

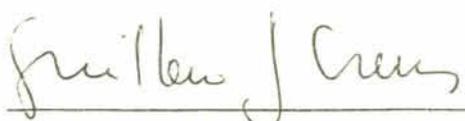
ANÁLISE NUMÉRICO-EXPERIMENTAL DE
PROBLEMAS DE FLUÊNCIA

JOSE ANGELO FONTANIVE

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Porto Alegre
Novembro de 1982

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.



Prof. Guillermo Juan Creus
Orientador



Prof. José S. Gomes Franco
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em
Engenharia Civil

Este trabalho é dedicado a
minha esposa Lena e a
meus pais

AGRADECIMENTOS

Ao orientador deste trabalho, professor Guillermo Juan Creus, pelo acompanhamento e incentivo durante o mesmo.

Ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil pelo apoio e incentivo dados no decorrer do trabalho.

A Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro prestado.

A Paulo Francisco Bueno, pela colaboração no desenvolvimento dos ensaios.

Aos professores José Carlos Ferraz Hennemann, Walter Otto Cybis, Luis Fernando Nanni pela colaboração dada, tanto na parte teórica como numérica do trabalho.

À srta. Liliani Gaeversen pelo trabalho datilográfico.

À srta. Lenira Corsetti pela preparação das referências bibliográficas.

A todos os professores, colegas e funcionários do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO	
1.1 - Objetivo e Importância do Problema.....	1
1.2 - Conteúdo.....	2
2 - FUNDAMENTOS DA VISCOELASTICIDADE	
2.1 - Introdução.....	4
2.2 - Ensaio de Fluência e Relaxação.....	5
2.3 - Linearidade.....	8
2.4 - Teorema de Riez.....	11
2.5 - Envelhecimento.....	15
2.6 - Modelos Reológicos.....	16
2.6.1 - Modelo de Maxwell.....	18
2.6.2 - Modelo de Kelvin-Voigt.....	23
2.6.3 - Modelos Generalizados.....	26
2.6.4 - Modelo Standard.....	31
3 - VISCOELASTICIDADE DO CONCRETO	
3.1 - Introdução.....	35
3.2 - Linearidade.....	35
3.2.1 - Linearidade entre Tensão e Deformação Lenta do Concreto Submetido à Compressão.....	35
3.2.2 - Linearidade entre Tensão e Recuperação da Fluência do Concreto.....	37
3.2.3 - Linearidade entre Tensão e Fluência do Concreto Submetido a Tração.....	39
3.3 - Envelhecimento.....	39
3.4 - Características Básicas da Fluência do Concreto.....	41
3.5 - Expressões Analíticas para a Fluência do Concreto.....	44

3.6	-	Expressão de Dischinger.....	46
3.6.1	-	Relações Básicas.....	46
3.6.2	-	Correspondência com Modelo Reológico.....	49
3.6.3	-	Análise Crítica.....	51
3.7	-	Expressão de Arutyunyan.....	54
3.7.1	-	Relações Básicas.....	54
3.7.2	-	Correspondência com Modelo Reológico.....	58
3.8	-	Análise Crítica.....	60
3.9	-	Propostas de Arutyunyan e Dischinger - Análise Conjunta.....	61
4	-	RESOLUÇÃO NUMÉRICA	
4.1	-	Introdução.....	65
4.2	-	Determinação do Algoritmo Numérico.....	66
4.3	-	Intervalos de Tempo.....	70
5	-	EXEMPLOS NUMÉRICOS	
5.1	-	Exemplo 1 - Modelo Standard.....	79
5.2	-	Exemplo 2 - Pilar de Concreto Armado.....	82
5.2.1	-	Resolução pela Proposta de Arutyunyan.....	84
5.2.2	-	Resolução pela Proposta de Dischinger.....	90
5.3	-	Exemplo 3 - Tubo Submetido à Pressão Interna.....	97
5.3.1	-	Resolução pela Proposta de Arutyunyan...100	
5.3.2	-	Resolução pela Proposta de Dischinger...105	
6	-	ENSAIOS	
6.1	-	Concreto e Corpos de Prova.....	109
6.2	-	Sistema de Aplicação e Manutenção da Carga.....	111
6.3	-	Sistema de Medição da Deformação Lenta.....	117
6.4	-	Ensaios.....	119
7	-	ANÁLISE DOS RESULTADOS	
7.1	-	Resultado dos Ensaios Complementares.....	122
7.2	-	Resultado dos Ensaios de Fluência.....	125

7.2.1 - Determinação das Constantes Viscoelásticas.....	132
7.2.1.1 - Método de Ross.....	134
7.2.1.2 - Método de Ishai.....	139
7.2.2 - Reprodução da Fluência através das Constantes Viscoelásticas Calculadas...	145
7.2.2.1 - Reprodução por Dischinger.....	145
7.2.2.2 - Reprodução por Arutyunyan.....	146
8 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	
8.1 - Conclusões.....	153
8.1.1 - Análise Teórica.....	153
8.1.2 - Análise Experimental.....	154
8.2 - Recomendações.....	156
APÊNDICE	
Tabelas A1.....	157
Tabelas A2.....	169
BIBLIOGRAFIA.....	171

RESUMO

Este trabalho analisa numérica e experimentalmente problemas de fluência do concreto, checando métodos tradicionais já propostos e, sugerindo uma solução numérica para esses problemas.

Inicialmente é feita uma análise dos fundamentos da viscoelasticidade e sua aplicação para a representação do comportamento mecânico do concreto. Estudam-se, a seguir, as teorias de Dischinger e Arutyunyan e, propõe-se uma solução numérica, a qual é checada com as teorias, pela resolução de exemplos. Finalmente, é detalhada a execução de ensaios de fluência e relaxação, analisados os resultados obtidos, tecendo-se, também, algumas recomendações.

ABSTRACT

In the present work, problems of creep of concrete are analyzed both numerically experimentally, classical comparing methods and a numerical procedure for the solution of these problems.

Firstly, fundamentals of viscoelasticity and its application to concrete behavior representation are presented. Then, the theories of Dischinger and Arutyunyan are studied, and the computing numerical solutions are compared in several examples. Finally, experiences on creep and relaxation are described, and its result are analyzed. Some coments on possible future developments are included.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - Objetivo e Importância do Problema

Com o incremento da utilização do concreto pretendido nas grandes obras civis, tornou-se evidente a necessidade do estudo de sua fluência. Por sua vez, com o surgimento das usinas nucleares, o problema vê-se agravado devido as altas temperaturas de exposição do concreto.

Mesmo a temperaturas ambientes, a fluência do concreto pode chegar a ser o triplo da deformação elástica. Em vista disto, se faz obrigado um exame mais cuidadoso do efeito da fluência sempre que os efeitos de deformação sejam importantes, como por exemplo, nas perdas da força de protensão ou na variação das reações de apoio.

O objetivo deste trabalho é realizar um estudo teórico experimental, para resolução de problemas de fluência do concreto, checando métodos tradicionais já propostos e, sugerindo, uma solução numérica para esses problemas.

Vários autores propuseram relações para expressar a lei de variação da fluência. As primeiras teorias, obtidas com base experimental, não refletiam a influência da idade do concreto. Posteriormente, construíram-se expressões, levando-se em conta a idade do concreto pela inclusão de coeficientes corretivos, obtidos para uma idade fixa e baseados em experiências. Finalmente, chegaram-se a expressões mais precisas, com a utilização não de coeficientes de correção, mas de funções dependentes da idade do material. Dischinger [11] foi quem sugeriu, primeiramente, uma teoria mais simples, deste tipo, para utilização em problemas de análise estrutural. Após, Arutyunyan [1], propôs uma teoria mais complexa, cuja resolução analítica re-

cai no uso da função gama incompleta. Estas duas teorias foram as escolhidas para a análise teórica, visto serem as de maior utilização.

Com o advento do computador, várias soluções numéricas, como a de Bazant [3], foram utilizadas na resolução de problemas de fluência. No trabalho, sugere-se uma solução numérica baseada na representação integral, com a divisão do tempo efetuada de diversas maneiras.

1.2 - Conteúdo

No capítulo 2, faz-se um estudo sobre os corpos viscoelásticos em geral, com uma análise de seu comportamento, e, sua representação por modelos reológicos.

Este enfoque, é uma preparação para o terceiro capítulo, que analisa o comportamento viscoelástico do concreto. Neste capítulo, também são estudadas e analisadas as teorias de Dischinger [11] e Arutyunyan [1], seu comportamento e correspondência com modelos reológicos.

No quarto capítulo, é desenvolvida, então, a solução numérica para os problemas de fluência, analisando também, a função que determina os intervalos de tempo. A solução numérica proposta é checada, no quinto capítulo, com exemplos resolvidos pelas teorias de Dischinger e Arutyunyan.

Apresenta-se, no capítulo seis, os ensaios realizados. É detalhado o sistema de aplicação e manutenção da carga, os sistemas de medição de deformação lenta e descritos, por fim, os ensaios realizados.

No sétimo capítulo apresentam-se a análise dos resultados obtidos dos ensaios, onde também, são determinadas as constantes viscoelásticas do concreto. As constantes são determinadas pelo método de Ross [26] e Ishai [18]. De posse das constantes são reproduzidas as curvas de flu-

ência pelas teorias estudadas.

Finalmente, no capítulo 9, apresentam-se as conclusões e algumas recomendações, tanto da parte teórica, como da experimental.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS DA VISCOELASTICIDADE

2.1 - Introdução

Na teoria elástica clássica, diz-se que a condição de tensão de um corpo sólido é determinada, univocamente, pela sua deformação. Essa relação unívoca é dada por:

$$\sigma = \bar{\lambda} (\epsilon) \quad (2.1.1)$$

e a relação inversa é única,

$$\epsilon = \bar{d} (\sigma) \quad (2.1.2)$$

Em muitos materiais, como madeira, plástico, concreto, essa relação unívoca entre tensão e deformação não existe. Por exemplo, o corpo é capaz de deformar-se com o tempo, enquanto sua condição de tensão é constante, ou, variar seu estado de tensão sem modificar sua deformação. Assim, a maioria dos materiais reais, têm um comportamento dependente da história do processo de carga, isto é, as tensões em um momento t dependem, não somente das deformações deste momento, mas também das deformações anteriores. Nestas circunstâncias, a variável tempo t deve ser levada em consideração.

Os materiais que têm esse tipo de comportamento são denominados inelásticos ou materiais com memória. Para estes materiais pode escrever-se de forma geral

$$\epsilon (t) = \mathcal{D} \left[\begin{array}{c} \tau=t \\ \tau=0 \end{array} \sigma (\tau) \right] \quad (2.1.3)$$

onde $\sigma_{\tau=0}^t(\tau)$ indica a história da carga no intervalo $[0, t]$, e \mathcal{D} , é um funcional, que transforma a cada instante, a história de tensão em história de deformação correspondente.

Da mesma forma pode escrever-se:

$$\sigma(t) = E \left[\varepsilon_{\tau=0}^{\tau=t}(\tau) \right] \quad (2.1.4)$$

com significado análogo para $\varepsilon_{\tau=0}^t(\tau)$ e E . As variáveis básicas são a tensão σ , a deformação ε e o tempo t .

Hã teorias que estudam os materiais inelásticos sob diferentes aspectos ou enfoques; uma delas é a correspondente aos materiais elasto-plásticos, cujo comportamento é indiferente à escala do tempo; outra, a viscoelasticidade linear, que analisa os materiais cujo comportamento é independente da escala de tensões. As considerações e aplicações deste trabalho assumem a condição de homogeneidade do material. Na verdade, trabalha-se com um material não-homogêneo, o concreto. Mas, resalta-se que, o concreto pode ser considerado como estatisticamente homogêneo se o tamanho da peça for bem maior que o do agregado. Outra restrição a ser feita é que se consideram as condições isotérmicas.

2.2 - Ensaio de Fluência e de Relaxação

No estudo do comportamento dos materiais viscoelásticos, dois tipos de ensaios são, particularmente, importantes. O primeiro, dito de fluência, onde o corpo de prova é submetido a uma determinada tensão, a qual é mantida constante no tempo. Esse tipo de história de carga po-

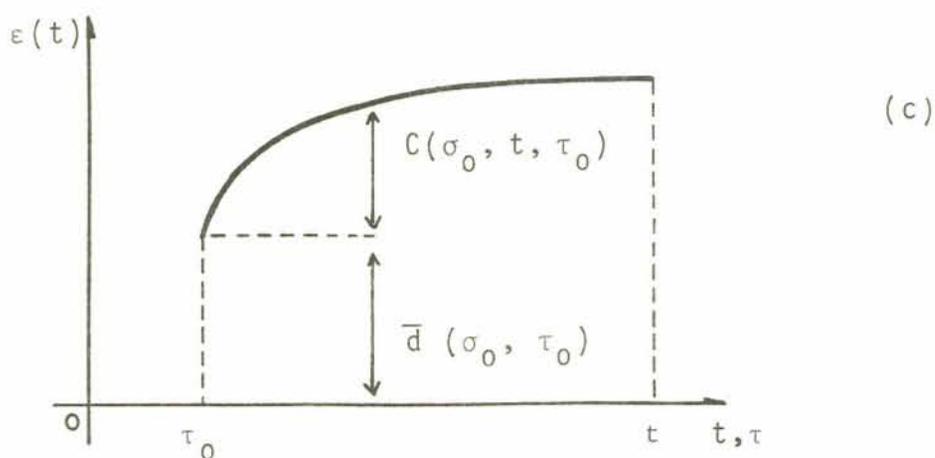
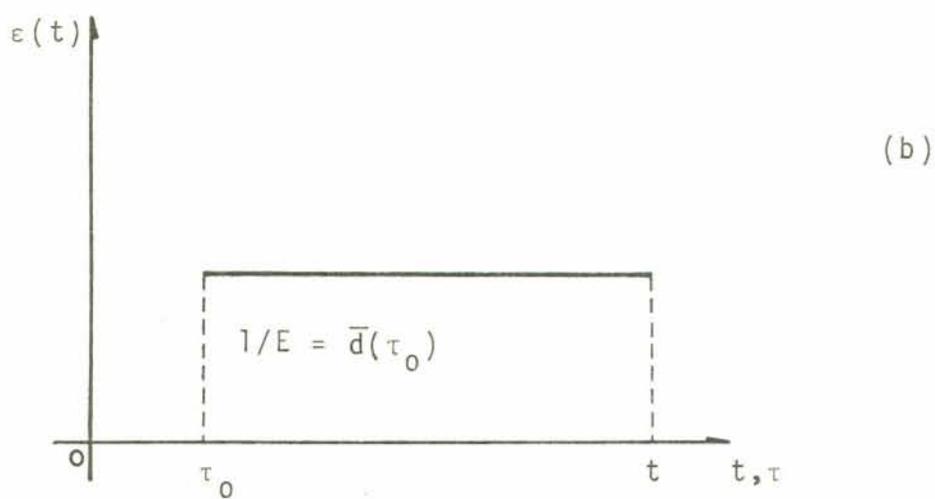
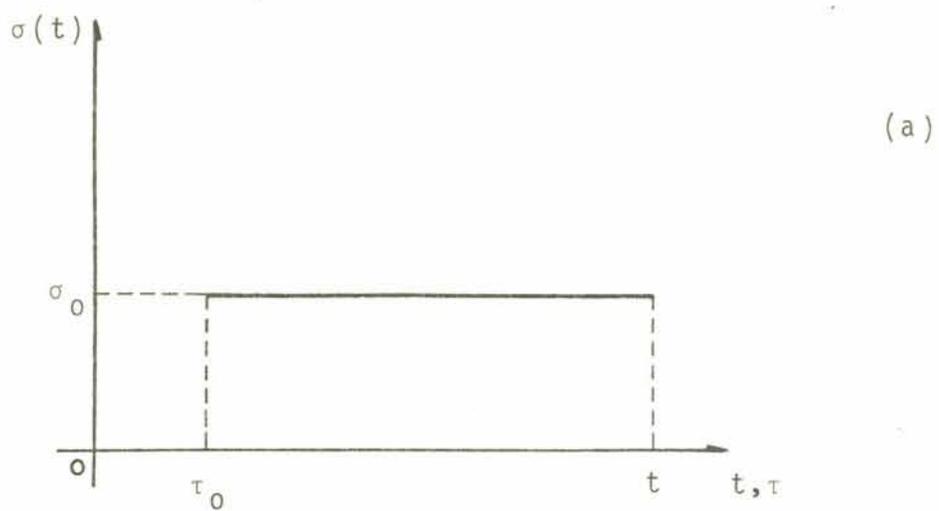


Figura 2.1 - Ensaio de Fluência

de ser representado por intermédio da expressão

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t - \tau_0) \quad (2.2.1)$$

onde

$$H(t - \tau_0) = \begin{cases} 0 & t < \tau_0 \\ 1 & t > \tau_0 \end{cases}$$

é a função de Heaviside ou salto unitário, e mostrada conforme a figura 2.1.(a).

Se o material fosse elástico a correspondente história de deformação seria:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau_0 \\ \bar{d}(\tau_0) & t > \tau_0 \end{cases} \quad (2.2.2)$$

conforme a figura 2.1.b.

Para um material viscoelástico tem-se uma história de deformações, a qual está indicada na figura 2.1.c, isto é, a deformação cresce, ainda que a tensão permaneça constante. Pode-se representar essa história de deformação por

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau_0 \\ \bar{d}(\sigma_0, \tau_0) + C[\sigma_0, t, \tau_0] & t > \tau_0 \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Desde logo, percebe-se que existem duas categorias de deformações nos materiais viscoelásticos. A primeira, que ocorre em um intervalo de tempo muito pequeno,

denominada de elástica ou instantânea e, a segunda, que desenvolve-se lentamente, chamada de deformação lenta ou viscoelástica. Por exemplo, para o caso do concreto, a deformação lenta é três a quatro vezes maior que a instantânea, de um modo geral, para uma determinada tensão.

O segundo tipo de ensaio, que indica as características viscoelásticas do material, é dito ensaio de relaxação. Neste ensaio o corpo de prova é submetido a uma história de deformações, que é mantida constante no tempo e pode ser representada por

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 H(t - \tau_0) \quad (2.2.4)$$

resultando daí um estado de tensões

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau_0 \\ \bar{\epsilon}(\tau_0, \epsilon_0) + R(\epsilon_0, t, \tau_0) & t > \tau_0 \end{cases} \quad (2.2.5)$$

O que ocorre pode ser verificado na figura 2.2. Com as deformações constantes as tensões diminuem com o tempo. Nesse caso pode-se também separar duas categorias de efeitos sobre as tensões, as instantâneas e as viscoelásticas.

2.3 - Linearidade

Na elasticidade, diz-se que existe linearidade entre tensão e deformação quando pode aplicar-se o princípio da superposição. Este princípio diz que, por exemplo, a deformação provocada por uma tensão $2\sigma_0$ é o dobro da deformação provocada por σ_0 . Já para materiais viscoelásticos, a linearidade é definida pelo princípio de Boltzmann, segundo o qual, dadas duas histórias de carga, $\sigma_{\tau=0}^t(\tau)$,

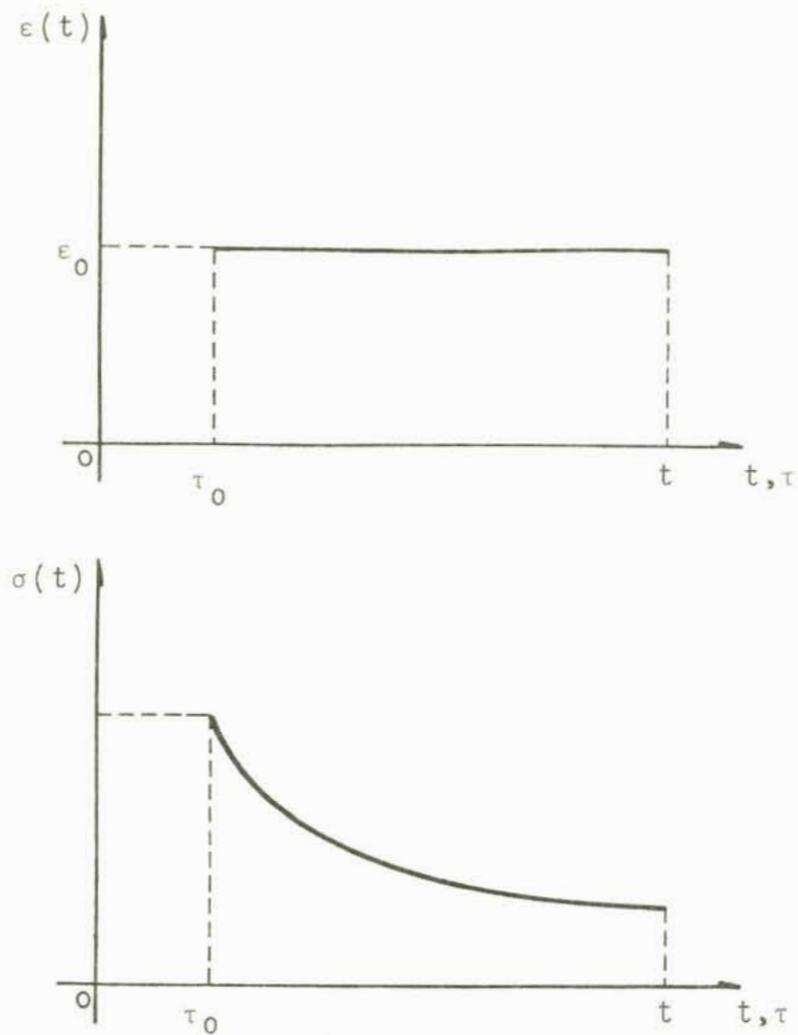


Figura 2.2 - Ensaio de relaxação

$\sigma_2^t(\tau)$ com as correspondentes deformações

$$\epsilon_1(t) = \mathcal{D} \left[\begin{array}{c} \tau=t \\ \sigma_1(\tau) \\ \tau=0 \end{array} \right] \quad (2.3.1)$$

$$\epsilon_2(t) = \mathcal{D} \left[\begin{array}{c} \tau=t \\ \sigma_2(\tau) \\ \tau=0 \end{array} \right]$$

o funcional \mathcal{D} deve satisfazer a relação

$$\alpha_1 \epsilon_1(t) + \alpha_2 \epsilon_2(t) = \mathcal{D} \left[\alpha_1 \begin{array}{c} \tau=t \\ \sigma_1(\tau) \\ \tau=0 \end{array} + \alpha_2 \begin{array}{c} \tau=t \\ \sigma_2(\tau) \\ \tau=0 \end{array} \right] \quad (2.3.2)$$

para qualquer valor de α_1 , α_2 , $\sigma_1(\tau)$ e $\sigma_2(\tau)$. Por exemplo, para um mesmo tempo t_1 , a deformação provocada por uma tensão $2\sigma_0 H(t_1)$ é o dobro da provocada por uma tensão $\sigma_0 H(t_1)$. Da mesma maneira, o princípio é aplicado para histórias de deformações prescritas. Em ensaios de laboratório, a linearidade é verificada através de determinações da relação tensão-deformação, para determinados períodos de carregamento $t_1, t_2 \dots t_n$. As curvas obtidas são denominadas isócronas e, se forem retas, o material é dito viscoelástico linear (figura 2.3)

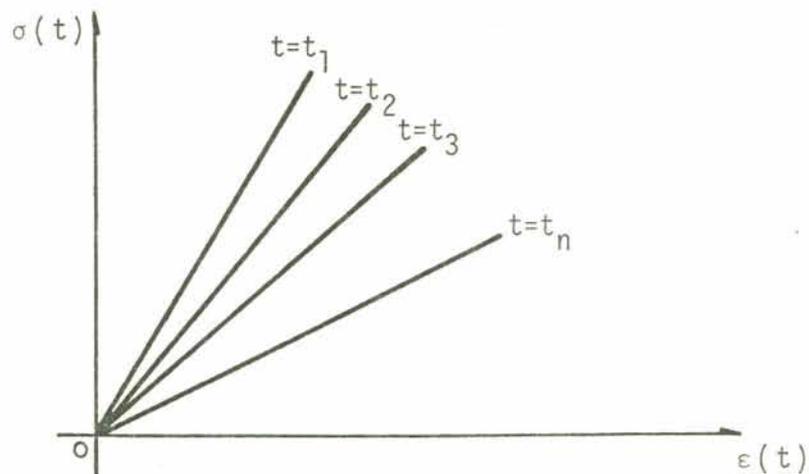


Figura 2.3 - Curvas Isócronas

Para os materiais viscoelásticos lineares, as relações 2.2.3 e 2.2.5 podem ser escritas da forma:

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau_0 \\ \frac{\sigma_0}{E(\tau_0)} + \sigma_0 \bar{C}[t, \tau_0] & t > \tau_0 \end{cases} \quad (2.3.3)$$

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau_0 \\ \epsilon_0 E(\tau_0) + \epsilon_0 \bar{R} |t, \tau_0| & t > \tau_0 \end{cases} \quad (2.3.4)$$

onde \bar{R} e \bar{C} são funções lineares, que fornecem em cada instante, $t > \tau_0$, as histórias de tensão e deformação, correspondentes a valores constantes da deformação e tensão respectivamente.

2.4 - Teorema de Riesz

As equações 2.1.3 e 2.1.4 são bastante gerais e servem para todos os materiais ditos simples, sejam elásticos, plásticos, viscoelásticos, etc. No caso de elasticidade linear, a relação funcional é a simples multiplicação por uma constante. Já a viscoelasticidade linear, corresponde ao caso em que as funcionais são lineares e contínuos.

No caso, trabalha-se com materiais que satisfazem o princípio de Boltzmann, isto é, lineares. Já a continuidade, geralmente, se cumpre. Implica em, por exemplo, executar dois testes com histórias de deformações similares e obter resultados também similares. Então, como o funcional na viscoelasticidade linear é linear e contínuo, pode aplicar-se o teorema de Riesz. Este teorema diz que se

$$\epsilon(t) = \mathcal{D} \left[\begin{matrix} \tau=t \\ \tau=0 \end{matrix} \sigma(\tau) \right] \text{ e } \mathcal{D} \text{ é linear e contínuo,}$$

então $\epsilon(t)$ pode ser expresso mediante a integral de Stieltje.

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} D(t, \tau) d\sigma(\tau) \quad (2.4.1)$$

onde $D(t, \tau)$ é determinado por \mathcal{D} e independe de $\epsilon(t)$. Se $\dot{\sigma}(t) = d\sigma/dt$ existe, pode escrever-se também:

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} D(t, \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (2.4.2)$$

Naturalmente, se a história de deformação $\bar{\epsilon}$ dada, pode escrever-se, análogamente, a partir de 2.1.4.

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t, \tau) d\epsilon(\tau) \quad (2.4.3)$$

e, da mesma forma, se $\dot{\epsilon}(t) = \frac{d\epsilon}{dt}$ existe,

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t, \tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau \quad (2.4.4)$$

Uma explicação intuitiva pode ser dada ao teorema de Riesz. Aproxima-se uma história de tensão por uma série de degraus de pequena magnitude como na figura 2.4.

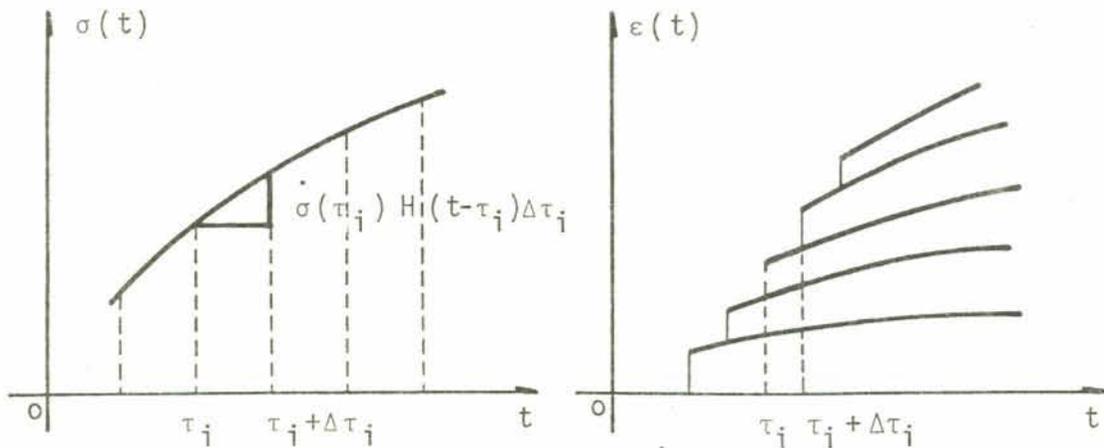


Figura 2.4 - Explicação do Teorema de Riesz

Toma-se um degrau genérico centrado em τ_i , com altura correspondente $\dot{\sigma}(\tau_i)\Delta\tau_i$, onde $\Delta\tau_i$ é o intervalo entre um degrau e o anterior. Pode considerar-se a variação de $\sigma(t)$ como incrementos de carga expressos por $\dot{\sigma}(\tau_i)H(t-\tau_i)\Delta\tau_i$. A história de tensões pode ser expressa por um somatório dos diversos incrementos de carga que se mantêm constantes.

$$\sigma(t) \cong \sum_{\tau_i} \dot{\sigma}(\tau_i) H(t-\tau_i)\Delta\tau_i \quad (2.4.5)$$

O erro de aproximação pode ser diminuído, fazendo os $\Delta\tau_i$ infinitesimais. No limite

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\sigma}(\tau) H(t-\tau) d\tau \quad (2.4.6)$$

Desta forma, obtêm-se a representação da função $\sigma(t)$ em termos da função de Heaviside $H(t-\tau)$.

Sabe-se que, para um material dado, pode-se determinar, com base em um ensaio de fluência, a história de deformações correspondente a um salto unitário de carga (ver 2.2). A resposta é expressa pela função $D(t,\tau)$. Por causa da linearidade do funcional, pode escrever-se a partir de 2.4.5

$$\varepsilon(t) = \sum_{\tau_i} \dot{\sigma}(\tau_i) D(t,\tau_i) \Delta\tau_i \quad (2.4.7)$$

e no limite para $\Delta\tau_i \Rightarrow 0$

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\sigma}(\tau) D(t,\tau) d\tau \quad (2.4.8)$$

que equivale a 2.4.6.

Logo, o teorema de Riesz pode ser interpretado como uma redução da história de carga à soma de funções salto unitário e a superposição dos efeitos correspondentes. Esta representação é, às vezes, chamada de método de superposição e, geralmente, aparece ligada aos nomes de Boltzmann e Volterra. Pelo mesmo raciocínio, se a história de deformações é dada, chega-se a:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\epsilon}(\tau) E(t, \tau) d\tau \quad (2.4.9)$$

Nota-se que a função $D(t, \tau)$ que aparece em 2.4.1 é, simplesmente, a resposta do material a uma função salto unitário, isto é, a resposta a um ensaio de fluência com $\sigma_0=1$. Da mesma forma, $E(t, \tau)$ é a resposta a um ensaio de relaxação, com $\epsilon_0=1$.

Pelo princípio da causalidade, o qual diz que os efeitos são posteriores as causas, vem para $\tau > t$, $D(t, \tau) = 0$, de modo que o limite superior das integrais em 2.4.8 e 2.4.9, pode ser substituído por t . Da mesma forma, se o material não for carregado antes do instante $\tau=\tau_1$, o limite inferior destas integrais pode ser substituído por τ_1 . Logo, as relações 2.4.8 e 2.4.9 podem ser escritas:

$$\epsilon(t) = \int_{\tau_1}^t \dot{\sigma}(\tau) D(t, \tau) d\tau \quad (2.4.10)$$

$$\sigma(t) = \int_{\tau_1}^t \dot{\epsilon}(\tau) E(t, \tau) d\tau \quad (2.4.11)$$

Integrando 2.4.10 e 2.4.11 por partes vem

$$\varepsilon(t) = \sigma(t) D(\tau_1) + \int_{\tau_1}^t d(t,\tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (2.4.12)$$

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) E(\tau_1) + \int_{\tau_1}^t \lambda(t,\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \quad (2.4.13)$$

onde

$$d(t,\tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} D(t,\tau) \quad (2.4.14)$$

$$\lambda(t,\tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} E(t,\tau) \quad (2.4.15)$$

são denominados, respectivamente, de admitância de fluência e admitância de relaxação e, $E(\tau_1) = 1/D(\tau_1) = E$, \bar{e} é o módulo instantâneo de elasticidade no instante τ_1 .

As equações 2.4.12 e 2.4.13 são equações integrais de Volterra funções de $\sigma(t)$ e $\varepsilon(t)$ respectivamente com núcleos 2.4.14 e 2.4.15. Nota-se que, se $D(t,\tau)$ e $E(t,\tau)$ forem constante e iguais a $1/E$ e E , respectivamente, obtêm-se a lei elástica linear, expressa em 2.1.1 e 2.1.2. Os núcleos $D(t,\tau)$ e $E(t,\tau)$ são chamados de função de fluência e de relaxação respectivamente.

2.5 - Envelhecimento

Observa-se, também, que $D(t,\tau)$ e $E(t,\tau)$ são funções de duas variáveis. A primeira, t , é o tempo em que se está medindo a resposta da função e, a segunda, τ , é a idade do corpo de prova na hora do carregamento. Esta

dependência da idade do corpo de prova, é denominada envelhecimento, e pode ser melhor observada reescrevendo-se os núcleos $D(t, \tau)$ e $E(t, \tau)$ da seguinte maneira: $D(t, t-\tau)$ e $E(t, t-\tau)$, onde $t-\tau$ é o tempo sob carga.

Existem materiais sem envelhecimento, como o plástico, e metais a baixas tensões. Neste caso, as funções são de, apenas, uma variável, o tempo após a carga, ou seja, $D(t-\tau)$ e $E(t-\tau)$.

2.6 - Modelos Reológicos

Na viscoelasticidade linear, destacam-se duas abordagens para os fenômenos estudados. A primeira, tenta traduzir, de forma analítica, a situação geral; a outra, tende a esquematizá-la, com modelos mecânicos compostos, os quais representam, geralmente, um modo apropriado de introduzir os conceitos fundamentais da viscoelasticidade.

Os modelos reológicos são devem ser considerados como representação ideal do comportamento real, geralmente mais complexo. Alguns autores lhes dão grande importância e consideram que, o problema de descobrir propriedades de algum meio particular, está resolvido quando o modelo adequado for descoberto. Na realidade, eles ajudam a interpretar essas situações, mas não são fundamentadas no desenvolvimento de uma teoria consistente de materiais com memória. Saber se um material reage de acordo com os modelos, é uma questão de testes.

Os modelos reológicos apresentados neste capítulo, seguindo o que tradicionalmente se apresenta em obras de viscoelasticidade, não levam em conta o envelhecimento do material.

Os elementos básicos dos modelos reológicos são a mola e o amortecedor. Ao aplicar uma força P em uma mo

la, seu comprimento aumenta de uma certa quantidade e, quando a força é removida, ela volta ao seu tamanho original. O mesmo fenômeno é observado em um teste de tração com um material elástico. Uma mola perfeitamente linear e sem inércia simboliza a lei de Hooke.

$$\sigma = E \cdot \epsilon, \quad (2.6.1)$$

onde E , é denominada de módulo de elasticidade instantâneo.

Um amortecedor é composto por um pistão que se move em um cilindro com fundo furado, de modo que não entre ar em seu interior. Entre o cilindro e a parede do pistão há um lubrificante viscoso, de modo que, uma força P é necessária para deslocar o pistão. Quanto maior essa força, mais rápido se move o pistão. Aqui, também, pode comparar-se com testes de tração de determinados materiais. Quando a força é aplicada, a barra é estirada. Entretanto, o alongamento não é proporcional à força; quem varia com a força é a velocidade de deformação. O amortecedor representa a lei de Newton

$$\sigma = \eta \cdot \dot{\epsilon} \quad (2.6.2)$$

onde $\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt}$ é a velocidade de deformação, e η é o coeficiente de viscoelasticidade.

As molas representam as deformações reversíveis, relacionadas com a energia potencial, enquanto os amortecedores simulam as deformações irreversíveis que se caracterizam pela dissipação de energia. Combinando-se os dois elementos anteriores, a mola e o amortecedor, pode obter-se diferentes representações do comportamento viscoelástico linear, intermediários entre o comportamento elás-

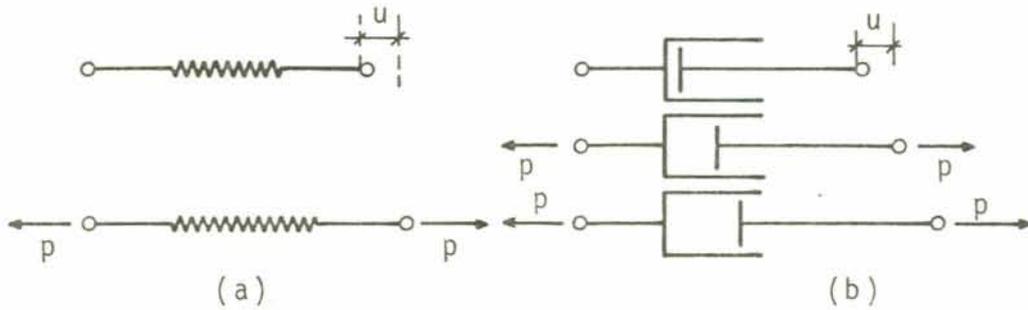


Figura 2.5 - Modelos reológicos - (a) Mola elástica
(b) Amortecedor viscoelástico

tico linear e o viscoelástico puro. Os modelos reológicos básicos são o modelo de Maxwell e o modelo de Kelvin-Voigt.

2.6.1 - Modelo de Maxwell

O modelo de Maxwell é a combinação de uma mola com um amortecedor em série (figura 2.6).



Figura 2.6 - Modelo de Maxwell

As equações do modelo são:

- Equação de equilíbrio

$$\sigma_E(t) = \sigma_\eta(t) = \sigma(t) \quad (2.6.1.1)$$

- Equação de compatibilidade

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_E(t) + \varepsilon_\eta(t) \quad (2.6.1.2)$$

- Equações constitutivas

$$\sigma_E(t) = E \varepsilon_E(t) \quad (2.6.1.3)$$

$$\sigma_\eta(t) = \eta \dot{\varepsilon}_\eta(t)$$

Os subíndices E e η representam, respectivamente, as tensões ou deformações na mola e no amortecedor.

Diferenciando a equação de compatibilidade 2.6.1.2 com respeito ao tempo e substituindo pelos valores de 2.6.1.3 e 2.6.1.1, obtêm-se

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} - \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad (2.6.1.4)$$

que é a equação diferencial do modelo de Maxwell.

A solução geral de 2.6.1.4 para uma história de tensão dada, será:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{\eta} \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) d\tau \quad (2.6.1.5)$$

Da mesma forma, para uma história de deformação dada obtêm-se da resolução da equação diferencial de primeira ordem 2.6.1.4

$$\sigma(t) = E \int_{\tau_1}^t e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (2.6.1.6)$$

Para obter-se a função de fluência integra-se por partes 2.6.1.5 para obter

$$\epsilon(t) = \int_{\tau_1}^t \left(\frac{1}{E} + \frac{(t-\tau)}{\eta} \right) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (2.6.1.7)$$

E, dessa expressão, 2.6.1.7 e de 2.6.1.6, retira-se a função de relaxação e fluência, respectivamente, ou seja:

$$E(t-\tau) = E e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} \quad (2.6.1.8)$$

$$D(t-\tau) = \frac{1}{E} + \frac{(t-\tau)}{\eta}$$

As admitâncias de relaxação e fluência são:

$$\lambda(t-\tau) = \frac{E^2}{\eta} e^{-\frac{E(t-\tau)}{\eta}} \quad (2.6.1.9)$$

$$d(t-\tau) = \frac{1}{\eta}$$

Realizando um ensaio de fluência com o modelo, onde a tensão $\bar{\epsilon}$ é mantida constante e igual a $\sigma_0 H(t-\tau_1)$, a expressão 2.6.1.5 transforma-se em:

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} H(t-\tau_1) + \frac{\sigma_0}{\eta} H(t-\tau_1)(t-\tau_1) \quad (2.6.1.10)$$

que é a equação de uma reta que passa por σ_1/E em τ_1 . Ao descarregar o modelo, em $t = \tau_1$, ocorre uma deformação instantânea no valor de $-\sigma_0/E$, isto é, a mola libera toda sua

energia potencial enquanto o amortecedor permanece sem se deformar. Este comportamento está indicado na figura 2.7

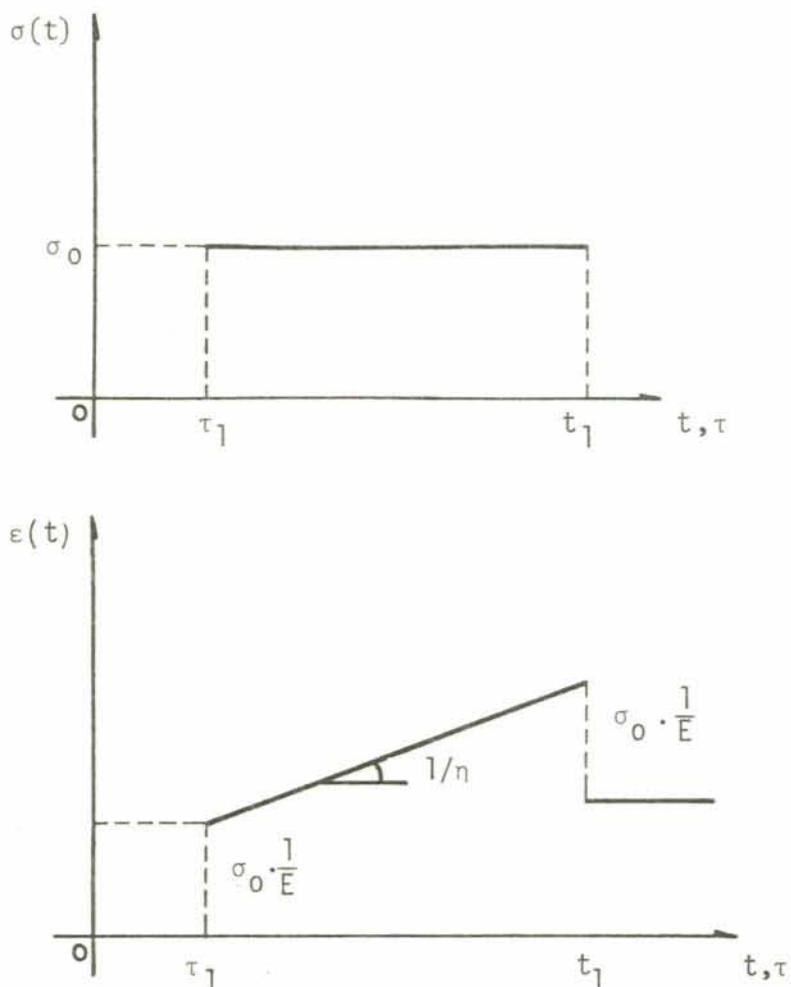


Figura 2.7 - Experiência de fluência de um modelo Maxwell

Se, em $t = t_1$, a experiência de fluência continuasse, a deformação cresceria sem limite. Dentro do domínio das equações constitutivas lineares, o modelo mostra um típico comportamento de fluido; capacidade de se deformar ilimitadamente sob pressões finitas. Por isso é também chamado de fluido de Maxwell.

Agora, em $t = \tau_1$, toma-se uma deformação constante e igual a $\sigma_0 H(t - \tau_1)$. É uma experiência de relaxação. Fazendo em 2.6.1.6 $\epsilon(t) = \epsilon_0 H(t - \tau_1)$

$$\sigma(t) = E \epsilon_0 \int_{\tau_1}^t e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} \delta(t-\tau_1) d\tau \quad (2.6.1.11)$$

onde $\delta(t - \tau_1)$ é a função de Dirac, derivada da função de Heaviside. Integrando 2.6.1.11 vem

$$\sigma(t) = E \epsilon_0 e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau_1)} \quad (2.6.1.12)$$

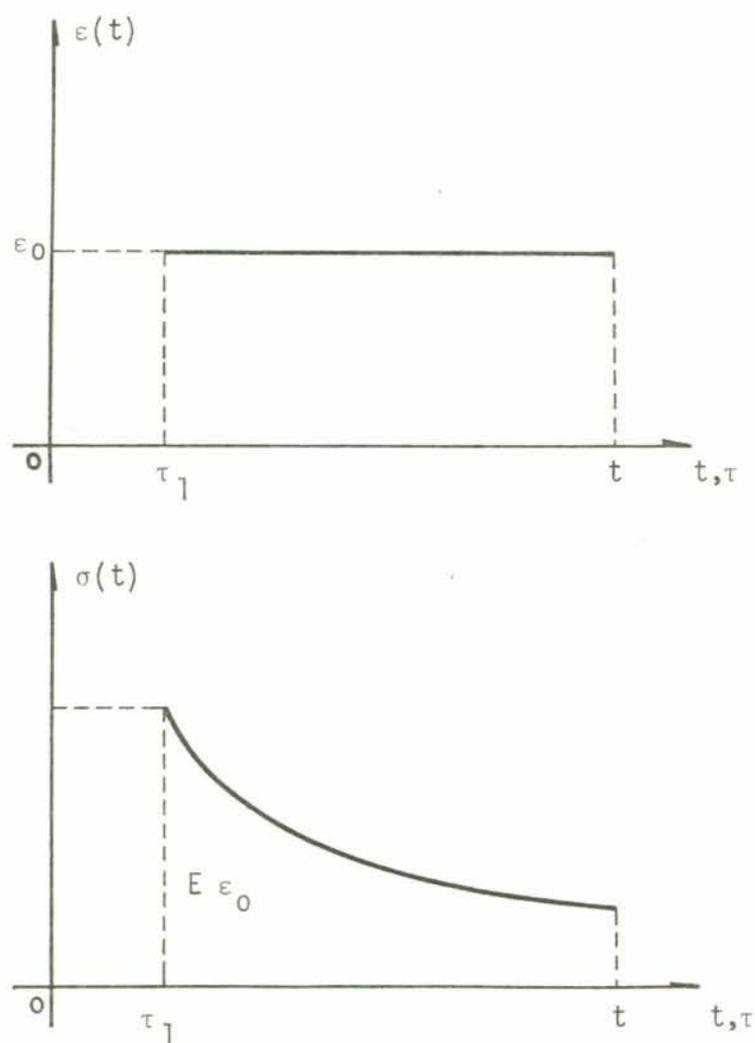


Figura 2.8 - Experiência de relaxação de um Modelo de Maxwell

O comportamento do modelo para essa experiência de relaxação está indicado na figura 2.8. A tensão decresce com o tempo e tende a zero para $t \Rightarrow \infty$. O exponencial da equação 2.6.1.12 E/η tem dimensão inversa do tempo e, é denominado seu inverso de tempo de relaxação, e representado por T . Se esta relação, $T = \eta/E$, variar, a velocidade de relaxação, isto é, a inclinação da curva também varia. Logo, T dá uma idéia da demora do processo de relaxação. Assim nos casos limites, $T \Rightarrow \infty$, o modelo de Maxwell representa materiais elásticos, e $T \Rightarrow 0$, representa materiais viscosos (figura 2.8).

2.6.2 - Modelo de Kelvin-Voigt

O modelo de Kelvin-Voigt, é composto pela combinação de uma mola e um amortecedor em paralelo (figura 2.9).

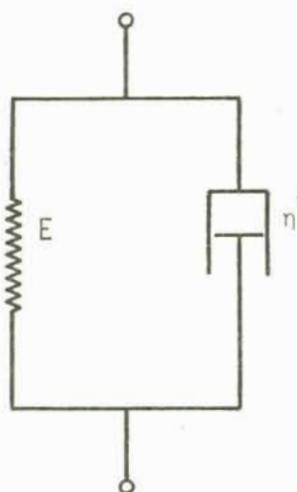


Figura 2.9 - Modelo de Kelvin-Voigt

Como estão em paralelo, a deformação ϵ_E da mola é igual a deformação ϵ_η do amortecedor. As equações correspondentes ao modelo são:

- Equação de equilíbrio

$$\sigma(t) = \sigma_E(t) + \sigma_\eta(t) \quad (2.6.2.1)$$

- Equação de compatibilidade

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_E(t) = \varepsilon_\eta(t) \quad (2.6.2.2)$$

- Equações constitutivas

$$\sigma_E(t) = E \varepsilon_E(t) \quad (2.6.2.3)$$

$$\sigma_\eta(t) = \eta \dot{\varepsilon}_\eta(t)$$

Substituindo 2.6.2.3, com 2.6.2.2 em 2.6.2.1, obtêm-se a equação diferencial do modelo

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t) \quad (2.6.2.4)$$

A solução dessa equação diferencial para uma história de tensões dada $\bar{\varepsilon}$:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} d\tau \quad (2.6.2.5)$$

Integrando-se por partes 2.6.2.5 obtêm-se uma equação na forma 2.4.10. Logo, a função de fluência do modelo será:

$$D(t-\tau) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} \right) \quad (2.6.2.6)$$

A função de relaxação, que $\bar{\varepsilon}$ a resposta do modelo a uma função $\varepsilon(t) H(t-\tau)$ para $\varepsilon(t) = 1$, pode ser obtida diretamente de 2.6.2.4.

$$E(t-\tau) = E H(t-\tau) + \eta \delta(t-\tau) \quad (2.6.2.7)$$

As admitâncias de fluência e relaxação são, respectivamente:

$$d(t-\tau) = \frac{1}{\eta} e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} \quad (2.6.2.8)$$

$$e(t-\tau) = E \delta(t-\tau) + \eta \dot{\delta}(t-\tau)$$

Para uma experiência de fluência, onde $\sigma(t) = \sigma_0 H(t - \tau_1)$, entra-se em 2.6.2.5 e obtêm-se:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau_1)} \right) \quad (2.6.2.9)$$

Em $t = \tau_1$, a deformação $\bar{\varepsilon}$ é nula e em $t = \infty$, $\bar{\varepsilon}$ é igual a σ_0/E , conforme figura 2.10. Para uma deformação muito grande, a deformação $\bar{\varepsilon}$ é proporcional à tensão. E, este $\bar{\varepsilon}$ é quase um comportamento de corpo sólido. Por este motivo o modelo também é chamado de sólido de Kelvin.

A rapidez do crescimento da deformação depende do valor η/E que, no caso, é chamado de tempo de retardação - T . Ao se retirar a carga em $t = t_1$, a deformação $\bar{\varepsilon}$ cresce e, para um tempo infinito, tende a zero. Esta curva é chamada de curva de recuperação do material.

Já uma experiência de relaxação do modelo é impossível, pois, aplicando uma deformação $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t - \tau_1)$, 2.6.2.4 transforma-se em:

$$\sigma(t) = E \varepsilon_0 H(t - \tau_1) + \eta \varepsilon_0 \delta(t - \tau_1) \quad (2.6.2.10)$$

e, para $t = \tau_1$, a função de Dirac toma a forma $\delta(\tau_1 - \tau_1)$

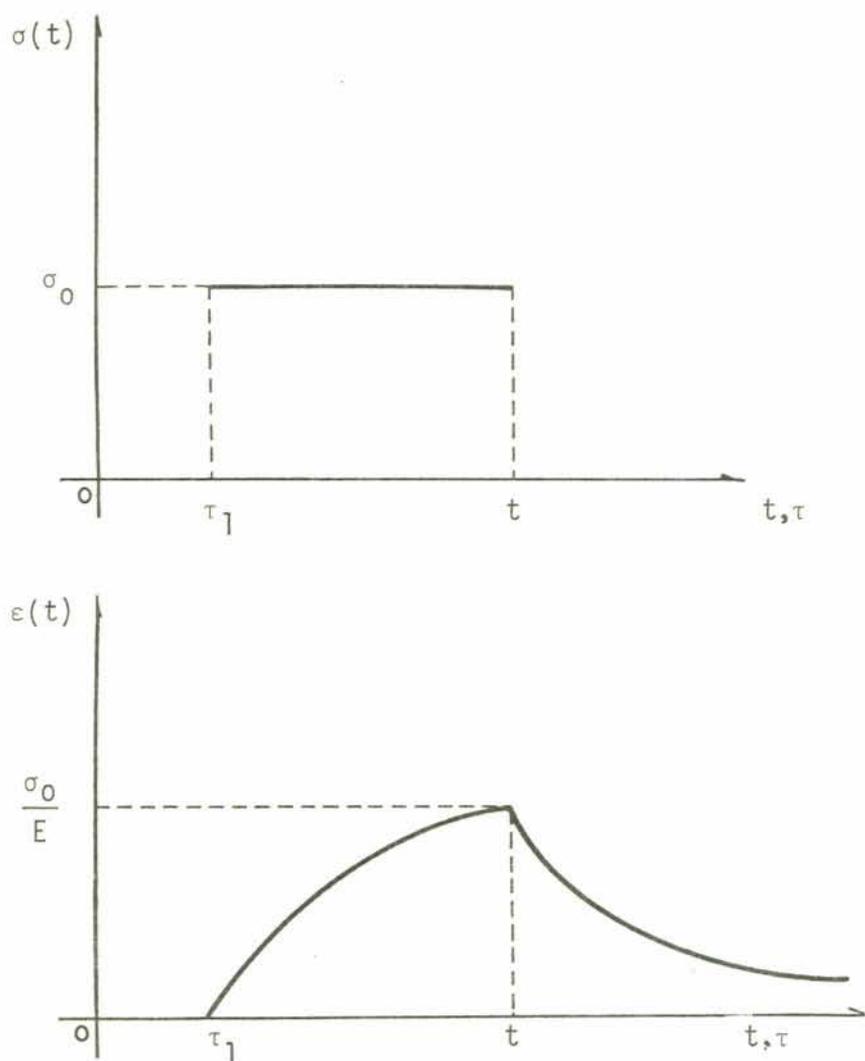


Fig. 2.10 - Ensaio de Fluência em um Modelo Kelvin-Voigt e posterior descarregamento

e assume um valor indefinido, de forma que não haverá uma tensão definida.

2.6.3 - Modelos generalizados

Os modelos de Kelvin e de Maxwell representam apenas, parcialmente, o comportamento real dos materiais viscoelásticos. Para melhorar a representação, pode-se utilizar outras combinações especiais de molas e amortecedores. Dois são os meios de construir modelos mais complexos: o modelo de Kelvin generalizado e o modelo de Maxwell

generalizado. O modelo generalizado de Maxwell, com n elementos de tempos de retardaço diferentes, é de boa representação, sobretudo, para ensaios de relaxação. É composto por diversos modelos de Maxwell em paralelo (figura 2.11).

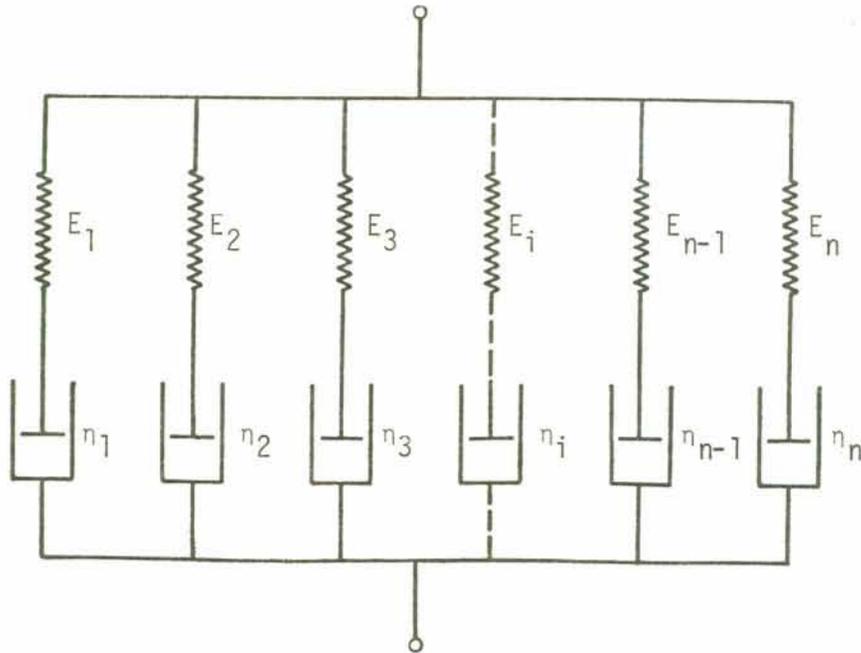


Figura 2.11 - Modelo generalizado de Maxwell

As equações deste modelo são:

- Equação de equilíbrio

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n \sigma_r(t) \quad (2.6.3.1)$$

- Equação de compatibilidade

$$\epsilon(t) = \epsilon_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.6.3.2)$$

- Equações constitutivas

$$\dot{\epsilon}_r(t) = \frac{\dot{\sigma}_r(t)}{E_r} + \frac{\sigma_r(t)}{\eta_r} \quad (2.6.3.3)$$

A solução de 2.6.3.3 para uma deformação dada, conforme foi visto em 2.6.1, é 2.6.1.6, ou seja:

$$\sigma_r(t) = \int_{\tau_1}^t E \frac{E_r}{e^{\eta_r}} (t-\tau) \dot{\epsilon}_r(\tau) d\tau \quad (2.6.3.4)$$

Entrando com 2.6.3.1 e 2.6.3.2 em 2.6.3.4 obtem-se:

$$\sigma(t) = \int_{\tau_1}^t \sum_{r=1}^n \left[E_r e^{-\frac{E_r}{\eta_r}(t-\tau)} \right] \dot{\epsilon}(\tau) d\tau \quad (2.6.3.5)$$

onde o núcleo da integral é a função de relaxação $E(t,\tau)$:

$$E(t-\tau) = \sum_{r=1}^n \left[E_r e^{-\frac{E_r}{\eta_r}(t-\tau)} \right] \quad (2.6.3.6)$$

A admitância de relaxação será, por conseguinte:

$$\chi(t-\tau) = - \sum_{r=1}^n \frac{E_r^2}{\eta_r} e^{-\frac{E_r}{\eta_r}(t-\tau)} \quad (2.6.3.7)$$

A equação diferencial do modelo generalizado de Maxwell, obtida a partir de 2.6.3.3, será:

$$\sigma(t) = \epsilon(t) \sum_{r=1}^n \frac{D}{\left(\frac{D}{E_r} + \frac{1}{\eta_r} \right)} \epsilon(t) \quad (2.6.3.8)$$

O modelo generalizado de Kelvin (figura 2.12) é composto por diversos modelos de Kelvin-Voigt em série:

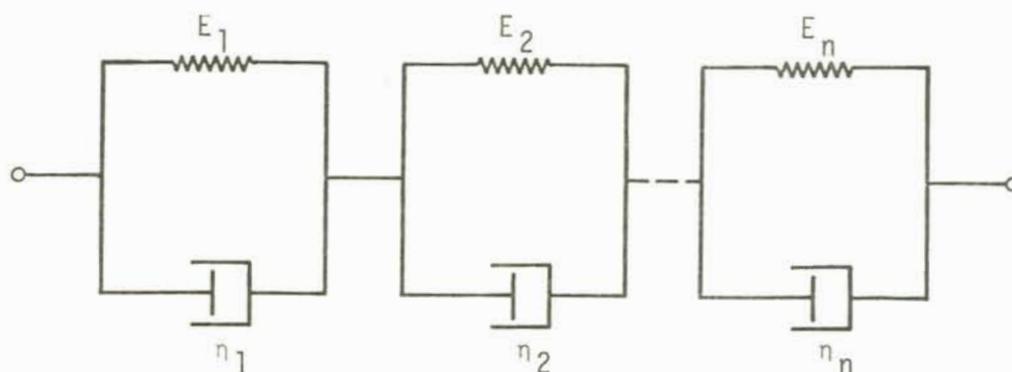


Figura 2.12 - Modelo generalizado de Kelvin

As equações de Kelvin generalizado são:

- Equações de equilíbrio

$$\sigma(t) = \sigma_r(t) \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (2.6.3.9)$$

- Equação de compatibilidade

$$\varepsilon(t) = \sum_{r=1}^n \varepsilon_r(t) \quad (2.6.3.10)$$

- Equações constitutivas

$$\sigma_r(t) = E_r \varepsilon_r(t) + \eta_r \dot{\varepsilon}_r(t) \quad (2.6.3.11)$$

Da mesma forma, utilizando a solução da equação diferencial 2.6.3.11, para uma determinada tensão conhecida, encontrada em 2.6.3.5, obtêm-se com o auxílio das equações de equilíbrio e de compatibilidade do modelo:

$$\varepsilon(t) = \int_{\tau_1}^t \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{1}{E_r} \left[1 - e^{-\frac{E_r}{\eta_r}(t-\tau)} \right] \right\} \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (2.6.3.12)$$

Portanto, a função de fluência e a admitância

de fluência serão:

$$D(t-\tau) = \sum_{r=1}^n \frac{1}{E_r} \left[1 - e^{-\frac{E_r}{\eta_r} (t-\tau)} \right] \quad (2.6.3.13)$$

$$d(t-\tau) = \frac{1}{\eta_r} e^{-\frac{E_r}{\eta_r} (t-\tau)} \quad (2.6.3.14)$$

A equação diferencial do modelo, obtida a partir de 2.6.3.11, será:

$$\varepsilon(t) = \sum_{r=1}^n \frac{\sigma(t)}{E_r + \eta_r D} \quad (2.6.3.15)$$

Cabe notar que as equações generalizadas dos modelos de Kelvin e Maxwell tomam a forma geral de:

$$\mathbf{P} \sigma = \mathbf{Q} \varepsilon \quad (2.6.3.16)$$

onde \mathbf{P} e \mathbf{Q} são operadores diferenciais, da forma

$$\mathbf{P} = \sum_{r=0}^m p_r \frac{d^r}{d_t^r} \quad (2.6.3.17)$$

$$\mathbf{Q} = \sum_{r=0}^n q_r \frac{d^r}{d_t^r}$$

Com p_r e q_r são coeficientes característicos do modelo e $p_0=1$. A equação 2.6.3.16 é conhecida como equação constitutiva dos materiais viscoelásticos e é a descrição matemática do comportamento mecânico desses materiais.

2.6.4 - Modelo standard

Um dos mais conhecidos modelos generalizados, com três parâmetros, compostos por uma mola e um elemento de Kelvin em série, representado na figura 2.13, é o modelo standard.

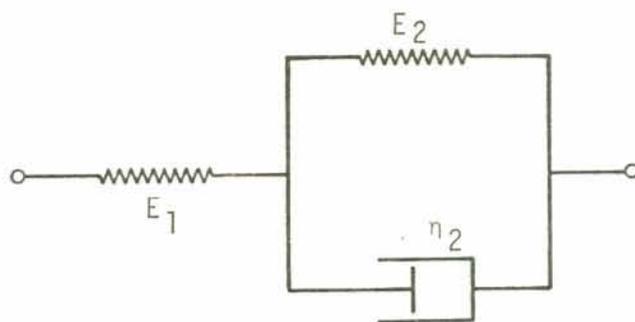


Figura 2.13 - Modelo Standard

Nota-se que o modelo corresponde a um modelo de Kelvin generalizado, no caso em que $\eta_1 = 0$ e $E_3 = E_4 = E_5 \dots = \infty$.

As equações correspondentes ao modelo são:

- Equações de equilíbrio

$$\sigma_{E_1}(t) = \sigma_k(t) = \sigma(t) \quad (2.6.4.1)$$

- Equações de compatibilidade

$$\epsilon(t) = \epsilon_{E_1}(t) + \epsilon_k(t) \quad (2.6.4.2)$$

- Equações constitutivas

$$\sigma_{E_1}(t) = E_1 \epsilon_{E_1}(t) \quad (2.6.4.3)$$

$$\sigma_k(t) = E_2 \epsilon_k(t) + \eta_2 \dot{\epsilon}_k(t) \quad (2.6.4.4)$$

Escrevendo 2.6.4.4 de forma operacional

$$\sigma_k(t) = \epsilon_k(t) (E_2 + \eta_2 D) \quad (2.6.4.5)$$

e, entrando com 2.6.4.1, 2.6.4.2 e 2.6.4.3, obtêm-se

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_1} + \frac{\sigma(t)}{E_2 + \eta_2 D} \quad (2.6.4.6)$$

que nada mais é do que a expressão 2.6.3.16 do modelo generalizado de Kelvin, com $\eta_1 = 0$ e $E_3 = E_4 = E_5 = \dots = \infty$. Desenvolvendo-se essa expressão chega-se a uma equação do tipo 2.6.3.17

$$E_1 E_2 \epsilon(t) + E_1 \eta_2 \dot{\epsilon}(t) = \left[E_1 + E_2 \right] \sigma(t) + \eta_2 \dot{\sigma}(t), \quad (2.6.4.7)$$

que é uma equação diferencial linear do tipo $y'(x) + A(x)y = B(x)$, onde $A(x)$ e $B(x)$ são funções conhecidas.

A solução de 2.6.4.7 para uma história de cargas conhecidas e, para uma história de deformações conhecida, é, respectivamente:

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_1} + \frac{1}{\eta_2} \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) e^{-\frac{E_2}{\eta_2}(t-\tau)} d\tau \quad (2.6.4.8)$$

$$\sigma(t) = \epsilon(t) E_1 + \frac{E_1^2}{\eta_2} \int_{\tau_1}^t \epsilon(\tau) e^{-\frac{E_1+E_2}{\eta_2}(t-\tau)} d\tau \quad (2.6.4.9)$$

Integrando por partes 2.6.4.8 e 2.6.4.9, obtêm-se equações do tipo 2.4.9 e 2.4.11

$$\epsilon(t) = \int_{\tau_1}^t \dot{\sigma}(\tau) \left[\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_2} e^{-\frac{E_2}{\eta_2}(t-\tau)} \right] d\tau \quad (2.6.4.10)$$

$$\sigma(t) = \int_{\tau_1}^t \dot{\epsilon}(\tau) \left[E_1 - \frac{E_1^2}{E_1 + E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_1 + E_2}{\eta_2}(t-\tau)} \right) \right] d\tau \quad (2.6.4.11)$$

Os núcleos das equações integrais 2.6.4.10 e 2.6.4.11 são a função de fluência e relaxação, respectivamente, do modelo standard. Diferenciando estas funções com respeito a τ , obtêm-se a admitância de fluência e a admitância de relaxação, ou seja:

$$d(t-\tau) = \frac{1}{\eta_2} e^{-\frac{E_2}{\eta_2}(t-\tau)} \quad (2.6.4.12)$$

$$l(t-\tau) = \frac{E_1^2}{\eta_2} e^{-\frac{E_1 + E_2}{\eta_2}(t-\tau)}$$

Realizando uma experiência de fluência com uma tensão $\sigma(t) = \sigma_0 H(t - \tau_1)$, vem de 2.6.4.10

$$\epsilon(t) = \left\{ \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2}{\eta_2}(t-\tau_1)} \right) \right\} H(t-\tau_1) \quad (2.6.4.13)$$

Pode-se notar que, para $t = \tau_1$, a deformação é elástica e igual a σ_0/E_1 e, a partir daí cresce exponencialmente a um valor limite. Se em $t = \tau_1$, o modelo for descarregado haverá um decréscimo imediato do valor σ_0/E_1

na deformação ϵ , a partir desse salto, tenderá exponencialmente a zero (figura 2.14).

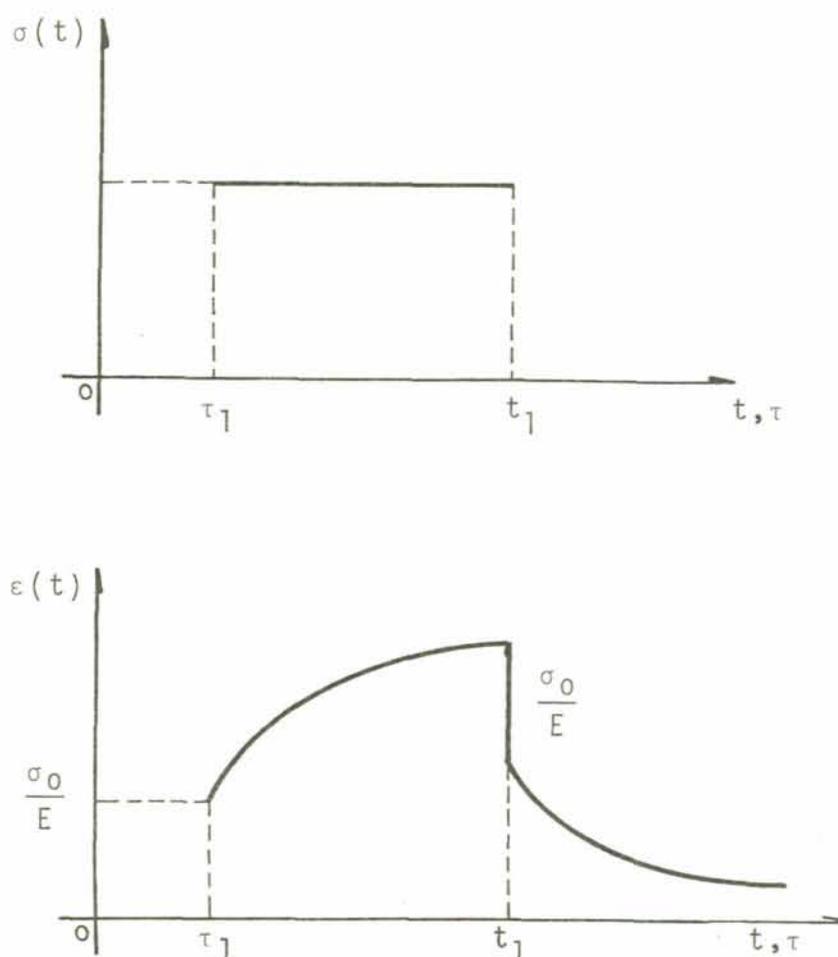


Figura 2.14 - Ensaio de Fluência de um Modelo Standard e posterior descarregamento

O envelhecimento de materiais, como o concreto, pode ser representado por modelos com coeficientes variáveis. Neste caso, algumas das suas vantagens, como a fácil determinação das equações matemáticas e, a simplicidade de interpretação física, são, parcialmente, perdidas. Este problema será abordado em maiores detalhes no capítulo 3.

CAPÍTULO 3

VISCOELASTICIDADE DO CONCRETO

3.1 - Introdução

O concreto, assim como outros materiais, possui a propriedade de continuar se deformando ao longo do tempo, mesmo quando a tensão é mantida constante ou, variar seu estado de tensão, mantendo inalterada uma deformação que lhe tenha sido imposta. Verificou-se que, mesmo para tensões muito baixas, o concreto apresenta essa dependência do tempo na relação tensão-deformação.

Sendo o concreto um material viscoelástico, necessita-se saber se existe uma relação linear e contínua entre tensão e deformação lenta, para aplicar-lhe a teoria vista no capítulo anterior. A continuidade, também, para o concreto, é normalmente aceita, faltando, pois, demonstrar-lhe a linearidade.

3.2 - Linearidade

A condição de linearidade de um funcional foi dada por 2.3.2 no capítulo 2. Existem três situações principais a analisar, dependentes da história de tensão aplicada: a compressão, a recuperação da fluência e a tração.

3.2.1 - Linearidade entre tensão e fluência do concreto submetido à compressão

Com a realização de um grande número de trabalhos experimentais, executados por diversos pesquisadores, constatou-se que existe linearidade entre tensão e deformação lenta, exceto em espécimes carregados numa idade muito jovem: um a três dias. A dúvida que persiste é quanto ao limite da relação linear.

Há uma grande diferença nos resultados obtidos, por exemplo, em termos de percentagem entre tensão e resistência, pois os valores variam de 0,20 a 0,75 [2]. Essas diferenças se devem às diversas condições dos ensaios e da rigorosidade através da qual são analisados os resultados.

Freudenthal e Roll [15] realizaram ensaios com diversas misturas de concreto. O resultado de um dos ensaios é mostrado nas curvas isócronas da figura 3.1.

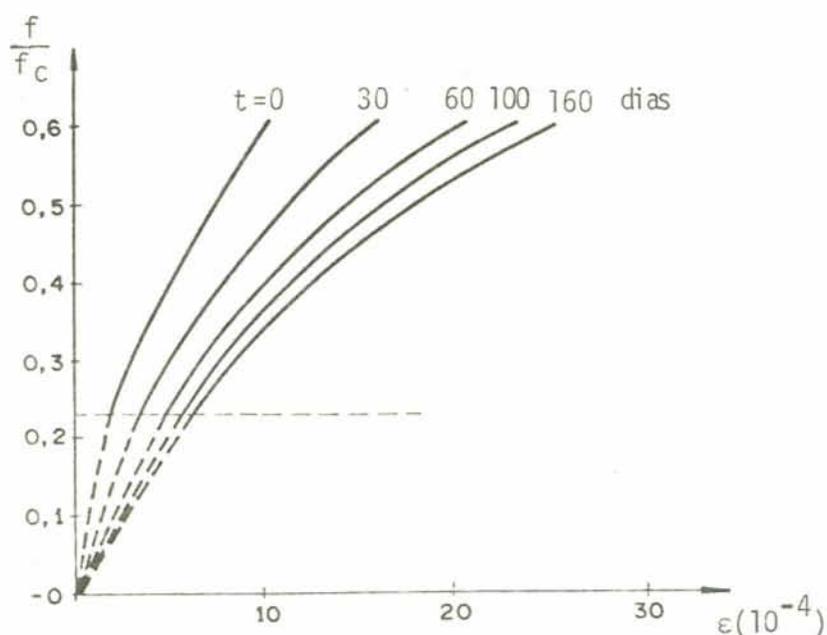


Figura 3.1 - Relação entre nível de tensão e fluência dos ensaios de Freudenthal e Roll [15], com concreto 1:6.

Nota-se que a linearidade existe até, aproximadamente, 20 a 26% da resistência de ruptura do concreto. Esses valores, bastante baixos, foram confirmados por outros testes com misturas diferentes, executadas pelos mesmos autores. Concluiu-se que, em geral, a medida que o tem

po de ensaio cresce, há um aumento no valor limite da relação linear.

Granville [16], com um concreto de endurecimento rápido, de mistura 1:1,5:3, também chegou a valores bastante baixos, para o valor limite; em torno de 22% da tensão de ruptura para uma carga mantida por 14 dias.

Davis e Davis [10], encontraram valores de 0,26 da tensão de ruptura para esse limite, com a tensão atuando durante 200 e 1200 dias, apresentando absoluta não linearidade para tensões acima de 0,40 de resistência do concreto.

Para Jordaan [19] e Bazant [4], são aceitos, de um modo geral, valores abaixo de 40% da resistência do concreto.

Saliente-se que, em uma estrutura simples, normalmente, possui-se coeficientes de segurança de 1,96, para o concreto, e, 1,61, para o aço. Cálculos estes efetuados com cargas totais. Mas, para o estudo da fluência, leva-se em conta, apenas, as cargas permanentes somadas a uma parcela das cargas acidentais.

Pode considerar-se então, que, estruturas corriqueiras, trabalham, praticamente, dentro de limite de linearidade do concreto à compressão.

3.2.2 - Linearidade entre tensão e recuperação da fluência do concreto

Já para o caso da recuperação da fluência, o problema não é tão simples. Pela figura 3.2 pode-se ver que, quando o concreto é submetido a uma carga constante e posteriormente descarregado de uma parte desta carga, ocorre uma recuperação de dois tipos: a primeira, instantânea, representa a deformação elástica correspondente à tensão removida e ao módulo de elasticidade, no momento do descarregamento; a

segunda, gradual, é chamada de recuperação da fluência. Esta última é menor que a deformação lenta precedente.

Mc Henry [23] propôs que a recuperação da fluência fosse tratado como um fenômeno linear, isto é, encarado como a aplicação de uma carga negativa no instante do descarregamento e, que induz a uma deformação lenta igual e oposta àquela causada por uma carga positiva, da mesma magnitude, aplicada no mesmo tempo, com a ressalva de tensões próximas às tensões últimas.

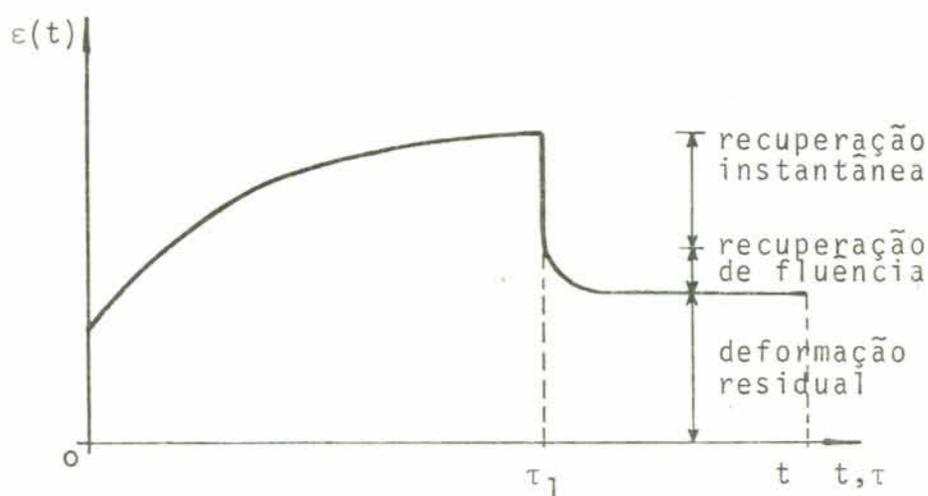


Figura 3.2 - Recuperação da Fluência

O princípio, se válido, seria de grande valor prático, pela simplificação dos cálculos de estruturas sob tensão variável. Mas, testes efetuados mostram que a recuperação da deformação lenta depende de muitos fatores e que, quase sempre, o princípio de superposição de Mc Henry, subestima essa recuperação, na deformação. As formas de como se dá a recuperação da deformação lenta e as expressões analíticas para o seu cálculo, variam de autor para autor. O que se pode dizer com certeza, é que existe um

período inicial de recuperação rápida, seguido de um período de recuperação lenta, no qual a linearidade fica comprometida e não é bem definida.

3.2.3 - Linearidade entre tensão e fluência do concreto submetido a tração

No caso da relação tração-deformação lenta, os dados existentes são menores ainda.

Parece que a deformação lenta na tração, é proporcional à tensão aplicada até a razão de 0,50 entre esta e a tensão de ruptura [23]. Grozdes [15] descobriu, mesmo, limites mais altos de proporcionalidade.

Aparentemente, o comportamento à tração, com respeito à linearidade, assemelha-se, em muito, ao comportamento à compressão do concreto.

Assim, dentro de determinados limites e sob certas condições, pode considerar-se a relação tensão aplicada - deformação lenta do concreto, linear e, nessas circunstâncias, o teorema de Riesz é válido para este material

3.3 - Envelhecimento do Concreto

O concreto é um material que modifica suas propriedades mecânicas mesmo bastante tempo após a sua fabricação. Este fato, como já foi visto, leva a uma dependência da idade do corpo de prova e é chamado envelhecimento do concreto. Isto ocorre porque as reações químicas e físicas, em especial a hidratação do cimento, continuam ao longo do tempo.

Desta maneira, a deformação lenta de um corpo de prova de concreto não depende apenas de tensão e do tempo decorrido após a sua aplicação, mas também da idade do

corpo de prova no início do ensaio (como mostra a figura 3.3). As funções de fluência e de relaxação do concreto tem expressões do tipo $D(t, \tau)$ e $E(t, \tau)$ na representação integral.

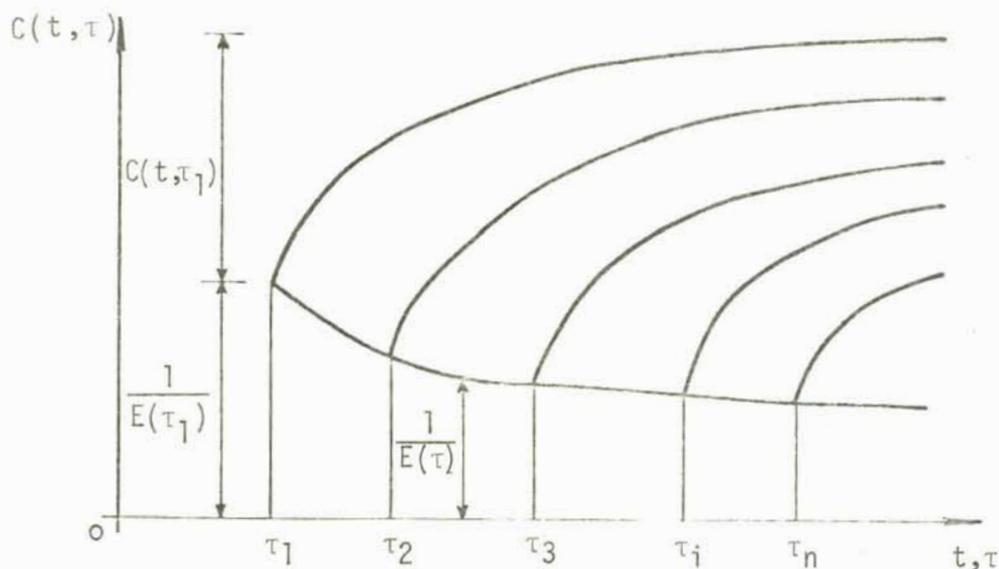


Figura 3.3 - Influência da idade τ no módulo de elasticidade instantânea e também na fluência do concreto.

Observa-se, nas curvas experimentais da figura 3.3, que o módulo de elasticidade instantâneo, também, varia com a idade τ .

A investigação experimental das propriedades elásticas do concreto mostra que $E(\tau)$ aumenta com a idade τ do concreto e que aumenta mais rapidamente em um estado de idade jovem, particularmente, no primeiro mês de moldagem. Subseqüentemente, com o aumento da idade do material, a velocidade de aumento de $E(\tau)$ diminui gradualmente e, o fenômeno, assume uma característica assintótica. Isto in-

dica que o processo de endurecimento do concreto está quase completo. Quando da representação do concreto por modelos reológicos pode-se levar em conta o envelhecimento, simplesmente substituindo os parâmetros E e η , respectivamente, o módulo de elasticidade instantâneo e o coeficiente de viscoelasticidade por, $E(\tau)$ e $\eta(\tau)$ onde τ é a idade do material, no início do ensaio.

3.4 - Características Básicas da Fluência do Concreto

Para a determinação das características básicas do comportamento viscoelástico do concreto, pode-se trabalhar tanto com a função de fluência, quanto com a função de relaxação, já que os dois fenômenos são associados e podem ser estudados experimentalmente. Pela resolução da equação integral 2.4.10, conhecida a função de fluência pode-se obter a função de relaxação e, vice-versa, para a equação 2.4.11. Mas, em laboratório, é mais simples trabalhar-se com ensaios de fluência do que com ensaios de relaxação. Por esse motivo se dá maior ênfase a estas funções e, as propostas normalmente apresentadas, são nesse sentido.

Testes levados a efeito no estudo da fluência de vários materiais, inclusive o concreto, têm mostrado que ela ocorre em todas as tensões, incluindo aquelas com carga de pequena duração, que produziriam, apenas, deformações elásticas.

Além disso, normalmente estuda-se, separadamente, a resposta elástica e a curva de deformação lenta do material. Para tanto, define-se a função de fluência como a soma de duas funções, ou seja:

$$D(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \quad (3.4.1)$$

onde $E(\tau)$, é o módulo de elasticidade do material no ins-

tante τ do carregamento e, $C(t, \tau)$, é a deformação lenta em um tempo t , também chamada de função de fluência.

Não é uma tarefa simples obter expressões analíticas para a função de fluência e, para a elaboração de uma teoria, é necessário partir das curvas experimentais de fluência. A estrutura da expressão analítica deve refletir as propriedades básicas do processo de fluência num corpo real e, não contradizer os resultados experimentais. Ao mesmo tempo, deveria, tanto quanto possível, utilizar-se dos meios usuais da matemática para solução de seus problemas básicos.

A idéia de escrever fenômenos de materiais com memória por meio de integrais de limite superior variável, originou-se com Boltzmann e foi desenvolvida no trabalho de Volterra. A dificuldade básica consiste na escolha dos núcleos das equações 2.4.10 e 2.4.11. Para a expressão analítica da lei de fluência do concreto existe um grande número de relações referentes ao núcleo dessas equações, propostas por diversos autores.

Antes de lançar-se qualquer proposição concernente ao tipo de função de fluência é necessário ter em conta suas propriedades básicas e a dependência da idade e do tempo, após a carga, desta função.

Observando-se a figura 2.4, que mostra respostas características do concreto submetido a uma tensão, pode-se chegar a algumas propriedades básicas:

a) A fluência é positiva,

$$\begin{aligned} C(t, \tau) &> 0 && \text{para } \forall t > \tau \\ C(t, \tau) &= 0 && \text{para } \forall t < \tau \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

pois se dá no mesmo sentido que a deformação elástica.

b) Sua taxa de crescimento diminui com o aumento do tempo após a carga, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial t} = 0 \quad (3.4.3)$$

pois a deformação lenta não cresce infinitamente com o tempo após a carga, mas tem uma assintota.

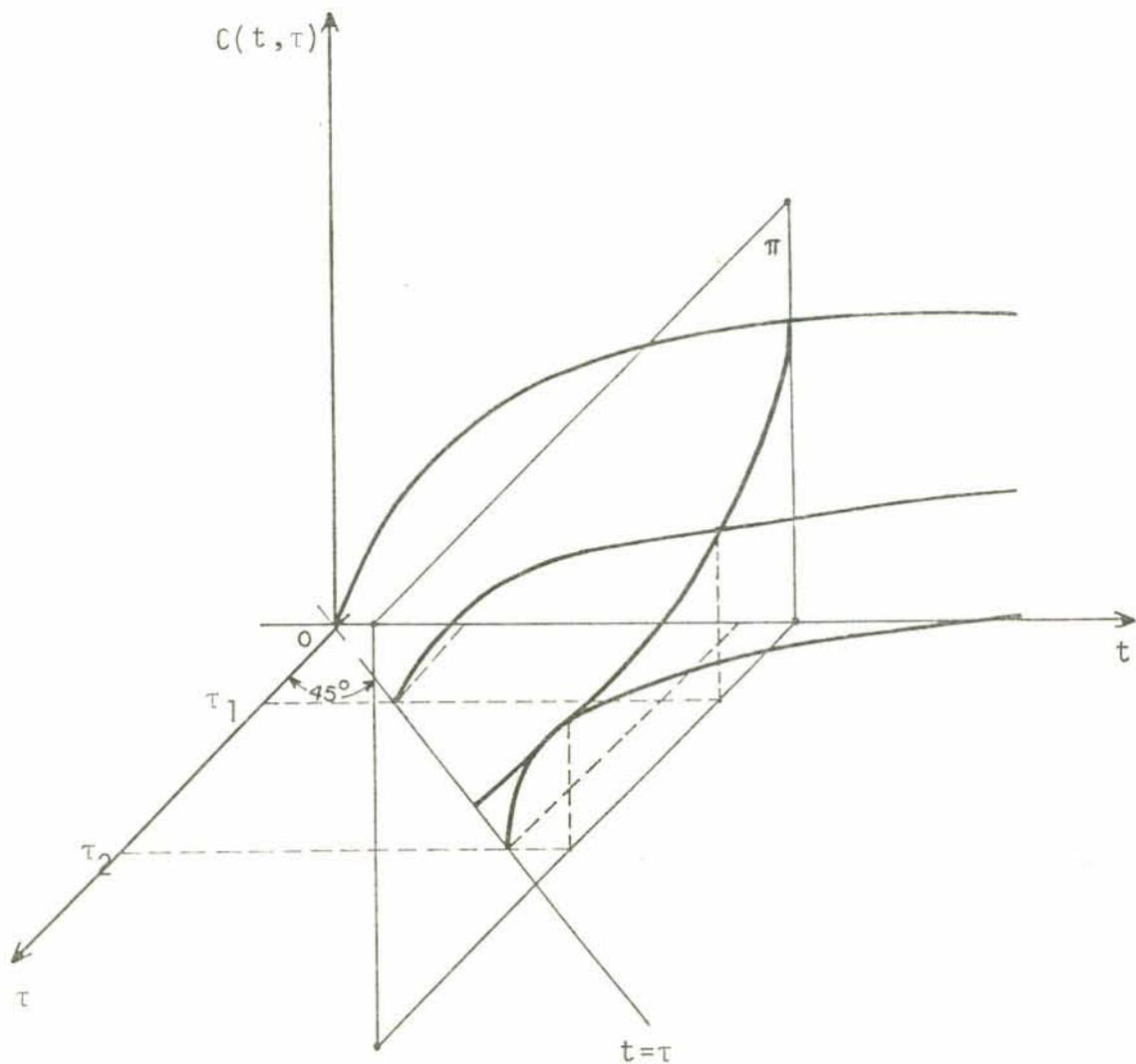


Figura 3.4 - Respostas características do concreto submetido a tensões constantes.

c) Observa-se na figura 3.4, que a função de fluência decresce uniformemente e, é limitada, com relação à idade do material, isto é,

$$\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} < 0$$

e

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(t, \tau) = C_0 \quad (3.4.4)$$

onde, C_0 é o valor limite da função para uma dada idade do material. Isso pode ser melhor observado passando-se um plano perpendicular aos eixos τ , t e paralelo aos eixos τ , $D(t, \tau)$. A intersecção desse plano π com as curvas das diversas idades, produz uma curva que decresce uniformemente, até um determinado limite maior que zero. A existência de deformação lenta para concretos envelhecidos, foi, muitas vezes, deixada de levar em conta por teorias viscoelásticas.

d) Finalmente, verifica-se, experimentalmente, que o valor da função de fluência deve diferir para materiais de diferentes idades, ainda que essa diferença seja pequena.

Basicamente, esse conjunto de idéias, de uma forma geral, é que leva à escolha de uma função de fluência apropriada.

3.5 - Expressões Analíticas para Fluência do Concreto

Existem um grande número de relações propostas por vários autores para a expressão analítica da lei de variação da função de fluência.

As primeiras teorias, obtidas com base em experiências, não refletiam a influência da idade τ do con

creto, na lei de variação da fluência com o tempo. Logo, os núcleos das equações integrais dependiam apenas da diferença de dois argumentos, o tempo de aplicação da carga τ e o instante de observação t . Utilizava-se essa forma por exigência da formulação do ciclo fechado de Volterra, que expressa a invariança da equação integral, com respeito à mudança da origem do tempo.

Ao se tomar uma função de fluência $C(t, \tau)$ como função somente da diferença de argumentos $(t - \tau)$, mostra-se, facilmente, que a família de curvas descritas é caracterizada por deslocamentos rígidos, paralelos ao eixo das abscissas e com uma assintota geral, dependendo apenas do tempo t , após a aplicação da carga. Desta maneira, o módulo de elasticidade do material seria uma quantidade constante. Portanto, essas teorias não são capazes de explicar um certo número de processos básicos, que ocorrem nas estruturas e que dependem da idade do material (figura 3.5).

Em outra etapa, tentou-se construir expressões analíticas, levando-se em conta a influência da idade, pela inclusão de um coeficiente de correção nas funções, obtido para uma idade fixa $\tau = \tau_1$, baseado em experiências e disposto em tabelas. Tem-se então uma função dependente da idade na forma:

$$C(t, \tau) = A * f(t - \tau) \quad (3.5.1)$$

onde A é uma constante pré-determinada.

Finalmente, chegou-se a expressões mais precisas com a utilização, não de coeficientes de correção, mas de funções dependentes da idade do material

$$C(t, \tau) = g(\tau) f(t - \tau) \quad (3.5.2)$$

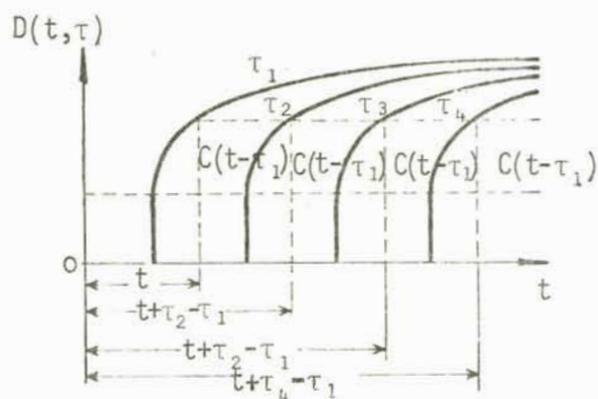


Figura 3.5 - Curvas geradas por funções somente da diferença dos argumentos (t, τ) .

É o caso das teorias estudadas nos próximos itens, que levam em conta a idade, multiplicando uma função de τ por uma $f(t - \tau)$. Esta representação do comportamento viscoelástico do concreto e a adequada escolha da função $C(t, \tau)$ ainda é um tema aberto a discussões.

3.6 - Expressão de Dischinger

3.6.1 - Relações básicas

Uma das propostas mais utilizadas para a função de fluência é a conhecida como lei de fluência de Dischinger, a qual foi, primeiramente, utilizada por Granville. Esta proposta é também chamada de método da taxa constante de deformação. Dischinger foi quem primeiramente a utilizou em problemas de análise estrutural.

A expressão analítica proposta por essa lei de fluência é do tipo $g(t) - g(\tau)$ e aparece, geralmente, na forma:

$$C(t, \tau) = C(t, \tau_0) - C(\tau, \tau_0) \quad (3.6.1.1)$$

$$C(t, \tau_0) = C_\infty (1 - \bar{e}^{\nu(t - \tau_0)}) \quad (3.6.1.2)$$

e C_∞ , \bar{e} o valor limite da função para $t=\tau_0$ e v é uma constante que afeta a taxa de variação da fluência com o tempo.

Observa-se de 3.6.1.1 que as curvas para diferentes idades τ , tem a mesma forma, isto é, são idênticas, paralelas e mutuamente transladadas, perpendicularmente ao eixo t , pois a forma independe da idade τ , conforme a figura 3.6.

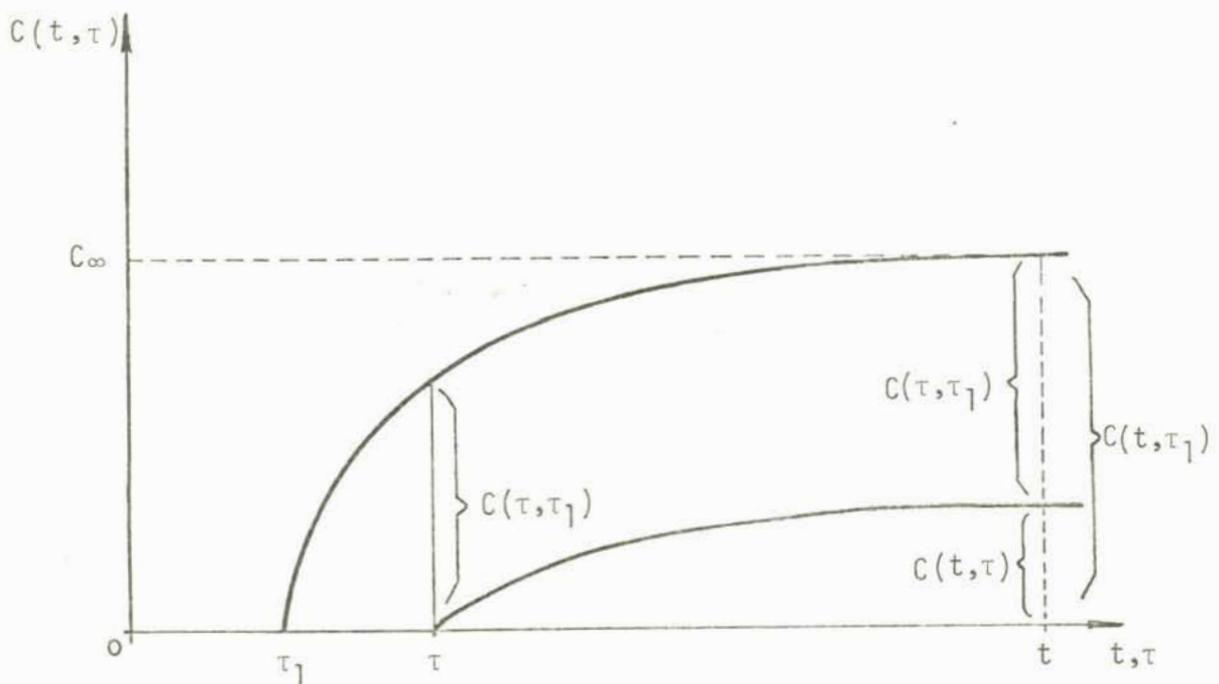


Figura 3.6 - Proposta de Dischinger

Substituindo 3.6.1.2 em 3.6.1.1, obtêm-se

$$C(t, \tau) = C_\infty \left[e^{-v(\tau - \tau_0)} - e^{-v(t - \tau_0)} \right] \quad (3.6.1.3)$$

Se, a essa expressão, acrescer-se a parte elástica, obtêm-se a função de fluência da equação 2.4.10.

$$D(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \quad (3.6.1.4)$$

Com alguns rearranjos em 3.6.1.3 pode-se obter uma expressão do tipo:

$$C(t, \tau) = C_{\infty} e^{-\nu(\tau-\tau_0)} |1 - e^{-\nu(t-\tau)}| \quad (3.6.1.5)$$

que é da forma 3.5.2.

Substituindo 3.6.1.4 em 2.4.10, vem:

$$\varepsilon(t) = \int_{\tau_0}^t \dot{\sigma}(\tau) \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \quad (3.6.1.6)$$

ou, ainda,

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{\tau_0}^t \sigma(\tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} D(t, \tau) d\tau \quad (3.6.1.7)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{\tau_0}^t \sigma(\tau) \left[\frac{\dot{E}(t)}{E^2(t)} + C_{\infty} \nu \bar{e}^{\nu(\tau-\tau_0)} \right] d\tau \quad (3.6.1.8)$$

Diferenciando 3.6.1.8, com respeito a t , e aplicando a regra de Leibnitz vem:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E(t)} + \sigma(t) C_{\infty} \nu \bar{e}^{\nu(\tau-\tau_0)} \quad (3.6.1.9)$$

mas, $\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial t} = C_{\infty} \nu \bar{e}^{-\nu(t-\tau)}$, logo:

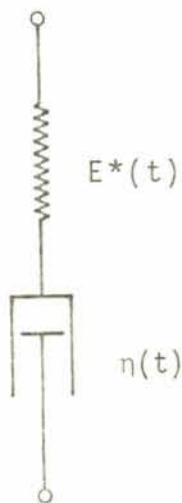
$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \sigma(t) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial t} \quad (3.6.1.10)$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem, correspondente à lei de fluência de Dischinger, sendo que, usualmente, é apresentada na forma

$$\frac{\partial \epsilon(t)}{\partial C(t, \tau)} = \frac{1}{E(t)} \frac{\partial \sigma(t)}{\partial C(t, \tau)} + \sigma(t) \quad (3.6.1.11)$$

3.6.2 - Correspondência com modelo reológico

A utilização de modelos reológicos tem a finalidade de introduzir um meio intuitivo para ajudar na interpretação da relação tensão-deformação lenta. Seja um modelo de Maxwell, com os parâmetros mecânicos $E(t)$ e $\eta(t)$ variáveis, conforme a figura 3.7, e com equações constitutivas do tipo



$$\sigma(t) = E^*(t) \epsilon(t) \quad (3.6.2.1)$$

$$\sigma(t) = \eta(t) \dot{\epsilon}(t)$$

Figura 3.7 - Modelo de Maxwell com parâmetros variáveis

Com essas equações constitutivas mais as equações de equilíbrio do modelo, chega-se a:

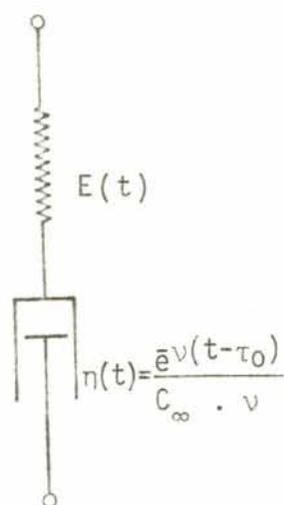
$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E^*(t)} + \frac{\sigma(t)}{\eta(t)} \quad (3.6.2.2)$$

a qual é uma equação diferencial de primeira ordem. Nota-se, facilmente, que essa equação 3.6.2.2 é idêntica a 3.6.1.10 se as relações únicas

$$\eta(t) = \frac{1}{\frac{\partial \dot{C}(t, \tau)}{\partial t}} \quad (3.6.2.3)$$

$$E^*(t) = E(t)$$

são aplicadas. Como realmente essa correspondência é única, então, a função de fluência 3.6.1.4 tem como modelo reológico o modelo de Maxwell com envelhecimento da figura 3.8. Derivando-se 3.6.1.3 com respeito a t , obtêm-se para $\eta(t)$:



$$\eta(t) = \frac{e^{-\nu(t-\tau_0)}}{C_\infty \cdot \nu} \quad (3.6.2.4)$$

Figura 3.8 - Modelo de Maxwell com parâmetros variáveis correspondente a proposta de Dischinger.

Então, a proposta de fluência de Dischinger conduz a um modelo de Maxwell com envelhecimento de parâmetro η viscoelástico variável, no qual, a velocidade de

deformação no instante t , devido a uma tensão $\sigma(t)$ aplicada no instante τ , independe da idade do material τ e, só depende do tempo t , conforme a equação 3.6.1.10. Por isso, esta proposta é conhecida como método da taxa constante de deformação.

3.6.3 - Análise crítica

A proposta de Dischinger reproduz, basicamente, as propriedades fundamentais da fluência, abordadas em 3.4.

Embora, a partir dessa proposta, produzissem-se uma série de conhecimentos de grande importância, especialmente para o concreto, seu comportamento diante de certos aspectos da fluência, não condiz com a realidade. Por exemplo, a teoria funciona bastante bem para cargas aplicadas em concretos jovens mas, com o envelhecimento, a fluência é subestimada e até negligenciada, para concretos muito velhos. Esse negligenciamento é facilmente demonstrável fazendo-se $\tau \Rightarrow \infty$ em 3.6.1.4, resultando:

$$\lim_{\tau \Rightarrow \infty} D(t, \tau) = 0 \quad (3.6.3.1)$$

ou ainda, estudando-se o modelo de Maxwell correspondente à expressão analítica para $\tau \Rightarrow \infty$. Como $t > \tau$, t também tende a infinito e por 3.6.2.3, da mesma forma, η tende a infinito. Assim, não existe deformação viscoelástica no amortecedor, apenas existindo deformação elástica instantânea, fazendo com que a expressão 3.6.1.9 transforme-se em:

$$\dot{\epsilon}(t) \Big|_{\tau \Rightarrow \infty} = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} \quad (3.6.3.2)$$

ou, ainda,

$$\varepsilon(t) \Big|_{\tau \Rightarrow \alpha} = \frac{\sigma(t)}{E}$$

Outro problema a analisar é que a deformação lenta é completamente irrecuperável, após o descarregamento, pela teoria de Dischinger. Isto pode ser demonstrado matematicamente, fazendo-se $\tau_0 = 0$, por

$$C(t, \tau_1) - C(t, \tau_2) = C_\infty \left[\bar{e}^{\nu \tau_1} - \bar{e}^{\nu \tau_2} \right] = C(\tau_2, \tau_1) \quad (3.6.3.4)$$

onde, τ_1 e τ_2 , são, respectivamente, a idade de carregamento e descarregamento do corpo de prova, conforme a figura 3.9.

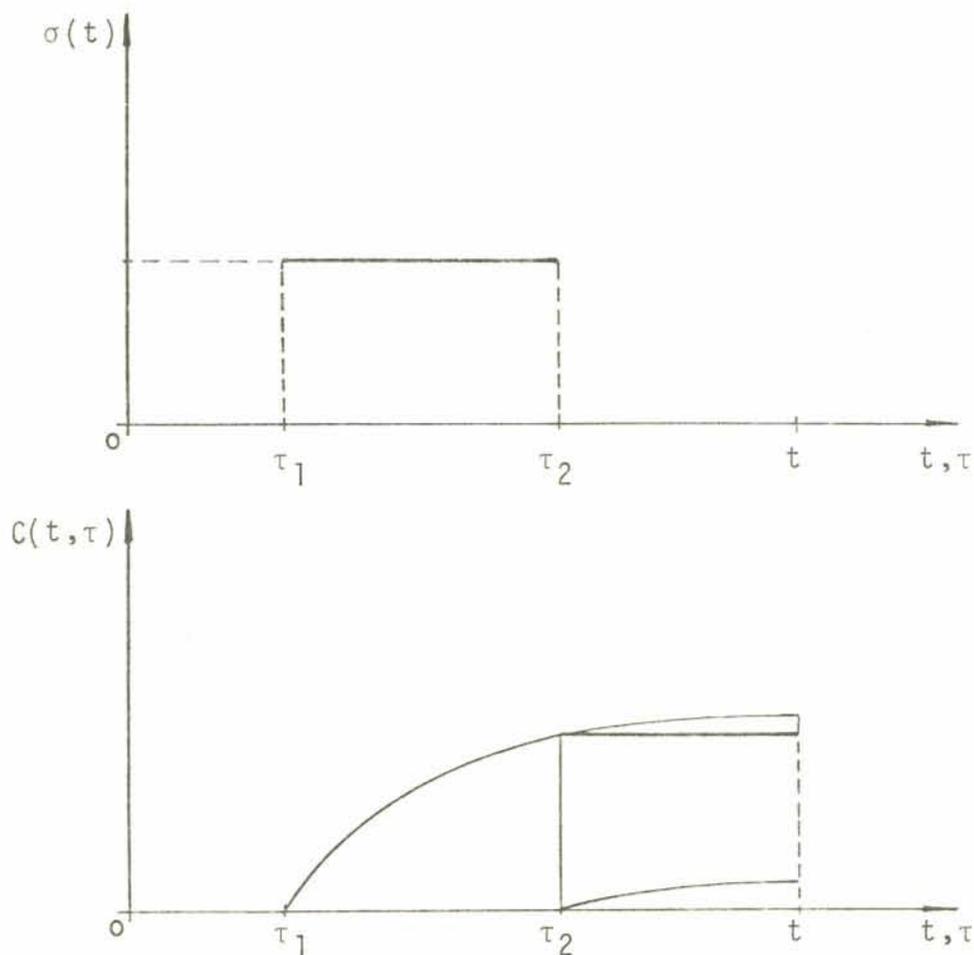


Figura 3.9 - Proposta de Dischinger - Fluência completamente irrecuperável.

Então, para qualquer $t > \tau_2$, a deformação lenta é a mesma que em τ_2 ; logo, é constante.

A proposta de Dischinger, utilizada em problemas de relaxação, faz com que a tensão final seja subestimada, ou seja, a proposta exagera na relaxação. Isto pode ser verificado nos resultados de ensaios, como por exemplo, o apresentado por Neville [23], na figura 3.10.

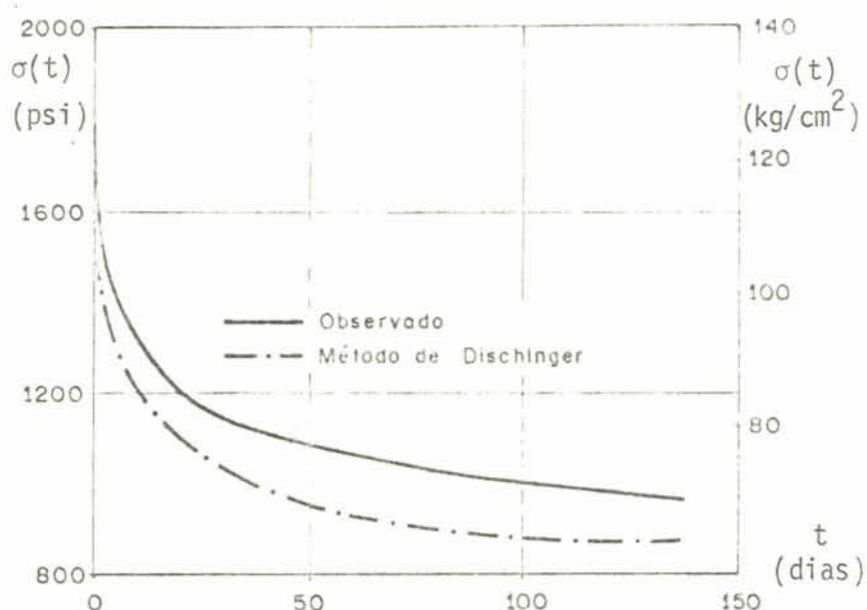


Figura 3.10 - Relaxação de tensão a uma deformação constante de 360×10^{-6} para um concreto 1:1,6:2,8 com fator de água-cimento de 0,375 carregado aos 8 dias de idade [23].

Essas deficiências na teoria são plenamente reconhecidas e, propostas mais recentes, baseadas na teoria de Dischinger, como os de Illston [8], Rüsch [27], Ingwirth [23], procurar adequar a teoria aos resultados experimentais e considerar a deformação lenta como soma de dois componentes, um recuperável e, outro, irrecuperável.

A teoria de Dischinger pode ser utilizada com

considerações de módulo de elasticidade variável, $E(\tau)$, mas acarretaria tais complicações que a simplicidade de seu uso estaria comprometida.

3.7 - Expressão de Arutyunyan

3.7.1 - Relações básicas

Com base no conjunto de propriedades básicas, abordadas em 3.4, Arutyunyan propõe uma relação funcional para a função de fluência do tipo 3.5.2, ou seja,

$$C(t, \tau) = \phi(\tau) \cdot f(t - \tau) \quad (3.7.1.1)$$

usando como aproximação de $f(t - \tau)$ um somatório de funções exponenciais na forma

$$f(t - \tau) = \sum_{k=0}^m B_k e^{-\gamma_k(t-\tau)} \quad (3.7.1.2)$$

onde, B_k e γ_k , são constantes convenientemente escolhidas de um dado material e, $B_0=1$, $\gamma_0=0$, $\gamma_k > 0$ para $k=1, 2, \dots, \dots, m$. Já $\phi(\tau)$, é uma função monótona e uniformemente decrescente, satisfazendo a condição

$$\lim_{\tau \Rightarrow \infty} \phi(\tau) = C_0 \quad (3.7.1.3)$$

Logo, 3.7.1.1 pode ser escrita como

$$C(t, \tau) = \phi(\tau) \sum_{k=0}^m B_k e^{-\gamma_k(t-\tau)} \quad (3.7.1.4)$$

Desta maneira, a representação da função de fluência é caracterizada pelo fato de refletir a dependência do tempo do fenômeno do material; em particular, sua idade e característica hereditária.

No caso da expressão de Arutyunyan, para um con

creto em condições muito idosas, ou seja, para $\tau \Rightarrow \infty$ a expressão 3.7.1.4 toma a forma:

$$C(t, \tau) = C_0 \sum_{k=0}^m B_k e^{-\gamma_k(t-\tau)} \quad (3.7.1.5)$$

a qual mostra a deformação lenta para concretos dessa natureza e combina, segundo Arutyunyan, com curvas experimentais de vários materiais, como o concreto, sendo as diferenças de propriedades dos materiais definidas pela escolha apropriada dos parâmetros C_0 , B_k e γ_k ($k=0,1, \dots, m$).

A rapidez com que a função $\phi(\tau)$ tende para o valor constante C_0 , determina o início da condição idosa do material e, $\phi(\tau)$ deveria ser adotada, para que, em todas as idades $0 < \tau < t$ do material, a expressão $C(t, \tau)$ concordasse com os resultados experimentais obtidos. Com base nessas observações e pelo resultado de um grande número de experimentos, Arutyunyan propõe que, $\phi(\tau)$ seja representada, no caso geral, por:

$$\phi(\tau) = C_0 + \sum_{k=1}^m A_k \tau_k \quad (3.7.1.6)$$

onde, C_0 , é o valor limite da função do material e, A_k , são parâmetros dependentes da natureza e condições de idade do mesmo. Assim, os valores de A_k poderiam ser escolhidos de maneira que a equação 3.7.1.5 descreva, de melhor forma possível, as curvas experimentais de deformação lenta. Testes efetuados por Arutyunyan mostram, conforme a tabela 3.1, que, o confinamento das séries aos dois primeiros termos para $f(t-\tau)$ e ao primeiro termo para $\phi(\tau)$, dão resultados bastante satisfatórios.

Desta maneira, 3.7.1.2 e 3.7.1.10 podem ser utilizados apenas com os primeiros termos da série, ou se-

t	resultados experimentais						resultados da aplicação de 3.7.1.8					
	Cimento Portland						$A_1 = 4.82 \times 10^{-5}$ $C_0 = 0.90 \times 10^{-5}$, $r = 0.026$					
	25	50	75	100	125	150	25	50	75	100	125	150
7	1.63	6.57	7.74	8.62	9.08	9.32	3.57	6.40	7.87	8.65	9.06	9.28
14	2.52	4.66	5.76	6.53	6.95	7.12	1.85	4.53	5.92	6.62	7.03	7.22
28	-	2.69	5.00	5.77	6.23	6.40	-	2.79	4.51	5.41	5.90	6.13
60	-	-	2.42	3.47	4.00	5.15	-	-	1.82	3.67	4.60	5.10

Tabela 3.1 - Valores de $C(t, \tau)$ para o concreto de acordo com resultados experimentais e aplicação de 3.7.1.8 [1].
Obs.: t em dias e $\sigma = 6 \text{ kg/cm}^2$

ja,

$$f(t-\tau) = 1 + B_1 e^{-\gamma_1(t-\tau)} \quad (3.7.1.7)$$

$$\phi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau}$$

onde, A_1 , C_0 e γ_k , são escolhidos de maneira a obter concordância com as curvas experimentais e $B_1 = -1$. Assim, Arutyunyan representa a função de fluência por:

$$C(t, \tau) = \phi(\tau) \cdot [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] \quad (3.7.1.8)$$

onde

$$\phi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau} \quad (3.7.1.9)$$

Esclareça-se que Arutyunyan utiliza apenas os dois primeiros termos da série, de maneira a simplificar a teoria mas, em determinadas ocasiões, necessitar-se-ão de mais termos para existir uma aproximação satisfatória. Por outro lado, frisa-se também que, para preservar a generalidade da teoria, $\phi(\tau)$ deveria ser monótona e uniformemente decrescente e satisfaz a condição 3.7.1.5, podendo, então, tomar forma distinta de 3.7.1.6. A proposta de Aru-

tyunyan para a admitância de fluência, pode ser escrita como:

$$D(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \quad (3.7.1.10)$$

ou, entrando com 3.7.1.8 e 3.7.1.9,

$$D(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + \left(\frac{A_1}{\tau} + C_0 \right) \left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right] \quad (3.7.1.11)$$

que é o núcleo da equação 2.4.10. Entrando com 3.7.1.11 em 2.4.10

$$\varepsilon(t) = \int_{\tau_1}^t \dot{\sigma}(\tau) \left\{ \frac{1}{E(\tau)} + \left(\frac{A_1}{\tau} + C_0 \right) \left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right] \right\} d\tau \quad (3.7.1.12)$$

ou

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} D(t, \tau) d\tau \quad (3.7.1.13)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) \left[\frac{\dot{E}(\tau)}{E^2(\tau)} + e^{-\gamma(t-\tau)} \cdot (\phi'(\tau) + \gamma \phi(\tau)) - \phi'(\tau) \right] d\tau \quad (3.7.1.14)$$

Diferenciando 3.7.1.14 com relação a t e, somando-se a expressão obtida novamente com 3.7.14, obtêm-se

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) + \gamma \varepsilon(t) &= \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \frac{\gamma \sigma(t)}{E(t)} + \gamma \sigma(t) \phi(t) + \\ &+ \gamma \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) \cdot \left[\frac{\dot{E}(\tau)}{E(\tau)} - \phi'(\tau) \right] d\tau \quad (3.7.1.15) \end{aligned}$$

e derivando-se mais uma vez, chega-se à correspondente equação diferencial da proposta de Arutyunyan

$$\ddot{\varepsilon}(t) + \gamma \dot{\varepsilon}(t) = \frac{\ddot{\sigma}(t)}{E(t)} + \dot{\sigma}(t) \left[\gamma \left(\frac{1}{E(t)} + \phi(t) - \frac{\dot{E}(t)}{E^2(t)} \right) \right] \quad (3.7.1.16)$$

com condições iniciais no instante $t = \tau_1$

$$\begin{aligned} \sigma(\tau_1) &= E(\tau_1) \cdot \varepsilon(\tau_1) \\ \dot{\varepsilon}(\tau_1) &= \frac{\dot{\sigma}(\tau_1)}{E(\tau_1)} + \gamma \phi(\tau_1) \cdot \sigma(\tau_1) \end{aligned} \quad (3.7.1.17)$$

3.7.2 - Correspondência com modelo reológico

Toma-se um modelo standard, com os parâmetros mecânicos variáveis, conforme a figura 3.11, com equações constitutivas do tipo

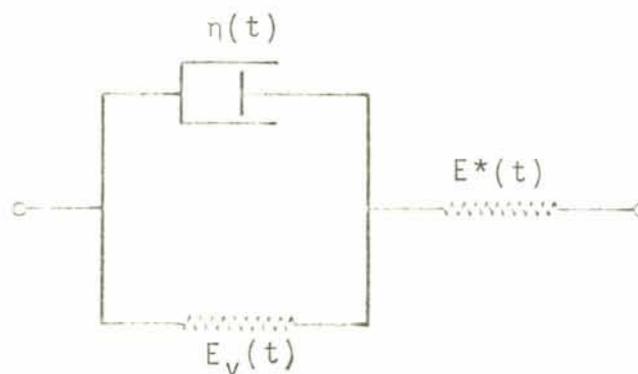


Figura 3.11 - Modelo standard com parâmetros mecânicos variáveis

$$\dot{\sigma}_m(t) = E^*(t) \dot{\epsilon}_m(t) \quad (3.7.2.1)$$

$$\dot{\sigma}_k(t) = \dot{\eta}(t) \cdot \dot{\epsilon}_k(t) + \eta(t) \ddot{\epsilon}_k(t) + E_v(t) \dot{\epsilon}_k(t)$$

onde os sub-índices k e m referem-se ao elemento de Kelvin e da mola, respectivamente, e v a mola do elemento Kelvin.

Com as equações constitutivas 3.7.2.1 mais as equações do equilíbrio e compatibilidade 2.6.4.1 e 2.6.4.2 do modelo chega-se a:

$$\begin{aligned} \eta(t) \ddot{\epsilon}(t) + \dot{\epsilon}(t) \left[E_v(t) + \dot{\eta}(t) \right] &= \ddot{\sigma}(t) \frac{\eta(t)}{E^*(t)} + \\ &+ \dot{\sigma}(t) \left[1 + \frac{\eta(t)}{E^*(t)} + \frac{E_v(t)}{E^*(t)} - \eta(t) \frac{E(t)}{E^2(t)} \right] \end{aligned} \quad (2.7.2.2)$$

com condições iniciais para $t = \tau_1$

$$\epsilon(\tau_1) = \sigma(\tau_1) / E(\tau_1) \quad (2.7.2.3)$$

$$\dot{\epsilon}(\tau_1) = \dot{\sigma}(\tau_1) / E(\tau_1) + \sigma(\tau_1) / \eta(\tau_1)$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem.

Se as relações

$$E(t) = E^*(t)$$

$$\eta(t) = \frac{1}{\phi(t) \cdot \gamma} \quad (2.7.2.4)$$

$$E_r(t) = \frac{1}{\phi(t)} - \dot{\eta}(t)$$

são válidas, a equação 3.7.2.2 é idêntica a 3.7.1.16, com as mesmas condições iniciais para $t = \tau_1$, 3.7.2.5 e 3.7.1.16. As correspondências 3.7.2.4 são únicas e, portanto, a função de fluência 3.7.1.8 também o é e pode ser representada pelo modelo standard com parâmetros mecânicos variáveis.

3.8 - Análise Crítica

A proposta de Arutyunyan também reproduz as propriedades fundamentais da deformação lenta, abordadas em 3.4, mas com comportamento bem melhor do que a proposta de Dischinger. Ainda assim, alguns reparos poderiam ser feitos.

Arutyunyan, embora defina sua teoria como um somatório, utiliza, na resolução de problemas, apenas os primeiros termos da série, por considerar que uma boa aproximação é obtida. Evidentemente, na época da elaboração da teoria, trabalhava-se sem a utilização do computador e, um maior número de termos complicava a análise. Já, com o auxílio do computador, é recomendável a utilização de mais termos. Isso vai ficar bem caracterizado, posteriormente, quando da análise dos ensaios realizados, onde foi necessário a utilização de mais termos, com tempos de retardação diferentes.

Outra restrição que poderia ser feita e que na recuperação da fluência Arutyunyan utiliza o princípio de superposição de McHenry [23]. Como foi visto em 3.2.2 este princípio subestima a recuperação da fluência no concreto. Mas, a proposta é definida para materiais viscoelásticos lineares, portanto, nesse aspecto, não é propriamente um erro na teoria, mas uma limitação.

Talvez, a crítica principal que se poderia fa-

zer é quanto a função $\phi(\tau)$, definida como em 3.7.1.6. Esta função, para idades muito jovens, tem uma variação muito grande, como pode-se ver na figura 3.12. Como o próprio Arutyunyan reconhece, se poderia estudar uma função dependente da idade, monótona e uniformemente decrescente, que satisfaça 3.7.1.5 e que melhor se adapte aos resultados experimentais.

3.9 - Propostas de Arutyunyan e Dischinger - Análise Conjunta

Uma questão que poderia ser abordada é se existem condições em que as duas propostas apresentadas conduzam a resultados idênticos. Pela análise superficial dos modelos reológicos correspondentes poder-se-ia supor que sim, visto que, o modelo de Maxwell é um caso particular do modelo standard, no qual $E_2 = 0$. Mas a proposta de fluência de Arutyunyan, em geral, não pode ser transformada na de Dischinger.

Estudando as expressões analíticas propostas em 3.6.1.6 e 3.7.1.8 pode-se chegar a um caso particular em que a equivalência é possível.

Calculando-se as expressões para $t \rightarrow \infty$ e $\tau = \tau_1$ obtêm-se

$$\begin{aligned} C(\infty, \tau_1) &= C_\infty \\ C(\infty, \tau_1) &= \frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \end{aligned} \quad (3.9.1)$$

para Dischinger e Arutyunyan respectivamente, ou seja, uma das condições para que exista equivalência em uma determinada idade é que $C_\infty = \frac{A_1}{\tau_1} + C_0$. Outra condição é que as constantes ν e γ , que afetam a taxa de variação da

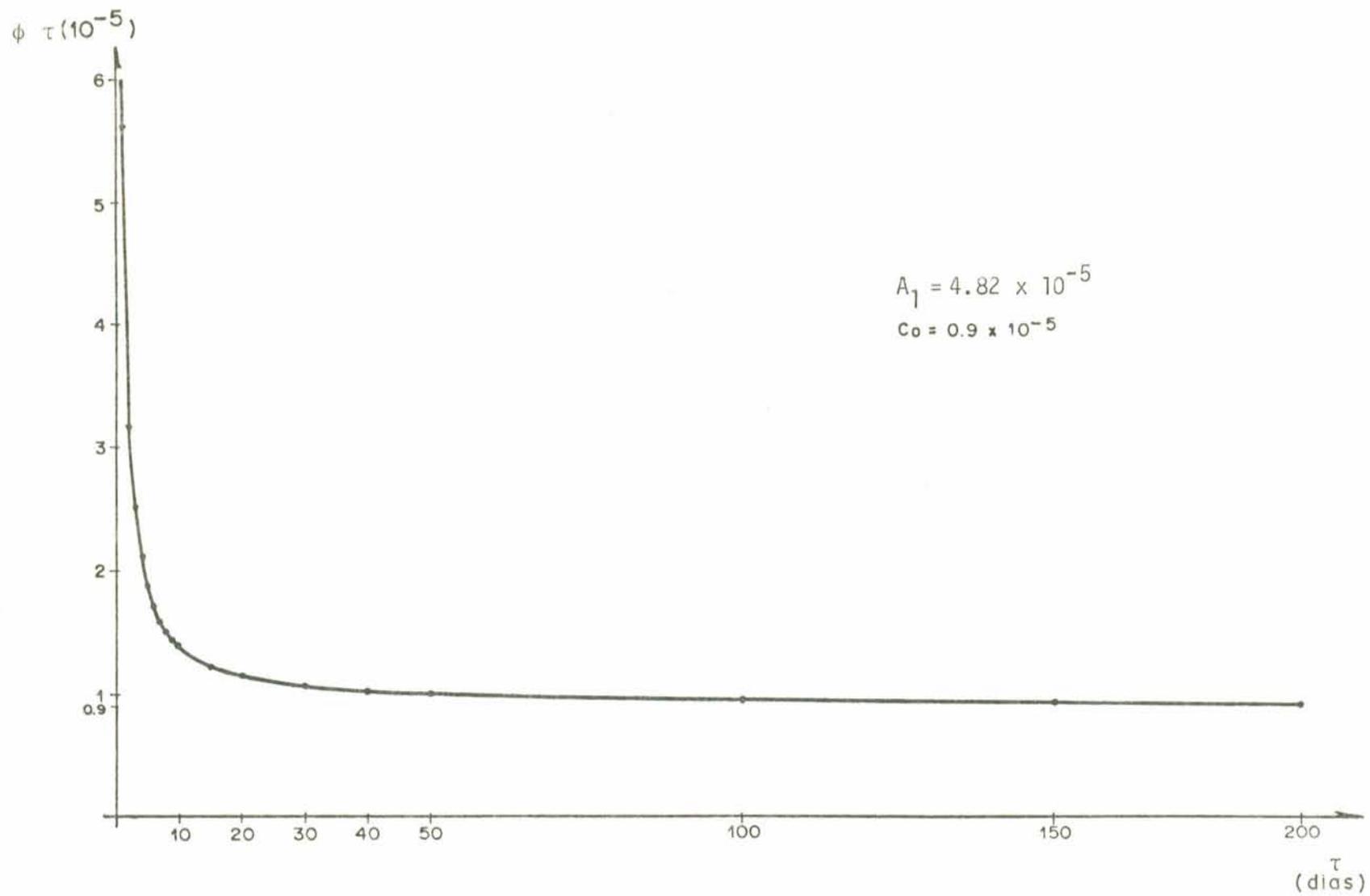


Figura 3.12 - $\phi(\tau)$ proposta por Arutyunyan com um termo na s̄erie. $A_1 = 4.82 \times 10^{-5}$,
 $C_0 = 0,9 \times 10^{-5}$.

fluência com o tempo, sejam também iguais. Satisfazendo essas duas condições, para uma determinada idade, obtêm-se curvas idênticas.

Essas curvas, para $\tau_1 = 10$ dias, $A_1 = 4,82 \times 10^{-5}$, $C_0 = 0,9 \times 10^{-5}$, e $\gamma = 0.026$ são mostradas na figura 3.13, juntamente com as curvas para $\tau_1 = 28,60$ e 100 dias, calculadas a partir da primeira.

Como era de se esperar, com o envelhecimento, existe uma grande discrepância de resultados.

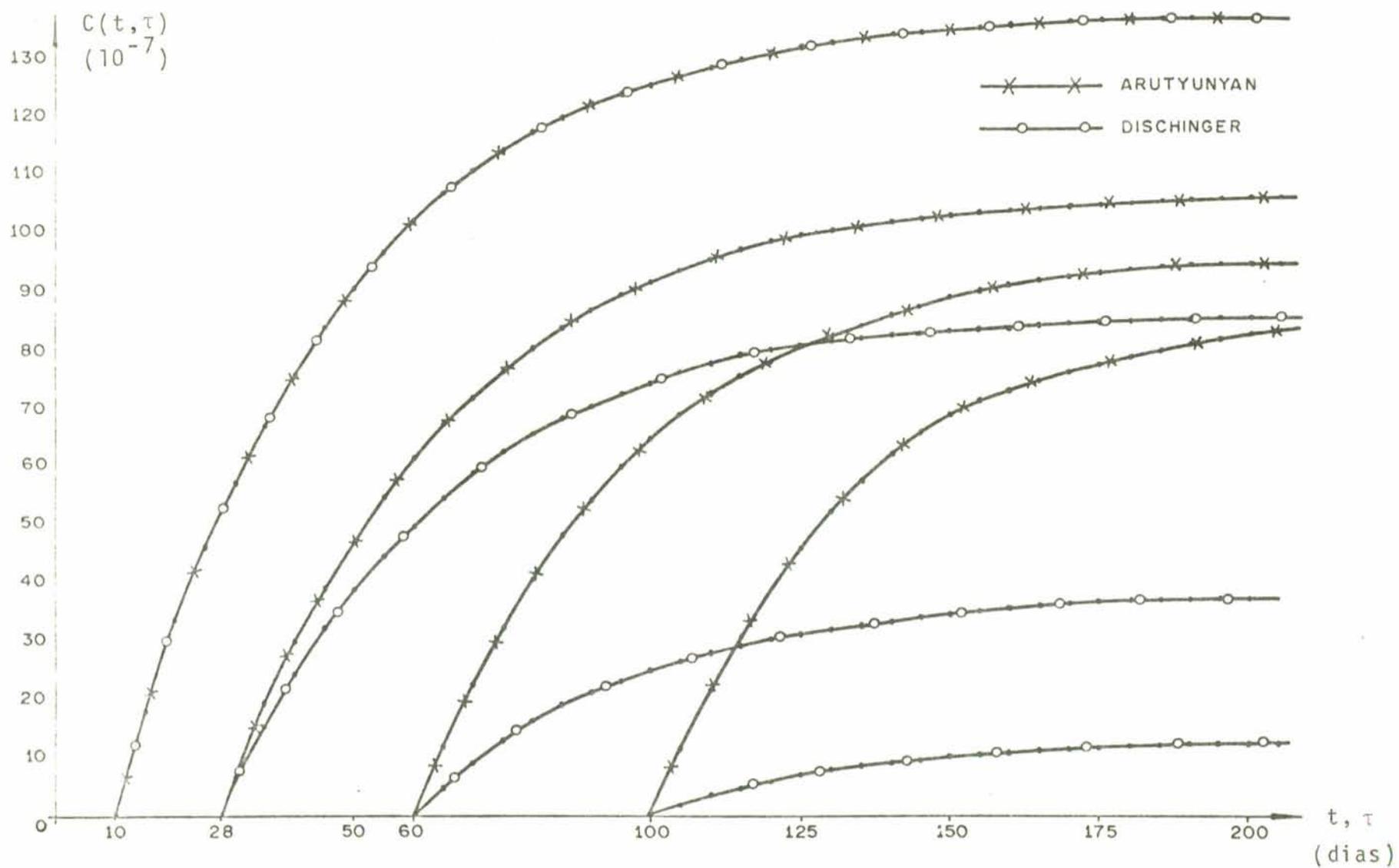


Figura 3.13 - Comparação entre as propostas de Arutyunyan e Dischinger para $\tau_1=10$ dias, em diversas idades τ .

CAPÍTULO 4

RESOLUÇÃO NUMÉRICA

4.1 - Introdução

As equações constitutivas para resolução de problemas de deformação lenta 2.4.12 e 2.4.13, junto com as propostas de resolução apresentadas até o momento, não permitem, em geral, soluções analíticas simples, pelo fato de que as propriedades do concreto são dependentes da idade. Por exemplo, a resolução analítica da proposta de Arutyunyan recorre à utilização de uma função gama incompleta, geralmente, de difícil solução. Mais ainda, para possibilitar a solução analítica, várias simplificações na proposta de deformação lenta devem ser introduzidas, acarretando erros substanciais na solução. Por isso, é conveniente utilizar técnicas numéricas para a resolução de problemas, as quais, não necessitem da introdução de simplificações. Destas técnicas, a mais simples é a integração numérica passo a passo.

Nesse trabalho utiliza-se a representação integral, pelas vantagens desta, sobre a representação diferencial. Na representação integral a determinação da equação constitutiva é imediata, ou seja, os valores de $D(t, \tau)$ e $E(t, \tau)$ em 2.4.10 e 2.4.11 são obtidos, diretamente, de experiências de fluência e de relaxação. Enquanto isso, na representação diferencial, deverá haver modelos reológicos, com grande número de elementos, elementos esses, com coeficientes viscoelásticos variáveis. Por outro lado, a representação integral utiliza mais memória do computador, já que é necessário guardar a história de tensões e deformações. Porém, tal desvantagem só aparece, de forma comprometedor, em problemas de elementos finitos e, não,

naqueles a que se propõe resolver o método numérico deste trabalho.

4.2 - Determinação do Algoritmo Numérico

Como já foi visto, em 3.2, tanto a função de fluência quanto a de relaxação, são funcionais contínuos, para o concreto e, nas condições consideradas nesse trabalho, também lineares. Desta maneira, pela aplicação do teorema de Riesz, a lei de fluência para tensões uniaxiais pode ser escrita como em 2.4.10 ou 2.4.12, quando a história de tensões é dada ou, quando conhecida a história de deformações, como 2.4.11 ou 2.4.13. As equações 2.4.12 e 2.4.13 podem ser vistas como equações integrais lineares de Volterra, funções de $\sigma(t)$ e $\epsilon(t)$ respectivamente.

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_{\tau_1}^t - \frac{\partial}{\partial \tau} D(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (a)$$

(4.2.1)

$$\sigma(t) = \epsilon(t) \cdot E + \int_{\tau_1}^t - \frac{\partial}{\partial \tau} E(t, \tau) \epsilon(\tau) d\tau \quad (b)$$

Realizando algumas transformações nessas equações, obtêm-se:

$$\sigma(t) = E \epsilon(t) + E \int_{\tau_1}^t \frac{\partial}{\partial \tau} D(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (a)$$

(4.2.2)

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E} \int_{\tau_1}^t \frac{\partial}{\partial \tau} E(t, \tau) \epsilon(\tau) d\tau \quad (b)$$

ou seja, genericamente, em uma equação do tipo:

$$g(t) = h(t) + \lambda_0 \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) g(\tau) d\tau \quad (4.2.3)$$

Essa equação, baseada, no caso, apenas nas experiências de fluência e relaxação, é bastante geral e resolve uma gama de problemas viscoelásticos, como ver-se-á em exemplos posteriores.

O método mais direto, para a resolução numérica deste tipo de equação, é baseado em substituir a integral por uma soma finita. Para este propósito o intervalo de tempo $t - \tau_1$ é dividido em $n - 1$ subintervalos, de modo que:

$$\Delta i = (\tau_{i+1} - \tau_i) \quad (4.2.4)$$

os quais podem ser considerados desiguais.

Aplicando a regra dos trapézios, cujo erro é da ordem do intervalo de tempo, a equação 4.2.3 pode ser escrita como:

$$g(t_n) = h(t_n) + \lambda_0 \sum_{t=1}^{n-1} \{g(t_i) k(t_n, t_i) + g(t_{i+1}) K(t_n, t_{i+1})\} \frac{\Delta i}{2} \quad (4.2.5)$$

Retirando-se o enésimo termo do somatório obtêm-se:

$$g(t_n) = h(t_n) + \frac{\lambda_0}{2} \left[\{g(t_n) K(t_n, t_n) + g(t_{n-1}) K(t_n, t_{n-1})\} \Delta n - 1 + \sum_{i=1}^{n-2} \{g(t_i) K(t_n, t_i) + g(t_{i+1}) K(t_n, t_{i+1})\} \Delta i \right] \quad (4.2.6)$$

Fazendo:

$$AA = \sum_{i=1}^{n-2} \{ g(t_i) K(t_n, t_i) + g(t_{i+1}) K(t_n, t_{i+1}) \} \Delta_i \quad (4.2.7)$$

e, rearranjando 4.2.6, chega-se a:

$$g(t_n) = \frac{2h(t_n) + \lambda_0 g(t_{n-1}) K(t_n, t_{n-1}) \Delta_{n-1} + AA}{2 - \lambda_0 K(t_n, t_n) \Delta_{n-1}} \quad (4.2.8)$$

De 4.2.3 retira-se diretamente para $t = \tau_1$

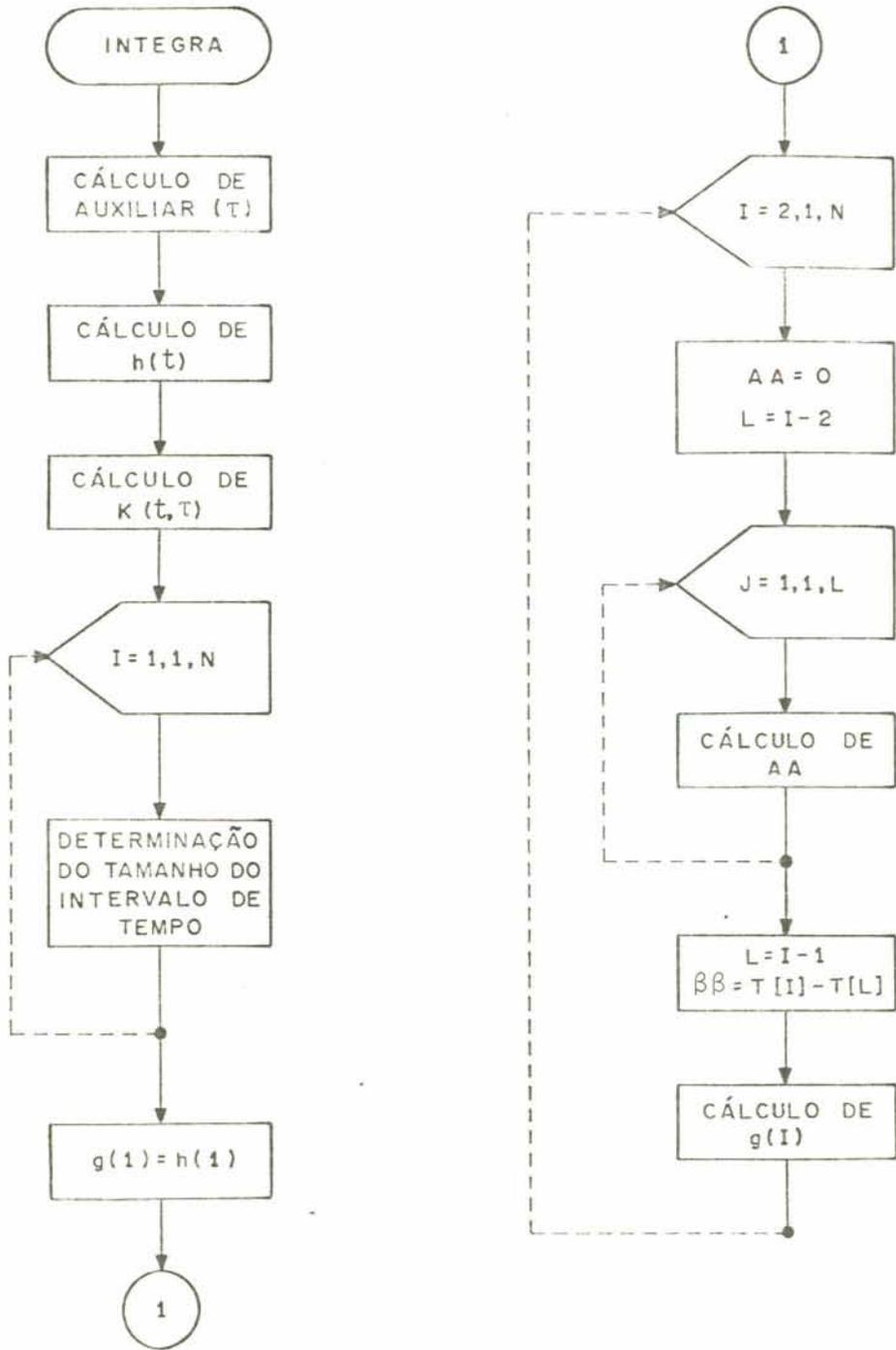
$$g(\tau_1) = h(\tau_1) \quad (4.2.9)$$

A equação 4.2.8 admite um programa numérico, passo a passo, para a sua resolução. O diagrama de fluxo desse programa, está indicado na figura 4.1

Salienta-se que esta subrotina resolve problemas na forma da equação 4.2.3, independente do núcleo utilizado.

Como entrada no programa, tem-se, inicialmente, os dados específicos do problema que se está resolvendo, como, por exemplo, o módulo de elasticidade do aço e do concreto, as constantes das propostas utilizadas e, as constantes para determinação dos intervalos de tempo. As funções $h(t)$ e o núcleo da equação de Volterra $K(t, \tau)$, de 4.2.3, entram, diretamente, em subrotinas internas. Juntamente com estas duas, coloca-se uma a mais com a finalidade de auxiliar na preparação da resolução do problema.

Em muitos casos, a função $K(t, \tau)$ de 4.2.5, é a função de fluência ou de relaxação e pode ser apresentada de forma analítica ou, simplesmente, como uma tabe



$$AA = AA + (g[J] \cdot K(T[I], T[J]) + g[J+1] \cdot K(T[I], T[J+1])) \cdot (T[J+1] - T[J]);$$

$$g[I] = \{2 \cdot h(T[I]) + \lambda_0 \cdot (g[L] \cdot K(T[I], T[L]) \cdot (BB + AA))\} / (2 - \lambda_0 \cdot K(T[I], T[I]) \cdot BB)$$

N = nº de passos

Figura 4.1 - Diagrama de fluxo para resolução de equações integrais do tipo 4.2.3.

la de valores experimentais.

O programa principal, apenas faz a leitura e preparação dos dados, para ingressar nas subrotinas, e a impressão de resultados.

4.3 - Intervalos de Tempo

É importante encontrar uma função que determine o tamanho do intervalo de tempo, apropriada à análise numérica, não só pela dependência do erro ao tamanho do intervalo utilizado mas, também, porque, no estudo da deformação lenta, o alcance da resposta chega, muitas vezes, a tempos bastante grandes, como por exemplo, vinte a trinta anos. Devido a isso, o tamanho do intervalo não deve ser mantido constante, pelo risco de se ter um número muito grande de passos, mas, deve ser gradualmente incrementado durante a computação. Em determinada época, o procedimento adotado era o de reduzir, grandemente, o alcance da resposta, para trabalhar com um número razoável de passos.

Para computar respostas de grande alcance, é necessário restringir a história de tensões ou deformações para aquelas, em que, a história prescrita exibe uma mudança imediata (descontinuidade) somente no tempo de aplicação da carga e, tem uma variação contínua e gradual. Por exemplo, a variação de deformação de estruturas sob cargas permanentes, retração e sem cedimentos de apoio é, praticamente, deste tipo. Como recurso, se a história prescrita for descontínua, a linearidade da equação de Stieltjes 2.4.10 e 2.4.11, ou mesmo, as equações 2.4.12 e 2.4.13, permitem decompor estas variações em tantas componentes quantas necessárias.

A primeira função, que determina a variação do intervalo, testada, é do tipo:

$$T [I] : = \Delta \cdot (I - 1)^\alpha \quad (4.3.1)$$

onde, Δ e α , são constantes quaisquer. É uma expressão bastante simples, que, tanto pode ser utilizada para intervalos de tempo constantes, fazendo $\alpha = \Delta = 1$, como para intervalos variáveis. Utilizando esta função na resolução numérica de um modelo standard, exemplo que será visto no próximo capítulo, define-se um valor razoável para α .

A existência de valores analíticos, no estudo dos modelos reológicos, possibilita a análise do erro cometido. Para estimativa do erro analítico a cada passo e do erro médio no intervalo, utiliza-se, respectivamente, as expressões:

$$E_r = \frac{|S - S_a|}{S} \times 100\% \quad (a) \quad (4.3.2)$$

$$E_m = \frac{|S - S_a|}{N} \quad (b)$$

onde, S , é o valor exato, S_a o valor aproximado pela análise numérica, e N o número de passos.

Variando α , com Δ mantido constante e igual a um, e verificando o erro médio cometido, a diferença máxima entre o valor exato e o aproximado, o tempo gasto para execução do processo numérico e o número de passos necessários para atingir uma determinada idade após a carga, conforme a figura 4.2, verifica-se, que a função 4.3.1 comporta-se melhor com valores de α entre 1.2 e 1.4. No presente trabalho, quando da utilização desta função na resolução de problemas, utilizou-se $\alpha = 1,2$. Mas, isto não quer dizer que este seja o melhor valor de α para qualquer caso a ser analisado. Tudo depende, essencialmente, do

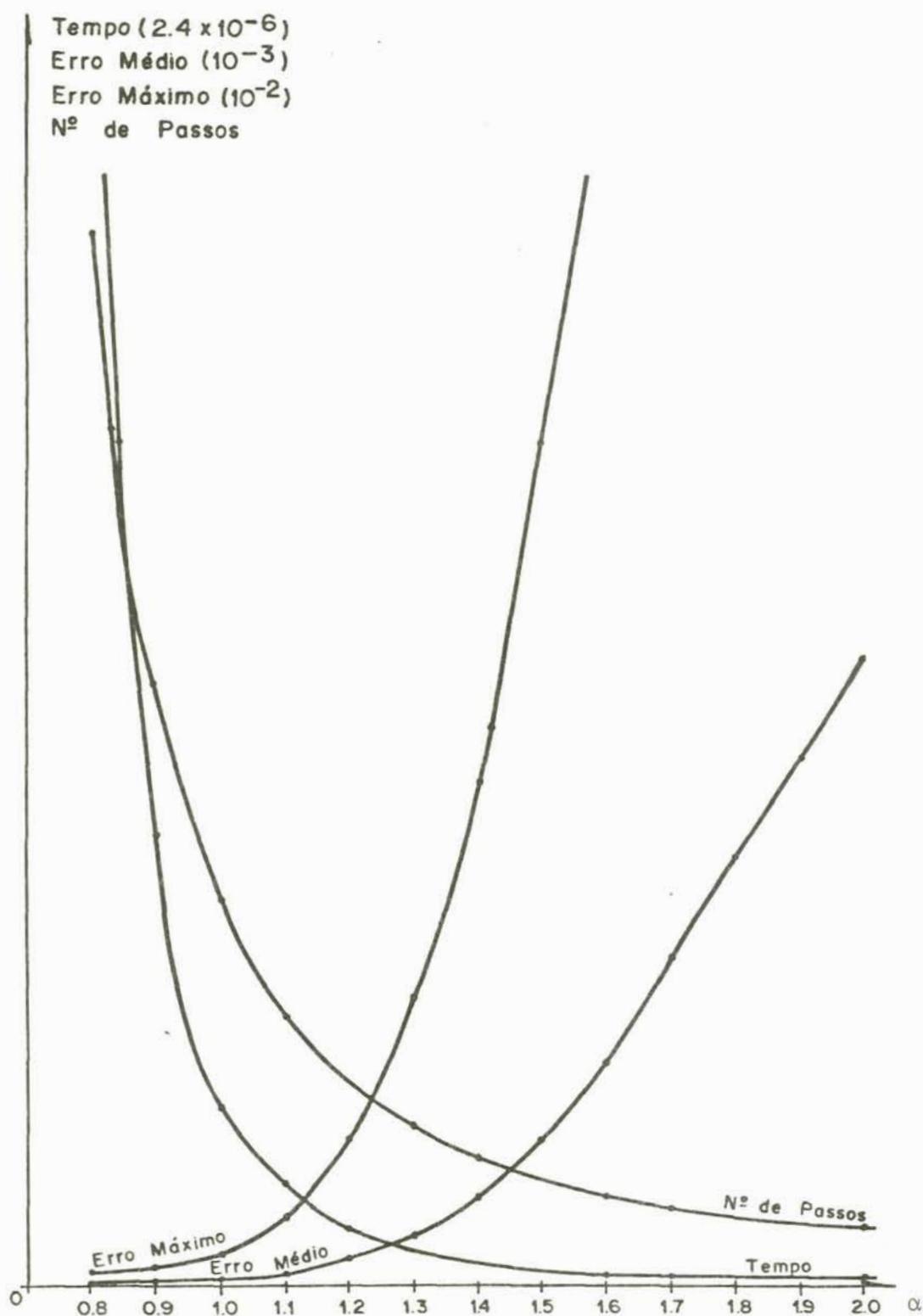


Figura 4.2 - Variação do erro médio, máximo, número de passos e tempo de execução em função de α , na resolução numérica de um modelo reológico.

critério adotado na resolução do problema.

Segundo Bazant [3], é mais conveniente escolher como função que determine a variação dos intervalos, uma progressão geométrica, isto é, quando o quociente entre o passo i e o passo $i+1$ é constante. Para tanto, sugere-se uma expressão do tipo:

$$T [I] := 10^{1/ENE} \cdot T [I-1] \quad (4.3.3)$$

onde, ENE, representa o número de intervalos por decênio de logaritmo de dez. Nota-se, facilmente, que cada passo aumenta $10^{1/ENE}$ vezes o anterior. Utilizando-se o mesmo exemplo que definiu um valor para α , plotando os mesmos parâmetros em função da variação de ENE, conforme a figura 4.3, define-se um valor razoável para ENE. O melhor comportamento da função é obtido para valores entre 20 e 40. Para a resolução de problemas foi adotado $ENE = 30$.

A terceira função estudada foi do tipo:

$$T [I] := DELTA \cdot ALFA^{(I-2)} \quad (4.3.4)$$

onde, DELTA e ALFA, são constantes, e $ALFA > 1$, para que o intervalo seja crescente. Esta, também, é uma progressão geométrica, em que cada passo aumenta ALFA vezes o anterior. Com o mesmo procedimento utilizados nas funções anteriores, variando ALFA com DELTA, constante e igual a um, chegou-se a valores razoáveis para ALFA, compreendido entre 1 e 1,15, conforme a figura 4.4. Com valores maiores que 1,2, o intervalo cresce rapidamente, da mesma forma que o erro. O valor adotado para ALFA, quando da utilização da expressão 4.3.3, foi de 1,1.

Um dos problemas que a utilização de intervalos

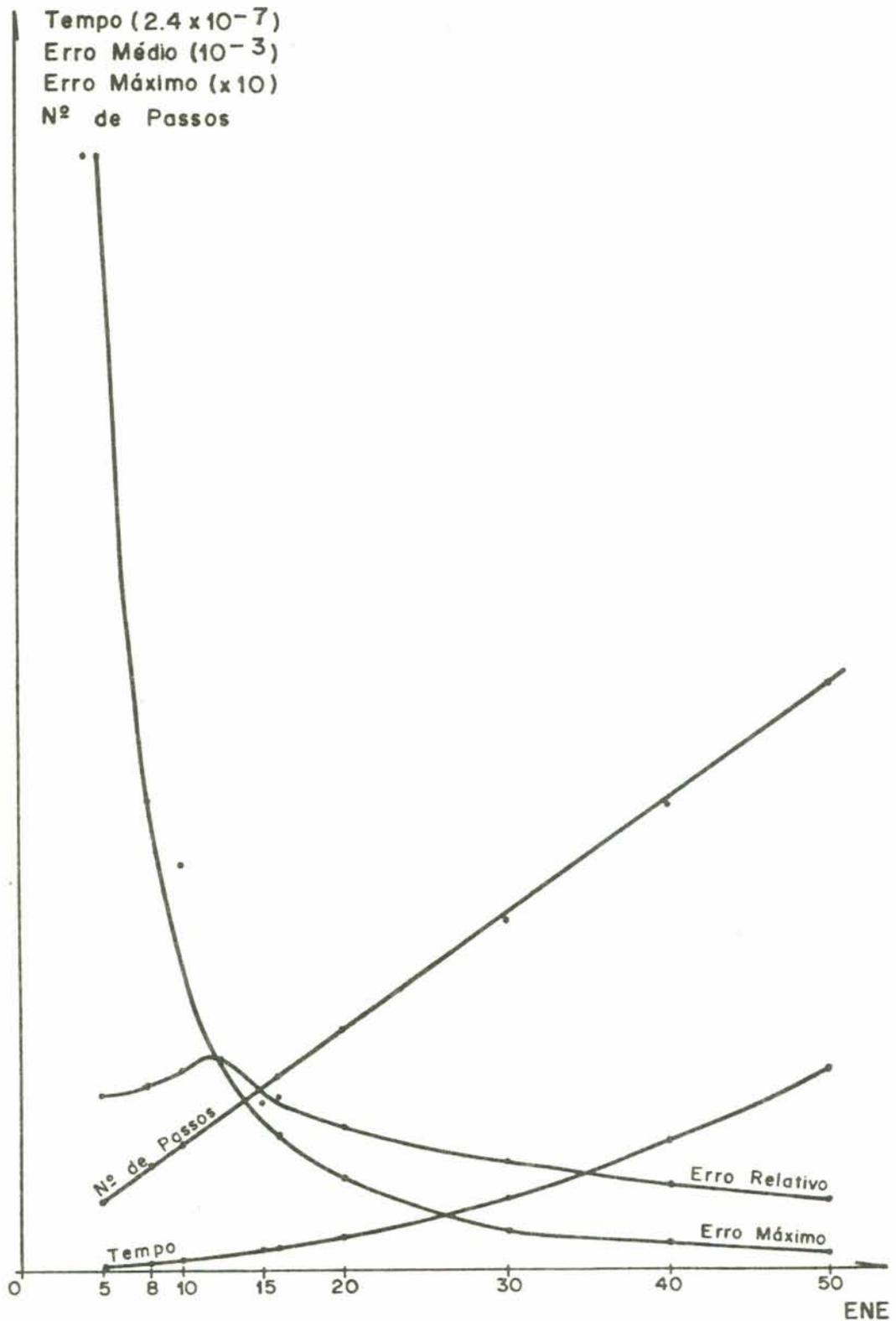


Figura 4.3 - Variação do erro médio, máximo, do número de passos e tempo de execução em função de ENE

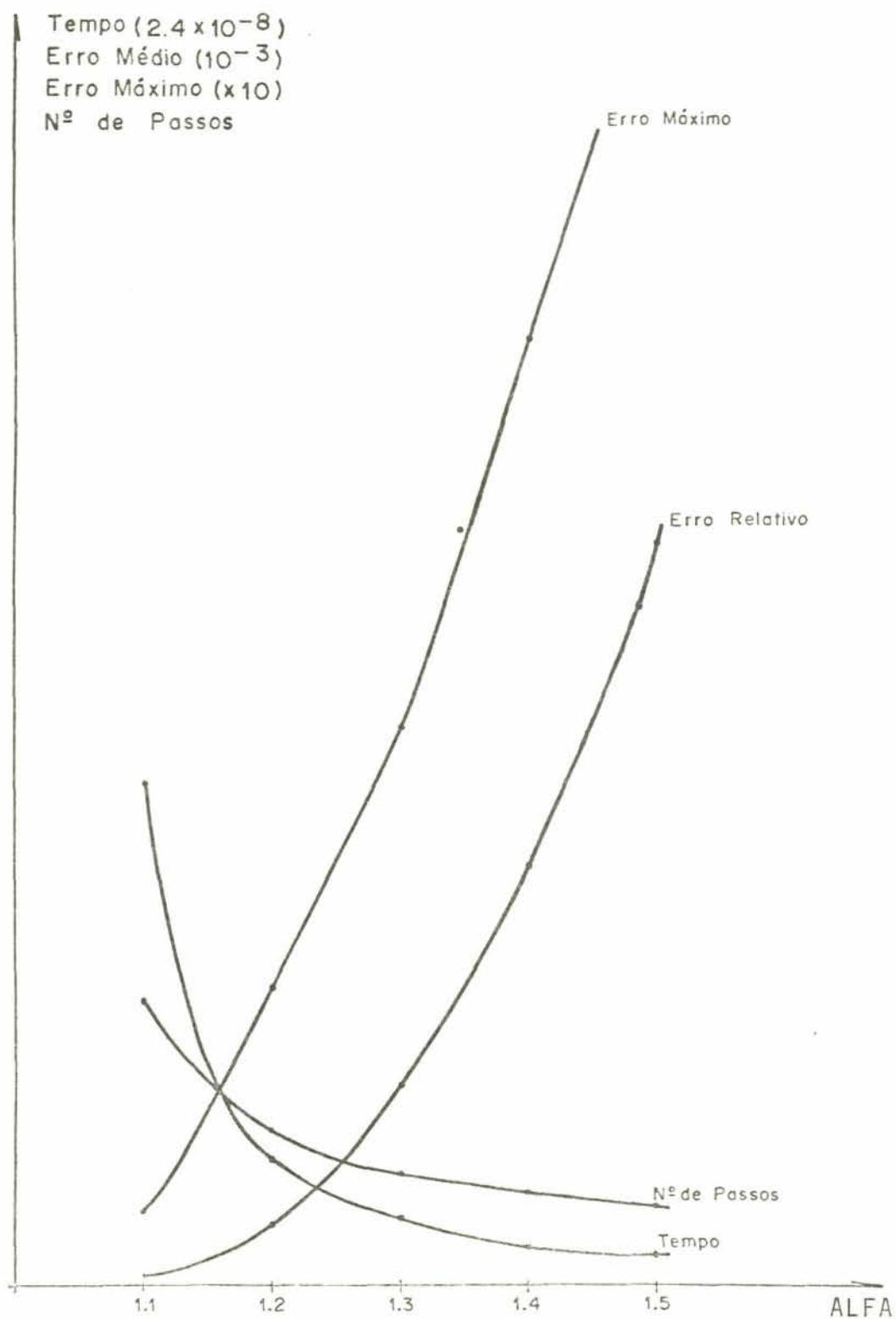


Figura 4.4 - Variação do erro médio, máximo, do número de passos e tempo de execução em função de ALFA

los crescentes acarreta na análise numérica é que o crescimento do passo dá-se exatamente no sentido do aumento do erro, isto é, normalmente, o erro do intervalo $i+1$ é maior que o do intervalo i , devido ao erro acumulado. E isto acontece mesmo para intervalos constantes. Porém, com o crescimento do intervalo, o crescimento do erro é mais significativo. Este problema pode vir, até, a instabilizar o processo numérico. Para evitar-se que o crescimento do tamanho do intervalo possa ocasionar problemas desta ordem, segundo Bazant [3], deve-se iniciar-se o processo com intervalos, da ordem de 0.001 a 0.01, do dia.

Na figura 4.5, encontram-se plotadas as expressões 4.3.1, 4.3.3, 4.3.4, no eixo das ordenadas, e o número de passos, no eixo das abcissas, para diversos valores de α , ALFA e ENE, com o primeiro intervalo unitário e $\Delta = \text{DELTA} = 1$. Observa-se que, as funções do tipo 4.3.3 e 4.3.4 têm um crescimento mais lento, a princípio, que 4.3.1 e, a partir de um determinado instante, crescem de uma maneira muito rápida. Essa menor velocidade de crescimento, no início, em termos de análise do erro relativo, leva a um melhor comportamento inicial (figura 4.6). Esta vantagem inverte-se à medida que se desenvolvem as funções, com uma maior velocidade de crescimento de 4.3.3 e 4.3.4. Nota-se, também, que o crescimento do erro relativo, após o período inicial, para a função 4.3.1, no exemplo do modelo standard, é bastante pequeno em comparação às outras funções estudadas.

Deve-se, sempre, ter em mente que os valores utilizados para as diversas constantes das funções, que determinam o tamanho do intervalo, dependem, do problema estudado e, do tipo de análise a que nos propomos fazer. Portanto, os valores adotados neste trabalho, podem não ser

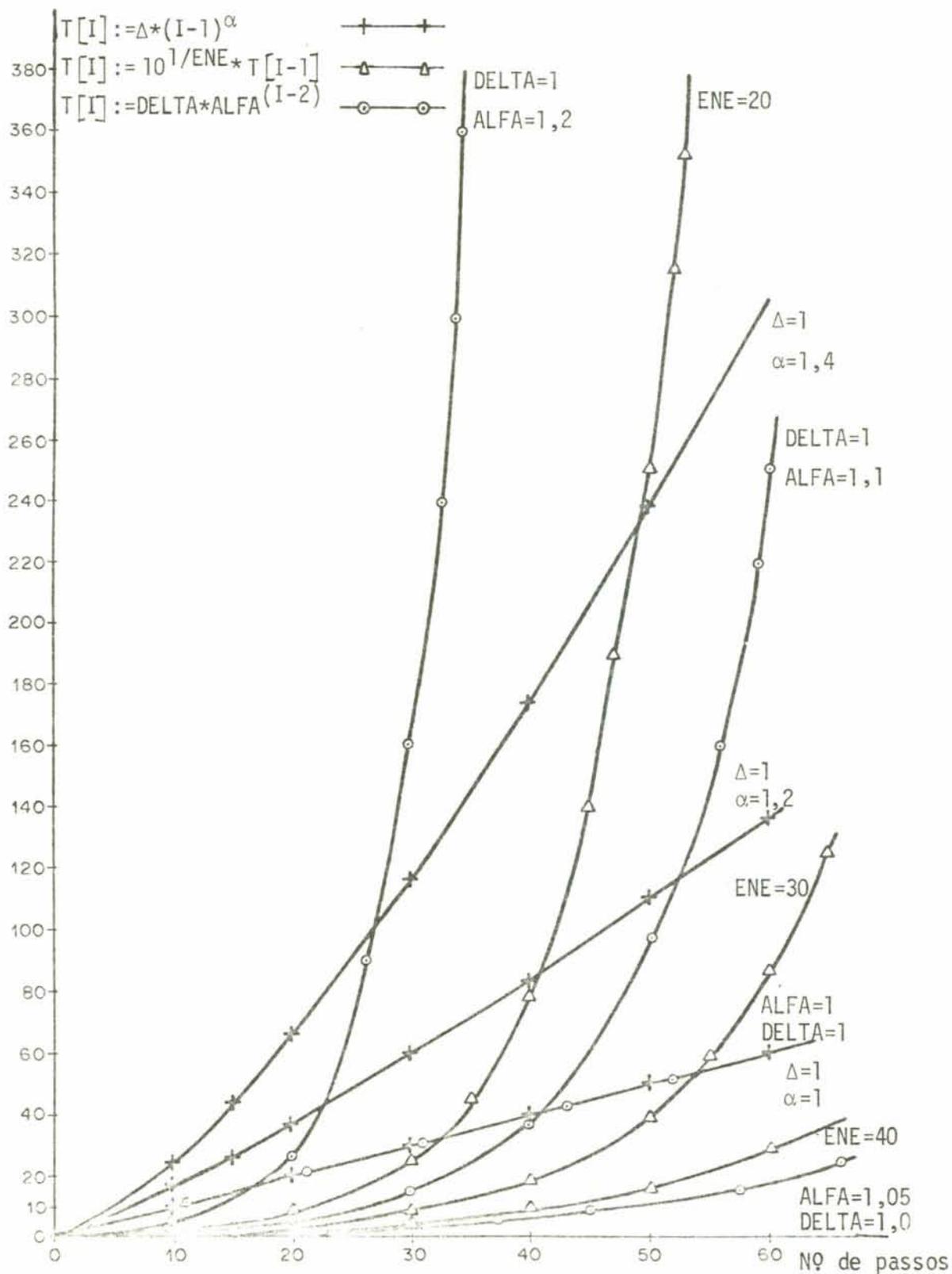


Figura 4.5 - Comparação entre as funções 4.3.1, 4.3.3 e 4.3.4, com primeiro intervalo unitário

apropriados ao estudo de outros problemas.

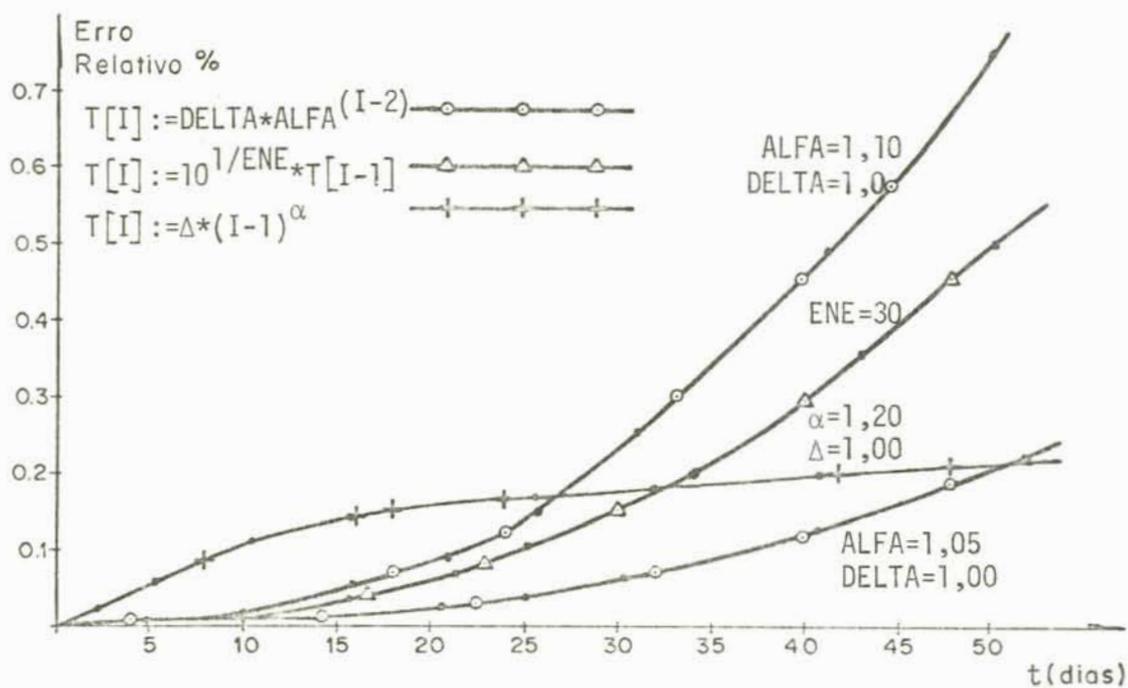


Figura 4.6 - Comparação entre os erros relativos das funções 4.3.1, 4.3.3 e 4.3.4, com primeiro intervalo unitário, em um ensaio de relaxação de um modelo Standard

CAPÍTULO 5

EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo serão analisados alguns exemplos, resolvidos numericamente com a subrotina INTEGRA e os resultados obtidos, comparados com os valores analíticos.

5.1 - Exemplo 1 - Modelo Standard

O primeiro problema a ser analisado é uma experiência de relaxação num modelo standard, isto é, uma deformação constante ϵ_0 é aplicada no modelo e obtêm-se as correspondentes tensões ao longo do tempo. A utilização de um modelo reológico para teste da subrotina, possibilita a comparação dos resultados obtidos com os valores exatos da resolução analítica correspondente. O modelo standard testado é o da figura 5.1, com o qual é realizado um estudo comparativo entre as diversas funções que determinam o tamanho do intervalo de tempo.

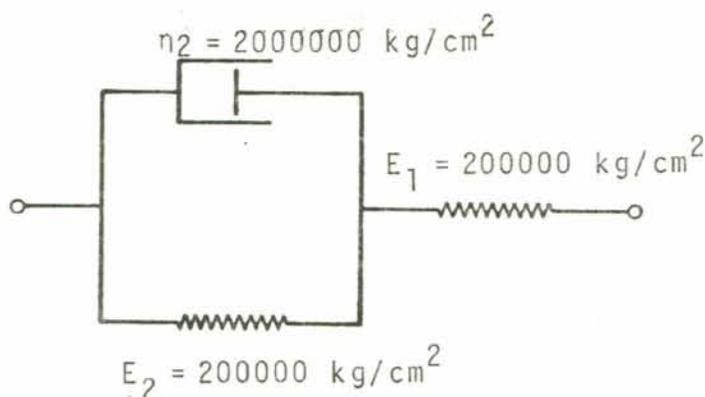


Figura 5.1 - Modelo Standard

Para a solução analítica do problema, parte-se da equação 2.6.4.9, onde $\epsilon(t) = \epsilon_0 = \text{constante}$, ob-

tendo-se, após algumas transformações:

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon_0 - \frac{E_1^2 \varepsilon_0}{E_1 + E_2} \left[1 - e^{-\frac{E_1 + E_2}{\eta_2} t} \right] \quad (5.1.1)$$

Já, para a solução numérica, toma-se 2.6.4.8, na forma 4.2.3

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) \cdot E_1 - E_1 \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) \frac{e^{-\frac{E_2}{\eta_2} (t - \tau)}}{\eta_2} d\tau \quad (5.1.2)$$

com a qual se obtém:

$$\begin{aligned} h(t) &= E_1 \varepsilon(t) \\ K(t, \tau) &= \frac{e^{-\frac{E_2}{\eta_2} (t - \tau)}}{\eta_2} \\ \lambda_0 &= E_1 \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Assim, resolve-se o problema com o auxílio da subrotina INTEGRA.

Na figura 5.2 podem ser vistos os resultados obtidos numericamente, comparados com os resultados analíticos, para as diversas funções que determinam o tamanho do intervalo, com o primeiro intervalo unitário.

Como se observa na figura 5.2 e 4.6, a aproximação obtida é bastante boa, independentemente da função para determinação do tamanho do intervalo adotado.

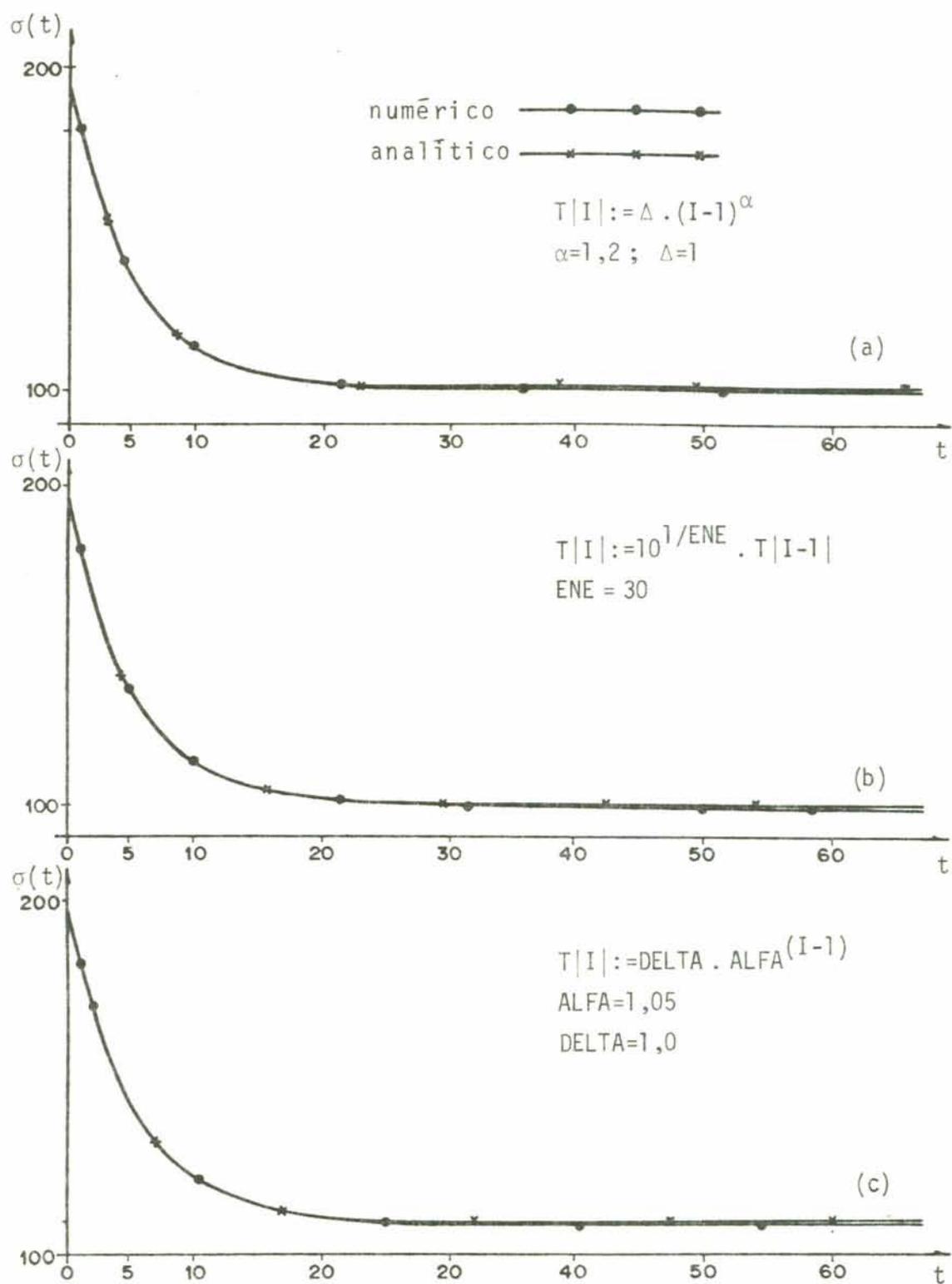


Figura 5.2 - Comparação entre a resolução numérica e analítica de ensaios de relaxação de um modelo standard

5.2 - Exemplo 2 - Pilar de Concreto Armado

Considera-se um pilar de concreto armado sob a influência de uma força centrada de compressão N , constante, aplicada em uma idade $\tau = \tau_1$. O tempo é medido a partir da concretagem do elemento. Representa-se a tensão no elemento de concreto, em um certo instante t , com considerações de fluência, por $\sigma_b(t)$, enquanto a tensão no aço será representada por $\sigma_a(t)$. As áreas de aço e de concreto serão representadas por F_a e F_b respectivamente.

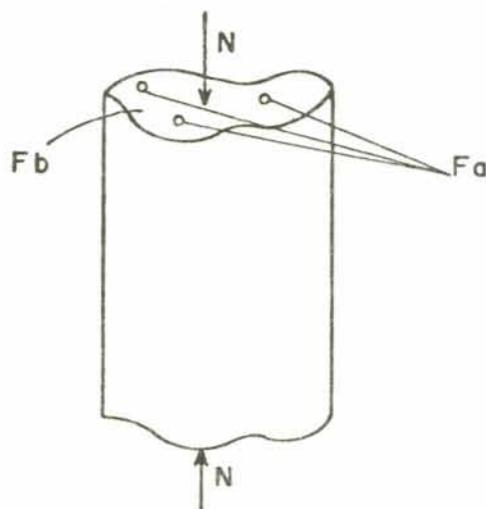


Figura 5.3 - Pilar de concreto armado submetido a uma carga centrada de compressão N

A deformação lenta no aço é desprezada visto que é insignificante, comparada à do concreto.

Neste caso, as tensões satisfazem as equações de equilíbrio e compatibilidade abaixo, em qualquer valor de t :

$$\sigma_a(t) \cdot F_a + \sigma_b(t) \cdot F_b = N \quad (5.2.1)$$

e

$$\epsilon_a(t) = \epsilon_b(t) \quad (5.2.2)$$

onde, $\epsilon_a(t)$ e $\epsilon_b(t)$, são, respectivamente, as deformações no elemento de aço e de concreto.

E, a deformação longitudinal no concreto $\epsilon_b(t)$, com considerações de fluência será:

$$\epsilon_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{E(t)} + \int_{\tau_1}^t \sigma_b(\tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} D(t, \tau) d\tau \quad (5.2.3)$$

onde $E(t)$ é o módulo de elasticidade do concreto.

Substituindo-se 5.2.1 por 5.2.3, obtêm-se:

$$\epsilon_b(t) = \frac{N - \sigma_a(t) \cdot F_a}{F_b E_b} - \int_{\tau_1}^t \frac{N - \sigma_a(\tau) \cdot F_a}{F_b} \frac{D}{\partial \tau}(t, \tau) d\tau \quad (5.2.4)$$

Como não se considera a deformação lenta do aço, sabe-se que

$$\epsilon_a(t) = \frac{\sigma_a(t)}{E_a} \quad (5.2.5)$$

onde, E_a , é o módulo de elasticidade do aço e, genericamente, conforme 3.6.1.4, a admitância de fluência será:

$$D(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \quad (5.2.6)$$

De 5.2.4, 5.2.5, 5.2.6 e 5.2.2, após algumas transformações, chega-se a

$$\sigma_a(t) = \frac{m(\tau_1) \cdot N}{F_b [1 + \mu m(t)]} \left[1 + E(\tau_1) C(t, \tau_1) \right] +$$

$$+ \mu E_a \int_{\tau_1}^t \sigma_a(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] \frac{d\tau}{|1 + \mu m(t)|} \quad (5.2.7)$$

onde $m(t) = E_a/E(t)$ e $\mu = F_a/F_b$. Com procedimento análogo, obtêm-se, para a tensão do concreto,

$$\sigma_b(t) = \frac{N}{F_b |1 + \mu m(t)|} + \mu E_a \int_{\tau_1}^t \sigma_a(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] \frac{d\tau}{|1 + \mu m(t)|} \quad (5.2.8)$$

Esse conjunto de equações integrais de Volterra, 5.2.7 e 5.2.8, é do tipo 4.2.3, onde

$$K(t, \tau) = \frac{1}{|1 + \mu m(t)|} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right]$$

$$h_a(t) = \frac{m(\tau_1) \cdot N}{F_b [1 + \mu m(t)]} \cdot [1 + E(\tau_1) \cdot C(t, \tau_1)]$$

$$h_b(t) = \frac{N}{F_b [1 + \mu m(t)]} \quad (5.2.9)$$

$$\lambda_0 = \mu E_a$$

e, pode ser resolvido diretamente pela subrotina INTEGRA.

5.2.1 - Resolução pela Proposta de Arutyunyan

Assumindo a função de fluência proposta por Arutyunyan, 3.7.1.8, nas equações integrais de Volterra 5.2.7 e 5.2.8, com as seguintes características, também propostas por ele,

$$A_1 = 4.82 \times 10^{-5}; \quad C_0 = 0.9 \times 10^{-5}; \quad \gamma = 0.026;$$

$$E_a = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2;$$

e, com o módulo de elasticidade do concreto $E(t)$, constante, igual a $2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, determinam-se as correspondentes tensões nos elementos de concreto e aço do pilar. Para fins de análise, a grandeza em si das tensões não tem muita importância, mas sim, a variação, ao longo do tempo, destas tensões. Portanto, as tensões obtidas em um determinado tempo t , serão divididas pela tensão obtida para $t = \tau_1$. Resolvendo-se o problema, com a subrotina INTEGRA, para $\tau_1 = 28$ dias e, com uma função que determina o intervalo de tempo do tipo 4.3.1 onde, $\alpha = 1$ e $\Delta = 7$, obtêm-se, para as tensões, os valores da tabela 5.1.a.

Arutyunyan resolveu, analiticamente, o problema, com o auxílio da função gama incompleta, obtendo os resultados mostrados na tabela 5.1.b. Observa-se que, os valores obtidos, tanto pela análise numérica quanto analítica, são praticamente coincidentes.

Pela análise das figuras 5.4 e 5.5 nota-se que as tensões iniciais no concreto, $\sigma_b(\tau_1)$, são rapidamente reduzidas pela influência da deformação lenta e que, seu valor decresce, nos casos considerados, em até 35% ($\mu = 3\%$). Para o concreto, o aumento da armadura longitudinal leva a um aumento na atenuação das tensões. Já para o aço, a influência da taxa de armadura μ no crescimento das tensões é mais importante na proporção inversa de μ , isto é, para baixas taxas de armadura se dão os mais altos incrementos das tensões.

Nas figuras 5.6 e 5.7 apresenta-se um estudo da variação das tensões, para diferentes idades de carregamento, ou seja, para $\tau_1 = 28, 60$ e 120 dias, com uma taxa de armadura $\mu = 2\%$.

$C(t, \tau) = \phi(\tau)(1-\rho)^{-\gamma(t-\tau)}$ $\phi(\tau) = A_1/\tau + C_0$ $T[I] := \Delta(I-1)^\alpha$ $\Delta = 70; \alpha = 1,0$ $\tau_1 = 28 \text{ dias}$										
t (dias)	$\mu=1,0\%$	$\mu=1,5\%$	$\mu=2,0\%$	$\mu=2,5\%$	$\mu=3,0\%$	$\mu=1,0\%$	$\mu=1,5\%$	$\mu=2,0\%$	$\mu=2,5\%$	$\mu=3,0\%$
	$\frac{\sigma_a(t)}{\sigma_a(\tau_1)}$									
28	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
35	1.32	1.30	1.29	1.27	1.26	0.97	0.95	0.94	0.93	0.92
42	1.58	1.54	1.51	1.49	1.46	0.94	0.92	0.90	0.88	0.86
49	1.78	1.73	1.69	1.65	1.62	0.92	0.89	0.86	0.84	0.81
56	1.95	1.88	1.83	1.78	1.73	0.90	0.87	0.83	0.80	0.78
63	2.08	2.01	1.94	1.88	1.82	0.89	0.85	0.81	0.78	0.75
70	2.19	2.10	2.02	1.95	1.89	0.88	0.83	0.79	0.76	0.73
77	2.28	2.18	2.09	2.01	1.95	0.87	0.82	0.78	0.75	0.71
84	2.35	2.24	2.14	2.06	1.99	0.86	0.81	0.77	0.73	0.70
91	2.41	2.29	2.18	2.10	2.01	0.86	0.81	0.76	0.72	0.69
119	2.55	2.40	2.27	2.18	2.09	0.84	0.79	0.74	0.70	0.67
147	2.61	2.45	2.32	2.21	2.11	0.84	0.78	0.74	0.70	0.66
182	2.63	2.47	2.33	2.22	2.12	0.84	0.78	0.73	0.69	0.66
238	2.65	2.48	2.34	2.22	2.12	0.83	0.78	0.73	0.69	0.66
294	2.65	2.48	2.34	2.22	2.12	0.83	0.78	0.73	0.69	0.66
364	2.65	2.48	2.34	2.22	2.13	0.83	0.78	0.73	0.69	0.66
∞	2.65	2.48	2.34	2.22	2.13	0.83	0.78	0.73	0.69	0.66

(a)

t										
28 dias	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
1,5 meses	1.65	1.62	1.60	1.56	1.54	0.93	0.91	0.88	0.86	0.84
3 meses	2.40	2.28	2.18	2.09	2.02	0.86	0.81	0.76	0.73	0.69
6 meses	2.63	2.46	2.33	2.22	2.13	0.84	0.78	0.73	0.69	0.66
1 ano	2.66	2.48	2.34	2.22	2.13	0.83	0.78	0.73	0.69	0.66
∞	2.66	2.48	2.34	2.22	2.13	0.83	0.78	0.73	0.69	0.66

(b)

Tabela 5.1 - Valores obtidos pela resolução numérica (a) e analítica (b) | 1 | do exemplo 2, com a proposta de Arutyunyan, para $\tau_1 = 28$ dias

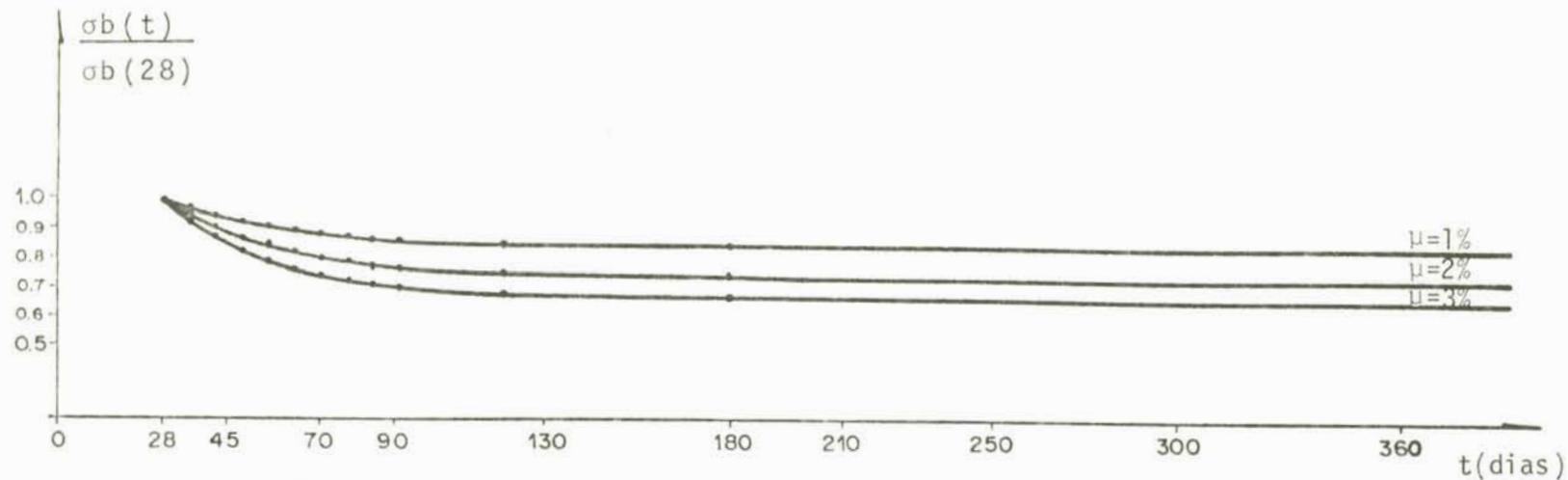


Figura 5.4 - Variações das tensões do concreto com o tempo t , obtidas numericamente pela proposta de Arutyunyan, no exemplo 2, com $\tau_1 = 28$ dias e μ dado.

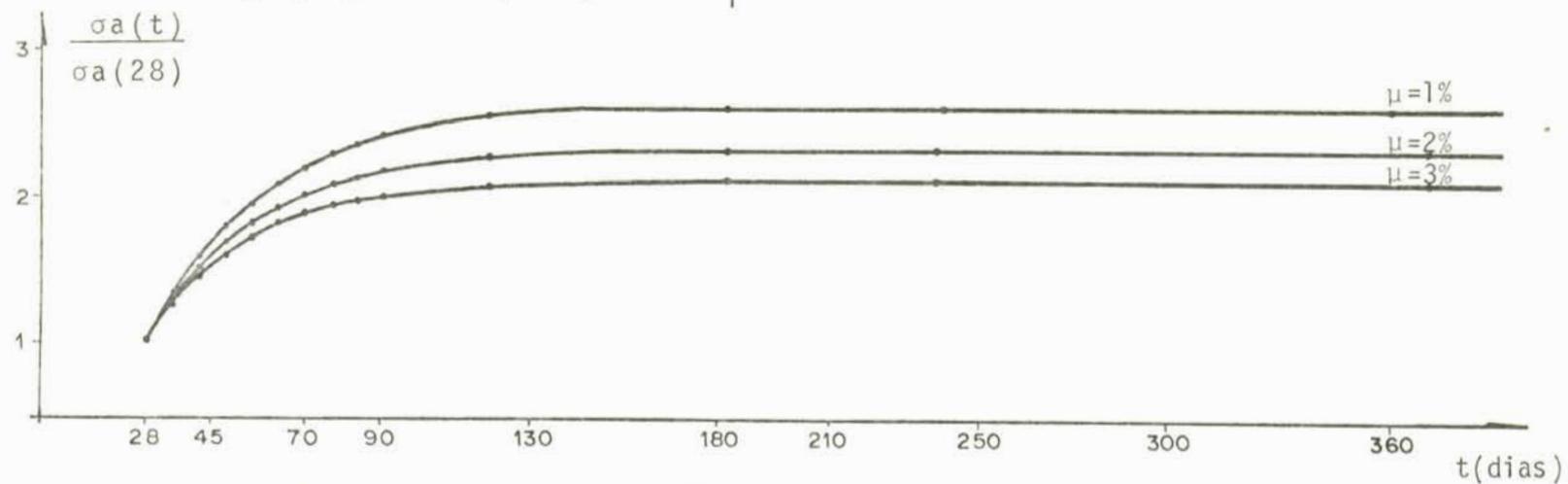


Figura 5.5 - Variações das tensões no aço com o tempo t , obtidas numericamente pela proposta de Arutyunyan, no exemplo 2, com $\tau_1 = 28$ dias e μ dado.

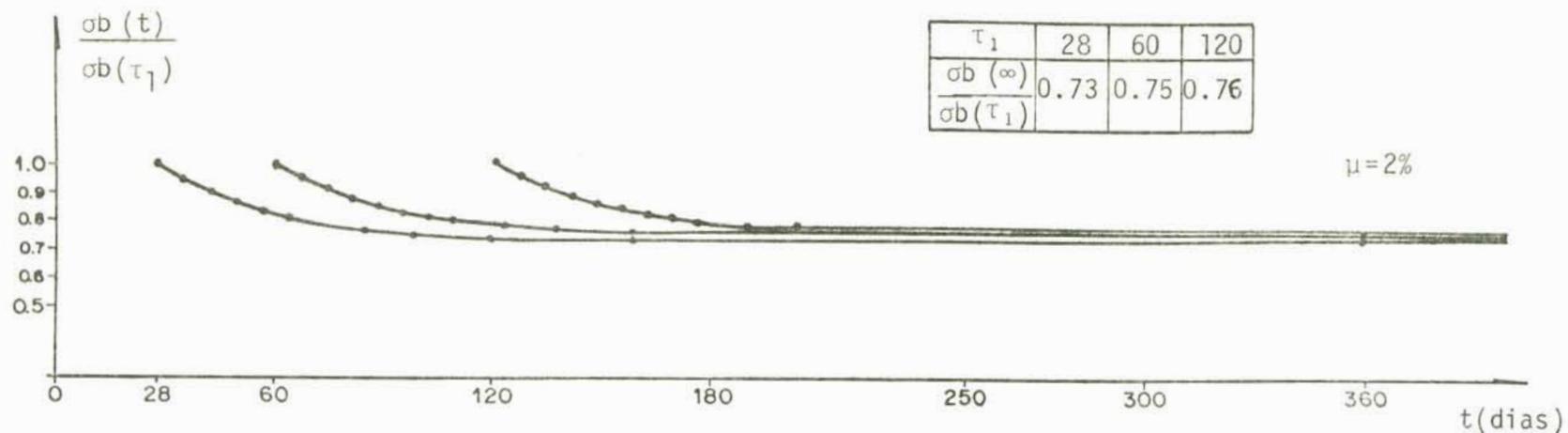


Figura 5.6 - Variação das tensões no concreto, com o tempo t , obtidas numericamente pela proposta de Arutyunyan, no exemplo 2, com $\tau_1=28, 60$ e 120 dias e $\mu=2\%$.

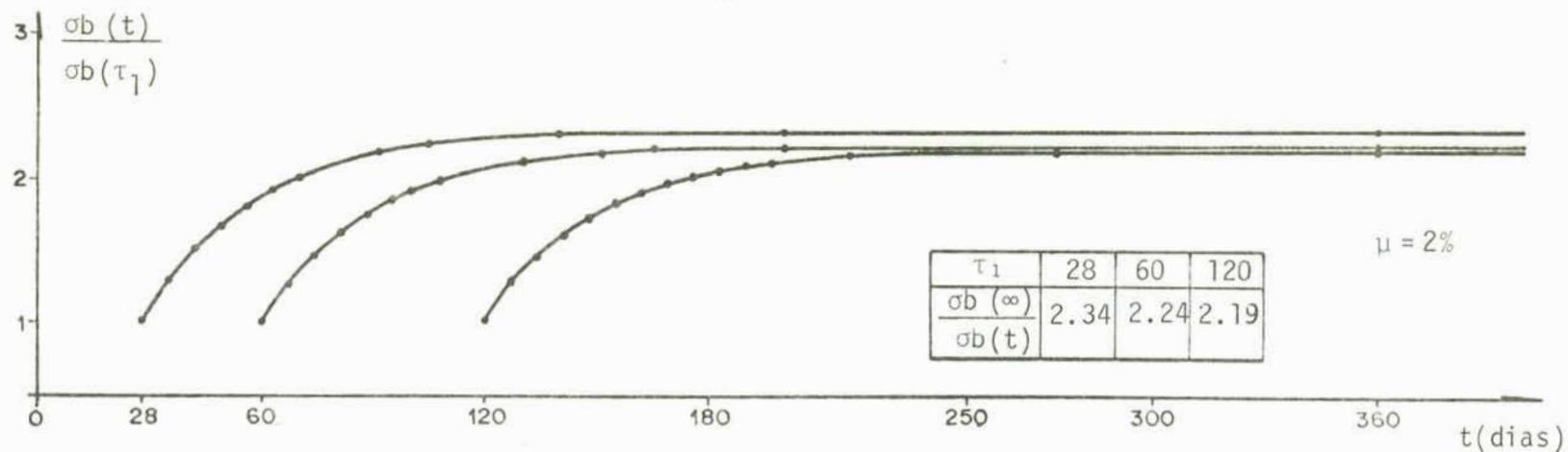


Figura 5.7 - Variação das tensões no aço, com o tempo t , obtidas numericamente pela proposta de Arutyunyan, no exemplo 2, com $\tau_1=28, 60$ e 120 dias e $\mu=2\%$.

Observa-se que, pela influência da deformação lenta, quanto maior a idade de carregamento, maior a inclinação inicial da curva, e menor o valor da atenuação das tensões no concreto e maior a do aço. Observa-se também que, a diferença nos valores limites obtidos, para as diferentes idades, é muito pequena, pela proposta de Arutyunyan.

5.2.2 - Resolução pela Proposta de Dischinger

Ao analisar o problema com a proposta de Dischinger, necessita-se, primeiramente, da resolução analítica para posteriormente, comparar com os resultados numéricos obtidos pela subrotina. Para tanto, substitui-se os valores da função de fluência, com $C(t, \tau)$ de 3.6.1.5 em 5.2.7 e 5.2.8. No caso, pode-se resolver apenas uma equação, do tipo

$$\sigma(t) = h(t) + \lambda_0 \int_{\tau_1}^t \frac{\sigma(\tau)}{|1 + \mu m(t)|} \frac{\delta}{\delta \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C_{\infty} e^{-v(\tau - \tau_0)} (1 - e^{-v(t - \tau)}) \right] d\tau \quad (5.2.2.1)$$

onde $h(t)$ representa $h_a(t)$ e $h_b(t)$ e, $\sigma(t)$, representa $\sigma_a(t)$ e $\sigma_b(t)$.

Multiplicando-se a equação 5.2.2.1 por $[1 + \mu m(t)]$ e diferenciando o resultado com relação a t chega-se a:

$$\begin{aligned} [1 + \mu m(t)] \dot{\sigma}(t) + [\mu v \cdot E_a C_{\infty} e^{-(t - \tau_1)}] \sigma(t) = \\ [1 + \mu m(t)] \dot{h}(t) + \mu \dot{m}(t) h(t) \end{aligned} \quad (5.2.2.2)$$

que é a equação diferencial correspondente ao problema proposto, com consideração de fluência e módulo de elasticidade variável.

Nota-se de 5.2.7 e 5.2.8 que as seguintes

condições iniciais ocorrem para $\sigma_a(t)$ e $\sigma_b(t)$

$$\sigma_a(\tau_1) = \frac{m(\tau_1) \cdot N}{F_b [1 + u m(t)]} \quad (5.2.2.3)$$

$$\sigma_b(\tau_1) = \frac{N}{F_b [1 + u m(t)]}$$

Considerando-se o módulo de elasticidade do concreto $E(\tau)$ constante, igual a E_0 , resolvendo-se a equação diferencial 5.2.2.2 com as correspondentes $h_a(t)$ e $h_b(t)$ e com as condições iniciais 5.2.2.3, obtêm-se, para as tensões no aço e no concreto, as expressões:

$$\sigma_a(t) = \frac{N}{uF_b} \left[1 - \frac{1}{[1 + \mu m]} e^{-\frac{u E_a C_\infty}{[1 + \mu m]} [\bar{e}^{\nu(\tau_1 - \tau_0)} - \bar{e}^{\nu(t - \tau_0)}]} \right] \quad (5.2.2.4)$$

$$\sigma_b(t) = \frac{N}{F_b [1 + \mu m]} e^{-u \frac{E_a C_\infty}{[1 + \mu m]} [\bar{e}^{\nu(\tau_1 - \tau_0)} - \bar{e}^{\nu(t - \tau_0)}]} \quad (5.2.2.5)$$

onde $m = E_a/E_0$. Os resultados encontrados na solução analítica, com o auxílio das expressões 5.2.2.4 e 5.2.2.5, para $\tau_1 = 28$ dias, $C_\infty = 1,07 \times 10^{-5}$, $E_0 = 2,0 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $E_a = 2,0 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ e $\nu = 0.026$, estão apresentados na tabela 5.2. A constante ν , que afeta a taxa de variação da fluência com o tempo, foi usada de forma idêntica a sugerida por Arutyunyan, para efeito de comparação dos resultados. Bazant [3] sugere, para essa constante, valores entre 0.00274 e 0.00137, ou seja, bem menores. Acontece que, com esses valores, as curvas de fluência têm um crescimento muito lento e, como será visto, posteriormente, no capítulo 7, o valor encontrado no ensaio é maior que os sugeridos.

dos por Bazant. Para o valor limite da função de fluência, C_{∞} , também foi utilizado o proposto por Arutyunyan, para $\tau_1 = 28$ dias.

Já, para a solução numérica, substituiu-se diretamente a função de fluência proposta por Dischinger, 3.6.1.6, em 5.2.7 e 5.2.8. Os resultados encontrados são apresentados na tabela 5.2.1, para uma função que determina o intervalo de tempo do tipo 4.3.1, onde $\alpha = 1$ e $\Delta = 7$. Nota-se que os valores obtidos são de muito boa aproximação, com os obtidos analiticamente.

Analisando-se as figuras 5.8 e 5.9, observa-se que as tensões iniciais no concreto, $\sigma(\tau_1)$, são rapidamente reduzidas e o aumento da taxa de armadura longitudinal leva a um atenuamento dessas tensões. Para o aço, a influência da taxa de armadura, confirmando a análise feita pela proposta de Arutyunyan, é mais importante na proporção inversa de μ . Nota-se que, pela proposta de Dischinger, houve em comparação a Arutyunyan, um maior incremento nas tensões do aço e, uma menor atenuação nas tensões do concreto.

Nas figuras 5.10 e 5.11 apresenta-se a variação das tensões para diferentes idades de carregamento, $\sigma_b(\tau_1)$, com uma taxa de armadura $\mu = 2\%$. Observa-se que, quanto maior a idade de carregamento, menor a inclinação inicial da curva, menor o valor da atenuação das tensões no concreto e maior a do aço. Com o envelhecimento, nota-se uma diferença muito grande nos valores limites das tensões. Para $\tau_1 = 120$ dias, a atenuação das tensões no concreto é muito pequena. Este aspecto vem confirmar o problema da subestimação dos efeitos da fluência para concretos envelhecidos, pela teoria de Dischinger.

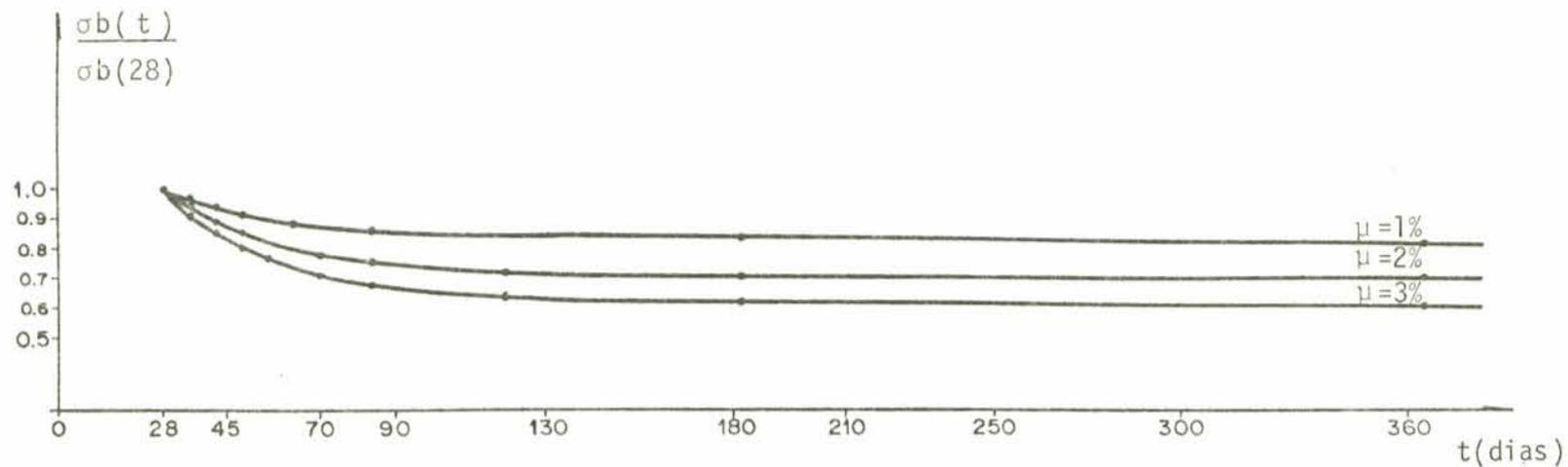


Figura 5.8 - Variações das tensões no concreto com o tempo t , obtidas numericamente pela proposta de Dischinger, para $\tau_1=28$ dias e μ dado.

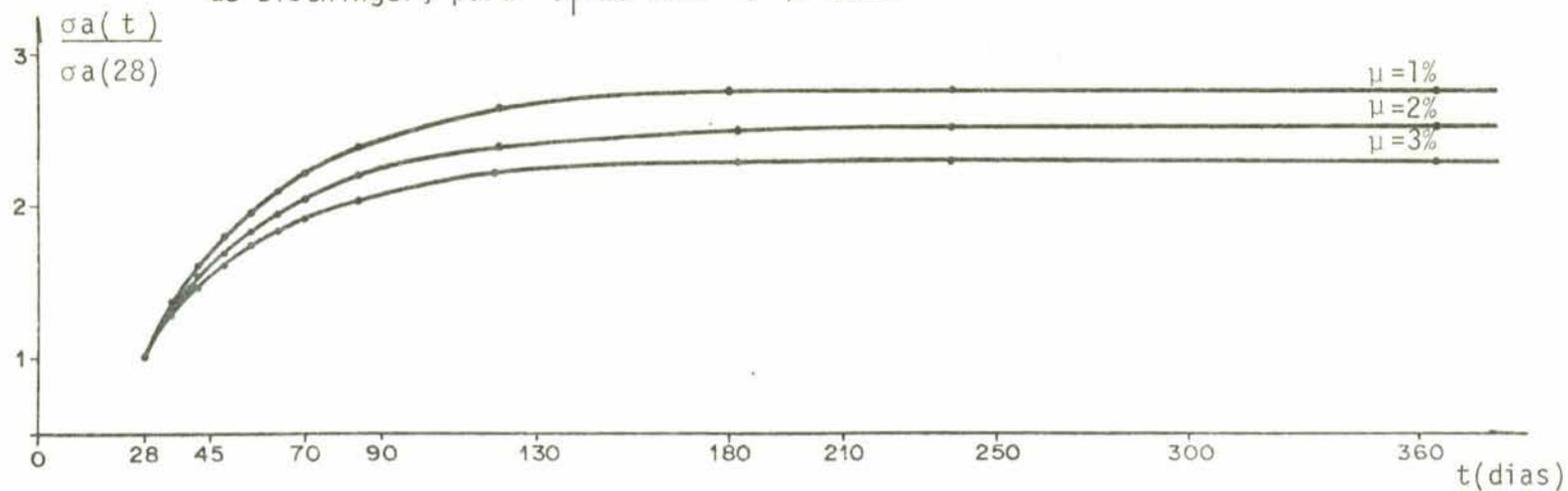


Figura 5.9 - Variações das tensões no aço com o tempo t , obtidas numericamente pela proposta de Dischinger, para $\tau_1=28$ dias e μ dado.

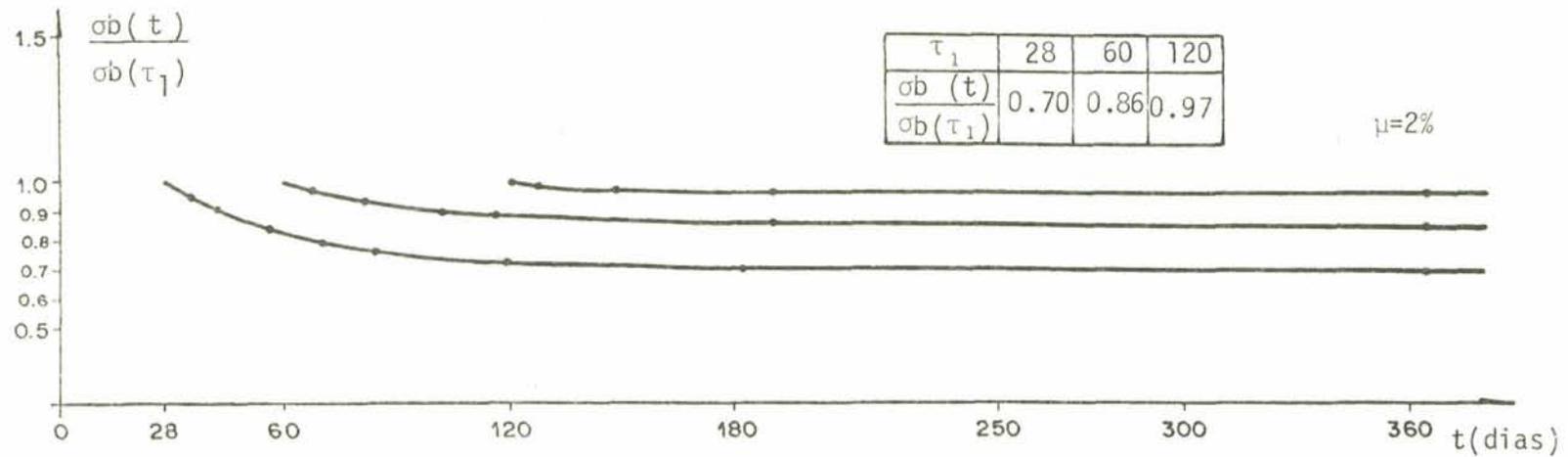


Figura 5.10 - Variações das tensões no concreto com o tempo t , obtidas numericamente pela proposta de Dischinger, para $\tau_1 = 28, 60$ e 120 dias e $\mu = 2\%$.

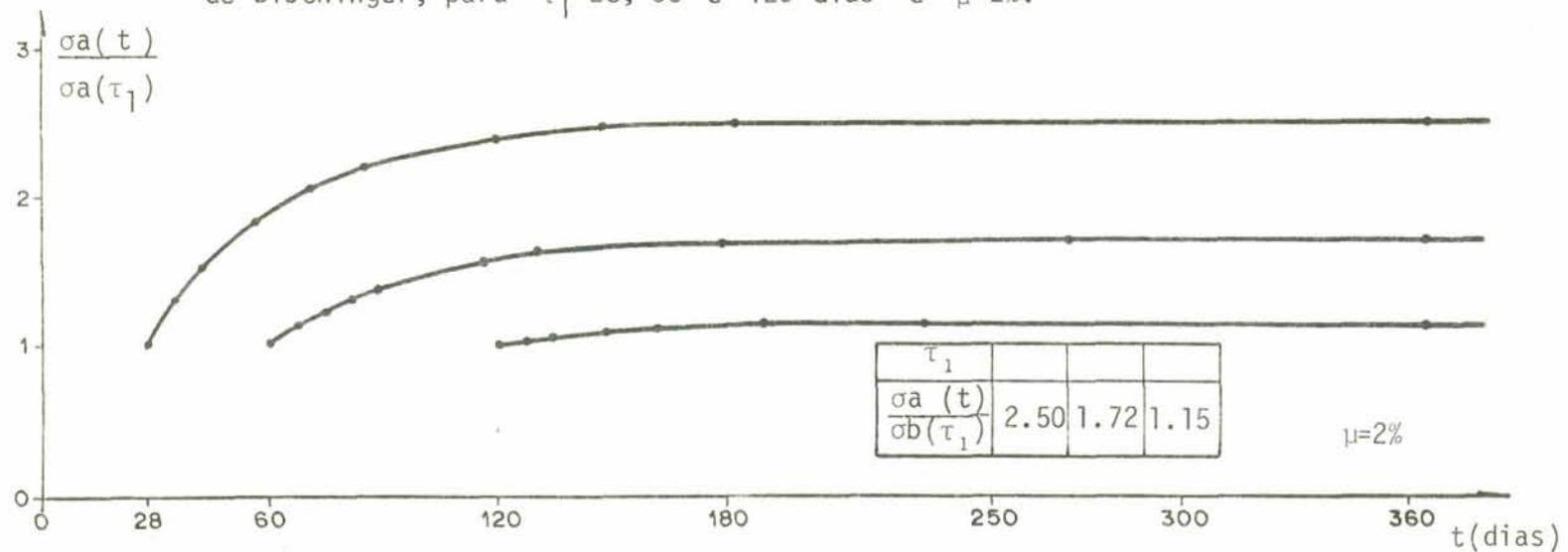


Figura 5.11 - Variações das tensões no aço com o tempo t , obtidas numericamente pela proposta de Dischinger, para $\tau_1 = 28, 60$ e 120 dias e $\mu = 2\%$.

VALORES NUMÉRICOS

(a)

$C(t, \tau) = C_{\infty} e^{-\nu(\tau_1 - \tau_0)} (1 - e^{-\nu(t - \tau_1)})$ $T I = \Delta e(I-1)^{\alpha}$ $\Delta = 7,0$ $\alpha = 1,0$										
t dias	$\sigma_a(t)/\sigma_a(28)$					$\sigma_b(t)/\sigma_b(28)$				
	$\mu=1,0\%$	$\mu=1,5\%$	$\mu=2,0\%$	$\mu=2,5\%$	$\mu=3,0\%$	$\mu=1,0\%$	$\mu=1,5\%$	$\mu=2,0\%$	$\mu=2,5\%$	$\mu=3,0\%$
28	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
35	1.32	1.30	1.29	1.28	1.26	0.97	0.95	0.94	0.93	0.92
42	1.58	1.55	1.52	1.49	1.47	0.94	0.92	0.90	0.88	0.86
49	1.79	1.74	1.70	1.66	1.63	0.92	0.89	0.86	0.83	0.81
56	1.96	1.90	1.84	1.80	1.75	0.90	0.86	0.83	0.80	0.77
63	2.10	2.03	1.96	1.91	1.85	0.89	0.85	0.81	0.77	0.74
70	2.22	2.13	2.06	1.99	1.94	0.88	0.83	0.79	0.75	0.72
77	2.31	2.22	2.14	2.06	2.00	0.87	0.82	0.77	0.73	0.70
84	2.39	2.29	2.20	2.12	2.05	0.86	0.81	0.76	0.72	0.68
91	2.45	2.35	2.25	2.17	2.10	0.85	0.80	0.75	0.71	0.67
119	2.62	2.49	2.38	2.29	2.21	0.84	0.78	0.72	0.68	0.64
147	2.70	2.56	2.45	2.34	2.26	0.83	0.76	0.71	0.66	0.62
182	2.74	2.60	2.48	2.38	2.28	0.83	0.76	0.70	0.66	0.61
238	2.76	2.62	2.50	2.39	2.30	0.82	0.76	0.70	0.65	0.61
294	2.77	2.63	2.50	2.39	2.30	0.82	0.76	0.70	0.65	0.61
364	2.77	2.63	2.50	2.40	2.30	0.82	0.76	0.70	0.65	0.61
α	2.77	2.63	2.50	2.40	2.30	0.82	0.76	0.70	0.65	0.61

VALORES ANALÍTICOS

(b)

28	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
42	1.58	1.55	1.52	1.49	1.47	0.94	0.92	0.90	0.88	0.86
91	2.45	2.34	2.25	2.17	2.10	0.85	0.80	0.75	0.71	0.67
182	2.74	2.60	2.48	2.37	2.28	0.83	0.76	0.70	0.66	0.62
364	2.77	2.63	2.50	2.40	2.30	0.82	0.76	0.70	0.65	0.61
α	2.77	2.63	2.50	2.40	2.30	0.82	0.76	0.70	0.65	0.61

Tabela 5.2 - Valores obtidos pela resolução numérica (a) e analítica (b) do exemplo 2, com a proposta de Dischinger, para $\tau_1 = 28$ dias.

$$C(t, \tau) = \phi(\tau) (1 - e^{-\gamma(t-\tau)}) \quad \tau[I] := \Delta(I-1)^\alpha \quad \Delta=7,0 \quad \alpha=1,0$$

$$\phi(\tau) = A_1/\tau + C_0 \quad \tau_1 = 28 \text{ dias}$$

t (dias)	$\mu=1,0\%$	$\mu=1,5\%$	$\mu=2,0\%$	$\mu=2,5\%$	$\mu=3,0\%$	$\mu=1,0\%$	$\mu=1,5\%$	$\mu=2,0\%$	$\mu=2,5\%$	$\mu=3,0\%$
	$\frac{\sigma_a(t)}{\sigma_a(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_a(t)}{\sigma_a(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_a(t)}{\sigma_a(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_a(t)}{\sigma_a(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_a(t)}{\sigma_a(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_b(t)}{\sigma_b(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_b(t)}{\sigma_b(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_b(t)}{\sigma_b(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_b(t)}{\sigma_b(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_b(t)}{\sigma_b(\tau_1)}$
28	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
35	1.32	1.30	1.29	1.27	1.26	0.97	0.95	0.94	0.93	0.97
42	1.58	1.54	1.51	1.49	1.46	0.94	0.92	0.90	0.88	0.86
49	1.78	1.73	1.69	1.65	1.62	0.92	0.89	0.86	0.84	0.81
56	1.95	1.88	1.83	1.78	1.73	0.90	0.87	0.83	0.80	0.78
63	2.08	2.01	1.94	1.88	1.82	0.89	0.85	0.81	0.78	0.75
70	2.19	2.10	2.02	1.95	1.89	0.88	0.83	0.79	0.76	0.73
77	2.28	2.18	2.09	2.01	1.95	0.87	0.82	0.78	0.75	0.71
84	2.35	2.24	2.14	2.06	1.99	0.86	0.81	0.77	0.73	0.70
91	2.41	2.29	2.18	2.10	2.01	0.86	0.81	0.76	0.72	0.69
119	2.55	2.40	2.27	2.18	2.09	0.84	0.79	0.74	0.70	0.67
147	2.61	2.45	2.32	2.21	2.11	0.84	0.78	0.74	0.70	0.66
182	2.63	2.47	2.33	2.22	2.12	0.84	0.78	0.73	0.69	0.66
238	2.65	2.48	2.34	2.22	2.12	0.83	0.78	0.73	0.69	0.66
294	2.65	2.48	2.34	2.22	2.12	0.83	0.78	0.73	0.69	0.66
364	2.65	2.48	2.34	2.22	2.13	0.83	0.78	0.73	0.69	0.66
α	2.65	2.48	2.34	2.22	2.13	0.83	6.78	6.73	0.69	0.66

(b)

t										
28 dias	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
1,5 meses	1.65	1.63	1.60	1.56	1.54	0.93	0.91	0.88	0.86	0.84
3 meses	2.40	2.28	2.18	2.09	2.02	0.86	0.81	0.76	0.73	0.69
6 meses	2.63	2.46	2.33	2.22	2.13	0.84	0.78	0.73	0.69	0.66
1 ano	2.66	2.48	2.34	2.22	2.13	0.83	0.78	0.73	0.69	0.66
α	2.66	2.48	2.34	2.22	2.13	0.83	0.78	0.73	0.69	0.66

(a)

Tabela 5.1 - Valores obtidos pela resolução numérica (a) e analítica (b) [1], do exemplo 2, com a proposta de Arutyunyan, para $\tau_1=28$ dias.

5.3 - Exemplo 3 - Tubo Submetido à Pressão Interna

Considera-se, agora, um tubo de concreto armado, no qual atua uma pressão radial uniforme P_1 aplicada sobre a superfície interna, de raio a . Considera-se a armadura como uma camada, de espessura δ , justaposta à superfície externa do concreto. A área de aço na direção longitudinal do concreto armado do tubo é F_a .

Quando a camada de aço e concreto atuam juntas, forças recíprocas surgem entre elas, na forma de forças radiais, $q(t)$, as quais agem em um comprimento unitário do círculo com $r=b$. No caso, por simetria, as tensões tangenciais, em qualquer ponto da superfície de contato do aço e do concreto, serão sempre nulas. Diagramas teóricos das tensões atuantes são mostradas na figura 5.13.

Considera-se o problema de Lamé para cada camada, separadamente, sob a influência de P_1 e $q(t)$. As tensões $\sigma_{b\phi}(t)$ e $\sigma_{br}(t)$ e os deslocamentos radiais $v_b(t)$, na camada de concreto, são expressas em função de P_1 e $q(t)$, pelas seguintes fórmulas [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_{b\phi}(t) &= \frac{P_1 \cdot a - q(t) \cdot b}{r \cdot \ln(b/a)} \\ \sigma_{br}(t) &= -\frac{P_1 \cdot a}{r} + \frac{a \cdot P_1 - q(t) \cdot b}{r \cdot \ln(b/a)} \cdot \ln r/a \\ v_b(t) &= \frac{1 - \nu_1^2}{E(t)} \cdot \frac{a \cdot P_1 - q(t) \cdot b}{\ln \frac{b}{a}}\end{aligned}\quad (5.3.1)$$

e, na camada correspondente à armadura,

$$\sigma_{a\phi}(t) = \frac{b \cdot q(t)}{\delta}; \quad v_a(t) = \frac{q(t) \cdot c^2}{E_a \cdot F_a}\quad (5.3.2)$$

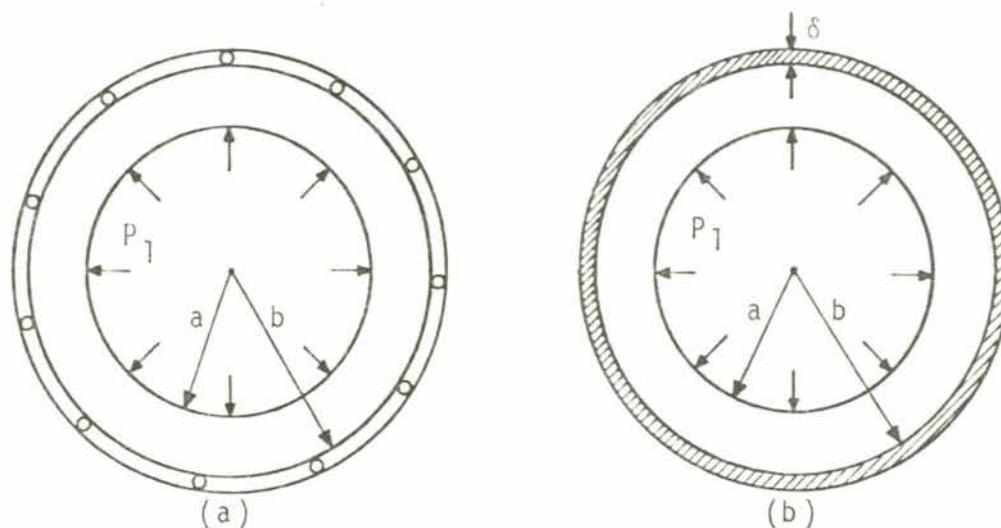


Figura 5.12 - Tubo de concreto armado submetido a uma pressão interna constante (a) no qual a armadura é representada por um tubo de aço de espessura δ -(b).

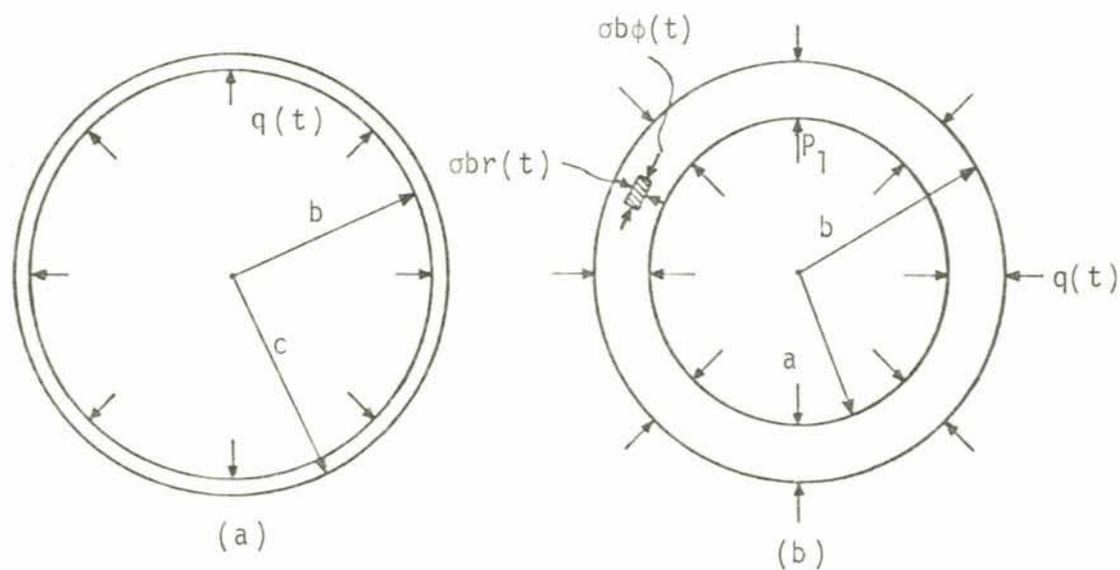


Figura 5.13 - Diagramas teóricos dos elementos de aço (a) e concreto (b) do tubo.

onde E_a é o módulo de elasticidade da armadura, δ a espessura reduzida da armadura, ν_1 o coeficiente de Poisson do concreto. Para determinar-se a deformação radial no concreto armado, quando ocorre fluência, utiliza-se uma expressão do tipo

$$\epsilon_{b\phi}(t) = \frac{\sigma_{b\phi}(t) - \nu_1 \sigma_{br}(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t [\sigma_{b\phi}(\tau) - \nu_1 \sigma_{br}(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} D(t, \tau) d\tau \quad (5.3.3)$$

Por outro lado, a condição de compatibilidade de deformação é expressa para $r=b$ por:

$$\epsilon_{b\phi}(t) = \epsilon_{a\phi}(t) \quad (5.3.4)$$

para qualquer $t > \tau_1$. A função de fluência é expressa, genericamente, conforme 3.6.1.4 ou 3.7.1.10 por

$$D(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \quad (5.3.5)$$

Utilizando-se a condição de compatibilidade 5.3.4, o conjunto de equações 5.3.1 e 5.3.2, obtêm-se de 5.3.3, após algumas transformações:

$$q(t) = \frac{F_a \cdot a \cdot P_1 [m(\tau_1) + E_a C(t, \tau_1)]}{L_1(t)} + E_a F_a [1 - \nu_1 \ln \beta] \int_{\tau_1}^t q(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] \frac{d\tau}{L_1(t)} \quad (5.3.6)$$

onde

$$L_1(t) = C^2 \ln \beta + F_a \cdot b \cdot m(t) [1 - \gamma_1 \ln \beta]$$

$$\beta = b/a$$

$$C = b + \delta/2 \quad (5.3.7)$$

$$m(t) = \frac{E_a}{E(t)}$$

Desta maneira, o problema da determinação de $q(t)$ no tubo de concreto armado, sobre a influência de uma pressão interna constante, P_1 , e as considerações de fluência, requerem a solução da equação integral 5.3.6, que é do tipo 4.2.3, onde,

$$K(t, \tau) = \frac{1}{L_1(t)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right]$$

$$h(t) = F_a \cdot a \cdot P_1 \left[m(\tau_1) + E_a C(t, \tau_1) \right] \quad (5.3.8)$$

$$\lambda_0 = E_a F_a b(1 - \gamma_1 \ln \beta)$$

que, pode ser resolvido diretamente pela subrotina INTEGRA. Após as forças $q(t)$ serem encontradas, as tensões e deslocamentos, no tubo de concreto armado, são determinadas por 5.3.1 e 5.3.2.

5.3.1 - Resolução pela Proposta de Arutyunyan

Utilizando-se a função de fluência proposta por Arutyunyan, 3.7.1.8, na equação integral 5.3.6, e considerando-se as mesmas características propostas no exemplo 2, com o módulo de elasticidade do concreto constante e igual a E_0 , e uma função para determinação do tamanho do intervalo 4.3.1 pode-se obter $q(t)$. Neste caso,

as forças $q(t)$ variarão em função de quatro parâmetros: o tempo t ; a idade de carregamento τ_1 ; o coeficiente $\beta = b/a$, que, na realidade, dá uma idéia da taxa de armadura (considerou-se $C=b$); e a razão δ/b .

Como primeira análise, fixou-se a idade τ_1 em 28 dias, a razão δ/b em 0.002 e, fez-se variar o tempo t , para alguns valores de b/a . As tensões obtidas estão apresentadas na tabela 5.3, divididas pelo valor inicial da tensão, $\sigma_{b\phi}(\tau_1)$, utilizando-se uma função que determina o tamanho do intervalo do tipo 4.3.1, com $\Delta = 3,0$ e $\alpha = 1,0$.

Ao lado dos valores obtidos numericamente, na tabela 5.3, estão colocados alguns obtidos de forma analítica, por Arutyunyan, resolvendo a equação 5.3.6, com o auxílio de uma função gama incompleta. Novamente, a aproximação obtida é muito boa.

Na figura 5.14 está plotado a razão entre a tensão no concreto, $\sigma_{b\phi}(t)$, e a tensão inicial, $\sigma_{b\phi}(\tau_1)$, pelo tempo após a carga t , para $\tau_1 = 28$ dias e $\delta/b = 0.002$. Nota-se que, as tensões no concreto são mais atenuadas quanto maior a taxa de armadura. Logo, a deformação lenta tem uma grande influência em tubos de parede-fina, para uma dada razão δ/b .

Na tabela 5.4 apresentam-se as tensões no aço e no concreto, obtidas numericamente para $\delta/b = 0.002$, e para um tempo t infinito, variando a idade τ_1 de carregamento e o valor de β . No caso, foi utilizada uma função para determinação do tamanho dos intervalos do tipo 4.3.1, com intervalos crescentes, onde $\Delta = 1$ e $\alpha = 1,2$. Também são apresentados os valores obtidos analiticamente por Arutyunyan

$C(t, \tau) = \phi(\tau) 1 - e^{-(t-\tau)} $ $T I := \Delta(I-1)^\alpha$ $\Delta = 3$ $\alpha = 1,0$ $\phi(\tau) = A_1/\tau + C_0$ $\delta/b = 0.002$ $\tau_1 = 28$ dias								
t (dias)	$\beta = 1.1$ $\mu = 2.2\%$		$\beta = 1.2$ $\mu = 1.2\%$		$\beta = 1.3$ $\mu = 0.87\%$		$\beta = 1.5$ $\mu = 0.6\%$	
	$\sigma_{b_\phi}(t)/\sigma_{b_\phi}(28)$		$\sigma_{b_\phi}(t)/\sigma_{b_\phi}(28)$		$\sigma_{b_\phi}(t)/\sigma_{b_\phi}(28)$		$\sigma_{b_\phi}(t)/\sigma_{b_\phi}(28)$	
	Numérico	Anali-tico	Numérico	Anali-tico	Numérico	Anali-tico	Numérico	Anali-tico
28	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
31	0.97	-	0.98	-	0.99	-	0.99	-
34	0.95	-	0.97	-	0.98	-	0.99	-
37	0.92	-	0.96	-	0.97	-	0.98	-
40	0.90	-	0.94	-	0.96	-	0.97	-
43	0.89	-	0.93	-	0.95	-	0.97	-
46	0.87	-	0.92	-	0.94	-	0.96	-
49	0.86	-	0.91	-	0.94	-	0.96	-
61	0.81	-	0.89	-	0.92	-	0.94	-
70	0.79	-	0.87	-	0.90	-	0.94	-
90 *	0.75	0.76	0.85	0.85	0.89	0.89	0.92	0.92
124	0.73	-	0.83	-	0.87	-	0.91	-
180 *	0.73	0.73	0.83	0.83	0.87	0.87	0.91	0.91
360	0.73	0.73	0.83	0.83	0.87	0.87	0.91	0.91
α	0.73	0.73	0.83	0.83	0.87	0.87	0.91	0.91

* O valor aos 90 dias e 180 dias foram calculados com $\Delta=1$.

Tabela 5.3 - Valores obtidos pela proposta de Arutyunyan, por resolução numérica e analítica | 1 |, do exemplo 3, com $\delta/b = 0.002$ e $\tau_1 = 28$ dias.

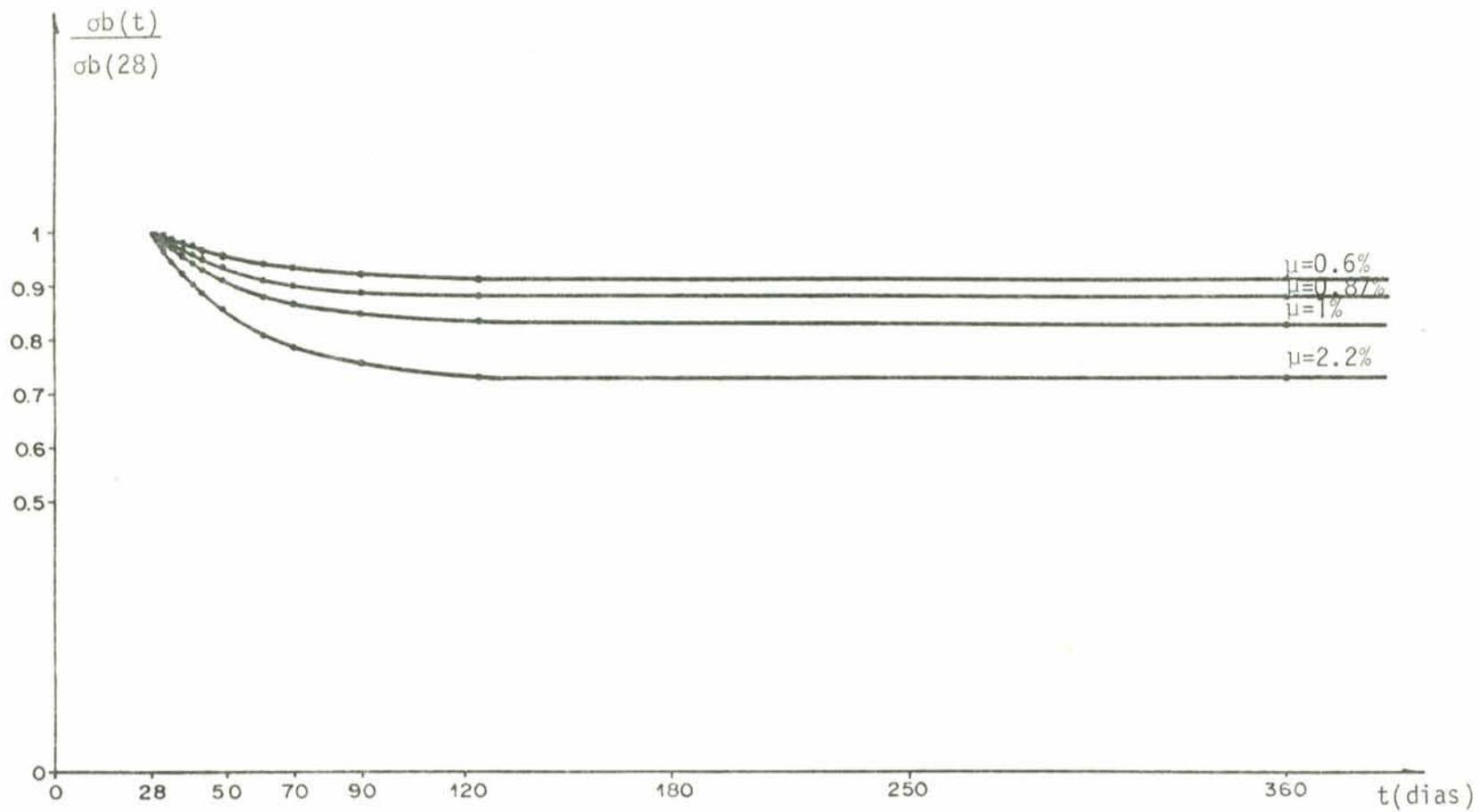


Figura 5.14 - Variação nas tensões do concreto com o tempo t , obtidas numericamente pela proposta de Arutyunyan, para $\tau_1 = 28$ dias e μ dado.

$$C(t, \tau) = \phi(\tau)(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}) \quad T|I| := \Delta(I-1)^\alpha \quad \Delta = 1 \quad \alpha = 1,2$$

$$\phi(\tau) = A_1/\tau + C_0 \quad t = \infty \quad \delta/b = 0.002$$

τ_1 (dias)	$\beta = 1.1$ $\mu = 2.2\%$		$\beta = 1.2$ $\mu = 1.2\%$		$\beta = 1.3$ $\mu = 0.87\%$		$\beta = 1.5$ $\mu = 0.60$	
	$\frac{\sigma_{b_\phi}(\infty)}{\sigma_{b_\phi}(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_{a_\phi}(\infty)}{\sigma_{a_\phi}(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_{b_\phi}(\infty)}{\sigma_{b_\phi}(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_{a_\phi}(\infty)}{\sigma_{a_\phi}(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_{b_\phi}(\infty)}{\sigma_{b_\phi}(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_{a_\phi}(\infty)}{\sigma_{a_\phi}(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_{b_\phi}(\infty)}{\sigma_{b_\phi}(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_{a_\phi}(\infty)}{\sigma_{a_\phi}(\tau_1)}$
	3	0.39	3.87	0.60	4.65	0.69	5.00	0.79
7	0.60	2.90	0.74	3.36	0.80	3.57	0.86	3.77
14	0.68	2.51	0.79	2.87	0.84	3.03	0.89	3.18
28	0.72	2.32	0.82	2.63	0.87	2.76	0.91	2.89

(a)

$$C(t, \tau) = \phi(\tau)(1 - e^{-\gamma(t-\tau)})$$

$$\delta/b = 0.002$$

τ_1 (dias)	$\beta = 1.1$ $\mu = 2.2\%$		$\beta = 1.2$ $\mu = 1.2\%$		$\beta = 1.3$ $\mu = 0.87\%$		$\beta = 1.5$ $\mu = 0.6\%$	
	$\frac{\sigma_{b_\phi}(\infty)}{\sigma_{b_\phi}(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_{a_\phi}(\infty)}{\sigma_{a_\phi}(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_{b_\phi}(\infty)}{\sigma_{b_\phi}(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_{a_\phi}(\infty)}{\sigma_{a_\phi}(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_{b_\phi}(\infty)}{\sigma_{b_\phi}(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_{a_\phi}(\infty)}{\sigma_{a_\phi}(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_{b_\phi}(\infty)}{\sigma_{b_\phi}(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_{a_\phi}(\infty)}{\sigma_{a_\phi}(\tau_1)}$
	3	0.39	3.89	0.60	4.65	0.71	4.83	0.79
7	0.61	2.86	0.74	3.83	0.81	3.46	0.87	3.73
14	0.69	2.48	0.80	2.84	0.85	2.95	0.89	3.14
28	0.73	2.29	0.83	2.59	0.87	2.73	0.91	2.89

(b)

Tabela 5.4 - Valores obtidos pela proposta de Arutyunyan por resolução numérica (a) e analítica (b) 1.1, do exemplo 3, com $\delta/b = 0.002$ e $t = \infty$.

Observa-se que, para uma mesma taxa de armadura, as tensões no concreto são mais atenuadas para concretos de pouca idade. As tensões $\sigma_a \phi(t)$, do aço, para uma mesma taxa de armadura, tem um maior crescimento para concretos carregados com pouca idade. Já para uma mesma idade de carregamento, estas tensões tem um crescimento maior para baixas taxas de armadura.

5.3.2 - Resolução pela Proposta de Dischinger

Novamente, necessita-se primeiramente, da resolução analítica para, posteriormente, comparar-se com os resultados numéricos. Para tanto, substituiu-se os valores da função de fluência $C(t, \tau)$, de 3.6.1.5, em 5.3.6, obtendo-se:

$$q(t) = f_b(t) + \lambda_0 \int_{\tau_1}^t \frac{q(\tau)}{\alpha_1(t)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[C_{\infty} e^{-v(\tau-\tau_0)} (1 - e^{-v(t-\tau)}) \right] d\tau \quad (5.3.2.1)$$

onde, $f_b(t)$ e λ_0 , são definidos como em 5.3.8.

Diferenciando esta equação com relação a t , para o caso em que o módulo de elasticidade do concreto é constante e igual a E_0 , obtêm-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) + \frac{v \cdot C_{\infty} \cdot F_a \cdot F_a \cdot b(1 - \gamma_1 \ln \beta) e^{-v(t-\tau_0)}}{L_1} q(t) &= \\ &= \frac{v \cdot C_{\infty} \cdot E_a \cdot F_a \cdot a \cdot P_1}{L_1} e^{-v(t-\tau_0)} \end{aligned} \quad (5.3.2.2)$$

onde

$$L_1 = C^2 \ln \beta + F_a \cdot b \cdot m \left[1 - v_1 \ln \beta \right] \quad (5.3.2.3)$$

e

$$m = E_a/E_0 \quad (5.3.2.3)$$

A expressão 5.3.2.2 é a equação diferencial linear, correspondente ao problema proposto, com consideração de fluência e módulo de elasticidade do concreto constante.

De 5.3.6 retira-se a seguinte condição inicial:

$$q(\tau_1) = \frac{F_a \cdot a \cdot P_1 \cdot m}{L_1} \quad (5.3.2.4)$$

Resolvendo a equação diferencial correspondente com essa condição inicial, obtêm-se, para $q(t)$:

$$q(t) = \frac{a P_1}{b(1 - \gamma_1 \ln \beta)} \left\{ 1 + \left[\frac{F_a \cdot m \cdot b (1 - \gamma_1 \ln \beta) - L_1}{\ln L_1} \right] \cdot \right. \\ \left. - \frac{C_\infty E_a F_a b (1 - \gamma_1 \ln \beta)}{L_1} \left[e^{-\nu(\tau_1 - \tau_0)} - e^{-\nu(t - \tau_0)} \right] \right\} \cdot e \quad (5.3.2.5)$$

As tensões no concreto, obtidas na solução analítica, com o auxílio da expressão 5.3.2.5, para $\tau_1 = 28$ dias, a razão $\delta/b=0.002$ e, variando o tempo t para alguns valores b/a , estão apresentados na tabela 5.5, divididas pelo valor inicial da tensão $\sigma_{b\phi}(\tau_1)$. As constantes da teoria, dependentes do concreto utilizadas, foram as mesmas do exemplo anterior.

Ao lado dos valores obtidos analiticamente estão colocados, na tabela 5.5., os obtidos pela resolução numérica do problema, com uma função que determina o tamanho do intervalo de tempo do tipo 4.3.1, com $\Delta = 3,0$ e $\alpha_1 = 1,0$. A aproximação obtida é bastante boa. Como era de se esperar, as tensões no concreto são mais atenuadas

$C(t, \tau) = C_{\infty} e^{-\nu(\tau_1 - \tau_0)} (1 - e^{-\nu(t - \tau_1)}) \quad T[I] := \Delta(I-1)^{\alpha}$ $\Delta = 3 \quad \alpha = 1,0 \quad \delta/b = 0.002 \quad \tau_1 = 28$								
t (dias)	$\beta = 1.1$ $\mu = 2.2\%$		$\beta = 1.2$ $\mu = 1.2\%$		$\beta = 1.3$ $\mu = 0.87\%$		$\beta = 1.5$ $\mu = 0.6\%$	
	$\sigma_{b\phi}(t)/\sigma_{b\phi}(28)$		$\sigma_{b\phi}(t)/\sigma_{b\phi}(28)$		$\sigma_{b\phi}(t)/\sigma_{b\phi}(28)$		$\sigma_{b\phi}(t)/\sigma_{b\phi}(28)$	
	Numérico	Anali- tico	Numérico	Anali- tico	Numérico	Anali- tico	Numérico	Anali- tico
28	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
31	0.97	0.97	0.98	0.98	0.99	0.99	0.99	0.99
34	0.94	0.94	0.96	0.96	0.97	0.97	0.98	0.98
37	0.91	0.91	0.95	0.95	0.96	0.96	0.97	0.97
40	0.88	0.88	0.93	0.93	0.95	0.95	0.97	0.97
43	0.86	0.86	0.92	0.92	0.94	0.94	0.96	0.96
46	0.84	0.84	0.91	0.91	0.93	0.93	0.95	0.95
49	0.82	0.82	0.90	0.90	0.92	0.92	0.95	0.95
61	0.77	0.77	0.86	0.86	0.90	0.90	0.93	0.93
70	0.74	0.74	0.84	0.84	0.88	0.88	0.92	0.92
91	0.69	0.69	0.81	0.81	0.86	0.86	0.90	0.90
124	0.66	0.66	0.79	0.79	0.84	0.84	0.89	0.89
181	0.64	0.64	0.77	0.77	0.83	0.83	0.88	0.88
360	0.63	0.63	0.77	0.77	0.83	0.83	0.88	0.88
α	0.63	0.63	0.77	0.77	0.83	0.83	0.88	0.88

Tabela 5.5 - Valores obtidos pela proposta de Dischinger, por resolução numérica e analítica, do exemplo 3, com $\delta/b = 0.002$ e $\tau_1 = 28$ dias.

quanto maior a taxa de armadura. Na tabela 5.6 estão apresentadas as tensões tangenciais no aço e no concreto, para $\delta/b=0.002$, para um tempo t infinito, variando a idade τ_1 de carregamento e o valor de β , obtidas numericamente, com a mesma função para determinação do tamanho do intervalo.

As conclusões obtidas, genericamente, são as mesmas da proposta de Arutyunyan mas, com o envelhecimento, existe uma menor influência dos efeitos da fluência verificados pela teoria de Dischinger.

$C(t, \tau) = C_{\infty} e^{-\nu(\tau_1 - \tau_0)} (1 - e^{-\nu(t - \tau_1)})$		$T I = \Delta(I-1)^2$		$\Delta = 3,0$		$\alpha = 1,0$		
		$t = \infty$		$\delta/b = 0.002$				
τ_1 (dias)	$\beta = 1,1$ $\mu = 2,2\%$	$\beta = 1,2$ $\mu = 1,2\%$	$\beta = 1,3$ $\mu = 0,87\%$	$\beta = 1,3$ $\mu = 0,87\%$	$\beta = 1,3$ $\mu = 0,87\%$	$\beta = 1,5$ $\mu = 0,60\%$	$\beta = 1,5$ $\mu = 0,60\%$	
	$\frac{\sigma_{b\phi}(\infty)}{\sigma_{b\phi}(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_{a\phi}(\infty)}{\sigma_{a\phi}(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_{b\phi}(\infty)}{\sigma_{b\phi}(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_{a\phi}(\infty)}{\sigma_{a\phi}(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_{b\phi}(\infty)}{\sigma_{b\phi}(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_{a\phi}(\infty)}{\sigma_{a\phi}(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_{b\phi}(\infty)}{\sigma_{b\phi}(\tau_1)}$	$\frac{\sigma_{a\phi}(\infty)}{\sigma_{a\phi}(\tau_1)}$
3	0.41	3.79	0.60	4.60	0.70	4.96	0.79	5.31
7	0.45	3.61	0.63	4.32	0.72	4.63	0.81	4.92
14	0.51	3.30	0.69	3.86	0.76	4.10	0.84	4.32
28	0.63	2.75	0.77	3.09	0.83	3,24	0.88	3.36

Tabela 5.6 - Valores obtidos pela proposta de Dischinger, por resolução numérica do exemplo 3, com $\delta/b = 0.002$ e $t = \infty$.

CAPÍTULO 6

ENSAIOS

Com a finalidade de comparar as propostas, analisadas no Capítulo 3, foram realizados ensaios de relaxação e fluência.

6.1 - Concreto e Corpos de Prova

Para os ensaios realizados foi utilizada a mistura 1:2,36:2,88, em peso, com fator água-cimento igual a 0,58 e o fator água-materiais secos de 93%. O cimento utilizado foi o Portland Pozolâmico de 320 kg/cm^2 , cujas características estão na tabela 6.1.

Finura	resíduo retido na peneira normal de 0.075 mm de abertura: 3,55%		
Pega	início: 3h45min fim: 8h35min		
Expansibilidade	a frio: 0,2 mm a quente (5 horas): 0,0 mm		
Resistência a compressão	Argamassa normal plástica obtida com $0,481 \text{ cm}^3$ de água por grama de cimento	Idade dias	Média de 6 CP (kg/cm^2)
		3	152
		7	205
		28	307

Tabela 6.1 - Características do cimento

A areia de procedência do rio Guaíba e a brita do tipo "um", de origem granítica. A granulometria da areia e brita é apresentada na tabela 6.2.

Peneiras - Aberturas Nominais		76	50	38	25	19	9.5	4.8	2.4	1.2	0.6	0.3	0.15	v	0.15	Totais	módulo de finura	ϕ max mm	massa esp. absoluta
Areia	Material retido (kg)						6.5	24.0	39.5	81.5	367.5	460.0	23.0	100.2					
	x em peso retida						1	2	4	8	37	46	2	100	1.76	2.4	2.62		
	x acumulada						1	3	7	15	52	98	100	176					
Brita	Material retido (kg)				271.0	315.5	5.0								591.5				
	x em peso retida				46	53	1								100	7.45	25	2.60	
	x acumulada				46	99	100	100	100	100	100	100	100	100	745				

Tabela 6.2 - Características da areia e brita

Os corpos de prova, utilizados no ensaio propriamente dito, eram cilíndricos, com 10 cm de diâmetro e 27cm de altura, moldados em fôrma feita com P.V.C. Foram moldados dez corpos de prova com essas características para serem utilizados da seguinte forma: dois para o primeiro ensaio de fluência; dois para o segundo ensaio de fluência; dois para o ensaio de relaxação e os outros quatro para controle. Esses corpos de controle foram utilizados na medição das deformações de retração no concreto, nas mesmas condições ambientais do ensaio. A cura dos corpos de prova se fez no ar, a temperatura ambiente, dentro da forma de P.V.C., sendo impermeabilizados na face superior com uma camada de cêra, imediatamente após a moldagem. No vigésimo dia, executou-se a desmoldagem e iniciou-se a preparação dos corpos de prova para o ensaio.

Juntamente com esses dez corpos de prova, para o ensaio, foram moldados mais dez, com 15 cm de diâmetro e 30 cm de altura, para determinação das demais características do concreto. Esses dez corpos de prova foram utiliza-

dos da seguinte forma: quatro para o ensaio de compressão simples; quatro para o ensaio de compressão diametral e dois para determinação do módulo de elasticidade. Foram curados submersos em água a temperatura ambiente, aĩ colocados um dia apõs a moldagem.

6.2 - Sistema de Aplicação e Manutenção da Carga

O põrtico de carga utilizado para os ensaios de fluência, figura 6.1, constava basicamente de três barras de aço, com diâmetro de 1,9 cm, e três placas, também de aço, com diâmetro de 20 cm. Na parte superior foi instalado o cilindro do macaco hidráulico para aplicação da carga. O cilindro foi fixado com rosca e, também, com uma porca de segurança na outra face da placa. Na extremidade do cilindro, foi colocado, sob pressão, um adaptador de aço, com a finalidade de encaixar a esfera de centralização. A esfera de centralização superior, assim como a inferior, foi fixada em uma placa de centralização colada ao corpo de prova. A centralização da carga é muito importante em um ensaio de fluência, devido às leituras das deformações. Na parte inferior do põrtico havia duas placas, a primeira com a função de aplicação da carga e, a segunda, servia apenas para o enrigecimento do põrtico. Na figura 6.1 são também apresentadas as dimensões dos elementos do põrtico de carga.

O sistema de aplicação da carga propriamente dito, nos ensaios de fluência (figura 6.2), tinha a finalidade de aplicar e manter automaticamente uma carga constante a um nível desejado. Era composto de uma bomba hidráulica intensificadora conectada a uma fonte e a um cilindro. Entre a fonte e a bomba foram instalados dispositivos de filtragem, regulagem e medição do fluido e entre a bomba e o cilindro apenas de medição. A saber:

1 - Fonte - Inicialmente utilizou-se como fonte um compres-

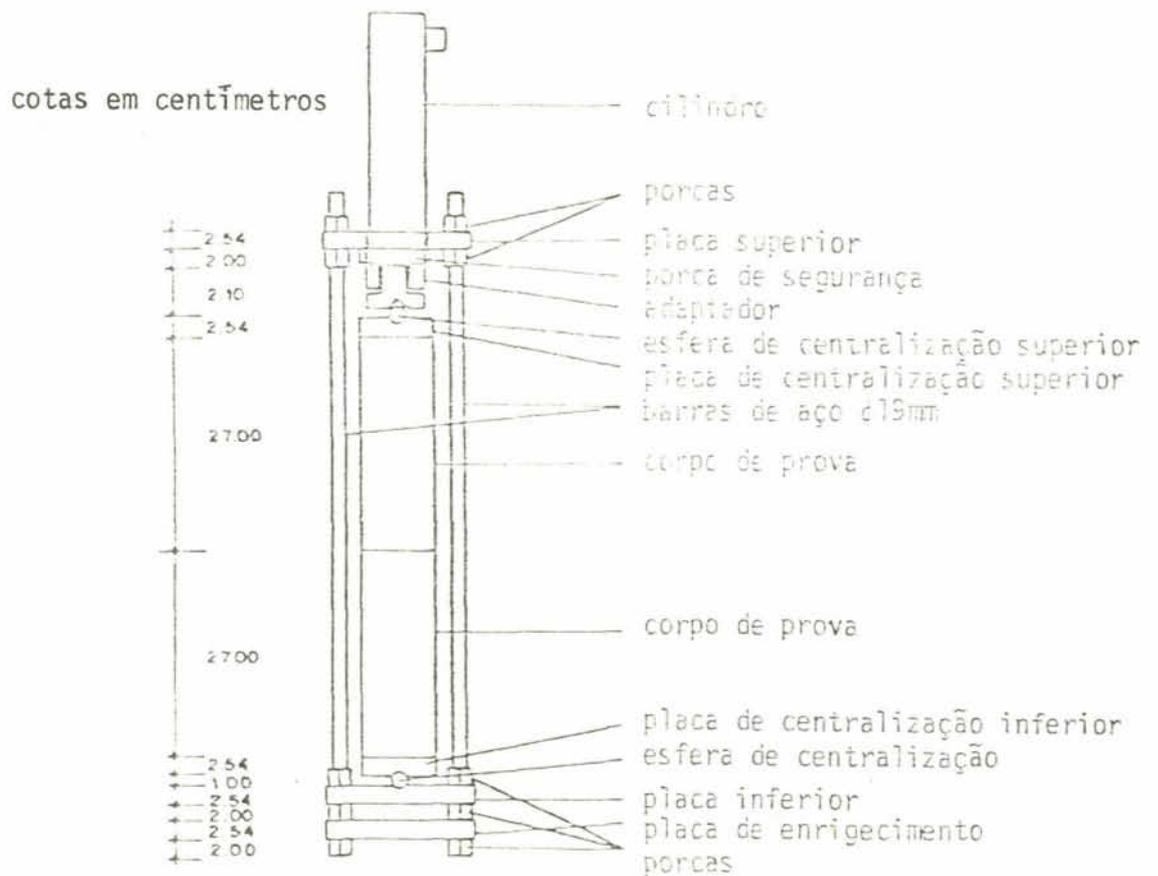


Figura 6.1 - Pórtico de carga utilizado nos ensaios, com dimensões de seus elementos

sor de ar. Como sua vibração afetava outros ensaios que estavam sendo realizados, tentou-se a utilização de tubos de gás comprimido, nitrogênio. Mas, qualquer vazamento que houvesse no sistema, esgotava o gás em poucos dias. Daí, voltou-se novamente a utilização de um compressor de ar, mas, agora, colocado sobre uma base que reduzia a vibração transmitida.

2,3,4,5 - Um sistema composto por um filtro de ar (2), uma válvula de estabilização da pressão (3), que mantinha a pressão a um nível pré-estabelecido, apesar das perdas que porventura existissem no sistema, uma válvula de segurança (4) e um manômetro de controle (5).

- 6,7 - Dispositivos de acionamento da bomba.
- 8 - Bomba - Bomba hidro-pneumática ENERPAC PA-130.
- 9 - Válvula da bomba - Válvula acoplada à bomba que possibilitava manter a pressão já aplicada em caso de avarios no sistema.
- 10 - Manômetro da bomba - Manômetro também acoplado à bomba com a finalidade de medir a pressão de saída do fluido e, conseqüentemente, a carga aplicada no cilindro.
- 11 - Mangueiras para fluidos sob-pressão - Mangueiras especiais para circulação de fluidos sob pressão. Entre a bomba e o cilindro (11a) o fluido utilizado foi óleo, enquanto que, entre a fonte e a bomba (11b) foi utilizado ar comprimido.
- 12 - Cilindro de aplicação da carga - ENERPAC, referencia RC 106, com capacidade para 10 t.

Esse sistema todo poderia produzir uma pressão entre 0 e 1,01 MPa, variá-la ou mantê-la fixa, apesar das perdas, em qualquer valor dentro desta faixa. A foto 6.1 mostra o sistema (2 a 5) do filtro, válvula de estabilização de pressão, válvula de segurança e manômetro de controle. Nota-se ainda o tipo de conexão utilizada nas mangueiras.

Na foto 6.2 aparece o macaco hidráulico completo, com a bomba (8), o cilindro de aplicação da carga (12), a válvula (9) e o manômetro da bomba (10).

O pòrtico de carga, para o ensaio de relaxação figura 6.4, era composto, também, por três barras de aço, com diâmetro de 1,9 cm, mas com quatro placas de aço com diâmetro de 20 cm. Na parte superior do pòrtico foi instalado o cilindro do macaco hidráulico, entre duas placas: a superior de reação e, a inferior de ajuste. A placa de ajuste,

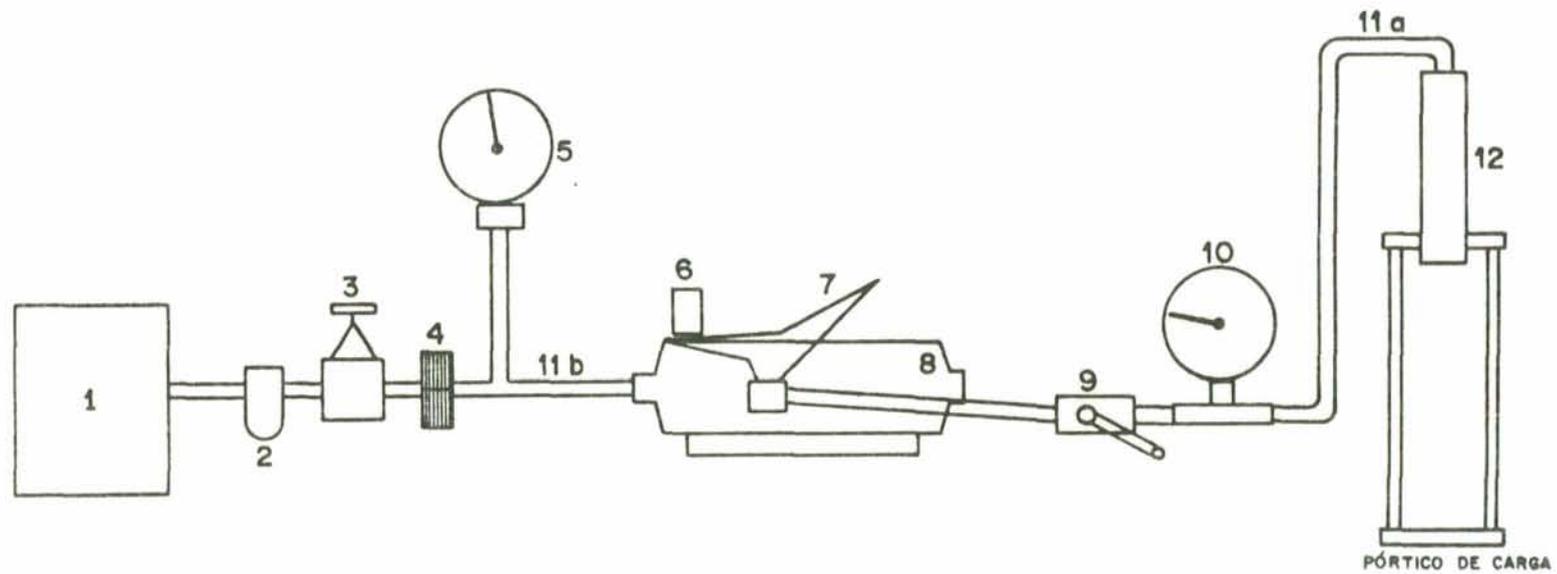


Figura 6.2 - Sistema de aplicação e manutenção da carga no 1º ensaio de fluência

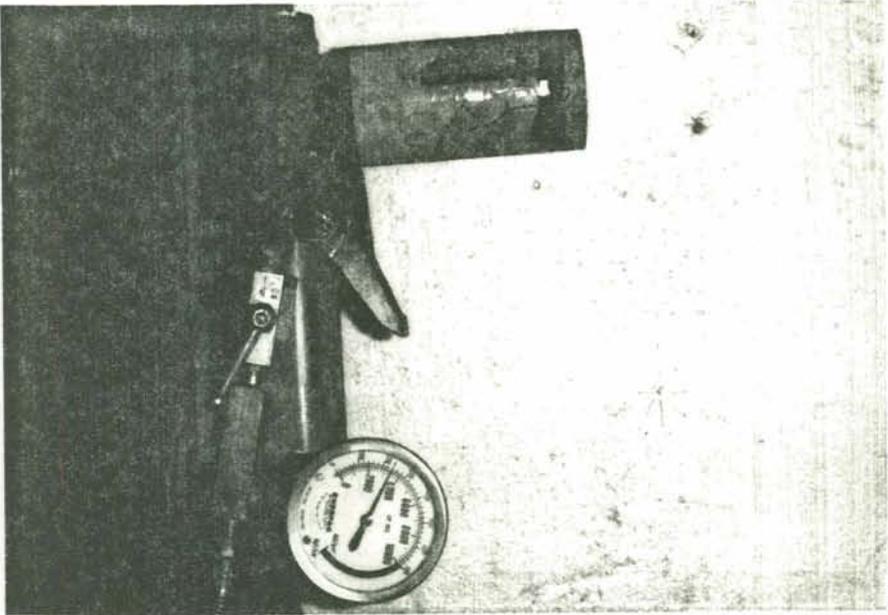


Foto 6.2

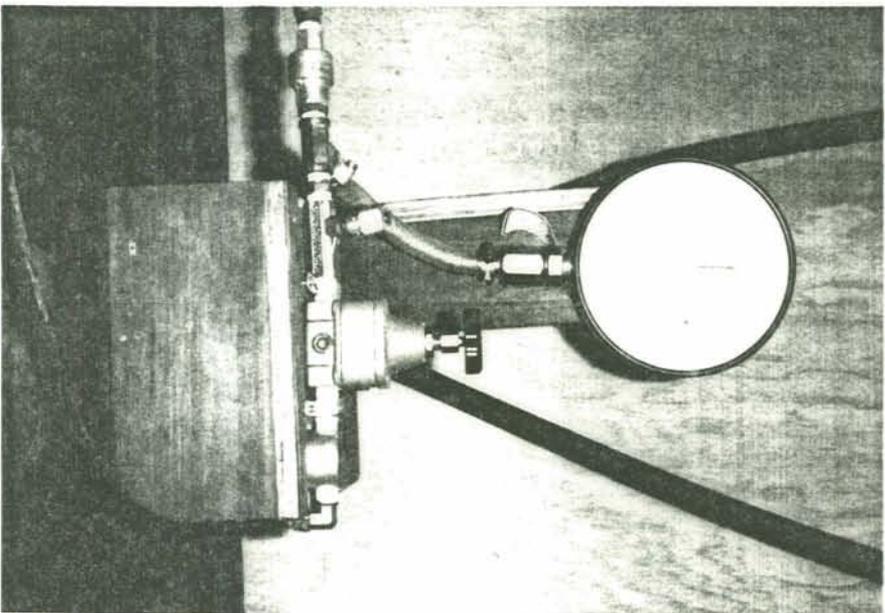


Foto 6.1

transmitia a carga através da esfera de centralização superior a um adaptador da célula de carga e, conseqüentemente, ao corpo de prova. Na parte inferior havia duas placas: a primeira de aplicação da carga e, a segunda para enrijecimento do pórtico. Foram afixadas ao corpo de prova duas placas de aço, uma em cada extremidade, de igual diâmetro, para a centralização da carga.

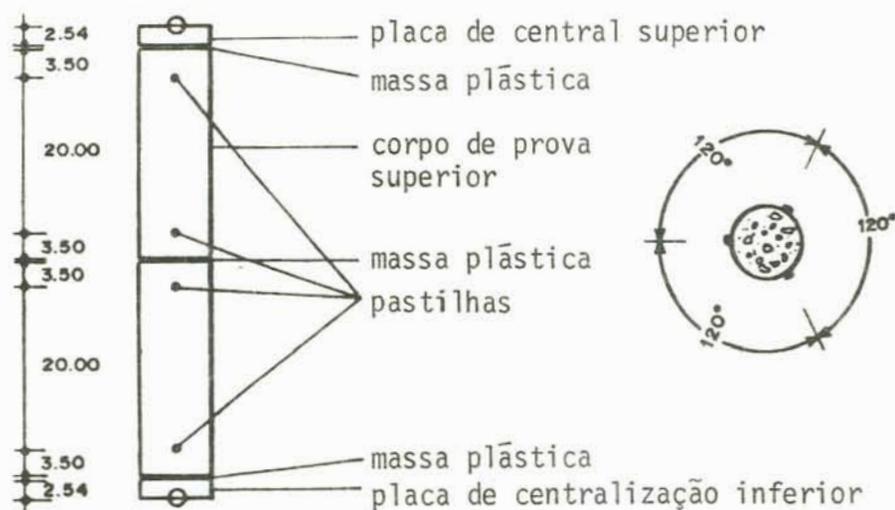


Figura 6.3 - Disposição das pastilhas para medição das def. lentas com elongametro.

A tensão aplicada era mantida pelo segundo grupo de três porcas (de cima para baixo). Estas porcas, também se ajustavam às deformações desejadas a cada leitura, mantendo assim, a deformação do corpo de prova constante. O macaco hidráulico tinha capacidade máxima de 200 kN e a célula de carga possuía circuito auto-compensador de temperatura ligando os quatro extensômetros elétricos, tendo sido construída no CPGEC da UFRGS. Na foto 6.3 é mostrado o ensaio de relaxação realizado.



Foto 6.3

6.3 - Sistema de Medição da Deformação Lenta

O extensômetro utilizado nos ensaios foi o mecânico, do tipo DEMEC, mostrado na foto 6.4, com as seguintes características: DEMEC nº 491, DIAL nº 199183 e precisão de 2.52×10^{-4} cm. Cada divisão do dial representa uma deformação de 0.985×10^{-5} .

Nos ensaios de fluência foram utilizados, em cada pórtico de carga, dois corpos de prova, colados um ao outro na base, com massa plástica, para se obter resultados mais representativos. Para efetuar-se as medições, nos ensaios de fluência e relaxação, com o elongametro (extensôme

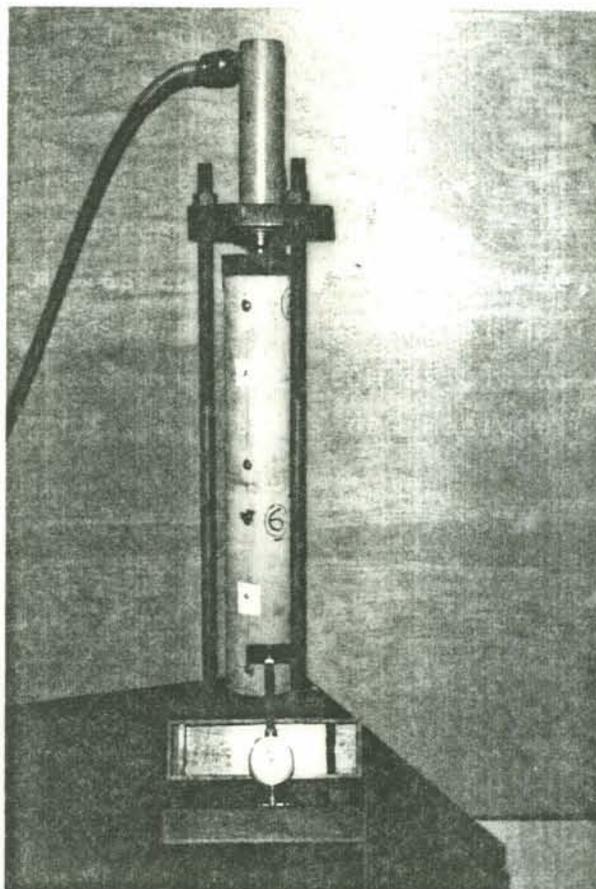


Foto 6.4

tro mecânico) foram coladas com Araldite de pega normal, três pares de pastilha em cada corpo de prova, a cada ensaio de fluência possibilitava, então, obter seis medições, enquanto o de relaxação, três.

Os corpos de controle também foram colados dois a dois, por facilidades operacionais e afixadas às pastilhas da mesma forma que as anteriores. Observa-se, na figura 6.3, que uma ocasional deformação diferencial na cola que unia os corpos de prova entre si e, com as placas de centralização, não influia nos resultados das medições.

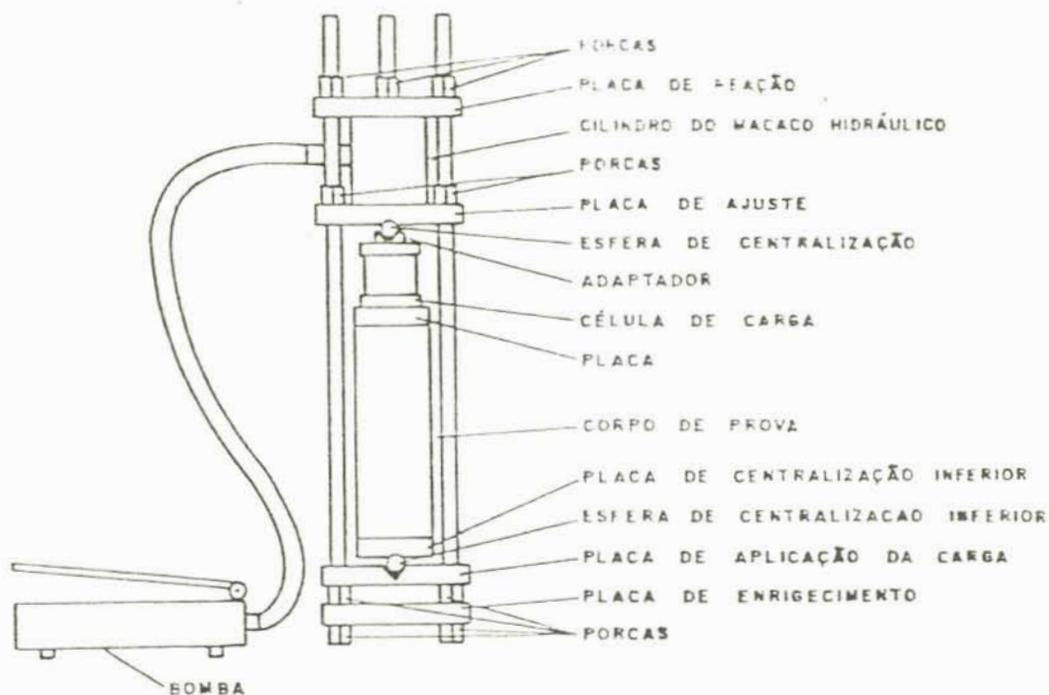


Figura 6.4 - Sistema de carga utilizado no ensaio de relaxação, com descrição de seus elementos.

Cada valor computado na planilha de medições era resultado de três medidas com o alongâmetro. Desta maneira tentou-se reduzir os erros de leitura.

6.4 - Ensaio

Foram realizados três ensaios, dois de deformação lenta e um de relaxação. Utilizando nove corpos de prova, já que um dos corpos previstos para o ensaio de relaxação apresentou problemas de concretagem.

No primeiro ensaio de fluência foi aplicada uma tensão de 405.80 Pa nos corpos de prova, o que representa uma relação; tensão aplicada, tensão de ruptura de 0.21, em média. Esta tensão foi aplicada no 28º dia e mantida até o 104º dia. Aí, os corpos de prova foram descarregados. No segundo ensaio de fluência aplicou-se, primeiramente, no 28º

dia, uma tensão de 405.80 Pa, que resultou na mesma relação tensão aplicada e tensão de ruptura do primeiro ensaio. Um dia após, descarregou-se os dois corpos de prova do segundo ensaio e mediu-se a recuperação da fluência até o 50º dia, quando, carregou-se novamente os corpos de prova, com a mesma tensão anterior, até o 104º dia. Na foto 6.5 observa-se o primeiro e o segundo ensaio de fluência em andamento.

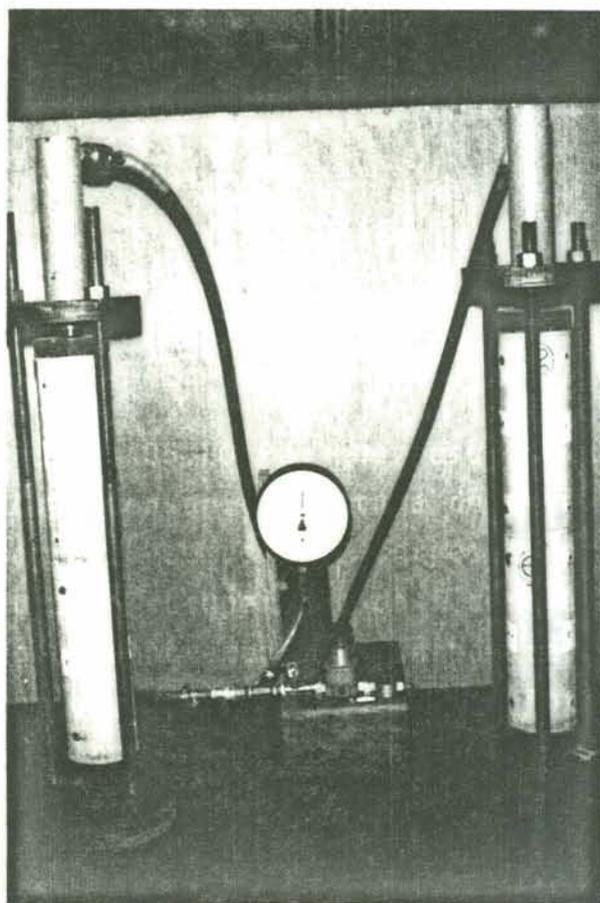


Foto 6.5

O ensaio de relaxação foi realizado apenas com um corpo de prova, iniciando no 37º dia e terminando 65 dias após (figura 6.4).

Como há grande influência da umidade e temperatura nestes tipos de ensaios, e no laboratório não havia condições de mantê-las constantes, foram utilizados quatro corpos de controle, foto 6.6.

Além desta influência, estes corpos mediam a retração ocorrida no concreto. A temperatura e umidade foram medidas e registradas continuamente, por um termômetro e um higrômetro.

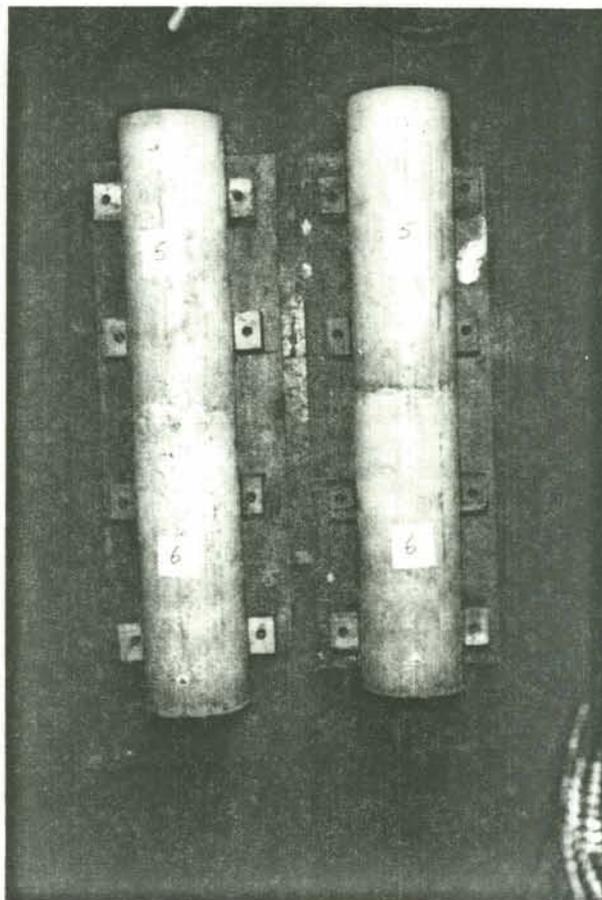


Foto 6.6

CAPÍTULO 7

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo apresentar-se-ão os resultados dos ensaios descritos no capítulo anterior, com os quais é possível calcular as constantes dependentes do concreto, das teorias de Dischinger e Arutyunyan. De posse dessas constantes, serão reproduzidas as curvas de fluência segundo as duas teorias e comparadas com os resultados experimentais. Apresentar-se-ão, também, os resultados dos ensaios complementares para determinação das características do concreto utilizado.

7.1 - Resultado dos Ensaio Complementares

Para determinação das características do concreto utilizado, foram realizados ensaios de compressão simples, compressão diametral e módulo de elasticidade. Os ensaios de compressão simples e compressão diametral foram realizados aos 28 dias, enquanto que, a determinação do módulo de elasticidade foi aos 31 dias. Os resultados obtidos estão nas tabelas 7.1 e 7.2 e nas figuras 7.1 e 7.2.

CP	idade τ (dias)	resistência a ruptura (kgf/cm ²)
CP1	28	204
CP2	28	225
CP3	28	230
CP4	28	231

Tabela 7.1 - Ensaio de compressão simples

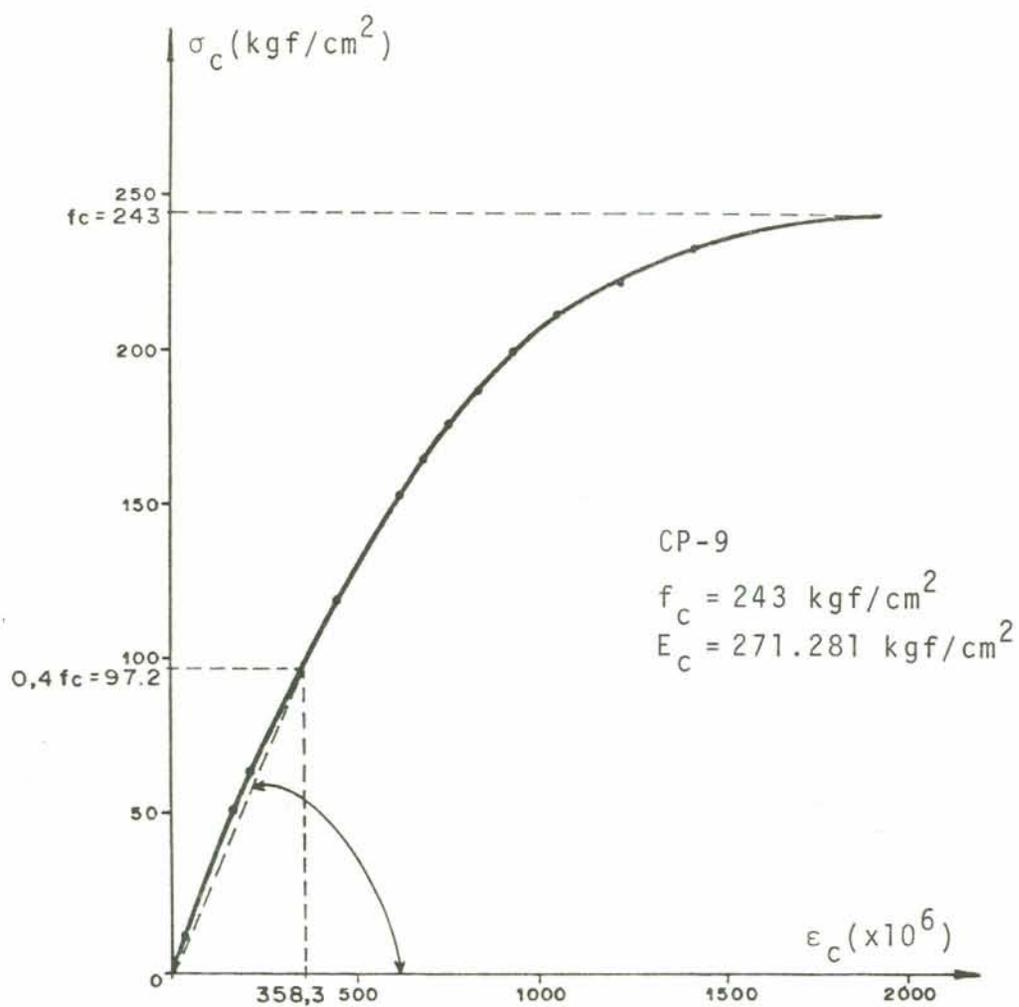


Figura 7.1 - Curva tensão-deformação do concreto do CP-9.

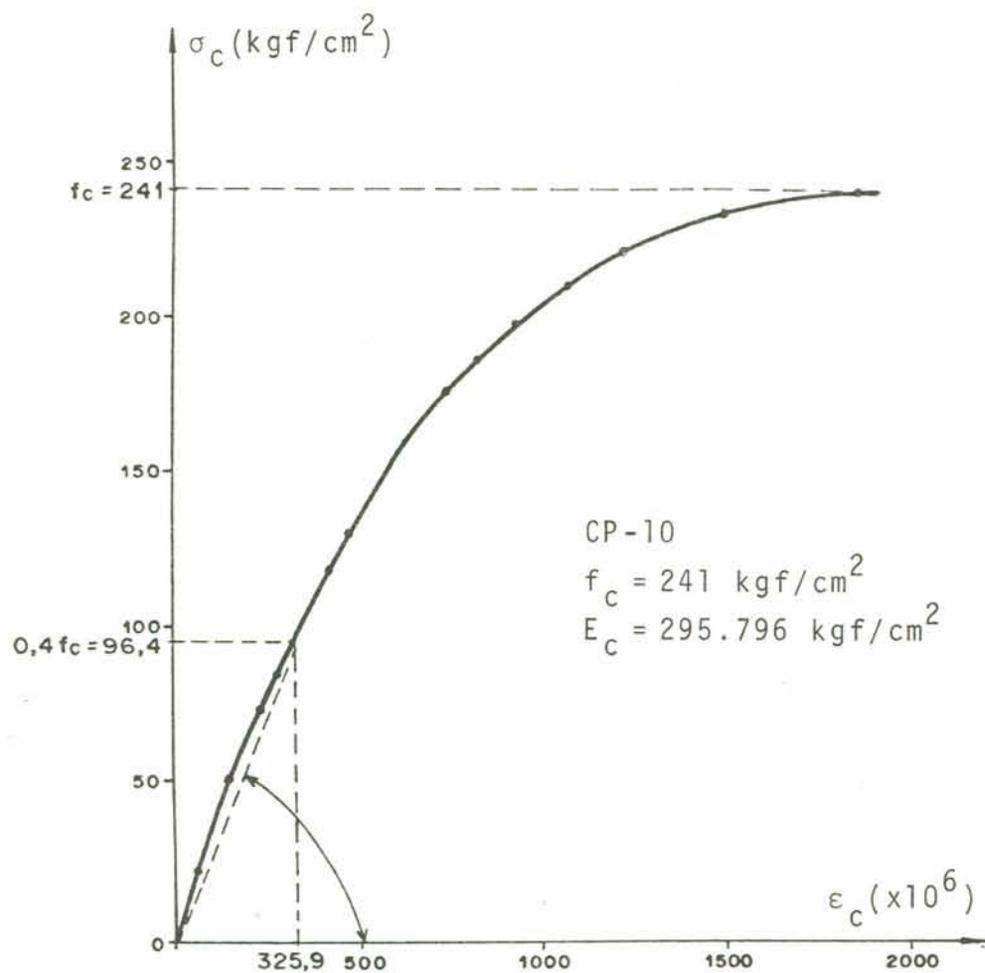


Figura 7.2 - Curva tensão-deformação do concreto do CP-10.

CP	idade τ (dias)	resistência - fct
CP5	28	19,4
CP6	28	22,5
CP7	28	18,0
CP8	28	23,3

Tabela 7.2 - Ensaio de compressão diametral

7.2 - Resultados dos Ensaios de Fluência

No grupo das tabelas A.1, do apêndice, são apresentados os valores obtidos através dos ensaios. Observou-se que existem discrepâncias razoáveis entre esses valores. Procurou-se, primeiramente, encontrar um valor médio de leitura para cada ensaio. Para tanto, utilizou-se uma regra [13] de rejeição de valores extremos nas leituras. Supõe-se que, os valores lidos, x_{ij} , nos controles i e nos dias j , estão distribuídos de acordo com uma distribuição normal, com uma média \bar{X}_{ij} e um desvio padrão estimado S_{ij} . Os valores da média e do desvio padrão também estão apresentados no grupo de tabelas A.1 do apêndice. É possível que determinados os valores extremos, x_{ij} , não pertençam à curva normal. A regra utilizada para essa verificação foi a de Dixon [13] que diz:

"Seja $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(m)}$ valores ordenados de m observações. Para determinar-se o maior valor não pertencente à distribuição normal calcula-se:

$$r_{1,0} = [x_{(m)} - x_{(m-1)}] / [x_{(m)} - x_{(1)}] \quad (7.2.1)$$

o qual é comparado a um valor crítico, de um determinado nível de probabilidade pré-estabelecido. Da mesma forma pa-

ra determinar-se o menor valor não pertencente à distribuição normal calcula-se:

$$r_{1,0} = [x_{(2)} - x_{(1)}] / [x_{(m)} - x_{(1)}] \quad (7.2.2)$$

e se compara, também, com o valor crítico da tabela".

No caso, foi escolhido um valor crítico que corresponde a uma probabilidade de 5% para que os valores não pertençam à distribuição normal. O valor retirado da tabela [13] para $r_{1,0}$ foi de 0,560. Se $r_{1,0}$ calculado for maior que o valor tabelado, então se rejeita o valor $x_{(m)}$ ou $x_{(1)}$. Ao se rejeitar um valor calcula-se uma nova média e um novo desvio padrão.

Outra análise realizada foi a da possibilidade de calcular apenas uma média dos valores medidos nos corpos de controle. Como os valores medidos $x_{1,j}$ e $x_{2,j}$ dependem do tempo, o problema consiste na combinação de duas funções de tempo, sujeitas a variações aleatórias. Não obstante, examinando os valores das médias calculadas (tabela A.1.3 e A.1.4 do apêndice), nota-se que, a grande maioria delas não diferem dentro dos erros observados por $S_{1,j}$ e $S_{2,j}$. Pode-se pois, aplicar uma regra simples, não muito rigorosa, que consiste em checar um valor K_j , para cada dia j .

$$K_j = \frac{\bar{X}_{1j} - \bar{X}_{2j}}{S_j \sqrt{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}} \quad (7.2.3)$$

onde S_j é a média ponderada de $S_{1,j}^2$ e $S_{2,j}^2$, isto é,

$$S_j = \sqrt{\frac{S_{1,j}^2 + S_{2,j}^2}{2}} \quad (7.2.4)$$

Como, em geral, $S_{1,j} \approx S_{2,j}$ e $m_1 = m_2 = 6$, vem

$$K_j = \frac{\bar{X}_{1,j} - \bar{X}_{2,j}}{S_j \sqrt{1/3}} \quad (7.2.5)$$

para um nível 0.05 de probabilidade, $K_j > 2.3$ para que as médias $\bar{X}_{1,j}$ e $\bar{X}_{2,j}$ difiram significativamente, ou seja

$$|\bar{X}_{1,j} - \bar{X}_{2,j}| > 1.33 S_j \quad (7.2.6)$$

Aplicando-se a regra observou-se que em algumas poucas leituras as médias diferem significativamente. Portanto, resolveu-se calcular a média dos valores obtidos através dos ensaios nos dois corpos de controle.

A média calculada foi abatida dos valores lidos nos corpos de prova, a fim de suprimir desses valores os efeitos da retração, da temperatura e da umidade.

Graficando os valores lidos nos ensaios e nos corpos de controle tem-se as figuras 7.3 a 7.6. Na figura 7.4 está graficado também a variação da umidade relativa e temperatura ocorrida durante o ensaio. Observou-se uma influência mais marcante e definida da umidade relativa nos valores lidos, ou seja, com o aumento da umidade relativa houve uma diminuição dos valores lidos e vice-versa. Este comportamento verificado vem a confirmar resultados obtidos por Troxell, Raphael e Davis [23] que estudaram a fluência de corpos a distintas umidades relativas constantes. Salienta-se que, no caso dos ensaios realizados, a umidade relativa variou e de maneira bastante rápida, mas o comportamento geral observado foi o mesmo.

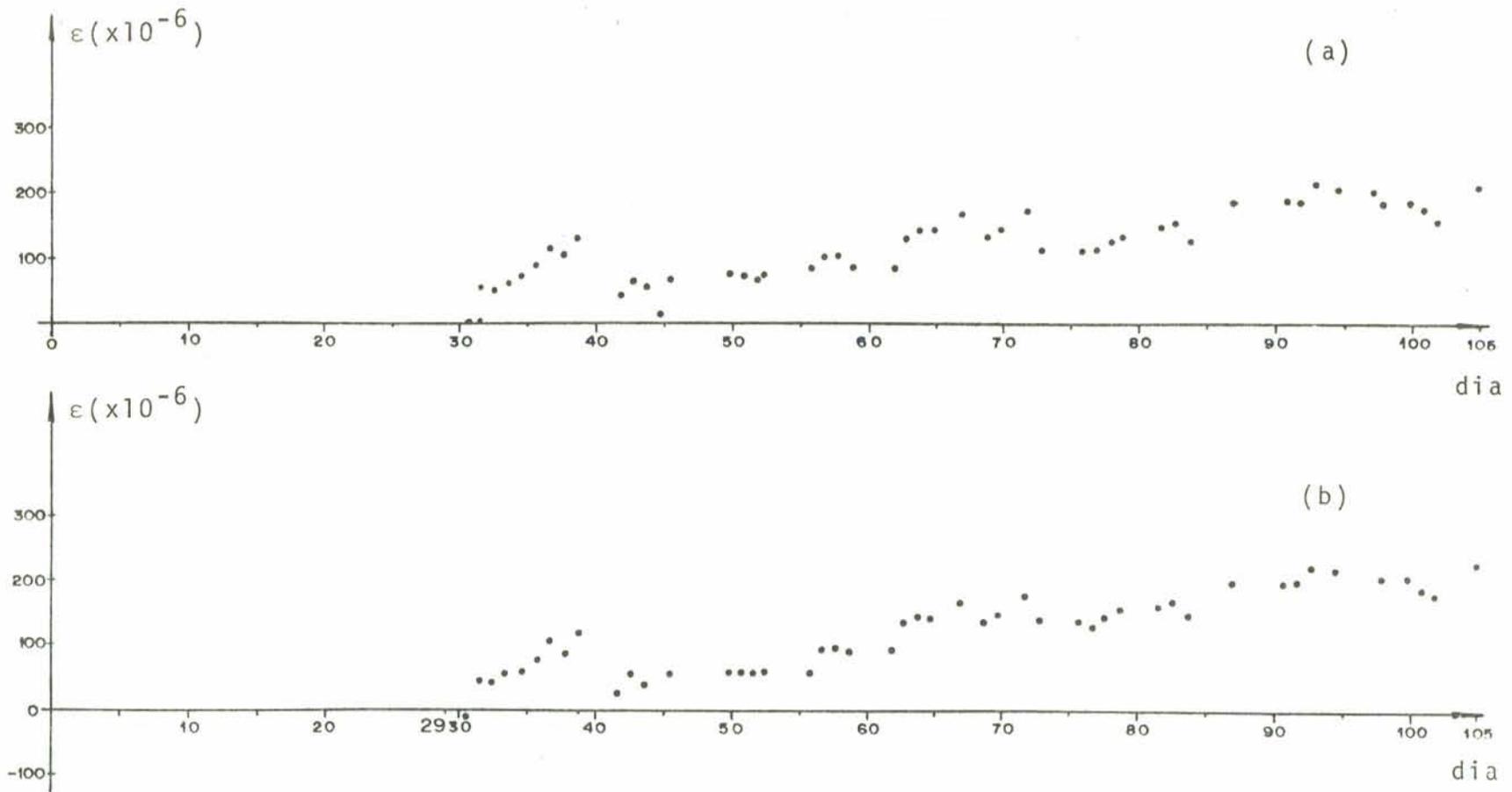


Figura 7.3 - Média dos valores medidos nos corpos de controle:
 (a) corpos 3 e 8; (b) corpos 1 e 10.

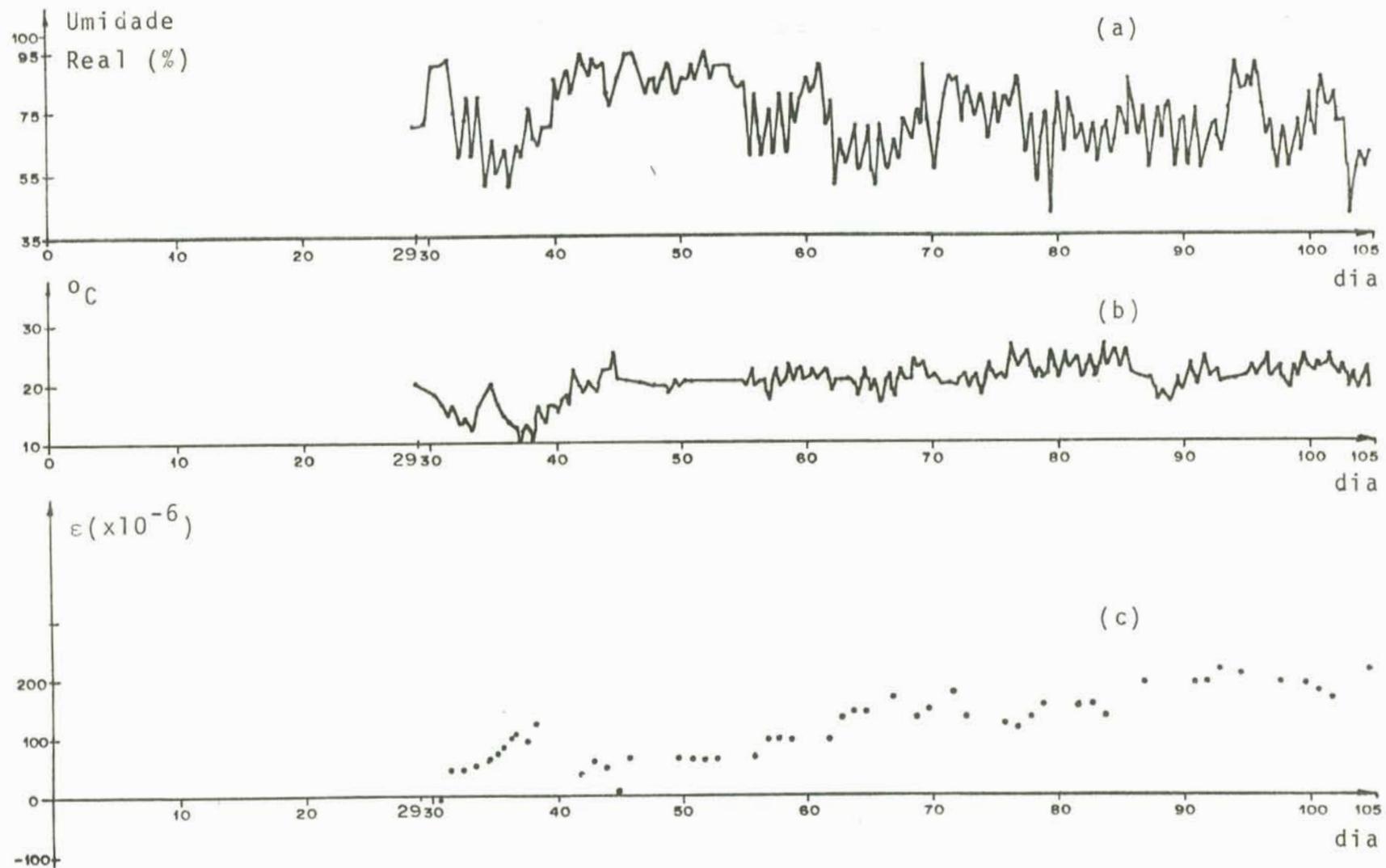


Figura 7.4 - Variação da umidade relativa do ar e da temperatura ambiente durante os ensaios [(a) e (b)] e média dos valores medidos nos corpos de controle, já eliminados os valores discrepantes (c).

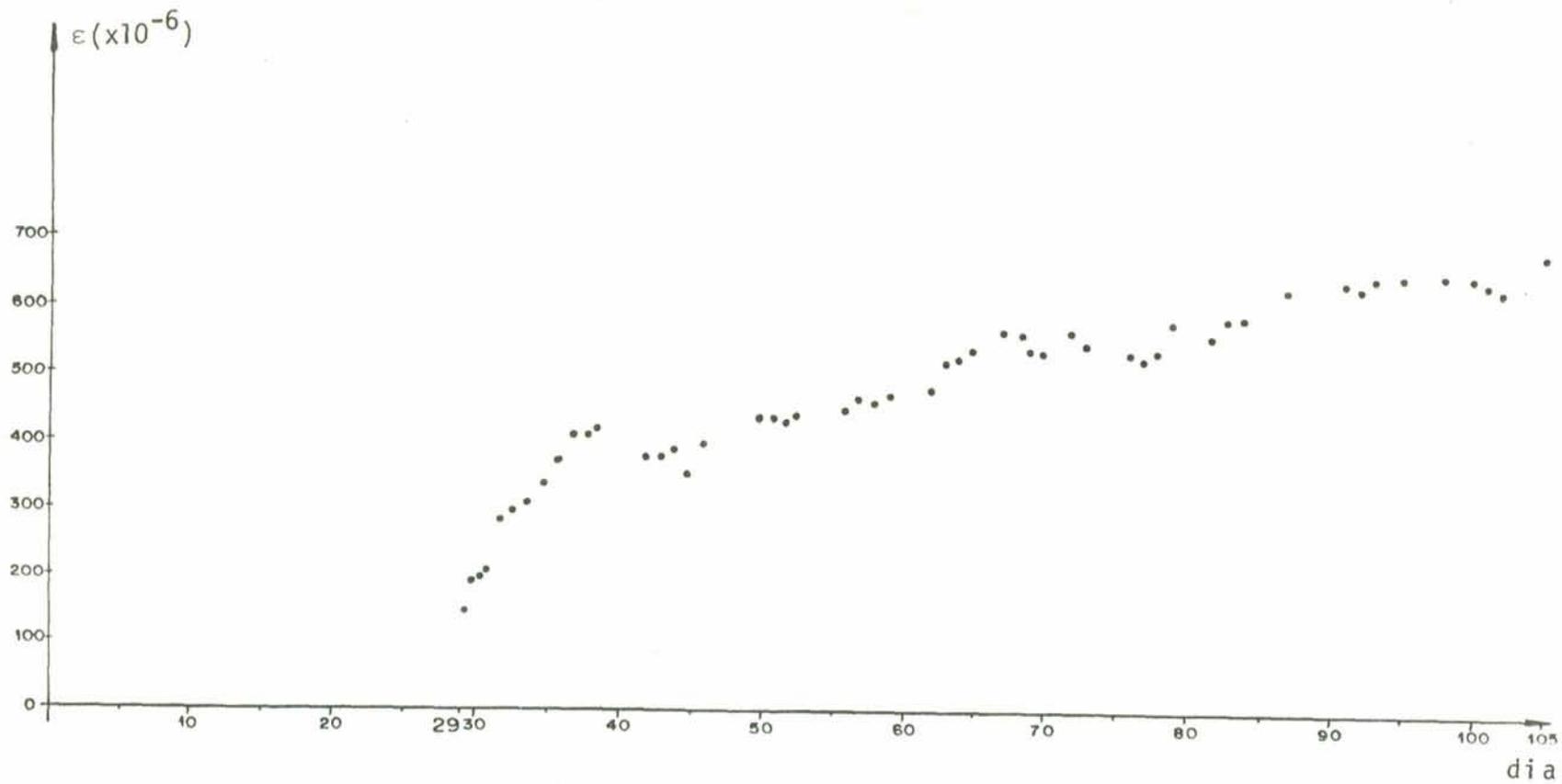


Figura 7.5 - Média dos valores medidos no 1º ensaio de fluências (corpos 5 e 9).

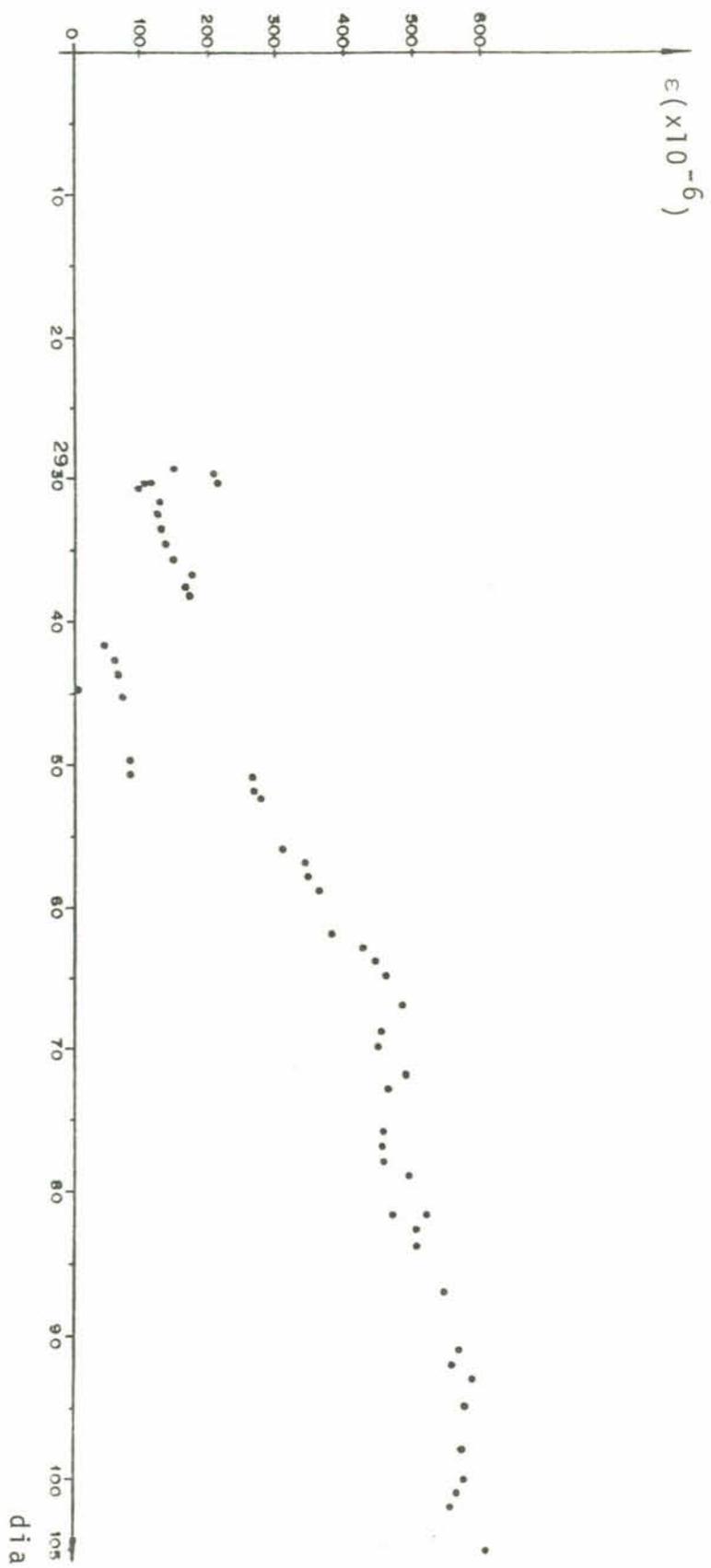


Figura 7.6 - Média dos valores medidos no 2º ensaio de fluência (corpos 2 e 6)

Já a influência da temperatura não é tão clara. Sabe-se que, quando o corpo de prova sofre uma secagem antes do ensaio, o efeito da temperatura sobre a deformação lenta é menor [23]. Ora, nos ensaios realizados os corpos de prova foram secados ao ar livre, envoltos nas formas de moldagem e capeados com cêra. Em alguns casos a cêra soltou-se dos corpos de prova, apressando assim a secagem. Também, entre a desmoldagem e o início do 1º ensaio houve um período de oito dias, nos quais trabalhou-se com os corpos de prova completamente desprotegidos. Durante o ensaio, a temperatura, em geral, manteve-se em torno dos 20°C e, não houve influência notória nos valores obtidos nos ensaios.

7.2.1 - Determinação das Constantes Viscoelásticas

Para o cálculo das constantes viscoelásticas do concreto utilizado nos ensaios, não foram utilizados os valores obtidos diretamente das medições, mas valores retirados de curvas que melhor se adaptaram aos resultados experimentais. Estas curvas tem um desenvolvimento suave ao longo do tempo, evitando descontinuidades ocorridas em virtude das imperfeições dos ensaios e influência de fatores aleatórios. Os valores utilizados estão apresentados na tabela A.2, do apêndice, e plotados na figura 7.7, juntamente com os pontos lidos.

Para trabalhar-se com a teoria de Dischinger, como foi visto no terceiro capítulo, necessita-se apenas, a determinação do valor limite da fluência C_{∞} , em uma idade τ e, a taxa de crescimento da fluência com o tempo ν . Já, para Arutyunyan, necessita-se, no mínimo, o limite da fluência para uma idade τ bastante avançada, C_0 , a taxa de crescimento da fluência com o tempo γ , e, ainda, uma outra constante, dependente das características do concreto, A_1 .

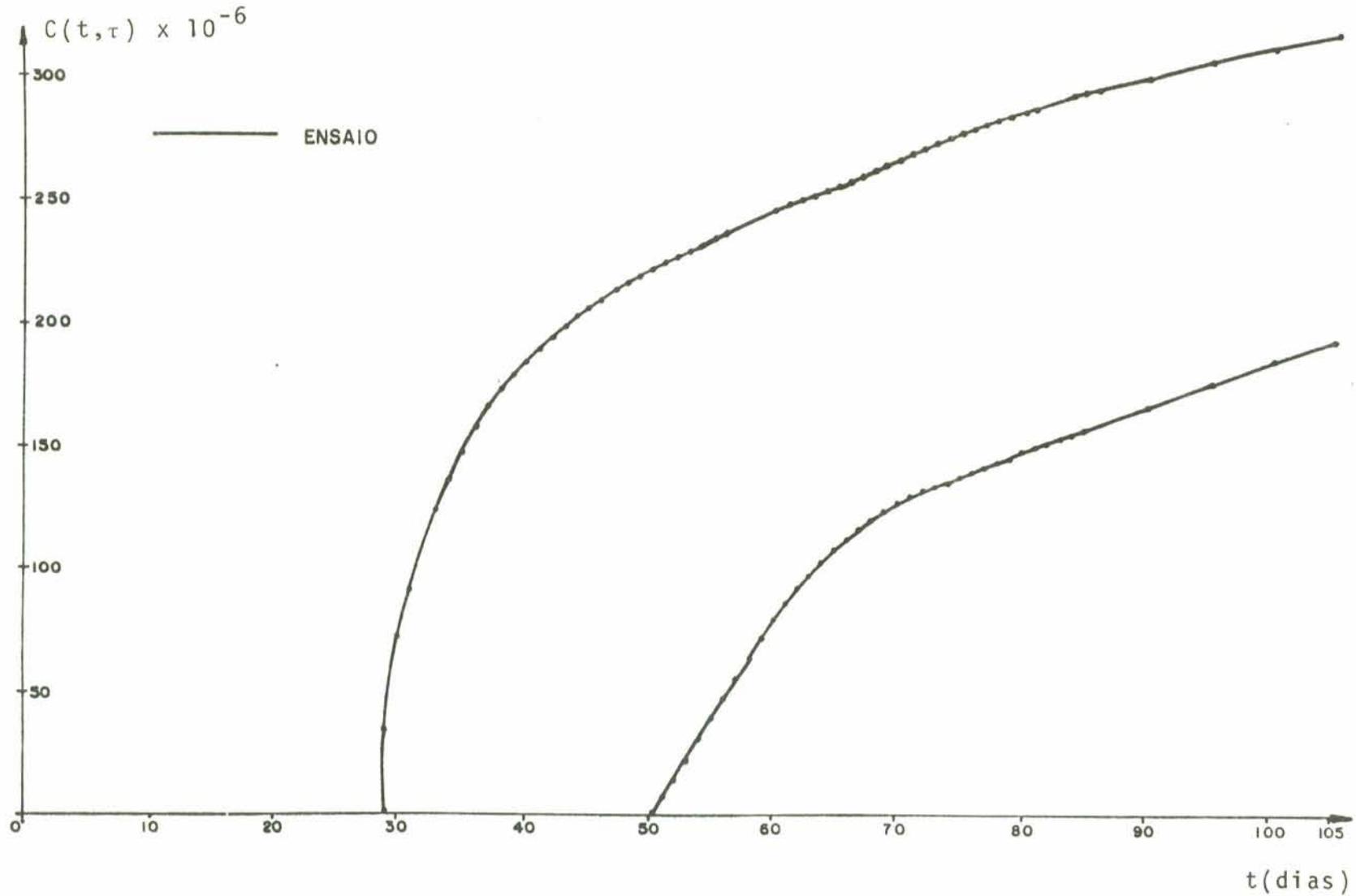


Figura 7.7 - Curvas de fluência adaptadas ao 2º ensaio, utilizadas para o cálculo das constantes viscoelásticas

Para tanto, existem diversos métodos de determinação dessas constantes [23]. Para a determinação dos valores limites, foi escolhido o método de Ross, que utilizou uma relação hiperbólica entre a fluência e o tempo. Já para a determinação das taxas de crescimento da fluência, foi utilizado o método de Ishai. A escolha recaiu sobre esses métodos por serem bastante utilizados e de boa aproximação.

7.2.1.1 - Método de Ross

Ross [26] sugeriu uma relação hiperbólica entre a fluência e o tempo, do tipo:

$$\varepsilon_c(t) = \frac{t}{A + B t} \quad (7.2.1.1.1)$$

onde A e B são constantes; $\varepsilon_c(t)$ é a fluência no concreto em um tempo t, a qual para os ensaios, está apresentada na tabela A.2 do anexo. Para relação sugerida por Ross, para $t \Rightarrow \infty$, a fluência é igual a $1/B$. Desta maneira, o valor final da fluência é lido diretamente dos resultados experimentais. Plotando a razão $t/\varepsilon_c(t)$ por t, se obtém uma linha reta de inclinação B, que intercepta o eixo $t/\varepsilon_c(t)$ na ordenada A. Evidentemente, os valores obtidos dos ensaios não gerarão uma linha reta, assim, deve-se fazer com que melhor se ajuste aos pontos obtidos. Neville e Ross [23] sugerem ajustá-la a períodos que estão a mais tempo sob carga, pois, é preferível obter constantes as quais dão magnitude correta para concretos de idade avançada, antes que uma média de todos os dados e um valor incorreto para o limite de fluência.

Na figura 7.8 estão plotados os valores do 1º ensaio. Notou-se, claramente, a existência de dois segmentos de reta com distintas inclinações. Calculou-se as constantes pelo método de Ross, para os dois segmentos de reta. De posse dos dois grupos de constantes, foram reproduzidas

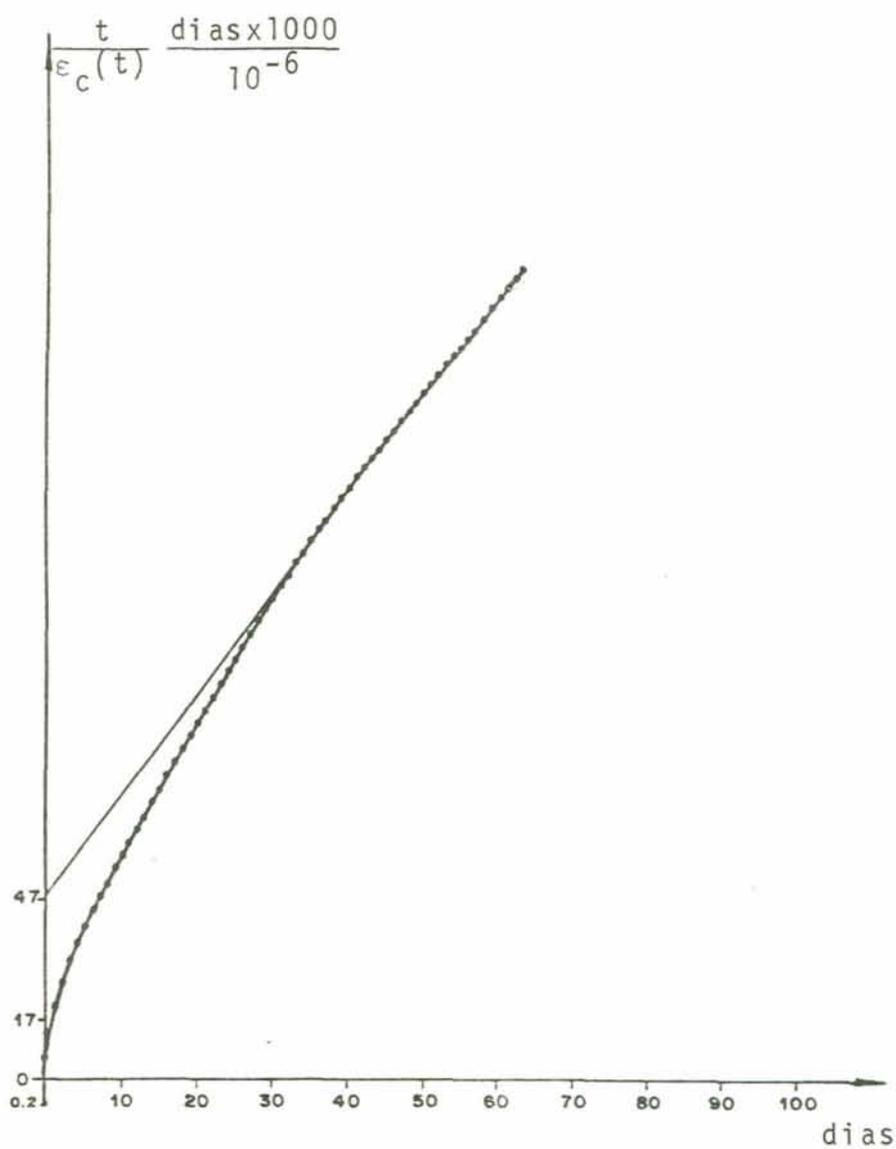


Figura 7.8 - Determinação dos valores limites de fluência, pelo método de Ross [26], para o 1º ensaio.

as curvas de fluência, juntamente com a experimental, na figura 7.9.

Observou-se que, os valores reproduzidos pelas constantes obtidas do 1º segmento de reta aproximaram-se dos experimentais nos primeiros dias do ensaio, subestimando o limite de fluência. Já, a curva gerada pelas constantes obtidas do 2º segmento de reta, aproximou-se da experimental com o decorrer do tempo, confirmando a observação feita por Neville e Ross [23]. Portanto, esse foi o valor limite de fluência adotado para o 1º ensaio.

Na figura 7.10 estão plotados os valores do 2º ensaio.

No caso, apareceu, basicamente, três segmentos de reta. O primeiro, praticamente paralelo ao eixo das abscisas. Isto se deve ao fato da curva de fluência obtida no segundo ensaio ser bastante abatida. Utilizou-se para o cálculo do valor limite o terceiro segmento de reta, pelas mesmas razões expostas anteriormente.

Na tabela 7.3 estão apresentados os valores limites de fluência obtidos pelo método de Ross, para os dois ensaios realizados.

	$C(t, \infty)$
1º ensaio	390.6×10^{-6}
2º ensaio	290.7×10^{-6}

Tabela 7.3 - Valores limites de fluência obtidos pelo método de Ross.

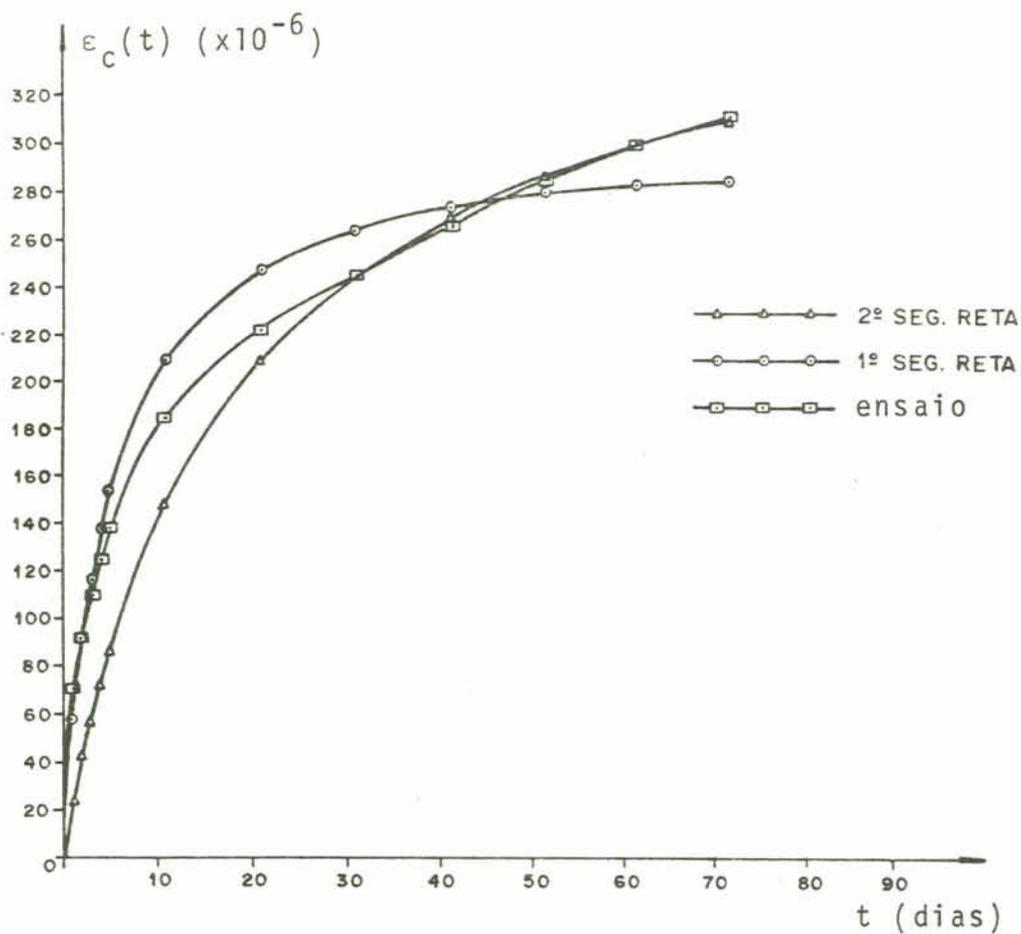


Figura 7.9 - Reprodução da fluência com dois grupos de constantes obtidos pelo método de Ross; o primeiro grupo retirado do 1º segmento de reta e o segundo segmento de reta, e sua comparação com os valores do ensaio.

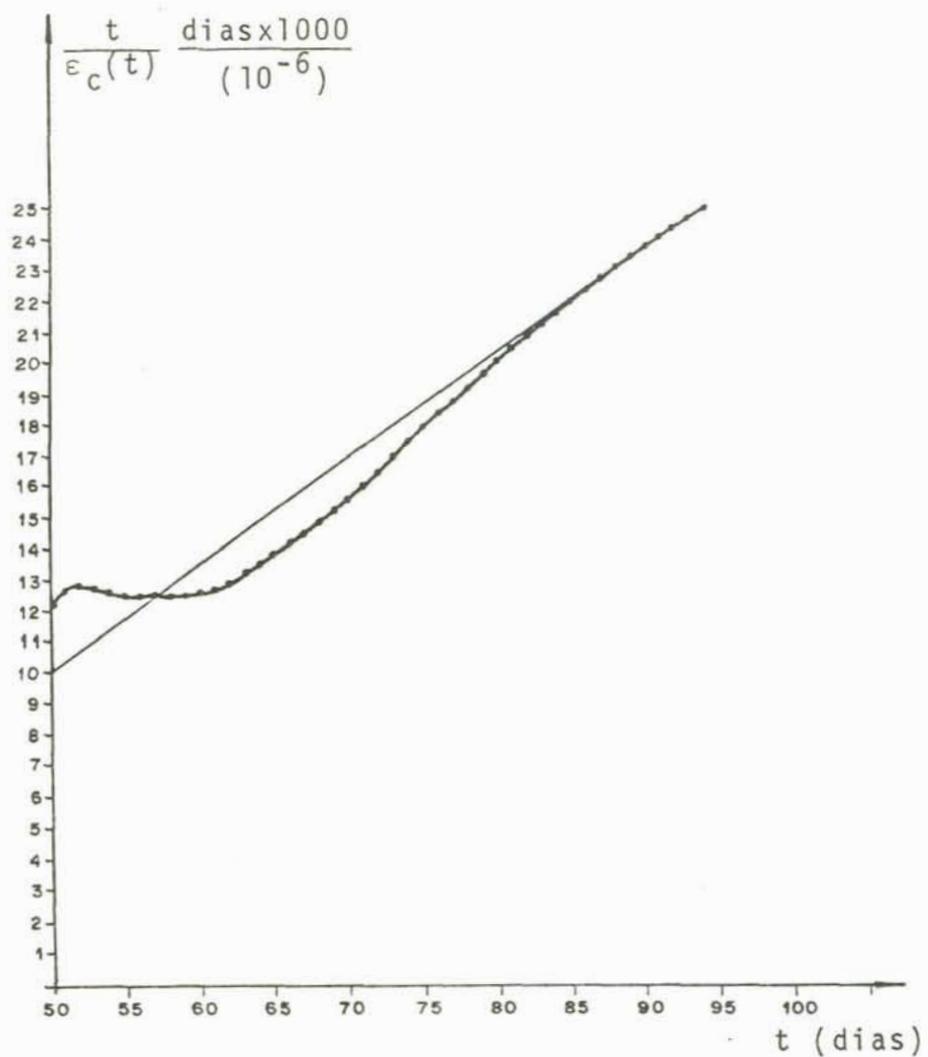


Figura 7.10 - Determinação dos valores limites de fluência, pelo método de Ross [26], para o 2º ensaio.

7.2.1.2 - Método de Ishai

De acordo com a teoria proposta por Ishai [18], a fluência do concreto se deve a migração de água nos vazios, devido a três motivos, cada um representado por um mecanismo. Assim, sugeriu, para a representação da fluência do concreto, uma combinação de três elementos de Kelvin e uma mola em série. Cada mecanismo de deformação representa a movimentação da água em três níveis de vazio. O primeiro mecanismo representa a lenta migração da água ultra viscosa, durante a aplicação da carga, atribuída a água entre planos. O segundo mecanismo, a migração da água de viscosidade média, atribuída a água do gel de cimento. Finalmente, o terceiro mecanismo, a movimentação da água de baixa viscosidade, atribuída a água dos capilares, que termina, após 10 dias da aplicação da carga, normalmente.

A equação reológica deste módulo, conforme a figura 7.11, será:

$$\epsilon_c(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_1} (1 - e^{-t/T_1}) + \frac{1}{E_2} (1 - e^{-t/T_2}) + \frac{1}{E_3} (1 - e^{-t/T_3}) \quad (7.2.1.2.1)$$

onde $T_i = \eta_i/E_i$ é o tempo de retardação do elemento, E_i é o módulo de elasticidade das molas e η_i o coeficiente de viscoelasticidade dos amortecedores.

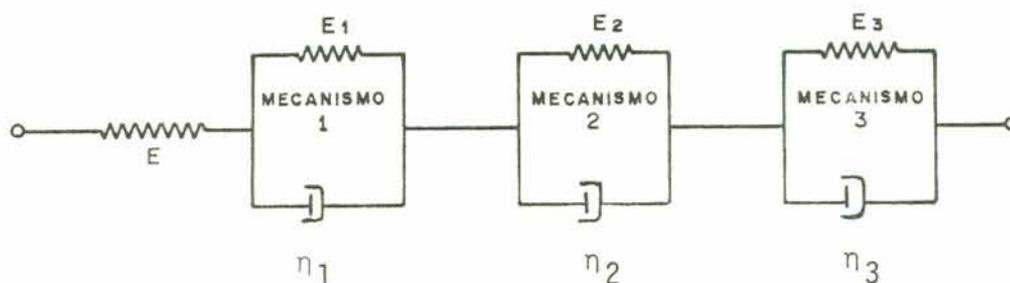


Figura 7.11 - Modelo geral de Kelvin proposto por Ishai

A fluência de um elemento simples de Kelvin, submetido a uma tensão constante, ao longo do ensaio, é dada por:

$$\epsilon_c(t) = \epsilon_\infty (1 - e^{-t/T}) \quad (7.2.1.2.2)$$

onde ϵ_∞ é o valor limite da fluência. Derivando (7.2.1.2.2), com respeito ao tempo, obtêm-se

$$\dot{\epsilon}_c(t) = \epsilon_\infty e^{-t/T} \cdot \frac{1}{T} \quad (7.2.1.2.3)$$

e após algumas substituições

$$\epsilon_c(t) = \epsilon_\infty - T \dot{\epsilon}_c(t) \quad (7.2.1.2.4)$$

a qual é a equação de uma reta que permite obter graficamente o valor de ϵ_∞ quando $\dot{\epsilon}_c(t) = 0$. A equação pode ser escrita também:

$$\epsilon_\infty - \epsilon_c(t) = \epsilon_\infty e^{-t/T} \quad (7.2.1.2.5)$$

ou em forma logarítmica:

$$\log |\epsilon_\infty - \epsilon_c(t)| = \log \epsilon_\infty - \frac{t}{T} \log e \quad (7.2.1.2.6)$$

Essa equação, (7.2.1.2.6), conduziu a uma linha reta, a qual ao interceptar a ordenada deu o valor final de fluência e, sua inclinação representa o inverso do tempo de retardação do modelo multiplicado por $\log e$.

Os valores $\epsilon_\infty - \epsilon_c(t)$ obtidos dos resultados dos ensaios (ϵ_∞ , no caso, calculado por Ross, em (7.2.1.1)), são plotadas em escala logarítmica contra o tempo. O resultado é uma curva suave que se transforma em reta, após um determinado período de tempo, significando que, a

partir desse ponto, o processo obedece a equação (7.2.1.2.2) e é puramente exponencial. Essa curva representa o primeiro mecanismo. O segundo mecanismo é obtido pela diferença da curva ao prolongamento da reta obtida, ou seja, isolando da fluência total a parcela equivalente ao primeiro mecanismo e replotando o remanescente na mesma escala. Da mesma forma, obtêm-se o terceiro mecanismo, outra linha que termina na origem. Essas três retas deixam os seis parâmetros necessários para a completa identificação do modelo da figura 7.11, conforme a figura 7.12.

Na figura 7.13 estão plotados os mecanismos de de Ishai para o primeiro ensaio. Nota-se a existência de apenas duas curvas, correspondentes ao 1º e 2º mecanismos. Pela teoria, a não existência do terceiro mecanismo e, conseqüentemente, do terceiro elemento de Kelvin, significa que não houve colaboração da água dos capilares na fluência.

Da mesma forma, não existiu o terceiro mecanismo do segundo ensaio, conforme é mostrado na figura 7.14. A não colaboração da água dos capilares pode ter sido motivada pela sua expulsão das zonas úmidas para as secas, ou, pelo consumo no processo de hidratação. Provavelmente, se deveu ao fato de que os corpos de prova não foram submersos para efetuarem a cura e, também, pelo tempo gasto na sua preparação para o ensaio.

Já, o segundo mecanismo do segundo ensaio, conforme mostra a figura 7.14, teve uma curva com inclinação inversa a que era de se esperar. Esses corpos de prova ficaram expostos ao ar livre do momento da desmoldagem até o 50º dia. Todo esse tempo, deve ter ocasionado um consumo bastante grande da água dos capilares, fazendo com que, quando da aplicação da carga, praticamente inexistisse pressão de vapor d'água nos vazios. Também, foram carregados

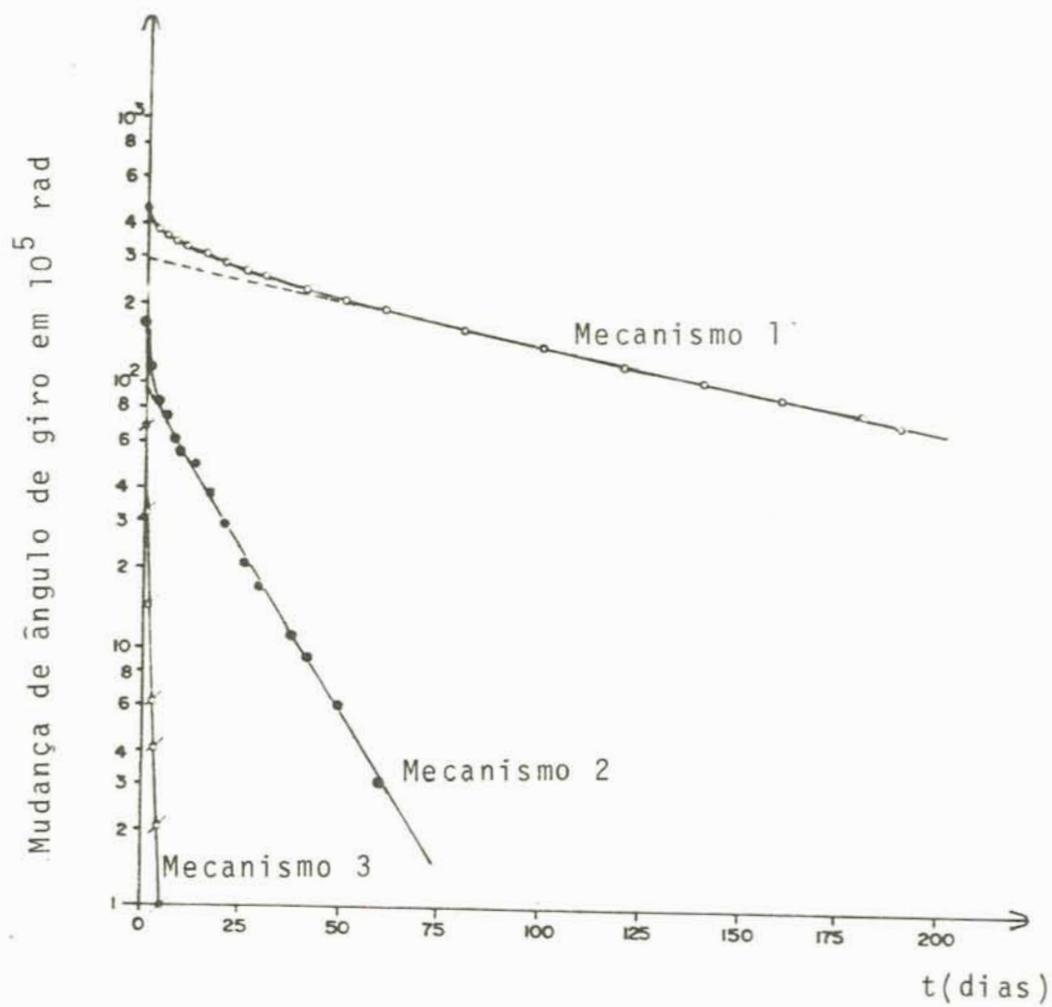


Figura 7.12 - Cálculo das constantes pelo método de Ishai para corpos de prova submetidos a torção [18].

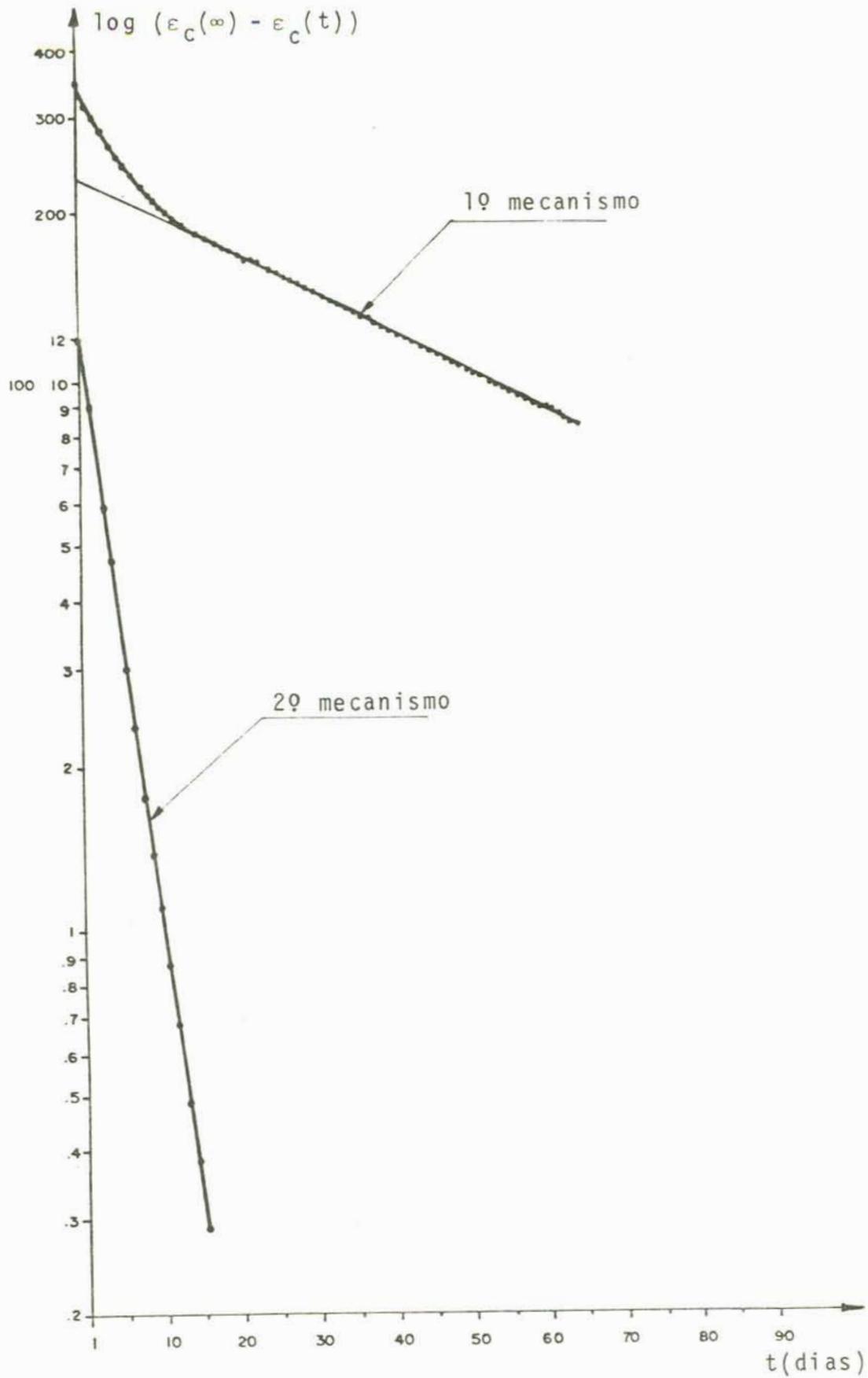


Figura 7.13 - Determinação das constantes viscoelásticas do concreto do 1º ensaio através da teoria de Ishai.

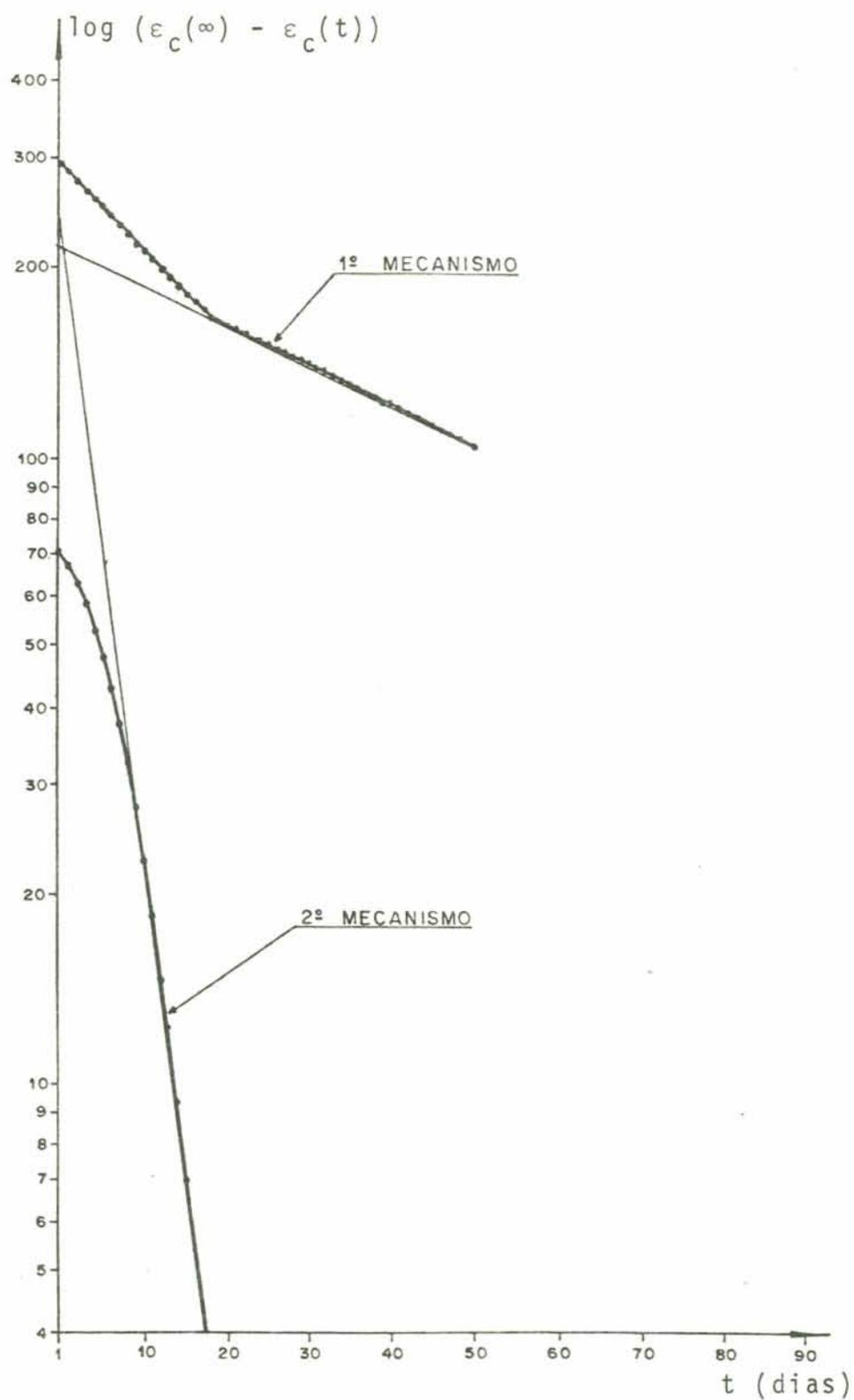


Figura 7.14 - Determinação das constantes viscoelásticas do concreto, no 2º ensaio de fluência, através do método de Ishai [18].

do 28º ao 29º dia e, após, descarregados, fazendo com que houvesse uma recuperação de fluência.

Na tabela 7.4 estão apresentados os valores obtidos pelo método de Ishai, para o primeiro e segundo ensaios.

	T_1	T_2	v_1	v_2	$E_1 \times (10)^3$	$E_2 \times (10)^3$
1º ensaio	62.48	4.0670	0.0160	0.246	4.255	7.87
2º ensaio	68.49	4.2159	0.0146	0.237	4.570	4.18

Tabela 7.4 - Valores das constantes do concreto, obtidos pelo método de Ishai, para o primeiro e segundo ensaio.

7.2.2 - Reprodução da Fluência através das Constantes Viscoelásticas Calculadas

7.2.2.1 - Reprodução por Dischinger

Segundo a teoria de Dischinger, existem apenas duas constantes dependentes das características do concreto; a primeira v , que afeta a taxa de variação da fluência e, a segunda, C_∞ , que é o valor limite da função para $t = \tau_0$. Com a determinação destas duas constantes a expressão (7.2.2.1.1) fica definida:

$$C(t, \tau) = C_\infty e^{-v(\tau - \tau_0)} \left| 1 - e^{-v(t - \tau)} \right| \quad (7.2.2.1.1)$$

Fazendo $\tau = \tau_0 = 28.8$ dias em (7.2.2.1.1) obtêm-se:

$$C(t, \tau) = C_\infty \left| 1 - e^{-v(t - \tau)} \right| \quad (7.2.2.1.2)$$

Com isso, o valor de C_∞ é o valor limite de fluência pa-

ra $\tau = 28.8$ dias. Esse valor, já calculado pelo método de Ross, em (7.2.1.1), é igual a 390.6×10^{-6} . O valor de ν foi determinado pela teoria de Ishai, em (7.2.1.2), e, corresponde ao primeiro mecanismo, ou seja, $\nu = 0.0160$. A teoria de Dischinger não utiliza o valor de ν correspondente ao segundo mecanismo.

Com a definição das constantes viscoelásticas do concreto utilizado no ensaio pode-se reproduzir a curva de fluência, através da teoria de Dischinger, para $\tau=28.8$ dias, e, mais ainda, prever a fluência para outras idades, maiores que τ_0 . No caso, será executada a curva para a idade de 50,12 dias, correspondente ao segundo ensaio realizado.

Na figura 7.15 estão plotadas as curvas de fluência obtidas através da teoria de Dischinger, com as constantes viscoelásticas calculadas pelo método de Ross e de Ishai, juntamente com as curvas experimentais.

Observou-se que a teoria de Dischinger subestima grandemente a fluência, mesmo para o primeiro ensaio. Esse comportamento era esperado para a curva do segundo ensaio, pois a teoria subestima a fluência para concretos de mais idade. O que não se esperava era uma discrepância tão grande, também com os valores do primeiro ensaio. A forma das curvas obtidas nos ensaios, principalmente a do primeiro, também difere substancialmente da forma das curvas da teoria de Dischinger.

7.2.2.2 - Reprodução por Arutyunyan

A proposta de Arutyunyan, conforme (3.7.1.4), pode ser expressa por:

$$C(t, \tau) = \phi(\tau) \sum_{K=0}^m B_K e^{-\gamma_K(t - \tau)} \quad (7.2.2.2.1)$$

onde $\phi(\tau) = A_1/\tau + C_0$. O autor sugere, como simplificação,

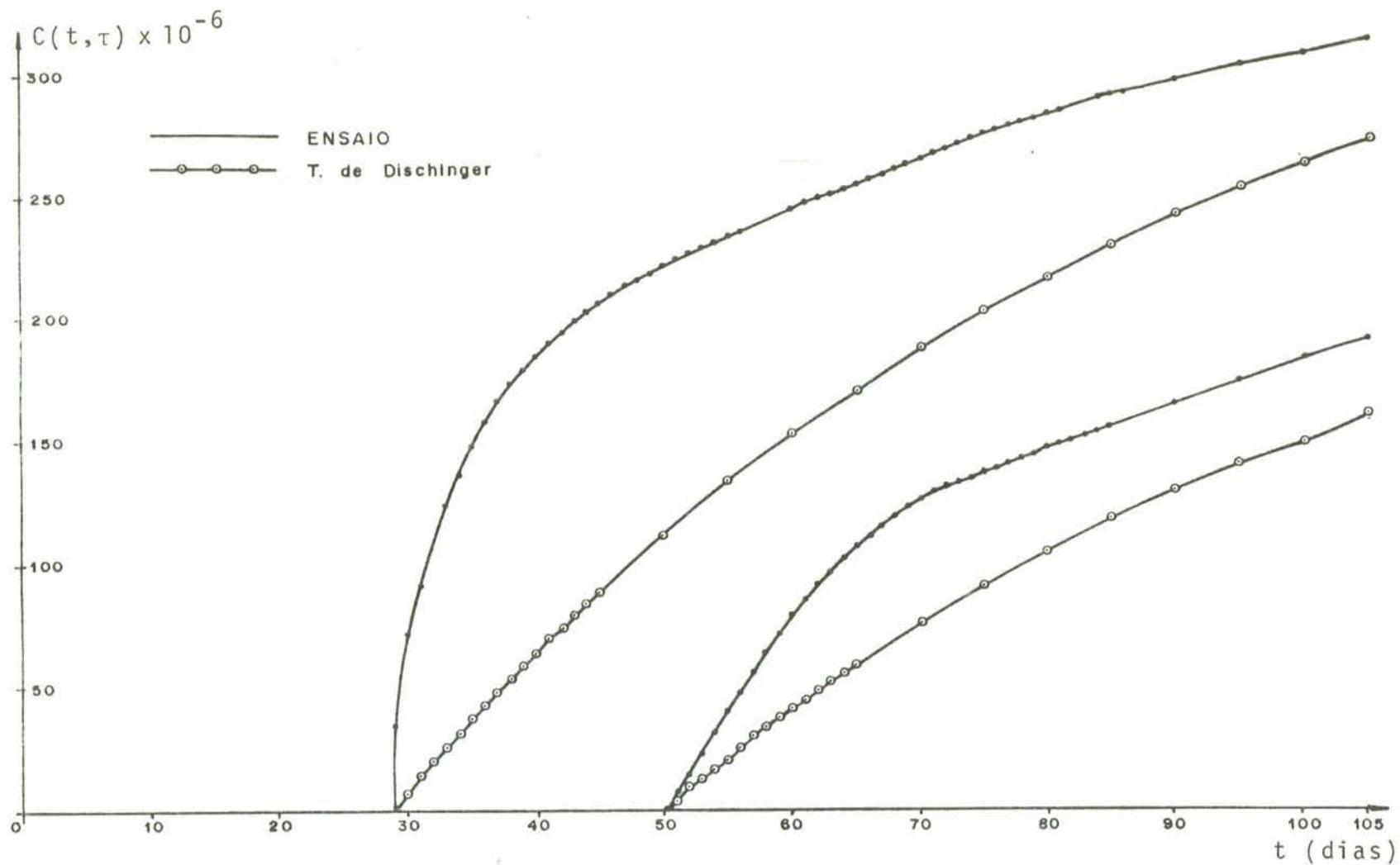


Figura 7.15 - Comparação entre as curvas de fluência obtidas através do 1º e 2º ensaio e as curvas obtidas pela teoria de Dischinger, com as constantes viscoelásticas do concreto calculadas em 7.2.1.1 e 7.2.1.2.

a utilização dos dois primeiros termos da série. No caso, além dos dois primeiros, utilizou-se mais um para se obter uma melhor aproximação com os resultados experimentais. O uso de mais um termo é possível devido a existência de dois mecanismos no método de Ishai, o qual determina constantes para os dois termos da série. Então, a (7.2.2.2.1) pode ser escrita:

$$C(t, \tau) = \left(\frac{A_1}{\tau} + C_0\right) \left[1 - B_1 e^{-\gamma_1(t-\tau)} - B_2 e^{-\gamma_2(t-\tau)}\right] \quad (7.2.2.2.2)$$

onde os parâmetros γ_1 , γ_2 , B_1 , B_2 , A_1 e C_0 são dependentes das propriedades do concreto. As constantes γ_1 e γ_2 foram determinadas pelo método de Ischai, conforme mostra a tabela 7.4. Determinou-se ainda, pelo método de Ross, os limites de fluência para as duas idades ensaiadas, isto é, $C(\infty, \tau)$. Mas, para $t \rightarrow \infty$ a expressão (7.2.2.2.2) transforma-se em:

$$C(\infty, \tau) = \frac{A_1}{\tau} + C_0 \quad (7.2.2.2.3)$$

Como $C(\infty, \tau)$ é conhecido para $\tau = 28.8$ dias e $\tau = 50,12$ dias (tabela 7.3), obtém-se um sistema de duas equações a duas incógnitas:

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{28.8} + C_0 &= 390.6 \times 10^{-6} \\ \frac{A_1}{50.12} + C_0 &= 290.7 \times 10^{-6} \end{aligned} \quad (7.2.2.2.4)$$

Do sistema de equações (7.2.2.2.4) obtém-se os valores de $A_1 = 0.00676367$ e $C_0 = 0.00015575$. Resta apenas a determinação de B_1 e B_2 . A equação do modelo reo-

lógico correspondente ao método de Ishai, com dois mecanismos, conforme (7.2.1.2.1) é:

$$\varepsilon_c(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_1} (1 - e^{-t/T_1}) + \frac{1}{E_2} (1 - e^{-t/T_2}) \quad (7.2.2.2.5)$$

e que, desprezada a deformação elástica, após algumas transformações matemáticas pode ser escrita:

$$\varepsilon_c(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left| 1 - \frac{E_2}{E_1 + E_2} e^{-t/T_1} - \frac{E_1}{E_1 + E_2} e^{-t/T_2} \right| \quad (7.2.2.2.6)$$

Comparando (7.2.2.2.6) com (7.2.2.2.2), para uma determinada idade τ , a condição de igualdade de fluência é dada por:

$$\begin{aligned} \phi(\tau) &= \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \\ B_1 &= \frac{E_1}{E_1 + E_2} \\ B_2 &= \frac{E_1}{E_1 + E_2} \end{aligned} \quad (7.2.2.2.7)$$

E, dessas equações, com os valores da tabela 7.4, obtêm-se B_1 e B_2 , ou seja, $B_1 = 0.649$ e $B_2 = 0.351$. Desta maneira a expressão (7.2.2.2.2) fica definida e é possível calcular a fluência pela teoria de Arutyunyan.

Na figura 7.16 estão as curvas de fluência dos ensaios, juntamente com as obtidas pela teoria de Arutyunyan, com três termos na série.

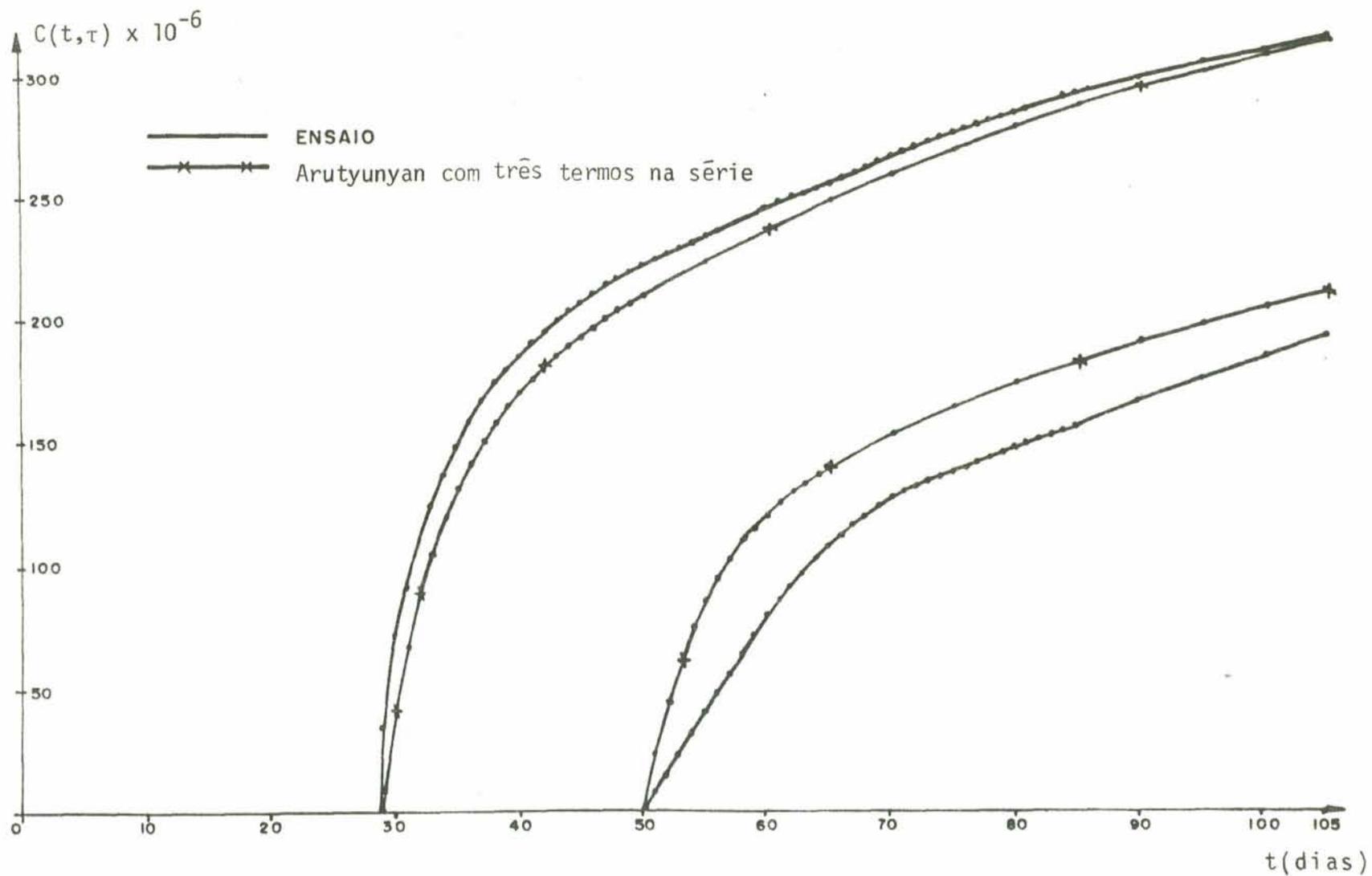


Figura 7.16 - Comparação entre os resultados do 1º e 2º ensaios da deformação lenta e os obtidos pela teoria de Arutyunyan, calculada com três termos na série.

Já existe uma boa correlação entre os resultados obtidos com o 1º ensaio. O mesmo não ocorre com o 2º ensaio, onde os valores obtidos através da teoria são maiores que os do ensaio. Na figura 7.17 são apresentadas as curvas obtidas nos ensaios juntamente com as das duas teorias estudadas. Como se esperava, a melhor aproximação foi obtida com a teoria de Arutyunyan, mas com mais um termo na série, esta foi melhorada.

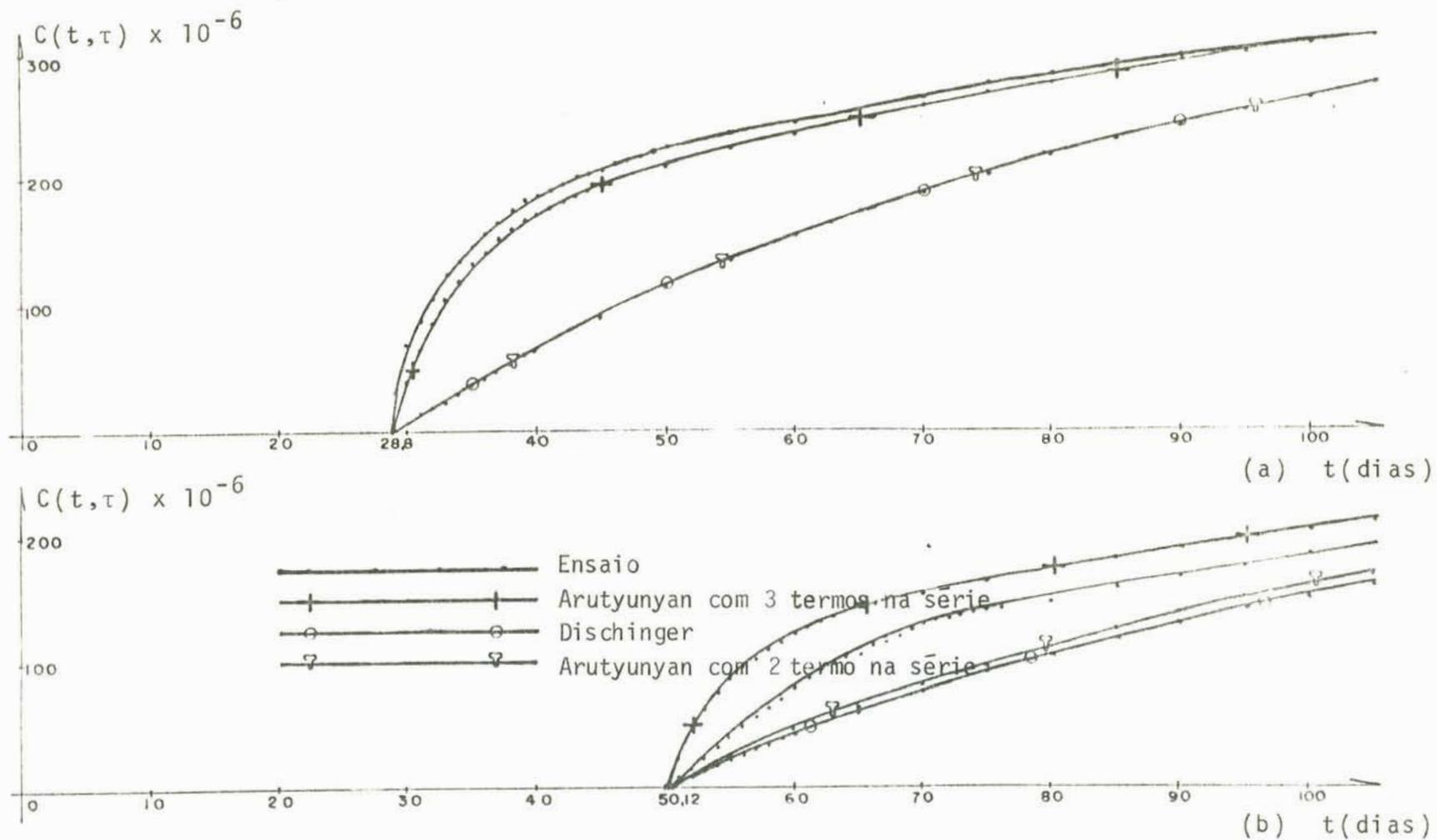


Figura 7.17 - Comparação entre os resultados do 1º (a) e 2º (b) ensaios com as teorias de Dischinger e Arutyunyan.

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

A seguir, serão apresentadas as conclusões obtidas durante a realização deste trabalho, tanto na parte teórica, quanto na experimental. Também, serão apresentadas sugestões para o prosseguimento desta linha de pesquisa.

8.1 - Conclusões

8.1.1 - Análise Teórica

a) A teoria de Dischinger é, no caso de uma resolução analítica, mais simples que a de Arutyunyan. Mas, seu comportamento diante de certos aspectos da fluência, não é muito preciso. Ela subestima fluência em concretos envelhecidos, não considera a recuperação da deformação lenta após o descarregamento e, no caso da relaxação, faz com que a tensão final seja subestimada (capítulo 5). Já, a proposta de Arutyunyan, tem solução analítica mais complicada, mas, os resultados obtidos são mais precisos. A forma das curvas obtidas pelas teorias difere, pois a constante que afeta a variação da fluência com o tempo proposto por Arutyunyan é maior que a de Dischinger, conseqüentemente, a curva cresce mais rapidamente.

b) As melhores aproximações do comportamento real são obtidas através de modelos generalizados com parâmetros variáveis (capítulo 2). Tanto a teoria de Dischinger, quanto a de Arutyunyan, correspondem a modelos reológicos, com parâmetros variáveis, mas bastante simples. No capítulo 4, foi sugerida uma resolução numérica para problemas de fluência, a qual pode utilizar correspondentes modelos reológicos generalizados, com maior número de parâmetros.

A resolução numérica proposta é bastante sim-

ples e feita de maneira a ser facilmente incrementada por novas subrotinas, que venham a auxiliar para uma melhor aproximação, como por exemplo, a consideração do módulo de elasticidade variável.

c) A resolução numérica proposta foi checada, com os resultados obtidos pelas teorias de Dischinger e Arutyunyan (capítulo 5). As aproximações obtidas foram bastante boas. Deve-se salientar, porém, que a resolução proposta é mais geral e pode trabalhar com quantos mecanismos se desejar, aproximando ainda mais os resultados, sem haver necessidade de grandes simplificações.

d) Na análise da função que determina a variação dos intervalos de tempo (capítulo 4), observou-se que, para concretos jovens, tanto a proposta de Bazant |3|, como a expressão 4.3.4, ou seja, uma progressão geométrica, conduziram a melhores resultados, tendo em vista um crescimento mais lento do erro no início do processo. Já, para concretos envelhecidos, a função que mais se adapta é a 4.3.1, cujo crescimento do erro é mais estável. De qualquer modo, tanto os valores utilizados nas funções estudadas quanto o tipo de função, dependem do problema a ser analisado.

8.1.2 - Análise Experimental

A parte experimental do trabalho foi executada com o objetivo de checar as teorias de Dischinger e Arutyunyan com resultados obtidos de ensaios de fluência. Para isso, foi necessário desenvolver um sistema de aplicação e manutenção da carga, executar ensaios de relaxação e reproduzir posteriormente os resultados com o auxílio da resolução numérica. As conclusões obtidas estão relacionadas a seguir:

a) O sistema de manutenção e aplicação de car-

ga montado para ser utilizado na realização dos ensaios de fluência, descrito no capítulo 6, mostrou ser bastante eficiente. Possibilitou manter a carga praticamente sem variações até o final dos ensaios, mesmo quando necessitou-se retirar a bomba do sistema para efetuar sua manutenção. A utilização de um compressor como fonte foi satisfatória, quando eliminados os problemas de vibração.

b) No ensaio de relaxação, o sistema de manutenção das deformações, apresentou algumas dificuldades para se conseguir um perfeito controle das deformações nas porcas de ajuste (capítulo 6). Isto ocorreu por ter sido utilizado um pórtico com três barras de aço e duas esferas de centralização de carga, tornando o sistema bastante instável.

c) O resultado apresentado pelo primeiro ensaio de fluência (capítulo 7) produziu uma curva da forma esperada, enquanto que no segundo não. Provavelmente, devido a carga e posterior descarga efetuada aos 28 dias. Já o ensaio de relaxação foi perdido devido a um desajuste na célula de carga.

d) Na reprodução das curvas de fluência, como já era esperado, uma melhor aproximação foi obtida com o auxílio da Teoria de Arutyunyan (capítulo 7). Mas, com a utilização de mais um termo da série nesta teoria, melhorou-se a aproximação. No segundo ensaio de fluência, mesmo com a utilização de mais esse termo, a aproximação não foi boa, devendo-se o fato, provavelmente, ao problema já aludido de carga e descarga e, também, ao consumo da água dos capilares pela exposição prolongada ao ar, dos corpos de prova ensaiados.

8.2 - Recomendações

No caso de continuidade desta linha de pesquisa, apresentam-se algumas sugestões que talvez possam ser aproveitadas em futuros trabalhos.

- Incrementar, no programa, uma subrotina que considere o módulo de elasticidade variável com o tempo, ou seja, $E(t)$.

- Efetuar testes para verificação da constante que afeta a taxa de variação da fluência (ν ou γ), quando de seu cálculo pela teoria de Ishai [18], em função da inclinação dos segmentos de reta provenientes das curvas de cada mecanismo.

- Estudar uma $\phi(\tau)$, para ser utilizada na teoria de Arutyunyan, mais complexa, já que, pode-se resolver o problema numericamente, que não tenha um crescimento tão rápido para concretos jovens.

- Executar um maior número de ensaios a fim de obter fundamento estatístico para os resultados.

- Executar um sistema de controle de umidade e temperatura ambiente no laboratório de concreto.

- Melhorar o pórtico de manutenção de deformações, do ensaio de relaxação, montando-o com quatro barras de aço, possibilitando assim, um controle mais eficaz nas porcas de ajuste.

- Procurar resolver problemas de concreto pretendido com a resolução numérica apresentada.

- Trabalhar para formar uma nomenclatura nacional na resolução de problemas de fluência.

APÊNDICE

TABELAS A.1

t (dias)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	\bar{x}_{ij}	S_{ij}	valor real de formação (10^{-6})
28,80	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28,83	13,7	14,5	14,0	15,5	13,9	15,0	14,43	0,70	142,14
29,03	20,2	18,1	19,5	21,0	17,0	19,5	19,22	1,45	189,32
29,82	18,6	19,1	21,6	20,6	20,1	20,6	20,10	1,10	197,99
30,02	19,1	20,6	22,1	21,6	21,6	21,1	21,02	1,07	207,05
31,02	26,6	27,6	30,1	29,0	28,8	28,6	28,45	1,21	280,32
31,94	27,1	29,1	32,1	31,1	29,9	31,6	30,15	1,86	296,98
32,96	30,1	30,1	33,6	32,8	30,9	31,6	31,52	1,44	310,17
34,04	32,9	31,6	36,8	34,8	34,3	35,6	34,33	1,87	338,15
35,04	36,6	33,1	41,1	39,1	37,9	38,9	37,78	2,73	372,13
36,04	40,1	37,6	45,4	43,0	40,8	41,9	41,47	2,66	408,48
37,09	39,6	36,1	44,6	42,8	40,6	42,1	40,97	2,95	403,55
37,80	41,1	37,3	46,1	43,8	43,1	44,1	42,58	3,05	419,41
41,06	36,6	34,0	40,1	40,1	36,6	39,1	37,75	2,43	371,84
42,05	36,1	33,1	40,8	41,4	37,6	39,1	38,02	3,11	374,50
43,05	36,6	35,6	41,8	41,6	39,1	40,1	39,13	2,57	385,43
44,14	33,6	31,1	37,6	37,1	37,6	36,3	35,55	2,64	350,17
44,83	36,1	33,6	43,6	43,6	42,9	40,1	39,98	4,25	393,80
49,09	39,1	43,1	45,4	45,4	47,1	42,5	43,77	2,83	431,13

50,09	39,6	41,6	45,8	45,6	48,9	41,3	43,80	3,52	431,43
51,13	38,9	42,6	45,1	44,1	47,6	41,5	43,32	3,00	426,70
51,87	38,9	44,6	43,9	45,4	5,00	4,06	43,90	3,89	432,42
55,12	39,6	43,6	46,6	46,4	52,0	41,3	44,90	4,45	442,26
56,12	40,6	44,6	49,1	49,1	53,9	43,9	46,87	4,75	461,67
57,13	40,9	43,1	49,0	48,1	52,6	45,1	46,47	4,26	257,73
58,08	42,3	42,6	50,1	49,1	52,3	46,1	47,08	4,11	463,74
61,31	44,9	42,6	50,4	50,1	54,6	45,6	48,08	4,42	473,00
62,08	48,6	47,6	55,6	54,6	57,1	50,6	52,35	3,95	515,65
63,14	49,4	48,1	56,8	54,6	57,7	52,1	53,12	3,92	523,23
64,10	50,5	49,9	58,6	56,1	50,1	53,1	54,55	3,99	337,32
66,33	52,6	37,9*	60,1	58,1	60,1	55,6	57,30	3,21	564,41
68,13	51,6	49,1	58,6	56,8	58,6	52,6	54,55	4,00	537,32
69,13	51,1	50,1	57,6	56,1	57,5	51,3	53,95	3,48	531,41
71,10	54,6	49,41	62,0	61,1	61,6	56,1	57,47	5,02	566,08
72,10	51,3	51,9	58,6	58,1	58,6	53,1	55,27	3,52	544,41
75,31	51,6	-	57,1	56,1	57,6	52,1	54,90	2,84	540,77
76,08	50,6	-	56,6	54,8	57,1	50,1	53,84	3,30	530,32
77,14	52,1	-	57,1	56,4	58,6	52,6	55,36	2,87	545,30
78,22	54,6	58,3	60,8	59,0	62,1	55,1	58,32	3,00	574,45
80,93	52,2	56,1	58,6	57,1	60,5	53,6	56,35	3,09	555,05
82,00	55,5	59,0	61,1	59,6	62,4	56,6	59,03	2,62	581,45
83,21	55,6	58,9	61,5	60,6	62,1	56,6	59,22	2,66	583,32
86,23	59,1	62,3	67,6	64,6	66,1	60,6	63,38	3,28	624,29
90,13	60,1	63,8	67,6	66,8	66,6	62,1	64,50	3,00	635,33

91,13	59,3	62,0	66,6	64,8	66,1	61,1	63,32	2,95	623,70
92,10	63,1	64,3	68,1	66,3	67,7	62,1	65,27	2,48	642,91
93,84	60,6	63,3	67,6	67,1	68,3	65,1	65,33	2,95	643,50
97,10	62,1	64,8	67,8	66,6	68,9	64,9	65,85	2,44	248,62
99,06	61,1	63,8	68,7	66,1	69,5	64,0	65,53	3,20	645,54
100,13	60,6	61,8	67,6	65,9	67,8	63,9	64,60	3,01	636,37
101,07	59,4	60,3	66,9	65,2	67,1	62,7	63,60	3,32	626,52
104,14	64,6	64,9	72,1	70,1	72,4	67,6	68,62	3,45	675,98

Tabela A.1.1 - Valores lidos no primeiro ensaio. Os valores com asteriscos foram eliminados pelos testes estatísticos. A média \bar{X}_{ij} e o desvio padrão S_{ij} foram calculados sem os valores rejeitados.

t (dias)	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	\bar{X}_{ij}	S _{ij}	valor real de deformação (10 ⁻⁶)
28,80	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28,83	16,0	14,8	14,0	14,8	14,8	16,0	15,06	0,79	148,34
29,03	21,3	19,2	18,0	19,50	21,6	23,5	20,52	1,99	202,12
29,80	21,1	22,6	21,1	21,1	21,8	-	21,54	0,67	212,17
29,81	4,9	8,6	5,6	7,1	4,8	-	6,20	1,63	61,07
29,82	3,6	7,1	5,6	7,1	3,3	-	5,34	1,83	52,60
30,02	3,6	6,6	4,6	6,4	3,8	-	5,00	1,42	49,25
32,02	6,6	9,6	7,5	9,6	5,3	-	7,72	1,87	76,04
31,94	5,6	8,3	7,6	8,6	3,6*	-	7,53	1,35	74,17
32,96	6,1	9,6	8,3	8,1	3,3*	-	8,03	1,45	79,10
34,04	7,3	9,9	10,6	10,8	4,3	-	8,58	2,77	84,51
35,04	8,6	12,0	11,9	10,9	5,8	-	9,84	2,64	96,92
36,04	10,4	14,6	15,1	13,1	9,7	10,4	12,30	2,28	121,16
37,09	10,1	13,9	13,6	11,8	8,3	11,5	11,52	2,12	113,47
37,50	11,1	14,6	16,1	12,6	9,8	9,5	12,28	2,66	120,96
41,06	2,1	6,1	7,1	5,3	1,3	-	4,38	2,54	43,14
42,05	5,1	8,6	8,6	6,6	2,3	-	6,24	2,65	61,46
43,05	4,6	8,1	8,0	7,4	0,6*	-	7,03	1,65	69,25
44,14	-1,0	3,6	3,9	1,3	-5,2	1,5	0,68	3,39	6,70
44,83	6,1	9,5	9,6	8,8	1,3*	6,5	8,10	1,68	79,79
49,09	7,6	11,1	10,1	9,4	4,8	7,4	8,40	2,27	82,74
50,09	5,4	12,6	8,9	9,5	6,4	8,3	8,52	2,53	83,92
50,12	24,6	28,1	27,0	16,6*	28,8	24,5	26,60	1,98	262,01

51,13	27,0	29,0	27,6	23,1	-	28,0	29,94	2,27	265,36
51,87	29,0	29,2	-	25,9	28,0	27,9	28,00	1,31	275,80
55,12	28,1	32,1	27,1*	-	33,0	31,4	31,15	2,14	306,83
56,12	30,1	35,6	31,1*	-	36,0	36,4	34,53	2,97	340,12
57,13	32,1	34,9	31,0*	34,5	37,0	37,7	35,24	2,22	347,11
58,08	32,1	37,1	31,2*	37,5	38,0	40,0	36,94	2,93	363,86
61,31	34,1	38,6	32,6*	39,0	39,5	41,9	38,62	2,83	380,41
62,08	40,6	44,1	37,6*	43,5	44,0	45,9	43,62	1,92	429,66
63,14	42,6	45,6	39,1*	46,0	46,0	45,9	45,22	1,47	445,42
64,10	44,1	46,1	40,1*	47,8	47,5	48,4	46,78	1,72	460,78
66,33	46,1	48,5	43,1*	50,0	50,8	50,1	49,10	1,87	483,64
68,13	45,6	47,1	38,1*	45,0	46,0	46,5	46,04	0,81	453,49
69,13	45,1	46,1	39,6*	44,9	46,0	46,4	45,70	0,66	450,15
71,10	48,6	50,2	44,1*	49,7	50,0	50,4	49,78	0,71	490,33
72,10	46,5	47,6	41,6*	48,8	46,5	46,7	47,22	0,99	465,12
75,31	44,5	48,1	38,1*	47,0	46,4	47,4	46,68	1,37	459,80
76,08	45,6	47,0	39,1*	46,0	46,0	46,1	46,14	0,52	454,48
77,14	46,6	46,9	39,1*	45,8	47,0	47,2	46,70	0,55	469,00
78,22	49,6	50,0	42,8*	48,9	51,0	50,9	50,08	0,89	493,29
80,93	47,8	48,6	41,6*	46,2	48,8	48,4	47,96	1,05	472,41
82,00	50,1	51,1	45,1*	50,0	52,0	52,7	51,18	1,18	504,12
83,21	50,6	51,1	44,8*	50,0	52,9	52,8	51,48	1,31	507,08
86,23	56,1	55,6	48,6*	55,0	56,0	55,9	55,72	0,44	548,84
90,13	57,1	57,0	50,1*	56,1	58,0	57,9	57,22	0,77	563,62
91,13	56,1	55,8	49,8*	55,0	57,0	57,9	56,36	1,12	555,15

92,10	59,6	59,1	53,1*	58,0	60,0	60,9	59,52	1,08	586,27
93,84	59,6	57,9	52,3*	57,7	58,5	59,4	58,42	1,18	575,44
97,10	58,9	57,6	51,1*	56,0	58,2	58,9	57,92	1,20	570,51
99,06	59,6	58,0	51,6*	55,7	59,2	59,4	58,38	1,62	575,04
100,13	58,1	57,4	50,8*	55,3	57,6	58,4	57,36	1,22	565,00
101,07	57,7	56,4	49,4*	53,5	56,6	57,4	56,32	1,67	554,75
104,14	62,6	61,6	54,4*	59,5	62,5	62,5	61,74	1,32	608,14

Tabela A.1.2 - Valores lidos no segundo ensaio. Os valores com asteriscos foram eliminados pelos testes estatísticos. A média \bar{X}_{ij} e o desvio padrão S_{ij} foram calculados sem os valores rejeitados.

t (dias)	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	\bar{X}_{ij}	S _{ij}	valor re al de de formação (10 ⁻⁶)
28,80	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29,82	-0,1	-12,0	-0,4	0,1	-1,1	-0,1	-0,47	0,55	-4,63
30,02	-1,1	-1,9	-2,1	-2,4	-2,4	-0,7	-1,55	0,67	-15,27
31,02	3,9	2,8	4,6	3,6	4,9	5,5	4,22	0,97	41,57
31,94	4,1	2,7	4,6	3,6	4,5	5,4	4,15	0,93	40,88
32,96	5,4	4,1	5,6	4,6	5,4	6,0	5,8	0,70	51,03
34,04	6,7	4,3	5,9	4,9	7,3	7,4	6,08	1,28	59,89
35,04	8,1	5,3	8,0	7,0	8,6	8,4	7,57	1,24	74,57
36,04	9,9	6,3*	10,0	9,0	11,5	10,9	10,26	0,97	101,07
37,09	9,9	6,3	9,1	8,1	10,6	9,9	9,8	1,57	88,46
37,80	11,9	8,8*	11,6	10,6	13,1	11,4	11,72	0,91	115,45
41,06	1,9	-0,7	3,1	5,1	2,6	1,9	2,32	1,89	22,85
42,05	4,4	2,3*	5,6	5,6	5,6	5,1	5,26	0,53	51,82
43,05	3,7	0,8*	4,1	3,1	5,0	4,4	4,0	0,69	39,40
44,14	-1,6	-1,7	0,0	1,0	-0,9	0,9	-0,68	1,03	-6,70
44,83	5,9	3,3	6,1	5,1	6,9	4,9	5,37	1,24	52,90
49,09	5,9	3,3	6,0	5,0	6,6	5,9	5,45	1,17	53,67
50,09	5,8	3,8	6,0	5,0	6,6	6,90	5,68	1,13	55,95
51,13	5,4	4,8	5,9	4,9	6,1	6,9	5,67	0,80	55,86
51,87	5,7	5,3	6,6	5,6	6,1	5,2	5,75	0,52	56,64
55,12	6,7	5,1	6,1	5,1	5,1	5,9	5,67	0,67	55,86
56,12	8,4	7,8	10,1	9,1	11,1	9,2	9,28	1,18	91,42
57,13	8,9	7,3	10,6	9,6	11,6	8,4	9,40	1,55	92,60

58,08	8,9	7,3	10,1	9,1	11,1	7,5	9,00	1,47	88,66
61,31	9,1	8,3	10,6	9,6	10,0	8,1	9,28	0,97	91,42
62,08	12,9	10,8	14,1	13,1	16,0	13,1	13,33	1,70	131,31
63,14	13,9	12,3	15,1	14,1	17,1	13,4	14,32	1,64	141,07
64,10	13,9	11,8	15,5	14,5	16,1	13,3	14,18	1,55	139,69
66,33	16,5	14,1	17,7	19,1	19,0	14,4	16,80	2,19	165,50
68,13	12,9	10,3	14,1	15,1	15,0	12,4	13,30	1,83	131,02
69,13	13,9	12,1	15,6	17,6	16,1	13,6	14,82	1,98	145,99
71,10	18,4	15,3	19,8	19,4	19,4	13,5	17,63	2,61	173,67
72,10	13,4	10,3	15,1	14,1	16,6	11,4	13,43	2,34	132,30
75,31	14,4	10,3	15,6	12,6	15,9	11,8	13,43	2,23	132,30
76,08	12,9	10,1	13,6	13,9	14,6	10,9	12,67	1,78	124,81
77,14	14,7	10,3*	14,6	14,6	14,6	12,9	14,28	0,77	140,67
78,22	16,4	11,8	16,1	16,6	17,6	13,9	15,40	2,14	151,71
80,93	16,8	13,1	17,2	17,3	17,9	13,9	16,03	2,01	157,91
82,00	17,9	13,5	18,1	17,6	19,1	14,4	16,77	2,26	165,20
83,21	15,4	11,0	15,9	16,5	16,6	11,9	14,55	2,46	143,33
86,23	21,3	16,8	21,1	21,1	22,6	17,9	20,13	2,25	198,30
90,13	21,1	16,3	20,6	21,1	22,8	17,9	19,97	2,40	196,72
91,13	21,4	16,3	21,1	21,6	22,6	18,4	20,23	2,38	199,29
92,10	23,8	18,8	23,1	23,1	25,1	20,3	22,37	2,35	220,37
93,84	23,4	18,8	23,1	22,6	24,1	19,6	21,93	2,19	216,03
97,10	21,4	16,7	21,6	21,4	23,1	18,6	20,47	2,35	201,65
99,06	21,4	16,8	21,6	22,1	22,6	18,3	20,47	2,35	201,65
100,13	20,9	16,1	19,8	11,6	20,6	15,9	18,82	2,24	185,20

101,07	19,4	14,3	18,6	18,1	19,6	15,9	17,65	2,11	173,87
104,14	23,9	18,9	23,7	23,6	25,6	20,9	22,77	2,42	224,31

Tabela A.1.3 - Valores lidos no primeiro grupo de cargas do controle. Os valores com asteriscos foram eliminados pelos testes estatísticos. A média \bar{X}_{ij} e o desvio padrão S_{ij} foram calculados sem os valores rejeitados.

t (dias)	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	\bar{x}_{ij}	S _{ij}	valor real de deformação (10 ⁻⁶)
28,00	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00	0,00	0,00
29,82	1,7	1,1	1,8	-0,6	-0,7	0,6	0,65	1,10	6,40
30,02	1,3	0,1	0,8	-1,6	1,9	0,1	0,43	1,22	4,24
31,02	5,7	5,1	5,8	4,4	5,6	7,1	5,62	0,89	55,36
31,94	6,5	5,1	5,3	4,0	4,6	6,1	5,27	0,93	51,91
32,96	7,2	6,1	5,9	4,9	6,1	7,1	6,22	0,85	61,27
34,04	7,8	6,9	8,1	6,7	7,1	9,1	7,62	0,90	75,06
35,04	9,8	8,6	9,8	7,4	9,6	10,1	9,22	1,03	90,83
36,04	12,2	11,1	12,3	10,0	12,6	12,3	11,75	1,00	115,75
37,09	11,3	9,8	10,8	9,4	11,1	11,1	10,58	0,79	104,22
37,80	14,2	13,5	14,3	11,9	13,9	18,1	13,48	0,89	132,79
41,06	4,8	3,6	4,1	1,7*	4,1	4,9	4,30	0,54	42,36
42,05	7,3	5,1	7,8	5,4	7,1	6,6	6,55	1,08	64,52
43,05	6,3	4,6	6,7	3,8	5,1	4,5	5,17	1,12	50,93
44,14	2,5	0,6	3,3	-1,6	1,9	1,6	1,38	1,72	13,59
44,83	8,2	6,1	7,8	4,4	8,1	7,6	7,03	1,50	69,25
49,03	8,3	7,1	8,8	5,9	8,6	7,6	7,72	1,09	76,05
50,09	7,8	7,1	8,1	5,0	8,9	7,1	7,33	1,33	72,21
51,13	7,5	5,6	9,1	4,8	8,1	7,0	7,02	1,59	69,15
51,17	7,7	6,4	9,2	5,8	9,4	8,0	7,75	1,45	76,36
55,12	8,3	7,6	10,3	5,9	10,1	8,9	8,52	1,65	83,93
56,12	9,8	9,1	10,8	7,9	12,6	11,1	10,22	1,65	100,68
57,13	11,3	9,6	10,8	8,4	13,1	12,0	10,87	1,68	107,08

58,08	10,3	9,6	11,2	7,9	11,6	11,8	8,73	3,75	86,00
61,31	10,1	9,7	11,7	7,6	12,1	10,3	8,58	4,36	84,52
62,68	12,7	11,4	14,3	10,9	15,5	15,1	13,31	1,94	131,12
63,14	15,3	11,7	14,3	13,4	17,1	16,1	14,65	1,94	144,32
64,10	15,3	13,6	15,3	12,9	15,6	15,0	14,62	1,10	144,02
66,33	22,1	15,6	16,8	14,0	18,3	17,0	17,30	2,76	170,42
68,13	14,3	11,6	15,1	11,4	15,6	12,1	13,35	1,87	131,51
69,13	15,3	12,6	15,8	13,4	16,5	14,6	14,70	1,48	144,81
70,10	18,3	17,2	19,3	15,7	19,8	17,9	18,03	1,48	177,61
72,10	13,5	12,1	15,7	10,5	16,3	11,7	11,63	3,16	114,57
75,31	12,8	11,1	11,8	9,4	16,6*	12,6	11,54	1,37	113,68
76,08	12,8	11,1	12,3	7,9	14,1	11,4	11,60	2,10	114,27
77,14	13,8	11,1	14,3	9,9	15,6	12,6	12,88	2,12	126,88
78,22	15,5	13,4	16,2	13,0	19,1	15,6	13,80	2,64	135,94
80,93	16,8	13,6	15,9	12,4	17,6	15,1	15,23	1,96	150,03
82,00	14,3	14,6	15,8	13,7	18,8	16,8	15,65	1,91	154,17
83,21	8,8	12,1	14,3	10,9	17,1	19,6	12,97	2,96	127,77
86,23	16,3	17,1	20,3	17,1	21,6	19,6	18,66	2,13	183,82
90,13	16,3	17,4	19,8	17,1	21,9	20,6	18,85	2,23	185,69
91,13	16,3	17,4	20,1	16,4	23,1	20,8	19,00	2,72	187,17
92,10	17,8	19,0	22,5	18,9	25,3	23,5	21,66	3,01	213,37
93,84	18,8	19,3	22,1	18,7	24,1	21,1	20,68	2,16	203,72
97,10	16,3	17,4	20,3	17,4	23,1	21,1	19,27	2,64	189,83
99,06	15,8	17,1	20,1	16,9	23,1	19,6	18,77	2,69	184,90
100,13	15,8	16,3	18,8	15,4	21,1	18,6	17,67	2,21	174,07

101,07	13,9	14,2	18,3	13,4	19,1	17,1	16,00	2,47	157,62
104,14	18,3	19,1	22,3	18,4	24,6	22,6	20,88	2,64	205,69

Tabela A.1.4 - Valores lidos no segundo grupo de corpos de controle. Os valores com asteriscos foram eliminados pelos testes estatísticos. A média \bar{X}_{ij} e o desvio padrão S_{ij} foram calculados sem os valores rejeitados.

TABELA A.2

t (dias)	dif. total do 1º ensaio (10 ⁻⁶)	def. lenta 1º ensaio (10 ⁻⁶)	def. total 2º ensaio (10 ⁻⁶)	def. lenta 2º ensaio (10 ⁻⁶)
28.80	0	0	0	0
28.83	139.19	0	148.45	0
29.00	172.69	38.50	201.00	DESCARGA
30.00	210.19	71.00	54.00	
31.00	230.69	91.50	35.00	
32.00	248.69	109.50	27.50	
33.00	263.69	124.50	19.50	
34.00	276.19	137.00	17.50	
35.00	287.19	148.00	16.50	
36.00	297.19	158.00	16.00	
37.00	306.19	167.00	16.00	
38.00	313.19	174.00	15.57	
39.00	319.19	180.00	15.57	
40.00	324.69	185.50	15.57	
41.00	329.69	190.50	15.57	
42.00	334.69	195.50	15.57	
43.00	339.19	200.00	15.57	
44.00	342.69	203.50	15.57	
45.00	346.19	207.00	15.57	
46.00	349.69	210.50	15.57	
47.00	357.69	213.50	15.57	
48.00	355.69	216.50	15.57	
49.00	358.69	219.50	15.57	
50.00	361.69	222.50	15.57	
50.09	-	-	15.57	
50.12	-	-	197.91	
51.00	364.19	225.00	204.91	7.00
52.00	366.69	227.50	212.41	14.50
53.00	368.69	229.50	220.41	22.50
54.00	371.19	232.00	228.91	31.00
55.00	373.36	234.50	236.91	39.00
56.00	375.69	236.50	244.91	47.00
57.00	377.69	238.50	252.91	55.00
58.00	380.19	241.00	260.91	63.00
59.00	382.69	243.50	268.91	71.00
60.00	385.19	246.00	276.41	78.50
61.00	387.19	248.00	283.41	85.50
62.00	389.19	250.00	289.81	92.00
63.00	391.19	262.00	294.81	97.00
64.00	393.19	254.00	300.41	102.50

65.00	395.19	256.00	305.41	107.50
66.00	397.19	258.00	309.91	112.00
67.00	399.19	260.00	314.41	116.50
68.00	401.69	262.50	318.41	120.50
69.00	403.69	264.50	322.41	124.50
70.00	405.69	266.50	324.91	127.00
71.00	408.19	269.00	327.91	130.00
72.00	410.19	271.00	330.41	132.50
73.00	412.60	273.50	331.91	134.00
74.00	414.69	275.50	333.91	136.00
75.00	416.69	277.50	335.91	138.00
76.00	418.69	279.50	337.91	140.00
77.00	420.69	281.50	339.91	142.00
78.00	421.69	282.50	341.91	144.00
79.00	423.19	284.00	343.91	146.00
80.00	424.69	285.50	345.91	148.00
81.00	426.19	287.00	347.91	130.00
82.00	428.19	289.00	349.91	152.00
83.00	430.19	291.00	351.91	154.00
84.00	431.69	292.50	353.91	156.00
85.00	433.19	294.00	355.41	157.50
86.00	434.19	295.00	356.91	159.00
87.00	435.69	296.50	359.41	161.50
88.00	436.69	297.50	361.41	163.50
89.00	437.69	298.50	362.91	165.00
90.00	439.19	300.00	364.91	167.00
91.00	440.19	301.00	366.91	169.00
92.00	441.69	302.50	368.91	171.00
93.00	443.19	304.00	370.41	172.50
94.00	444.69	305.50	372.41	174.50
95.00	445.69	306.50	373.91	176.00
96.00	446.69	307.50	375.91	178.00
97.00	448.19	309.00	377.91	180.00
98.00	449.19	310.00	379.91	182.00
99.00	450.19	311.00	381.91	183.50
100.00	451.19	312.00	383.91	185.00

Tabela A.2 - Deformação total e deformação lenta do 1º e 2º ensaios, retirados das curvas que melhor se adaptaram aos resultados experimentais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ARUTYUNYAN, N.K. Some problems in the theory of creep. Oxford, Pergamon Press, 1966. xi+290p. (International Series of Monographs in Civil Engineering, 1).
2. BARBOSA, Guilherme Toledo. Deformação lenta do concreto submetido a temperaturas elevadas. Porto Alegre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 1979. x+180f. Diss. maestr. engenharia civil.
3. BAZANT, Z.P. Numerical determination of long-range stress history from strain history in concrete. Matériaux et Constructions, Paris, 5(27):135-41, mai-juin 1972.
4. _____. Phenomenological theories for creep of concrete based on rheological models. Acta Technica Csav, Praha, 11(1): 82-108, Jan. 1966.
5. BAZANT, Z.P. & NAJJAR, L.P. Comparison of approximate linear methods for concrete creep. Journal of Structural Division, New York, ASCE, 99(9):1851-74, Sept. 1973.
6. CARNEIRO, F.L. Efeitos estruturais do comportamento reológico do concreto. Revista Brasileira de Estradas de Rodagem, Rio de Janeiro, 3(10):5-25, 1975.
7. CHRISTENSEN, R.M. Theory of viscoelasticity; an introduction. New York, Academic Press, 1971. xi+245p.
8. CONSTANTINESCU, D.R. & ILLSTON, J.M. Direct methods of analysing the structural effects of linear creep of ageing concrete. Matériaux et Constructions, Paris, 7(42):395-401, nov.-dec. 1974.
9. CREUS, Guillermo. Viscoelasticidade. Porto Alegre, Univer-

- sidade Federal do Rio Grande do Sul, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, s.d. mimeogr. Polígrafo da Disciplina de Viscoelasticidade e Plasticidade.
10. DAVIS, R.E. & DAVIS, H.E. Flow of concrete under the action of sustained loads. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 27:863, Mar. 1931.
 11. DISCHINGER, F. Elastische und plastische verformungen der eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbr'uchen. Der Bauingenieur, Berlin, 20(21-22):286-94, Juni 1939.
 12. _____. Untersuchungen über die knicksicherheit, die elastische verformung und das kriechen des betons bei Bogenbrücken. Der Bauingenieur, Berlin, 18, 1937.
 13. DUNCAN, Acheson, J. Quality control and industrial statistics. 3.ed. Homewood, Richard Irwin, 1965. p.640, 906, 935.
 14. FLÜGGE, Wilhelm. Viscoelasticity. 2.ed. Berlin, Springer-Verlag, 1975. vii+194p.
 15. FREUDENTHAL, A.M. & ROLL, Frederic. Creep and creep-recovery of concrete under high compressive stress. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 54(12):1111-42, June 1958.
 16. GRANVILLE, W.H. The creep or flow of concrete under load. London, Department of Scientific and Industrial Research, 1930. p.11. (Building Research Technical Paper, 12).
 17. HERMITE, R. What do we know about the plastic deformation and creep of concrete? Bulletin de la Rilem, Paris, (1): 21-48, Mars. 1959.
 18. ISHAI, Ori. Elastic and inelastic behavior of hardened mortar in torsion. In: SYMPOSIUM ON CREEP OF CONCRETE.

- Detroit, American Concrete Institute, 1964. p.65-94.
(Publication SP-9).
19. JORDAAN, Ian J.; ENGLAND, George L.; KHALIFA, Magdi M.A. Creep of concrete; a consistent engineering approach. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 103(3):475-91, Mar. 1977.
 20. KRASNOV, M.L.; KISELIOV, A.I.; MAKARENKO, G.I. Ecuaciones integrales. Moscow, Mir, 1977. 189p.
 21. LEONHARDT, Fritz. Hormigón pretensado. Madrid, Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y del Cemento, 1967. xxvii+762p.
 22. LIMA, Victor M. Souza; GUEDES, Quintiliano M.; ANDRADE, Walton Pacelli de; BASTOS, Josemar Teixeira. Cálculo da relaxação a partir da fluência do concreto. Construção Pesada, São Paulo, 9(104):84-93, set. 1979.
 23. NEVILLE, A.M. Creep of concrete; plain, reinforced, and prestressed. Amsterdam, North-Holland, 1970. xix+622p.
 24. NIELSEN, L.F. On the applicability of modified dischinger equations. Cement and Concrete Research, Elmsford, 7(2):149-60, 1977.
 25. NOWACKI, Witold. Théorie du fluage. Paris, Eyralles, 1965. 219p.
 26. ROSS, A.D. Concrete creep data. Structural Engineer, London, 15(8):314-26, Aug., 1937.
 27. RÜSCH, Hubert. Researches toward a general flexural theory for structural concrete. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 57(1):1-28, July 1960.

28. SHEATH, N.J. & LISON, C. Statistical designs and analysis of engineering experiments. New York, McGraw-Hill, 1973.