

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

UMA EXTENSÃO DO TEOREMA DE GAUSS-BONNET PARA
SUPERFÍCIES COM FINS DO TIPO CONE

por

FLÁVIA MALTA BRANCO

Porto Alegre, setembro de 1999

UFPEL
SISTEMAS DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA SETORIAL DE MATEMÁTICA

Dissertação submetida por FLÁVIA MALTA BRANCO*
como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre
em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em
Matemática do Instituto de Matemática da Universidade
Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Jaime Bruck Ripoll

Banca Examinadora:

Dr. Artur Oscar Lopes

Dra. Elizabeth Ferreira da Costa Gomes

Dr. Leonardo Bonorino

Dra. Kátia Frensel

Data de Defesa: 29 de setembro de 1999.

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível
Superior - CAPES

Aos meus pais

Dilson e Zair

Agradecimentos

Agradeço a Deus, aos meus pais, Dilson e Zair, e aos meus irmãos, Rogério e Dilson, pelo amor, pela confiança, pelo apoio incondicional e por compreenderem as minhas ausências. As minhas vitórias são também de vocês.

A Lica pela amizade, cumplicidade, paciência e pelo incentivo nas horas difíceis.

A Neda e a Vera Bauer por terem me “adotado” com o carinho e o amor de verdadeiras mães, pelos conselhos e pelas valiosas lições de vida.

A Graci e a Izabelzinha pela amizade, pelas lasanhas e pelos momentos de alegria e descontração.

Ao Dilson, Gê, Mara, Vera Lupinacci, Simone e demais colegas da pós-graduação pela amizade, carinho e pela alegre convivência.

Ao Alexandre pelo carinho, pela compreensão e por, mesmo à distância, me apoiar e incentivar.

Ao professor Jaime Ripoll, pela orientação e pela paciência, e aos professores da pós-graduação, especialmente a Cydara Ripoll, Miguel Ferrero e Claus Doering, pela atenção e pelos ensinamentos.

A Izabel, Mara e Rosane, nossas secretárias, pela simpatia e disponibilidade.

Resumo

Neste trabalho definimos as superfícies com fins do tipo cone com coeficiente $\alpha \geq 0$, uma classe de superfícies completas, não compactas e bem comportadas no infinito, e apresentamos uma extensão do Teorema de Gauss-Bonnet para estas superfícies com coeficiente $\alpha > 0$.

Abstract

In this work we define α -conical type end surfaces, $\alpha \geq 0$, a class of complete non compact surfaces having a nice behaviour at infinity, and we present an extension of the Theorem of Gauss-Bonnet for these surfaces such that $\alpha > 0$.

Índice

1	Introdução	2
2	Teorema de Gauss-Bonnet	4
2.1	Curvas Regulares do \mathbb{R}^3	4
2.2	Superfícies Regulares com ou sem Bordo do \mathbb{R}^3	5
2.3	Integração em Curvas	9
2.4	Integração em Superfícies	9
2.5	Característica de Euler	12
2.6	Curvatura Geodésica	13
3	Superfícies Completas Não Compactas	16
3.1	Superfícies com Curvatura Total Finita	16
3.2	Superfícies Próprias	23
3.3	Superfícies com Topologia Finita	24
3.4	Superfícies com Fins do Tipo Cone com Coeficiente α	25
4	Extensão do Teorema de Gauss-Bonnet	30

1. Introdução

Um dos resultados mais importantes da geometria diferencial de superfícies é o Teorema de Gauss-Bonnet. Ele estabelece uma relação entre a topologia de superfícies compactas, através da característica de Euler, e a sua curvatura total.

O objetivo deste trabalho é definir uma extensão desse teorema para superfícies $M \subset \mathbb{R}^3$ completas e não compactas, assumindo-se que M tenha curvatura total finita.

No entanto, como esta classe de superfícies é muito diversificada, existem casos em que não faz sentido tentarmos definir uma relação entre a sua curvatura total e a sua topologia. Um destes casos ocorre quando M tem curvatura total finita mas não é uma superfície “bem comportada” no espaço. Por exemplo quando M é um cilindro sobre uma curva plana γ . A curvatura Gaussiana de M é zero em todos os seus pontos e, portanto, M tem curvatura total finita também zero. Entretanto, como γ é uma curva qualquer, podemos tomá-la não própria.

Um outro caso acontece quando M tem curvatura total finita mas não tem topologia finita. Aqui podemos imaginar M como sendo um plano de onde retiramos uma quantidade enumerável de discos abertos e, sobre estes abertos, colamos metades de cilindros de tal forma que M tenha curvatura total finita. Neste

caso, por construção, M não tem topologia finita.

Como nossa intenção é relacionar a curvatura total de M com sua topologia, uma condição necessária é que M tenha topologia finita. Por outro lado, como estamos trabalhando intrínseca e extrínsecamente em \mathbb{R}^3 , isto é, com a curvatura Gaussiana de superfícies dentro do \mathbb{R}^3 , é natural exigirmos que a topologia de M seja compatível com a topologia do espaço, ou seja, que M seja própria.

Uma hipótese natural sobre M que implica que ela satisfaça estas condições é a de que ela seja uma superfície com fins do tipo cone, conforme veremos na definição 8.

A condição da superfície M ter fins do tipo cone é natural pois, de acordo com o teorema 1.3 de [1] (enunciado precisamente no teorema 3.2 adiante), toda superfície completa cuja segunda forma fundamental tende rapidamente a zero é uma superfície com fins do tipo cone.

Neste trabalho vamos estender o teorema de Gauss-Bonnet para as superfícies com fins do tipo cone. Ele está dividido em 3 partes: na primeira seção damos algumas noções preliminares e enunciamos o teorema de Gauss-Bonnet para superfícies compactas; na segunda seção definimos e apresentamos alguns exemplos de superfícies completas com curvatura total finita e superfícies com fins do tipo cone; na última seção enunciamos e demonstramos a extensão do teorema de Gauss-Bonnet para as superfícies com fins do tipo cone.

2. Teorema de Gauss-Bonnet

2.1. Curvas Regulares do \mathbb{R}^3

Um subconjunto $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, $\gamma \neq \emptyset$, é dito uma *curva regular do \mathbb{R}^3* se, para todo $p \in \gamma$, existe uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \gamma$ tal que:

- i) $\alpha(0) = p$;
- ii) $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \alpha((-\varepsilon, \varepsilon))$ é um homeomorfismo;
- iii) $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

As aplicações α que satisfazem as condições acima são ditas *parametrizações locais de γ* . Pode-se mostrar que, sendo γ uma curva regular conexa e compacta do \mathbb{R}^3 , existe uma aplicação diferenciável sobrejetora $\alpha : [0, 1] \rightarrow \gamma$ tal que:

- i) $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in [0, 1]$;
- ii) $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ com $t_1 < t_2$ se e somente se $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$.

Nestas condições dizemos que α é uma *parametrização global de γ* .

Entendemos uma *orientação de γ* como a escolha de um sentido de percurso de γ . Uma parametrização, local ou global, α de uma curva regular orientada γ é *compatível com a orientação de γ* se, ao variarmos positivamente o parâmetro t de α , o ponto $\alpha(t)$ desloca-se sobre γ no sentido da orientação de γ .

Na figura abaixo temos um exemplo de curva orientada γ cujo sentido de

percurso está indicado pela seta.

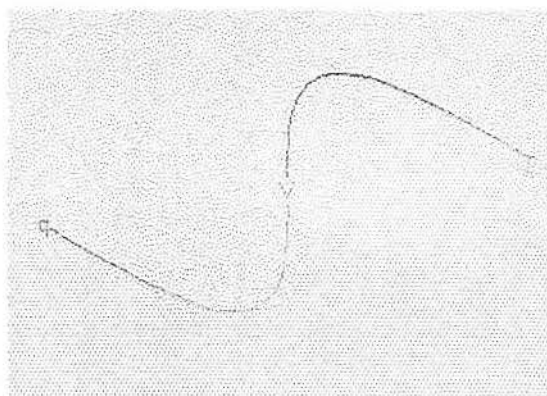


Figura 2.1:

2.2. Superfícies Regulares com ou sem Bordo do \mathbb{R}^3

Usando-se a notação

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\},$$

dizemos que o subconjunto U é um *aberto de* \mathbb{R}_+^2 se existe um aberto V de \mathbb{R}^2 tal que $U = \mathbb{R}_+^2 \cap V$.

Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$, com $S \neq \emptyset$, é dito uma *superfície regular do* \mathbb{R}^3 se, para cada $p \in S$, existem um aberto $U \subset \mathbb{R}_+^2$ e uma aplicação diferenciável $\varphi : U \rightarrow S$ tais que:

- i) $p \in \varphi(U)$;

ii) $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ é um homeomorfismo;

iii) $d\varphi_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora $\forall x \in U$.

(U, φ) satisfazendo as propriedades acima é dita uma *parametrização local* de S .

O *bordo* ∂S de S é definido por

$$\partial S = \{p \in S \mid \exists (U, \varphi) \text{ parametrização local de } S \text{ tal que } p = \varphi(q) \text{ com } q \in \partial U\}$$

onde $\partial U = U \cap \{y = 0\} = U \cap \partial\mathbb{R}_+^2$.

Se $\partial S = \emptyset$ dizemos que S é uma *superfície regular sem bordo* ou simplesmente uma superfície regular. Se $\partial S \neq \emptyset$ então S é dita uma *superfície regular com bordo*.

Pode-se mostrar que, sendo S uma superfície regular com bordo, ∂S é uma curva regular do \mathbb{R}^3 .

Dizemos que uma família de parametrizações locais de S dada por $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ é um *atlas* de S se

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \varphi_\alpha(U_\alpha) = S.$$

Seja $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ um atlas de S . Dadas $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}$ tais que $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, pode-se mostrar que $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ é um difeomorfismo de um

aberto de \mathbb{R}^2 sobre um aberto de \mathbb{R}^2 . Segue-se que $\det d(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)_x \neq 0$, para todo x que pertence ao domínio de $\varphi_\beta^{-1} \cap \varphi_\alpha$. Como a função determinante é contínua, o sinal de $\det d(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)_x$ é constante em todos os pontos x do seu domínio. Nestas condições, dizemos que um atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ de S é *coerente* se, dadas quaisquer $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}$ com $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, tivermos $\det d(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)_x > 0$ para todo x no domínio de $\varphi_\beta^{-1} \cap \varphi_\alpha$.

Uma superfície S é dita *orientável* quando admite um atlas coerente. Pode-se mostrar que S é orientável se e somente se admite um campo unitário normal de vetores $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Uma superfície *orientada* é uma superfície orientável munida de um campo normal $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Dizemos que um atlas coerente \mathcal{A} é *compatível com a orientação dada pelo campo N* quando a condição

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \\ N(\varphi(x, y)) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall (x, y) \in U \quad (2.1)$$

é satisfeita para toda $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$.

Seja (S, \mathcal{A}) uma superfície regular orientada com bordo, onde \mathcal{A} é compatível com a orientação definida por N . Dado um ponto $p \in \partial S$ podemos tomar uma

parametrização local $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ com $\varphi(q) = p$. Quando consideramos o sentido de percurso em ∂S induzido pelo vetor $d\varphi_q(e_1)$ tangente a ∂S no ponto p , obtemos uma orientação no bordo de S dita *orientação induzida no bordo*.

Exemplo 1. *Seja S um cilindro compacto munido de um atlas \mathcal{A} compatível com N , onde consideramos o vetor $N(p)$ apontando para o exterior da superfície. O bordo ∂S de S é formado pelas circunferências que limitam S e sua orientação induzida é dada como mostra a figura.*

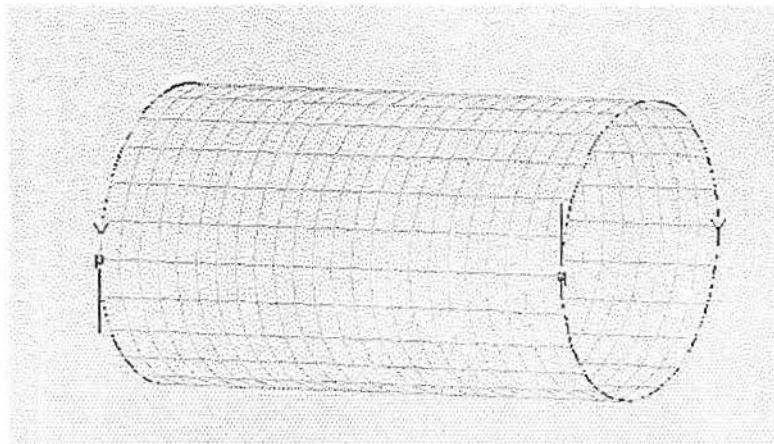


Figura 2.2:

2.3. Integração em Curvas

Seja γ uma curva regular orientada e compacta do \mathbb{R}^3 . Dada uma função $f : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, definimos a *integral de f sobre γ* como

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^1 f(\alpha(t)) |\alpha'(t)| dt$$

onde $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização global de γ compatível com a sua orientação. Temos que $\int_{\gamma} f ds$ está bem definida uma vez que se pode mostrar que independe da parametrização global α escolhida.

2.4. Integração em Superfícies

Consideraremos, a partir daqui, S sendo uma superfície regular compacta, com ou sem bordo, do \mathbb{R}^3 .

Uma *triangulação* de S consiste em uma coleção $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ de subconjuntos fechados de S e uma família de homeomorfismos $\{\psi_i : T'_i \rightarrow T_i\}_{i=1, \dots, n}$, onde cada T'_i é um triângulo usual em \mathbb{R}^2 e

$$i) \bigcup_{i=1}^n T_i = S;$$

ii) se $T_i \cap T_j \neq \emptyset, i \neq j$, então T_i e T_j têm uma aresta completa em comum ou um único vértice em comum, onde o que entendemos por vértice e aresta de T_i está definido a seguir.

Os subconjuntos T_i são também ditos *triângulos* assim como os seus subcon-

juntos, dados pela imagem dos vértices e arestas do triângulo T'_i por ψ_i , são chamados *vértices* e *arestas* respectivamente.

Pode-se mostrar que toda superfície regular admite uma triangulação e que, dado $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ atlas de S , podemos obter uma triangulação $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ de S tal que, dado $T_i \in \mathcal{T}$, existe $(U_{\alpha_i}, \varphi_{\alpha_i}) \in \mathcal{A}$ tal que $T_i \subset \varphi_{\alpha_i}(U_{\alpha_i})$. Uma tal triangulação é dita *subordinada ao atlas \mathcal{A}* .

Uma *2-forma diferencial em S* é uma aplicação ω que associa a cada ponto $p \in S$ uma forma bilinear alternada $\omega(p) : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ definida no espaço vetorial tangente $T_p S$ e diferenciável no seguinte sentido: dada uma parametrização local $\varphi : U \rightarrow S$, a aplicação

$$f(x, y) = \omega(\varphi(x, y)) \left(d\varphi_{(x,y)}(e_i), d\varphi_{(x,y)}(e_j) \right), \quad (x, y) \in U$$

é diferenciável, onde e_i e e_j são vetores da base $B = \{e_1, e_2\}$ do \mathbb{R}^2 .

Suponhamos S orientada. Sejam $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ um atlas compatível com a orientação de S e $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ uma triangulação de S subordinada ao atlas \mathcal{A} . Definimos a *integral da 2-forma diferencial ω sobre S* como

$$\int_S \omega = \sum_{i=1}^n \iint_{\varphi_{\alpha_i}^{-1}(T_i)} \omega(\varphi_{\alpha_i}(x, y)) \left(\frac{\partial \varphi_{\alpha_i}}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi_{\alpha_i}}{\partial y}(x, y) \right) dx dy. \quad (2.2)$$

Pode-se mostrar que $\int_S \omega$ independe do atlas e da triangulação tomados.

Dado $p \in S$, consideramos em $T_p S$ uma base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ compatível com a orientação de S , isto é, tal que os vetores e_1, e_2 e $N(p)$ satisfaçam a condição dada em (2.1). Definimos a *forma área de S* como a 2-forma diferencial dS em S dada por

$$dS(p)(v_1, v_2) = \det(a_{ij})$$

onde $v_j \in T_p S$ e $v_j = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2$, com $j = 1, 2$. Temos que dS está bem definida uma vez que podemos mostrar que, dado o ponto p , dS independe da base ortonormal de $T_p S$ escolhida, desde que seja compatível com a orientação de S .

Por outro lado, dado $p \in S$, podemos tomar uma parametrização local (U, φ) de S , compatível com a sua orientação, tal que $p = \varphi(x, y)$. Temos que $\mathcal{B}_1 = \{(\partial\varphi/\partial x)(x, y), (\partial\varphi/\partial y)(x, y)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{e_1, e_2\}$ são bases de $T_p S$, onde \mathcal{B}_2 é a base ortonormal obtida de \mathcal{B}_1 através do processo de ortonormalização de Gram-Schmidt. Considerando-se v_1 e v_2 vetores de $T_p S$, podemos escrevê-los da seguinte forma

$$v_j = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 = b_{1j}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) + b_{2j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y), \quad j = 1, 2.$$

Determinando-se os escalares b_{ij} , verificamos que

$$\det(a_{ij}) = \sqrt{EG - F^2} \det(b_{ij}),$$

onde E , F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental. Assim, tomando-se B_1 como base de $T_p S$, temos que a forma área de S é dada por

$$dS(p)(v_1, v_2) = \sqrt{EG - F^2} \det(b_{ij}).$$

Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos a *integral de f sobre S* como a integral da 2-forma diferencial $f dS$ sobre S . Assim, usando-se (2.2), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_S f &= \int_S f dS \\ &= \sum_{i=1}^n \iint_{\varphi_{\alpha_i}^{-1}(T_i)} f(\varphi_{\alpha_i}(x, y)) dS(\varphi_{\alpha_i}(x, y)) \left(\frac{\partial \varphi_{\alpha_i}}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi_{\alpha_i}}{\partial y}(x, y) \right) dx dy \\ &= \sum_{i=1}^n \iint_{\varphi_{\alpha_i}^{-1}(T_i)} f(\varphi_{\alpha_i}(x, y)) \sqrt{EG - F^2} dx dy. \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.5. Característica de Euler

Definição 1. Dada uma triangulação $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ de S denotaremos por F o número de triângulos (faces), por A o número de arestas e por V o número de vértices da triangulação. O número $\chi(S) = F - A + V$ é definido como a *característica de Euler de S* e independe da triangulação tomada.

Exemplo 2. Seja a superfície $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Vamos considerar a triangulação T de \mathbb{S}^2 dada como na figura abaixo. Esta triangulação

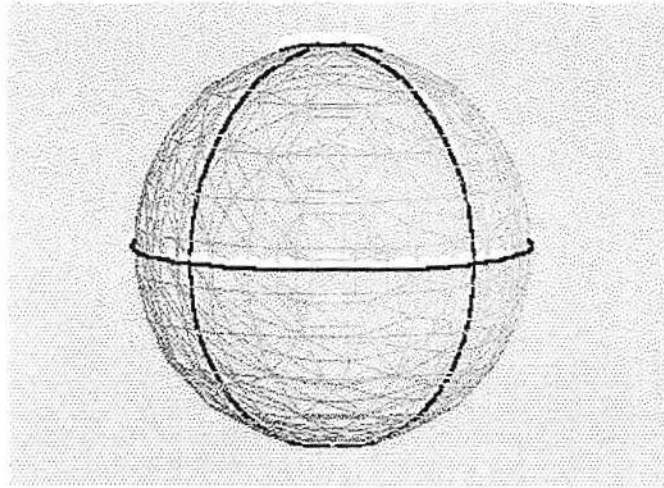


Figura 2.3:

divide \mathbb{S}^2 em 8 triângulos, tendo-se: $F = 8$, $A = 12$ e $V = 6$. Então,

$$\chi(\mathbb{S}^2) = 2$$

2.6. Curvatura Geodésica

Considerando-se S uma superfície regular, orientada e com bordo ∂S , podemos tomar em ∂S a orientação induzida. Dado $p \in \partial S$, seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização local de ∂S em torno de p , compatível com a sua orientação, tal que $\alpha(0) = p$ e $|\alpha'(t)| = 1$.

Definição 2. A curvatura geodésica orientada de ∂S em S é definida pela aplicação

$k_g : \partial S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$k_g(p) = \langle \alpha''(0), N(p) \times \alpha'(0) \rangle$$

onde $N(p)$ é um campo normal de vetores unitários que define uma orientação em S .

Como a orientação de ∂S é induzida pela orientação de S , k_g independe da orientação tomada na superfície. Ou seja, mesmo variando a orientação de S , o vetor $N(p) \times \alpha'(0)$ não se altera e pode-se mostrar que ele aponta para o interior da superfície S .

Seja o vetor $n(p) = -(N(p) \times \alpha'(0))$. Observamos que $n(p)$ é unitário e aponta para o exterior de S . Assim, definimos $n(p)$ como o *vetor conormal externo* a ∂S em p .

Com esta notação podemos redefinir a curvatura geodésica orientada de ∂S em S como

$$k_g(p) = - \langle \alpha''(0), n(p) \rangle . \tag{2.4}$$

Esta será a definição que adotaremos.

Podemos agora enunciar o teorema global de Gauss-Bonnet.

Teorema 2.1 (Teorema de Gauss-Bonnet). *Seja S uma superfície regular, compacta, orientada e com bordo ∂S . Tomando-se em ∂S a orientação induzida, temos*

$$\int_S K = 2\pi\chi(S) - \int_{\partial S} k_g ds$$

onde $K : S \rightarrow \mathbb{R}$ é a curvatura gaussiana de S e $k_g : \partial S \rightarrow \mathbb{R}$ é a curvatura geodésica orientada de ∂S em S .

Corolário 1. *Se $\partial S = \emptyset$ temos*

$$\int_S K = 2\pi\chi(S).$$

3. Superfícies Completas Não Compactas

3.1. Superfícies com Curvatura Total Finita

Vamos considerar, a partir daqui, $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular completa, orientada, não compacta, sem bordo.

Definição 3. *Uma **exaustão regular** de M é uma coleção de compactos $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de M tal que:*

- i) C_n é uma superfície regular com bordo do \mathbb{R}^3 ;
- ii) $C_n \subset C_{n+1}$;
- iii) $\cup_n C_n = M$.

Seja $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma exaustão regular de M . Dado $n \in \mathbb{N}$, é claro que a forma área dC_n de C_n coincide com dS/C_n , ou seja, a forma área dS de M restrita ao compacto C_n .

Definição 4. *Sejam M uma superfície e K sua curvatura gaussiana. Dizemos que M tem **curvatura total finita** se existe $T \in \mathbb{R}$ tal que, dada uma exaustão regular $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de M , tenhamos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} K = T.$$

No entanto nem sempre este limite existe, como podemos verificar nos exemplos abaixo.

Exemplo 3. Seja M a superfície de revolução obtida pela rotação da curva $\alpha(v) = (v, 2 + \operatorname{sen} v, 0)$ em torno do eixo ox . Temos que $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,2}$ é uma família de parametrizações para M onde $U_1 = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$, $U_2 = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ e

$$\varphi_1(u, v) = \varphi_2(u, v) = (v, (2 + \operatorname{sen} v) \cos u, (2 + \operatorname{sen} v) \operatorname{sen} u).$$

Seja a exaustão regular $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ de M , onde cada elemento é dado pela região limitada entre $v = -n\pi$ e $v = (n+1)\pi$, conforme mostra a figura abaixo. Podemos

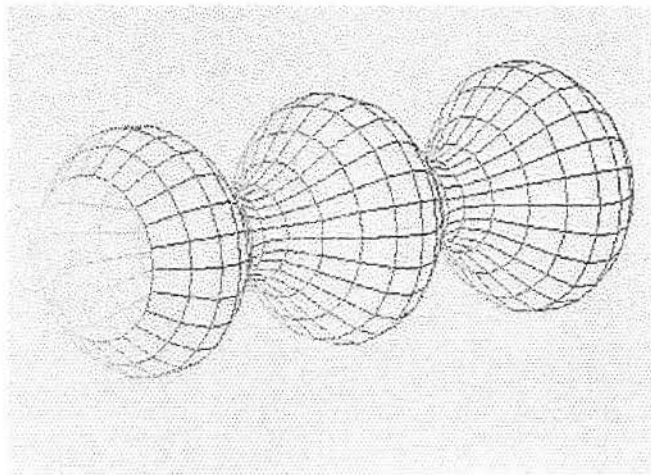


Figura 3.1:

ainda tomar C_n através das parametrizações φ_i da seguinte forma:

$$C_n = \varphi_1([\pi/2, 3\pi/2] \times [-n\pi, (n+1)\pi]) \cup \varphi_2([-\pi/2, \pi/2] \times [-n\pi, (n+1)\pi])$$

Então, como os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais são dados

por

$$\begin{aligned} E(u, v) &= (2 + \operatorname{sen} v)^2 & F(u, v) &= 0 & G(u, v) &= 1 + \cos^2 v \\ e(u, v) &= \frac{-(2 + \operatorname{sen} v)}{\sqrt{1 + \cos^2 v}} & f(u, v) &= 0 & g(u, v) &= \frac{-\operatorname{sen} v}{\sqrt{1 + \cos^2 v}} \end{aligned}$$

e como

$$K(\varphi(u, v)) = \frac{e(u, v)g(u, v) - f^2(u, v)}{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)}$$

obtemos, utilizando (2.3), que

$$\begin{aligned} \int_{C_n} K &= \int_{-n\pi}^{(n+1)\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} K \sqrt{EG - F^2} du dv + \int_{-n\pi}^{(n+1)\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} K \sqrt{EG - F^2} du dv \\ &= \int_{-n\pi}^{(n+1)\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} v}{(1 + \cos^2 v)^{3/2}} du dv + \int_{-n\pi}^{(n+1)\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} v}{(1 + \cos^2 v)^{3/2}} du dv \\ &= 2\pi \int_{-n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} v}{(1 + \cos^2 v)^{3/2}} dv \\ &= -2\pi \left. \frac{\cos v}{\sqrt{1 + \cos^2 v}} \right|_{-n\pi}^{(n+1)\pi} \end{aligned}$$

Isto é

$$\int_{C_n} K = \begin{cases} 2\sqrt{2}\pi, & \text{para } n \text{ par} \\ -2\sqrt{2}\pi, & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Concluimos que, para esta exaustão regular, $\int_{C_n} K$ não possui limite quando $n \rightarrow \infty$ e portanto M não tem curvatura total finita.

Exemplo 4. Sejam M um helicóide, cuja parametrização é dada por

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

e $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma exaustão regular de M tal que C_n é a região limitada por $u = v = -n$ e $u = v = n$, como vemos na figura abaixo.

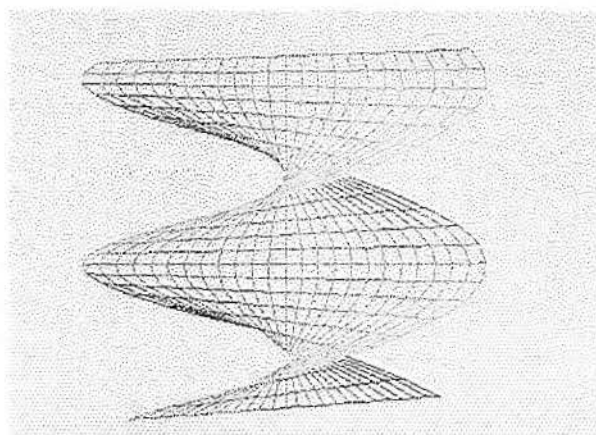


Figura 3.2:

Determinando-se os coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais encontramos:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= 1 + v^2 & F(u, v) &= 0 & G(u, v) &= 1 \\ e(u, v) &= 0 & f(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}} & g(u, v) &= 0 \end{aligned}$$

Obtemos assim

$$\begin{aligned}\int_{C_n} K &= \int_{-n}^n \int_{-n}^n K \sqrt{EG - F^2} dudv \\ &= - \int_{-n}^n \int_{-n}^n \frac{1}{(1+v^2)^{3/2}} dudv = -2n \int_{-n}^n \frac{1}{(1+v^2)^{3/2}} dv \\ &= \frac{-4n^2}{\sqrt{1+n^2}}\end{aligned}$$

Como, para esta exaustão regular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} K = \infty$$

temos que M não tem curvatura total finita.

Veremos agora um exemplo de superfície com curvatura total finita.

Exemplo 5. Sejam M o parabolóide dado por $z = x^2 + y^2$ e $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,2}$ um atlas de M onde $U_1 = (0, \pi) \times \mathbb{R}$, $U_2 = (\pi/2, 3\pi/2) \times \mathbb{R}$ e

$$\varphi_1(u, v) = \varphi_2(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v^2).$$

Vamos considerar a exaustão regular $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ de M , onde cada elemento é dado pela região limitada entre $v = 0$ e $v = n$, conforme mostra a figura.

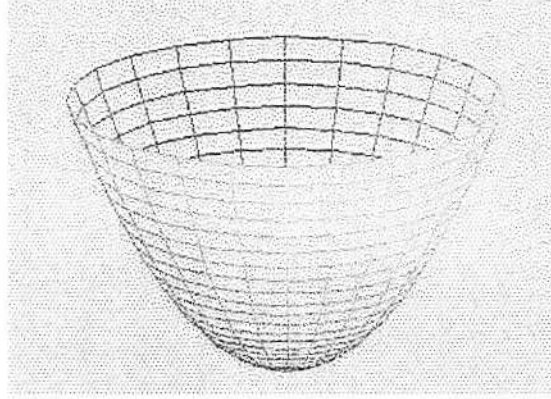


Figura 3.3:

Através das parametrizações φ_i , os compactos C_n podem ser escritos como

$$C_n = \varphi_1 \left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] \times \left[-\sqrt{n}, \sqrt{n} \right] \right) \cup \varphi_2 \left(\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right] \times \left[-\sqrt{n}, \sqrt{n} \right] \right)$$

Temos que:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= v^2 & F(u, v) &= 0 & G(u, v) &= 1 + 4v^2 \\ e(u, v) &= \frac{-2v^2}{\sqrt{1 + 4v^2}} & f(u, v) &= 0 & g(u, v) &= \frac{-2}{\sqrt{1 + 4v^2}} \end{aligned}$$

E então

$$\begin{aligned} \int_{C_n} K &= \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} K \sqrt{EG - F^2} \, dudv + \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} K \sqrt{EG - F^2} \, dudv \\ &= \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{4|v|}{(1 + 4v^2)^{3/2}} \, dudv + \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{4|v|}{(1 + 4v^2)^{3/2}} \, dudv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \frac{4|v|}{(1+4v^2)^{3/2}} dv = 2\pi \int_0^{\sqrt{n}} \frac{4|v|}{(1+4v^2)^{3/2}} dv \\
&= 2\pi - \frac{2\pi}{\sqrt{1+4n}}
\end{aligned}$$

Assim, para esta exaustão regular, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} K = 2\pi$. Agora, seja $\{\tilde{C}_m\}_{m=0}^{\infty}$ uma exaustão regular qualquer de M . Mostraremos que $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\tilde{C}_m} K = 2\pi$.

Fixado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe n_0 tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left| \int_{C_n} K - 2\pi \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por outro lado, notemos que $(\int_{C_n} K)$ é seqüência de Cauchy. Assim, para o mesmo ε fixado, existe n_1 tal que

$$n \geq n_1 \Rightarrow \left| \int_{C_n} K - \int_{C_{n+l}} K \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall l \geq 0.$$

Como $\cup \tilde{C}_m = \cup C_n = M$, para $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, existe m_1 tal que, para $m \geq m_1$, $C_{n_2} \subset \tilde{C}_m$. Da mesma forma, para cada $m \geq m_1$ existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{C}_m \subset C_{n_2+l}$.

Então, como no parabolóide $K \geq 0$, para $m \geq m_1$, temos:

$$0 \leq \int_{C_{n_2}} K \leq \int_{\tilde{C}_m} K \leq \int_{C_{n_2+l}} K \Rightarrow \int_{\tilde{C}_m} K - \int_{C_{n_2}} K \leq \int_{C_{n_2+l}} K - \int_{C_{n_2}} K$$

Assim, para $m \geq m_1$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tilde{C}_m} K - 2\pi \right| &\leq \left| \int_{\tilde{C}_m} K - \int_{C_{n_2}} K \right| + \left| \int_{C_{n_2}} K - 2\pi \right| \\ &\leq \left| \int_{C_{n_2+l}} K - \int_{C_{n_2}} K \right| + \left| \int_{C_{n_2}} K - 2\pi \right| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Isto é, $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\tilde{C}_m} K = 2\pi$, onde $\{\tilde{C}_m\}_{m=0}^{\infty}$ é uma exaustão qualquer de M .

Concluimos então que M tem curvatura total finita e esta é dada por 2π .

3.2. Superfícies Próprias

Sendo M uma superfície regular do \mathbb{R}^3 , a inclusão $i : M \subset \mathbb{R}^3$ é um mergulho, isto é, é um homeomorfismo sobre sua imagem.

Definição 5. Uma superfície M é própria se a inclusão $i : M \subset \mathbb{R}^3$ é própria, ou seja, se dado um compacto $C \subset \mathbb{R}^3$, $i^{-1}(C \cap i(M))$ é um compacto de M .

Como exemplos de superfícies próprias temos o cilindro e o parabolóide. Um exemplo de superfície não própria é o subconjunto do \mathbb{R}^3 gerado pelas retas paralelas ao eixo oz que passam pela curva $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, dada pela figura abaixo, que tende assintoticamente aos círculos de raio $1/2$ e de raio 1 .

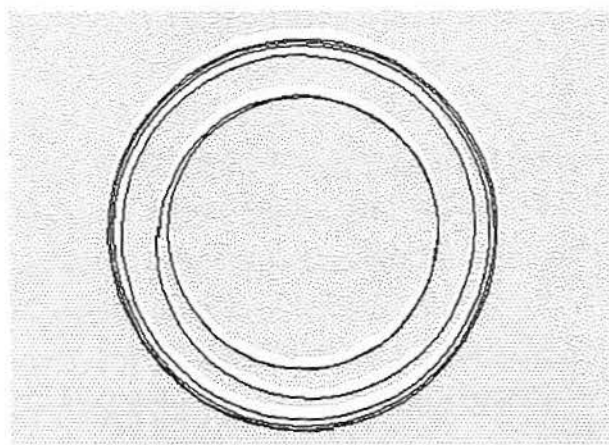


Figura 3.4:

3.3. Superfícies com Topologia Finita

Definição 6. A superfície M tem topologia finita se existem uma superfície compacta \overline{M} e pontos p_1, p_2, \dots, p_m de \overline{M} tais que M é difeomorfa a $\overline{M} - \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$.

Definição 7. Seja M uma superfície com topologia finita. Um fim de $M \approx \overline{M} - \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ é um aberto da forma $U - \{p_i\}$ onde U é um aberto de \overline{M} , difeomorfo a um disco, tal que $p_i \in U$.

O plano e o cilindro são exemplos de superfícies com topologia finita. O primeiro é difeomorfo a \mathbb{S}^2 menos um ponto e o segundo é difeomorfo a \mathbb{S}^2 menos dois pontos. Um exemplo de superfície cuja topologia não é finita é dado pela soma conexa de uma quantidade enumerável de toros.

3.4. Superfícies com Fins do Tipo Cone com Coeficiente α

Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície onde assumiremos que $0 \notin M$. Dado $p \in M$, denotaremos por $\overline{N}(p)$ a projeção ortogonal de $p/|p|$ sobre $(T_p M)^\perp$, onde $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$.

Definição 8. Dizemos que M é uma superfície com fins do tipo cone com coeficiente $\alpha \geq 0$ se

$$\delta_\alpha := \lim_{d(p,p_0) \rightarrow \infty} \sup d^\alpha(p, p_0) |\overline{N}(p)| < 1 \quad (3.1)$$

onde $d(p, p_0)$ denota a distância intrínseca em M de p a um ponto fixo $p_0 \in M$, ou seja, $d(p, p_0) = \inf \{l(c) \mid c: [0, 1] \rightarrow M \text{ é diferenciável, } c(0) = p \text{ e } c(1) = p_0\}$ onde $l(c) = \int_0^1 |c'(t)| dt$.

Em particular, para $\alpha \neq 0$, temos que $\lim_{d(p,p_0) \rightarrow \infty} |\overline{N}(p)| = 0$.

Pode-se mostrar que se a superfície é própria então M tem fins do tipo cone com coeficiente $\alpha > 0$ se e somente se

$$\lim_{|p-p_0| \rightarrow \infty} \sup |p - p_0|^\alpha |\overline{N}(p)| < 1.$$

Assim, nos exemplos abaixo, podemos usar a distância euclidiana como $d(p, p_0)$.

Exemplo 6. Dada a superfície \mathbb{S}^2 , seja $V \subset \mathbb{S}^2$ uma curva compacta. Consideremos M como sendo a parte do cone sobre V exterior a \mathbb{S}^2 , ou seja, $M =$

$\{tx \mid t \geq 1 \text{ e } x \in V\}$. Como $\overline{N}(p) = 0, \forall p \in M$, temos que M é uma superfície com fim do tipo cone para todo $\alpha \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

Exemplo 7. Seja M o cilindro dado por $x^2 + y^2 = 1$. Uma família de parametrizações para M é dada por $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,2}$ onde $U_1 = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}, U_2 = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ e

$$\varphi_1(u, v) = \varphi_2(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

Como $N(\varphi(u, v)) = (\cos u, \sin u, 0)$ e $|p| = \sqrt{1 + v^2}$ temos

$$|\overline{N}(p)| = \left| \left(\frac{p}{|p|} \right)^\perp \right| = \frac{1}{|p|} = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}} \quad (3.2)$$

Por outro lado, fixado $p_0 = (1, 0, 0)$ encontramos

$$d(p, p_0) = \sqrt{2(1 - \cos u) + v^2} \leq \sqrt{4 + v^2}. \quad (3.3)$$

Resulta de (3.2) e (3.3) que

$$\delta_\alpha = \lim_{d(p, p_0) \rightarrow \infty} \frac{(4 + v^2)^{\alpha/2}}{\sqrt{1 + v^2}}$$

Temos assim

$$\begin{aligned} \alpha = 0 &\Rightarrow \delta_0 = \lim_{d(p,p_0) \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} = 0 \\ 0 < \alpha < 1 &\Rightarrow \delta_\alpha = \lim_{d(p,p_0) \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(4+v^2)^\alpha}{1+v^2}} = 0 \\ \alpha = 1 &\Rightarrow \delta_1 = \lim_{d(p,p_0) \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4+v^2}{1+v^2}} = 1 \end{aligned}$$

Logo, M é uma superfície com fins do tipo cone com coeficiente $0 \leq \alpha < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemplo 8. Sejam M o parabolóide $z = x^2 + y^2$ e $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,2}$ um atlas de M como o do exemplo 5. Sabendo-se que $|p| = |v| \sqrt{1+v^2}$ e $N(\varphi(u, v)) = (2v^2 \cos u, 2v^2 \sin u, -v) / (|v| \sqrt{1+4v^2})$, temos

$$|\overline{N}(p)| = \left| \left(\frac{p}{|p|} \right)^\perp \right| = \frac{|v|}{\sqrt{(1+v^2)(1+4v^2)}}$$

Fixado $p_0 = (1, 0, 1)$ obtemos

$$d(p, p_0) = \sqrt{3 - 2v \cos u + v^4 - 2v^2} \leq \sqrt{v^4 - 2v^2 + 2v + 3}.$$

e portanto

$$\delta_\alpha = \lim_{d(p,p_0) \rightarrow \infty} \frac{(v^4 - 2v^2 + 2v + 3)^{\alpha/2} |v|}{\sqrt{(1+v^2)(1+4v^2)}}$$

$$= \lim_{d(p,p_0) \rightarrow \infty} v^{2\alpha-1} \sqrt{\frac{(1 - 2/v^2 + 2/v^3 + 3/v^4)^\alpha}{1/v^4 + 5/v^2 + 4}}$$

Assim, $\delta_\alpha < 1 \Leftrightarrow 2\alpha - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 1/2$.

Concluimos então que o parabolóide é uma superfície com fim do tipo cone com coeficiente $0 \leq \alpha \leq 1/2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Uma descrição para essa classe de superfícies é dada por:

Teorema 3.1. *Seja M uma superfície completa e com fins do tipo cone com coeficiente $\alpha \geq 0$, isto é, satisfazendo a condição (3.1). Então:*

- (a) M é própria;
- (b) existe R_0 tal que M é transversal a $\mathbb{S}^2(R)$ para todo $R \geq R_0$;
- (c) M tem topologia finita.

Verifica-se, além disso, que todo fim de uma superfície completa com fins do tipo cone com coeficiente $\alpha > 0$ assintota, a menos de homotetias, um cone sobre uma curva na esfera \mathbb{S}^2 .

Uma caracterização das superfícies com fins do tipo cone é dada por:

Teorema 3.2. *Seja M uma superfície completa, não compacta tal que sua segunda forma fundamental A satisfaz*

$$\lim_{d(p,p_0) \rightarrow \infty} \sup d^{1+2\alpha}(p, p_0) |A(p)| < 1$$

para algum $\alpha \geq 0$. Então M é uma superfície com fins do tipo cone com coeficiente α .

4. Extensão do Teorema de Gauss-Bonnet

Nesta seção estendemos o teorema de Gauss-Bonnet para superfícies completas com fins do tipo cone. Notemos entretanto que só esta condição não nos garante que a superfície M tenha curvatura total finita.

Assim, adicionamos uma hipótese sobre as curvas $M \cap \mathbb{S}^2(R)$, requerendo que elas tenham curvatura total finita. Precisamente:

Teorema 4.1. *Seja M uma superfície completa, não compacta, orientada, com fins do tipo cone com coeficiente $\alpha > 0$. Suponhamos que existam $R_0, V \in \mathbb{R}$ tais que cada componente conexa $\gamma_R^i, i = 1, \dots, n$ de $M \cap \mathbb{S}^2(R)$ satisfaça*

$$\int_{\gamma_R^i} |(\gamma_R^i)''(t)| dt \leq V, \quad \forall R \geq R_0$$

onde t é o comprimento de arco de γ_R^i . Então $\int_{M \cap D(R)} K$ é uniformemente limitada, onde K é a curvatura gaussiana de M e $D(R)$ é a bola fechada em \mathbb{R}^3 de centro na origem e raio R . Se $\int_{M \cap D(R)} K$ converge quando $R \rightarrow \infty$, obtemos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{M \cap D(R)} K = 2\pi\chi(M) - \sum_{i=1}^n \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} L(\gamma_R^i) \quad (4.1)$$

Em particular, M tem curvatura total finita se e somente se existem os limites

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (1/R)(L(\gamma_R^i)), i = 1, \dots, n.$$

É interessante mencionarmos dois casos especiais de (4.1). Um deles ocorre quando as curvas limite $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n$ são pontos. Nesta situação temos que (4.1) é dada por

$$\int_M K = 2\pi\chi(M).$$

Observamos assim que a característica de Euler do cilindro é zero, o que também pode ser concluído através de triangulação.

O outro caso acontece quando as curvas limite $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n$ são círculos máximos em \mathbb{S}^2 . Aqui (4.1) é dada da seguinte forma

$$\int_M K = 2\pi(\chi(M) - n).$$

Um exemplo é dado quando M é o catenóide. Neste caso temos que $n = 2$ e então

$$\int_M K = -4\pi$$

já que o catenóide é homeomorfo ao cilindro.

Demonstração: Como M é uma superfície com fins do tipo cone temos, pelo teorema 3.1, que M é própria e tem topologia finita.

Seja $M(R) := M \cap D(R)$. Temos que $M(R)$ é um compacto de M , ou seja, $M(R)$ é uma superfície compacta com bordo e este é dado por $M \cap \mathbb{S}^2(R)$.

Segue do teorema 3.1(b) que, para um R adequado, M é transversal a $\mathbb{S}^2(R)$ e portanto $\partial M(R)$ é formado por uma curva regular não necessariamente conexa. Denotaremos as parametrizações globais das componentes conexas desta curva por $\gamma_R^1, \gamma_R^2, \dots, \gamma_R^n$ e vamos supor que são parametrizadas por comprimento de arco.

Como M é orientada, vamos considerar esta mesma orientação em $M(R)$ e a orientação induzida em $\partial M(R)$. Aplicando-se o teorema de Gauss-Bonnet em $M(R)$ obtemos

$$\int_{M(R)} K = 2\pi\chi(M(R)) - \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_R^i} k_R^i ds \quad (4.2)$$

onde k_R^i é a curvatura geodésica orientada de γ_R^i em $M(R)$.

De (2.4), temos que a curvatura geodésica orientada de γ_R^i é dada por

$$k_R^i(t) = - \left\langle (\gamma_R^i)''(t), n(t) \right\rangle$$

onde $n(t)$ é o vetor conormal externo a $\partial M(R)$ no ponto $\gamma_R^i(t)$.

Temos então

$$\begin{aligned} -k_R^i(t) &= \left\langle (\gamma_R^i)''(t), n(t) \right\rangle - \left\langle (\gamma_R^i)''(t), \frac{1}{R}\gamma_R^i(t) \right\rangle + \left\langle (\gamma_R^i)''(t), \frac{1}{R}\gamma_R^i(t) \right\rangle \\ &= \left\langle (\gamma_R^i)''(t), n(t) - \frac{1}{R}\gamma_R^i(t) \right\rangle + \frac{1}{R} \left\langle (\gamma_R^i)''(t), \gamma_R^i(t) \right\rangle \end{aligned} \quad (4.3)$$

Mas como $\gamma_R^i(t) \in \mathbb{S}^2(R)$,

$$\begin{aligned} \langle \gamma_R^i(t), \gamma_R^i(t) \rangle = R^2 &\Rightarrow \langle (\gamma_R^i)'(t), \gamma_R^i(t) \rangle = 0 \Rightarrow \\ \langle (\gamma_R^i)''(t), \gamma_R^i(t) \rangle + |(\gamma_R^i)'(t)|^2 &= 0 \Rightarrow \langle (\gamma_R^i)''(t), \gamma_R^i(t) \rangle = -1 \end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever (4.3) como

$$-k_R^i(t) = \left\langle (\gamma_R^i)''(t), n(t) - \frac{1}{R}\gamma_R^i(t) \right\rangle - \frac{1}{R} \quad (4.4)$$

Substituindo-se (4.4) em (4.2) encontramos

$$\int_{M(R)} K = 2\pi\chi(M(R)) + \sum_{i=1}^n \left[\int_{\gamma_R^i} \left\langle (\gamma_R^i)''(t), n(t) - \frac{1}{R}\gamma_R^i(t) \right\rangle dt - \int_{\gamma_R^i} \frac{1}{R} dt \right] \quad (4.5)$$

Sendo M uma superfície com fins do tipo cone com coeficiente $\alpha > 0$, temos que $|\bar{N}| \rightarrow 0$ e portanto

$$\left\langle \frac{1}{R}\gamma_R^i(t), N(t) \right\rangle \rightarrow 0$$

onde N é o campo de vetores normais unitários que define a orientação de M .

Como vimos em (2.6), $\mathcal{B} = \{(\gamma_R^i)'(t), -n(t), N(t)\}$ é uma base ortonormal positiva do \mathbb{R}^3 . Assim, como $\gamma_R^i(t) \perp (\gamma_R^i)'(t)$ e $|(1/R)\gamma_R^i(t)| = 1$, temos que $(1/R)\gamma_R^i(t)$ tem a mesma direção de $n(t)$. E mais, como ambos apontam para o exterior da superfície M , concluímos que $\lim_{R \rightarrow \infty} (1/R)\gamma_R^i(t) = n(t)$. Portanto,

fixado $\varepsilon > 0$, existe $R_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left| n(t) - \frac{1}{R} \gamma_R^i(t) \right| < \frac{\varepsilon}{V}, \quad \forall R \geq R_1$$

Por outro lado, sabemos que

$$\int_{\gamma_R^i} |(\gamma_R^i)''(t)| dt \leq V, \quad \forall R \geq R_0$$

Então, considerando-se $R_2 = \max\{R_0, R_1\}$, temos

$$R \geq R_2 \Rightarrow \int_{\gamma_R^i} |(\gamma_R^i)''(t)| \left| n(t) - \frac{1}{R} \gamma_R^i(t) \right| dt < \frac{\varepsilon}{V} \int_{\gamma_R^i} |(\gamma_R^i)''(t)| dt \leq \varepsilon \quad (4.6)$$

Obtemos assim, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^i} \left| \left\langle (\gamma_R^i)''(t), n(t) - \frac{1}{R} \gamma_R^i(t) \right\rangle \right| dt = 0$$

e portanto

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_R^i} \left\langle (\gamma_R^i)''(t), n(t) - \frac{1}{R} \gamma_R^i(t) \right\rangle dt \right| &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^i} \left\langle (\gamma_R^i)''(t), n(t) - \frac{1}{R} \gamma_R^i(t) \right\rangle dt &= 0 \end{aligned}$$

Mas sabemos que $\int_{\gamma_R^i} (1/R) dt = (1/R)L(\gamma_R^i)$. Então, aplicando-se o limite em

(4.5), encontramos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{M(R)} K = 2\pi\chi(M) - \sum_{i=1}^n \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} L(\gamma_R^i)$$

o que demonstra o teorema. □

Bibliografia

- [1] RIPOLL, J., *Complete Conical Type End Immersed Manifolds in \mathbb{R}^N* . Pacific Journal of Mathematics, vol.185, 1998, 183-200.
- [2] MASSEY, W. S., *Algebraic Topology: An Introduction*. 1967.
- [3] CARMO, M. do, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
- [4] ARAÚJO, P. V., *Geometria Diferencial*. IMPA,1998.