

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

ANÁLISE GLOBAL DE CERTAS EQUAÇÕES DOS CIRCUITOS  
ELÉTRICOS

por

MAGALI SMANIOTTO

Porto Alegre, fevereiro de 2003

Dissertação submetida por Magali Smaniotto\* como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Artur Oscar Lopes

Banca Examinadora:

Dr. Jaime Bruck Ripoll

Dr. Leonardo Prange Bonorino

Dr. Ruy Coimbra Charão

Data de Defesa: 06 de fevereiro de 2003.

---

\* Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer em primeiro lugar aos meus pais Valdir e Helena. De vocês recebi o dom mais precioso: a vida. Já por isso seria infinitamente grata, mas vocês não se contentaram em presentear-me apenas com ela; revestiram minha existência de amor, carinho e dedicação; abrindo as portas do meu futuro. Hoje, procuro entre as palavras, aquela que gostaria que seus corações ouvissem do meu, e só encontro uma, simples e sincera: obrigado.

Quero expressar minha gratidão ao meu orientador Prof. Artur Oscar Lopes, assim como todos os demais professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática que tive oportunidade de conhecer, Prof. Jaime Bruck Ripoll, Prof. Ivan Edgar Pan Perez, Prof. Luis Gustavo Doninelli Mendes, Prof. Paulo Zingano, Profa. Ada Maria de Souza Doering, Profa. Elisabeth Ferreira da Costa Gomes, Profa. Sara Carmona, Prof. Eduardo Brietzke, Prof. Leonardo Bonorino.

Gostaria de agradecer também a Simone Cerezer, professora e amiga, pelo incentivo e apoio que recebi na minha vinda a Porto Alegre.

Aos meus amigos, Ana, Marlon, Virgínia e Leonardo pelo apoio, pelas dificuldades divididas e pela alegria das vitórias; e também aos demais colegas da Pós pela solidariedade e companheirismo.

Ao Humberto pela compreensão dos momentos de silêncio, pelo carinho e apoio constantes.

## ÍNDICE

RESUMO.....	04
ABSTRACT .....	05
INTRODUÇÃO .....	06
§1 A EQUAÇÃO DE VAN DER POL .....	13
§2 A EQUAÇÃO DE LIENARD .....	41
REFERÊNCIAS .....	44

## RESUMO

Neste trabalho analisamos a Equação de Lienard  $x' = y - f(x)$ ,  $y' = -x$  onde  $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  é de classe  $C^1$ . Posteriormente, apresentamos um estudo completo do retrato de fase da Equação de Van der Pol, mostrando que ela possui uma solução periódica e que toda solução não periódica tende para ela.

A Equação de Van der Pol é encontrada quando tomamos  $f(x) = x^3 - x$ ,  $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  na Equação de Lienard.

Ao fim do trabalho apresentamos uma prova para sistemas de equações diferenciais mais gerais do que a de Lienard.

## ABSTRACT

In this work we analysed the Lienard Equations  $x' = y - f(x)$ ,  $y' = -x$ , where  $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$  is  $C^1$  function. Later, we did a complete study of the phase portrait of the Van der Pol Equation, proving that it has a periodic solution and that every non periodic solution tends to this periodic solution.

The Van der Pol Equation is found when we take  $f(x) = x^3 - x$ ,  $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  in the Lienard Equation.

At the final of this work, we presented a proof to more general systems of differential equations than Lienard.

## INTRODUÇÃO

Vamos analisar neste trabalho a equação diferencial dada pela expressão abaixo:

$$(0.1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - f(x) \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

onde  $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$  é uma função de classe  $C^1$ .

Esta equação diferencial é denominada de Equação de Lienard. Se  $f(x) = x^3 - x$ , então (0.1) é denominada de Equação de Van der Pol.

Observe que o ponto  $(0, 0)$  é de equilíbrio para a equação diferencial (0.1), se  $f(0) = 0$ .

Consideraremos primeiramente, como exemplo, o caso mais simples, quando  $f$  é linear.

Seja  $f(x) = Kx$ ,  $K > 0$ . Então a Equação de Lienard tem a expressão:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - Kx \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

Considere  $Z = (x, y)$ . Podemos escrever a equação acima da seguinte forma:

$Z' = AZ$ , onde

$$A = \begin{pmatrix} -K & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico é:  $(-K - \lambda)(-\lambda) - (-1) = \lambda^2 + K\lambda + 1$ .

Assim, os valores característicos são:  $\lambda = \frac{-K \pm (K^2 - 4)^{\frac{1}{2}}}{2}$ .

É fácil ver que  $\lambda$  sempre tem a parte real negativa. Assim temos que  $A$  é um atrator e a origem  $(0, 0)$  é um poço. Então pelo Teorema de Liapunov (Ver Sotomayor, 1979, cap. VIII, seção 1, corolário 9),  $(0, 0)$  é um equilíbrio assintoticamente estável. Além disso, vê-se que  $(0, 0)$  é um poço "espiralado" exatamente quando  $K < 2$ , pois neste caso os autovalores terão a forma  $a \pm bi$ ,  $a < 0$ .

A demonstração dos fatos acima mencionados pode ser vista em detalhes no livro de J. Sotomayor [9].

Vamos agora considerar os pontos de equilíbrio de (0.1) para uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  classe  $C^1$ .

Existe um único equilíbrio  $\bar{Z}$  de (1) obtido por:

$$\begin{cases} y - f(x) = 0 \\ -x = 0 \end{cases}$$

ou

$$\bar{Z} = (0, f(0))$$

A matriz da primeira derivada parcial de (0.1) aplicada em  $(0, f(0))$  é dada por  $\begin{pmatrix} -f'(0) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

O polinômio característico é:  $(-f'(0) - \lambda)(-\lambda) - (-1) = \lambda^2 + f'(0)\lambda + 1$  e seus valores característicos são dados por:  $\lambda = \frac{-f'(0) \pm (f'(0)^2 - 4)^{\frac{1}{2}}}{2}$ .

Com isto concluímos que  $\bar{Z}$  é um poço se  $f'(0) > 0$ , pois seus autovalores terão a parte real negativa e  $\bar{Z}$  é uma fonte se  $f'(0) < 0$ , pois seus autovalores terão a parte real positiva.

Em particular para a equação de Van der Pol ( $f(x) = x^3 - x$ ) o único equilíbrio é  $(0, 0)$ , que é uma fonte, pois  $f'(0) = -1 < 0$ .

Equações do tipo acima são extensamente utilizadas em aplicações a circuitos elétricos. Isto pode ser observado no trabalho "On the Mathematical Foundations of Electrical Circuit Theory", [8]. Ver também [4] e [5].

**Definição:** Seja o fluxo  $\phi_t$  associado a equação diferencial (0.1). Dizemos que se  $(x, y)$  é tal que  $\phi_{t_0}(x, y) = (x, y)$  para um certo  $(x, y)$  e  $t_0 > 0$ ,  $(x, y)$  não de equilíbrio,  $\{\phi_t; 0 \leq t \leq t_0\}$  define uma solução periódica.

Vamos iniciar agora o estudo da Equação de Lienard para a função  $f(x) = x^3 - x$ . Deste modo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - f(x) \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

terá a expressão

$$(0.2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^3 + x \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

Esta equação é chamada de Equação de Van der Pol. Neste trabalho vamos fazer uma análise completa do seu retrato de fase e provar o seguinte resultado:

**Teorema 1:** Existe uma solução periódica de (0.2) e toda solução não periódica, diferente do ponto de equilíbrio, tende para esta solução periódica.

**Definição:** Considere o sistema  $x' = g(x)$  onde  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função de Lipschitz,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto. Seja  $(x(s), y(s))$  uma solução periódica de  $x' = g(x)$ ,  $0 \leq s < t_0$ , onde  $(x(0), y(0)) = (x(t_0), y(t_0))$ . Diz-se que a órbita periódica definida por  $(x(s), y(s))$  é atratora se existir  $\delta > 0$  tal que se  $(\overline{x(t)}, \overline{y(t)})$  é uma solução de  $x' = g(x)$  e

se  $|(x(s), y(s)) - (\overline{x(s)}, \overline{y(s)})| < \delta$ , para algum  $s$ ,  $0 \leq s < t_0$ , então  $(\overline{x(t)}, \overline{y(t)})$  está definida para todo  $t \geq s$  e  $\forall \epsilon > 0, \exists N > s > 0$  tal que  $|(x(t), y(t)) - (\overline{x(t)}, \overline{y(t)})| < \epsilon, \forall t \geq N$ .

O Teorema 1 pode ser generalizado da seguinte forma:

**Teorema 2:** Seja  $f$  uma função real par e  $g$  uma função real ímpar,  $g(x) > 0, x > 0$ . Assuma além disso que  $g \in C^1$  e que  $f$  é uma função contínua por partes. Considere  $F(x) = \int_0^x f(t)dt, G(x) = \int_0^x g(t)dt$  e suponha que exista  $a > 0$  tal que  $F(x) < 0$  para  $0 < x < a$  e  $F(x) > 0$  crescendo monotonicamente para todo  $x > a$ . Considere também que  $G(x) \rightarrow \infty$  e  $F(x) \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow \infty$ . Então a equação diferencial  $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$  tem uma única solução periódica e ela é atratora.

É fácil ver que a equação diferencial (0.2) satisfaz as hipóteses do Teorema 2.

Para simplificar a demonstração dos resultados principais deste trabalho (Teorema 1 e Teorema 2) optamos por apresentar apenas a prova completa do Teorema 1. O Teorema 2 pode ser demonstrado com pequenos ajustes desta prova.

Na seção 2 faremos um breve comentário sobre a demonstração do Teorema 2, no qual tomando  $g(x) = x$ , recaímos na equação de Lienard.

Nas equações analisadas no presente texto mostramos a existência de um atrator que é uma órbita periódica. Em dimensões maiores podem existir atratores caóticos e seu estudo é de fundamental importância hoje em dia.

Recentes estudos de soluções geradas por computador para equações de segunda-ordem, como as equações de Duffing, e sistemas autônomos de terceira-ordem tem revelado inesperadamente soluções complexas que podem aparecer de equações diferenciais não lineares relativamente simples.

O sistema

$$x' = a(y - x) \quad y' = bx - y - xz \quad z' = xy - cy,$$

onde  $(a, b, c)$  são constantes, foi investigado pela primeira vez por Lorenz (1963). As equações de Lorenz descritas acima são um modelo simplificado para a evolução dinâmica do clima na atmosfera. Esta equação está definida no  $\mathbb{R}^3$ .

As soluções calculadas por computador para tal equação exibem um comportamento complexo para uma ampla gama de valores de parâmetros.

O comportamento dinâmico complexo desta equação descreve o caos produzido pelo sistema, embora as soluções  $(x(t), y(t), z(t))$  fiquem determinadas apenas pelos valores iniciais. As soluções apresentam

dependência sensitiva em relação a condição inicial, (ver [2]). Este fenômeno ocorre para certas equações de terceira ordem ou superiores, e sistemas de segunda-ordem forçados.

As equações de Lorenz e modelos similares tem auxiliado na investigação de fluxos turbulentos em mecânica dos fluidos. Certos aspectos do comportamento ao longo do tempo destes sistemas mostram características sistemáticas com um grau de independência das condições iniciais e valores de parâmetros. Isto abre caminho para um estudo matemático do comportamento caótico.

Vários resultados matemáticos recentes foram demonstrados para tal equação, comprovando o que se observa da evidência numérica obtida via computador, (ver [2]).

Conforme [5], pg. 337, a Equação de Lorenz pode ser vista como uma generalização de equações tipo Equação de Van der Pol.

O presente trabalho é uma breve introdução a dinâmica dos circuitos elétricos. Referimos o leitor a [8] para uma apresentação sistemática dos "fundamentos matemáticos da teoria dos circuitos elétricos".

No trabalho "Generalized Gradient Fields and Electrical Circuits", conforme [7], Alcides Lins Neto analisa sistemas gradientes associados a circuitos elétricos gerais.

## §1 A EQUAÇÃO DE VAN DER POL

A equação (0.2) pode ser expressa como  $(x', y') = b(x, y) = (b_1(x, y), b_2(x, y))$ , onde  $b_1 = y - x^3 + x$  e  $b_2 = -x$ .

Sabemos pela introdução que (0.2) tem um único ponto de equilíbrio em  $(0, 0)$ , e é fonte. O próximo passo é mostrar que toda solução gira no sentido horário em torno do equilíbrio.

Para isto dividamos o plano  $xy$  em 4 regiões distintas (conjuntos abertos)  $A, B, C, D$ , como na figura 1.

As curvas abaixo delimitam as regiões  $A, B, C, D$

$$\begin{cases} y - f(x) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Definamos 4 curvas:

$$v^+ = \{(x, y); y > 0, x = 0\}$$

$$g^+ = \{(x, y); x > 0, y = x^3 - x\}$$

$$v^- = \{(x, y); y < 0, x = 0\}$$

$$g^- = \{(x, y); x < 0, y = x^3 - x\}$$

Estas curvas são disjuntas e junto com a origem formam a fronteira das quatro regiões  $A, B, C, D$ .

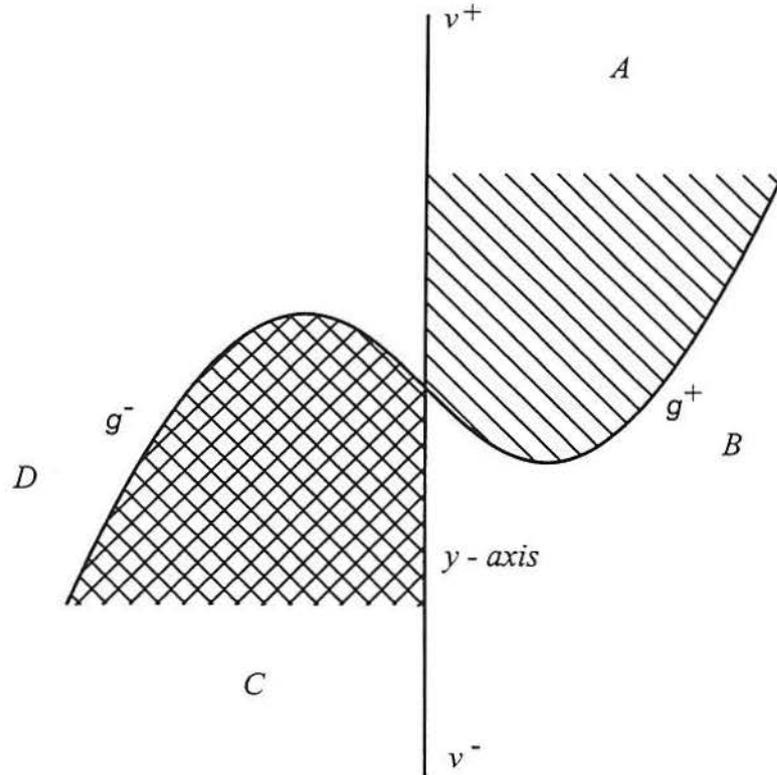


FIGURA 1

Vejam agora como o campo de vetores  $(x', y') = b(x, y)$  comporta-se nas curvas fronteiras. Lembrando que  $b(x, y) = (y - x^3 + x, -x)$ .

É claro que  $y' = 0$  em  $(0, 0) \cup v^+ \cup v^-$ , e em nenhum outro lugar. E  $x' = 0$  exatamente em  $g^+ \cup g^- \cup (0, 0)$ . Além disto, em  $v^+$  temos que  $b(x, y) = (y, 0)$  com  $y > 0$  e em  $v^-$ ,  $b(x, y) = (y, 0)$  com  $y < 0$ . Assim, o vetor  $b(x, y)$  é horizontal em  $v^+ \cup v^-$  e aponta para a direita em  $v^+$  e para a esquerda em  $v^-$ .

Em  $g^+$ ,  $b(x, y) = (0, -x)$ , com  $x > 0$ , e em  $g^-$ ,  $b(x, y) = (0, -x)$ , com  $x < 0$ . Então  $b(x, y)$  é vertical em  $g^+ \cup g^-$ , apontando para baixo em  $g^+$  e para cima em  $g^-$ . (Ver Figura 2)

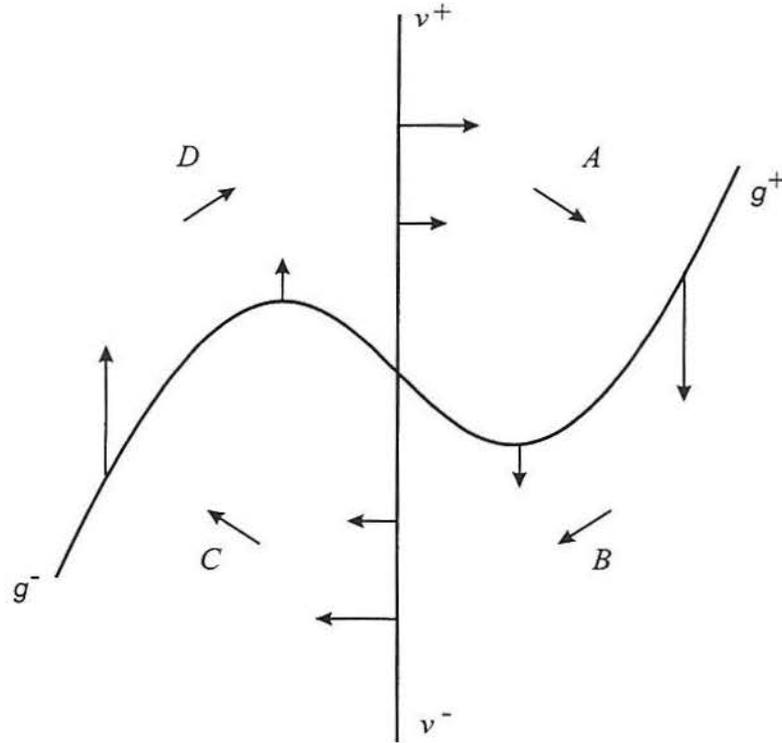


FIGURA 2

Em cada região  $A, B, C, D$  os sinais de  $x'$  e  $y'$  são constantes. De fato, na região  $A$  temos  $y > x^3 - x$  e  $x > 0$ , assim,  $x' > 0$  e  $y' < 0$ . Em  $B$ ,  $y < x^3 - x$  e  $x > 0$ , assim,  $x' < 0$  e  $y' < 0$ . Em  $C$ ,  $y < x^3 - x$  e  $x < 0$ , assim,  $x' < 0$  e  $y' > 0$ . Em  $D$ ,  $y > x^3 - x$  e  $x < 0$ , assim,  $x' > 0$  e  $y' > 0$ .

Portanto, em  $A$  o campo de vetores sempre aponta para o quarto quadrante; em  $B$ , para o terceiro quadrante; em  $C$ , para o segundo quadrante e em  $D$ , para o primeiro quadrante.

A próxima parte de nossa análise diz respeito a natureza do fluxo no interior das regiões  $A, B, C, D$ . A figura 2 sugere que as trajetórias espiralam-se em torno da origem no sentido horário. As três próximas proposições vão descrever mais precisamente tal propriedade.

**Proposição 1:** Toda trajetória que inicia em  $v^+$  entra em  $A$ . Toda trajetória que inicia em  $A$  encontra  $g^+$ ; além disso encontra  $g^+$  antes de encontrar  $v^-, g^-$  ou  $v^+$ .

**Prova:**

Seja  $(x(t), y(t))$  uma curva solução de (0.2) tal que a condição inicial  $(x(0), y(0)) \in v^+$ , com  $I = (\alpha, \beta)$  sendo o intervalo maximal.

Temos então que  $x(0) = 0$  e  $y(0) > 0$ .

Assim  $x'(0) = y(0) - x^3(0) + x(0) > 0$  de modo que para um pequeno aumento de  $t$ , teremos  $x(t) > x(0) = 0$ .

Como o fluxo é contínuo, a curva entra em  $A$ .

Para deixar  $A$  sem passar por  $g^+$ ,  $x'(t)$  tem que tornar-se 0 em algum momento. Mas quando isto ocorrer  $(x(t), y(t))$  estará em  $g^+$ . Logo se  $(x(t), y(t))$  vai encontrar  $g^+$  será antes de encontrar  $v^-, g^-$  ou  $v^+$ .

Portanto a primeira e a última declarações da proposição estão provadas.

Afirmação: Se a trajetória  $(x(t), y(t))$  inicia em  $A$ , então  $(x(t), y(t)) \in g^+$  para algum  $t > 0$ .

A demonstração será por contradição. Suponhamos que não valha a afirmação.

Dado  $t_0 = \epsilon > 0$  fixo,  $(x(\epsilon), y(\epsilon)) \in A$ . Assim  $x(\epsilon) > 0$ .

Seja  $P \subset \mathbb{R}^2$  o conjunto compacto delimitado por  $v^+$ ,  $g^+$ , a reta  $y = y(\epsilon)$  acrescentando o ponto  $(0, 0)$  para  $P$  ficar compacto. (Ver figura 3).

Lembrando que para qualquer curva solução  $(x(t), y(t))$ ,  $y'(t) < 0$  em toda a região  $A$ , a curva solução  $(x(t), y(t))$  está em  $P$ , pelo menos até um determinado tempo  $t_1$ ,  $\epsilon \leq t_1 \leq \beta$ , com  $I = (\alpha, \beta)$  sendo o intervalo maximal.

Como, por hipótese, esta curva não encontra  $g^+$ , pelo teorema da não permanência em compactos (Teorema em Sotomayor, 1979, Cap. VI, seção 1, corolário 4), ela está definida para todo  $t > 0$ .

Visto que  $x'(t) > 0$  em  $A$ , temos que  $x(t) > x(\epsilon) > 0$  para  $t > \epsilon$ .

Como por (0.2),  $y'(t) = -x(t)$  segue-se que  $y'(t) < -x(\epsilon)$  para  $t > \epsilon$ .

Para estes valores de  $t > \epsilon$  temos

$$y(t) < y(\epsilon) - x(\epsilon)(t - \epsilon),$$

pois

$$y(t) - y(\epsilon) = \int_{\epsilon}^t y'(s) ds < \int_{\epsilon}^t (-x(\epsilon)) ds = -x(\epsilon)(t - \epsilon).$$

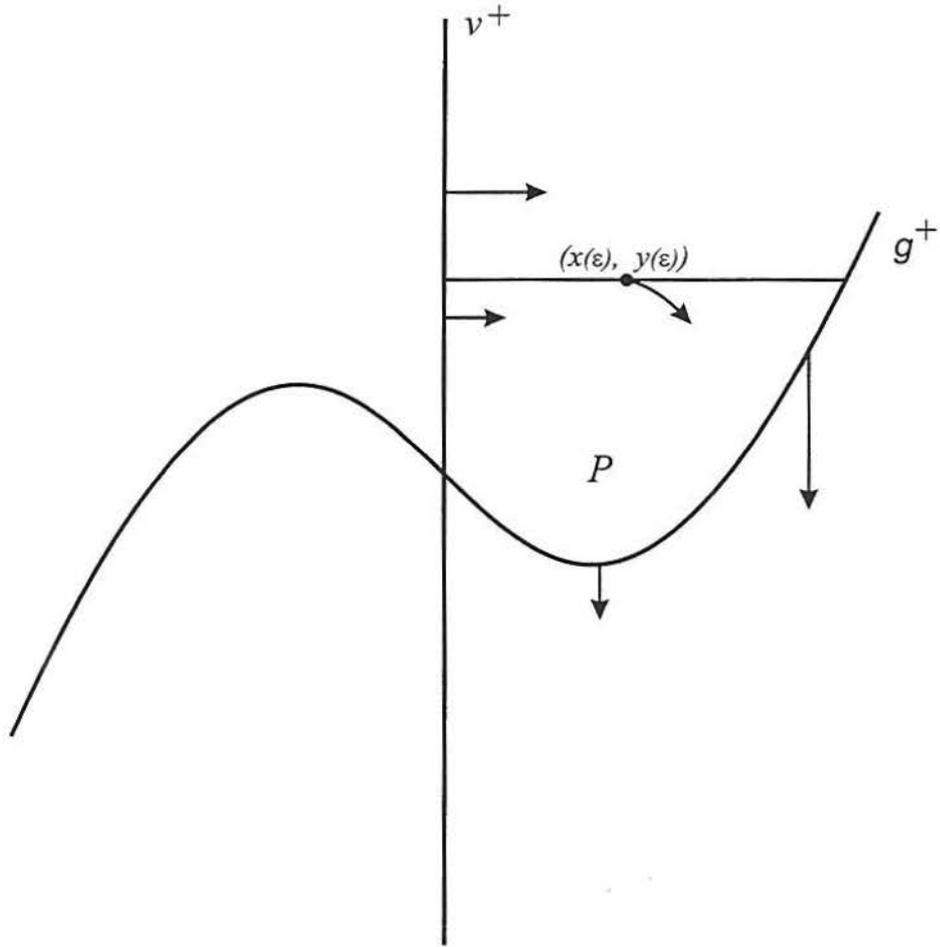


FIGURA 3

Fazendo  $t \rightarrow \infty$  temos que  $y(t) \rightarrow -\infty$ , o que é um absurdo, pois em  $A$ ,  $y(t) > m$ , onde  $m$  é o mínimo de  $x^3 - x$ , para  $x > 0$ .

E isto é impossível, a não ser que  $(x(t), y(t))$  encontre  $g^+$ .

Assim provamos a proposição 1. □

**Proposição 2:** Toda trajetória que inicia em  $g^+$  entra em  $B$ . Toda trajetória que inicia em  $B$  encontra  $v^-$ ; além disso encontra  $v^-$  antes de encontrar  $g^-$ ,  $v^+$  ou  $g^+$ .

**Prova:**

Seja  $(x(t), y(t))$  uma curva solução de (0.2) tal que a condição inicial  $(x(0), y(0)) \in g^+$ . Então  $x(0) > 0$  e  $y(0) = x^3(0) - x(0)$ .

De (0.2) e do fato acima temos que,  $x'(0) = y(0) - x^3(0) + x(0) = 0$  e  $y'(0) = -x(0) < 0$ , e isto implica que para um pequeno aumento de  $t$ ,  $y(t)$  decresce. Portanto a curva entra em  $B$ .

Seja  $h(x, y) = y - x^3 + x$ , logo  $\nabla h(x, y) = (-3x^2 + 1, 1)$ . Note que  $h$  é negativo em  $C \cup B$  e lembre que o gradiente aponta na direção de crescimento da função.

Em  $g^+$  temos  $b(x, y) = (x', y') = (0, -x)$ , onde  $x > 0$ . Assim,  $\langle (-3x^2 + 1, 1), (0, -x) \rangle = -x < 0$  para todo  $(x, y) \in g^+$ . Logo o vetor  $b(x, y)$  aponta para dentro de  $B$  quando  $(x, y) \in g^+$ , visto que  $\nabla h$  é perpendicular à  $g^+$  e aponta para  $A$ . Desse modo, se a curva solução  $(x(t), y(t))$  sair de  $B$  não será por  $g^+$ .

Como para sair de  $B$ , a curva solução precisaria cruzar  $v^-$  ou  $g^+$ , segue que se a curva solução sair de  $B$  será por  $v^-$ .

Dessa maneira, a primeira e a última afirmações da proposição estão provadas.

Afirmção: Se a trajetória inicia em  $B$ , então  $(x(t), y(t)) \in v^-$  para algum  $t$ .

Dado  $t_0 = \epsilon > 0$  fixo,  $(x(\epsilon), y(\epsilon)) \in B$ . Note que  $x(t)$  é decrescente em  $B$ .

Considere  $Q \subset \mathbb{R}^2$ , o conjunto compacto delimitado por  $g^+$ ,  $x = x(\epsilon)$ ,  $x = \delta$ ,  $0 < \delta < x(\epsilon)$  e  $y = E$ , onde  $E < -[(x(\epsilon))^2 + x(\epsilon)]$  e  $\delta$  será especificado mais tarde.

Em princípio poderiam ocorrer três casos se a curva solução  $(x(t), y(t))$  não cruzasse  $v^-$ .

Caso 1: Suponhamos que a curva solução não saia do compacto  $Q$ , estando desse modo definida para todo  $t > 0$ , conforme teorema da não permanência em compactos (Teorema em Sotomayor, 1979, cap. VI, seção 1, corolário 4).

Ainda,  $\forall t > \epsilon$ , temos  $x(t) > \delta$ ,  $x(t) < x(\epsilon)$  e  $y(t) < y(\epsilon)$ , porque  $x(t)$  e  $y(t)$  são monótonas decrescentes em  $B$ .

De (0.2) temos  $y'(t) = -x(t) < -\delta$ .

Assim

$$y(t) - y(\epsilon) = \int_{\epsilon}^t y'(s) ds < -\delta(t - \epsilon),$$

ou seja,

$$y(t) < y(\epsilon) - \delta(t - \epsilon).$$

Também  $\forall t > \epsilon$ , temos

$$x'(t) = y(t) - x(t)^3 + x(t) < y(\epsilon) - \delta(t - \epsilon) - \delta^3 + x(\epsilon),$$

e então fazendo  $t \rightarrow \infty$ , temos  $x'(t) \rightarrow -\infty$ .

Logo, dado  $N > 0$ ,  $\exists t_0$  tal que  $\forall t > t_0$ ,  $x'(t) < -N$ . Pelo teorema do valor médio,  $\exists \tau \in (t_0, t)$  tal que

$$x(t) - x(t_0) = (t - t_0)x'(\tau) < (t - t_0)(-N) = -(t - t_0)N.$$

Então,  $x(t) < x(t_0) - (t - t_0)N$  e ao fazer  $t \rightarrow \infty$ , obtemos que  $x(t) \rightarrow -\infty$ , e isto é impossível a não ser que a curva solução cruze  $v^-$ .

Caso 2: Se o caso 1 não ocorre, então suponhamos que exista  $E$  tal que a curva solução sai de  $Q$  atravessando o eixo  $x = \delta$ , ficando para sempre na região delimitada por  $g^+$ ,  $x = \delta$ ,  $x = 0$ ,  $y = E$ , acrescentando o ponto  $(0, 0)$  para a região ficar compacta. Lembre que  $x(t)$  é monótona decrescente e  $y(t)$  também.

Obs.: O caso 3 trata da situação alternativa.

Em cada ponto  $(x, y)$  do eixo  $v^-$  até a interseção com  $y = E$  considere o fluxo tubular por  $(x, y)$ . (Teorema em Sotomayor, 1979, cap. VI, seção 4, teorema 8). Fica assim definida uma cobertura com fluxos tubulares centrados em  $(x, y)$  na parte do eixo  $v^-$  entre  $y = 0$  e  $y = E$ .

Como este segmento é compacto, podemos extrair uma subcobertura finita centrada em  $(x_i, y_i)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . A seguir determinamos o valor mínimo de  $x$  no extremo direito da caixa de fluxo para cada  $(x_i, y_i)$ . Denote por  $\bar{x}_0$  tal valor mínimo. Se  $(x(t), y(t))$  for tal que  $x(t) < \bar{x}_0$ , então pelo teorema do fluxo tubular ela cruza o eixo  $x = 0$ .

Podemos assumir, sem perda de generalidade que  $\delta < \bar{x}_0$ .

Logo neste caso ela também cruza  $v^-$ .

Caso 3: Suponhamos finalmente que a curva solução saia de  $Q$  atravessando o eixo  $y = E$ , isto é, que  $\exists t_0$  tal que  $\forall t > t_0$ ,  $y(t) < E$ .

Note que  $y(t)$  é monótona decrescente em  $B$ .

Seja  $I = (\alpha, \beta)$  o intervalo maximal de  $(x(t), y(t))$  tal que a condição inicial  $(x(0), y(0)) \in g^+$ .

Seja  $t_0$  o primeiro  $t$  tal que  $y(t_0) = E$ . Se a medida que aumentarmos  $t$ ,  $(x(t), y(t))$  ficar contido para sempre no compacto delimitado por  $g^+$ ,  $x = x(\epsilon)$ ,  $x = \delta$ ,  $y = E - 1$  caímos no caso 1.

Seja  $t_1 > t_0$ , tal que  $y(t_1) = E - 1$ .

Então

$$y(t_1) - y(t_0) = E - 1 - E = -1.$$

Por outro lado, pelo teorema do valor médio,  $\exists \tau \in (t_0, t_1)$  tal que

$$\begin{aligned}y(t_1) - y(t_0) &= y'(\tau)(t_1 - t_0) \\ &= -x(\tau)(t_1 - t_0) \\ &> -x(\epsilon)(t_1 - t_0).\end{aligned}$$

Assim,

$$-x(\epsilon)(t_1 - t_0) < -1,$$

e então,

$$t_1 - t_0 > \frac{1}{x(\epsilon)} > 0.$$

De (0.2) temos

$$\begin{aligned}x'(t) &= y(t) - x(t)^3 + x(t) \\ &< y(t) + x(t) \\ &< E + x(\epsilon) < -x^2(\epsilon)\end{aligned}$$

para  $t > t_0$ , pois  $E < -[x^2(\epsilon) + x(\epsilon)]$ .

Também,

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t x'(s) ds < (t - t_0)(-x^2(\epsilon)).$$

Assim,

$$\begin{aligned}x(t) &< x(t_0) + (t - t_0)(-x^2(\epsilon)) \\ &< x(\epsilon) + \frac{1}{x(\epsilon)}(-x^2(\epsilon)) = 0\end{aligned}$$

Então  $x(t) < 0$  e isto é impossível a não ser que a curva solução cruze  $v^-$ .

Logo, em todos os casos  $(x(t), y(t))$  cruza  $v^-$ .

E isto prova a proposição 2. □

A demonstração que uma solução  $(x(t), y(t))$  começando em  $v^-$  cruza  $g^-$  é análoga ao caso anterior para a região  $A$ .

A demonstração que uma solução  $(x(t), y(t))$  começando em  $g^-$  cruza  $v^+$  é análoga ao caso anterior para a região  $B$ .

As proposições 1 e 2 e os comentários acima, sugerem que a trajetória passa pelas regiões  $A, B, C, D$  como mostrado na figura 4.

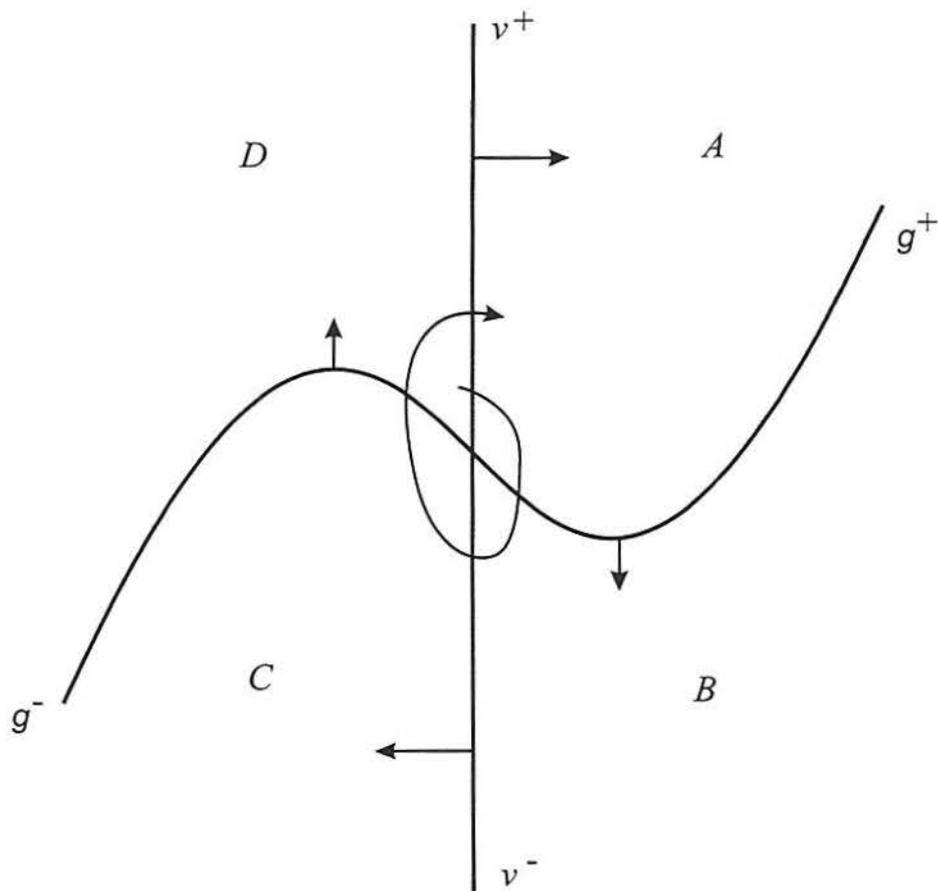


FIGURA 4

**Proposição 3:** Toda trajetória  $(x(t), y(t))$  é definida para  $t \geq 0$ . Exceto para  $(0, 0)$ , cada trajetória  $(x(t), y(t))$  cruza repetidamente as curvas  $v^+, g^+, v^-, g^-$ , no sentido horário, passando sucessivamente entre as regiões  $A, B, C, D$  no sentido horário.

**Prova:**

Seja  $(x(t), y(t))$  uma curva solução tal que a condição inicial  $(x(0), y(0)) \in v^+$ .

Pelas proposições 1 e 2, sabemos que  $(x(t), y(t))$  entra em  $A$  e encontra  $g^+$ , entra em  $B$  e encontra  $v^-$ , entra em  $C$  e encontra  $g^-$ , entra em  $D$  e retorna para  $v^+$ .

Assim, cada trajetória cruza repetidamente as curvas  $v^+$ ,  $g^+$ ,  $v^-$ ,  $g^-$  no sentido horário.

Além disso, lembrando que nas regiões  $A, B, C, D$  os sinais de  $x'(t)$  e  $y'(t)$  são constantes, a curva solução cruza as regiões  $A, B, C, D$  no sentido horário.

Sabemos que  $(0, 0)$  é um ponto de equilíbrio de (0.2), portanto não cruza região alguma.  $\square$

Para analisar o fluxo  $\phi_t$  de Van der Pol vamos definir uma aplicação  $\sigma : v^+ \rightarrow v^+$ .

Para  $p \in v^+$ , a curva solução  $\phi_t(p)$  em  $p$  é definida para todo  $t \in (\alpha, \beta)$  intervalo maximal. Na verdade vamos mostrar que  $\beta = +\infty$  no teorema principal.

A partir do que vimos acima existirá  $t_1(p) = t_1 > 0$ , tal que este será o primeiro  $t$  onde  $\phi_{t_1}(p) \in v^+$ .

Defina  $\sigma(p) = \phi_{t_1}(p)$ . Assim,  $\sigma(p)$  é o primeiro ponto depois de  $p$  na trajetória de  $p$ , quando estará novamente em  $v^+$ . (Ver figura 5)

A aplicação  $p \rightarrow t_1(p)$  é contínua, pela continuidade do fluxo (Teorema em Sotomayor, 1979, cap. II, seção 2, teorema 1) . Assim,  $\sigma$

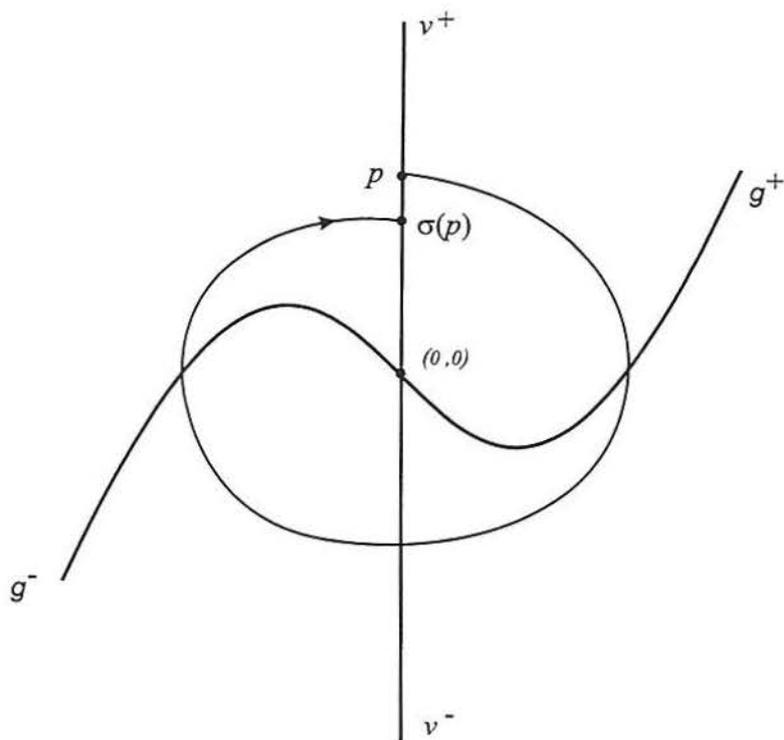


FIGURA 5

também será contínua. Além disso,  $\sigma$  é injetiva, pela unicidade da solução.

**Proposição 4:** Seja  $p \in v^+$ . Então  $p$  é um ponto fixo de  $\sigma$  (isto é,  $\sigma(p) = p$ ) se e somente se,  $p$  está contido numa solução periódica de (0.2); (isto é,  $\phi_t(p) = p$  para algum  $t \neq 0$ ). Além disso, toda curva solução periódica encontra  $v^+$ .

**Prova:**

( $\Rightarrow$ ) Por definição  $\sigma(p)$  é o primeiro ponto depois de  $p$  na trajetória de

$p$ , quando esta volta a encontrar novamente  $v^+$ . Então se  $\sigma(p) = p$ , decorre imediatamente que a trajetória é periódica.

( $\Leftarrow$ ) Vamos fazer a demonstração por contradição.

Suponhamos que  $\sigma(p) \neq p$ . Seja  $v^* = v^+ \cup (0, 0)$ . Podemos estender  $\sigma$  para uma aplicação  $v^* \rightarrow v^*$  que é contínua e injetiva, levando  $(0, 0)$  nele mesmo.

Identificamos  $v^*$  com  $\{y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$  e designamos para cada ponto sua coordenada  $y$ . Dessa maneira existe uma ordem natural em  $v^*$  :  $(0, y) < (0, z)$  se  $y < z$ .

Como  $\sigma : v^* \rightarrow v^*$  é contínua e injetiva, preserva ordem. Logo se  $\sigma(p) > p$  temos que  $\sigma^2(p) > \sigma(p) > p$ , e por indução  $\sigma^n(p) > p$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

O mesmo argumento pode ser utilizado se  $\sigma(p) < p$ .

Isto mostra que a trajetória de  $p$  nunca cruza  $v^+$  outra vez em  $p$ , se  $\sigma(p) \neq p$ . Portanto  $\phi_t(p) \neq p$ , para todo  $t > 0$ .

Logo, se  $\sigma(p) \neq p$ ,  $p$  não está contido numa trajetória periódica.

A última afirmação do enunciado da proposição 4 é consequência direta da proposição 3, o que implica que toda trajetória (exceto  $(0, 0)$ ) encontra  $v^+$ . □

Definamos agora outra aplicação.

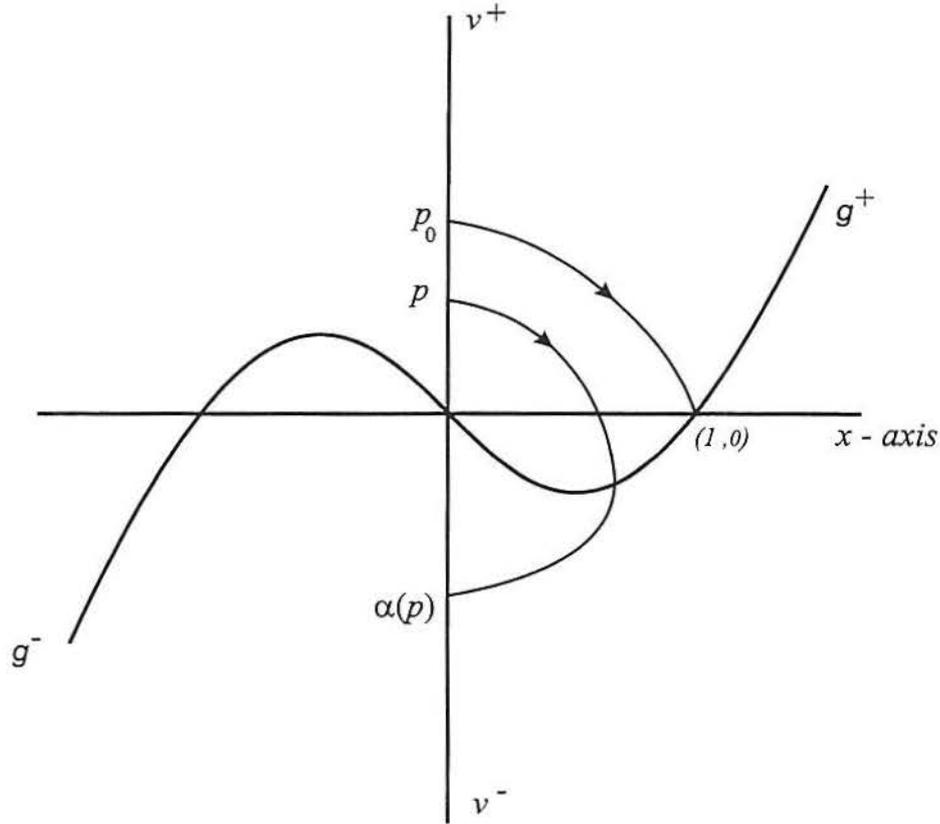


FIGURA 6

Para cada  $p \in v^+$ , seja  $t_2(p) = t_2$  o menor  $t > 0$  tal que  $\phi_t(p) \in v^-$ . Defina a aplicação contínua  $\alpha : v^+ \rightarrow v^-$ ,  $\alpha(p) = \phi_{t_2}(p)$ . ( Ver figura 6)

A aplicação  $\alpha$  é também injetiva pela unicidade das soluções e assim é monótona, pelo mesmo argumento utilizado para  $\sigma$ .

Usando os métodos da proposição 1, pode-se mostrar que existe um único ponto  $p_0 \in v^+$  e  $t_3 > 0$  tal que a curva solução  $\{\phi_t(p_0); 0 \leq t \leq t_3\}$  intercepta a curva  $g^+$  no ponto  $(1,0)$ , onde  $g^+$  encontra o eixo  $x$ .

Para isto considere a solução de  $(x', y') = b(x, y)$  tal que  $(x(0), y(0)) = (1, 0)$  para valores de  $t < 0$ . Pode-se mostrar que existe  $-t_3$  tal que  $(x(-t_3), y(-t_3))$  corta o eixo  $v^+$ . Denotamos tal ponto por  $p_0$ .

Seja  $r = |p_0|$ .

Defina a aplicação contínua  $\delta : v^+ \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $\delta(p) = |\alpha(p)|^2 - |p|^2$ , onde  $|p|$  é a norma euclidiana usual.

Definamos também a aplicação  $W : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$  dada por  $W(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , desta maneira  $W$  é a metade da norma ao quadrado do vetor  $(x, y)$ .

A seguinte proposição é simples, mas importante para o estudo das propriedades globais de (0.2).

**Proposição 5:** Seja  $Z(t) = (x(t), y(t))$  uma curva solução da Equação de Lienard (0.1). Então  $\frac{d}{dt}(W(Z(t))) = -x(t).f(x(t))$ .

**Prova:**

Sejam  $W : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$  e  $Z : J \rightarrow \mathfrak{R}^2$ ,  $J \subset \mathfrak{R}$ , intervalo, assim  $W \circ Z : J \rightarrow \mathfrak{R}$  e aplicando a regra da cadeia obtemos,

$$\frac{d}{dt}(W(Z(t))) = dW_{Z(t)}(Z'(t)) = x(t)x'(t) + y(t)y'(t).$$

Substituindo (0.1), temos,  $x(t)[y(t) - f(x(t))] + y(t)[-x(t)] = -x(t)f(x(t))$ .

Assim,  $\frac{d}{dt}(W(Z(t))) = -x(t)f(x(t))$ .

□

**Proposição 6:**

- (a)  $\delta(p) > 0$  se  $0 < |p| < r$ , onde  $r = |p_0|$  da definição acima.  
(b)  $\delta(p)$  decresce monotonicamente para  $-\infty$  ao fazer  $|p| \rightarrow \infty$ ,  $|p| \geq r$ .

**Prova:**

- (a) Lembre que  $W(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .

Seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $0 \leq t \leq t_2 = t_2(p)$  uma curva solução que une  $p \in v^+$  a  $\alpha(p) \in v^-$ , e identifique  $p$  com  $(0, p)$  e  $\alpha(p)$  com  $(0, \alpha(p))$ . Neste caso consideraremos  $0 < |p| < r$ .

Por definição de  $\delta$ , de  $W$  e pela proposição acima temos

$$\begin{aligned}\delta(p) &= |\alpha(p)|^2 - |p|^2 \\ &= 2[W(0, \alpha(p)) - W(0, p)] \\ &= 2 \int_0^{t_2} \frac{d}{dt} W(x(t), y(t)) dt \\ &= 2 \int_0^{t_2} -x(t)[x(t)^3 - x(t)] dt\end{aligned}$$

Assim,  $\delta(p) = 2 \int_0^{t_2} x(t)^2 [1 - x(t)^2] dt$ .

Como em  $A$  e  $B$  os sinais de  $x'$  e  $y'$  são constantes, a saber, em  $A$ ,  $x' > 0$ ,  $y' < 0$  e em  $B$ ,  $x' < 0$ ,  $y' < 0$ , temos que na região determinada pelo arco  $\widehat{p_0, \alpha(p_0)}$  e pelo eixo  $y$ , qualquer curva solução

$(x(t), y(t))$  assume valores para  $x(t)$  entre 0 e 1. Lembre que por hipótese,  $0 < |p| < r$ , e ainda, que  $r = |p_0|$ , onde  $p_0$  é o ponto pertencente a  $v^+$  tal que a curva solução  $\phi_t(p_0)$  intercepta a curva  $g^+$  no ponto  $(1, 0)$ .

E isto prova a parte (a) porque o integrando  $x(t)^2[1 - x(t)^2]$  é sempre positivo para  $0 < x(t) < 1$ .

Agora vamos provar (b).

Lembre que  $\delta(p) = 2 \int_0^{t_2} x(t)^2[1 - x(t)^2]dt = 2 \int_\gamma x(t)^2[1 - x(t)^2]dt$ .

Restringimos nossa atenção agora para os pontos  $p \in v^+$  com  $|p| > r$ .

Seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $0 \leq t \leq t_2 = t_2(p)$  uma curva solução que une  $p \in v^+$  a  $\alpha(p) \in v^-$ , considerando  $|p| > r$ .

Dividamos esta curva solução  $\gamma$  em três curvas  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  como na figura 7.

Então  $\delta(p) = \delta_1(p) + \delta_2(p) + \delta_3(p)$ , onde  $\delta_i(p) = 2 \int_{\gamma_i} x(t)^2(1 - x(t)^2)dt$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Vamos mostrar que cada uma destas integrais decrescem quando  $|p|$  aumenta,  $|p| > r$ .

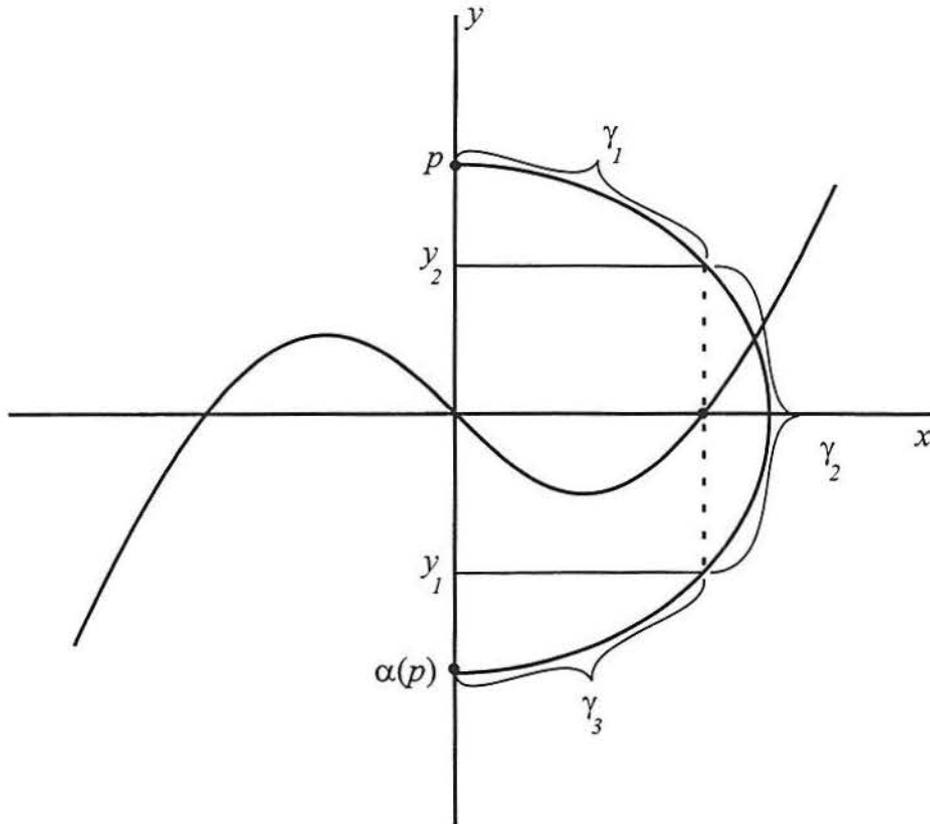


FIGURA 7

Ao longo de  $\gamma_1$ , a relação  $t \rightarrow x(t) = x$  é bijetiva, logo fazendo a mudança de variáveis podemos considerar para  $0 < x < 1$  que

$$\begin{aligned}
 \delta_1(p) &= 2 \int_0^1 x^2(1-x^2) \frac{dt}{dx} dx \\
 &= 2 \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)}{\frac{dx}{dt}} dx \\
 &= 2 \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)}{y-x^3+x} dx \\
 &= 2 \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)}{y(x)-x^3+x} dx
 \end{aligned}$$

Acima denotamos  $y(x) = y(x(t))$  quando fazemos a mudança de coordenadas  $t \rightarrow x(t) = x$ .

Quando  $p$  move-se para cima no eixo  $y$ , temos que  $y(x) = x^3 + x$  aumenta (para  $(x, y) \in \gamma_1$ ). Logo,  $\delta_1(p)$  decresce quando  $|p| \rightarrow \infty$ .

Lembre a seguinte propriedade de integrais:  $\int_b^a h(x)dx = -\int_a^b h(x)dx$ .

Do mesmo modo, como no caso anterior para  $\gamma_1$ , temos que ao longo de  $\gamma_3$ , a relação  $t \rightarrow x(t) = x$  é bijetiva. Logo considerando a mudança de variáveis para  $0 < x < 1$  temos

$$\begin{aligned}\delta_3(p) &= 2 \int_1^0 x^2(1-x^2) \frac{dt}{dx} dx \\ &= -2 \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)}{\frac{dx}{dt}} dx \\ &= -2 \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)}{y(x) - x^3 + x} dx\end{aligned}$$

Quando  $p$  move-se para cima no eixo  $y$ , temos que  $-(y - x^3 + x)$  é positivo e crescente (para  $(x, y) \in \gamma_3$ ), e então  $\delta_3(p)$  decresce ao  $|p| \rightarrow \infty$ .

Em  $\gamma_2$  temos que  $x \geq 1$  e que  $x$  é uma função de  $y$ , pois  $\frac{dy}{dt} = -x \neq 0$  neste trajeto. Note que  $\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}$ , pois  $\frac{dy}{dt} \neq 0$ .

Então, como  $t \rightarrow y(t) = y$  é bijetivo, para  $y_1 < y_2$  temos

$$\begin{aligned}
\delta_2(p) &= 2 \int_{\gamma_2} x(t)^2(1 - x(t)^2) dt \\
&= 2 \int_{y_2}^{y_1} x(y)^2(1 - x(y)^2) \frac{dt}{dy} dy \\
&= 2 \int_{y_2}^{y_1} \frac{x(y)^2(1 - x(y)^2)}{\frac{dy}{dt}} dy \\
&= 2 \int_{y_2}^{y_1} \frac{x(y)^2(1 - x(y)^2)}{-x(y)} dy \\
&= 2 \int_{y_1}^{y_2} x(y)(1 - x(y)^2) dy < 0
\end{aligned}$$

pois em  $\gamma_2$  temos  $x(y) > 1$ .

Quando  $|p|$  aumenta, o domínio de integração  $[y_1, y_2]$  torna-se maior.

Como a função  $y \rightarrow x(y)$  depende de  $p$ , escreveremos  $x_p(y)$ .

Aumentando  $|p|$ , a curva  $\gamma_2$  move-se para a direita, de modo que  $x_p(y)$  aumenta e  $x_p(y)(1 - x_p(y)^2)$  diminui (pois  $x(1 - x^2)$  é monótona decrescente para  $x > 1$ ).

Conseqüentemente,  $\delta_2(p)$  decresce ao  $|p|$  crescer, pois o integrando fica mais negativo e o intervalo de integração aumenta. Além disso,

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} \delta_2(p) = -\infty,$$

pois dado  $-K < 0$  existe  $B$  tal que  $\forall x > B, x(1 - x^2) < -K$ .

Sendo assim temos que  $\delta(p) = \delta(p_1) + \delta(p_2) + \delta(p_3)$  decresce monotonicamente para  $-\infty$  ao  $|p| \rightarrow \infty$ . □

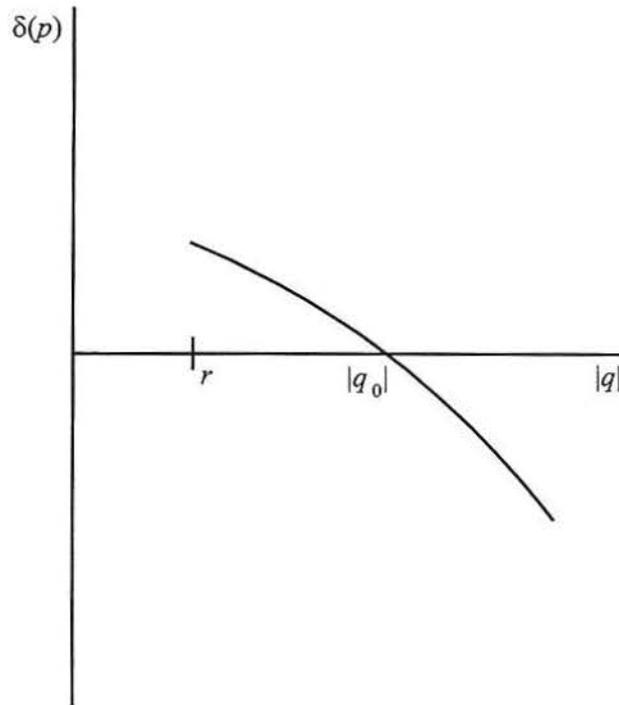


FIGURA 8

Parte do gráfico de  $\delta(p)$  como uma função de  $|p|$  é esquematizada na figura 8.

Provaremos agora o teorema principal enunciado na introdução.

**Teorema:** Existe uma solução periódica de (0.2) e toda solução não periódica, diferente de ponto de equilíbrio, tende para esta solução periódica.

**Prova:** Pela proposição 6 sabemos que  $\delta(p)$  decresce monotonicamente para  $-\infty$ , se  $|p| \geq r$ , e  $\delta(p) > 0$  se  $0 < |p| < r$ . Sendo assim,

podemos escolher  $q_1, q_2 \in v^+$  tal que  $\delta(q_1) > 0$  e  $\delta(q_2) < 0$ . Como  $\delta$  é uma função contínua, usando o teorema do valor intermediário temos que existe  $q_0 \in (q_1, q_2)$  tal que  $\delta(q_0) = 0$ . Como  $\delta$  decresce monotonicamente em  $[p_0, +\infty)$  e é positiva em  $(0, p_0]$ , este  $q_0$  é único.

Vamos explorar agora as características do campo dado por  $g(x, y) = (y - x^3 + x, -x)$ .

Observe que  $g(-x, -y) = -g(x, y)$ .

Então, se  $(x(t), y(t))$  é uma curva solução,  $(-x(t), -y(t))$  também o é. Com efeito,  $(-x'(t), -y'(t)) = -(x'(t), y'(t)) = -g(x(t), y(t)) = g(-x(t), -y(t))$ .

Considere agora, a trajetória para o único ponto  $q_0 \in v^+$  tal que  $\delta(q_0) = 0$ . Este ponto tem a propriedade de que  $|\alpha(q_0)| = |q_0|$ . Pela definição da função  $\alpha$  temos que  $\phi_{t_2}(q_0) = -q_0$ .

Por  $g(-x, -y) = -g(x, y)$  segue-se que  $\phi_{t_2}(-q_0) = -(-q_0) = q_0$ .

Então tomando  $\lambda = 2t_2 > 0$  teremos  $\phi_\lambda(q_0) = q_0$ . Portanto,  $q_0$  está sobre uma trajetória periódica.

Para investigar outras trajetórias definamos a aplicação  $\beta : v^- \rightarrow v^+$ , que envia cada ponto de  $v^-$  para a primeira intersecção de sua trajetória (para  $t > 0$ ) com  $v^+$ .

Pela simetria do campo  $\beta(p) = -\alpha(-p)$ .

Que  $\beta$  tem propriedades similares a  $\alpha$  segue do raciocínio utilizado anteriormente na proposição 6.

Ainda, pela definição de  $\alpha$  e  $\sigma$  temos que  $\sigma(p) = \beta(\alpha(p))$ . Lembrando que  $\sigma : v^+ \rightarrow v^+$  e  $\alpha : v^+ \rightarrow v^-$ .

Identificamos agora  $v^+$  com os números reais, designando para cada ponto em  $v^+$  sua coordenada  $y$ . (Como na proposição 4).

Assim, se  $p, q \in v^+ \cup v^-$  escrevemos  $p > q$  se  $p$  está acima de  $q$ .

Observe que pela unicidade das soluções se  $p > q$  teremos  $\alpha(p) < \alpha(q)$ ,  $\beta(p) < \beta(q)$  e  $\sigma(p) > \sigma(q)$ , isto é,  $\alpha$  e  $\beta$  invertem a ordem enquanto  $\sigma$  preserva.

Dividiremos em 2 casos:

Caso 1:  $p \in v^+$ ,  $p > q_0$

Caso 2:  $p \in v^+$ ,  $p < q_0$ .

Em ambos os casos considere  $\phi_t(p)$  a trajetória que passa por  $p$  num determinado tempo com uma determinada condição inicial dada.

Caso 1:

Vamos mostrar inicialmente que  $q_0 < \sigma^n(p) < (p)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Como  $p \in v^+$ ,  $p > q_0$  e  $\alpha(q_0) = -q_0$  temos que  $\alpha(p) < \alpha(q_0) = -q_0$  e  $\sigma(p) > \sigma(q_0) = q_0$ .

Por outro lado,  $\delta(p) < 0$ , pois  $p > q_0$ .

Com isto temos que  $|\alpha(p)|^2 < |p|^2$ , e assim temos que  $\alpha(p) > -p$ .

Como  $\beta$  inverte a ordem,  $\beta(\alpha(p)) < \beta(-p) = -\alpha(p) < p$ .

Assim,  $\sigma(p) = \beta(\alpha(p)) < p$ .

Com isso concluímos que  $p > q_0$  implica  $q_0 < \sigma(p) < p$ .

Observação: Esta propriedade assegura que para  $(x(t), y(t))$  a solução com o intervalo maximal  $(\alpha, \beta)$  é tal que  $\beta = +\infty$ , por um raciocínio tipo seção transversal e que as trajetórias contidas em compactos estão definidas para todo  $t > 0$ .

Mostremos agora que  $q_0 < \sigma^2(p) < \sigma(p)$ .

Seja  $\sigma(p) > q_0$ .

Tomando  $\bar{p} = \sigma(p)$  temos, pelo raciocínio anterior que  $q_0 < \sigma(\bar{p}) < \bar{p}$ .

Isto é,  $q_0 < \sigma(\sigma(p)) < \sigma(p)$ .

Por indução mostraremos que  $q_0 < \sigma^{n+1}(p) < \sigma^n(p)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Suponhamos que  $\sigma^{n-1}(p) > q_0$  implique  $q_0 < \sigma^n(p) < \sigma^{n-1}(p)$ .

Seja  $\sigma^n(p) > q_0$ .

Tomando  $\bar{p} = \sigma(p)$ , temos pela hipótese de indução que  $q_0 < \sigma^n(\sigma(p)) < \sigma^{n-1}(\sigma(p))$ . Logo  $q_0 < \sigma^{n+1}(p) < \sigma^n(p)$ .

Então concluímos que  $q_0 < \sigma^n < p$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Toda sequência monótona decrescente e limitada inferiormente converge, logo a sequência  $\sigma^n(p)$  tem um limite  $q_1 \geq q_0$  em  $v^+$ .

Afirmamos que  $q_1$  é um ponto fixo de  $\sigma$ . Com efeito,

$$\begin{aligned}\sigma(q_1) - q_1 &= \sigma\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sigma^n(p))\right) - q_1 \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sigma(\sigma^n(p))) - q_1 \\ &= q_1 - q_1 = 0\end{aligned}$$

No caso 1 foi mostrado que se  $q_1 > q_0$  temos que  $q_0 < \sigma(q_1) < q_1$ .

Mas,  $\sigma(q_1) = q_1$ , então  $q_1 = q_0$ .

Isto mostra que a trajetória de  $\phi_t(p)$  espirala se aproximando da trajetória periódica quando  $t \rightarrow \infty$ .

O caso 2 em que  $p \in v^+$ ,  $p < q_0$ , e  $\alpha(q_0) = -q_0$  é análogo. □

Dessa maneira mostrou-se que a Equação de Van der Pol possui uma solução periódica e que toda solução não periódica tende para esta solução periódica, girando no sentido horário em torno do equilíbrio  $(0, 0)$ .

## §2 A EQUAÇÃO DE LIENARD

Nesta seção vamos analisar o teorema 2 e dar uma breve idéia da sua demonstração. Note que a equação diferencial  $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$  quando  $g(x) = x$  fica da forma da equação de Lienard. O Teorema abaixo contempla tal equação.

**Teorema 2:** Seja  $f$  uma função real par e  $g$  uma função real ímpar,  $g(x) > 0$ ,  $x > 0$ . Assuma além disso que  $g \in C^1$  e que  $f$  é uma função contínua por partes. Considere  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ ,  $G(x) = \int_0^x g(t)dt$  e suponha que exista  $a > 0$  tal que  $F(x) < 0$  para  $0 < x < a$  e  $F(x) > 0$  crescendo monotonicamente para todo  $x > a$ . Considere também que  $G(x) \rightarrow \infty$  e  $F(x) \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow \infty$ . Dessa maneira temos que a equação diferencial  $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$  tem uma única solução periódica e ela é atratora.

**Prova:**

Neste caso devemos também mostrar que uma solução começando em  $(0, y)$ ,  $y > 0$ , deve cruzar no futuro o eixo  $(0, y)$ ,  $y < 0$  e assim por diante. A prova é semelhante a anterior.

Considere o sistema  $x' = y - F(x)$ ,  $y' = -g(x)$  e considere a mudança  $U = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$  ao longo das soluções, no lado direito do plano, ou

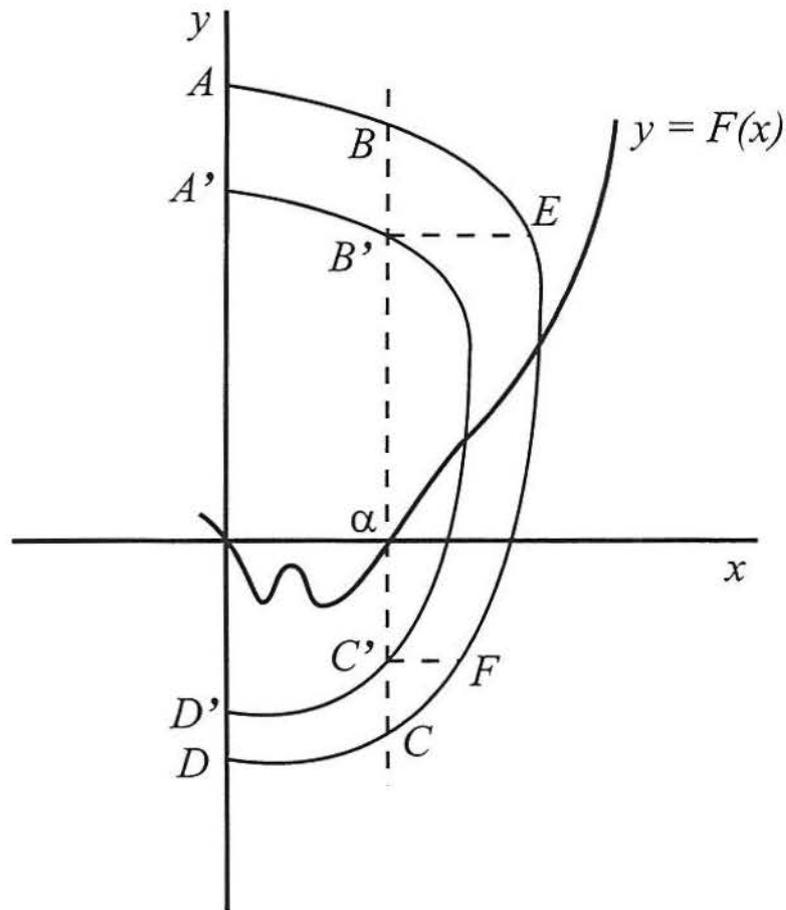


FIGURA 9

seja, quando  $x > 0$ .

Seja  $A'B'C'D'$  e  $ABEFC'D$  representantes da solução para  $x > 0$ . (Ver figura 9)

Fixada uma solução  $(x(t), y(t))$ , podemos escrever  $U$  como  $U(x) = \frac{1}{2}y(x)^2 + G(x)$  ou  $U(y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x(y))$  em certas regiões do plano.

Usando procedimentos análogos ao caso do Teorema 1 e ainda que

$$\frac{dU}{dx} = \frac{-gF}{y - F},$$

mostra-se que  $U_B - U_A < U_{B'} - U_{A'}$ .

Usando procedimentos análogos ao caso do Teorema 1 e ainda que

$$\frac{dU}{dy} = F,$$

mostra-se que  $U_F - U_E < U_{C'} - U_{B'}$ .

Depois, mostra-se que  $U_E < U_B$  e finalmente que  $U_D - U_A < U_{D'} - U_{A'}$ .

Para  $A'$  pequeno mostra-se que  $U_{D'} - U_{A'} > 0$  e para  $A$  grande mostra-se que  $U_D < U_A$ .

De maneira análoga ao Teorema 1, defina a aplicação de primeiro retorno. (No caso do Teorema 1, a aplicação  $\sigma$ ).

Pelas características monótonas de  $U_D - U_A$ , prova-se de maneira análoga o resultado desejado, ou seja, que existe uma órbita periódica atratora.

Fica assim demonstrado o Teorema 2.

Na verdade segue da prova acima que toda solução não periódica (diferente do ponto de equilíbrio) converge a órbita periódica atratora.

Note que se tomarmos  $f(x) = x^5 - x$  no lugar de  $f(x) = x^3 - x$  as hipóteses do Teorema 2 são satisfeitas.

## REFERÊNCIAS

- [1] CODDINGTON, Earl A.; LEVINSON, Norman. *Theory of Ordinary Differential Equations*, New York, Toronto, London, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC., 1955.
- [2] GUCKENHEIMER J. and WILLIAMS R. *Structural Stability of the Lorenz Attractor*, Publ. Math IHES 50, 73-100, 1980.
- [3] HIRSCH, Morris W.; SMALE, Stephen. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.
- [4] JONES, D. S. *Electrical and Mechanical Oscillations*, Routledge and Kegan Paul, London, 1961.
- [5] JORDAN D.W.; SMITH P. *Non Linear Ordinary Differential Equations*, Oxford, Clarendon Press, 1987.
- [6] LORENZ, E. N. *Deterministic Nonperiodic Flow*, J. Atmospheric Sci. 20, 130-41, 1963.
- [7] NETO, Alcides Lins. *Generalized Gradient Fields and Electrical Circuits*, Bulletin of the American Mathematical Society, 80, 991-95, 1974.
- [8] SMALE, S. *On the Mathematical Foundations of Electrical Circuit Theory*, J. Differential Geometry 7, 193-210, 1972.
- [9] SOTOMAYOR, Jorge. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides, 1979.