996. "Free Vibration of Simply Supported Beams partially loaded with Distributed Mass", **Journal of Sound and Vibration**. Vol 191(4), pp. 590-597.

Chen, Y., 1963. "On the Vibration of Beams or Rods carrying a Concentrated Mass", **ASME, Journal of Applied Mechanics**. Vol 30, pp. 310-311.

Chopra, A.K., 1995, "**Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering**", Prentice Hall, New Jersey.

Claeysen, J.C.R., 1990, "On Predicting the Response of Non-Conservative Linear Vibrating Systems by Using Dynamical Matrix Solutions. **Journal of Sound and Vibration**, 140(1): 73-84.

Claeysen, J.C.R., Suazo, G.C., Jung, C., 1999, " A Direct Approach to Second-Order Matrix Non-Classical Vibrating Equations". **Applied Numerical Mathematics**, Vol 39, pp. 65-78.

Claeysen, J.C.R., Chiwiacowsky, L.D., Suazo, G. C., 2002, "The Impulse Response in the Symbolic Computing of Modes for Beams and Plates". **Applied Numerical Mathematics**, Vol 40, pp. 119-135.

Claeysen, J.C.R., Soder, R., " A Dynamical Basis for Computing the Modes of Euler-Bernoulli and Timoshenko Beams". A ser publicado no **Journal of Sound and Vibrations**.

Clough, R.W., Penzien, J., 1993, "**Dynamics of Structures**", McGraw-Hill, New York.

Den Hartog, J.P., 1988, "**Mechanical Vibrations**", McGraw-Hill, New York.

Inman, D., 1989, "**Vibration, with Control, Measurement, and Stability**". Prentice Hall, Englewood Cliffs.

Inman, D., 1994, "**Engineering Vibration**". Prentice Hall, Englewood Cliffs.

Korçingskee, E. L., 1953. "**Vibrations of Tall Buildings**", Moscow Press, Moscow.

Jeary, A. P., 1997, "**Designer's Guide to the Dynamic Response of Structures**", E & EN Spon, London.

Juver, J. R. B., 2002, "**Modos em Vigas com Seção Transversal de Variação Linear**". Dissertação de Mestrado, UFRGS/PPGMAp, Porto Alegre.

Lau, J.H., 1984, "Vibration frequencies for a non uniform beam with end mass", **Journal of Sound and Vibration**. Vol 97(3), pp. 513-521.

Lee, S.Y., Kee, H.Y., 1990, "Free vibrations of a non uniform beam with general elastically restrained boundary conditions", **Journal of Sound and Vibration**. Vol 136(3), pp. 425-437.

Li, Q.S., Cao, H., Li, G.Q., 1994, "Analysis of Free Vibrations of Tall Buildings", **ASCE, Journal of Engineering Mechanics**. Vol 120(9), pp. 1861-1876.

Li, Q.S., Cao, H., Li, G.Q., 1996, "Static and dynamic analysis of straight bars with variable cross-sections", **International Journal of Computer & Structures**. Vol 59(6), pp. 1185-1191.

Li, Q.S., Fang, J.Q., Jeary, C.K., 1998, "Full scale measurements of wind effects on Tall Buildings", **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**. 74-76, pp. 741-750.

Li, Q.S., 2000, "An Exact Approach for Free Flexural Vibrations of Multistep Nonuniform Beams", **Journal of Sound and Vibration**. 6, pp. 963-983.

Meirovitch, L., 1975, "Elements of Vibration Analysis." Mc Graw - Hill, Inc.

Morelato, T., 2000, "Cálculo de Modos Vibratórios no Modelo Estrutural de Euler-Bernoulli com Condições de Contorno Não-Clássicas". Dissertação de Mestrado, UFRGS/PPGMAp, Porto Alegre.

Moschen, I., 1999, "Cálculo Simbólico de Modos Vibratórios no Modelo de Euler Bernoulli para Vigas". Dissertação de Mestrado, UFRGS/PPGMAp, Porto Alegre.

Newland, D.E., 1989, "Mechanical Vibration Analysis and Computation". Longman Scientific & Technical, New York.

Pasin, E. T. R., 2001, "Cálculo dos Modos de Vibração no Modelo Estrutural de Euler-Bernoulli para Vigas Homogêneas Bissegmentadas". Dissertação de Mestrado, UFRGS/PPGMAp, Porto Alegre.

Soder, R. A. L., 2000, "Modos Flexurais sob a Influência de uma Força Axial". Dissertação de Mestrado, UFRGS/PPGMAp, Porto Alegre.

Wang, G. Y., 1958. "The calculation of earthquake loads acting on buildings." **Journal of Civil Engineering**. Vol. 5(2), pp. 16-32.

Wang, G. Y., 1963. "Free vibrations of multi-story buildings." **Journal of Harbin Architecture University**. Vol. 1, pp. 1-10.