

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**ESTUDO DE TÉCNICAS
DE CONTROLE E
APLICAÇÃO A
ESTRUTURAS FLEXÍVEIS**

por

Jorge Luis Palacios Felix

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeysen
Orientador

Porto Alegre, Março de 1997.

82071:187433-4

UFRGS
SISTEMAS DE BIBLIOTÉCAS
BIBLIOTÉCA SETORIAL DE MATEMÁTICA

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Palacios Felix, Jorge Luis

ESTUDO DE TÉCNICAS DE CONTROLE E APLICAÇÃO A ESTRUTURAS FLEXÍVEIS / Jorge Luis Palacios Felix. – Porto Alegre: CPGMAp da UFRGS, 1997.

110 p.: il.

Dissertação (Mestrado)—Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 1997. Ruiz Claeysen, Julio César, Orient.

I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Reitor: Profa. Wrana Panizzi

Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação: Prof. José Carlos Ferraz Hennemann

Diretor do Instituto de Matemática: Prof. Aron Teiteibaum

Coordenador do CPGMAp: Profa. Maria Cristina Varriale

Bibliotecária-Chefe do Instituto de Matemática: Carlos Brandão Schwab

*“O espírito procura,
mas somente
o coração encontra”*

*A minha doce filha,
ela foi sempre minha motivação.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Julio César Ruiz Claeysen pela sua orientação e apoio no desenvolvimento deste trabalho.

A meu colega Germán pelo incentivo e apoio recebido

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	v
LISTA DE SÍMBOLOS	viii
RESUMO	xi
ABSTRACT	xii
1 PRELIMINARES	1
1.1 Introdução	1
1.2 Sistemas de um grau de liberdade	1
1.3 Mecanismo de controle de pontes de vão longo	6
1.4 Controlabilidade e observabilidade	8
1.5 Desenho de retroalimentação do observador	12
2 MODELAGEM	15
2.1 Introdução	15
2.2 Equação da viga de Euler-Bernoulli	15
2.3 Modelo de Timoshenko	19
2.4 Modelagem de uma ponte	22
2.5 Solução modal	24
3 LOCALIZAÇÃO ÓTIMA DOS ATUADORES E SENSORES	28

3.2	Modelo do sistema	29
3.3	Localização do atuador	32
3.4	Localização do sensor	39
3.5	Exemplo de aplicação	44
4	TÉCNICA DE CONTROLE ATIVO	48
4.1	Introdução	48
4.2	Projeto do controle ativo	49
4.3	Reconstrução do espaço modal	56
5	TÉCNICA DE CONTROLE ÓTIMO	61
5.1	Introdução	61
5.2	O problema de controle ótimo regulador	61
5.3	Reconstrução do espaço modal	66
6	CONTROLE AMORTECEDOR DE MASSA REGULADA ATIVO	72
6.1	Introdução	72
6.2	Representação do espaço de estado do sistema de controle de vibração	74
6.3	Discussão da matriz ponderada [Q]	75
6.4	Compensação do tempo de retardo em controle ótimo ins- tantâneo de estruturas	77
6.5	Aplicação do controle ativo	81

7	SIMULAÇÃO NUMÉRICA	87
7.1	Resultados numéricos do controle ativo	87
7.2	Resultados numéricos do controle ótimo regulador	95
7.3	Resultados numéricos do controle AMR ativo	98
8	CONCLUSÕES	104
	BIBLIOGRAFIA	106

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Sistema de Laço Aberto	4
Figura 1.2	Sistema de Laço Fechado	5
Figura 1.3	Massa Auxiliar Para Controle	6
Figura 1.4	Tendão Auxiliar para Controle: (a) Força de Controle Central;(b) Dois Forças de Controle simétricas; (c) Dois Momentos de Controle Simétricos	7
Figura 1.5	Amortecedor Auxiliar para Controle	7
Figura 1.6	Retroalimentação do Observador e Estado	14
Figura 2.1	Vibração Transversal de uma Viga e Diagrama de Corpo Livre de um Elemento pequeno da Viga quando é deformado por uma Força Distribuida por Unidade de Longitude, $f(x, t)$	15
Figura 2.2	Efeitos da Deformação de Cisalhamento sobre o Elemento transversal da viga	19
Figura 2.3	Mecanismo de Controle	22
Figura 2.4	Deformação da Viga	22
Figura 3.1	Índice de Desempenho versus Localização de um Atuador de força para uma Ponte com seis Modos	46
Figura 3.2	Índice de Desempenho versus Sensor Posição da Ponte. (a) Sensor de Deslocamento; (b) Sensor de velocidade	47
Figura 4.1	Diagrama de Blocos Considerando Primeiro Modo	51
Figura 4.2	Diagrama de Blocos de Sistema Retroalimentado	55

Figura 5.1	Diagrama de simulação para Problema Regulador	67
Figura 6.1	Sistema Amortecedor de Massa Regulada	73
Figura 6.2	Estrutura flexível sujeita à excitação vertical em ambos extremos. Resposta da estrutura descrita pelas respostas combinadas de quase-estática e dinâmica	81
Figura 7.1	Resposta da Deflexão em Meio Vão Considerando Primeiro Modo e seu Controle Ativo. Rd=Resposta com Sensor Deslocamento, Ra=Resposta com Sensor Aceleração, Rv=Resposta com Sensor Velocidade, R=Resposta Sem Controle: -:Controle-Deslocamento, ..:Controle-Aceleração, - -:Controle-Velocidade	90
Figura 7.2	Resposta da Deflexão em Meio Vão Considerando Três Modos e seu Controle Ativo. Rd=Resposta com Sensor Deslocamento, Ra=Resposta com Sensor Aceleração, Rv=Resposta com Sensor Velocidade, R=Resposta Sem Controle; u1:Controle-Deslocamento, u3:Controle-Aceleração, u2:Controle-Velocidade	94
Figura 7.3	Resposta da Deflexão em Meio Vão Considerando Três Modos para matrizes ponderadas --, $R = 9.5e4$, $Q_0 = 1000$, $S_0 = 0$; -.-, $R = 1e8$, $Q_0 = e5$; $S_0 = 100$; ..., sem controle e Os Controles Otimos .	96
Figura 7.4	Resposta da Deflexão em Meio Vão Considerando Três Modos para matrizes ponderadas -.-, $R = 5e5$, $Q_0 = 1000$, $S_0 = 100$; -, $R = e6$, $Q_0 = e4$; $S_0 = 100$; ..., sem controle e Os Controles Otimos .	97
Figura 7.5	Resposta de deslocamento em meio vão da ponte sujeita a excitação sísmica em ambos os extremos; para sistema sem controle	101
Figura 7.6	Resposta de deslocamento em meio vão da ponte sujeita a excitação sísmica em ambos os extremos; para sistema com controle AMR passivo	102

Figura 7.7 Resposta de deslocamento em meio vão da ponte sujeita a excitação sísmica em ambos os extremos: para sistema com controle AMR ativo. 103

LISTA DE SÍMBOLOS

L	Vão da ponte
l	Longitude do poste
m	Massa por unidade de longitude
E	Modulo de elasticidade de Young da viga
I	Momento de inércia da área transversal da viga
$M(x, t)$	Momento flexural
$V(x, t)$	Força de cisalhamento
ν	Velocidade de uma carga móvel
f_0	Carga concentrada de magnitude constante
$f(x, t)$	Força externa total
P	Variável espacial
$\mathcal{M}(P)$	Função definida positiva da localização P
\mathcal{L}	Operador diferencial linear não negativo e auto-adjunto homogêneo
$F(P, t)$	Distribuição de força externa
$w(P, t)$	Deslocamento da estrutura de parâmetros distribuídos
P_j	Pontos de localização dos atuadores
f_j	Força de atuadores
$B_k(w(P, t))$	Operadores diferenciais homogêneas lineares
$\Phi_i(P)$	Autofunções do problema de autovalor
$\eta_i(t)$	Coordenadas generalizadas
$Q_i(t)$	Força generalizada associada com a coordenada generalizada η_i
$\mathbf{x}(\mathbf{t})$	$= [\dot{\eta}_1, \omega_1 \eta_1, \dots, \dot{\eta}_n, \omega_n \eta_n]^T$, Vetor de estado
ω_i	Frequências naturais
$\mathcal{J}(\mathbf{u})$	Energia de controle

\mathbf{u}	Vetor de controle
$[W](t)$	Matriz gramiano de controlabilidade
$\mathbf{E}\{\mathbf{u}\mathbf{u}^T\}$	Matriz de covariância de controle
$[U]$	Matriz diagonal definida positiva (intensidade de ruído)
E_k	Energia cinética
E_p	Energia potencial
$\mathbf{E}[E_k]$	Valor esperado da energia cinética
$\mathbf{E}[E_p]$	Valor esperado da energia potencial
$\mathbf{E}[E_T]$	Esperança da energia total
PI	Índice de desempenho para as localizações dos atuadores e sensores
\mathcal{E}_i	Valor medio da energia total do i -enésimo modo
$[Q]$	Matriz gramiano de observabilidade
$[\mathcal{X}](t)$	Matriz de covariância de estado
$\mathcal{V}(t)$	Tensão em certo tempo t como resultado de medições de sensores
$u(t)$	Elongação ou redução ativa da mola em certo tempo t
$A_j(t)$	Coordenada generalizada do modo j
K_c	Ganho do atuador
α_ν	Ganho do sensor velocidade
$P(s)$	Função de transferência de laço fechado
$\mathbf{F}(t)$	Vetor de perturbação determinística
$[A_\nu]$	Matriz de sensor de velocidade do sistema de laço fechado
S	Rigidez da mola
\dot{y}	$= \frac{dy}{dt}$
y'	$= \frac{dy}{dx}$
e^{xt}	Função exponencial da variável x no tempo t
$G(s)$	Função de transferência
\mathbf{d}	Vetor de perturbação
J	Índice de desempenho ou função de custos
$[S_0]$	Matriz ponderada semidefinida positiva utilizada no índice de desempenho

$[Q_0]$	Matriz ponderada semidefinida positiva utilizada no índice de desempenho
$[R]$	Matriz ponderada definida positiva utilizada no índice de desempenho
$H(x, u, \lambda)$	Função Hamiltoniano
$\lambda(t)$	Multiplicador de Lagrange
$[P]$	Matriz de Riccati
$e(t)$	Ação de controle ou sinal ativante
$r(t)$	vetor de entrada
$[M]$	Matriz de massa estrutural
$[C]$	Matriz de amortecimento estrutural
$[K]$	Matriz de rigidez estrutural
$[B_1]$	Matriz de localização das forças de controle
X	Vetor de deslocamento tridimensional relativo à base
$Z(t)$	$= [X, \dot{X}]^T$ Vetor de estado
$[A]$	Matriz do sistema não controlado
$[B]$	Matriz que especifica a localização dos controladores ativos
$[Q]$	Matriz ponderada Q
$U(t)$	Vetor de controle
$V(t)$	Deslocamento do amortecedor de massa regulada
$e^{[A]t}$	Matriz exponencial da matriz $[A]$ no tempo t
x_1	Posição de um atuador
x_s	Posição de um sensor

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar e descrever algumas técnicas de controle que podem ser aplicadas no estudo e simulação das vibrações de estruturas flexíveis como pontes submetidas a excitações de cargas dinâmicas e de excitações sísmicas.

É proposto um critério de otimização para as localizações de sensores e atuadores baseados nos conceitos grammanianos de controlabilidade e observabilidade.

São investigados os desenhos de sistemas de controle para minimizar a resposta de vibração da ponte sujeita a uma carga dinâmica baseados nos conceitos de controle ótimo.

É considerado o controle da resposta dinâmica da estrutura da ponte devido a uma excitação sísmica com o uso de técnicas de controle ótimo instantâneo.

ABSTRACT

The objective of this work is to describe some control techniques that can be employed for the study and simulation of vibrations with flexible structures such as bridges subject to excitations due to dynamical loads and seismic excitations.

An optimal criterion for the location of the sensors and actuators, based on the concepts of controllability and observability gramians is proposed.

The design of control systems for minimizing the response of the vibration of a bridge subject to a dynamical load is based on optimal control concepts.

We consider the control the dynamical response of the bridge structure due to a seismic excitation by using instantaneous optimal control techniques.

INTRODUÇÃO

O controle ativo de estruturas flexíveis submetidas a perturbações inesperadas é uma área de crescente interesse na engenharia estrutural [1] [6]. Muito do trabalho que tem sido feito nessa área tem intenção primeiramente de mostrar a efetividade do controle ativo estrutural na supressão de vibrações em estruturas flexíveis a fim de assegurar sua segurança e durabilidade. Vários métodos da teoria do controle clássico e moderno foram usados para desenhar as ações de controle necessárias para estabilizar a resposta estrutural.

Os objetivos principais que motivaram o desenvolvimento desta dissertação são os seguintes:

1) Considerar um modelo matemático que descreva o mecanismo de controle ativo [1] para estruturas flexíveis excitadas por movimentos de cargas. O modelo está baseado na formulação em equações diferenciais parciais da viga de Euler-Bernoulli suportada nos extremos. Para estudar a resposta dinâmica controlada, aproximamos o modelo através de variáveis modais [1].

2) Propor uma metodologia para assistir aos projetistas na seleção das localizações do atuador e do sensor em um primeiro estágio do processo de desenho, com prioridade no desenvolvimento da estratégia de controle. Isto é justificado por causa do número de métodos de análise e desenho de sistemas de controle que necessitam do conhecimento do modelo de sistema entrada-saída, como uma matriz de transferência, que depende das localizações e do número de sensores e atuadores. É assumido que as medidas de controlabilidade e observabilidade podem depender de propriedades do sistema e do conjunto atuadores/sensores, mas não pode depender de uma escolha particular das condições iniciais das leis de controle (o qual são desconhecidas neste estágio).

Fundamentalmente, esta aproximação é similar àquela usada por [4] quando uma resposta transiente é considerada e produz localizações do atuador/sensor baseadas em algumas medidas dos gramianos de controlabilidade/observabilidade.

3) Propor o projeto de um sistema de controle ativo definido sobre os mecanismos de atuadores e sensores. Estudar a efetividade do controle ativo de estruturas flexíveis sujeita a cargas móveis por meio da solução da equação diferencial do modo fundamental [1] e aplicar o método da função transferência clássica.

4) Mostrar uma formulação adequada de uma lei de controle ótimo de laço fechado, como problema regulador [24], para controlar a resposta de vibrações de estruturas flexíveis sujeitas a cargas móveis. O controle de laço fechado fornece amortecimento ativo e rigidez ativa necessários para o controle de estrutura contra qualquer perturbação inesperada. O algoritmo está baseado sobre o conceito de controle ótimo clássico e é utilizado o mecanismo de controle ativo.

5) Apresentar um algoritmo de controle ótimo adequado e a efetividade do amortecedor de massa regulada (AMR) para ser aplicado na excitação de estruturas flexíveis causadas por movimentos sísmicos. A função objetivo para a minimização é o tempo de dependência do índice de desempenho expressado em termos de funções quadráticas. Portanto, o recente desenvolvimento do algoritmo de controle ótimo são referidos como algoritmo de controle ótimo instantâneo. Isto inclui o controle ótimo instantâneo de laço fechado.

6) Realizar a simulação numérica para demonstrar a efetividade de cada técnica de controle ativo e ótimo. Para isto é utilizado o software em Matlab. Com uma ponte de vão longo considerada como estrutura flexível.

1 PRELIMINARES

1.1 Introdução

Os conceitos desenvolvidos neste capítulo constituem uma breve recapitulação da teoria de vibrações, a construção de sistemas de retroalimentação e um mecanismo de controle desenhado para uma ponte de um só vão longo. Quais são considerados como motivação para o desenvolvimento dos seguintes capítulos.

1.2 Sistemas de um grau de liberdade

Num sistema estrutural, descrito pelo modelo com 1 grau de liberdade

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (1.1)$$

a escolha dos coeficientes positivos m , c , k é de interesse para a obtenção da resposta impulso

$$h(t) = \frac{e^{\zeta\omega t} \text{sen}(\omega_d t + \phi)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (1.2)$$

ou de resposta degrau

$$\omega(t) = 1 - \frac{e^{\zeta\omega t} \text{sen}(\omega_d t + \phi)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (1.3)$$

com características adequadas.

Para uma entrada oscilatória, $Ae^{i\Omega t}$, temos a resposta permanente

$$x_{perm} = AG(i\Omega)e^{i\Omega t}$$

Onde

$$G(s) = (ms^2 + cs + k)^{-1}$$

é a função de transferência.

Uma consideração em projetar estruturas é que cada um dos parâmetros físicos m , c , e k podem já ter restrições de projetos que tem que ser satisfeitas. Porém, a resposta transiente em termos de resposta ao impulso pode exceder limites aceitáveis. Para isto, uma medida importante é o chamado “overshoot”(O.S.), e definido como o máximo valor da resposta menos o valor do estado estacionário da resposta. Pode-se mostrar que

$$\text{overshoot} = O.S. = x_{\max}(t) - 1 = \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (1.4)$$

o qual ocorre no tempo de pico, t_p

$$t_p = \frac{\pi}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (1.5)$$

daí que, o período de oscilação T_d pode ser expressado como

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}} = 2t_p \quad (1.6)$$

é um assunto simples escolher m , c , e k de modo que o “overshoot” seja um valor especificado [22].

Outra quantidade útil, que indica o comportamento da resposta transiente, é o tempo de estabelecimento, t_s . Este é o tempo que toma a resposta para estar dentro do $\pm 2\%$ da resposta do estado estacionário e permanece dentro de $\pm 2\%$.

Uma aproximação de t_s está dada por

$$t_s = \frac{3}{\omega\zeta} \quad (1.7)$$

As definições anteriores permitem aos técnicos e analistas de vibrações especificar e classificar de maneira precisa a natureza da resposta transiente de um sistema sub-amortecido. Também podem dar alguma indicação de como ajustar os parâmetros físicos do sistema de maneira que a resposta tenha uma forma desejada.

Suponhamos que se deseja escolher os valores de m , c e k de modo que ζ e ω especifiquem uma resposta com um tempo de estabelecimento $t_s = 3$ unidades e um tempo para o pico, t_p de 1 unidade. Então as Eqs.(1.4) e (1.6) implicam que $\omega = 1/\zeta$ e que $\zeta = 1/\sqrt{1 + \pi^2}$. Isto, desafortunadamente, também especifica o overshoot, pois

$$O.S. = \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) \quad (1.8)$$

Assim, todos os três critérios de desempenho não podem ser especificados. Isto faz com que o projetista tenha que fazer compromissos ao configurar o sistema.

Para satisfazer os critérios de vibração tais como evitar a ressonância, pode ser necessário em muitas aplicações alterar a estrutura adicionando amortecedores, isoladores de vibração. Ou usar controle de retroalimentação na saída de maneira conveniente.

A escolha dos parâmetros m , c e k determina a forma da resposta do sistema e pode ser considerada como o desenho da estrutura. O controle passivo pode ser considerado como um processo de redesenho para mudar os parâmetros m , c e k de uma estrutura já existente para produzir uma resposta mais desejável. Por exemplo, alguma massa pode ser adicionada a uma dada estrutura para diminuir sua frequência natural.

Por outro lado, o controle ativo de retroalimentação consiste em medir a saída, ou resposta, da estrutura e usar essa medição para determinar a força a ser aplicada à estrutura para obter uma resposta desejada. O mecanismo usado para medir a resposta (sensor) e o mecanismo usado para aplicar a força (atuador) juntos formam o sistema de controle.

Embora o controle passivo ou o redesenho é geralmente o método mais eficiente de controlar a resposta de uma estrutura, as restrições a m , c e k são frequentemente tais que não pode ser obtida a resposta desejada. Nesta situação o controle ativo é uma alternativa.

Um esclarecimento da diferença entre um controle ativo e passivo se faz necessário. Num sistema de controle ativo é utilizado algum mecanismo externo ajustável ou ativo (por exemplo, eletrônico), chamado um atuador, para dar um meio de configurar ou controlar a resposta. O controle passivo, por outro lado, depende só de uma mudança nos parâmetros físicos da estrutura para uma resposta desejada. O controle ativo depende das medições atuais da resposta do sistema e o controle passivo não.

A regra matemática usada para aplicar a força chama-se a lei de controle. Os sistemas com retro-alimentação chamam-se sistemas de laço fechado, enquanto que os sistemas de controle sem retro-alimentação chamam-se sistemas de laço aberto, como se ilustra nas figuras 1.1 e 1.2. A diferença entre o controle de laço aberto e laço fechado é simplesmente que o controle de laço fechado depende da informação sobre a resposta do sistema e o controle de laço aberto não.

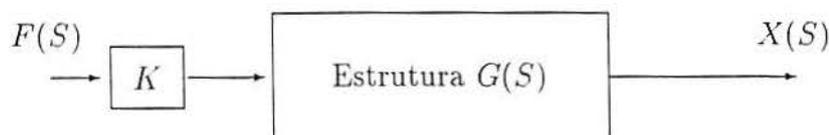


Figura 1.1 Sistema de Laço Aberto

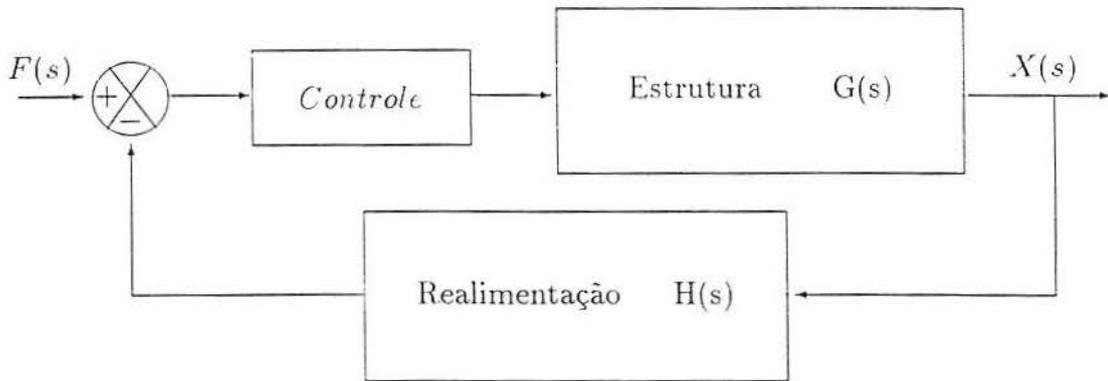


Figura 1.2 Sistema de Laço Fechado

Tomando a transformada de Laplace da Eq. (1.1), com condições iniciais nulas, resulta

$$X(s) = \left(\frac{1}{ms^2 + cs + k} \right) F(s)$$

onde $X(s)$ denota a transformada de Laplace de $x(t)$, e $F(s)$ é a transformada de $f(t)$. Temos que

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

a razão da transformada de Laplace da saída (resposta) sobre a transformada de Laplace da entrada (força aplicada) caracteriza o sistema (estrutura) sob consideração. Pois, é independente da entrada. Por esta razão, $G(s)$, é definida como a função de transferência do sistema. Ela pode ser usada para prover análises das propriedades vibracionais da estrutura, assim como um meio de medição da resposta dinâmica. Em teoria de controle, é bastante comum, por exemplo, medir a resposta de uma estrutura usando um acelerômetro. Os valores, onde o denominador da função transferência é zero, são conhecidos como polos da função transferência. Os valores dos parâmetros físicos m , c , e k determinam duas quantidades ζ e ω , no qual por sua vez determina a posição dos polos ($s = -\zeta\omega \pm \omega_d j$), onde $\omega_d = \omega\sqrt{1 - \zeta^2}$ e $\zeta = c/2\sqrt{km}$.

1.3 Mecanismo de controle de pontes de vão longo

No caso de uma ponte de vão longo, um sistema de blocos de massa pode ser usado como elementos auxiliares para produzir as forças de controle. Estes blocos podem ser colocados entre as vigas principais da ponte e suportados por molas capazes de dissipar energia. Alguns mecanismos de controle, os quais são posicionados nas vigas transversais, podem aplicar duas forças opostas, uma para puxar o bloco de massa para baixo e a outra para controlar o comportamento da ponte. A Fig. 1.3 mostra este mecanismo.

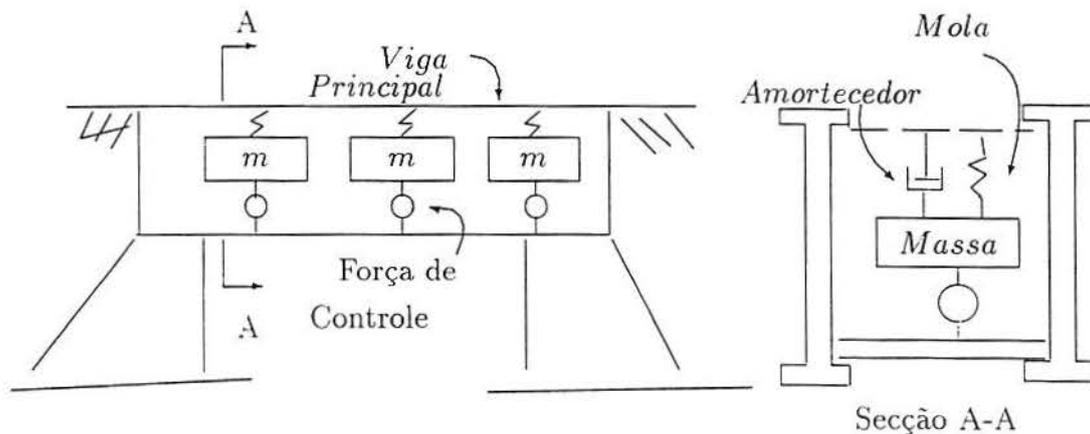


Figura 1.3 Massa Auxiliar Para Controle

Tendões também fornecem um recurso conveniente para o controle de muitas estruturas. O controle do tendão é somente fornecido durante a tensão, enquanto que o controle da mola é fornecida durante a tensão e a compressão. Vários mecanismos de controle usando tendões ou molas auxiliares são mostradas nas Figs. 1.4(a), 1.4(b), 1.4(c).

Podemos também pensar em usar um amortecedor auxiliar no auxílio da produção da força de controle. Um sistema de amortecedores pode ser instalado

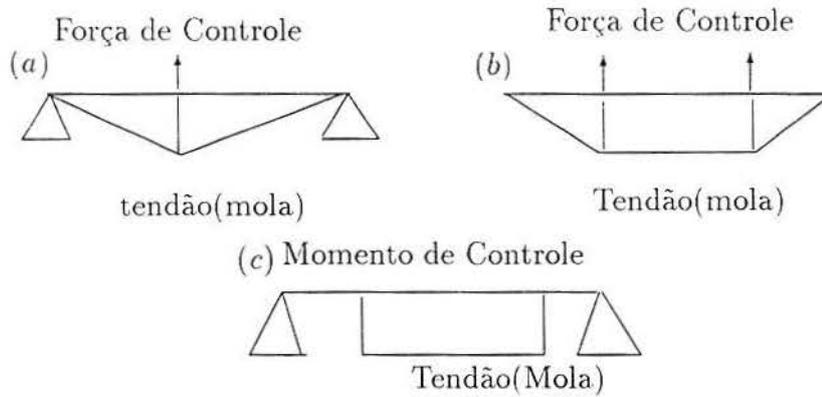


Figura 1.4 Tendão Auxiliar para Controle: (a) Força de Controle Central; (b) Dois Forças de Controle simétricas; (c) Dois Momentos de Controle Simétricos

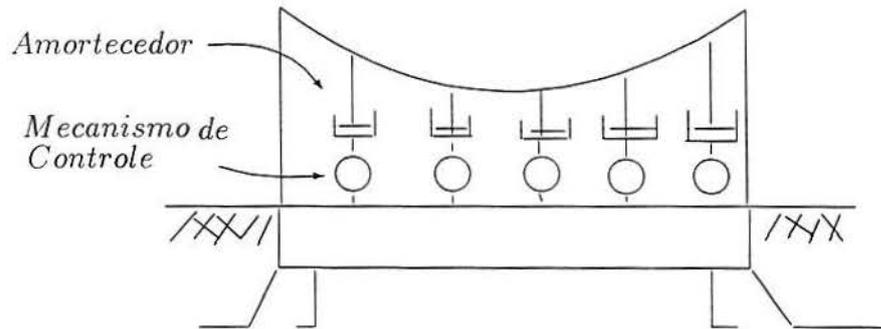


Figura 1.5 Amortecedor Auxiliar para Controle

no cabo de uma ponte suspensa e alguns mecanismos de controle produzem a força de controle desejada, como mostrado na Fig. 1.5.

Neste trabalho, o controle do tendão (mola) poderá ser usado para fornecer a força de controle porque ele é o mecanismo que pode mais facilmente ser implementado na prática.

1.4 Controlabilidade e observabilidade

Um sistema de laço aberto é descrito em geral como

$$\dot{\mathbf{X}} = [A]\mathbf{X} + [B]\mathbf{U} + \mathbf{d} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{Y} = [C]\mathbf{X} \quad (1.10)$$

onde \mathbf{X} = é o vetor de estado de $n \times 1$;

\mathbf{U} = é o vetor de controle de $r \times 1$;

\mathbf{Y} = é o vetor de saída de $m \times 1$;

$[A]$ = é uma matriz de $n \times n$,

$[B]$ = é uma matriz de $n \times r$ e

$[C]$ = é uma matriz de $m \times n$.

\mathbf{d} = é o vetor de perturbação de $n \times 1$.

CONTROLABILIDADE:

O sistema descrito pela Eq. (1.9) se diz que é de estado controlável em t_0 , se é possível construir um sinal de controle não restringido, que possa transferir um estado inicial $X(t_0)$ em qualquer estado final (origem de estado) num intervalo de tempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$. Se todo estado é controlável, então diz-se que o sistema é de controlabilidade de estado completo.

Agora se pode deduzir as condições para a controlabilidade de estado completo. Sem perda de generalidade, supõe-se que o estado final é a origem do espaço de estado e que o tempo inicial é zero, ou seja $t_0 = 0$.

A solução da Eq. (1.9) é

$$\mathbf{X}(t) = [e]^{[A]t}\mathbf{X}(0) + \int_0^t [e]^{[A](t-\tau)}[B]\mathbf{U}(\tau)d\tau \quad (1.11)$$

aplicando a definição de controlabilidade do estado completo, com $X(t_1) = 0$, tem-se

$$0 = [e]^{[A]t_1}\mathbf{X}(0) + \int_0^{t_1} [e]^{[A](t_1-\tau)}[B]\mathbf{U}(\tau)d\tau \quad (1.12)$$

ou

$$\mathbf{X}(0) = - \int_0^{t_1} [e]^{-[A]\tau}[B]\mathbf{U}(\tau)d\tau \quad (1.13)$$

Pela redução polinômial de funções matriciais analíticas [25], Note-se que $[e]^{[A]t}$ pode-se escrever como

$$[e]^{-[A]\tau} = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(\tau)[A]^k \quad (1.14)$$

para certas funções escalares α_k . substituindo a Eq. (1.14) na Eq. (1.13), resulta

$$\mathbf{X}(0) = - \sum_{k=1}^{n-1} [A]^k[B] \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau \quad (1.15)$$

fazendo

$$\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau = \beta_k,$$

a Eq. (1.15), pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(0) &= - \sum_{k=0}^{n-1} [A]^k [B] \beta_k \\ &= - ([B] \quad [A][B] \cdots [A]^{n-1}[B]) \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Se o sistema é controlável de estado completo, então, dado um estado inicial arbitrário $\mathbf{X}(0)$, existe um controle \mathbf{U} tal que a Eq. (1.16) é satisfeita para os β_k . $\beta = [\beta_0, \dots, \beta_{n-1}]$ de dimensão $nr \times 1$. Isto requer que o posto da matriz de $n \times nr$:

$$([B] \quad [A][B] \cdots [A]^{n-1}[B]) \quad (1.17)$$

seja igual a nr .

Assim, a condição sobre controlabilidade do estado completo é como segue: O sistema dado pela Eq.(1.9) é controlável de estado completo se e somente se a matriz

$$([B] \quad [A][B] \cdots [A]^{n-1}[B])$$

de dimensão $n \times nr$ é de posto nr .

Se o sistema que estamos considerando não é completamente controlável, então para algum estado inicial, não existe o sinal de controle que possa forçar o sistema ao estado zero.

OBSERVABILIDADE:

Diz-se que o sistema é completamente observável, se cada estado $\mathbf{X}(t_0)$ pode ser determinado a partir da observação de $\mathbf{Y}(t)$ num intervalo de tempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$.

Portanto, o sistema é completamente observável, se cada transição do estado, for feita eventualmente a cada elemento do vetor saída. O conceito de observabilidade é útil ao resolver o problema de reconstrução de variáveis de estado não medíveis, a partir de outros medíveis, em menos tempo possível.

Se o sistema não é completamente observável, então o estado inicial $\mathbf{X}(t_0)$ não pode ser determinado a partir da avaliação de saída, não importa quanto tempo está sendo observada a saída.

Pode ser estabelecido que [25], o sistema (1.9), (1.10) é completamente observável se a matriz de $n \times mn$:

$$([C]^* \quad [A]^*[C]^* \quad ([A]^*)^2[C]^* \cdots ([A]^*)^{n-1}[C]^*) \quad (1.18)$$

tem posto n , onde $[C]^*$ e $[A]^*$ são as matrizes conjugadas transpostas de $[C]$ e $[A]$, respectivamente.

A demonstração, ao igual do que a controlabilidade, segue-se da substituição de (1.11) em (1.10).

1.5 Desenho de retroalimentação do observador

Um observador de estado estima as variáveis de estado \mathbf{X} , com base na medição das variáveis de saída \mathbf{Y} e do controle \mathbf{U} . A equação dinâmica de um observador é dado por

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}} = [A_c]\hat{\mathbf{X}} + [B_c]\mathbf{Y} + \mathbf{Z} \quad (1.19)$$

no qual $\hat{\mathbf{X}}$ é o vetor aproximado para $\mathbf{X}(t)$; e as matrizes $[A_c]$, $[B_c]$, e o vetor \mathbf{Z} podem ser determinados de acordo com o desempenho do sistema requerido. O erro, $\mathbf{e}(t)$, entre os estados $\mathbf{X}(t)$ e os estados aproximados $\hat{\mathbf{X}}(t)$ é dado por:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t) \quad (1.20)$$

Diferenciando a Eq.(1.20) e substituindo pelas Eqs.(1.9), (1.10), e (1.19)

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{X}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{X}}}(t) \quad (1.21)$$

$$= [A]\mathbf{X} + [B]\mathbf{U} - [A_c]\hat{\mathbf{X}} - [B_c][C]\mathbf{X} - \mathbf{Z}; \quad (1.22)$$

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = ([A] - [B_c][C])\mathbf{X} - [A_c]\hat{\mathbf{X}} + [B]\mathbf{U} - \mathbf{Z} \quad (1.23)$$

Fazendo $\mathbf{Z} = [B]\mathbf{U}$ e $([A] - [B_c][C]) = [A_c]$, a Eq.(1.21) se torna

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = [A_c]\mathbf{e}(t) \quad (1.24)$$

Se todos os autovalores de $[A_c]$ tem parte real negativa, então a Eq.(1.24) é assintoticamente estável, e o erro $\mathbf{e}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ quando $t \rightarrow \infty$.

Por isso, para o desenho de um observador, temos as seguintes condições:

- (1) $\mathbf{Z} = [B]\mathbf{U}$;
- (2) $[A_c] = [A] - [B_c][C]$;
- (3) $[A_c]$ é assintoticamente estável

precisam ser satisfeitas.

Se o sistema de laço aberto é completamente observável, então, é sempre possível achar um $[B_c]$ que produzirá qualquer conjunto de autovalores desejados para $[A_c]$. A chave para especificar os autovalores de $[A_c]$ é minimizar o tempo de atraso para $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}$. A experiência indica que resulta um bom desenho se os polos do observador são escolhidos um pouco mais á esquerda que os polos de retroalimentação de estado de laço fechado desejados [7].

Os autovalores de $[A_c]$ são dados por

$$\begin{aligned}\Delta(\rho) &= |\rho[I_n] - [A_c]| = |\rho[I_n] - [A] + [B_c][C]| = 0; \\ \Delta(\rho) &= |\rho[I_n] - [A]| |[I_n] + \Phi(\rho)[B_c][C]| \\ &= \Lambda(\rho) |[I_m] + [C]\Phi(\rho)[B_c]| = 0\end{aligned}\tag{1.25}$$

no qual ρ representa os autovalores do observador. A Eq.(1.25) é mantida se qualquer fila ou coluna da matriz ($[I_m] + [C]\Phi(\rho)[B_c]$) é levada a ser zero. A observabilidade completa garante que n filas linearmente independentes podem ser selecionadas das filas de $[C]\Phi(\rho)$. Para a i -enésima fila e para k -enésimo autovalor

$$\mathbf{e}_i + \Psi_i(\rho_k)[B_c] = 0\tag{1.26}$$

Para os autovalores $\rho_k, 1, 2, \dots, n$, a Eq.(1.26) se torna

$$(\mathbf{e}_{i1} \ \mathbf{e}_{i2} \cdots \mathbf{e}_{in}) + [\psi_1(\rho_1) \ \psi_2(\rho_2) \cdots \psi_n(\rho_n)]^T [B_c] = 0$$

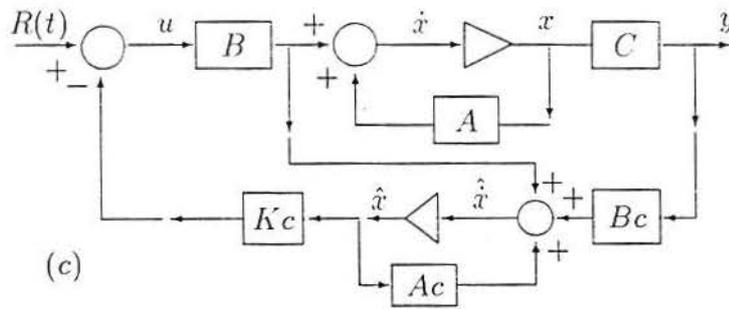


Figura 1.6 Retroalimentação do Observador e Estado

Então,

$$[B_c] = [\psi_1(\rho_1)^T \quad \psi_2(\rho_2)^T \cdots \psi_n(\rho_n)^T]^{-1} [e_{i1}^T \quad e_{i2}^T \cdots e_{in}^T] \quad (1.27)$$

Uma simulação do diagrama sobre todo o sistema é mostrado na Fig. 1.6. Todo o sistema torna-se de ordem $2n$, e o procedimento de desenho consiste em determinar $[K_c]$ e $[B_c]$ de forma que o desenvolvimento do sistema requerido seja satisfeito. De acordo com o princípio de separação [7], a matriz $[K_c]$ pode ser determinada para satisfazer os outros n autovalores, desde que os autovalores de todo o sistema seja a soma de ambos autovalores.

2 MODELAGEM

2.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos os modelos para o deslocamento vertical de uma viga formuladas segundo Euler-Bernoulli e Timoshenko. Uma ponte de um só vão sob efeito de uma carga concentrada é modelado como uma viga com suporte simples.

2.2 Equação da viga de Euler-Bernoulli

A vibração da viga na direção perpendicular a sua longitude é considerada. tais vibrações são chamadas frequentemente de vibrações transversais ou flexural, porque eles movem transversalmente a longitude da viga.

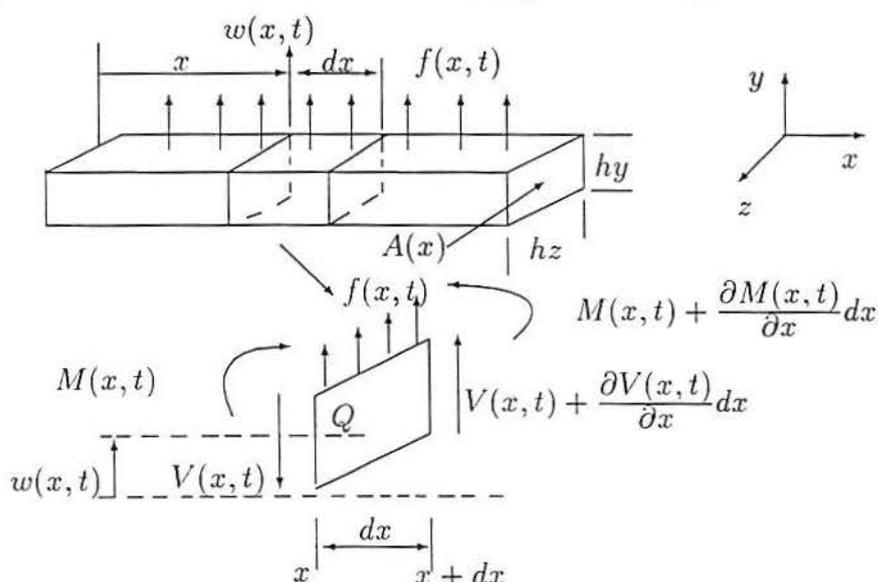


Figura 2.1 Vibração Transversal de uma Viga e Diagrama de Corpo Livre de um Elemento pequeno da Viga quando é deformado por uma Força Distribuída por Unidade de Longitude, $f(x,t)$

A figura 2.1 ilustra uma viga com a direção transversal de vibração indicada [i.e., a deflexão, $w(x, t)$, está na direção y]. A viga é de corte transversal retangular $A(x)$ com largura h_y , espessura h_z , e comprimento l . Também associada com a viga está a rigidez flexural $EI(x)$, donde E é o módulo de elasticidade de Young da viga e $I(x)$ é o momento de inércia da área transversal da viga ao redor do eixo z . De mecânica dos materiais, a viga mantém um momento flexural $M(x, t)$ o qual está ligado à deflexão da viga, ou deformação flexural, $w(x, t)$, por

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

O modelo de vibração flexural pode derivar-se do exame do diagrama de forças de um elemento infinitesimal da viga como indica a figura 2.1. Assumindo que a deformação seja bastante pequena tal que a deformação de cisalhamento seja menor que $w(x, t)$ (i.e., tanto que os lados do elemento dx não se dobra), a soma de forças na direção y dá

$$\left(V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx \right) - V(x, t) + f(x, t) dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

Aqui $V(x, t)$ é a força de cisalhamento no extremo esquerdo do elemento dx , $V(x, t) + V_x(x, t) dx$ é a força de cisalhamento no extremo direito do elemento dx , $f(x, t)$ é a força externa total ao elemento por unidade de comprimento e o termo do lado direito da igualdade é a força inercial do elemento. A suposição de pequena deformação de cisalhamento usado no balanço de forças da equação (2.2) é certo se $l/h_z \geq 10$ $l/h_y \geq 10$ (i.e., para uma viga delgada comprida).

A seguir, os momentos atuam sobre o elemento dx ao redor do eixo z pelo ponto Q são somados. Este dá

$$\left[M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx \right] - M(x, t) + \left[V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx \right] dx + [f(x, t)dx] \frac{dx}{2} = 0 \quad (2.3)$$

Aqui o lado esquerdo da equação é zero dado que este é também assumido que a inercia rotacional do elemento dx é insignificante. Simplificando esta equação dá

$$\left[\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} + V(x, t) \right] dx + \left[\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + \frac{f(x, t)}{2} \right] (dx)^2 = 0 \quad (2.4)$$

Como dx é assumido ser muito pequeno, $(dx)^2$ é assumido como zero, assim esta expressão de momento dá (dx é pequena, mas não zero)

$$V(x, t) = -\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \quad (2.5)$$

Esta afirma que a força de cisalhamento é proporcional à mudança espacial no momento flexural. A substituição desta expressão pela força de cisalhamento na equação (2.2) dá

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} [M(x, t)] dx + f(x, t) dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

mais a substituição da equação (2.1) na (2.6) e dividindo por dx dá

$$\rho A(x, t) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] = f(x, t) \quad (2.7)$$

Se a força externa não é aplicada tal que $f(x, t) = 0$ e se $EI(x)$ e $A(x)$ são assumidos como constantes, a Eq.(2.7) simplifica-se como vibração livre cuja equação está

governada por

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = 0; \quad c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (2.8)$$

As condições de fronteira mais encontradas frequentemente em análises de vibração de uma viga de Bernoulli-Euler são as seguintes:

Se uma viga em vibração transversal for livre em um dos extremos, a deflexão e decaimento naquele extremo não serão restringidos, mas o momento flexural e a força de cisalhamento se anulam:

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right](0, t) = 0$$

Se, o extremo da viga está fixo, o momento flexural e a força de cisalhamento não são restringidas, mas a deflexão e o decaimento se anulam no extremo:

$$w(0, t) = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0$$

Num suporte simples, o decaimento e a força de cisalhamento são irrestringidas e a deflexão e o momento flexural se anulam:

$$w(0, t) = 0 \quad (2.11)$$

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0$$

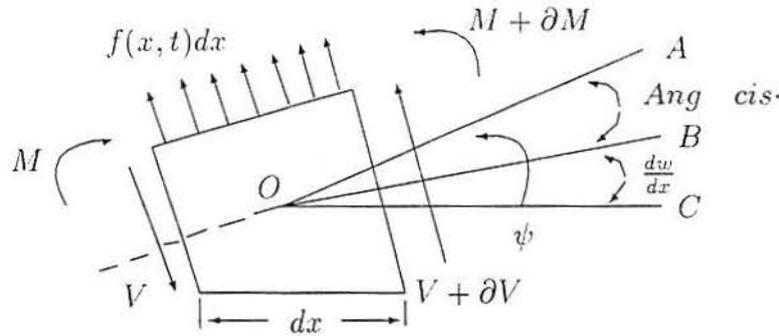


Figura 2.2 Efeitos da Deformação de Cisalhamento sobre o Elemento transversal da viga

2.3 Modelo de Timoshenko

O modelo da vibração transversal da viga apresentada na equação (2.7) ignora os efeitos da deformação de cisalhamento e a inércia rotacional. Aqueles efeitos são considerados a seguir. Como a viga torna-se quebradiça, o efeito da deformação de cisalhamento torna-se evidente. Isto está ilustrado na figura 2.2, no qual é uma repetição do elemento dx da figura 2.1 com deformação incluída.

Referindo-se à figura, a linha OA é que atravessa o centro do elemento dx perpendicular a face no lado direito. A linha OB, da mesma maneira, é a linha que atravessa o centro tangente à linha central da viga, a linha OC central da viga por enquanto em repouso.

$$EI \frac{d\psi(x, t)}{dx} = M(x, t) \quad (2.12)$$

e a equação da força de cisalhamento converte-se em

$$\kappa^2 AG \left[\psi(x, t) - \frac{dw(x, t)}{dx} \right] = V(x, t) \quad (2.13)$$

Onde E , I , A , ψ , V e M são definidas previamente, G é o módulo de cisalhamento e κ^2 é um fator adimensional que depende da forma da área da secção-transversal.

A constante κ^2 se chama coeficiente de cisalhamento. Como no caso da equação (2.2), a dinâmica de balanço de forças dá

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = - \left[V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx \right] + V(x, t) + f(x, t) dx \quad (2.14)$$

Se a inércia rotacional é incluída, então o balanço de momentos sobre dx previamente dados pela equação (2.8) converte-se em

$$\begin{aligned} \rho I(x) dx \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = & \left[M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx \right] - M(x, t) \\ & + \left[V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx \right] dx + f(x, t) \frac{dx^2}{2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Substituição das equações (2.12) e (2.13) nas equações (2.14) e (2.15) resulta duas equações acopladas

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \kappa^2 AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.16)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\kappa^2 AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \right] + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

que governam a vibração de uma viga incluindo os efeitos de inércia rotacional e a deformação de cisalhamento. Assumindo que os coeficientes são todos constantes, $\psi(x, t)$ pode ser eliminada e as equações acopladas podem ser reduzidas a uma única equação de vibração de vigas uniformes. Isto é

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left(f - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{EI}{\kappa^2 GA} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(f - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \\ - \frac{\rho I}{\kappa^2 GA} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(f - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Da equação (2.18), é possível identificar os termos da teoria de Bernoulli-Euler, Eq. (2.7), e a correção de termos devido à deformação de cisalhamento e a inércia rotacional. Com $f = 0$, temos:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho l \left(1 + \frac{E}{\kappa^2 G} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\kappa^2 G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad (2.19)$$

A equação (2.19) está sujeito a quatro condições iniciais e quatro condições de fronteira. Para um extremo fixado, as condições de fronteira convertem-se em:

$$\psi(0, t) = w(0, t) = 0 \quad (2.20)$$

Num extremo simplesmente suportado, converte-se em

$$EI \frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} = w(0, t) = 0 \quad (2.21)$$

e num extremo livre converte-se em

$$\kappa^2 AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) = EI \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (2.22)$$

A Eq.(2.8) é chamada modelo da viga de Euler-Bernoulli ou modelo da viga clássica e a Eq.(2.19) é chamada modelo da viga de Timoshenko.

A seguir considera-se o amortecimento na vibração de uma viga. A equação de movimento para uma viga com amortecimento da viscosidade de ar (externa) e o amortecimento da razão de fadiga (interna) é

$$\rho A w_{tt}(x, t) + \gamma w_t(x, t) + \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[I \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (2.23)$$

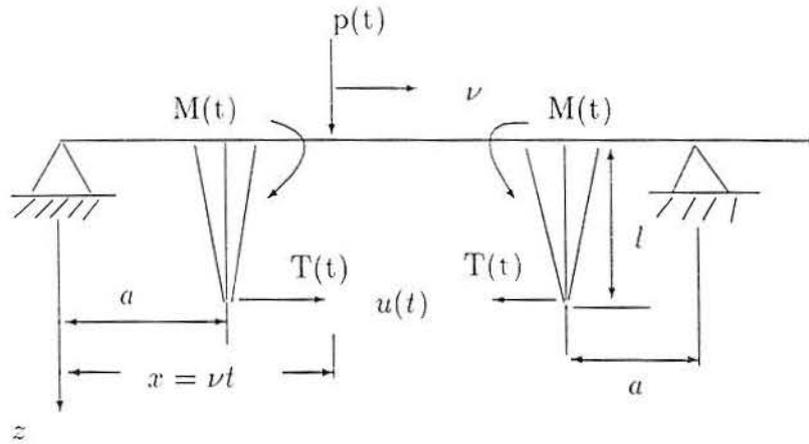


Figura 2.3 Mecanismo de Controle

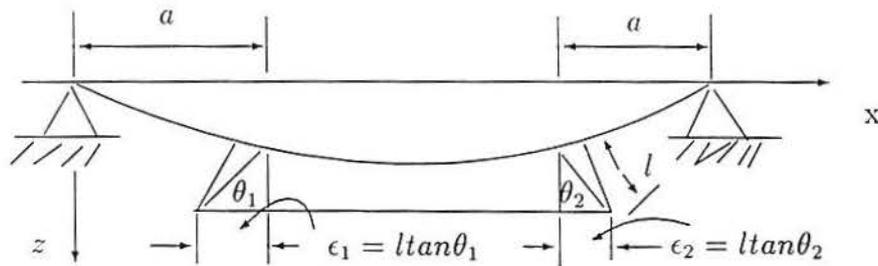


Figura 2.4 Deformação da Viga

2.4 Modelagem de uma ponte

Consideremos uma ponte de um só vão, idealizado por uma viga de Euler-Bernoulli forçada com suporte simples com rigidez flexural constante EI e vão L , sob efeito de uma carga concentrada, de um veículo, de magnitude constante f_0 , movendo-se com velocidade constante ν . O controle de mecanismo mostrado na figura 2.3 é usado para o controle da vibração de pontes. Um controle ótimo de laço fechado seria determinado assumindo um andar suave da ponte e esquecendo da força normal causada pelo mecanismo de controle assim como da inércia devida carga móvel. Da figura 2.4, obtemos a seguinte equação de movimento:

$$EI \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = f_0 \delta(x - \nu t) + M(t) \delta'(x - a) - M(t) \delta'(x - L + a) \quad (2.24)$$

Onde

E =módulo de Young;

I =momento de inércia da seção da ponte;

m =massa por unidade de comprimento;

a =distância do poste ao suporte mais próximo;

L =vão da ponte: e

z =deslocamento lateral,

ν = a velocidade da carga móvel. O controle de momento é

$$\boxed{M(t) = Sl[u(t) + lz'(a, t) - lz'(L - a, t)]} \quad (2.25)$$

onde

S =rigidez da mola;

l =comprimento do poste.

$$z'(a, t) = \frac{dz}{dx} \Big|_{x=a}$$

$$z'(L - a, t) = \frac{dz}{dx} \Big|_{x=L-a}$$

Na Eq.(2.25), o primeiro termo entre colchete no lado direito, $u(t)$, representa a alongação ou redução na mola devido ao mecanismo de controle, e os outros dois termos representam a alongação ou redução adicional devido a deformação da viga. Aqui δ denota a função delta de Dirac

No modelo, são considerados as condições de fronteira:

$$\left\{ \begin{array}{l} z(0, t) = 0; \quad z(L, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0 \end{array} \right. \quad (2.26)$$

e

as condições iniciais:

$$z(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (2.27)$$

2.5 Solução modal

Consideremos a solução de (2.24) na forma modal

$$z(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) A_j(t) \quad (2.28)$$

onde A_j = coordenada generalizada do modo j ; e $\phi_j(x) = \text{sen}(j\pi x/L)$ é j -enésimo modo, isto é:

$$EI \frac{d^4 \phi_j(x)}{dx^4} = \omega_j^2 m \phi_j(x) \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (2.29)$$

$\phi_j(x)$ satisfaz as quatro condições de fronteira nos extremos da viga, Eq. (2.26).

Assim

$$z(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) A_j(t) \quad (2.30)$$

Para obter as coordenadas A_j , substituímos na Eq.(2.24), resultando

$$EI \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j\pi x}{L}\right)^4 \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) A_j(t) + m \sum_{j=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \ddot{A}_j(t) = f_0 \delta(x - vt) + M(t) \delta'(x - a) - M(t) \delta'(x - L + a) \quad (2.31)$$

A equação pode escrever-se

$$EI \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j^2 \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) A_j(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \ddot{A}_j(t) = \frac{1}{m} p(x, t) \quad (2.32)$$

onde $p(x, t) = f_0\delta(x - \nu t) + M(t)\delta'(x - a) - M(t)\delta'(x - L + a)$. Multiplicando ambos lados da Eq.(2.32) por $\text{sen}(k\pi x/L)$ ($k = 1, 2, \dots$), e integrando entre 0 e L ,

$$\begin{aligned} EI \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j^2 A_j(t) \int_0^L \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{A}_j(t) \int_0^L \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \\ = \frac{1}{m} \int_0^L p(x, t) \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \quad (2.33) \end{aligned}$$

Em vista do fato de que as funções $\text{sen}(k\pi x/L)$ ($k = 1, 2, \dots$), satisfazem as seguintes relações de ortogonalidade

$$\begin{aligned} \int_0^L \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad j \neq k \\ = L/2 \quad j = k \end{aligned} \quad (2.34)$$

obtemos as seguintes equações modais:

$$\begin{aligned} \ddot{A}_j + \omega_j^2 A_j(t) = \frac{2}{mL} \int_0^L p(x, t) \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx \\ j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.35)$$

Onde

$$\begin{aligned} \int_0^L p(x, t) \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx = \\ \int_0^L f_0\delta(x - \nu t) \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx + \int_0^L M(t)\delta'(x - a) \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx \\ - \int_0^L M(t)\delta'(x - L + a) \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx \quad (2.36) \end{aligned}$$

Das propriedades da função delta:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a) \\ \int_a^b \delta(x-\xi) f(x) dx = f(\xi); \xi \in \langle a, b \rangle \end{cases} \quad (2.37)$$

Para a n-ésima derivada generalizada da função delta de Dirac:

$$\int_a^b \delta^{(n)}(x-\xi) f(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(\xi); \xi \in \langle a, b \rangle \quad (2.38)$$

resulta:

$$\int_0^L p(x,t) \operatorname{sen} \left(\frac{j\pi x}{L} \right) dx = f_0 \operatorname{sen} \left(\frac{j\pi \nu t}{L} \right) - M(t) \left(\frac{j\pi}{L} \right) \cos \left(\frac{j\pi a}{L} \right) [1 + (-1)^j] \quad (2.39)$$

Das Eqs. (2.25), (2.39), (2.35), resulta:

$$\begin{aligned} \ddot{A}_j + \omega_j^2 A_j(t) &= \frac{2f_0}{mL} \operatorname{sen} \left(\frac{j\pi \nu t}{L} \right) \\ &- \frac{2Slj\pi}{mL^2} [1 - (-1)^j] \cos \left(\frac{j\pi a}{L} \right) [u(t) + lz'(a,t) - lz'(L-a,t)] \end{aligned} \quad (2.40)$$

Neste trabalho, nossa atenção será denotada as equações dos três primeiros modos:

$$\ddot{A}_1 + \omega_1^2 A_1(t) = \frac{2f_0}{mL} \operatorname{sen} \Omega_1 t - B_1 [u(t) + lz'(a,t) - lz'(L-a,t)] \quad (2.41)$$

$$\ddot{A}_2 + \omega_2^2 A_2(t) = \frac{2f_0}{mL} \operatorname{sen} \Omega_2 t \quad (2.42)$$

$$\ddot{A}_3 + \omega_3^2 A_3(t) = \frac{2f_0}{mL} \operatorname{sen} \Omega_3 t - B_3 [u(t) + lz'(a,t) - lz'(L-a,t)] \quad (2.43)$$

no qual

$$\Omega_j = j\pi\nu/L;$$

$$B_j = (4Slj\pi)/(mL^2)\cos(j\pi a/L) \text{ para } j \text{ impar};$$

$$B_j = 0 \text{ para } j \text{ par.}$$

A frequência natural ω_j é obtido de

$$\omega_j^2 = \frac{j^4\pi^4 EI}{L^4 m} \quad (2.44)$$

Das Eqs (2.41), (2.42), (2.43) e (2.28) resulta

$$\ddot{A}_1 + \omega_1^2 A_1(t) = \frac{2f_0}{mL} \text{sen}\Omega_1 t - B_1[u(t) + C_1 A_1(t) + C_3 A_3(t)]$$

$$\ddot{A}_2 + \omega_2^2 A_2(t) = \frac{2f_0}{mL} \text{sen}\Omega_2 t$$

$$\ddot{A}_3 + \omega_3^2 A_3(t) = \frac{2f_0}{mL} \text{sen}\Omega_3 t - B_3[u(t) + C_1 A_1(t) + C_3 A_3(t)]$$

onde

$$C_j = (2lj\pi/L)\cos(j\pi a/L); \text{ para } j \text{ impar}$$

$$C_j = 0; \text{ para } j \text{ par}$$

3 LOCALIZAÇÃO ÓTIMA DOS ATUADORES E SENSORES

3.1 Introdução

Uma proposta para a determinação das localizações do atuador e sensor no controle de movimento de estruturas flexíveis, pode ser considerada antes que uma estratégia de controle seja desenvolvida. Esta proposta depende de certas medidas quantitativas do grau de controlabilidade e observabilidade baseado sobre os gramianos de controlabilidade e observabilidade.

Este critério é atingido pela consideração de energias da entrada e saída através de condições de perturbações transitórias e persistentes. O critério proposto de otimização para as localizações do sensor e atuador fornece um balanço entre a importância dos modos de ordem inferior e ordem superior. Uma vez que as soluções da forma fechada para estruturas flexíveis podem ser obtidas através do uso de gramianos, o método não é computacionalmente intensivo, requerendo somente a determinação dos autovalores dos gramianos correspondentes a cada passo de otimização. Estes autovalores podem ser obtidos em forma fechada quando o amortecimento estrutural é pequeno e as frequências naturais são distintas e bem espaçadas. Neste caso os atuadores de forças e os sensores de velocidades são achados e colocados. O método é ilustrado para uma ponte de um só vão (uma simples viga de suporte).

3.2 Modelo do sistema

Consideramos uma classe de sistemas de parâmetros distribuídos descrito pela equação diferencial parcial (equação de onda generalizada)[31]:

$$\mathcal{M}(P)\frac{\partial^2 w(P,t)}{\partial t^2} + 2\zeta[\mathcal{M}(P)\mathcal{L}]^{1/2} \left[\frac{\partial w(P,t)}{\partial t} \right] + \mathcal{L}[w(P,t)] = F(P,t) \quad (3.1)$$

sobre um domínio compacto D . Acima, $w(P,t)$ se refere ao deslocamento da estrutura com respeito à posição de equilíbrio; é uma função da variável espacial P e do tempo t . O termo não-homogêneo $F(P,t)$ se refere a distribuição da força externa. O operador \mathcal{L} é um operador diferencial linear não negativo e auto-adjunto homogêneo consistindo de derivadas de ordem $2q$ com respeito à coordenada espacial P mas não com respeito ao tempo; o qual representa a distribuição de rigidez do sistema. A densidade de massa $\mathcal{M}(P)$ é uma função definida positiva da localização P . Sem perda de generalidade pode ser assumida que $\mathcal{M}(P) = 1$, mas $\mathcal{M}(P)$ é conservado no seguinte desenvolvimento para distinguir entre a massa do sistema e as propriedades de rigidez. É assumido que o controle é realizado essencialmente por p atuadores pontuais atuando essencialmente em localizações P_j ($j = 1, 2, \dots, p$). Portanto

$$F(P,t) = \sum_{j=1}^p \delta(P - P_j) f_j(t), \quad (3.2)$$

onde $f_j(t)$, $j = 1, \dots, p$ são forças de atuadores. A estrutura satisfaz q condições de contorno:

$$B_k(w(P,t)) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad (3.3)$$

onde B_k são operadores diferenciais homogêneos lineares que contendo derivadas normais ao contorno e ao longo da fronteira de ordem de $2q - 1$.

Conforme o teorema de expansão [31], a solução para a Eq.(3.1) pode ser representada como a série:

$$w(P, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(P) \eta_i(t), \quad (3.4)$$

onde $\eta_i(t)$ são coordenadas modais e $\Phi_i(P)$ são autofunções. As autofunções são soluções do problema de autovalor consistindo da equação diferencial

$$\mathcal{L}(\Phi(P)) = \omega^2 \mathcal{M}(P) \Phi(P) \text{ e}$$

satisfaz as condições de contorno

$$B_k(\Phi(P)) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, q.$$

A solução resulta ser um conjunto infinito de autofunções $\Phi_i(P)$ correspondente às frequências naturais ω_i . As autofunções satisfazem a condição de ortogonalidade e podem ser normalizadas como

$$\int_D \mathcal{M}(P) \Phi_r(P) \Phi_s(P) dP = \delta_{rs} \quad (3.5)$$

para cada $r, s = 1, 2, \dots$, onde δ_{rs} é a função delta de Kronecker. Além disso,

$$\int_D \Phi_r(P) \mathcal{L}(\Phi_s(P)) dP = \omega_r^2 \delta_{rs}. \quad (3.6)$$

O termo força do lado direito da Eq. 3.1 pode ser expandido em uma série de $\Phi_i(P)$:

$$F(P, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}(P) \Phi_i(P) Q_i(t), \quad (3.7)$$

onde a força generalizada $Q_i(t)$ associada com a coordenada generalizada $\eta_i(t)$ podem ser achadas de:

$$Q_i(t) = \int_D \Phi_i(P) F(P, t) dP = \sum_{j=1}^p \Phi_i(P_j) f_j(t). \quad (3.8)$$

onde $Q_i(t)$ foi achada da Eq. (3.2). da propriedade da função delta de Dirac, Eq. (2.37), e das condições de ortogonalidade, Eq. (3.5). Introduzindo as representações de series (3.4) e (3.7) na Eq.(3.1) e usando o procedimento de ortogonalização padrão (multiplicando a Eq.(3.1) por $\omega_j(P)$. integrando sobre o dominio D e usando as relações de ortogonalidade (3.5) e (3.6), a Eq.(3.1) pode ser substituído por um conjunto infinito de equações diferenciais ordinárias:

$$\ddot{\eta}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = Q_i(t) = \sum_{j=1}^p \Phi_i(P_j)f_j(t), \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

Note que realmente $\zeta_i = \zeta$ para cada i resulta da Eq.(3.1) mas ζ_i é usado na Eq.(3.9) para explicar diferentes modelos de amortecimento. Visto que os modos de ordem superior (ou seja $i > n$ para algum n grande) não são adequados para serem excitados na prática e tipicamente exibem um amortecimento estrutural elevado, eles podem ser desprezados em uma análise aproximada. Definindo os vetores de estado e de entrada como

$$\mathbf{x} = [\dot{\eta}_1, \omega_1\eta_1, \dots, \dot{\eta}_n, \omega_n\eta_n]^T, \quad \mathbf{u} = [f_1, \dots, f_p]^T, \quad (3.10)$$

produz a representação de estado da Eq. (3.9),

$$\dot{\mathbf{x}} = [A]\mathbf{x} + [B]\mathbf{u}, \quad (3.11)$$

onde

$$[A] = \text{diag}(A_i), \quad [A_i] = \begin{pmatrix} -2\zeta_i\omega_i & -\omega_i \\ \omega_i & 0 \end{pmatrix}, \quad [B] = \begin{pmatrix} \Phi_1(P_1) & \dots & \Phi_1(P_p) \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_n(P_1) & \dots & \Phi_n(P_n) \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

3.3 Localização do atuador

Em muitas aplicações, a estrutura pode ser perturbada por dois tipos de entradas externas: (1) uma perturbação transitória (termo curto), cujo efeito no qual pode ser descrito por uma mudança nas condições iniciais; (2) uma perturbação excitada persistentemente. No primeiro caso o propósito do controle é retornar o sistema do estado perturbado para o estado desejado num tempo dado (não necessariamente finito), usando no controle a menor possibilidade de esforço. No segundo caso, os atuadores minimizariam o efeito da perturbação sobre o movimento da estrutura medida durante um longo período de tempo.

Sob certas condições, o critério para a distribuição dos atuadores pode ser quase o mesmo para ambos os tipos de perturbações. Na discussão seguinte nós descreveremos cada caso em maiores detalhes.

LOCALIZAÇÃO DO ATUADOR SOB PERTURBAÇÃO TRANSITÓRIA

Vamos supor que devido a algumas perturbações o vetor de estado de um sistema descrito pela Eq.(3.11) foi perturbado de forma que a condição inicial $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$ se mantém. Na colocação dos atuadores é desejável minimizar a energia de controle requerida para trazer o sistema ao estado desejado $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T$ depois de algum tempo T . Isto pode ser realizado pela seguinte consideração do problema de energia mínima [32]:

Minimizar

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \int_0^T \mathbf{u}^T(t)\mathbf{u}(t)dt, \quad (3.13)$$

sujeito a $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}_T$ e a equação de estado (3.11). Este é um problema de controle ótimo linear quadratico com tempo terminal fixado e estado terminal fixado [9]. A solução ótima é dada por

$$\mathbf{u}_0(t) = -[B]^T e^{[A](T-t)}[W]^{-1}(T)(e^{[A]T}\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_T), \quad (3.14)$$

onde $[W](\cdot)$ é gramiano de controlabilidade, definido por

$$[W](t) = \int_0^t e^{[A]\tau} [B][B]^T e^{[A]^T \tau} d\tau. \quad (3.15)$$

Sob a lei de controle (3.14), a energia de controle é

$$\mathcal{J}_0 = (e^{[A]^T T} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_T)^T [W]^{-1}(T) (e^{[A]^T T} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_T). \quad (3.16)$$

Para examinar a dependência de $[W](T)$ no tempo, note que a matriz de transição, Eq. (3.12), para o sistema descrito pela Eq. (3.11) é

$$e^{[A]t} = \text{diag}(e^{[A_i]t}),$$

com

$$e^{[A_i]t} = e^{-\zeta_i \omega_i t} \begin{pmatrix} \cos \omega_{hi} t - (\zeta_i \omega_i / \omega_{hi}) \text{sen} \omega_{hi} t & -(\omega_i / \omega_{hi}) \text{sen} \omega_{hi} t \\ (\omega_i / \omega_{hi}) \text{sen} \omega_{hi} t & \cos \omega_{hi} t + (\zeta_i \omega_i / \omega_{hi}) \text{sen} \omega_{hi} t \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

onde $\omega_{hi} = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}$ é a frequência natural amortecida. Portanto, se $\zeta_i > 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ nesse caso o integrando da Eq.(3.15) decrescerá pelo menos tão rápido quanto a função exponencial $e^{-2\zeta_k \omega_k t}$, onde $\zeta_k \omega_k \leq \zeta_i \omega_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. É conhecido[32] que $[W](t)$ satisfaz

$$[\dot{W}](t) = [A][W](t) + [W](t)[A]^T + [B][B]^T, \quad (3.18)$$

e quando $[A]$ é uma matriz assintoticamente estável, $[W](t)$ converge a um estado estacionário $[W]_c$ o qual é a solução da equação de Lyapunov

$$[A][W]_c + [W]_c[A]^T + [B][B]^T = \mathbf{0}. \quad (3.19)$$

Da relação

$$[W_c] = \int_0^{\infty} e^{[A]\tau} [B][B]^T e^{[A]^T \tau} d\tau = [W](T) + \int_T^{\infty} e^{[A]\tau} [B][B]^T e^{[A]^T \tau} d\tau \quad (3.20)$$

resulta que, depois de algumas manipulações simples:

$$[W](T) = [W_c] - e^{[A]T} [W_c] e^{[A]^T T}, \quad (3.21)$$

onde $e^{[A]T}$ não depende da localização do atuador e $\|e^{[A]T}\| \rightarrow 0$ com $T \rightarrow \infty$, quando $[A]$ é assintoticamente estável. Por causa da forma da matriz $e^{[A]T}$, a qual está unida com elementos que exibem comportamentos oscilatórios envolvidos por funções exponenciais, algumas escolhas do tempo T podem suprimir os efeitos de alguns modos em $[W](T)$ enquanto atenuam o efeito de outros. Como resultado, a solução para o problema de distribuição do atuador dependerá do tempo T o qual para uma grande extensão deve ser selecionado arbitrariamente. Para eliminar esta dependência da solução em T , consideramos uma solução de estado estacionário com o gramiano de controlabilidade, $[W_c]$, que satisfaz a Eq.(3.19) para sistemas assintoticamente estáveis. Para estruturas sem amortecimento, a Eq.(3.19) não pode ser aplicada. Neste caso, contudo, a Eq.(3.17) simplifica-se para:

$$e^{[A_i]t} = \begin{pmatrix} \cos \omega_i t & -\text{sen} \omega_i t \\ \text{sen} \omega_i t & \cos \omega_i t \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

e o gramiano $[W](T)$ pode ser achado em forma fechada da Eq. (3.15). Para sistemas com frequências naturais distintas, obtemos

$$[W_{ij}](T) = \frac{\beta_{ij}}{2} \left(\begin{array}{c} \frac{\text{sen}(\omega_i - \omega_j)T}{\omega_i - \omega_j} + \frac{\text{sen}(\omega_i + \omega_j)T}{\omega_i + \omega_j} \\ \frac{1 - \cos(\omega_i - \omega_j)T}{\omega_i - \omega_j} + \frac{1 - \cos(\omega_i + \omega_j)T}{\omega_i + \omega_j} \\ \frac{-1 + \cos(\omega_i - \omega_j)T}{\omega_i - \omega_j} + \frac{1 - \cos(\omega_i + \omega_j)T}{\omega_i + \omega_j} \\ \frac{\text{sen}(\omega_i - \omega_j)T}{\omega_i - \omega_j} - \frac{\text{sen}(\omega_i + \omega_j)T}{\omega_i + \omega_j} \end{array} \right) \quad (3.23)$$

para $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, onde

$$\beta_{ij} = \sum_{q=1}^p \Phi_i(P_q) \Phi_j(P_q), \quad (3.24)$$

e $[W_{ij}](T)$ referir-se à (i,j) -enésima submatriz de $[W](T)$. Também,

$$[W_{ii}](T) = \frac{\beta_{ii}}{2} \begin{pmatrix} T + \frac{1 - \cos 2\omega_i T}{2\omega_i} & \frac{1 - \cos 2\omega_i T}{2\omega_i} \\ \frac{1 - \cos 2\omega_i T}{2\omega_i} & T - \frac{1 - \cos 2\omega_i T}{2\omega_i} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

observe-se que como $T \rightarrow \infty$ a matriz $[W](T)$ torna-se ilimitada neste caso e é diagonal dominante para T grande.

PERTURBAÇÃO PERSISTENTE

No caso de uma perturbação persistente, a distribuição dos atuadores garantiria que o comportamento do sistema de estado estacionário seria afetado em maior grau possível pelos atuadores, para suprimir o efeito das perturbações. Em particular, a energia transmitida dos atuadores a todos os modos estruturais seria tão grande quanto possível (sob restrições do atuador de energia).

Para avaliar esta contribuição de energia, usamos análises de covariância. Suponha-se que os sinais gerados pelos atuadores individuais são (dentro de uma banda de frequência considerada) processos de ruído branco que estão mutuamente incorrelacionados e tem a matriz de covariância

$$\mathbf{E}\{\mathbf{u}(t)\mathbf{u}^T(\tau)\} = [\mathcal{U}]\delta(t - \tau), \quad (3.26)$$

onde $[\mathcal{U}]$ é uma matriz diagonal definida positiva (intensidade de ruído). Quando todos os atuadores tenham os mesmos requerimentos de energia então pode ser assumido que $[\mathcal{U}] = [I]$, onde $[I]$ é a matriz de identidade.

As energias cinética e potencial do sistema (3.1) são dadas por [31]:

$$E_k = \frac{1}{2} \int_D \mathcal{M}(P) \dot{w}^2(P, t) dP, \quad E_p = \frac{1}{2} \int_D w(P, t) \mathcal{L}(w(P, t)) dP. \quad (3.27)$$

Usando a expansão (3.4), a linearidade do operador \mathcal{L} e depois as relações de ortogonalidade (3.5) e (3.6), é possível demonstrar que

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\eta}_i^2(t), \quad E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i^2 \eta_i^2(t) \quad (3.28)$$

isto é, o sistema de energia pode ser expressado como uma soma de contribuições de cada modo. Considerando o sistema truncado (3.11) (incluindo n modos) sob excitação de ruído branco, o comportamento do sistema de estado estacionário caracterizado pela matriz covariância de estado

$$\mathbf{E}[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)] = [\mathcal{X}](t) \quad (3.29)$$

é descrito pela equação [9]:

$$[A][\mathcal{X}] + [\mathcal{X}][A]^T + [B][\mathcal{U}][B]^T = \mathbf{0}, \quad (3.30)$$

o qual é exatamente a mesma como a Eq. (3.19) quando $[\mathcal{U}] = [I]$.

Tomando vantagem da estrutura da matriz $[A]$, podemos estabelecer que para $[\mathcal{U}] = [I]$, os elementos diagonais de $[\mathcal{X}]$, \mathcal{X}_{ii} são dados por

$$\mathcal{X}_{2i-1, 2i-1} = \mathcal{X}_{2i, 2i} = \frac{\beta_{ii}}{4\zeta_i \omega_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.31)$$

onde $\beta_{ii} = \sum_{q=1}^p \Phi_i^2(P_q)$ segundo a Eq. (3.24). Portanto, os valores esperados das energias cinética e potencial são, respectivamente,

$$\mathbf{E}\{E_k\} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E(\dot{\eta}_i^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathcal{X}_{2i-1, 2i-1} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^n \frac{\beta_{ii}}{\zeta_i \omega_i}, \quad (3.32)$$

$$\mathbf{E}\{E_p\} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E(\omega_i^2 \eta_i^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathcal{N}_{2i,2i} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^n \frac{\beta_{ii}}{\zeta_i \omega_i}, \quad (3.33)$$

e a esperança da energia total é

$$\mathbf{E}\{E_t\} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{\beta_{ii}}{\zeta_i \omega_i}, \quad (3.34)$$

é visto da expressão (3.34) que, assim como as energias cinética e potencial da estrutura, a energia total é a soma das contribuições de cada modo, calculada independentemente.

RELAÇÕES ENTRE O GRAMIANO DE CONTROLABILIDADE E A EXPRESSÃO DE ENERGIA

Dirigimos a questão do relacionamento entre a expressão de energia obtida na seção anterior e os autovalores do gramiano de controlabilidade. Particionando o gramiano $[W_c]$ conforme:

$$[W_c] = \begin{pmatrix} [W_{11}] & [W_{12}] & \dots & [W_{1n}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [W_{n1}] & [W_{n2}] & \dots & [W_{nn}] \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

onde $[W_{ij}]$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$, são matrizes de 2×2 e usando em particular as estruturas das matrizes $[A]$ e $[B]$ (Eqs.(3.12)), a Eq.(3.19) pode ser resolvida na forma fechada[17]. O resultado é

$$[W_{ij}] = \begin{pmatrix} 2\omega_i \omega_j (\zeta_i \omega_j + \zeta_j \omega_i) & \omega_j (\omega_j^2 - \omega_i^2) \\ -\omega_i (\omega_j^2 - \omega_i^2) & 2\omega_i \omega_j (\zeta_i \omega_i + \zeta_j \omega_j) \end{pmatrix} \frac{\beta_{ij}}{d_{ij}}, \quad (3.36)$$

onde

$$d_{ij} = 4\omega_i \omega_j (\zeta_i \omega_i + \zeta_j \omega_j) (\zeta_i \omega_j + \zeta_j \omega_i) + (\omega_i^2 - \omega_j^2)^2, \quad (3.37)$$

e β_{ij} é dada pela Eq.(3.24).

Quando as razões de amortecimento ζ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, são pequenas e as frequências naturais ω_i são bem espaçadas, a Eq.(3.37) aproxima-se por $d_{ij} \approx (\omega_i^2 - \omega_j^2)^2$ para $i \neq j$ e $d_{ii} \approx 16\omega_i^3\zeta_i^2$. Dai que a matriz diagonal de blocos do gramiano de controlabilidade simplifica-se como

$$[W_{ii}] = \text{diag} \left(\frac{\beta_{ii}}{4\zeta_i\omega_i}, \frac{\beta_{ii}}{4\zeta_i\omega_i} \right). \quad (3.38)$$

CRITÉRIO PROPOSTO PARA A LOCALIZAÇÃO DO ATUADOR

Para o caso de perturbação persistente, o critério proposto [19] para o índice de desempenho PI' é:

$$PI' = 2 \left(\sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i \right) \left(\prod_{i=1}^n (\mathcal{E}_i) \right)^{1/n}, \quad (3.39)$$

na qual \mathcal{E}_i denota o valor medio da energia total do i -ésimo modo dado por

$$\mathcal{E}_i = \frac{\beta_{ii}}{4\zeta_i\omega_i}. \quad (3.40)$$

Para o caso de perturbação transitoria, o criterio proposto [19] para o índice de desempenho PI é:

$$PI = \left(\sum_{j=1}^{2n} \lambda_j \right) \left(\prod_{j=1}^{2n} (\lambda_j) \right)^{1/2n}, \quad (3.41)$$

onde λ_j denota o autovalor do gramiano de controlabilidade $[W_c]$.

Quando as razões de amortecimento ζ_i são pequenas e as frequências naturais da estrutura são bem espaçadas então

$$\lambda_{2i-1} = \lambda_{2i} = \mathcal{E}_i, \quad (3.42)$$

e os critérios (3.37) e (3.39) são idênticos.

3.4 Localização do sensor

Consideramos o sistema definido em (3.1). Suponhamos que r deslocamentos $w(P_q, t)$, $q = 1, 2, \dots, r$ são medidos em r pontos P_1, P_2, \dots, P_r da estrutura. Usando a expansão truncada (3.4), e as variáveis de estado (3.10), a equação de saída resulta:

$$\mathbf{y}(t) = [C_d]\mathbf{x}(t), \quad (3.43)$$

onde $\mathbf{y}(t)$ é um vetor de saída r -dimensional e $[C_d] \in R^{r \times 2n}$ é dada por

$$[C_d] = \begin{pmatrix} 0 & \Phi_1(P_1)/\omega_1 & \dots & 0 & \Phi_n(P_1)/\omega_n \\ 0 & \Phi_1(P_2)/\omega_1 & \dots & 0 & \Phi_n(P_2)/\omega_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \Phi_1(P_r)/\omega_1 & \dots & 0 & \Phi_n(P_r)/\omega_n \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Se as r velocidades antes que as posições são medidas, então a equação saída é

$$\mathbf{y}(t) = [C_v]\mathbf{x}(t), \quad (3.45)$$

onde

$$[C_v] = \begin{pmatrix} \Phi_1(P_1) & 0 & \dots & \Phi_n(P_1) & 0 \\ \Phi_1(P_2) & 0 & \dots & \Phi_n(P_2) & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Phi_1(P_r) & 0 & \dots & \Phi_n(P_r) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Se os deslocamentos e velocidades são ambos medidos, então a matriz $[C]$ tornar-se uma combinação de $[C_d]$ e $[C_v]$.

Se o sistema é liberado do estado inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ com $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$, $t \geq 0$, então a energia de saída é [18]:

$$\int_0^{\infty} \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t)dt = \mathbf{x}_0^T[\mathcal{Q}]\mathbf{x}_0, \quad (3.47)$$

onde $[\mathcal{Q}]$ é matriz de observabilidade. Pode ser visto que a matriz de observabilidade é quase singular então algumas condições iniciais terão efeito sobre a saída.

A matriz gramiano $[\mathcal{Q}]$ é definido como

$$[\mathcal{Q}] = \int_0^{\infty} \mathbf{e}^{[A]^T t} [\mathbf{C}]^T [\mathbf{C}] \mathbf{e}^{[A]t} dt, \quad (3.48)$$

e para sistemas assintoticamente estável, este satisfaz a equação de Lyapunov [32]:

$$[\mathbf{A}]^T [\mathcal{Q}] + [\mathcal{Q}] [\mathbf{A}] + [\mathbf{C}]^T [\mathbf{C}] = \mathbf{0}. \quad (3.49)$$

Seguindo a aproximação usada pelo gramiano de controlabilidade, i.e, particionando $[\mathcal{Q}]$ e usando as estruturas das matrizes $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{C}]$, as soluções na forma fechada podem ser obtidas. No caso de medidas do deslocamento,

$$[\mathcal{Q}_{ij}] = \begin{pmatrix} 2\omega_i\omega_j e_{ij} & \omega_i[4\zeta_j\omega_j e_{ij} - (\omega_j^2 - \omega_i^2)] \\ \omega_j[4\zeta_i\omega_i e_{ij} - (\omega_j^2 - \omega_i^2)] & 2(\zeta_j\omega_j^3 + \zeta_i\omega_i^3) + 8\zeta_i\zeta_j\omega_i\omega_j e_{ij} \end{pmatrix} \frac{c_{dij}}{d_{ij}}, \quad (3.50)$$

onde d_{ij} é dada pela Eq. (3.37) e

$$c_{dij} = \sum_{k=1}^r \frac{\Phi_i(P_k)\Phi_j(P_k)}{\omega_i\omega_j}, \quad e_{ij} = \zeta_i\omega_i + \zeta_j\omega_j. \quad (3.51)$$

Quando as velocidades são medidas,

$$[\mathcal{Q}_{ij}] = \begin{pmatrix} 2\omega_i\omega_j(\zeta_i\omega_j + \zeta_j\omega_i) & -\omega_j(\omega_j^2 - \omega_i^2) \\ -\omega_i(\omega_j^2 - \omega_i^2) & 2\omega_i\omega_j(\zeta_i\omega_i + \zeta_j\omega_j) \end{pmatrix} \frac{c_{vij}}{d_{ij}}, \quad (3.52)$$

com

$$c_{vij} = \sum_{k=1}^r \Phi_i(P_k) \Phi_j(P_k). \quad (3.53)$$

Quando ambos, posições e velocidades são medidas, então a matriz $[C]^T = ([C_d]^T \quad [C_v]^T)$, e pode ser facilmente demonstrado que o gramiano obtido para este caso é a soma dos gramianos considerados acima, pois

$$[C]^T[C] = [C_d]^T[C_d] + [C_v]^T[C_v].$$

Podemos mostrar diretamente que quando o amortecimento é pequeno e todas as frequências naturais são bem espaçadas, os gramianos são dominados pelos elementos diagonais

$$[Q_{ii}] = \text{diag} \left(\frac{c_{dii}}{4\zeta_i\omega_i}, \frac{c_{dii}}{4\zeta_i\omega_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.54)$$

quando as posições são medidas, e por

$$[Q_{ii}] = \text{diag} \left(\frac{c_{vii}}{4\zeta_i\omega_i}, \frac{c_{vii}}{4\zeta_i\omega_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.55)$$

quando as velocidades são medidas. Neste caso

$$\mathbf{x}_0^T [Q] \mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^n \frac{c_{ii}}{4\zeta_i\omega_i} (x_{02i+1}^2 + x_{02i}^2), \quad (3.56)$$

onde $c_{ii} = c_{dii}$, c_{vii} ou $c_{dii} + c_{vii}$, dependendo se os deslocamentos, velocidades ou ambas são medidas e x_{02i-1} , x_{02i} referem aos componentes do vetor de estado inicial \mathbf{x}_0 . Para produzir uma grande energia de saída para qualquer estado inicial, todos os termos diagonais de $[Q]$ assim como sua soma tem que ser grande. No caso geral, os termos diagonais seriam substituídos pelos autovalores. Comparando as Eqs. (3.55) e (3.53) com (3.38) e (3.24), isto pode ser visto que no caso de medições de velocidade, os autovalores da matriz gramiano de observabilidade e a matriz gramiano de controlabilidade são os mesmos para estruturas altamente amortecidas com modos

bem separados. Agora consideramos o sistema descrito pela Eq.(3.1), sujeito à perturbação persistente. Supõe-se que esta perturbação está distribuída espacialmente com processo de ruído branco, isto é

$$F(P, t) = f(P)\xi(t), \quad (3.57)$$

onde $\xi(t)$ é um ruído branco com intensidade unitária. Assumiremos mais adiante que a distribuição espacial $f(P)$ é tal que primeiros n modos são excitados com igual intensidade. Esta condição é satisfeita pela escolha

$$f(P) = \mathcal{M}(P) \sum_{j=1}^n \Phi_j(P) \quad (3.58)$$

pois então

$$Q_i(t) = \xi(t) \quad (3.59)$$

conseguidas das Eqs. (3.57), (3.58), (3.8) e (3.5). O sistema é agora descrito pela Eq.(3.9), com Q_i dado pela Eq.(3.59). Este é um sistema linear, acionado por um processo de ruído branco. O valor mínimo quadrado do sistema saída é

$$E\{\mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t)\} = E\{\mathbf{x}^T(t)[C]^T[C]\mathbf{x}(t)\} = \text{tr}\{([C]^T[C])[\mathcal{X}](t)\}, \quad (3.60)$$

onde $[\mathcal{X}](t)$ é a matriz de covariância para o vetor de estado (Eq.(3.29)). Em estado estacionário, a matrix $[\mathcal{X}](t)$ tornar-se invariante no tempo e satisfaz a equação de Lyapunov

$$[A][\mathcal{X}] + [\mathcal{X}][A]^T + \mathbf{b}\mathbf{b}^T = \mathbf{0}, \quad (3.61)$$

com $[A]$ dada pela Eq.(3.12) e \mathbf{b} dada por

$$\mathbf{b} = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0]^T. \quad (3.62)$$

Como a Eq.(3.61) tem a mesma estrutura que Eq.(3.19), a solução para $[\mathcal{X}_{ij}]$ (a qual é uma submatriz 2×2 de $[\mathcal{X}]$) é dada pela Eq.(3.36) com $\beta_{ij} = 1$. Se as frequências naturais são bem espaçadas e os coeficientes de amortecimento são pequenas, a matriz $[\mathcal{X}]$ aproxima-se à matriz diagonal com

$$[\mathcal{X}_{ii}] = \text{diag} \left(\frac{1}{4\zeta_i\omega_i}, \frac{1}{4\zeta_i\omega_i} \right), \quad (3.63)$$

e, por conseguinte, da Eq.(3.60) segue-se que

$$\mathbf{E}\{\mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t)\} = \sum_{i=1}^n \frac{c_{ii}}{4\zeta_i\omega_i}, \quad (3.64)$$

com c_{ii} definida como anteriormente. Comparando a Eq.(3.64) com (3.54) e (3.55), é visto que grandes elementos diagonais da matriz gramiano de observabilidade faria a resposta de estado estacionário do sistema para uma grande excitação persistente, ao menos para uma estrutura com frequências naturais bem espaçadas e amortecimento baixo. Como um resultado, adotamos o seguinte critério para a localização dos sensores. Maximizar

$$PI = \left(\sum_{j=1}^{2n} \lambda_j \right) \left(\prod_{j=1}^{2n} (\lambda_j) \right)^{1/2n}, \quad (3.65)$$

onde λ_j refere-se aos autovalores do gramiano de observabilidade. Desde que para estruturas com amortecimento leve com frequências bem separadas, os autovalores da matriz gramiano de observabilidade no caso das medições de velocidade são os mesmos que os autovalores da matriz gramiano de controlabilidade, posições ótimas dos sensores de velocidade e atuadores de força baseados sobre o critério (3.65) e (3.41), respectivamente, coincidem. O critério dado acima fornecerá as localizações

do sensor perto dos pontos de valores máximos para os modos dominantes, a menos que estejam na vizinhança de nodos para qualquer outro modo.

3.5 Exemplo de aplicação

Para ilustrar o método proposto, consideramos a dinâmica de uma ponte com atrito, descrita pelo modelo:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\zeta \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right] + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^p \delta(x - x_j) f_j(t), \quad (3.66)$$

onde os x'_j s denota as localizações dos atuadores. Isto corresponde para a Eq.(3.1) com $\mathcal{M}(P)=1$ e $\mathcal{L}(\cdot) = (EI/\rho A)\partial^4/\partial x^4$. As freqüências naturais e autofunções normalizadas para a ponte são[MEI67]:

$$\omega_i = \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad \Phi_i(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen} \frac{i\pi x}{L}, \quad (3.67)$$

onde L é a longitude da ponte e i é o número de modo. Daí, as freqüências naturais são bem espaçadas e se o amortecimento é pequeno, o gramiano de controlabilidade é diagonalmente dominante e pode ser obtida da Eq.(3.38), no qual neste caso é

$$W_{ii} = \frac{1}{2\rho AL\zeta_i\omega_i} \left(\sum_{j=1}^p \text{sen}^2 \frac{i\pi x_j}{L} \right) \text{diag}(1,1). \quad (3.68)$$

É visto nesta expressão que os autovalores do gramiano de controlabilidade correspondentes a um modo dado são inversamente proporcionais às freqüências naturais destes modos, o qual por sua vez são proporcionais aos quadrados do modo i . Portanto, os autovalores decrescem rapidamente com i .

Para os cálculos numéricos, o seguinte dado para a ponte é assumida:

$$EI = 2.667 \text{ Nm}^2, \quad \rho A = 3.12 \text{ kg/m}, \quad \zeta = 0.01.$$

Na Fig. 3.1 mostra um gráfico do índice de desempenho da Eq.(3.41) versus a localização do atuador quando seis modos são incluídos no modelo da ponte analisada. Virtualmente os mesmos resultados são obtidos quando o critério (3.39) foi usado. A localização do atuador ótimo está próximo ao centro (em 17.32 ou 22.68 para uma ponte de 40 m) já que a resposta dinâmica da ponte é dominada em grande parte pelo primer modo (modo fundamental), a máxima amplitude do qual ocorre no centro. Esta localização ótima foi altamente insensível à quantidade de amortecimento, ζ , visto que este valor é pequeno (ou seja, menor que 0.1). Pode ver-se que o índice de desempenho desaparece quando a controlabilidade de qualquer modo está perdido. Nas figuras 3.2(a) e 3.2(b) são mostrados os gráficos dos índices de desempenho da Eq.(3.65) para a localização do sensor versus posição do sensor, Assumindo medições de deslocamento(Fig. 3.2(a)) e medições de velocidade (Fig. 3.2(b)), respectivamente. Os resultados são quantitativamente quase os mesmos, mas os picos sobre as curvas do índice de desempenho correspondente à amplitude máxima dos modos de ordem superior são inferiores para o caso de medições de localização. Este pode ser prognosticado sobre as bases das expressões aproximadas para os gramianos de observabilidade (3.54), (3.55) e (3.53), o qual mostra que os autovalores do gramiano são inversamente proporcionais às frequências naturais quando as medições de velocidade são usadas, mas são inversamente proporcionais ao cubo das frequências naturais quando os deslocamentos são medidos. As posições ótimas para o atuador e ambos sensores são os mesmos.

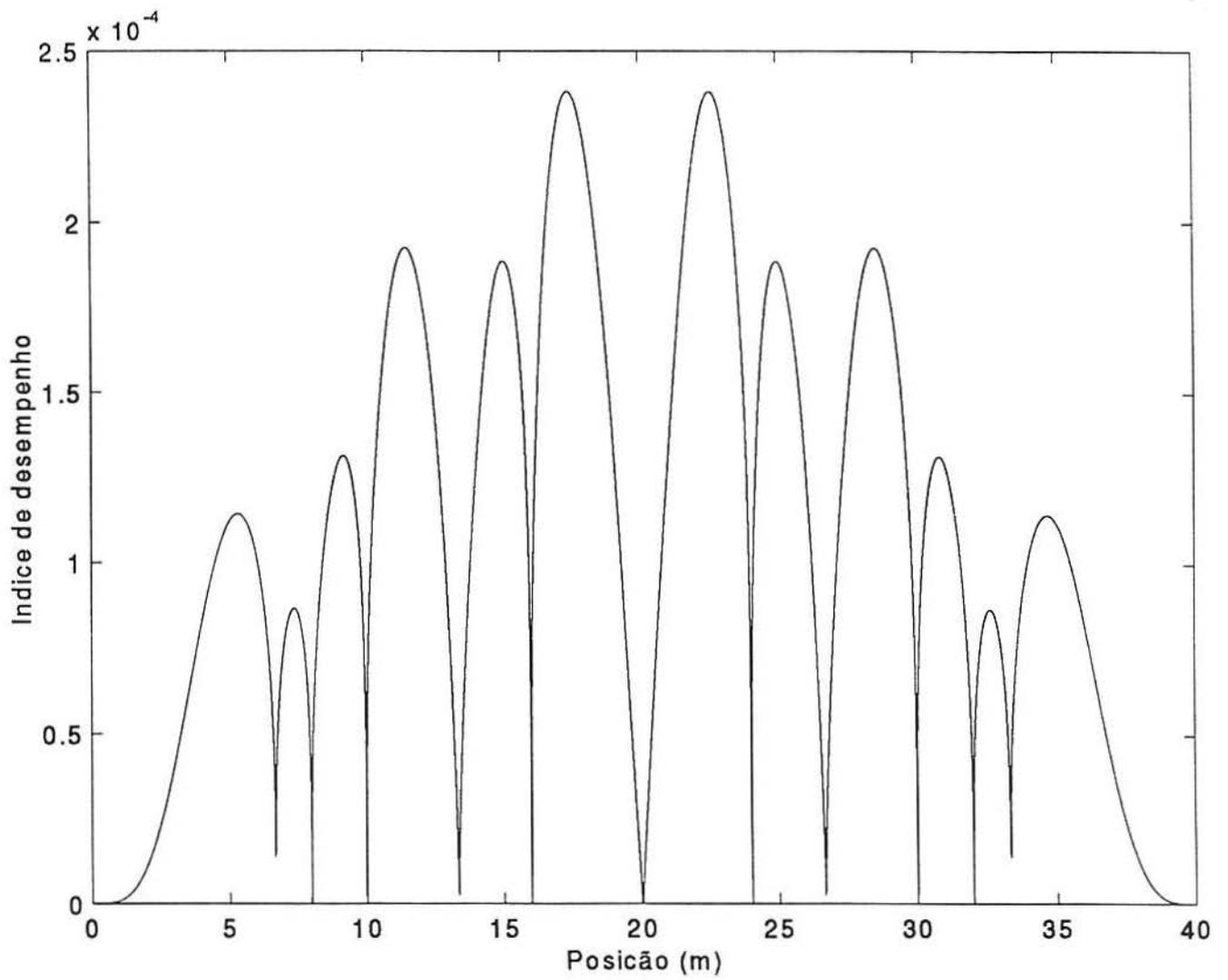


Figura 3.1 Índice de Desempenho versus Localização de um Atuador de força para uma Ponte com seis Modos

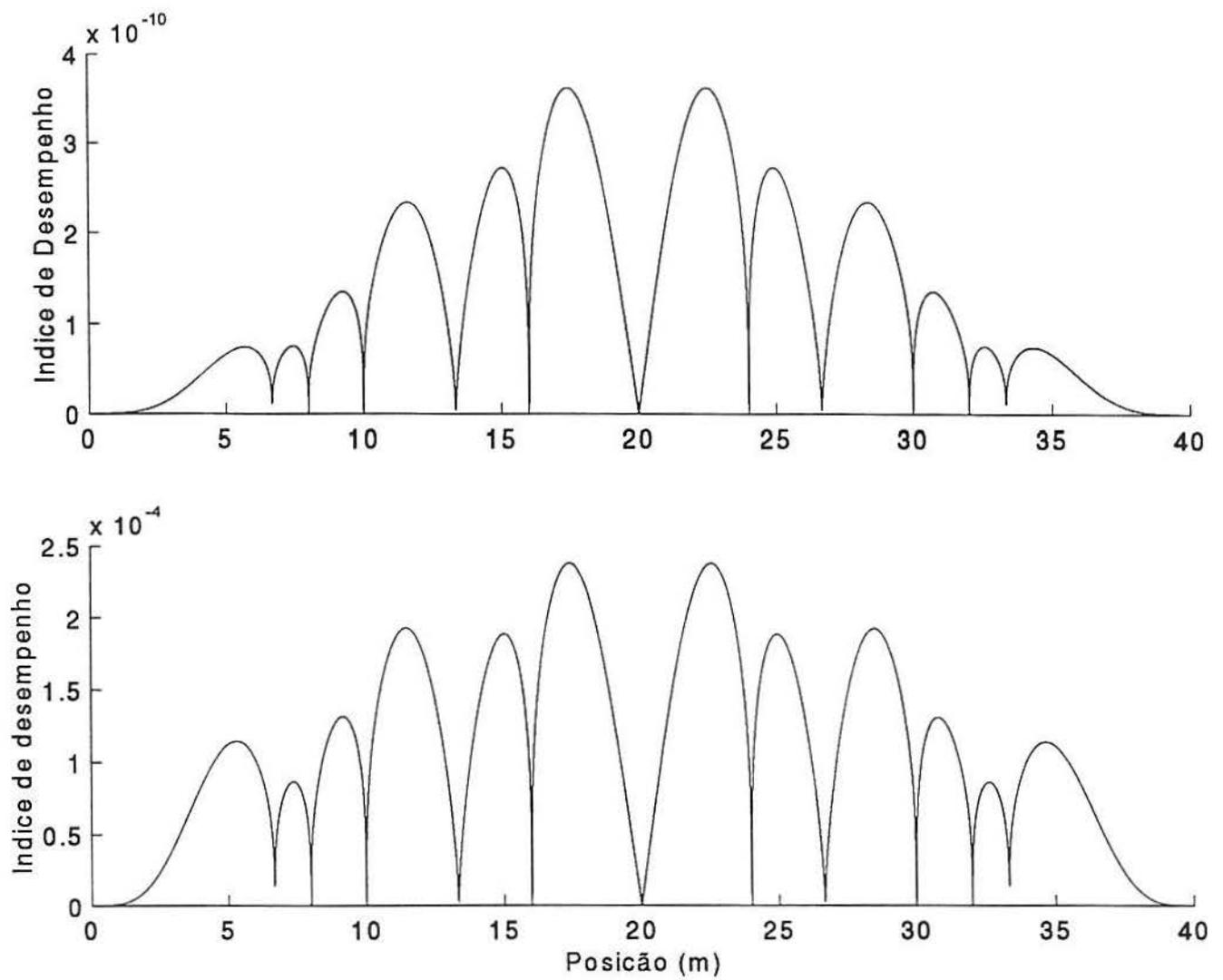


Figura 3.2 Índice de Desempenho versus Sensor Posição da Ponte. (a) Sensor de Deslocamento; (b) Sensor de velocidade

4 TÉCNICA DE CONTROLE ATIVO

4.1 Introdução

A tecnologia de controle está sendo utilizada no estudo de estruturas flexíveis tais como prédios altos e pontes de vãos longos. O desenho destas estruturas envolve certos problemas, por exemplo, segurança (o risco de falhas devido às incertezas das cargas aplicadas), conforto humano (inquilinos sobre os andares superiores em prédios altos e pedestres sobre as pontes de vão grande sofrem efeitos psicofisiológicos devido à vibração), e um acréscimo do risco de dano (vibrações causam rachaduras de janelas, rachaduras de paredes, etc.). Qualquer intento de construir estruturas maiores e mais altas sem prestar atenção apropriada a estes problemas não tem êxito. Um controle estrutural tem sido proposto como uma possível solução[43]. As estruturas podem ser controladas usando mecanismos de controle ativo ou passivo. Um mecanismo de controle passivo opera sem o uso de abastecimento externo de energia. No entanto, é caro e capaz de controlar o deslocamento até certo limite. Um mecanismo de controle ativo opera só se a energia externa se abastece continuamente. Ainda que caro, pode controlar o deslocamento a velocidade ou a aceleração da estrutura ou todas elas.

Foram feitas tentativas variadas para aplicar a teoria de controle ativo ao controle das estruturas da engenharia civil [29][36]. A implementação da força de controle, a pesquisa do tipo apropriado do mecanismo de controle e seus componentes e a integração de modos de vibração e seu efeito no comportamento da estrutura controlada não foram estudados. Neste capítulo foi feito o estudo de uma ponte de vão longo sujeito a uma carga móvel determinística utilizando técnica de controle ativo.

4.2 Projeto do controle ativo

A fim de implementar o controle ativo. $u(t)$, alguns mecanismos são necessários. Um sensor é necessário para enviar um sinal ao atuador. Em geral, o sensor é um transdutor que transforma o deslocamento medido, velocidade ou aceleração, ou todos estes, em um tensão correspondente, $\mathcal{V}(t)$, que é capaz de acionar o atuador. O atuador poderia ter sido previsto para produzir o controle necessário, $u(t)$, o qual é geralmente função de deslocamento, velocidade ou aceleração, ou todos estes, da estrutura.

A descrição matemática de um sensor é, respectivamente:

$$\mathcal{V}(t) = \alpha_d y(x_c, t) \quad (4.1)$$

$$\mathcal{V}(t) = \alpha_v \dot{y}(x_c, t) \quad (4.2)$$

$$\mathcal{V}(t) = \alpha_a \ddot{y}(x_c, t) \quad (4.3)$$

no qual α_d =ganho do sensor de deflexão; α_v =ganho do sensor de aceleração; e α_a =ganho do sensor de aceleração.

Eq.4.1 é usada para um sensor de deflexão,

Eq.4.2 é usada para um sensor de velocidade, e

Eq.4.3 é usada para um sensor de aceleração em $x = x_c$.

O atuador pode ser usado como um servomecanismo ou um compesador de ganho. Uma fórmula simples para o servomecanismo [37][39] [36] é

$$\dot{u}(t) + K_c u(t) = K_c \mathcal{V}(t) \quad (4.4)$$

no qual K_c = ganho do atuador.

Vamos desprezar a contribuição do segundo e da mais alta ordem de modos, o desenho está baseado no primeiro modo somente a fim de verificar a validade da afirmação freqüente de que o primeiro modo é predominante e os outros modos podem ser desprezados. A primeira equação do modo é obtida da Eq.(2.4) pela substituição do declive em $x = a$ como uma função do primeiro modo somente. A Eq.(2.4) passa a ser

$$\ddot{A}_1(t) + \omega_1^2 A_1(t) = \frac{2f_0}{mL} \text{sen} \frac{\pi \nu t}{L} - \frac{4Sl}{mL} \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi a}{L} \left[u(t) + 2l \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi a}{L} A_1(t) \right] \quad (4.5)$$

Investigando a Eq.(4.5), se chega à conclusão que, se $u(t)$ é a função de $\dot{A}_1(t)$, amortecimento é introduzido no sistema. Também o efeito da massa ou o efeito da rigidez é alterado se $u(t)$ é a função de $\ddot{A}_1(t)$ ou $A_1(t)$, respectivamente. Vamos aplicar a transformada de Laplace à Eq.(4.5). Em termos da variável de Laplace, s , o resultado é

$$A_1(s)[s^2 + \omega_1^2] = \frac{2f_0}{mL} \frac{\frac{\pi \nu}{L}}{s^2 + \left(\frac{\pi \nu}{L}\right)^2} - \frac{4Sl}{mL} \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi a}{L} \left[u(s) + 2l \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi a}{L} A_1(s) \right] \quad (4.6)$$

no qual $u(s)$ pode ser substituído pela transformada de Laplace da Eq.(4.4), ou seja:

$$su(s) + K_c u(s) = K_c V(s)$$

Para o sensor de deslocamento, velocidade e aceleração, $u(s)$ é representado, respectivamente, pelas equações seguintes:

$$u(s) = \frac{K_c \alpha_d}{s + K_c} y(x_c, s)$$

$$u(s) = \frac{K_c \alpha_v s}{s + K_c} y(x_c, s)$$

$$u(s) = \frac{K_c \alpha_a s^2}{s + K_c} y(x_c, s)$$

onde, $y(x_c, s) = \text{sen}\left(\frac{\pi x_c}{L}\right) A_1(s)$

PROJETO DO SISTEMA DE RETROALIMENTAÇÃO:

A Eq.(4.6) pode ser representada pelo diagrama dos blocos da Fig. 4.1, para três tipos de sensores, respectivamente.

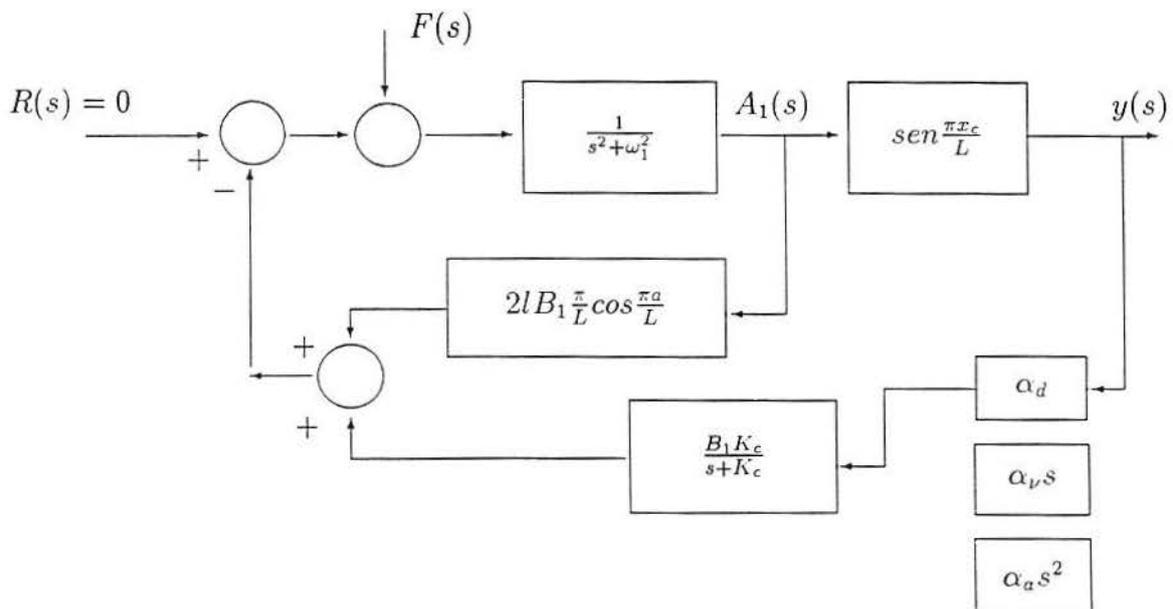


Figura 4.1 Diagrama de Blocos Considerando Primeiro Modo

O desenho poderá ser executado usando o clássico método de função de transferência. A simplicidade de tal método é bem conhecida do desenho de sistemas de 1 grau de liberdade. Por definição, as funções de transferência do laço

adiantado, do laço retroalimentado, e do laço fechado são obtidas, respectivamente, da Fig. 4.1 como

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \omega_1^2} \quad (4.7)$$

$$H(s) = 2lB_1 \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi a}{L} + \frac{\alpha_d K_c B_1}{s + K_c} \operatorname{sen} \frac{\pi x_c}{L} \quad (4.8)$$

$$P(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4.9)$$

As três funções de transferência de laço fechado são

$$P_d(s) = \frac{s + K_c}{s^3 + K_c s^2 + (\omega_1^2 + B_1 C_1)s + K_c(B_1 C_1 + \omega_1^2 + B_1 \alpha_d)} \quad (4.10)$$

$$P_\nu(s) = \frac{s + K_c}{s^3 + K_c s^2 + (\omega_1^2 + B_1 C_1 + B_1 K_c \alpha_\nu)s + K_c(\omega_1^2 + B_1 C_1)} \quad (4.11)$$

$$P_a(s) = \frac{s + K_c}{s^3 + (K_c + B_1 K_c \alpha_a)s^2 + (\omega_1^2 + B_1 C_1)s + K_c(\omega_1^2 + B_1 C_1)} \quad (4.12)$$

no qual os subíndices de $P(s)$ indicam os três tipos de sensor.

O desenho é executado com o propósito de satisfazer certos critérios.

1) Por estabilidade:

A estabilidade de um sistema invariante no tempo de 1 grau de liberdade é verificado usando a tabela de Routh. O sistema estável existe se não há mudança no sinal da primeira coluna da tabela 1. No qual também são mostradas as tabelas de Routh para os três sistemas.

A equação característica de cada sistema é dado pelo denominador da função de transferência do seu laço fechado.

$$s^3 + K_c s^2 + (\omega_1^2 + B_1 C_1) s + K_c (B_1 C_1 + \omega_1^2 + B_1 \alpha_d) = 0 \quad (4.13)$$

$$s^3 + K_c s^2 + (\omega_1^2 + B_1 C_1 + B_1 K_c \alpha_\nu) s + K_c (\omega_1^2 + B_1 C_1) = 0 \quad (4.14)$$

$$s^3 + (K_c + B_1 K_c \alpha_a) s^2 + (\omega_1^2 + B_1 C_1) s + K_c (\omega_1^2 + B_1 C_1) = 0 \quad (4.15)$$

TABELA 1 .- Tabela de Routh [37] para Três Sistemas

(a) Sistema com Sensor de Deflexão

s^3	1.0	$(\omega^2 + B_1 C_1)$
s^2	K_c	$K_c (B_1 C_1 + \omega_1^2 + B_1 \alpha_d)$
s^1	$-B_1 \alpha_d$	0
s^0	$K_c (B_1 C_1 + \omega_1^2 + B_1 \alpha_d)$	

(b) Sistema com Sensor de Velocidade

s^3	1.0	$(\omega_1^2 + B_1 C_1 + B_1 K_c \alpha_\nu)$
s^2	K_c	$K_c (\omega_1^2 + B_1 C_1)$
s^1	$B_1 K_c \alpha_\nu$	0
s^0	$K_c (\omega_1^2 + B_1 C_1)$	

(c) Sistema com Sensor de Aceleração

$$\begin{array}{rcl}
 s^3 & 1.0 & (\omega^2 + B_1C_1) \\
 s^2 & (K_c + B_1\alpha_d K_c) & (\omega^2 + B_1C_1)K_c \\
 s^1 & B_1\alpha_a(\omega_1^2 + B_1C_1)/(1 + B_1\alpha_a) & 0 \\
 s^0 & (\omega_1^2 + B_1C_1)K_c &
 \end{array}$$

2) uma razão de amortecimento apropriado:

A segunda exigência a ser satisfeita é a da razão apropriada de amortecimento. Esta razão deveria ser tão grande quanto possível. O estudo paramétrico é necessário para achar a melhor combinação dos parâmetros controladores para uma realização ótima. Nesta conexão, o método lugar das raízes [37][16] foi aplicado. Na forma de lugar das raízes, as Eqs.(4.13), (4.14) e (4.15) se podem escrever como

$$1 + \frac{K_c[s^2 + (B_1C_1 + \omega_1^2 + B_1\alpha_d)]}{s^3 + (\omega_1^2 + B_1C_1)s} = 0 \quad (4.16)$$

$$1 + \frac{K_c(s^2 + B_1\alpha_v s + (\omega_1^2 + B_1C_1))}{s^3 + (\omega_1^2 + B_1C_1)s} = 0 \quad (4.17)$$

$$1 + \frac{K_c[(1 + 62.24\alpha_a)s^2 + (\omega_1^2 + B_1C_1)]}{s^3 + (\omega_1^2 + B_1C_1)s} = 0 \quad (4.18)$$

3) Um estado invariante com mínimo erro:

O erro do estado estacionário é outro critério que deveria ser verificado. O erro entre a entrada, $R(s)$, e a saída do laço de retroalimentação, $H(s)y(s)$, é obtido do diagrama de blocos da Fig. 4.2 [37] e resulta

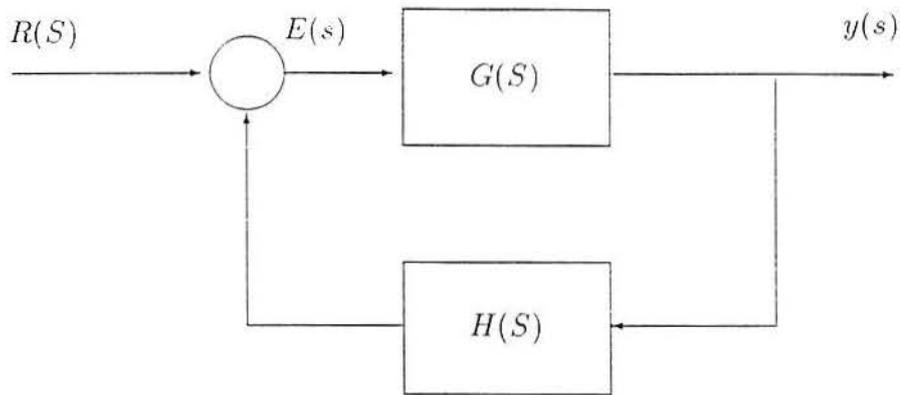


Figura 4.2 Diagrama de Blocos de Sistema Retroalimentado

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4.19)$$

no qual

$$R(s) = \frac{2f_0}{mL} \frac{\frac{\nu}{L}}{s^2 + \left(\frac{\nu}{L}\right)^2} \quad (4.20)$$

O erro de estado invariante é definido por

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} L^{-1} \left[\frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4.21)$$

Para o tipo adotado de perturbação, o erro de estado invariante é zero.

4) Uma sensibilidade mínima:

A sensibilidade é um fator a ser verificado. É definido como o efeito de pequenas mudanças no sistema de parâmetros (devido a idade, devido ao meio ambiente, e outros fatores naturais) no desempenho do sistema [37]. A sensibilidade

do sistema devido a variações do sistema das plantas é

$$S_G^P = \frac{\partial P}{\partial G} \frac{G}{P} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \quad (4.22)$$

Eq.(4.22) indica que assim como $G(s)H(s)$ cresce em certas freqüências em magnitude, a sensibilidade é reduzida. Com respeito as mudanças nos parâmetros do laço de retroalimentação, a sensibilidade é definida como

$$S_H^P = \frac{\partial P}{\partial H} \frac{H}{P} = \frac{-G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4.23)$$

O qual indica que quando $G(s)H(s)$ é grande, a sensibilidade se aproxima da unidade, e quaisquer mudanças em $H(s)$ afetam diretamente a resposta de saída. Portanto, é recomendado que componentes de retroalimentação que não variem com as mudanças do meio e possam ser mantidos contínuos sejam usados.

4.3 Reconstrução do espaço modal

Neste caso trabalharemos com o sistema trimodal. A deflexão e declive em x , a , e $(L - a)$ são

$$y(x, t) = \text{sen} \frac{\pi x}{L} A_1(t) + \text{sen} \frac{2\pi x}{L} A_2(t) + \text{sen} \frac{3\pi x}{L} A_3(t) \quad (4.24)$$

$$y'(a, t) = \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi a}{L} A_1(t) + \frac{2\pi}{L} \cos \frac{2\pi a}{L} A_2(t) + \frac{3\pi}{L} \cos \frac{3\pi a}{L} A_3(t) \quad (4.25)$$

$$y'(L - a, t) = \frac{-\pi}{L} \cos \frac{\pi a}{L} A_1(t) + \frac{2\pi}{L} \cos \frac{2\pi a}{L} A_2(t) - \frac{3\pi}{L} \cos \frac{3\pi a}{L} A_3(t) \quad (4.26)$$

Substituindo nas Eqs.(2.32) e (2.34), e executando algumas operações para eliminar $u(t)$, obtemos finalmente para o sistema de sensor de velocidade:

$$\begin{aligned} \ddot{A}_1(t) + K_c \ddot{A}_1(t) + \omega_1^2 \dot{A}_1(t) + K_c \omega_1^2 A_1(t) &= \frac{2f_0}{mL} (K_c \text{sen} \Omega_1 t + \Omega_1 \text{cos} \Omega_1 t) \\ &- B_1 [\alpha_\nu K_c \dot{A}_1(t) - \alpha_\nu K_c \dot{A}_3(t) \\ &+ K_c C_1 A_1(t) + K_c C_3 A_3(t) \\ &+ C_1 \dot{A}_1(t) + C_3 \dot{A}_3(t)] \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \ddot{A}_3(t) + K_c \ddot{A}_3(t) + \omega_3^2 \dot{A}_3(t) + K_c \omega_3^2 A_3(t) &= \frac{2f_0}{mL} (K_c \text{sen} \Omega_3 t + \Omega_3 \text{cos} \Omega_3 t) \\ &- B_3 [\alpha_\nu K_c \dot{A}_1(t) - \alpha_\nu K_c \dot{A}_3(t) \\ &+ K_c C_1 A_1(t) + K_c C_3 A_3(t) \\ &+ C_1 \dot{A}_1(t) + C_3 \dot{A}_3(t)] \end{aligned} \quad (4.28)$$

no qual $\Omega_j = j\pi\nu/L$; e
 $C_j = 2l(j\pi/L)\text{cos}(j\pi a/L)$.

As seguintes variáveis de estado são definidas:

$$X_1(t) = A_1(t); X_2(t) = \dot{A}_1(t);$$

$$X_3(t) = \ddot{A}_1(t); X_4(t) = A_3(t);$$

$$X_5(t) = \dot{A}_3(t); X_6 = \ddot{A}_3(t).$$

Reescrevendo as Eqs.(4.27) e (4.28) em termos dessas variáveis de estado produzi-

mos:

$$\begin{aligned} \dot{X}_3 + K_c X_3 + \omega_1^2 X_2 + K_c \omega_1^2 X_1 = & \\ & \frac{2f_0}{mL} (K_c \text{sen} \Omega_1 t + \Omega_1 \text{cos} \Omega_1 t) \\ & - B_1 [\alpha_\nu K_c X_2 - \alpha_\nu K_c X_5 + \\ & K_c C_1 X_1 + K_c C_3 X_4 + K_c C_1 X_2 + C_3 X_5] \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_6 + K_c X_6 + \omega_3^2 X_5 + K_c \omega_3^2 X_4 = & \\ & \frac{2f_0}{mL} (K_c \text{sen} \Omega_3 t + \Omega_3 \text{cos} \Omega_3 t) \\ & - B_3 [\alpha_\nu K_c X_2 - \alpha_\nu K_c X_5 + \\ & K_c C_1 X_1 + K_c C_3 X_4 + K_c C_1 X_2 + C_3 X_5] \end{aligned} \quad (4.30)$$

o qual pode ser representado na forma de matriz

$$\{\dot{\mathbf{X}}\} = [\mathbf{A}_\nu] \{\mathbf{X}\} + \{\mathbf{F}\} \quad (4.31)$$

no qual

$\{\mathbf{X}\}$ = vetor de estado de 6×1 ;

$\{\mathbf{F}\}$ = vetor de perturbação de 6×1 .

$[\mathbf{A}_\nu]$ = matriz de 6×6 .

A solução da Eq.(4.31) é

$$\{\mathbf{X}\}(t) = [\Phi](t) \{\mathbf{X}\}(0) + \int_0^t [\Phi](t - \tau) \{\mathbf{F}\}(\tau) d\tau \quad (4.32)$$

onde

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}_\nu t}$$

A matriz $[A_\nu]$ da Eq.(4.31) ficou

$$[A_\nu] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_c(\omega_1^2 + B_1C_1) & -\omega_1^2 - B_1(C_1 + \alpha_\nu K_c) & -K_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_3K_cC_1 & -B_3(C_1 + \alpha_\nu K_c) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_1K_cC_3 & -B_1(C_3 + \alpha_\nu K_c) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_c\omega_3^2 - B_3K_cC_3 & -\omega_3^2 - B_3(C_3 - \alpha_\nu K_c) & -K_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

e o vetor

$$\{\mathbf{F}\} = \left[0 \quad 0 \quad \frac{2f_0}{mL}(K_c \text{sen}\Omega_1 t + \Omega_1 \text{cos}\Omega_1 t) \quad 0 \quad 0 \quad \frac{2f_0}{mL}(K_c \text{sen}\Omega_3 t + \Omega_3 \text{cos}\Omega_3 t) \right]^T \quad (4.34)$$

De forma análoga consegue-se as matrizes de coeficientes de estado para o sensor de deslocamento, $[A_d]$, e de aceleração, $[A_a]$:

A matriz $[A_d]$ da Eq.(4.31) resulta

$$[A_d] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K_c(\omega_1^2 + B_1C_1 + B_1\alpha_d) & -\omega_1^2 - B_1C_1 & -K_c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -B_3K_c(C_1 + \alpha_d) & -B_3C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -B_1K_c(C_3 - \alpha_d) & -B_1C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K_c(\omega_3^2 - B_3(\alpha_d - C_3)) & -\omega_3^2 - B_3C_3 & -K_c \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

A matriz $[A_a]$ da Eq.(4.31) resulta

$$[A_a] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K_c(\omega_1^2 + B_1C_1) & -\omega_1^2 - B_1C_1 & -K_c - B_1K_c\alpha_a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -B_3K_cC_1 & -B_3C_1 & -B_3K_c\alpha_a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -B_1K_cC_3 & -B_1(C_3 & B_1K_c\alpha_a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K_c(\omega_3^2 - B_3C_3) & -\omega_3^2 - B_3C_3 & -K_c + B_3K_c\alpha_a \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

5 TÉCNICA DE CONTROLE ÓTIMO

5.1 Introdução

Ao longo da década passada, avanços significante foram feitos no controle ativo das vibrações. A tecnologia foi estudada e implementada numa variedade de situações em engenharia. Foram desenvolvidas estudos de minimizar a resposta de vibração da ponte devido a uma carga móvel e desenhar um sistema de controle de estruturas flexíveis [27][3]. Este capítulo está baseado na teoria de controle ótimo e apresentado como problema regulador [24]. Este método é utilizado numa ponte de vão longo.

5.2 O problema de controle ótimo regulador

Consideremos o sistema linear de estado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [A]\mathbf{x}(t) + [B]\mathbf{u}(t) + \mathbf{d}(t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = [C]\mathbf{x}(t) \quad (5.2)$$

onde $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ é um vetor $n \times 1$ que representa o estado do sistema; $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ é uma variável de controle irrestringida de $r \times 1$; $[A]$ e $[B]$ são matrizes de dimensões apropriadas; $\mathbf{d} = \mathbf{d}(t)$ é um vetor $n \times 1$ que representa a perturbação; $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ é um vetor $m \times 1$ que representa as variáveis de saída; e $[C]$ é a matriz de dimensão apropriada.

Uma função objetivo ou de custos é usualmente definida em termos de especificações requeridas. A minimização da função custo leva a uma estratégia de controle ótimo. a função objetivo é escolhida como uma função quadrática da forma

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T(t_f)[S_0]\mathbf{y}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{y}^T(t)[Q_0]\mathbf{y}(t) + \mathbf{u}^T(t)[R]\mathbf{u}(t)) dt \quad (5.3)$$

onde $[S_0]$, $[Q_0]$, e $[R]$ são matrizes ponderadas de dimensões apropriadas; $[S_0]$ e $[Q_0]$ devem ser pelo menos semidefinida positiva; $[R]$ deve ser definida positiva; Também as matrizes $[C]^T[S_0][C]$ e $[C]^T[Q_0][C]$ são semidefinidas positivas [5] e que o sistema de Eqs. (5.1) e (5.2) são completamente observáveis [2].

Basicamente, a solução do problema regulador de estado leva a um sistema de retroalimentação ótimo com a propriedade de que as componentes do vetor de estado são mantidos perto de zero sem gasto excessivo de controle de energia.

Sustituindo $\mathbf{y}(t) = [C]\mathbf{x}(t)$ na Eq.(5.3) obtemos a relação

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f)[C]^T[S_0][C]\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T(t)[C]^T[Q_0][C]\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)[R]\mathbf{u}(t)) dt \quad (5.4)$$

A condição necessária para uma solução ótima para o problema regulador pode ser obtido da formulação Hamiltoniana. Para o problema regulador. o Hamiltoniano é definido como:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T[C]^T[Q_0][C]\mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T[R]\mathbf{u} + \lambda^T([A]\mathbf{x} + [B]\mathbf{u}) \quad (5.5)$$

no qual $\lambda = \lambda(t)$ é um vetor de $n \times 1$ que denota as variáveis de custos (multiplicador de Lagrange).

Para um mínimo de J dado pela Eq.(5.4). e sujeito às Eqs. (5.1) e (5.2). é necessário [5] que

$$\mathbf{u} = -[R]^{-1}[B]^T \lambda \quad (5.6)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = [A]\mathbf{x} - [B][R]^{-1}[B]^T \lambda; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.7)$$

$$\dot{\lambda} = -[C]^T[Q_0][C]\mathbf{x} - [A]^T \lambda; \quad \lambda(t_f) = [C]^T[S_0][C]\mathbf{x}(t_f) \quad (5.8)$$

Combinamos as equações (5.7) e (5.8) na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A] & -[B][R]^{-1}[B]^T \\ -[C]^T[Q_0][C] & -[A]^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Da Eq.(5.9) obtém-se a relação entre o custo $\lambda(t)$ e o estado $\mathbf{x}(t)$:

$$\lambda(t) = [P](t)\mathbf{x}(t) \quad (5.10)$$

para todo $t \in [t_0, t_f]$.

Onde $[P] = [P](t)$ é uma matriz simétrica $n \times n$ chamada "matriz de Riccati".

O controle ótimo neste caso é obtido substituindo Eq.(5.10)na Eq.(5.6) resulta:

$$\mathbf{u}^*(t) = -[R]^{-1}[B]^T[P](t)\mathbf{x}(t) \quad (5.11)$$

O controle dado pela Eq.(5.11) depende somente do estado atual do sistema e assim este representa um controle de laço fechado.

Diferenciando com respeito ao tempo a Eq.(5.10), achamos que

$$\dot{\lambda}(t) = [\dot{P}](t)\mathbf{x}(t) + [P](t)\dot{\mathbf{x}}(t) \quad (5.12)$$

mas, da Eq.(5.9), sabemos que

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [A]\mathbf{x}(t) - [B][R]^{-1}[B]^T\lambda(t) \quad (5.13)$$

e

$$\dot{\lambda}(t) = -[C]^T[Q_0][C]\mathbf{x}(t) - [A]^T\lambda(t) \quad (5.14)$$

substituindo a Eq.(5.10) na Eq.(5.13), obtemos

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [[A] - [B][R]^{-1}[B]^T[P](t)]\mathbf{x}(t) \quad (5.15)$$

Substituindo a Eq.(5.15) na Eq.(5.12), achamos que

$$\dot{\lambda}(t) = ([\dot{P}](t) + [P](t)[A] - [P](t)[B][R]^{-1}[B]^T[P](t))\mathbf{x}(t) \quad (5.16)$$

Substituindo a Eq.(5.10) na Eq.(5.14), obtemos

$$\dot{\lambda}(t) = ([C]^T[Q_0][C] - [A]^T[P](t))\mathbf{x}(t) \quad (5.17)$$

Das Eqs. (5.16) e (5.17), concluímos que $[P](t)$ satisfaz a equação diferencial:

$$-[\dot{P}](t) = [P](t)[A] + [A]^T[P](t) - [P](t)[B][R]^{-1}[B]^T[P](t) + [C]^T[Q_0][C] \quad (5.18)$$

para todo $t \in [t_0, t_f]$, com a condição de contorno

$$[P](t_f) = [C]^T[S_0][C] \quad (5.19)$$

Onde a Eq.(5.19) chega-se da condição de transversabilidade. i.e.. requer que

$$\lambda(t_f) = [C]^T [S_0] [C] \mathbf{x}(t_f)$$

mas em t_f , temos também a relação

$$\lambda(t_f) = [P](t_f) \mathbf{x}(t_f)$$

e assim concluímos que

$$([P](t_f) - [C]^T [S_0] [C]) \mathbf{x}(t_f) = 0$$

para todo $\mathbf{x}(t_f)$ e, portanto,

$$[P](t_f) = [C]^T [S_0] [C]$$

CALCULO DA MATRIZ DE RICCATI $[P](t)$:

Escrevemos do sistema matricial Eq.(5.9) na forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix} = e^{\Theta t} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \lambda(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \lambda(t_0) \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

onde

$$\Theta = \begin{pmatrix} [A] & -[B][R]^{-1}[B]^T \\ -[C]^T [Q_0] [C] & -[A]^T \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Da Eq.(5.20) temos:

$$[P](t) = \{\phi_{11}(t) + \phi_{12}(t)[P](t_0)\}^{-1} \{\phi_{21}(t) + \phi_{22}(t)[P](t_0)\}, \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (5.22)$$

onde

$$[P](t_0) = [\phi_{22}(t_f) - [C]^T[S_0]C\phi_{12}(t_f)]^{-1} ([C]^T[S_0][C]\phi_{11}(t_f) - \phi_{21}(t_f)) \quad (5.23)$$

Os cálculos de $[P](t)$, $[P](t_0)$ e $[e]^{\Theta t}$ são realizados num PC, utilizando a função `expm` de Matlab e o método de Runge-Kutta de quarta ordem melhorado.

5.3 Reconstrução do espaço modal

Considerando os modos controlados (modos ímpares), das Eqs.(2.41) e (2.43) resulta:

$$\ddot{A}_1(t) + \omega_1^2 A_1(t) = \frac{2P}{mL} \text{sen}\Omega_1 t - B_1[u(t) + C_1 A_1(t) + C_3(t)] \quad (5.24)$$

$$\ddot{A}_3(t) + \omega_3^2 A_3(t) = \frac{2P}{mL} \text{sen}\Omega_3 t - B_3[u(t) + C_1 A_1(t) + C_3(t)] \quad (5.25)$$

onde

$$C_j = 2lJ \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{J\pi a}{L}\right), \quad \text{para modos ímpares}$$

$$C_j = 0, \quad \text{para modos pares}$$

Denominando as variáveis de estado como

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 & X_2(t) &= \dot{A}_1 \\ x_3(t) &= A_3 & X_4(t) &= \dot{A}_3, \end{aligned}$$

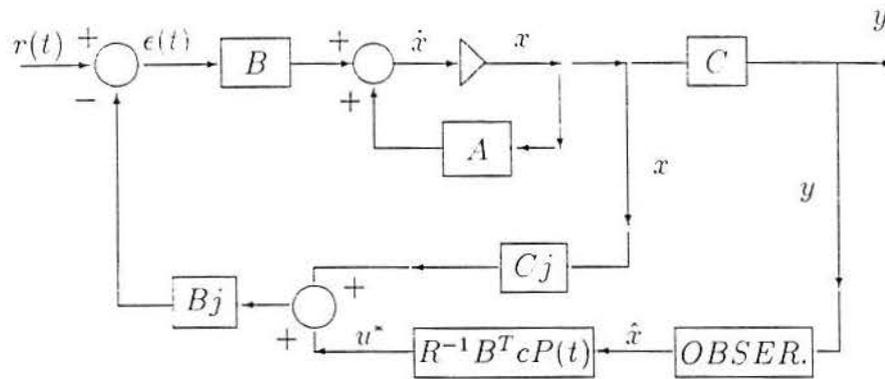


Figura 5.1 Diagrama de simulação para Problema Regulador

as Eqs. (5.24) e (5.25) podem ser representadas pela simulação do diagrama mostrada na Fig. 5.1. Este é assumido que o desenho do observador tem sido feito como em [2]. Então ao desenhador resta fazer o desenho do controle ótimo $u^*(t)$.

Da Fig. 5.1, segue-se que o sinal ativante, $e(t)$, (ação de controle) é dado por

$$e(t) = r(t) - B_j[C_j x(t) + u^*(t)] \quad (5.26)$$

onde $r(t)$ é um vetor de entrada. As Eqs.(5.24) e (5.25) podem agora ser reescritas na forma de estado como

$$\dot{x}(t) = [A]x(t) + [B]e(t) \quad (5.27)$$

Usando as Eqs.(5.26) e (5.27) temos

$$\dot{x}(t) = [A_c]x(t) + [B_c]u^*(t) + d(t) \quad (5.28)$$

onde

$$[A_c] = [A] - [B][B_j][C_j]$$

$$[B_c] = -[B][B_j]$$

$$\mathbf{d}(t) = [B]\mathbf{r}(t)$$

Nas equações precedentes, $[A]$, $[B]$, $[B_j]$, $\mathbf{r}(t)$, e $[C_j]$ são dados por

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_3^2 & 0 \end{pmatrix}; \quad [B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad [B_j] = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_3 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{r}(t) = \frac{2P}{mL} \begin{pmatrix} \text{sen}\Omega_1 t \\ \text{sen}\Omega_3 t \end{pmatrix}; \quad [C_j] = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & C_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Assuma-se que somente um sinal de medição está disponível. Este sinal representa a razão da rotação de postes do mecanismo de controle e é expressado por

$$y(t) = [C]\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{C_1}{l} & 0 & \frac{C_3}{l} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (5.29)$$

Como o posto de $[C]$ é a unidade, as matrizes $[S_0]$ e $[Q_0]$ são de dimensão 1×1 . Também, a dimensão de $[R]$ é 1×1 dado que somente um sinal de controle entra no sistema.

Outra alternativa de estudar o controle ótimo no espaço de estado, consiste em reescrever as Eqs. (5.24) e (5.25), na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \ddot{A}_1 \\ \ddot{A}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (B_1 C_1 + \omega_1^2) & B_1 C_3 \\ B_3 C_1 & (B_3 C_3 + \omega_3^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -B_1 \\ -B_3 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} \frac{2P}{mL} \text{sen}(\Omega_1 t) \\ \frac{2P}{mL} \text{sen}(\Omega_3 t) \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

e introduzir as variáveis:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix},$$

$$[D] = \begin{pmatrix} (B_1 C_1 + \omega_1^2) & B_1 C_3 \\ B_3 C_1 & (B_3 C_3 + \omega_3^2) \end{pmatrix},$$

$$[B] = \begin{pmatrix} -B_1 \\ -B_3 \end{pmatrix},$$

e

$$\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2P}{mL} \text{sen}(\Omega_1 t) \\ \frac{2P}{mL} \text{sen}(\Omega_3 t) \end{pmatrix}.$$

Decorre da Eq. (5.30) com

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

a equação de estado

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ -[D]\mathbf{z} + [B]u(t) + \mathbf{p}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & [I] \\ -[D] & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ [B] \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ou

$$\dot{\mathbf{x}} = [A_c]\mathbf{x} + [B_c] + \mathbf{d}(t), \quad (5.32)$$

onde

$$[A]_c = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & [I] \\ -[D] & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$[B]_c = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ [B] \end{pmatrix},$$

e

$$\mathbf{d}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}(t) \end{pmatrix}.$$

A lei de controle ótimo deste problema acha-se como:

$$\mathbf{u}(t) = -[R]^{-1}[B]_c^T[P](t)\mathbf{x}(t) \quad (5.33)$$

onde a matriz $[P](t)$ satisfaz a equação diferencial matricial de Riccati:

$$[\dot{P}] = -[C]^T[Q_0][C] - [A_c]^T[P] - [P][A_c] + [P][B_c][R]^{-1}[B_c]^T[P]; \quad [P](t_f) = [C]^T[S_0][C]$$

Introduzindo a notação

$$[P] = \begin{pmatrix} [P_{11}] & [P_{12}] \\ [P_{12}]^T & [P_{22}] \end{pmatrix}$$

onde $[P_{11}]$, $[P_{12}]$ e $[P_{22}]$ são matrizes de 2×2 , então o controle $\mathbf{u}(t)$ é reescrito como:

$$\mathbf{u}(t) = -[R]^{-1} \begin{pmatrix} 0 & [B]^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [P_{11}] & [P_{12}] \\ [P_{12}]^T & [P_{22}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix}$$

ou

$$\mathbf{u}(t) = -[R]^{-1}[B]^T[P_{12}]^T\mathbf{z} - [R]^{-1}[B]^T[P_{22}]\dot{\mathbf{z}} \quad (5.34)$$

sostituindo a Eq. (5.34) na Eq. (5.32) obtemos a equação diferencial simplificada na variável \mathbf{z}

$$[M]\ddot{\mathbf{z}} + [C]\dot{\mathbf{z}} + [K]\mathbf{z} = \mathbf{p}(t) \quad (5.35)$$

onde

$[M]$ é a matriz de identidade de 2×2 ;

$[K] = [B][R]^{-1}[B]^T[P_{12}]^T + [D]$;

$[C] = [B][R]^{-1}[B]^T[P_{22}]$.

6 CONTROLE AMORTECEDOR DE MASSA REGULADA ATIVO

6.1 Introdução

O termo amortecedor de massa regulada (AMR) é comumente aplicado a uma grande variedade de absorvedores de vibrações. O efeito de AMR na resposta de sismos de pontes tem sido estudado [23] [38]. Foi previamente obtido que o tradicional ótimo AMR não contribui através da redução da força lateral máxima na base da ponte. Acentuando a efetividade de AMR com a adição da capacidade de um controle ativo foi também estudada em [11] [42]. A teoria de controle ótimo é aplicada para a otimização do AMR ativo. Geralmente, a otimização de AMR é considerada para um sistema de um grau de liberdade, e um amortecedor de massa ativa, o qual é controlado por uma retroalimentação de estado para um sistema de múltiplos graus de liberdade como mostrado na Fig. 6.1. Leis de controle linear são derivados pelos métodos de controle de laço aberto e laço fechado, desde que os algoritmos de controle de laço fechado sejam largamente usados para estruturas excitadas por terremotos. Uma vez que o controle de laço fechado de Riccati não satisfaz necessariamente a condição ótima, o algoritmo de controle ótimo instantâneo foi introduzido [42]. O índice de desempenho dependente do tempo foi minimizado a todo instante de tempo e a excitação de entrada nesse intervalo de tempo pode ser mostrado a priori. Efeitos de retardo de tempo amortecidos ativamente foram também investigados em controle estrutural.

O objetivo deste capítulo é estudar a possibilidade de acentuar a efetividade de AMR com a junção de um controle ativo capaz. Basicamente a metodologia está baseada na teoria de controle ótimo instantâneo. A matriz ponderada Q mostra que a importância relativa da resposta do vetor de estado $Z(t)$ é discutida da qual o arranjo da matriz ponderada associada com os componentes do vetor de estado

são determinados. O tempo de retardo para calcular a força de controle é levado em consideração para o algoritmo de controle ótimo. A eficiência do controle e a efetividade do AMR ativo foram examinados através do computador. Este método é aplicado ao comportamento das vibrações de uma ponte considerada como uma estrutura flexível com amortecedor de massa regulada.

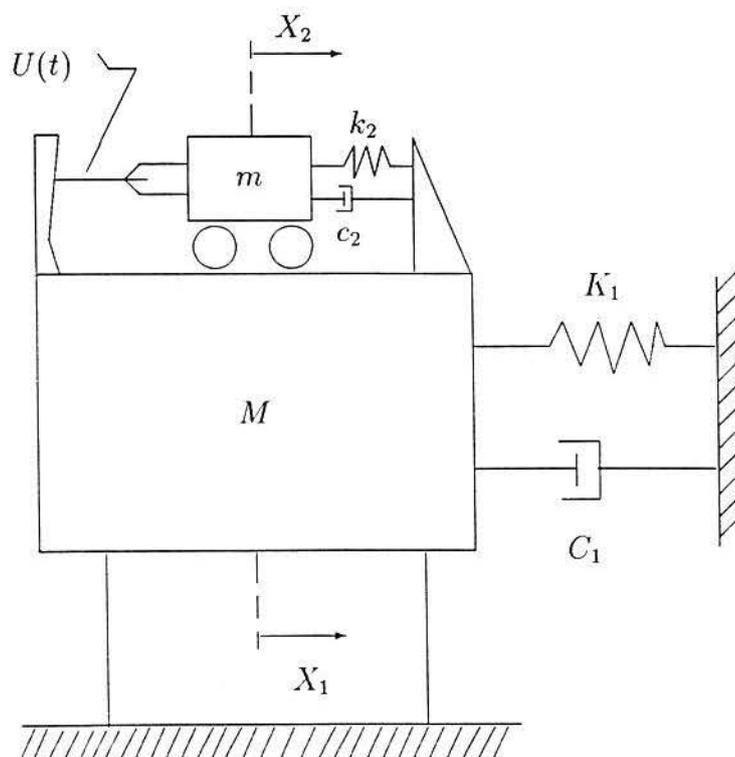


Figura 6.1 Sistema Amortecedor de Massa Regulada

6.2 Representação do espaço de estado do sistema de controle de vibração

Considere-se o movimento de uma ponte descrito por um modelo aproximado de segundo ordem com n graus de liberdade (n -GDL)

$$[M]\ddot{\mathbf{X}}(t) + [C]\dot{\mathbf{X}}(t) + [K]\mathbf{X}(t) = [B_1]\mathbf{U}(t) + \mathbf{E}_1\ddot{x}_g(t) \quad (6.1)$$

onde $[M]$ é a matriz de massa estrutural, $[C]$ matriz de amortecimento estrutural, $[K]$ matriz de rigidez estrutural, $[B_1]$ matriz de localização das forças de controle, \mathbf{E}_1 vetor de localização da carga externa e considerar um sistema amortecedor de massa regulada (AMR) ativa de n graus de liberdade sujeita a um sismo que fornece uma aceleração $\ddot{x}_g(t)$ para a base. A equação matricial de movimento pode ser escrita na forma do vetor de estado

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = [A]\mathbf{Z}(t) + [B]\mathbf{U}(t) + \mathbf{E}\ddot{x}_g(t) \quad (6.2)$$

onde

$\mathbf{Z}(t) = [X, \dot{X}]^T$ é o vetor de estado de $(2n \times 1)$

$\mathbf{U}(t) = (r \times 1)$, é o vetor de controle,

$[A] = (2n \times 2n)$, é a matriz do sistema,

$[B] = (2n \times r)$, é a matriz que especifica a localização dos controladores ativos,

$\mathbf{E} =$ é vetor apropriado de $2n \times 1$.

Estas matrizes são expressadas como:

$$[A] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{pmatrix}, \quad [B] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ [M]^{-1}[B_1] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ [M]^{-1}[B_1] \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

e $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são matrizes de massa, amortecimento e rigidez. Novos algoritmos de controle ótimo instantâneos são estabelecidos usando o índice de desempenho

$J(t)$ como segue:

$$\mathbf{J}(t) = \mathbf{Z}^T(t)[Q]\mathbf{Z}(t) + \mathbf{U}^T(t)[R]\mathbf{U}(t) \quad (6.4)$$

no qual $[Q]$ e $[R]$ são as matrizes ponderadas. Através da minimização do índice de desempenho $\mathbf{J}(t)$, o vetor de controle $\mathbf{U}(t)$ é regulado pela resposta medida do vetor de estado (controle de laço fechado), e o vetor controle é obtido como [42]:

$$\mathbf{U}(t) = -\frac{\Delta t}{2}[R]^{-1}[B]^T[Q]\mathbf{Z}(t) \quad (6.5)$$

Desde que os elementos da metade superior da matriz $[B]$ são todos zero, somente os elementos da metade inferior da matriz de $[Q]$ tem influência nas forças de controle.

6.3 Discussão da matriz ponderada $[Q]$

Vamos supor que o sistema de estrutura tem n -GDL. Como discutido anteriormente, a matriz ponderada $[Q]$ de $2n \times 2n$ na Eq. (6.4) pode ser expressa como:

$$[Q] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ [Q_1] & [Q_2] \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

$[Q_1]$ e $[Q_2]$ são matrizes com dimensões $n \times n$, respectivamente. Substituindo a Eq.(6.6) na Eq. (6.5), a força de controle pode ser escrito como:

$$\mathbf{U}(t) = -\frac{\Delta t}{2}[R]^{-1}[B_1]^T[M]^{-1}([Q_1]\mathbf{X}(t) + [Q_2]\dot{\mathbf{X}}(t)) \quad (6.7)$$

na qual:

$$[B_1] = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{pmatrix}_{n \times r} \quad e \quad [R] = \begin{pmatrix} r_1 & & & \\ & r_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & r_r \end{pmatrix}_{r \times r}$$

Nós agora definimos a matriz $[\beta]$ como:

$$[\beta] = [R]^{-1}[B_1]^T[M]^{-1}[Q_1] = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & & & \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \dots & \beta_{rn} \end{pmatrix}_{r \times n} \quad (6.8)$$

na qual

$$\beta_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{b_{ki}}{r_j m_k} q_{kj} \quad (6.9)$$

e q_{kj} é o elemento na matriz $[Q_1]$. Está claro que cada vetor coluna na matriz $[\beta]$ pode somente ser representado pelo mesmo vetor coluna na matriz $[Q_1]$. Por exemplo, se $[R]^{-1}b^T[M]^{-1}$ tem posto 2 então

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \left(\frac{b_{11}}{m_1} q_{11} + \frac{b_{21}}{m_2} q_{21} + \dots + \frac{b_{n1}}{m_n} q_{n1} \right) / r_1 \\ \beta_{21} &= \left(\frac{b_{12}}{m_1} q_{11} + \frac{b_{22}}{m_2} q_{21} + \dots + \frac{b_{n2}}{m_n} q_{n1} \right) / r_2 \end{aligned} \quad (6.10)$$

então dando $\{q_{k1}\}, k = 1 \dots n$, podemos obter β_{11} e β_{21} . Por outro lado, outro conjunto de q_{k1}^* pode também ser determinado como o mesmo valor de β_{11} e β_{21} como segue:

$$\begin{pmatrix} q_{11}^* \\ q_{21}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}/r_1 m_1 & b_{12}/r_1 m_2 \\ b_{12}/r_2 m_1 & b_{22}/r_2 m_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

e

$$\begin{pmatrix} q_{31}^* \\ \vdots \\ q_{n1}^* \end{pmatrix} = \{0\}$$

É claro que se $\{q_{k1}^*\}$ é dado na forma da Eq.(6.11), então podemos também ter o mesmo valor de β_{11} e β_{21} . Nesse exemplo, se $[R]^{-1}[B_1]^T[M]^{-1}$ tem posto 2, nós somente precisamos de dois elementos na primeira coluna da matriz $[Q_1]$. Deste estudo é evidente que se o sistema estrutural tem somente r forças de controle, as dimensões não nulas na matriz $[Q_1]$ somente necessitará dimensões $(r \times n)$. Este resultado reduzirá a complexidade na discussão da matriz $[Q_1]$.

6.4 Compensação do tempo de retardo em controle ótimo instantâneo de estruturas

Do estudo prévio sabemos que o algoritmo de controle ótimo não é afetado mesmo se a força de controle é aplicada ao sistema com um tempo de retardo Δt . A diferença está no vetor de estado $\mathbf{Z}(t)$ no qual $\mathbf{U}(t)$ é substituído por $\mathbf{U}(t - \Delta t)$. Usando uma aproximação trapezoidal para o termo da integral na Eq.(6.2), $\mathbf{Z}(t)$ é reescrito como

$$\mathbf{Z}(t) = D(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2}([B]\mathbf{U}(t) + \mathbf{E}\ddot{x}_g(t)) \quad (6.12)$$

no qual

$$D(t - \Delta t) = e^{[A]\Delta t} \left\{ \mathbf{Z}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2}([B]\mathbf{U}(t - \Delta t) + \mathbf{E}\ddot{x}_g(t - \Delta t)) \right\} \quad (6.13)$$

Ao substituir a Eq.(6.13) na Eq.(6.12), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(t) = e^{[A]\Delta t}\mathbf{Z}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2}\{e^{[A]\Delta t}([B]\mathbf{U}(t - \Delta t) + \mathbf{E}\ddot{x}_g(t - \Delta t)) \\ + [B]\mathbf{U}(t) + \mathbf{E}\ddot{x}_g(t)\} \end{aligned} \quad (6.14)$$

então

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(t - \Delta t) = e^{[A]\Delta t}\mathbf{Z}(t - 2\Delta t) + \frac{\Delta t}{2}\{e^{[A]\Delta t}([B]\mathbf{U}(t - 2\Delta t) + \mathbf{E}\ddot{x}_g(t - 2\Delta t)) \\ + [B]\mathbf{U}(t - \Delta t) + \mathbf{E}\ddot{x}_g(t - \Delta t)\} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Substituindo a Eq.(6.15) na Eq.(6.14), resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(t) = e^{[A]\Delta t}\left(\left[e^{[A](t)}\mathbf{Z}(t - 2\Delta t) + \frac{\Delta t}{2}([B]\mathbf{U}(t - 2\Delta t) + \mathbf{E}\ddot{x}_g(t - 2\Delta t))\right] \right. \\ \left. + \Delta t([B]\mathbf{U}(t - \Delta t) + \mathbf{E}\ddot{x}_g(t - \Delta t))\right) + \frac{\Delta t}{2}([B]\mathbf{U}(t) + \mathbf{E}\ddot{x}_g(t)) \end{aligned} \quad (6.16)$$

O vetor de estado no tempo $t + d\Delta t$ pode então ser expresso como:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(t + d\Delta t) = e^{[A]d\Delta t}\mathbf{Z}(t + d\Delta t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2}\{e^{[A]\Delta t}([B]\mathbf{U}(t + d\Delta t - \Delta t) \\ + \mathbf{E}\ddot{x}_g(t + d\Delta t - \Delta t)) + [B]\mathbf{U}(t + d\Delta t) + \mathbf{E}\ddot{x}_g(t + d\Delta t)\} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Após de decompor sucessivamente, $\mathbf{Z}(t + d\Delta t)$ pode também ser expressado como:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(t + d\Delta t) = e^{[A]d\Delta t}\mathbf{Z}(t) + \frac{\Delta t}{2}e^{[A]d\Delta t}([B]\mathbf{U}(t) + \mathbf{E}\ddot{x}_g(t)) \\ + \Delta t \sum_{i=1}^{d-1} e^{[A]i\Delta t}([B]\mathbf{U}(t + d\Delta t - i\Delta t) \\ + \mathbf{E}\ddot{x}_g(t + d\Delta t - i\Delta t)) \\ + \frac{\Delta t}{2}([B]\mathbf{U}(t + d\Delta t) + \mathbf{E}\ddot{x}_g(t + d\Delta t)) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Quando a força de controle que foi aplicada ao sistema tem um d -passos no tempo de retardo $d\Delta t$, a Eq.(6.18) pode ser expressado como

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(t + d\Delta t) = & \epsilon^{[A]d\Delta t} \mathbf{Z}(t) + \frac{\Delta t}{2} \epsilon^{[A]d\Delta t} ([B]\mathbf{U}(t - d\Delta t) + \mathbf{E}\ddot{x}_g(t)) \\ & + \Delta t \sum_{i=1}^{d-1} \epsilon^{[A]i\Delta t} ([B]\mathbf{U}(t - i\Delta t) \\ & + \mathbf{E}\ddot{x}_g(t + d\Delta t - i\Delta t)) \\ & + \frac{\Delta t}{2} ([B]\mathbf{U}(t) + \mathbf{E}\ddot{x}_g(t + d\Delta t)) \end{aligned} \quad (6.19)$$

No tempo t , o vetor de estado $\mathbf{Z}(t)$, a força de controle $\mathbf{U}(t - d\Delta t), \dots, \mathbf{U}(t - \Delta t)$ e $\ddot{x}_g(t + d\Delta t)$ são todos sinais conhecidos e $\ddot{x}_g(t + \Delta t), \dots, \ddot{x}_g(t + d\Delta t)$ são acelerações de base desconhecidas. Se podemos prever as acelerações de base, a Eq.(6.19) pode ser expressa como

$$\mathbf{Z}(t + d\Delta t) = \Psi_1 \mathbf{Z}(t) + \Psi_{\ddot{x}_g} + \Psi_{\mathbf{U}} + \frac{\Delta t}{2} [B]\mathbf{U}(t) \quad (6.20)$$

no qual:

$$\Psi_1 = e^{[A]d\Delta t} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\ddot{x}_g} = & \frac{\Delta t}{2} \epsilon^{[A]d\Delta t} \mathbf{E}\ddot{x}_g(t) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{E}\ddot{x}_g(t + d\Delta t) \\ & + \Delta t \sum_{i=1}^{d-1} \epsilon^{[A]i\Delta t} \mathbf{E}\ddot{x}_g(t + d\Delta t - i\Delta t) \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\Psi_{\mathbf{U}} = \frac{\Delta t}{2} \epsilon^{[A]d\Delta t} [B]\mathbf{U}(t - d\Delta t) + \Delta t \sum_{i=1}^{d-1} \epsilon^{[A]i\Delta t} [B]\mathbf{U}(t - i\Delta t) \quad (6.23)$$

A função de desempenho para este problema pode então ser modificada para

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(t) = & \mathbf{Z}^T(t + d\Delta t)[Q]\mathbf{Z}(t + d\Delta t) + \mathbf{U}^T(t)[R]\mathbf{U}(t) \\ & + \lambda^T \left[\mathbf{Z}(t + d\Delta t) - \Psi_1\mathbf{Z}(t) - \Psi_{\ddot{x}_g} - \Psi_{\mathbf{U}} - \frac{\Delta t}{2}[B]\mathbf{U}(t) \right] \end{aligned} \quad (6.24)$$

As condições necessárias para minimizar a função de desempenho $\mathbf{J}(t)$ são:

$$\frac{\partial \mathbf{J}(t)}{\partial \mathbf{Z}(t + d\Delta t)} = 0, \quad \Rightarrow 2[Q]\mathbf{Z}(t + d\Delta t) + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{J}(t)}{\partial \mathbf{U}(t)} = 0, \quad \Rightarrow 2[R]\mathbf{U}(t) - \frac{\Delta t}{2}[B]^T\lambda = 0 \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{J}(t)}{\partial \lambda} = 0$$

A força de controle $\mathbf{U}(t)$ pode ser obtida das Eqs.(6.5) e (6.25)

$$\mathbf{U}(t) = -\frac{\Delta t}{2}[R]^{-1}[B]^T[Q]\mathbf{Z}(t + d\Delta t) \quad (6.26)$$

Substituindo a Eq.(6.20) na Eq.(6.26), resulta:

$$\mathbf{U}(t) = -\frac{\Delta t}{2} \left[[R] + \frac{\Delta t^2}{4}[B]^T[Q][B] \right]^{-1} [B]^T[Q](\Psi_1\mathbf{Z}(t) + \Psi_{\ddot{x}_g} + \Psi_{\mathbf{U}}) \quad (6.27)$$

Para a derivação anterior, variações lineares entre incrementos de tempo para a força de controle e aceleração de base são assumidos.

6.5 Aplicação do controle ativo

A estrutura considerada para a aplicação do controle ativo é uma ponte de vão L , massa por unidade de longitude m , e rigidez transversal EI . O movimento vertical da ponte consiste de um deslocamento flexural $y(x,t)$, como mostra-se na Fig. 6.2 .

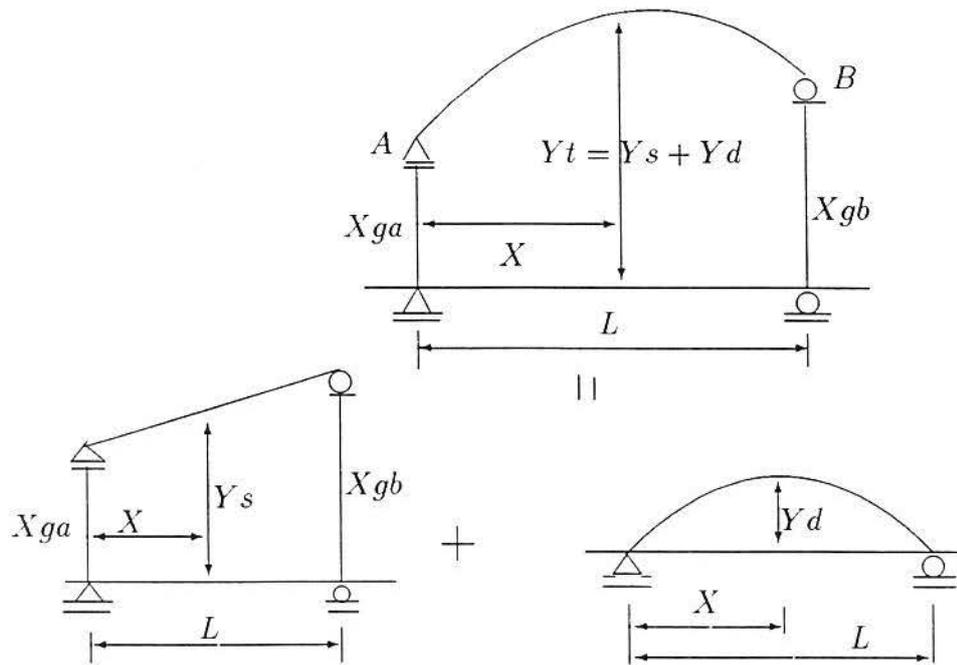


Figura 6.2 Estrutura flexível sujeita à excitação vertical em ambos extremos. Resposta da estrutura descrita pelas respostas combinadas de quase-estática e dinâmica

A equação de movimento é descrita como

$$m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = f(x,t) \quad (6.28)$$

onde $f(x,t)$ é a excitação externa. A solução do problema de autovalor associado consiste de um conjunto infinito de autovalores, $\lambda_i = \omega_i^2$ e as autofunções correspondentes $\phi_i(x) = \text{sen}(i\pi x/L)$.

O deslocamento da estrutura pode ser expresso como a expansão modal:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) a_i(t) \quad (6.29)$$

onde $a_i(t)$ é o deslocamento modal. Usando a aproximação padrão, obtemos a equação modal de movimento como:

$$\ddot{a}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{a}_i(t) + \omega_i^2 a_i(t) = f_i(t) \quad (6.30)$$

onde

$$f_i(t) = \frac{2}{mL} \int_0^L \phi_i(t) f(x, t) dx$$

é a força modal, e ξ_i é o amortecimento modal do i -enésimo modo. Para o mecanismo de controle passivo considerado neste caso, o sistema AMR foi adaptado em algumas posições especificadas da ponte. As equações seguintes descrevem o movimento da ponte e dos amortecedores:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} = f(x, t) \\ + \sum_{j=1}^{NT} \delta(x - x_j) \{ C_{T_j} [\dot{V}_j(t) - \dot{y}(x, t)] \\ + K_{T_j} [V_j(t) - y(x, t)] \} \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$m_{T_j} \ddot{V}_j(t) + C_{T_j} [\dot{V}_j(t) - \dot{y}(x_j, t)] + K_{T_j} [V_j(t) - y(x_j, t)] = 0$$

para $j = 1, 2, \dots, NT$

na qual NT é o número de amortecedores de massa regulada, e x_j , V_j , m_{T_j} , C_{T_j} e K_{T_j} são a localização, deslocamento, massa, amortecimento e rigidez do sistema de massa regulada. através da análise modal, podemos também obter a equação modal

de movimento da ponte como

$$\begin{aligned} \ddot{a}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{a}_i(t) + \omega_i^2a_i(t) &= f_i(t) \times \frac{2}{mL} \\ + \sum_{j=1}^{nt} \{C_{T_j}[\dot{V}_j(t) - \sum_{k=1}^n \phi_k(x_j)\dot{a}_k(t)] \times \phi_i(x_j) & \\ + K_{T_j} \left[V_j(t) - \sum_{k=1}^n \phi_k(x_j)a_k(t) \right] \times \phi_i(x_j) \} \times \frac{2}{mL} & \end{aligned} \quad (6.32)$$

Suponha-se que somente um amortecedor de massa regulada é considerado. A Eq. (6.32) pode ser reduzida à forma seguinte

$$[M_1]\ddot{\mathbf{X}}_1 + [C_1]\dot{\mathbf{X}}_1 + [K_1]\mathbf{X}_1 = \mathbf{f}_1 \quad (6.33)$$

na qual $[M_1]$ é a matriz diagonal de $(n+1) \times (n+1)$ e,

$$\mathbf{X}_1 = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t), V(t))^T \quad (6.34)$$

$$[C_1]_{(n+1) \times (n+1)} = \begin{pmatrix} [C] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mu\xi_T\omega_T b_1 b_1^T & -2\mu\xi_T\omega_T b_1 \\ -2\xi_T\omega_T b_1^T & 2\xi_T\omega_T \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

$$[K_1]_{(n+1) \times (n+1)} = \begin{pmatrix} [K] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu\omega_T^2 b_1 b_1^T & -2\mu\omega_T^2 b_1 \\ -\omega_T^2 b_1^T & \omega_T^2 \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

$$\mathbf{f}_1 = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t), 0)_{(n+1) \times 1}^T \quad (6.37)$$

ω_T e ξ_T são a frequência e a razão de amortecimento do AMR, e

$$\mathbf{b}_1 = (\phi_1(x_1), \phi_2(x_1), \dots, \phi_n(x_1))^T,$$

$$\mu = 2 \frac{m_T}{mL}$$

$$[C] = \begin{pmatrix} 2\xi_1\omega_1 & & & \\ & 2\xi_2\omega_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & 2\xi_n\omega_n \end{pmatrix}_{n \times n}$$

$$[K] = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \omega_n^2 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Supor somente que um amortecedor de massa regulada ativa está junto ao meio da ponte, a equação governante de movimento pode então ser expressa como

$$[M_1]\ddot{\mathbf{X}}_1 + [C_1]\dot{\mathbf{X}}_1 + [K_1]\mathbf{X}_1 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{b}u(t) \quad (6.38)$$

no qual

$$\mathbf{X}_1 = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t), V(t))_{(n+1) \times 1}^T$$

$$\mathbf{b} = ((2/mL)b_1^T, -(1/m_T))^T$$

e $u(t)$ é a força de controle.

Se somente o modo fundamental de vibração é considerado, este sistema pode também ser reduzido a um sistema de 2 graus de liberdade. Considerando uma ponte de um vão simples suportada nos extremos A e B , a resposta quase-estática, $\ddot{y}^s(x)$, seria dada por,

$$\ddot{y}^s(x) = \ddot{x}_{gA} \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \ddot{x}_{gB} \left(\frac{x}{L}\right) \quad (6.39)$$

como mostra a Fg. 6.2.

A força de inércia que age sobre a viga e o AMR são dados por

$$f(x, t) = m \times \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) \ddot{x}_{gA}(t) + \frac{x}{L} \ddot{x}_{gB}(t) \right] \quad (6.40)$$

e

$$f_T(t) = m_T \times \left[\left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \ddot{x}_{gA}(t) + \frac{x_1}{L} \ddot{x}_{gB}(t) \right] \quad (6.41)$$

no qual x_1 é a localização do AMR. A carga efetiva generalizada para o modo i é expressada como

$$\begin{aligned} f_i(t) &= \frac{2}{mL} \int_0^L \phi_i(x) f(x, t) dt \\ &= -\frac{2}{i\pi} [\ddot{x}_{gA}(t) - (-1)^i \ddot{x}_{gB}(t)]; \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (6.42)$$

Retroalimentação das Medições

Seja x_s a posição de um sensor. A resposta da ponte simples e o amortecedor de massa regulada na posição x_s pode então ser definida como $y(x_s, t)$ e $V(t)$ respectivamente. A nova função objetivo é definida como

$$J(t) = \mathbf{Y}^T(t) [Q_M] \mathbf{Y}(t) + u^T(t) [R] u(t) \quad (6.43)$$

no qual

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(t) &= (y(x_s, t), V(t), \dot{y}(x_s, t), \dot{V}(t))_{(4 \times 1)}^T \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \phi_i(x_s) a_i(t), V(t), \sum_{i=1}^n \phi_i(x_s) \dot{a}_i(t), \dot{V}(t) \right\rangle^T \\ &= [b_M]^T \mathbf{Z}(t) \end{aligned} \quad (6.44)$$

e

$$[b_M]^T = \begin{pmatrix} b_2^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times (2n+2)} \quad (6.45)$$

$$\mathbf{b}_2 = (\phi_1(x_s), \phi_2(x_s), \dots, \phi_n(x_s))_{(n \times 1)}^T$$

Susbtituindo as Eqs.(6.44) e (6.45) na Eq. (6.43), a função objetivo é expressada como

$$\mathbf{J}(t) = \mathbf{Z}(t)[b_M][Q_M][b_M]^T \mathbf{Z}(t) + u^T(t)[R]u(t) \quad (6.46)$$

Comparando esta equação com a Eq.(6.4), a força de controle pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{\Delta t}{2}[R]^{-1}[B]^T[b_M][Q_M][b_M]^T \mathbf{Z}(t) \\ &= \frac{\Delta t}{2}[R]^{-1}[B]^T[b_M][Q_M]^T \mathbf{Y}(t) \end{aligned} \quad (6.47)$$

no qual a força de controle está diretamente ligada à ponderada, $\mathbf{Y}(t)$.

7 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

7.1 Resultados numéricos do controle ativo

Um conjunto de entradas de dados nas Tabelas 1, 2 e 3 são usadas neste trabalho para examinar a resposta das vibrações de uma ponte devido a uma carga móvel sob um sistema de controle ativo.

TABELA 1

Entrada de parâmetros para o estudo de simulação de controle ativo

$$\begin{aligned}L &= 100 \text{ ft}(30.5\text{m}); & a &= 10 \text{ ft}(3.05\text{m}); \\f_0 &= 20 \text{ kips}(89000\text{N}); & EI &= 1210^{10} \text{ lb-in}^2; \\m &= 0.3 \text{ lb-s}^2/\text{in}^2(2.07 \times 10^{-3} \text{ N s}^2/\text{mm}^2); \\v &= 60 \text{ fps}(18.3\text{m/s}); & l &= 3 \text{ ft}(0.915\text{m}) \\S &= 62.5 \text{ kips/in.}(10949.8\text{N/mm}) & x_c &= L/2 \text{ m.}\end{aligned}$$

variáveis envolvidas neste trabalho foram calculadas destes parâmetros e são dados por:

TABELA 2

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= 18.74; & \omega_3^2 &= 1518.03; & B_1 &= 62.20; & B_2 &= 0.0 \\B_3 &= 115.34; & C_1 &= 0.1173; & : & K_a &= 1.376, & \alpha_a &= 0.044.\end{aligned}$$

Analisamos o comportamento de vibração de um só modo para cada sensor-atuador considerados no mecanismo de controle e mostra-se os resultados na Fig. 7.1.

Os modos na variável s de Laplace para os sensores respectivos são as seguintes,

Para o sensor deslocamento:

$$\bar{A}_1(s) = \left(\frac{s + 6.53}{s^3 + 6.53s^2 + 29.89s + 8.1225} \right) \left(2.82 \frac{1.885}{s^2 + (1.885)^2} \right) \quad (7.1)$$

Para sensor velocidade:

$$\bar{A}_1(s) = \left(\frac{s + 12.67}{s^3 + 12.67s^2 + 111.85s + 378.74} \right) \left(2.82 \frac{1.885}{s^2 + (1.885)^2} \right) \quad (7.2)$$

Para sensor aceleração:

$$\bar{A}_1(s) = \left(\frac{s + 1.736}{s^3 + 6.49s^2 + 29.89s + 51.89} \right) \left(2.82 \frac{1.885}{s^2 + (1.885)^2} \right) \quad (7.3)$$

Aplicamos a transformada inversa de Laplace aos modos $A_1(s)$ e obtemos os graficos respectivos das respostas da ponte em meio vão, $y(L/2, t) = A_1(t)$.

Temos os resultados dos modos no tempo t .

$$A_1(t) = L^{-1} (\bar{P}_d(s) \bar{F}_1(s)) = 0.1112e^{-2.72t} + 0.1128e^{-1.9036t} \cos(3.9956t) + \\ 0.01503e^{-1.9036t} \text{sen}(3.9950t) + 0.246\text{sen}(1.8850t) - 0.2239\cos(1.8850t)$$

$$A_1(t) = L^{-1} (\bar{P}_v(s) \bar{F}_1(s)) = 0.02136e^{-5.1878t} + 0.01467e^{-3.7411t} \cos(7.6909t) + \\ 0.7026 \times 10^{-3} e^{-3.7411t} \text{sen}(7.6909t) + 0.08502\text{sen}(1.8850t) - 0.03602\cos(1.8850t)$$

$$A_1(t) = L^{-1} (\bar{P}_a(s) \bar{F}_1(s)) = -0.02740e^{-2.6255t} + 0.05455e^{-1.9323t} \cos(4.0087t) + \\ -0.4940 \times 10^{-10} e^{-1.9323t} \text{sen}(4.0087t) + 0.1228\text{sen}(1.8850t) - 0.02715\cos(1.8850t)$$

Investigando a resposta em meio vão, a qual representa a deflexão no meio da ponte, chegamos à conclusão que a vibração decai muito rápido e a resposta transitória para os sistemas sensores de velocidade e aceleração são menores que o sistema sem controle. Pelo contrário, a resposta transitória do sistema do sensor de deflexão é maior que o sistema sem controle. por tanto não é recomendável usar o sensor de deflexão.

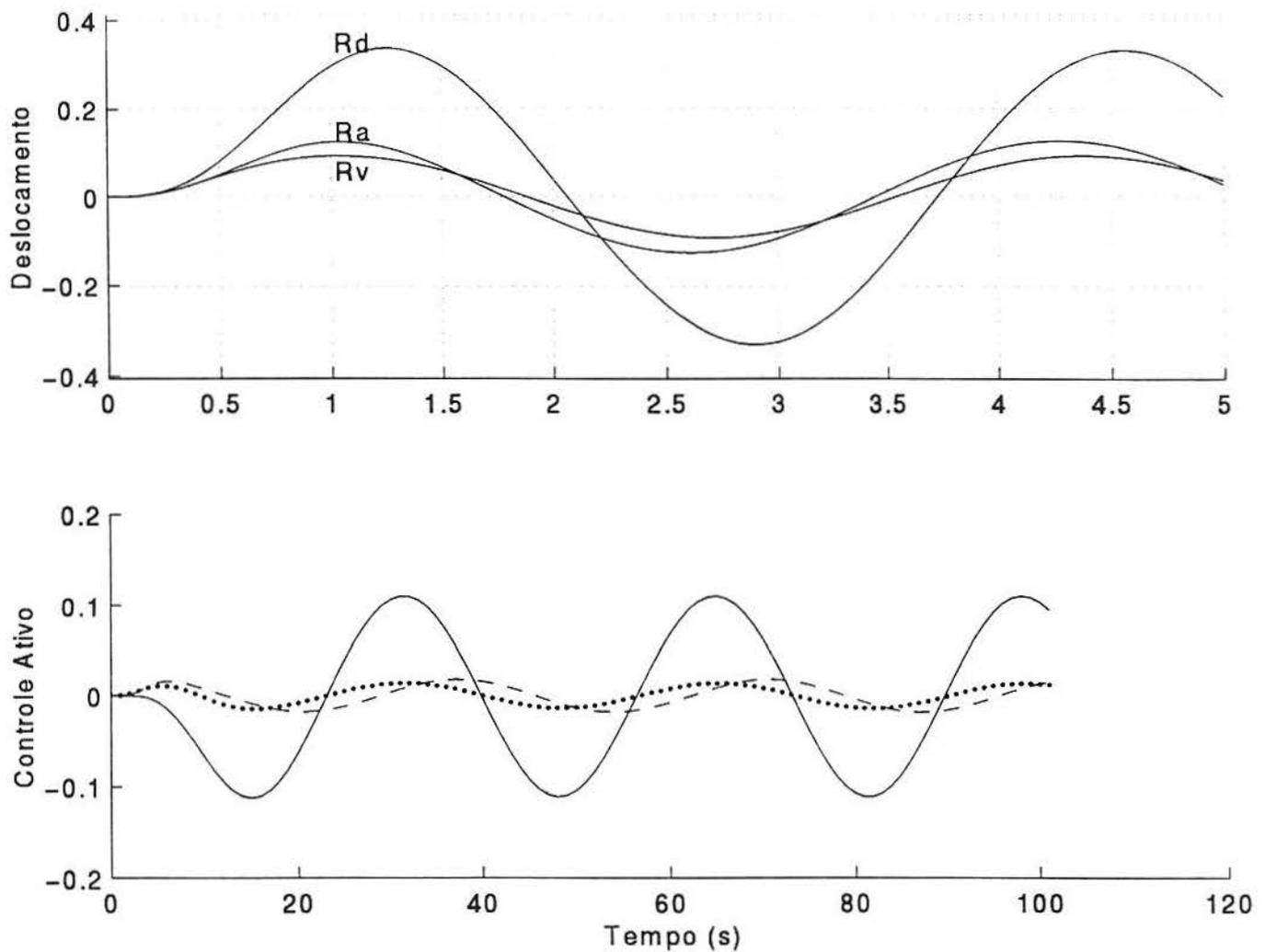


Figura 7.1 Resposta da Deflexão em Meio Vão Considerando Primeiro Modo e seu Controle Ativo. Rd=Resposta com Sensor Deslocamento, Ra=Resposta com Sensor Aceleração, Rv=Resposta com Sensor Velocidade, R=Resposta Sem Controle; --:Controle-Deslocamento, ...:Controle-Aceleração, - -:Controle-Velocidade

Nossa próxima análise consiste em observar a resposta em meio vão da ponte usando os três modos no espaço de estado, o quais são mostrados na Fig. 7.2. Da equação diferencial em variáveis de estado:

$$\dot{\mathbf{X}} = [A_{a,v,d}]\mathbf{X} + \mathbf{F}$$

aplicamos a transformada de Laplace, temos

$$\mathbf{X}(s) = (sI - [A_{a,v,d}])^{-1}\mathbf{F}(s)$$

onde

$[A_{a,v,d}]$ = representa a matriz de estado com sensor de aceleração, de velocidade, de deslocamento. Denotemos $[A] = (sI - [A_{a,v,d}])$ e calculamos $[A]$ para cada sensor.

Para sensor de deslocamento:

$$[A] = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 52.2273 & 297681 & s + 6.53 & 259.0527 & 17.9012 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ -130.0725 & 20.4498 & 0 & 10392 & 1551.2 & s + 6.53 \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

onde

$$[A] = (s[I] - [A_d])$$

$[A_d]$ é a matriz de coeficientes da equação de estado com sensor deslocamento. também temos a perturbação:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.695 \frac{(s + 6.53)\pi}{s^2 + 0.36\pi^2} \\ 0 \\ 0 \\ 5.085 \frac{(s + 6.53)\pi}{s^2 + 3.24\pi^2} \end{pmatrix}$$

Para sensor de velocidade:

$$[A] = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 377.16 & 111.73 & s + 12.67 & 226.81 & -64.06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ 259.10 & 172.43 & 0 & 19654 & 1399.2 & s + 12.67 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

onde

$$[A] = (s[I] - [A_\nu]),$$

$[A_\nu]$ é a matriz de coeficientes da equação de estado com sensor velocidade, e

$$\mathbf{F}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.695 \frac{(s + 12.67)\pi}{s^2 + 0.36\pi^2} \\ 0 \\ 0 \\ 5.085 \frac{(s + 12.67)\pi}{s^2 + 3.24\pi^2} \end{pmatrix}$$

Para sensor aceleração:

$$[A] = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 51.68 & 29.77 & s + 6.49 & 31.08 & 17.90 & -4.75 \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ 35.50 & 20.45 & 8.81 & 2692.9 & 1551.2 & s + 10.55 \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

onde

$$[A] = (s[I] - [A_a])$$

e $[A_a]$ é a matriz de coeficientes da equação de estado com sensor aceleração e a perturbação

$$\mathbf{F}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.695 \frac{(s + 1.736)\pi}{s^2 + 0.36\pi^2} \\ 0 \\ 0 \\ 5.085 \frac{(s + 1.736)\pi}{s^2 + 3.24\pi^2} \end{pmatrix}.$$

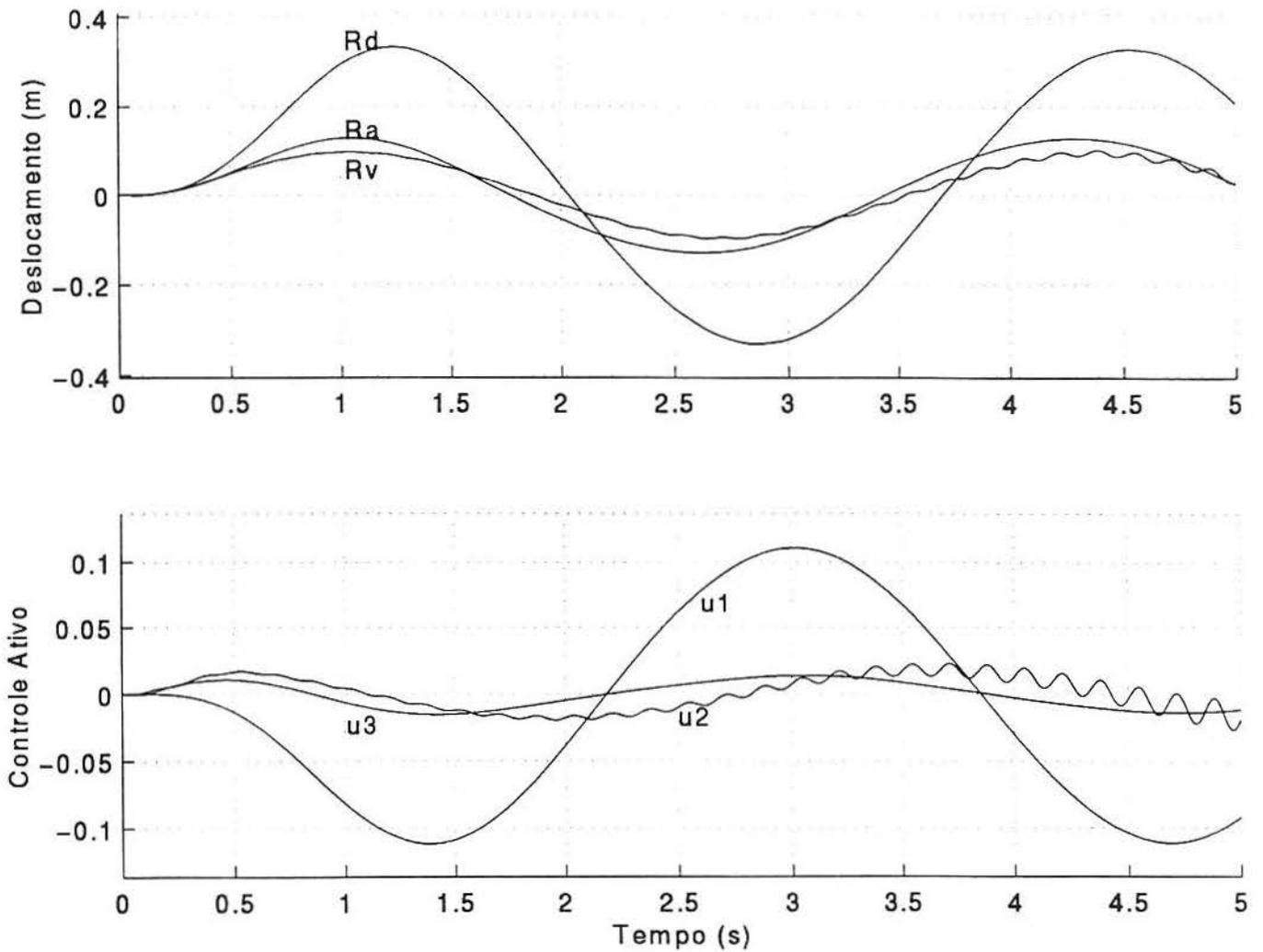


Figura 7.2 Resposta da Deflexão em Meio Vão Considerando Três Modos e seu Controle Ativo. R_d =Resposta com Sensor Deslocamento, R_a =Resposta com Sensor Aceleração, R_v =Resposta com Sensor Velocidade, R =Resposta Sem Controle; u_1 :Controle-Deslocamento, u_3 :Controle-Aceleração, u_2 :Controle-Velocidade

7.2 Resultados numéricos do controle ótimo regulador

Um conjunto de entradas de dados mostrados nas tabelas 1, 2 e 3 são usadas para esta técnica de determinar a resposta das vibrações de uma ponte devido a uma carga móvel sob um sistema de controle ótimo.

A resposta completa da deflexão em meio vão, assumindo condições iniciais nulas. Mostra-se diferentes valores para Q_0 , S_0 , e R nas seguintes figuras 7.3 e 7.4. Nos ensaios por computador são obtidos os valores respectivos de Q_0 , S_0 e R para fazer um efeito de decaimento da deflexão resposta do sistema (da ponte com mecanismos de controle).

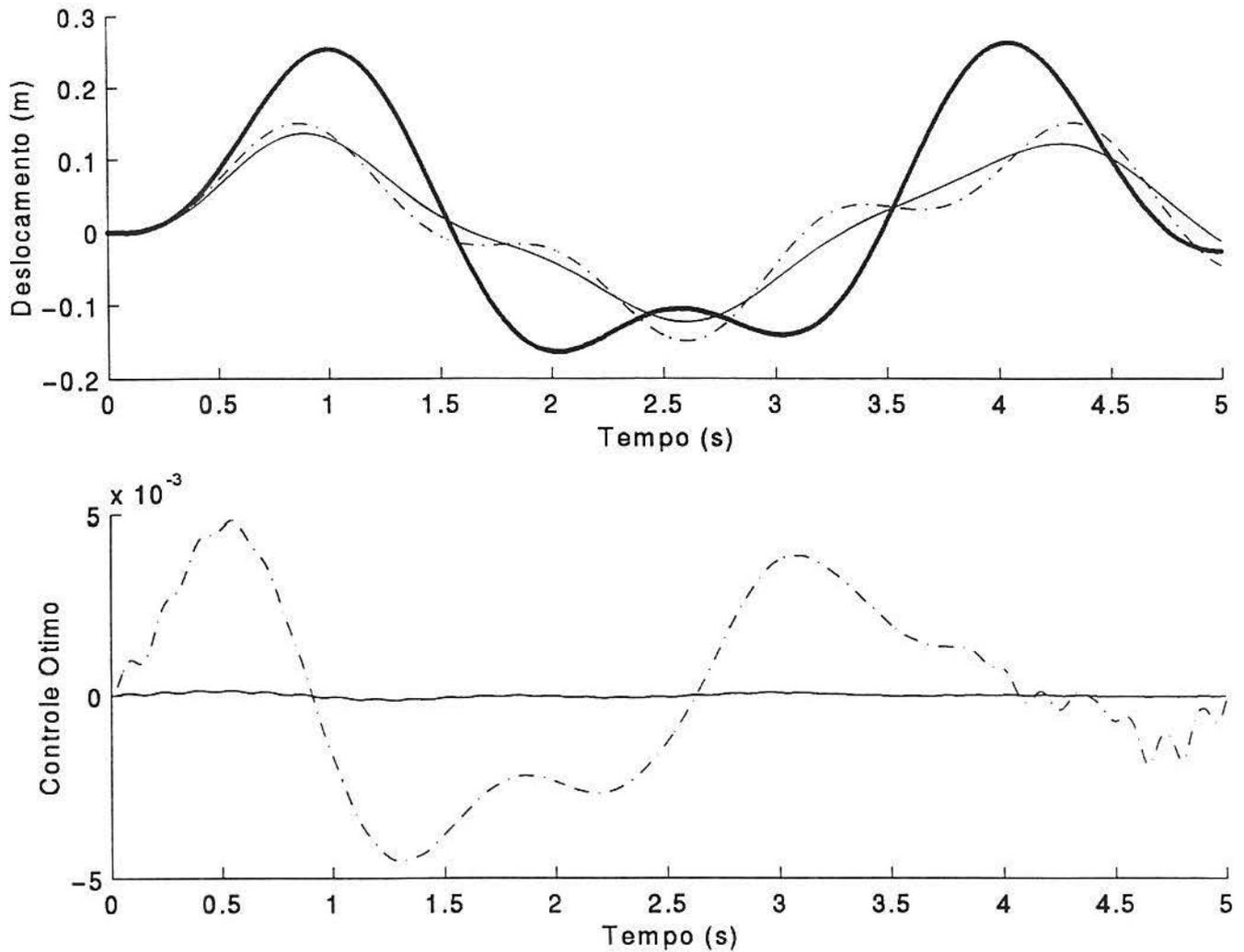


Figura 7.3 Resposta da Deflexão em Meio Vão Considerando Três Modos para matrizes ponderadas $--$, $R = 9.5e4$, $Q_0 = 1000$, $S_0 = 0$; $- \cdot -$, $R = 1e8$, $Q_0 = e5$; $S_0 = 100$; \dots , sem controle e Os Controles Ótimos

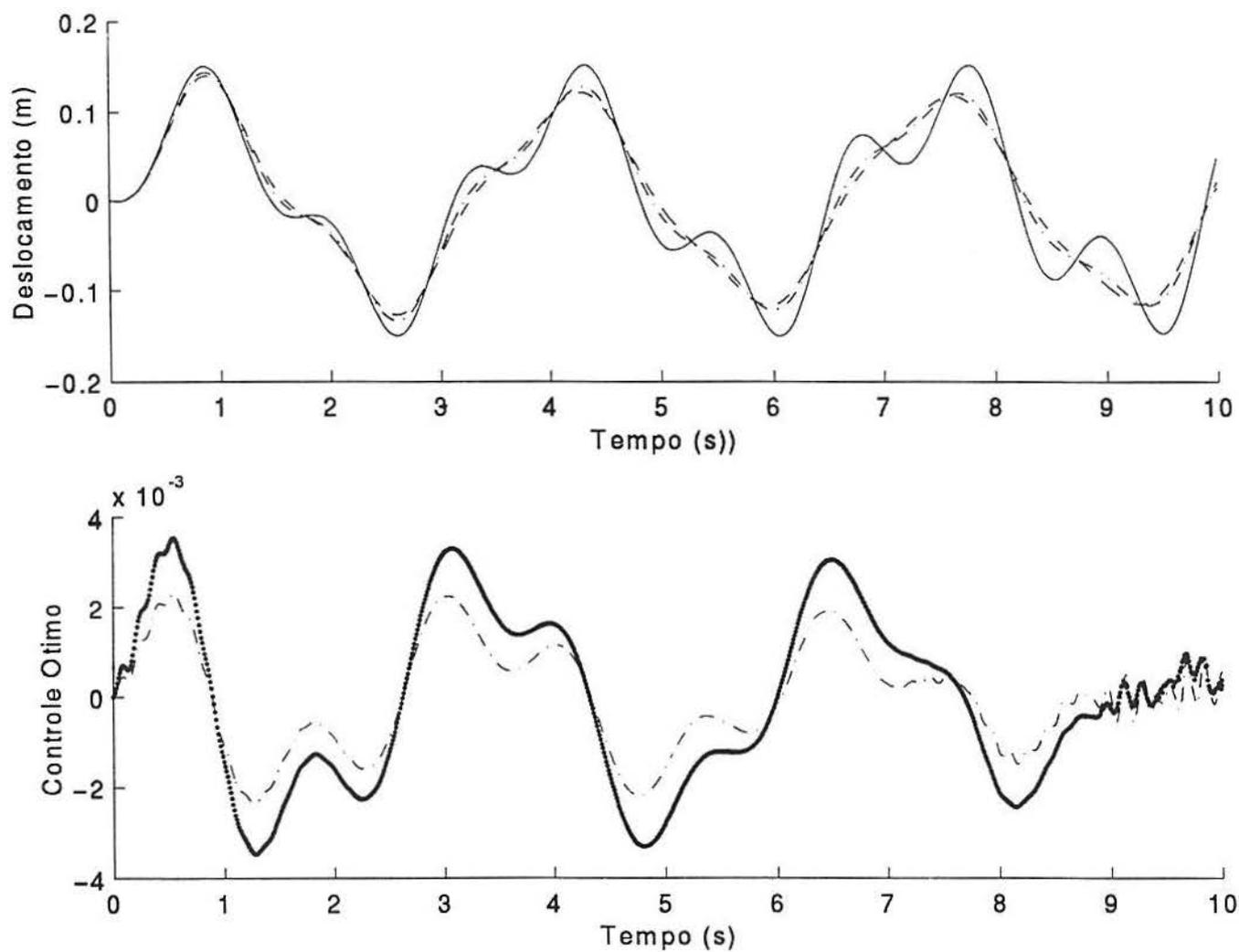


Figura 7.4 Resposta da Deflexão em Meio Vão Considerando Três Modos para matrizes ponderadas $-\cdot-$, $R = 5\epsilon^5$, $Q_0 = 1000$, $S_0 = 100$; $-$, $R = \epsilon^6$, $Q_0 = \epsilon^4$; $S_0 = 100$; \dots , sem controle e Os Controles Ótimos

7.3 Resultados numéricos do controle AMR ativo

Consideremos uma ponte de suporte simples com um vão de longitude de 40m. Os valores dos parâmetros são mostrados na tabela 2. A frequência fundamental da ponte é 6.86 rad/s. Os elementos da matriz $[Q]$ são assumidos, e são mostrados na tabela 1. A Fig. 7.5 mostra a resposta deslocamento no meio vão da ponte sujeita à excitação de terra nos suportes para um sistema sem controle, a Fig. 7.6 com controle passivo e a Fig. 7.7 com controle AMR ativo respectivamente. O controle AMR ativo pode reduzir a resposta a 26% do sistema incontrolado.

TABELA 4.

Elementos da matriz $[Q]$

	q_{41}^*	q_{42}	q_{43}	q_{44}^*
Caso A	-0.1	0	0	0
Caso B	-1.0	0	0	0.4
Caso C	-10	0	0	2.2
Caso D	-100	0	0	8
Caso E	-1000	0	0	25

$$q_{41} = q_{41}^* \times 10^5; q_{44} = q_{44}^* \times 10^3$$

Com os casos A, B e C obtemos a resposta numérica estável e podemos controlar a vibração da ponte. Os casos D e E obtemos a resposta numérica inestável. Para este trabalho usamos o caso C.

TABELA 5

Sistema de Parâmetros para uma Ponte e Amortecedor de Massa Regulada

PONTE:

$$E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m} \quad I = 0.02 \text{ m}^4 \quad m = 3,234 \text{ kg/m}$$

$$\zeta = 0.02 \quad L = 40 \text{ m} \quad \omega_1 = 6.86 \text{ rad/s}$$

$$\xi_1 = 0.02 \quad x_1 = 17.32 \text{ m} \quad x_s = 22.68 \text{ m}$$

$$R=1 \quad \Delta t=0.1$$

AMR:

$$\xi_T = 0.08407 \quad m_T = 12,936 \text{ kg} \quad \omega_T = 6.7255 \text{ rad/s}$$

$$k_T = 60,876 \text{ N/m} \quad C_T = 1,463 \text{ Ns/m} \quad \mu = 2m_T/mL$$

Para este estudo, fazemos com um modo e temos a equação diferencial

$$[M_1]\ddot{\mathbf{X}}_1 + [C_1]\dot{\mathbf{X}}_1 + [K_1]\mathbf{X}_1 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{b}u(t); \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ V(t) \end{pmatrix}$$

e a força de controle

$$u(t) = -\frac{\Delta t}{2}[R]^{-1}[B]^T[b_M][Q_M][b_M]^T\mathbf{Z}(t)$$

Então da forma de estado

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = [A]\mathbf{Z}(t) + [B]u(t) + \mathbf{F}_1$$

onde

$$[A] = \begin{pmatrix} [0] & [I] \\ -[M_1]^{-1}[K_1] & -[M_1]^{-1}[C_1] \end{pmatrix}; \quad [B] = \begin{pmatrix} 0 \\ [M_1]^{-1}\mathbf{b} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ [M_1]^{-1}\mathbf{f}_1 \end{pmatrix}$$

$$[M_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m_T \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{2}{mL} \text{sen} \left(\frac{\pi x_1}{L} \right) \\ -\frac{1}{m_T} \end{pmatrix}; \quad [B_2] = \begin{pmatrix} \text{sen} \left(\frac{\pi x_s}{L} \right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[Q_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_{41} & q_{42} \end{pmatrix}; \quad [Q_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_{43} & q_{44} \end{pmatrix}$$

Ademais

$$[C_1] = \begin{pmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mu\xi_T\omega_T \text{sen}^2 \left(\frac{\pi x_1}{L} \right) & -2\mu\xi_T\omega_T \text{sen} \left(\frac{\pi x_1}{L} \right) \\ -2\xi_T\omega_T \text{sen} \left(\frac{\pi x_1}{L} \right) & 2\xi_T\omega_T \end{pmatrix}$$

$$[K_1] = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu\omega_T^2 \text{sen}^2 \left(\frac{\pi x_1}{L} \right) & -2\mu\omega_T^2 \text{sen} \left(\frac{\pi x_1}{L} \right) \\ -\omega_T^2 \text{sen} \left(\frac{\pi x_1}{L} \right) & \omega_T^2 \end{pmatrix}$$

e

$$f_1(t) = -\frac{2}{\pi} [\ddot{x}_{ga}(t) + \ddot{x}_{gb}(t)]$$

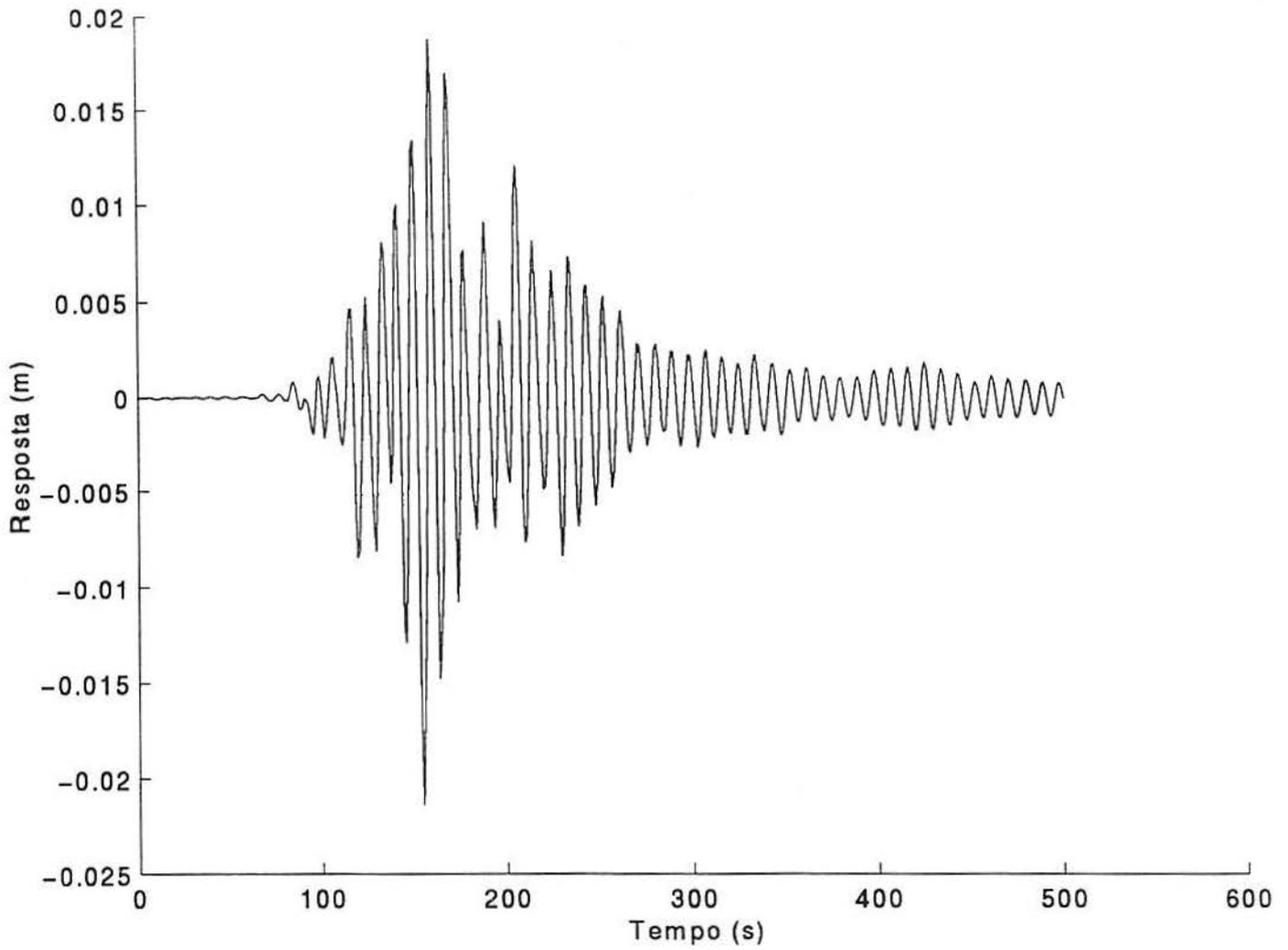


Figura 7.5 Resposta de deslocamento em meio vão da ponte sujeita a excitação sísmica em ambos os extremos; para sistema sem controle

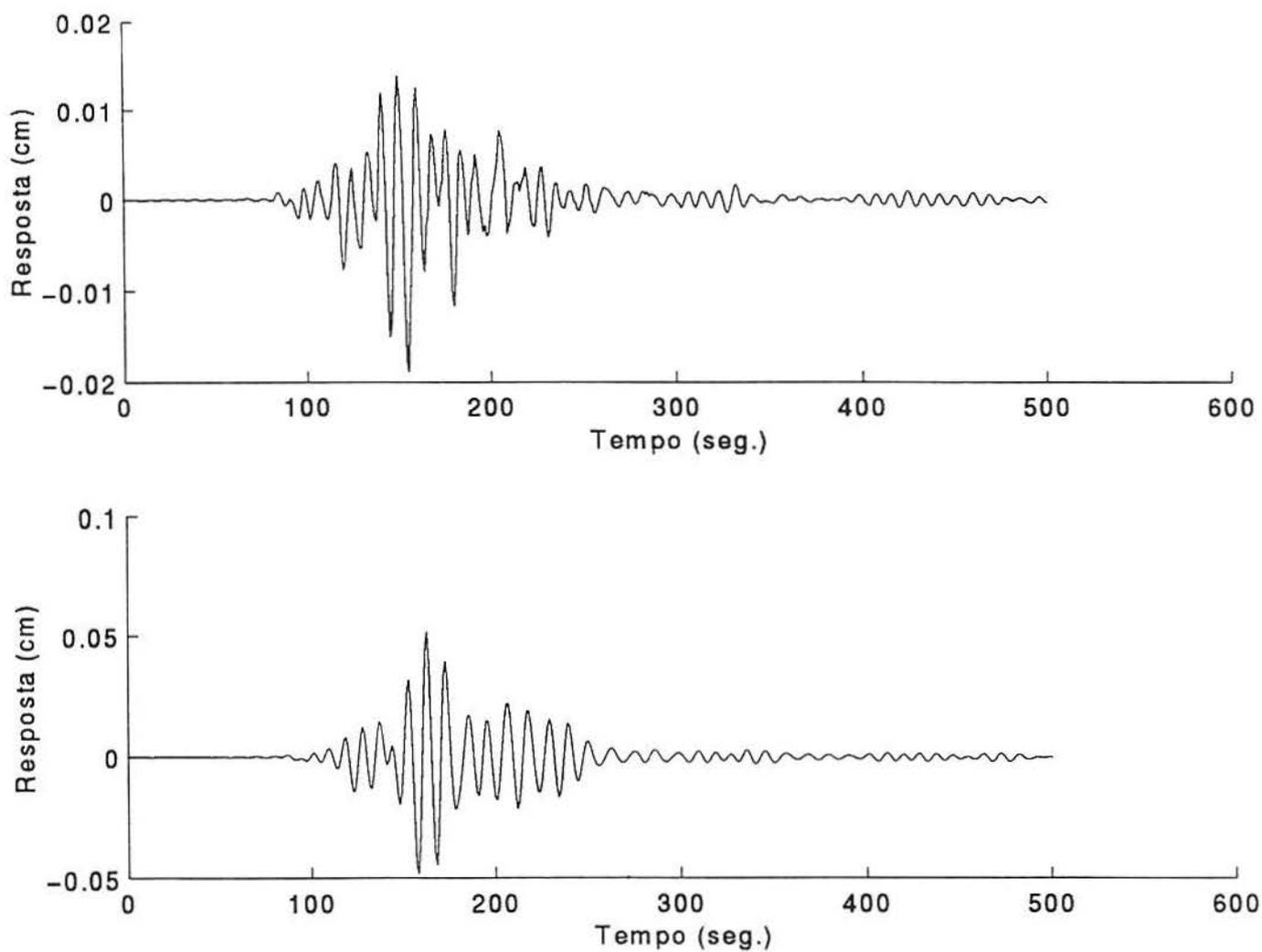


Figura 7.6 Resposta de deslocamento em meio vão da ponte sujeita a excitação sísmica em ambos os extremos; para sistema com controle AMR passivo

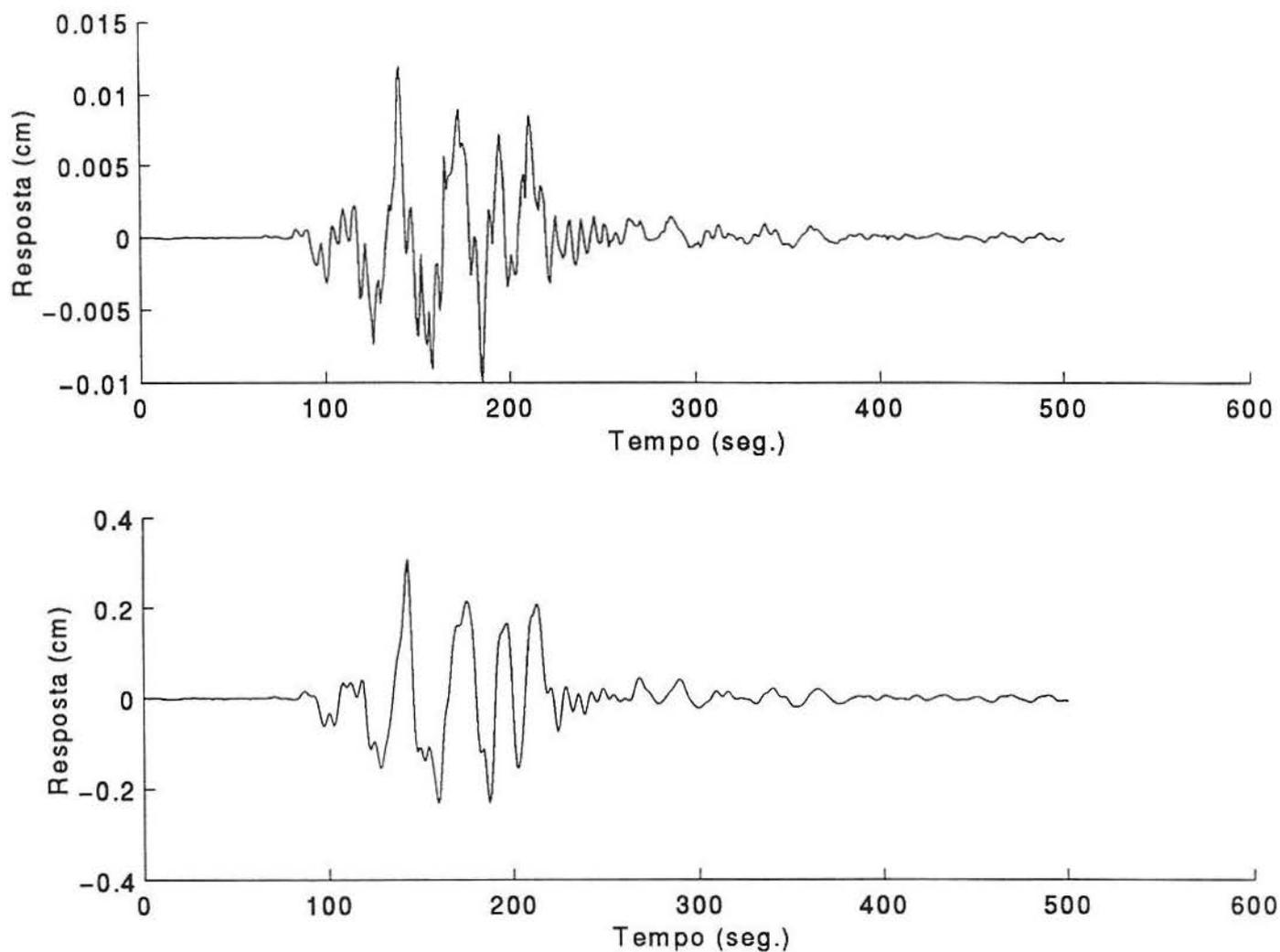


Figura 7.7 Resposta de deslocamento em meio vão da ponte sujeita a excitação sísmica em ambos os extremos; para sistema com controle AMR ativo.

8 CONCLUSÕES

Neste trabalho, alguns dos resultados obtidos terão relação com uma futura aplicação da teoria de controle ativo, controle ótimo, controle do amortecedor de massa regulada ativo e a localização ótima dos atuadores e sensores no estudo do controle de estruturas flexíveis. A seguir, enunciamos as conclusões sobre o trabalho.

- (1) É considerado a técnica de determinar as localizações dos atuadores e sensores usando a metodologia do gramiano de controlabilidade e observabilidade. Também, a resposta do sistema para perturbações transitorias assim como persistente. A determinação da função objetivo para uma localização dada do atuador/sensor requer calcular somente os autovalores do gramiano de controlabilidade/observabilidade.
- (2) O ajustamento do efeito de massa, rigidez, e amortecimento, é o principal instrumento para o controle da resposta da estrutura;
- (3) Um bom comportamento do sistema é obtido fornecendo amortecimento ativo e rigidez ativa à estrutura;
- (4) O tipo de sensor usado é muito importante para a resposta do sistema;
- (5) A posição do sensor é essencial para a estabilidade do sistema. e o sensor deveria ser colocado na posição da força de controle;

(6) Usamos o problema regulador para procurar a melhor lei de controle ótimo de laço fechado para estruturas sujeitas a perturbações desconhecidas. Isto pode ser feito investigando a resposta da estrutura controlada devido a suposição de alguma perturbação.

(7) A lei de controle ótimo é obtido sobre a base de fornecer o suficiente amortecimento ativo e rigidez ativo para proteger a estrutura diante de qualquer perturbação incerta.

(8) A lei de controle ótimo depende da especificação das matrizes ponderadas e da resolução da equação de Riccati, se o controle por retroalimentação é o desejável.

(9) O aumento do controle ativo fornece a possibilidade de reforçar a efetividade do AMR. Através do análise de estruturas de uma ponte, foram discutidos o algoritmo de controle e a compensação do tempo de retardo sob uma força de controle.

(10) A teoria de controle ótimo instantâneo tem fornecido uma adequada base para nosso trabalho.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ABDEL-ROHMAN,M., LEIPHOLZ, H. H., Active Control of Flexible Structures. *Journal of the Structural Division, ASCE* Vol. 104, No. ST8, Proc. paper 13964, Aug., pp. 1251-1266, 1978.
- [2] ABDEL-ROHMAN,M., LEIPHOLZ, H. H., Structural control by Pole Assignment Method. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE* Vol. 104, EM5, Proc. paper 14060, Oct., pp. 1159-1175, 1978.
- [3] ABDEL-ROHMAN,M., and LEIPHOLZ, H. H., Optimal Control of Civil Engineering Structures. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE* Vol. 106, EM1, Proc. paper 15192, Feb., 557-73, 1980.
- [4] ARBEL, A., Controllability Measures and Actuator Placement in Oscillatory Systems. *International Journal of Control* 33, 565-574, 1981.
- [5] ATHANS, M. and FALB, P. L., Optimal Control. *McGraw-Hill*, New-York, 1966.
- [6] BALAS, M. J., Active Control of Flexible Systems. *Journal of Optimization Theory and Applications* 25 pp. 415-420, 1978.
- [7] BROGAN, W.L., Modern Control Theory. *Q. P. I. Series*, New York, 1974.
- [8] BROKETT, R., Finite Dimensional Linear Systems. *Jhon-Wiley*, 1969.
- [9] BRYSON, A. E. and HO, Y., Applied Optimal Control, Optimization, Estimation, and Control. *Hemisphere*, New York, 1975.

- [10] CANAHUALPA, G. AND CLAEYSSSEN, J. C. R., Numerical Integration of Damper Systems by Using the Dinamical Matrix Solution. *ICIAM 95*, Hamburgo, Alemanha
- [11] CHANG, J. AND SOONG, T., Structural Control Using Active Tuned Massa Dampers. *ASCE Journal Engng Mech. Div.*, 106, EM6, 1091-1098, 1980.
- [12] CHUNG, L. L., LIN, C. C. AND CHU, S. Y., Optimal Direct Output Feedback of Structural Control. *ASCE Journal of Engng Mech.*, Vol. 119, No. 11, 2157-2165, 1993.
- [13] CLAEYSSSEN, J. C. R. On Predicting the Responses of Non Conservative Linear Vibrating Systems by Using Dinamical Matrix Solutions. *Journal of Sound and Vibration 140(1)*, 73-84, 1990.
- [14] COOK, R. D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis. *John Wiley*, New York, 1976.
- [15] DAVINSON, E.J., On Pole Assignment in Multivariable Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-13, No. 6, Dec., pp. 747-748, 1968.
- [16] DORF, R.C. , Modern Control System. *Addison-Wesley Publishing Co.*, Don Mills, Ontario, Canada, 1967.
- [17] GAWRONSKI, W. and JUANG, J. N., Model Reduction for Flexible Structures. *Control and Dynamic Systems: Advances in Theory and Applications*, 36, 143-22, 1990.
- [18] GLOVER, K., All Optimal Hankel-norm Approximations of Linear Multivariable Systems and their L^∞ -erros Bounds. *International Journal of Control*, 39 1115-1193, 1984.

- [19] HAC, A. and LIU, L., Sensor and Actuator Location in Motion Control of Flexible Structures. *Journal of Sound Vibration* 167(2), 239-261, 1993.
- [20] HINO, J., YOSHIMURA, T., A Finite Method Prediction of the Vibration of a Bridge Subjected to a Moving Vehicle Load. *Journal of Sound and Vibration* 96(1), 45-53, 1984.
- [21] HUGES, P. C. and SKELTON, R. E., Controllability and Observability of Linear Matrix-Second-Order System. *Journal of Applied Mechanics* 47, 415-420, 1980.
- [22] INMAN, DANIEL J., Vibration with Control Measurement, and Stability. *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- [23] KAYNIA, A. M., Seismic Effectiveness of Tuned Massa Damper. *ASCE Journal Struct. Engng*, 107(8) 323-342, 1981.
- [24] KIRK, D. E., Optimal Control Theory. *Prentice-Hall* Englewood Cliffs, new Jersey, 1970.
- [25] LEE, E. B. AND MARKUS, L., Foundations of Optimal Control Theory. *Jhon Wiley* New York, 1969.
- [26] LIN, Y. H. and TRETHERWEY, M. W., Finite Element Analisis of Elastic Beams Subjected to Moving Dynamic Loads. *Journal of Sound and Vibration* 136, 323-342, 1990.
- [27] LIN, Y. H. and TRETHERWEY, M. W., Active Vibration Suppression of Beam Structures Subjected to Moving Loads: A Feasibility Study using Finite Elementos. *Journal of Sound and Vibration* 166(3), 383-395, 1993.

- [28] LUENBERGER, D.G. An Introduction to Observers. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-16, No. 6, Dec., pp. 796-802, 1971.
- [29] MARTIN, C.R. and SOONG, T.T., Modal Control of Multistory Structures. *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, Vol. 102, No. EM4, Proc. Paper 12321, Aug., pp 613-623, 1976.
- [30] MEIROVITCH, L., Dynamics and Control of Structures. *Wiley-Interscience*, New York, 1990.
- [31] MEIROVITCH, L., Analytical Methods in Vibrations. *Macmillan*, New York, 1967.
- [32] MIDDLETON, R. H. AND GOODWIN, G., Digital Control and Estimation: a Unified Approach. *Prentice-Hall* Englewood Cliffs, 1990.
- [33] NOBLE, B. and DANIEL, J. W., Applied Linear Algebra. *Prentice Hall; second edition* Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.
- [34] OGATA, K., State Space Analysis of Control Systems. *Prentice Hall, INC* Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.
- [35] QUINTANA, V.H., Conventional and Modern Control System Analysis and Design. *Internal Tech. Report, Depart. of Elec. Eng.*, University of Waterloo, Ontario, Canada, Mar., 1976.
- [36] ROORDA, J., Tendon Control in Tall Structures. *J. of the Structural Division, ASCE*, Vol. 101, No. ST3, pp 505-521, 1975.
- [37] SHINNERS, STANLEY M., Modern Control System Theory And Application. *Addinson-Wesley Publishing Co.*, Don Mills, Ontario, Canada, 1972.

- [38] SLADEK, J. R. AND KLINGNER, R. E., Effect of Tuned Massa Damper on Seismic Response. *Journal Struct. Engng*, 109(8), 323-342, 1983.
- [39] SMITH, J.W., Vibration of Structures Applications in Civil Engineering Design. *Chapman and Hall Ltd*, New-York, 1988.
- [40] YANG, J. N. AND AKBARPOUR, A., Instantaneous Optimal Control Algorithms for Tall Buildings Under Seismic Excitation. *NCEER-87-0018*, August., 1987.
- [41] YANG, J. N. AND AKBARPOUR, A., Practical Considerations for Structural Control: System Uncertainty, System Time Delay, and Truncation of Small Control Forces. *NCEER-87-0018*, August., 1987.
- [42] YANG, J. N. AND AKBARPOUR, A., New Optimal Control Algorithms for Structural Control. *Journal Engrg. Mech., ASCE*, 113(9), 1369-1386. 1987.
- [43] YAO, J.T.P., AND TANG, J.P., Concepto of Structural Control. *J. Structural Division, ASCE*, Vol. 98, No.ST7, July, pp 1567-1574, 1972.
- [44] YOKOYAMA, T., Vibrations of Timoshenko Beam-Columns on Two-Parameter Elastic Foundations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* Vol. 20, 335-370, 1991.