Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

O TEOREMA DE DENJOY

por

CHRISTIANO GARCIA

Porto Alegre, março de 2002

Tese submetida por Christiano Garcia* como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Artur Oscar Lopes

Banca Examinadora:
Dr. Jaime Bruck Ripoll
Dr. Luiz Fernando Carvalho da Rocha
Dr. Carlos Gutierrez

Data de Defesa: 25 de março de 2002.

---

* Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CNPq

Resumo: Neste trabalho, apresentamos alguns resultados sobre homeomorfismos e difeomorfismos sem pontos periódicos em S^1, ou seja, no círculo unitário. Inicialmente consideramos algumas definições como conjunto minimal e conjunto α e ω limite de $x_0 \in S^1$.

Nosso resultado principal é o Teorema de Denjoy:

Teorema: Seja $\varphi \in \mathrm{Dif}^1(S^1)$. Suponhamos que φ não tenha ponto periódico, que preserva orientação e ainda que φ' seja de variação limitada. Então, $\triangle = S^1$. ($\triangle$ denota o conjunto ω limite de um ponto $x \in S^1$ qualquer).

Abstract: In this work, we show some results about homeomorphisms and difeomorphims without periodic points in S^1, the unitary circle. Initially we consider some definitions as minimal set and α and ω limit set of $x_0 \in S^1$.

Our main result is the Denjoy Theorem:

Theorem: Let $\varphi \in \mathrm{Dif}^1(S^1)$. Suppose that φ do not have periodic points, that preserves orientation and finally that φ' is of bounded variation. Then, $\triangle = S^1$. ($\triangle$ denotes the ω-limit set of any point $x \in S^1$).

seção 1

O objetivo deste trabalho é apresentar uma demonstração do Teorema de Denjoy que afirma que o conjunto ω-limite de um difeomorfismo do círculo sem pontos periódicos e com derivada de variação limitada é o espaço todo.

Inicialmente vamos apresentar alguns resultados gerais sobre Sistemas Dinâmicos [1] [4] [5].

Considere $\varphi : X \to X$, onde X é um espaço métrico compacto com distância d [3].

Vamos analisar em breve particularmente o caso em que X é S^1, ou seja, o círculo unitário.

Definição 1: Seja $\varphi \in$ Hom (X), onde Hom (X) denota a classe dos homeomorfismos de X.

Os conjuntos

$$\omega(x_0) := \{x : \exists k_j \to +\infty, \lim_{k_j \to +\infty} \varphi^{k_j}(x_0) = x\}$$

$$\alpha(x_0) := \{x : \exists k_j \to -\infty, \lim_{k_j \to -\infty} \varphi^{k_j}(x_0) = x\}$$

são denominados respectivamente de omega e alfa limite de x_0.

Definição 2: Um conjunto $S \subset X$ é dito minimal para o homeomorfismo φ, se só se, S é fechado, não vazio, e invariante em relação φ (isto é, $\varphi(S) = S$), e ainda que não possua um subconjunto próprio de S com as mesmas propriedades. Se X é um conjunto minimal chamamos (X, φ) de sistema dinâmico minimal.

Exemplo 1: Seja $\varphi : X \to X$ um homeomorfismo e x_0 um ponto periódico, com período p, $\varphi^p(x_0) = x_0$. Então o conjunto

$$S = \{x_0, \varphi(x_0), ..., \varphi^{p-1}(x_0)\},$$

é minimal.

Proposição 1: Seja $\varphi : X \to X$ e $S \subset X$ fechado e invariante. S é um conjunto minimal para um sistema dinâmico (X, φ), se só se, a trajetória de qualquer ponto de $x \in S$ é densa em S.

Prova:

$(\Rightarrow)$: Seja $x \in S$. Considere o conjunto

$$\theta(x) = \{..., \varphi^{-n}(x), ..., \varphi^{-1}(x), x, \varphi(x), ..., \varphi^{n}(x), ...\}.$$

Temos que

$$\varphi(\theta(x)) = \{..., \varphi^{-n+1}(x), ..., x, \varphi(x), x, \varphi^{2}(x), ..., \varphi^{n+1}(x), ...\} = \theta(x).$$

Portanto, $\theta(x)$ é invariante com relação a φ.

Como φ é continua e X é compacto, então $\varphi(\overline{\theta(x)}) = \overline{\varphi(\theta(x))}$

Logo, $\varphi(\overline{\theta(x)}) = \overline{\theta(x)}$

Portanto, $\overline{\theta(x)}$ um conjunto fechado e invariante em S.

Como por hipótese S é minimal, então, $\overline{\theta(x)} = S$. Portanto, $\theta(x)$ é denso em S.

$(\Leftarrow)$: Admita $S' \subset S$ um conjunto fechado e invariante em S. Ora se $x \in S'$ então $\overline{\theta(x)} \subset S'$, pois S' é um conjunto fechado e invariante.

Por hipótese, $\overline{\theta(x)} = S$.

Logo, $S' = S$.

c.q.d

Proposição 2: Seja $\varphi : X \to X$. O conjunto $\omega(x_0)$, $x_0 \in X$ é um conjunto fechado e φ-invariante

Prova:

Vamos mostrar primeiro que $\omega(x_0)$ é fechado.

Seja $(y_n)_{n\in N} \subset \omega(x_0)$ e $y_n \to y$. Fixado $\xi > 0, \exists n_0 \in N$ tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \| y_n - y \| < \frac{\xi}{2}$$

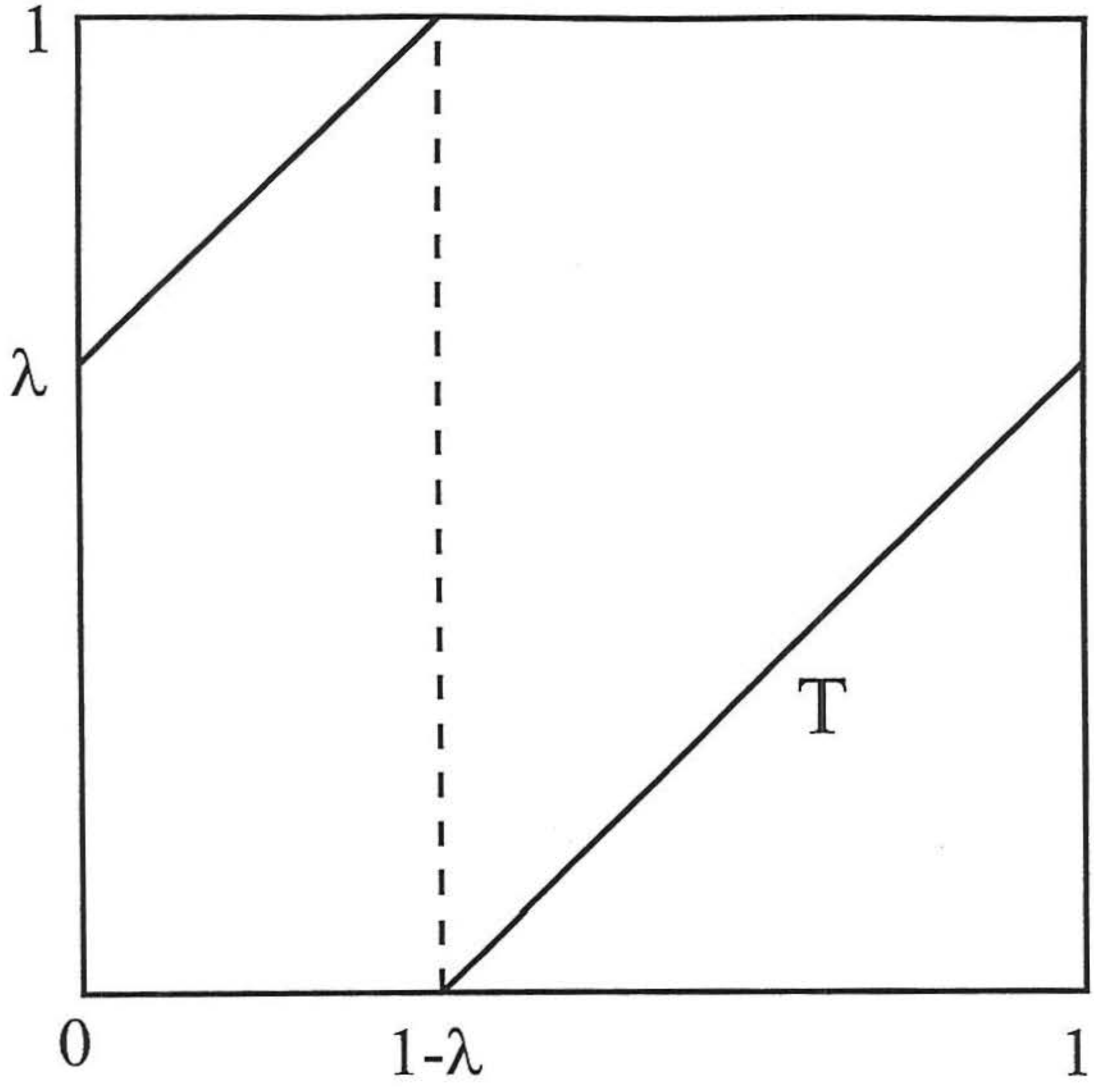

FIGURA 1

Considere $n_1 \geq n_0$. Como $\lim_{k_j \to +\infty} \varphi^{k_j}(x_0) = y_{n_1}$ para alguma sequencia k_j (pois $y \in \omega(x_0)$), então existe k_j tal que

$$\| \varphi^{k_j}(x_0) - y_{n_1} \| < \frac{\xi}{2}$$

Segue que

$$\| \varphi^{k_j}(x_0) - y \| \leq \| \varphi^{k_j}(x_0) - y_{n_1} \| + \| y_{n_1} - y \| < \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} = \xi.$$

Logo, dado ξ existe k tal que $\| \varphi^k(x_0) - y \| \leq \xi$. Portanto, $y \in \omega(x_0)$.

Concluímos assim que $\omega(x_0)$ é fechado.

Vamos mostrar agora que $\omega(x_0)$ é invariante.

Seja $y \in \varphi(\omega(x_0))$ então, $\exists x \in \omega(x_0)$, $y = \varphi(x)$. Segue que

$$\exists k_j \to +\infty \text{ tal que } \lim_{k_j \to +\infty} \varphi^{k_j}(x_0) = x, \text{ logo,}$$

$$\varphi(\lim_{k_j \to +\infty} \varphi^{k_j}(x_0)) = \varphi(x) = y, \text{ como } \varphi \text{ é contínua,}$$

$$\lim_{k_j \to +\infty} \varphi(\varphi^{k_j}(x_0)) = y,$$

.

Logo,

$$\lim_{k_j \to +\infty} \varphi^{k_j+1}(x_0) = y \Rightarrow y \in \omega(x_0)$$

Daí, $\varphi(\omega(x_0)) \subset \omega(x_0)$.

Aplicando o resultado acima para φ^{-1}, obtemos $\varphi^{-1}(\omega(x_0)) \subset \omega(x_0)$, e assim aplicando φ em ambos os lados da expressão acima obtemos $\omega(x_0) \subset \varphi(\omega(x_0))$

c.q.d

Vamos considerar a seguir difeomorfismos do círculo $X = S^1$. Na figura 1 mostramos o gráfico de T no caso em que T é a tranformação tal que $T(x) = x + \lambda$ quando $x < 1 - \lambda$, e $T(x) = x + \lambda - 1$ quando $x \geq 1 - \lambda$, e $\lambda \in (0, 1)$ é constante real. Note que T não é continua como função de $[0, 1]$ mas é continua como função de S^1 em S^1, onde identificamos o 0 com o 1.

A figura 2 ilustra o gráfico de um difeomorfismo qualquer do círculo no círculo, visto como aplicação de $[0, 1]$ em $[0, 1]$.

Seja α o ponto de descontinuidade (ver figura 2) no meio do intervalo $[0, 1]$ de T (vista como função bijetiva definida em $[0, 1]$).

T vai ser diferenciável (como aplicação do círculo), se vista como aplicação de $[0, 1]$ em $[0, 1]$, é tal que:

a) T é diferenciável em $(0, \alpha)$ e em $(\alpha, 1)$.

b) o limite da derivada $T'(x)$ à esquerda em 1 é igual ao limite da derivada $T'(x)$ à direita em 0. Exigimos ainda que o limite da derivada $T'(x)$ à esquerda em α seja igual ao limite da derivada $T'(x)$ à direita em α.

Se λ for um número racional racional, então pode se mostrar que existem infinitos pontos periódicos para a T acima definida. Por outro lado, se λ for irracional então T não possui órbitas periódicas.

Na figura 2 mostramos o gráfico de T no caso geral de um difeomorfismo do círculo que preserva orientação sem pontos periódicos.

Observamos que quando mencionarmos um intervalo (a, b) no círculo estaremos considerando o pedaço de arco contido entre a e b e que se dirige da a à b no sentido horário.

Proposição 3: 0 Seja $\varphi : S^1 \to S^1$ um homeomorfismo sem ponto periódico. Para todo $x, y \in S^1$ vale que $\omega(x) = \omega(y) = \alpha(x) = \alpha(y)$

Prova:

Seja $z \in \omega(x)$. Vamos mostrar que dado $y \in S^1$ e $\epsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que $|\varphi^r(y) - z| \leq \xi$. Isto vai implicar que $z \in \omega(y)$.

Como $z \in \omega(x)$, então existe $k_j \to \infty$, tal que $\lim_{k_j \to +\infty} \varphi^{k_j}(x) = z$. Fixado $\xi > 0$ é possível obter $n, m \in N$ tais que $\varphi^n(x), \varphi^m(x) \in (z - \xi, z + \xi)$.

Suponha , sem perda de generalidade que $n > m$.

Tome $l = m - n$.

Temos que $(x_n, x_m) \subset (z - \xi, z + \xi)$ onde $x_n = \varphi^n(x)$ e $x_m = \varphi^m(x)$. Segue que $\varphi^l((x_n, x_m)) = \varphi^{m-n}((x_n, x_m)) = (x_m, x_{2m-n})$.

Note que $[x_n, x_m] \cap [x_m, x_{2m-n}] = \{x_m\}$, caso contrário, φ teria um ponto de período $-l$.

Da mesma maneira $\varphi^{2l}((x_n, x_m)) = (x_{2m-n}, x_{3m-2n})$.

Note que $[x_m, x_{2m-n}] \cap [x_{2m-n}, x_{3m-2n}] = \{x_{2m-n}\}$, caso contrário, φ teria um ponto de período $-l$.

Tomando os intervalos $\varphi^{kl}((x_n, x_m)), k \in \mathbf{N}$, observamos que eles se apresentam em uma sequencia de intervalos consecutivos.

Observe que $\varphi^{kl}(x_n)$ não pode acumular em $u \in S^1$, pois então u seria ponto de período $-l$.

Continuando este processo obtemos $\bigcup_{k>0} f^k([x_n, x_m]) = S^1$ onde $f = \varphi^l$. Segue que dado y, existe $k > 0$ tal que

$$y \in f^k((x_n, x_m)) = \varphi^{k(m-n)}((x_n, x_m)).$$

Como $(x_n, x_m) \subset (z - \xi, z + \xi)$ então,

$$\varphi^{k(m-n)}((x_m, x_n)) \subset \varphi^{k(m-n)}((z - \xi, z + \xi)).$$

Daí,

$$y \in \varphi^{k(m-n)}((z - \xi, z + \xi)) \to \varphi^{k(n-m)}(y) \in (z - \xi, z + \xi)$$

Logo, é possível obter $k_j \to \infty$ tais que $\lim \varphi^{k_j}(y) = z$.

Concluímos assim que $z \in \omega(y)$.

Trocando x por y, mostramos que $\omega(y) \subset \omega(x)$. Daí, $\omega(x) = \omega(y)$. Por um raciocínio análogo obtemos que $\alpha(x) = \alpha(y), \forall x, y \in S^1$.

Vamos mostrar agora que $\alpha(x) = \omega(x)$.

Seja $z \in \omega(x)$, então existe $k_j \to \infty$, tal que $\lim_{k_j \to +\infty} \varphi^{k_j}(x) = z$. Fixado $\xi > 0$ é possível obter $n, m \in N$ tais que $\varphi^n(x), \varphi^m(x) \in (z - \xi, z + \xi)$.

Suponha , sem perda de generalidade que $n > m$.

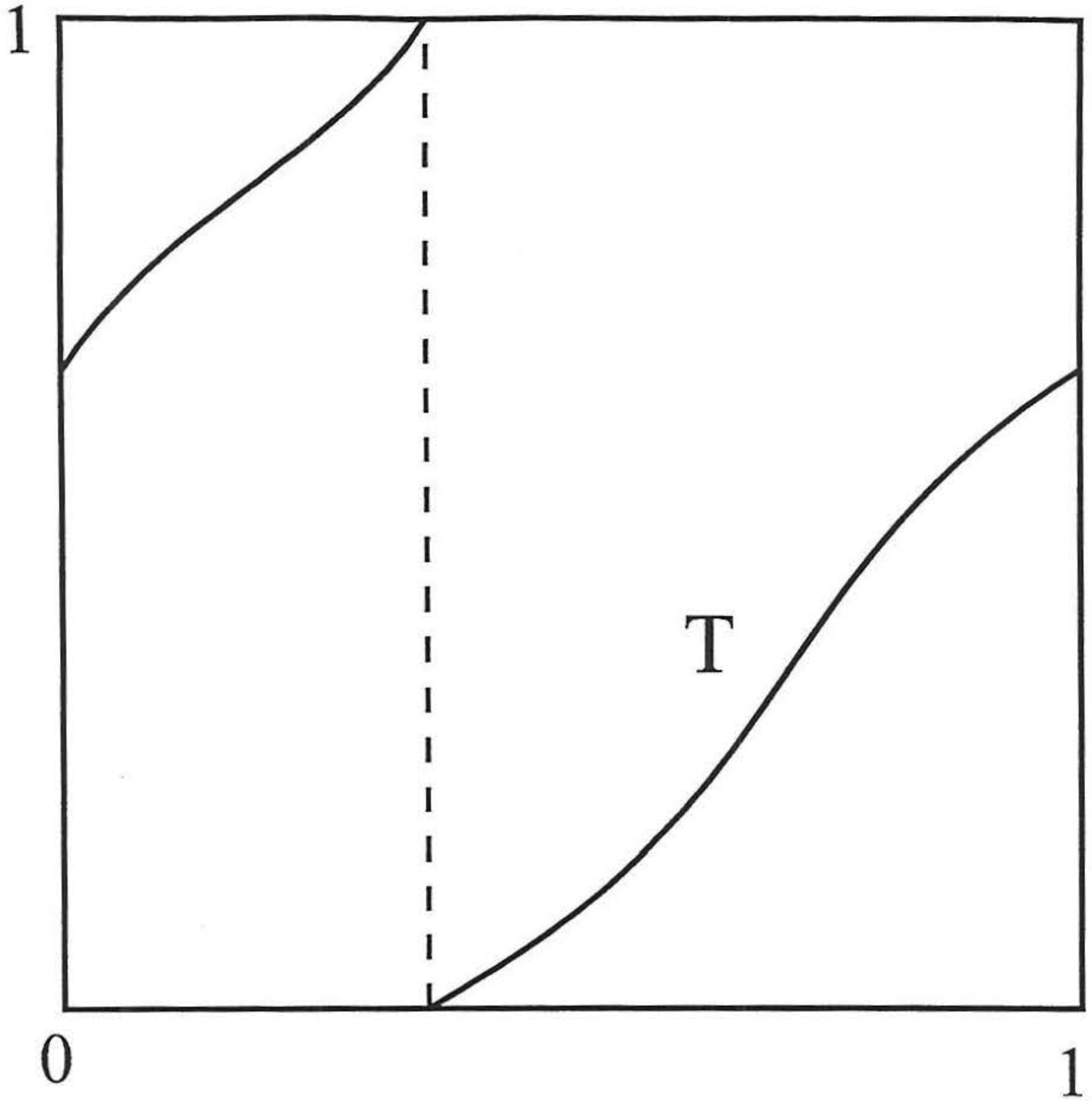

FIGURA 2

Diferentemente do caso anterior, tome $l = n - m$.

Vamos mostrar que que existe $r < 0$ tal que $|\varphi^r(x) - z| \leq \xi$.

Temos que $(x_n, x_m) \subset (z - \xi, z + \xi)$ onde $x_n = \varphi^n(x)$ e $x_m = \varphi^m(x)$. Segue que $\varphi^l((x_n, x_m)) = \varphi^{m-n}((x_n, x_m)) = (x_m, x_{2m-n})$.

Note que $[x_n, x_m] \cap [x_m, x_{2m-n}] = \{x_m\}$, caso contrário, φ teria um ponto de período l.

Da mesma maneira $\varphi^{2l}((x_n, x_m)) = (x_{2m-n}, x_{3m-2n})$.

Note que $[x_m, x_{2m-n}] \cap [x_{2m-n}, x_{3m-2n}] = \{x_{2m-n}\}$, caso contrário, φ teria um ponto de período l.

Tomando os intervalos $\varphi^{kl}((x_n, x_m)), k \in \mathbb{N}$, observamos que eles se apresentam em uma sequencia de intervalos consecutivos.

Observe que $\varphi^{kl}(x_n)$ não pode acumular em $u \in S^1$, pois então u seria ponto de período l

Continuando este processo obtemos $\bigcup_{k>0} f^k([x_n, x_m]) = S^1$ onde $f = \varphi^l$. Segue, que existe $k > 0$ tal que

$$x \in f^k((x_n, x_m)) = \varphi^{k(m-n)}((x_n, x_m)).$$

Como $(x_n, x_m) \subset (z - \xi, z + \xi)$ então,

$$\varphi^{k(m-n)}((x_m, x_n)) \subset \varphi^{k(m-n)}((z - \xi, z + \xi)).$$

Daí,

$$x \in \varphi^{k(m-n)}((z - \xi, z + \xi)) \rightarrow \varphi^{k(n-m)}(x) \in (z - \xi, z + \xi)$$

Logo, é possível obter $k_j \rightarrow -\infty$ tais que $\lim \varphi^{k_j}(x) = z$.

Logo, $z \in \alpha(x)$. Portanto, podemos concluir que $\omega(x) = \alpha(x)$.

c.q.d

Sob as hipótese da proposição acima vamos denotar a seguir por $\triangle$ qualquer um dos conjuntos $\alpha(x) = \omega(x), x \in S^1$.

Observação: O conjunto $\triangle = \omega(x)$, definido acima é um conjunto fechado e invariante em relação a φ. Segue da proposição que $\triangle$ não tem nenhum subconjunto com as mesmas propriedades. De fato, seja $B \subset \triangle$ fechado e invariante, e suponha que $\triangle - B \neq \emptyset$. Seja $y \in B$, o fato que $\omega(y) = \omega(x) = \triangle$ (para o $x \in S$) e $\omega(y) \subset B$, nos daria uma contradição. Concluímos assim que $\triangle$ é um conjunto minimal.

Denotamos por $\mathrm{Dif}^1(S^1)$ o conjunto dos difeomorfismos de classe C^1 no círculo.

Nossa apresentção estará próxima a que aparece em [5].

Dada uma função f definida em $S^1 = [0, 1)$ tomando valores reais, seja $x_0 = 0 < x_1 < x_2 ... < x_{n-1} < x_n = 1$, uma partição de S^1, denotamos

$$r = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Definimos $Var(f)$ o supremo dos r quando variamos todas as partições finitas, como acima, para todo e qualquer n [4].

Definição 4: Uma função f é de variação limitada se $Var(f)$ é finito.

Teorema: Seja $\varphi \in \mathrm{Dif}^1(S^1)$. Suponha que φ não tenha pontos periódicos, que preserva orientação e ainda que φ' é de variação limitada. Então, $\triangle = S^1$.

Prova: A prova será dividida em três partes.

Parte 1: Fixe $x_0 \in S^1$ e denote $x_k = \varphi^k(x_0), \forall k \in Z$. Fixado $n \in N$ suponha que

$$(x_n, x_0) \bigcap \{x_k : | k | \leq n\} = \emptyset,$$

então, afirmamos que os pontos $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ e $x_{-n}, x_{-n+1}, ..., x_{-1}$ alternam sobre S^1. Isto quer dizer que todo arco (x_k, x_{k-n}) para cada $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ não contém outros pontos do conjunto $\{x_j : \mid j \mid \leq n\}$.

Provemos esta afirmação supondo, por contradição, que não é verdadeira.

De fato, note primeiro que nao pode acontecer de um destes intervalos (x_j, x_{j-n}) estar inteiramente contido em outro (x_k, x_{k-n}), pois então $\varphi^{j-k}((x_k, x_{k-n})) \subset (x_k, x_{k-n})$ e consequentemente φ^{j-k} tem ponto fixo, contradição com a hipótese.

Escolhamos $k > 0$, o maior número entre $\{-n+1, ..., -1, 0, 1, ..., n-1\}$, com a propriedade de (x_k, x_{k-n}) conter algum $x_p, p \in \{-n+1, ..., -1, 0, 1, ..., n-1\}$.

Se $k = n - s$, $s > 0$, teríamos para algum p que $x_p \in (x_k, x_{k-n})$. Suponha $-n \leq p < n - s$; assim $x_{p+s} = x_{p+n-k} \in (x_0, x_n)$, absurdo, pois $(x_n, x_0) \bigcap \{x_k : \mid k \mid \leq n\} = \emptyset$.

Suponha $p \geq n - s$, então x_k ou x_{k-n} está contido em (x_p, x_{p-n}). Então x_{k+n-p} ou $x_{k-n+n-p}$ está contido em (x_n, x_0), absurdo, pois $(x_n, x_0) \bigcap \{x_k : \mid k \mid \leq n\} = \emptyset$.

Parte 2:

Por hipótese, φ preserva orientação. Assim $\varphi'(x) > 0$. Então, como φ' é contínua, segue que existe $a > 0$ tal que

$$\varphi'(x) \geq a > 0, \forall x \in S^1$$

Denotamos $f(x) = \log \varphi'(x)$.

Afirmamos que a função é de variação limitada. De fato, tome uma partição de S^1 dada por $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_v; \xi_v = \xi_0$.

Aplicando o teorema do valor médio para a função $\log \mu$ (para $\mu \geq a$), obtemos do fato que $\frac{d}{du} \log u = \frac{1}{u}$ a desigualdade

$$\sum_{i=0}^{v-1} \mid f(\xi_{i+1}) - f(\xi_i) \mid = \sum_{i=0}^{v-1} \mid \log \varphi'(\xi_{i+1}) - \log \varphi'(\xi_i) \mid \leq$$

$$\sum_{i=0}^{v-1} \frac{1}{a} \mid \varphi'(\xi_{i+1}) - \varphi'(\xi_i) \mid \leq \frac{1}{a} Var\varphi' < +\infty$$

Logo f é de variação limitada.

Denote Var(f) por V.

Seja x_0, n e x_k, $\mid k \mid \leq n$ sob a hipótese que

$$(x_n, x_0) \bigcap \{x_k : \mid k \mid \leq n\} = \emptyset.$$

Pela conclusão na parte 1, os intervalos (x_k, x_{k-n}); $k = 0, 1, 2, ..., n$ são dois a dois disjuntos. Daí,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mid f(x_k) - f(x_{k-n}) \mid \leq V$$

Concluímos pela regra da cadeia que

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \log \prod_{k=0}^{n-1} \varphi'(x_k) = \log \frac{d\varphi^n(x_0)}{dx}$$

e ainda que

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k-n}) = \log \prod_{k=0}^{n-1} \varphi'(x_{k-n}) = \log \prod_{j=-n}^{-1} \varphi'(x_j) = \log \frac{d\varphi^n(x_{-n})}{dx} = -\log \frac{d\varphi^{-n}(x_0)}{dx}$$

Das duas últimas igualdades obtemos:

$$V \geq \mid \log \frac{d\varphi^n(x_0)}{dx} + \log \frac{\varphi^{-n}(x_0)}{dx} \mid$$

e assim

$$V \geq \mid \log(\frac{d\varphi^n(x_0)}{dx} \frac{d\varphi^{-n}(x_0)}{dx}) \mid$$

Daí,

$$\log(\frac{d\varphi^n(x_0)}{dx} \frac{d\varphi^{-n}(x_0)}{dx}) \geq -V$$

isto implica que

$$\frac{d\varphi^n(x_0)}{dx} \frac{d\varphi^{-n}(x_0)}{dx} \geq \exp(-V) \tag{0.1}$$

pois a aplicação exponencial é uma função crescente.

Note que o resultado acima foi obtido para um x_0 para o qual vale a propriedade $(x_n, x_0) \bigcap \{x_k : \mid k \mid \leq n\} = \emptyset$.

Parte 3:

Vamos agora demonstrar a afirmação do teorema.

A demonstração será por contradição. Assuma que $\omega(x) = \triangle \neq S^1$.

O conjunto $S^1 - \triangle$ é aberto, conforme proposição 2. Segue que

$$S^1 - \triangle = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$$

onde I_n, $n = 0, 1, ...$ são uma sequência de arcos disjuntos sobre S^1.

O conjunto $S^1 - \triangle$ é φ-invariante. Assim $\varphi^k(I_0) = I_{m_k}$ para algum m_k.

Para diferentes k obtemos m_k diferentes. De fato, assuma que existe $k_1, k_2 \in Z$ tais que $\varphi^{k_1}(I_0) = I_{m_{k_1}} = I_{m_{k_2}} = \varphi^{k_2}(I_0)$. Sem perda de generalidade assuma que $k_2 > k_1$. Segue que

$$\varphi^{k_2-k_1}(I_{m_{k_1}}) = \varphi^{k_2-k_1}(\varphi^{k_1}(I_0)) = \varphi^{k_2}(I_0) = I_{m_{k_2}} = I_{m_{k_1}}$$

Daí, $\varphi^{k_2-k_1}$ tem ponto fixo, mas isto é absurdo pois φ não tem pontos periódicos.

Logo a afirmação é verdadeira.

Note que

$$\sum_{k=1}^{\infty} | I_{m_k} | \leq 1 < +\infty. \tag{0.2}$$

O comprimento de I_{m_k} pode ser estimado por baixo através de

$$| I_{m_k} | = \int_{I_0} \frac{d\varphi^k(x)}{dx} dx \geq | I_0 | \min_{x \in I_0} \frac{d\varphi^k(x)}{dx} = | I_0 | \prod_{i=0}^{k-1} \varphi'(\xi_i) \tag{0.3}$$

onde $\xi_i \in I_{m_i}$.

Denotando por ν_i e μ_i respectivamente o mínimo e o máximo de φ' em I_{m_i} . Considerando 0.2 e 0.3 temos que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\prod_{i=0}^{k-1}\nu_i < +\infty$$

Note que $\varphi'(x) \geq a > 0$, logo,

$$\frac{\mu_i}{\nu_i} = 1 + (\frac{\mu_i}{\nu_i} - 1) = 1 + (\frac{\mu_i - \nu_i}{\nu_i}) \leq 1 + (\frac{\mu_i - \nu_i}{a}) \leq \exp(\frac{\mu_i - \nu_i}{a})$$

Logo,

$$\frac{\prod_{i=0}^{k-1}\mu_i}{\prod_{i=0}^{k-1}\nu_i} = \prod_{i=0}^{k-1}(\frac{\mu_i}{\nu_i}) \leq \prod_{i=0}^{k-1}\exp(\frac{\mu_i - \nu_i}{a})$$

Temos ainda que

$$\prod_{i=0}^{k-1}\exp(\frac{\mu_i - \nu_i}{a}) = \exp(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\mu_i - \nu_i}{a}) = \exp(\frac{1}{a}\sum_{i=0}^{k-1}(\mu_i - \nu_i)) \leq \exp(\frac{1}{a}Var\varphi')$$

pois a função exponencial é crescente. Daí,

$$\frac{\prod_{i=0}^{k-1}\mu_i}{\prod_{i=0}^{k-1}\nu_i} \leq \exp(\frac{1}{a}Var\varphi') \tag{0.4}$$

Da convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{k-1}\nu_i$ obtemos da desigualdade acima que $\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{k-1}\mu_i$ é limitado. Portanto, $\lim_{k\to\infty}\prod_{i=0}^{k-1}\mu_i = 0$

Como μ_i é o supremo da derivada φ' no intervalo I_{m_i}, obtemos que

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{d\varphi^k(x)}{dx} = 0, \forall x \in \overline{I_0}$$

o mesmo argumento mostra que

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{d\varphi^{-k}(x)}{dx} = 0, \forall x \in \overline{I_0}$$

Assim,

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{d\varphi^k(x)}{dx} . \frac{d\varphi^{-k}(x)}{dx} = 0, \forall x \in \overline{I_0}$$

Isto verifica-se em particular para $x = x_0$, onde x_0 denota um dos pontos extremos de I_0.

A partir da proposição 2 e 3 sabemos que $x_0 \in \triangle$ está em $\omega(x_0)$.

Logo existe uma sequência $n_j \to +\infty$ tal que $(x_{n_j}, x_0) \bigcap \{x_k :| k |\leq n_j\} = \emptyset$ verifica-se para n_j. De fato, como $x_0 \in \omega(x_0)$, então existe uma subsequencia $x_{n_s} \to x_0$, basta escolher x_{n_j} entre aqueles x_{n_s} que de tempos em tempos são o mais próximo de x_0 (do que os seus antecessores).

De acordo com que foi visto na parte 2, a desigualdade

$$\frac{d\varphi^n(x_0)}{dx} \frac{d\varphi^{-n}(x_0)}{dx} \geq \exp(-V) \tag{0.5}$$

é satisfeita neste ponto x_0 para todo $n = n_j$. Assim obtemos uma contradição com

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{d\varphi^n(x)}{dx} . \frac{d\varphi^{-n}(x)}{dx} = 0, \forall x \in \overline{I_0}$$

Portanto, $S^1 = \triangle$.

c.q.d

Referências

[1] Devaney, R.L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publishing Company (1989).

[2] Fernandez, P.J., *Medida e Integração*, Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides, (1976)

[3] Lima, E.L., *Espaços Métricos*, Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides

[4] Szlenk, W., *An Introduction to the Theory of Smooth Dyanmical System*, New York, John-Wiley, 1982.

[5] Walters, P., *An Introduction to Ergodic Theory*, New York, Springer-Verlag, 1982.