UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

BRUNNA SORDI STOCK

A argumentação na resolução de problemas de Matemática:

uma análise a partir da Epistemologia Genética

Porto Alegre

2015

Brunna Sordi Stock

A argumentação na resolução de problemas de Matemática:

uma análise a partir da Epistemologia Genética

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação. Orientadora: Prof. Dra. Maria Luiza Rheingantz Becker.

Porto Alegre

2015

CIP - Catalogação na Publicação

Stock, Brunna Sordi
A argumentação na resolução de problemas de Matemática: uma análise a partir da Epistemologia Genética / Brunna Sordi Stock. -- 2015.
182 f.

Orientadora: Maria Luiza Rheingantz Becker.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Porto Alegre, BR-RS, 2015.

1. Epistemologia Genética. 2. Matemática. 3. Argumentação. 4. Resolução de problemas. I. Becker, Maria Luiza Rheingantz, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

AGRADECIMENTOS

Todos aqui citados foram essenciais durante minha trajetória no PPGEdu e para a construção deste trabalho. De forma não hierárquica, começarei pela minha grande família, em especial à minha avó Colorinda, por ser o meu maior exemplo de educadora. Aos meus pais, Carlos e Maoris, que sempre foram meu suporte e incentivo. Às minhas irmãs, Bianca e Bárbara, por serem exemplos de mulheres, pesquisadoras e mestras. Ao meu companheiro, Pedro, que não poderia ter sido mais compreensivo e que esteve comigo em todas as horas, mesmo longe, sempre acreditando em mim. Aos meus sogros, Floriano, por ser um exemplo de professor de Matemática e sempre pensar em meu futuro, e Maria Alice, por ser uma grande amiga e pela ajuda em meus trabalhos acadêmicos. Aos amigos e amigas, pela torcida constante e por serem exemplos de pesquisadores em suas áreas.

À direção da escola onde a pesquisa foi realizada e às professoras Marlusa e Lúcia, que disponibilizaram seus períodos. Aos estudantes, que participaram desta pesquisa e se engajaram nas atividades. Às direções e colegas das escolas onde trabalhei, João Paulo I e João XXIII, que apoiaram meus estudos. Em especial, à professora e amiga Regina Crestani, com quem tenho o prazer de discutir e fazer educação e cujo incentivo para que eu ingressasse no Mestrado foi essencial. A todos os meus alunos, que me apontam a direção para seguir pesquisando e querendo ser uma professora cada vez melhor, em especial aos meus queridos afilhados da 3AH de 2013.

Aos meus colegas de orientação, seminários e do NECAEA, por todas as discussões realizadas nesta trajetória e contribuições que fizeram para este trabalho. À minha orientadora, Maria Luiza R. Becker, por me acolher e ser, além de uma excelente professora e orientadora, uma companheira de conversas e discussões sobre educação e muito mais.

Ao professor Marcus Basso e à professora Rosane Aragón, pelas contribuições extremamente pertinentes na banca de qualificação, que contribuíram para o meu processo de construção do conhecimento. Obrigada pela disposição para contribuir ainda mais neste trabalho final, juntamente com a professora Clarissa Golbert, que vem somar a este grupo.

RESUMO

Esta pesquisa investiga se e como a argumentação na resolução de problemas pode contribuir para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Os objetivos deste trabalho são verificar e analisar as diferentes relações entre o fazer e o compreender na perspectiva da resolução de problemas utilizando a argumentação; observar, através da argumentação, o raciocínio subjacente à resolução do exercício; e analisar, a partir das teorias estudadas, como o estudante chegou à resposta final (correta ou não), buscando entender se ele compreende ou não o conteúdo matemático envolvido. Para tal, nossa unidade de análise é a argumentação na resolução de problemas de Matemática por estudantes de Ensino Fundamental II e Médio, constituindo um estudo de casos múltiplos. Nosso aporte teórico é a Epistemologia Genética de Jean Piaget, por seus subsídios para a análise dos procedimentos e raciocínios presentes na resolução, bem como para o estudo da compreensão da Matemática. Temos como proposição que, na argumentação, podemos observar os procedimentos e conceitos utilizados pelos estudantes e, como hipótese, que é possível encontrar quatro diferentes relações entre a resposta final e a compreensão do conteúdo matemático (verificada verdadeira). Para a argumentação oral, realizamos arguições com os estudantes individualmente e em grupo, com base no Método Clínico piagetiano. Concluímos que a argumentação contribui para o ensino e a aprendizagem da Matemática na perspectiva do professor, que pode identificar os erros cometidos pelos estudantes e se estes compreendem o conteúdo envolvido no problema, além de repensar sua prática docente. Contribui também na perspectiva do aluno, que, em algumas situações, repensa sua estratégia e compreende a Matemática envolvida na questão.

Palavras-chave: Matemática, argumentação, resolução de problemas, Epistemologia Genética.

ABSTRACT

This research seeks to comprehend if and how the argumentation used in problem solving can contribute to Mathematics teaching and learning. The objectives are verify and analyze the different relations between action and comprehension on problem solving perspective using argumentation; observe, through argumentation, the reasoning used on the resolution of the problem; and analyze, using the theories studied, how the student found the answer, seeking to understand if he comprehends or not the mathematics of the problem. We analyzed the argumentation on problems resolution made by students of elementary and high school, composing a multiple cases study. Our theoretical basis is Jean Piaget Genetic Epistemology, because of it subsides to analyze the procedures and reasoning used by the student and to study mathematical comprehension. Our preposition is that, in argumentation, it is possible to observe the procedures and concepts used by the students and our hypothesis is that it is possible to find four different relations between the final answer and the comprehension of mathematics (verified positively). In oral argumentation, we argued the students individually and in groups, using the Clinical Method by Piaget. We concluded that argumentation contributes to mathematics teaching and learning in the perspective of the teacher, because he can identify the student's errors and if he comprehends the mathematics involved in the problem. Nevertheless, the teacher can also rethink about his professional practice. Argumentation contributes also on the student's perspective, because, in some situations, he can think about the procedures used and comprehend the mathematics.

Key-words: Mathematics, argumentation, problem solving, Genetic Epistemology.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta uma pesquisa que teve desenvolvimento durante o Mestrado em Educação na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Começaremos, no capítulo 1, relatando a trajetória pessoal da pesquisadora, que une os estudos como aluna da graduação em Licenciatura em Matemática na Universidade e do Mestrado em Educação com os interesses como professora do Ensino Fundamental II e Médio. Esta trajetória tem como objetivo mostrar como chegou-se ao tema da pesquisa e qual é a nossa perspectiva para o seu desenvolvimento.

No capítulo 2, delineamos nosso aporte teórico, começando com um estado da arte das produções acadêmicas atuais, que colaborou para termos uma visão do contexto em que nosso trabalho está inserido, o que ele pode contribuir nesse contexto e como estas produções ajudam a refletir sobre nossa investigação. Seguimos com as definições de “argumentação” e “problema”, essenciais para a definição do problema de pesquisa. Após, apresentamos os conceitos da teoria piagetiana que serão importantes para nossa análise.

No capítulo 3, apresentamos nossa metodologia, descrevendo as características importantes de um projeto de estudo de casos múltiplos, segundo YIN (2010). Explicitamos a unidade de análise, a proposição utilizada e as hipóteses deste trabalho. Apresentamos os participantes e os cuidados éticos tomados, finalizando com os procedimentos empregados.

No capítulo 4, explicamos nossas categorias de análise e as situações em que separaremos os casos, segundo essas categorias. Mostramos uma análise geral de todas as questões trabalhadas e aprofundamos o exame de quatro questões, que tiveram a maior diversidade de respostas.

Concluímos, no capítulo 5, com as considerações finais sobre este trabalho, apresentando nossa resposta para a pergunta inicial, a validade ou não das hipóteses e as dificuldades encontradas, juntamente com observações sobre possíveis replicações da pesquisa. Abordamos um questionamento surgido durante a investigação e finalizamos com uma reflexão sobre os estudos no Programa de Pós-Graduação (PPGEdu) da UFRGS.

1 TRAJETÓRIA PESSOAL

Esta trajetória pessoal pretende mostrar como a pesquisadora chegou ao problema de pesquisa e qual a sua perspectiva neste trabalho, em função do contexto em que ela está inserida. Para tal, trazemos alguns dos estudos por ela realizados na graduação, em Licenciatura em Matemática, sobre o significado da Matemática escolar e sobre a teoria dos campos conceituais, bem como as práticas docentes curriculares do curso. Ainda, para compreendermos o molde final deste trabalho, é necessário falar do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que foi uma inquietação presente e que culminou no foco de interesse aqui analisado. É impossível não apresentarmos também situações de sua atuação profissional com os Ensinos Fundamental e Médio, que direcionaram seus interesses e trouxeram o desejo de tornar-se pesquisadora, o que leva ao Mestrado em Educação na UFRGS e ao estudo da teoria piagetiana. Assim, mostraremos como foi delineada esta pesquisa, a partir das intersecções constantes entre o contexto acadêmico e o profissional.

Em 2009, na Licenciatura em Matemática da UFRGS, na disciplina de *Laboratório de Prática em Ensino-Aprendizagem II*, a pesquisadora realizou uma oficina extraclasse com os alunos da 7ª série do Colégio de Aplicação da UFRGS (CAp). No trabalho com geometria, constatou a dificuldade dos alunos em relacionar conceitos do dia a dia no contexto da Matemática, por exemplo, a altura de um triângulo e a altura de uma mesa. Juntamente com as leituras de Rômulo Lins (Teoria dos Campos Semânticos) e Ole Skovsmose (Educação Matemática Crítica), refletiu sobre o significado da Matemática escolar. Constatou que alguns alunos conseguiam resolver questões, mas não entendiam as definições (e consequentemente, propriedades das figuras geométricas), muitas vezes acertando a resposta por coincidência. Diferente do hábito adquirido na escola, onde a resposta era o principal, pela primeira vez esta não era suficiente, pois era necessário observar o processo de resolução das questões para analisar o uso dos conceitos e a construção do seu significado. Aqui começa seu interesse pela área da resolução de problemas na educação matemática.

Em 2010, no *Laboratório de Prática em Ensino-Aprendizagem III,* a pesquisadora realizou uma análise sobre o ENEM, que havia sido reformulado no ano anterior, classificando as diferentes questões do Exame com os seguintes critérios: problematização de uma situação da vida real, contextualização forçada, utilizando um texto de uma situação quotidiana, mas que não tinha relação de dependência com a pergunta do problema, ou aplicação direta de fórmula/propriedade. Esta crítica contribuiu para pensar no que é uma questão do ENEM e, consequentemente, o que o ENEM propõe para o aluno do Ensino Médio. Como professora do Ensino Médio da rede privada de Porto Alegre, esta reflexão era essencial para ela.

Em 2011, a Universidade Federal de Ciências da Saúde de Porto Alegre (UFCSPA), renomada universidade pública do Rio Grande do Sul, adotou o ENEM como única forma de seleção. Assim, os estudantes do 3° ano do Ensino Médio queriam resolver questões "tipo ENEM": eles sabiam que eram questões que possuíam textos longos e se preocupavam com o tempo para realizar a prova de Matemática. No mesmo ano, a pesquisadora realizou uma oficina de preparação para o ProUni, que depende da nota do ENEM, em um curso pré-vestibular de Porto Alegre. Apesar de ter foco semelhante ao do colégio, o contexto desse curso era diferente, pois os integrantes não dominavam o conteúdo exigido pelo Exame. Na escola, o problema dos alunos era com aqueles conteúdos que eles já sabiam que seriam integrados nas questões de textos longos; na oficina, a dificuldade era do professor, pois era necessário identificar, dado um curto espaço de tempo, quais os principais conteúdos que deveriam ser trabalhados para que os alunos pudessem ter um bom resultado no Exame. Em função disso, ela analisou os conteúdos e, consequentemente, as habilidades e competências que os participantes do Exame deveriam saber.

Enquanto isso, no Ensino Fundamental (5ª série), a partir da identificação das dificuldades nas diferentes aplicações da multiplicação e da adição nas resoluções de questões, começava a escrita de um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), sob a orientação do professor Dr. Marcus Vinicius Basso. Neste momento, as obras de Gérard Vergnaud (1993, 1996, 2009a e 2009b) forneceram o suporte teórico, que contribuiu para mudanças na concepção de aprendizagem da investigadora. As obras de Vergnaud, fortemente ancoradas nos trabalhos de Jean Piaget, trazem as ideias de esquema, conceito e de campos conceituais. Com elas, foi possível identificar parte dos erros dos alunos e começar uma caminhada, para pensar em como elucidar algumas das dificuldades nos campos aditivo e multiplicativo.

As dificuldades com esquemas e conceitos abordadas no TCC não se esgotaram: em 2012, na docência em uma turma da 7ª série, a pesquisadora deparou-se com essa questão novamente, em problemas de geometria, na sala de aula. Na tentativa de elucidar essas questões, realizou uma atividade de explicação da resolução entre os alunos, onde eles deveriam analisar, de forma crítica, o trabalho do colega e indicar se haviam compreendido, se haviam pensado de outra forma, se tinham sugestões a fazer, etc. Esta tarefa, de fato, contribuiu para a discussão dos métodos utilizados, onde os alunos verificaram que algumas das definições utilizadas não eram possíveis e que a resposta correta era uma coincidência. Porém, a surpresa surgiu ao encontrar respostas incorretas, mas que estavam baseadas em conceitos corretos: na discussão com o grupo, alguns alunos mostravam compreender o conteúdo matemático e a sua relação com a questão, apesar de, no momento de prova, utilizar argumentos que não eram possíveis para a situação.

Não obstante, alunos que não haviam conseguido resolver as questões, conseguiram na discussão com o grupo. Essas situações da sala de aula incomodaram a investigadora, que sentiu a necessidade de buscar a forma de pensar desse aluno e compreender o papel da argumentação nesse processo. Por isso, ingressou no Mestrado no PPGEdu da UFRGS, na linha de Psicopedagogia, Sistemas de Ensino/Aprendizagem e Educação em Saúde, sob orientação da professora Dra. Maria Luiza Rheingantz Becker.

A escolha pelo PPGEdu deu-se pela necessidade de pensar fora da educação matemática e encaminhar-se para o estudo do sujeito e do processo de aprendizagem. A tradição do programa e os professores que delem fazem parte impulsionaram esta decisão e foi essencial para o crescimento da pesquisadora, pois no PPGEdu ela, finalmente, estudou a teoria de Jean Piaget. Diferente da graduação, realizou leituras de diversas obras do autor e aprofundou-se nos conceitos e métodos utilizados em seus escritos. No primeiro semestre, nos seminários *Introdução à Psicologia e à Epistemologia Genéticas,* com o professor Fernando Becker, e *Textos Pedagógicos de Jean Piaget,* com a professora Maria

Luiza Becker, ela enxergou a complexidade da teoria piagetiana. A compreensão e o entrelaçamento dos conceitos de inteligência, esquema, assimilação e acomodação proporcionaram um novo olhar para as relações que os alunos faziam entre os conteúdos de uma mesma disciplina, entre conteúdos de áreas diferentes do conhecimento e entre os próprios alunos e o conteúdo. Não foram encontradas respostas prontas, mas sim mais perguntas e, surpreendentemente, isso fez mais sentido para compreender as dinâmicas da sala de aula.

No seminário *Cognição e Aprendizagem da Matemática I*, com a professora Beatriz Vargas Dorneles, utilizando as diferentes pesquisas e apresentações oportunizadas pela disciplina, a pesquisadora trabalhou com a linguagem na Matemática. Na busca teórica para esta pesquisa (FONSECA;CARDOSO, 2005; MACHADO, 1993), encontrou foco principal na interpretação de texto, o que é essencial na sala de aula e é fonte de dificuldades. Porém, era pouco discutido o papel do aluno na produção de textos, quase sempre estes sendo escolhidos pelo professor. Já a discussão em sala de aula aparecia nos trabalhos pesquisados, mostrando que a interpretação de um problema poderia ser discutida com outros sujeitos e que era uma prática interessante para a troca de ideias e colocação dos diferentes pontos de vista. Aqui, ela também teve a oportunidade de escrever um artigo sobre os eixos cognitivos do ENEM, observando como a linguagem fazia parte das habilidades e competências requeridas para a prova de Matemática do Exame.

A investigadora encontrou em comum, entre todas as competências da área de *Matemática e suas tecnologias* no ENEM, habilidades de diferentes conteúdos, mas que falavam em utilizar conhecimentos destes para a construção de argumentações. Essas habilidades eram exatamente onde estava a dificuldade de grande parte dos alunos: eles resolviam uma questão e encontravam um resultado (correto ou não); contudo, para argumentar porque este resultado era correto (para eles), utilizavam teoremas e conceitos que não tinham relação com a situação descrita, ou que estavam incorretos ou, simplesmente, não conseguiam ser entendidos pelos demais pelo uso das palavras, ou seja, não se colocavam na posição de ouvinte da explicação. Este momento foi crucial para ela pensar no projeto de dissertação, onde, em um primeiro momento, o ENEM e os conceitos de habilidade e competência eram o foco principal, junto com a resolução de problemas.

Pensando nessas propostas sobre discussão e leitura estudadas no seminário, a pesquisadora realizou, com seus alunos do 3° ano do Ensino Médio, em 2013, uma atividade de resolução e discussão de exercícios em grupo. De acordo com o conteúdo que estivesse sendo estudado pela turma, eram selecionadas questões de exames vestibular e do ENEM que, a princípio, a turma tivesse condições de resolver. Em um primeiro momento, os alunos individualmente pensavam, interpretavam e analisavam sobre o que tratava a questão e que estratégias poderiam utilizar. No segundo momento, eles se reuniam com os outros colegas que tivessem a mesma questão, discutiam as diferentes interpretações e possibilidades de resolução e, então, buscavam a resposta correta. Se o exercício fosse complicado ou o grupo estivesse com dificuldade, ela os auxiliava com questionamentos a fim de apresentar possibilidades de resolução e conceitos envolvidos, mas nunca dizendo como deveriam fazer.

Era solicitado também, que os grupos escrevessem da melhor forma possível como obtiveram a resposta, para que criássemos um banco de questões resolvidas com todas as utilizadas em aula para os alunos estudarem. Contudo, para avaliar se a escrita estava adequada para a compreensão dos colegas, após resolver e escrever sua explicação, o grupo deveria apresentar para os demais e estes avaliariam se a escrita poderia ir para o banco ou não. Cabe ressaltar que, apesar de serem questões de múltipla escolha, os alunos desconheciam a alternativa certa e se a forma de resolução era possível até apresentarem para a turma.

Esta atividade foi importante, porque dela surgiram várias considerações. Duas delas são sobre o trabalho em grupo: a investigadora esperava que os integrantes que tivessem mais facilidade em Matemática resolvessem a questão e os demais não se envolvessem no trabalho. Mas, no acompanhamento das discussões, percebeu que os alunos, em sua maioria, estavam realmente envolvidos e preocupados em compreender a resolução, talvez por terem que apresentar para a turma. Inclusive, grande parte dos estudantes lia a questão, mas não a resolvia antes de falar com o grupo. A outra consideração é que os alunos, de forma geral, não ficaram constrangidos de fazer questionamentos durante as apresentações. Ela acreditava que, para não envergonhar os colegas ou para que não recebessem críticas na sua apresentação, aceitariam todas as explicações, mas não: pediam para repetir alguma parte ou que fosse explicado de outra forma e, quando não entendiam, eles o afirmavam para o grupo. Foi interessante constatar, também, que os espectadores inclusive faziam sugestões, mostrando como eles resolveriam.

A terceira consideração a ser observada, e que foi surpreendente e gerou diversos questionamentos, é sobre o "dar-se conta" de como resolver ou de um erro na resolução durante a explanação. Como os estudantes não sabiam se a sua resolução estava correta, em alguns casos, durante a apresentação, percebiam um erro e que a resposta encontrada estava errada. Ou, ainda, o grupo apresentava somente parte da explicação por não ter conseguido resolver completamente, mas, durante a apresentação, chegava à resposta. Ainda, em algumas situações onde obtiveram o resultado correto, algum colega fazia um questionamento e, então, o grupo percebia que fez de uma forma que não poderia ser utilizada naquela situação, obtendo o resultado por coincidência ou por um raciocínio que funcionou para aquele caso particular e que, de forma geral, não funcionaria. Concomitantemente, a pesquisadora estudava a obra *O possível e o necessário* (PIAGET, 1985; PIAGET, 1986) para um seminário do PPGEdu e, na prática, observava as pseudonecessidades (PIAGET, 1985) nas resoluções, o cogitar de possíveis e a confusão entre estes e o que era necessário em cada problema.

No final de 2013, o projeto de dissertação, que antes tinha foco nas habilidades e competências do ENEM, teve uma mudança, em função das leituras que a pesquisadora continuou a fazer e da constatação da riqueza da teoria piagetiana para a interpretação da argumentação na resolução de problemas. Ela optou por observar a argumentação, não somente como uma habilidade exigida no Exame, mas, também, a analisar a sua contribuição no ensino e na aprendizagem de Matemática. Com essa mudança, buscou, além de Piaget, a análise do erro, proposta por Lino de Macedo (MACEDO, 2010).

Nas obras *A tomada de consciência* (PIAGET, 1977) e *Fazer e Compreender* (PIAGET, 1978b), onde os sujeitos deveriam explicar como realizaram certas atividades, a pesquisadora encontrou diversas relações com a argumentação na resolução de problemas. Essas leituras levaram para uma interpretação das conexões entre ação e compreensão, a observar as coordenações (e a falta delas) na resolução de um exercício, a pensar na conceituação envolvida em cada conteúdo matemático. Porém, relacionar a teoria piagetiana e suas inquietações para observar as relações entre a argumentação e resolução de problemas não lhe é suficiente: ela acredita que, através da argumentação, é possível observar os procedimentos utilizados e os erros cometidos e busca este fim; quer entender, através da teoria, como a compreensão, talvez evidente na argumentação, se relaciona com o fazer, a ação de resolver o problema.

Desta forma, constituem os objetivos deste trabalho verificar e analisar as diferentes relações entre o fazer e o compreender na perspectiva da resolução de problemas utilizando a argumentação; observar, através da argumentação, o raciocínio subjacente na resolução do exercício; e analisar, a partir das teorias estudadas, como o estudante chegou à resposta final (correta ou não), buscando entender se ele compreende ou não o conteúdo matemático envolvido. De forma geral, pretendemos, com essa pesquisa, contribuir para as discussões sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática ao problematizarmos na Universidade as situações encontradas pela pesquisadora em sua prática docente relatada anteriormente.

Assim, o problema desta pesquisa é **se e como a argumentação pode contribuir para o ensino e a aprendizagem da Matemática através da resolução de problemas**. Entendemos que tal pergunta seja de extrema relevância para o ensino da Matemática, pois encara uma dificuldade constatada em diferentes séries/anos ao longo destes últimos seis anos de trajetória profissional da pesquisadora. Não há a pretensão de revolucionar a didática da Matemática, uma vez que esta deve ser objeto constante de reflexão e reconstrução em diferentes turmas, anos e escolas. Mas acreditamos que trazer a argumentação para a sala de aula já é refletir sobre a prática docente e o aprendizado da Matemática, de forma que contribui para a didática desta disciplina como um todo.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Na trajetória pessoal explicitamos os estudos realizados, para mostrar como chegamos ao tema de pesquisa e qual é a perspectiva deste trabalho. Como investigadores, consideramos o diálogo com outros integrantes da comunidade científica essencial para termos diferentes pontos de vista sobre um tema, bem como perceber diferenças e similaridades entre os trabalhos que vêm sendo produzidos recentemente. Assim, neste capítulo, começaremos com um estado da arte, onde analisaremos os trabalhos atuais que possam contribuir para a pesquisa. Logo após, unindo a leitura dos resultados de nossa busca com a teoria piagetiana, traremos os conceitos e definições que serão a base para analisarmos e conduzirmos nossa investigação.

2.1 Estado da Arte

Em uma primeira busca, montamos o que chamamos de “Panorama Geral”, que abarca produções acadêmicas dos últimos cinco anos do Portal de Periódicos da CAPES[1] sobre Matemática, argumentação, resolução de problemas e Epistemologia Genética, bem como especificamos os resultados sobre educação. Após, para pesquisarmos a fundo as relações possíveis, limitamos esta busca e encontramos 15 resultados que foram importantes para a construção deste trabalho, que são descritos na seção “Diálogos”.

2.1.1 Panorama Geral

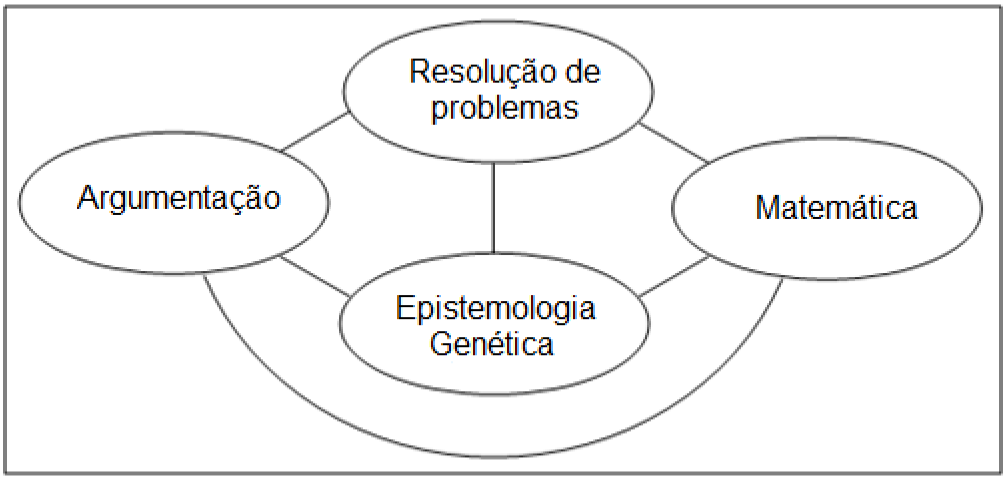
Realizamos uma busca[2] no Portal de Periódicos da CAPES das publicações dos últimos cinco anos, sem limitação de tipo (artigo, dissertação etc.) ou língua (foram encontrados resultados em Português, Espanhol e Inglês). A busca foi realizada utilizando-se o *proxi* da UFRGS, que mostra mais resultados do que a busca livre, sem o cadastro de uma instituição. Ainda, o Portal faz distinção entre

[1] http://www.periodicos.capes.gov.br/
[2] Esta busca foi realizada entre 15 e 19 de novembro de 2014.

buscas com e sem aspas, de forma que todas as realizadas aqui foram sem aspas, por mostrarem maior quantidade de resultados em relação às com aspas.

Nosso intuito, com essa busca, era relacionar dois dentre os quatro eixos principais do nosso trabalho: resolução de problemas, Matemática, argumentação e a Epistemologia Genética, como mostra a figura abaixo.

Figura 1 – Conexões possíveis entre dois dos quatro eixos principais deste trabalho.



Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Em uma primeira versão do Estado da Arte para o projeto de dissertação, observamos que práticas de escrita na aula de matemática ou de explicação da resolução de um exercício não estavam incluídas nas buscas através do termo "argumentação". Como consideramos a argumentação[3] não somente a troca de pontos de vista diferentes, mas também o uso de justificativa, para o trabalho final, escolhemos três termos para compor essa busca: "argumentação", "escrita" e "explicação". Também observamos sobre a Epistemologia Genética que trabalhos que utilizavam a obra de Piaget como referencial teórico, sempre continham o nome do autor, pelo menos nas referências, mas não necessariamente utilizavam o termo "Epistemologia Genética". Assim, para evitar exclusões, realizamos a busca com o termo "Piaget", que apresentou quantidade maior de resultados do que utilizando "Epistemologia Genética". O termo "resolução de problemas" apresentou maior quantidade de resultados em relação ao "resolver problemas" e, por isso, o empregamos. Sabíamos que estas decisões sobre os termos a serem utilizados, pela sua abrangência, provavelmente trariam um grande número de resultados.

[3] Discutiremos o conceito de "argumentação" na seção 2.2.1 adiante.

Porém, acreditamos que esta forma é proveitosa para observarmos como nosso trabalho está inserido nas pesquisas atuais sobre educação nos eixos que nos interessam.

Temos de apontar a ocorrência de erros no Portal da CAPES durante a realização da pesquisa, onde, em algumas buscas, foram adicionados trabalhos de outros anos que não os no espaço de tempo selecionado e tivemos de realizar este refinamento na leitura dos títulos. Por vezes, o Portal alterava o resultado final da busca durante a leitura dos resultados, o que indica uma instabilidade no sistema de buscas. Apesar destes contratempos, fizemos o possível para mantermos a confiabilidade dos resultados aqui apontados ao repetirmos as buscas, elaborarmos tabelas para conferência e analisarmos os resultados.

Começando a discussão dos resultados encontrados, apresentamos, no quadro abaixo, as combinações possíveis entre dois dos quatro eixos e os termos pesquisados no Banco de Periódicos da Capes.

Quadro 1 – Combinações dos termos utilizadas em cada busca.

<table>
<tr><th></th><th>Argumentação</th><th>Epistemologia genética</th><th>Matemática</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Resolução de problemas</td><td>“Resolução de problemas” e “Argumentação”</td><td rowspan="3">“Resolução de problemas” e “Piaget”</td><td rowspan="3">“Resolução de problemas” e “Matemática”</td></tr>
<tr><td>“Resolução de problemas” e “Escrita”</td></tr>
<tr><td>“Resolução de problemas” e “Explicação”</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Argumentação</td><td rowspan="3"></td><td>“Argumentação” e “Piaget”</td><td>“Argumentação” e “Matemática”</td></tr>
<tr><td>“Escrita” e “Piaget”</td><td>“Escrita” e “Matemática”</td></tr>
<tr><td>“Explicação” e “Piaget”</td><td>“Explicação” e “Matemática”</td></tr>
<tr><td>Epistemologia genética</td><td></td><td></td><td>“Matemática” e “Piaget”</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Definidos nossos termos de busca, partimos para a pesquisa no Portal da CAPES. Os quadros abaixo mostram os resultados encontrados e destes os que estão relacionados com ensino, aprendizagem ou educação. Escolhemos este primeiro critério para focarmos na busca dos termos no campo geral da educação e excluirmos os trabalhos sobre Mercado, Administração, Medicina ou Biologia ou que fossem análise documental ou revisão de bibliografia, que não tivessem foco em ensino. Para essa seleção, analisamos o título e, se necessário, o resumo dos trabalhos. Dada a grande quantidade de trabalhos, não foi possível retirar os trabalhos comuns entre uma busca e outra.

Quadro 2 – Busca por resolução de problemas e argumentação.

	Todos os resultados encontrados			**Resultados relacionados com ensino, aprendizagem ou educação**		
	Argumentação	Escrita	Explicação	Argumentação	Escrita	Explicação
2014	4	2	3	2	1	1
2013	2	4	1	1	0	1
2012	3	7	7	1	4	0
2011	0	3	0	0	1	0
2010	2	3	1	2	3	1
2009	3	2	2	3	2	1
TOTAL	**14**	**21**	**14**	**9**	**11**	**4**
	49			**24**		

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Quadro 3 – Busca por resolução de problemas e Epistemologia Genética.

	Todos os resultados encontrados	**Resultados relacionados com ensino, aprendizagem ou educação**
2014	0	0
2013	2	2
2012	2	2
2011	3	3
2010	3	2
2009	1	1
TOTAL	**11**	**10**

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Quadro 4 – Busca por resolução de problemas e Matemática.

	Todos os resultados encontrados	**Resultados relacionados com ensino, aprendizagem ou educação**
2014	1	1
2013	15	10
2012	28	22
2011	20	11
2010	25	18
2009	31	22
TOTAL	**120**	**84**

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Quadro 5 – Busca por argumentação e Epistemologia Genética.

	Todos os resultados encontrados			**Resultados relacionados com ensino, aprendizagem ou educação**		
	Argumentação	Escrita	Explicação	Argumentação	Escrita	Explicação
2014	0	3	3	0	2	0
2013	4	14	1	2	11	0
2012	4	21	6	1	9	2
2011	4	17	7	1	7	3
2010	4	20	11	1	9	4
2009	3	29	12	2	14	5
TOTAL	**19**	**104**	**40**	**7**	**52**	**14**
	163			**73**		

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Quadro 6 – Busca por argumentação e Matemática.

	Todos os resultados encontrados			**Resultados relacionados com ensino, aprendizagem ou educação**		
	Argumentação	Escrita	Explicação	Argumentação	Escrita	Explicação
2014	4	26	11	1	12	2
2013	7	60	24	1	25	2
2012	15	86	43	7	30	12
2011	21	85	36	2	35	8
2010	6	84	42	3	35	9
2009	19	101	35	8	40	4
TOTAL	**72**	**442**	**191**	**22**	**177**	**37**
	705			**236**		

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Quadro 7 – Busca por Matemática e Epistemologia Genética.

	Todos os resultados encontrados	**Resultados relacionados com ensino, aprendizagem ou educação**
2014	9	6
2013	19	11
2012	33	16
2011	31	17
2010	35	13
2009	22	19
TOTAL	**149**	**82**

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Com o levantamento destes termos, obtivemos 1197 resultados no total, sendo 509[4] destes relacionados a ensino, aprendizagem ou educação. Partimos para um segundo refinamento, onde lemos os resumos e, se necessário, o trabalho completo para determinar o que chamamos de "Resultados de Interesse". Os Resultados de Interesse são aqueles que têm os termos pesquisados como cerne da pesquisa/discussão, e que não apenas citam o termo. Também excluímos, em todas as categorias, os trabalhos que estivessem cadastrados, mas indisponíveis no banco da CAPES. Para deixarmos claros nossos critérios de exclusão, o quadro abaixo apresenta alguns exemplos de produções que foram descartadas em cada busca.

[4] Lembramos que, neste momento, não retiramos as repetições entre as buscas. Logo, não são 1197 e 509 trabalhos distintos.

Quadro 8 – Critérios de exclusão para obtenção dos Resultados de Interesse.

Busca	Critérios de exclusão	Exemplos
Resolução de problemas e argumentação	Trabalhos que não utilizassem a argumentação em sala de aula ou não utilizassem a resolução de problemas como método.	Construção de currículo, protagonismo juvenil, forma de escrita do enunciado, uso de material manipulativo.
Resolução de problemas e Epistemologia Genética	Trabalhos que não tivessem a resolução de problemas como método ou apenas citassem Piaget e não o utilizassem como aporte teórico para análise.	Sobre o curso de administração, estratégias de resolução de problemas, dificuldades na interpretação de problemas.
Resolução de problemas e Matemática	Trabalhos em geral, que não utilizassem a resolução de problemas como método, ou que não fossem da área de Matemática.	Comparação entre currículos, tradição de pesquisa entre professores, Ensino Médio técnico (foco na agropecuária), autoavaliação na aula de Matemática, metacognição.
Argumentação e Epistemologia Genética	Trabalhos que apenas citassem Piaget e não o utilizassem como aporte teórico para análise, ou que não utilizassem a argumentação como prática na sala de aula.	Paralisia cerebral, estimulação motora, currículo do ensino superior em saúde, educação corporal, comunicação entre escola e família, ensino da pré-história na pré-escola, concepção dos professores sobre ensino e aprendizagem, estética como motivador da aprendizagem.
Argumentação e Matemática	Trabalhos que não fossem sobre Matemática, ou que não utilizassem a argumentação como prática na sala de aula.	Arte e educação matemática, relação entre conhecimento do meio rural e o da sala de aula, professores elaborando atividades didáticas, a partir de uma situação problema, aprendizagem de Matemática de alunos com TDAH, Arqueologia, leitura, escrita e Matemática no Ensino Fundamental I (não relaciona as três), nível educativo familiar no desempenho escolar, formação docente à distância, expectativa do professor no desempenho dos alunos.
Matemática e Epistemologia Genética	Trabalhos que apenas citassem Piaget e não o utilizassem como aporte teórico para análise, ou que não fossem sobre Matemática.	Dignidade, educação matemática da família, robótica, análise histórica da geometria, *background* filosófico de Wittgenstein para etnomatemática.

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Neste momento, pudemos remover os resultados repetidos entre todas as buscas. Assim, nos quadros abaixo apresentamos os resultados relacionados a ensino, aprendizagem ou educação, sem repetições e os resultados de interesse de cada busca.

Quadro 9 – Resultados relacionados com ensino, aprendizagem ou educação, sem repetições e Resultados de Interesse da busca por resolução de problemas e argumentação.

	Resultados relacionados com ensino, aprendizagem ou educação, sem repetições			**Resultados de Interesse**		
	Argumentação	Escrita	Explicação	Argumentação	Escrita	Explicação
2014	2	0	0	0	0	0
2013	1	0	1	1	0	0
2012	1	4	0	0	3	0
2011	0	1	0	0	0	0
2010	2	2	1	1	0	0
2009	3	2	1	2	2	1
TOTAL	**9**	**9**	**3**	**4**	**5**	**1**
	21			**10**		

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Quadro 10 – Resultados relacionados com ensino, aprendizagem ou educação, sem repetições e Resultados de Interesse da busca por resolução de problemas e Epistemologia Genética.

	Resultados relacionados com ensino, aprendizagem ou educação, sem repetições	**Resultados de Interesse**
2014	0	0
2013	2	2
2012	2	1
2011	3	1
2010	0	0
2009	0	0
TOTAL	**7**	**4**

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Quadro 11 – Resultados relacionados com ensino, aprendizagem ou ed ucação, sem repetições e Resultados de Interesse da busca por resolução de problemas e Matemática.

	Resultados relacionados com ensino, aprendizagem ou educação, sem repetições	**Resultados de Interesse**
2014	0	0
2013	8	3
2012	16	9
2011	10	6
2010	15	9
2009	18	9
TOTAL	**67**	**36**

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Quadro 12 – Resultados relacionados com ensino, aprendizagem ou educação, sem repetições e Resultados de Interesse da busca por Epistemologia Genética e argumentação.

	Resultados relacionados com ensino, aprendizagem ou educação, sem repetições			**Resultados de Interesse**		
	Argumentação	Escrita	Explicação	Argumentação	Escrita	Explicação
2014	0	2	0	0	0	0
2013	2	9	0	0	3	0
2012	1	9	2	1	1	2
2011	1	7	2	0	1	0
2010	1	8	3	0	1	2
2009	1	14	3	0	4	1
TOTAL	**6**	**49**	**10**	**1**	**10**	**5**
	65			**16**		

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Quadro 13 – Resultados relacionados com ensino, aprendizagem ou educação, sem repetições e Resultados de Interesse da busca por Matemática e argumentação.

<table>
<tr><th></th><th colspan="3">Resultados relacionados com ensino, aprendizagem ou educação, sem repetições</th><th colspan="3">Resultados de Interesse</th></tr>
<tr><td></td><td>Argumentação</td><td>Escrita</td><td>Explicação</td><td>Argumentação</td><td>Escrita</td><td>Explicação</td></tr>
<tr><td>2014</td><td>0</td><td>8</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2013</td><td>1</td><td>21</td><td>0</td><td>1</td><td>5</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2012</td><td>7</td><td>22</td><td>7</td><td>4</td><td>3</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2011</td><td>2</td><td>30</td><td>6</td><td>1</td><td>5</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2010</td><td>3</td><td>29</td><td>3</td><td>1</td><td>8</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2009</td><td>6</td><td>33</td><td>2</td><td>6</td><td>10</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">TOTAL</td><td>19</td><td>143</td><td>19</td><td>13</td><td>32</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">181</td><td colspan="3">46</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Quadro 14 – Resultados relacionados com ensino, aprendizagem ou educação, sem repetições e Resultados de Interesse da busca por Matemática e Epistemologia Genética.

	Resultados relacionados com ensino, aprendizagem ou educação, sem repetições	**Resultados de Interesse**
2014	5	2
2013	6	4
2012	10	7
2011	12	7
2010	8	5
2009	11	9
TOTAL	**52**	**34**

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Chegamos ao total de 393 resultados distintos relacionados a ensino, aprendizagem ou educação, sendo 146 destes de interesse para nossa pesquisa. Com esta busca, pudemos constatar o quadro geral em que nosso trabalho está inserido, ressaltando a sua importância para o contexto da pesquisa em educação matemática atual.

Esta busca não apenas nos mostrou as produções acadêmicas nos últimos cinco anos nas nossas áreas de interesse, como também contribuiu para encontrarmos outros trabalhos com os quais pudemos dialogar e pensar nossa pesquisa de diferentes pontos de vista. Assim, dentre os 146 resultados de interesse, que surgiram da combinação de dois dentre os quatro eixos explicitados anteriormente, identificamos aqueles que possuíam três dos quatro eixos, a saber: Epistemologia Genética, resolução de problemas e argumentação; Epistemologia Genética, resolução de problemas e Matemática; Epistemologia Genética, argumentação e Matemática; resolução de problemas, argumentação e Matemática. Surpreendentemente, encontramos apenas 15 trabalhos após essa redução. Eles tiveram diferentes contribuições para essa pesquisa e relataremos a seguir os destaques[5] que fizemos em cada obra.

2.1.2. Diálogos

Aqui, falaremos brevemente sobre essas 15 obras que são de grande interesse para nós. Cabe salientar que, para uma leitura agradável, evitamos descrições longas e selecionamos as contribuições mais relevantes de cada uma para nossa pesquisa. Todos os trabalhos deram subsídios, em diferentes etapas da investigação, inclusive em mais de uma delas.

Começando pela discussão da resolução de problemas, ressaltamos a tese de Nunes (2010), que investigou as potencialidades didático-matemáticas da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas. A pesquisa teve como foco o processo de ensinar e aprender Geometria, de alunos de um curso de Licenciatura em Matemática.

A autora mostra diferentes relações entre resolver problemas e o ensinar e aprender Matemática. São elas: (1) *ensinar sobre resolução de problemas*, que consiste em teorizar sobre a resolução, trabalhar esse assunto como novo conteúdo; (2) *ensinar para resolver problemas*, onde o professor direciona o foco sobre os modos em que a Matemática está sendo ensinada e que possam ser aplicadas na resolução; e (3) *ensinar via resolução de problemas*, que foi reformulado para (4) *ensinar através da resolução de problemas*, que consiste em "ensinar, aprender e avaliar a matemática construída pelos alunos como guia e direção do professor *através* da resolução de problemas." (NUNES, 2010, p. 84).

---

[5] Todas as citações utilizadas neste trabalho foram corrigidas segundo a norma culta vigente da Língua Portuguesa.

Esta última é a perspectiva que nos interessa na construção do conhecimento em sala de aula. A autora complementa que a expressão "através de" é "[...] uma forma de ensinar e, consequentemente, aprender e, durante o processo, fazer matemática, pois o estudante, diante do problema, deve se mostrar como um co-construtor de seu próprio conhecimento" (NUNES, 2010, p. 84/85). A partir dessa concepção da resolução, Nunes apresenta como deve ser a sala de aula para esse fim, dividindo-a em três momentos (antes, durante e depois da resolução) e abordando cada um deles.

Ainda, se resolver problemas é um processo para a aprendizagem de conceitos, a avaliação deveria estar integrada ao ensino-aprendizagem e acontecer de forma contínua, com o objetivo de acompanhar o crescimento dos alunos e repensar as práticas de sala de aula, quando necessário, daí a origem do termo ensino-aprendizagem-avaliação utilizado pela autora. Ao final deste trabalho, percebemos a importância da contribuição de Nunes (2010) na crítica da prática avaliativa como etapa final do processo, que discutiremos nas considerações finais.

A dissertação de Mezzaroba (2009) também investigou a resolução de problemas como estratégia metodológica do ensino de Matemática, mas especialmente exercícios de lógica, que também utilizamos em nossa pesquisa. Com enfoque teórico no trabalho de Piaget, a pesquisadora analisou alunos de escola pública em uma atividade de monitoria e de sala de aula, onde estes ajudavam uns aos outros e era incentivado o registro escrito da resolução do problema. Este trabalho foi profícuo para vermos definições de "problema" diferentes das que utilizamos, aprimorando nosso aporte teórico.

A autora apresenta alguns participantes da pesquisa como casos, abordando a aprendizagem dos alunos, os caminhos e as respostas inusitadas, a surpresa da pesquisadora acerca da capacidade dos estudantes etc. As análises utilizando principalmente os trabalhos de Vergnaud (1990, citado por Fávero, 2005), foram interessantes para pensar nossa escrita, assim como a coleta de dados, baseada no registro escrito e na entrevista.

Apesar do uso da escrita não ser amplamente analisado de forma crítica no trabalho, vemos, na análise dos dados, que a autora se baseia majoritariamente nesta e, em alguns casos, na explicação oral. De qualquer forma, valoriza a resposta dos estudantes ao afirmar que a resposta da aluna, além de revelar o que ela sabe, permite ao professor observar o que ainda precisa ser revisto e os esquemas a serem consolidados.

Na mesma linha, a tese de Molinari (2010) discute o erro na resolução de questões como parte do processo de aprendizagem através da resolução de problemas. A autora aponta o erro como tarefa essencial dos educadores, pois ele pode informar o que e como a criança pensou, bem como quais as estratégias utilizadas e o que ela ainda não compreendeu. A partir dessa análise, a criança pode elaborar novas estratégias e aperfeiçoar os meios utilizados para a resolução de problemas.

Ainda sobre o erro na resolução de problemas, a dissertação de Pepece Junior (2011) traz Cury (2007) e Borasi (1987) para a discussão quanto aos objetivos do erro. Nas palavras do autor:

> Assim devemos, segundo Cury (2007), dar uma atenção maior a todo o processo, não simplesmente considerar o resultado final. Nesta perspectiva, Borasi (1987) aponta que o erro possui dois objetivos, o primeiro seria sua eliminação, ou seja, apenas verificar se tal situação estaria correta ou incorreta, e um segundo, que seria explorar as suas potencialidades, partindo para novas regras por meio de outros exemplos. (PEPECE JUNIOR, 2011, p. 36)

A discussão do erro nestes trabalhos colaborou para pensarmos na análise dos dados coletados e na prática docente como pesquisador. Traremos ainda a perspectiva de Macedo (2010) sobre este tema no próximo capítulo. Seguindo na resolução de problemas e relacionando a Epistemologia Genética, o artigo de Silva (2009) discute os processos de pensamento empregados em exercícios de geometria plana por sujeitos adultos. O artigo mostra diferentes explicações para um mesmo problema, onde o autor classificou os tipos de explicação, mostrando o papel dos observáveis em cada caso. Este trabalho é interessante, por nos mostrar uma forma de análise da resposta utilizando a Epistemologia Genética. Ainda, notamos, dentro das categorias criadas, a presença das diferentes relações entre ação e compreensão, que também apareceram em nosso trabalho, o que tornou a leitura interessante pela troca de pontos de vista.

Na discussão e uso da teoria de Piaget, a dissertação de Duro (2012) é notável em sua abrangência dos termos (em especial os que nos são interessantes: "tomada de consciência", "fazer e compreender", "possíveis") e em sua análise dos dados. A leitura deste trabalho foi profícua para a compreensão da teoria piagetiana, principalmente para a presença dos possíveis na análise combinatória, conteúdo que também trabalhamos com os participantes de nossa pesquisa.

As dissertações de Fonseca (2012) e de Duro (2012) se complementam na discussão teórica: o primeiro, apresenta foco em Piaget (PIAGET, 1999; FLAVELL, 1996; INHELDER;PIAGET, 1976) e Vergnaud (1993; 1996; 2009), enquanto que o segundo aprofunda-se mais na teoria piagetiana (INHELDER;PIAGET, 1976; PIAGET, 1977, 1978b, 2005; BECKER, 1998, 2001). Fonseca (2012) traz as definições de conceito, esquema e invariantes operatórios (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) de Vergnaud que nos ajudaram a pensar a teoria piagetiana, bem como a forma de análise de nossos dados.

Os trabalhos resultantes das buscas também ajudaram para entendermos a argumentação. A pesquisa realizada na dissertação de Souza (2009) é interessante por trazer a argumentação em uma perspectiva diferente da nossa, que é a demonstração matemática, isto é, trabalhar a demonstração de proposições em sala de aula e as diferentes etapas deste processo. Ainda pensando sobre demonstrações, mas trazendo o pensamento argumentativo de forma mais abrangente, o artigo de Crespo Crespo, Farfán e Lezama (2009) fala sobre a lógica do pensamento argumentativo em diferentes sociedades.

Os autores abordam distintas construções do pensamento e formas de argumentação. Defendem que muitas das dificuldades que surgem para realizar demonstrações em sala de aula se devem a não se pensar que há diferentes práticas argumentativas que podem ser usadas, bem como detectar suas características. Lembram que, por serem as formas de argumentação construções sociais, elas mudaram durante a história em diferentes cenários e não são estáticas. Na opinião dos autores, a compreensão desse caráter social para a argumentação e a demonstração pode ajudar a ter uma maior percepção sobre as formas de argumentação em aula.

Na mesma linha da construção da argumentação, o artigo de Nacarato (2012) aborda os diferentes tipos de comunicação oral enfatizando o contexto, que afirma ser determinante para tal. Mostra que a discussão oral ou escrita com o professor, ou apresentação para os colegas influencia na forma de discussão e todas têm seu valor para o processo de ensino e aprendizagem. Ressalta, também, a importância da postura indagadora e problematizadora do professor como essencial para a criação do contexto. Em outro artigo, junto com Bagne (BAGNE; NACARATO, 2012), o contexto reaparece na discussão em sala de aula:

> Os resultados evidenciam o quanto os alunos trazem significações matemáticas relativas a contextos não escolares envolvendo medidas e como esses conceitos espontâneos possibilitam o acesso aos conceitos científicos, num movimento de argumentação, socialização, interações e ações mediadas. (BAGNE;NACARATO, 2012, p. 186)

Os autores enfatizam a presença e a importância dos embates e divergências nos diálogos, entendendo que a "[...] escola é responsável por promover tais experiências, auxiliando os alunos no desenvolvimento da postura reflexiva e argumentativa, indispensável para a vida em sociedade." (BAGNE; NACARATO, 2012, p. 196). O artigo também afirma a importância das situações de trocas de experiência para a prática do professor, que de forma contínua avalia e reconstrói suas certezas. Este trabalho, assim como outros citados anteriormente, colaborou para pensarmos nossa pesquisa com foco na prática argumentativa. As diferentes práticas utilizadas e formas de argumentação foram proveitosas para construirmos nosso objeto de estudo.

Da mesma forma, a dissertação de Lacerda (2010) aborda o valor da escrita e da discussão em sala de aula. O autor afirma que os professores deveriam questionar os alunos sobre suas próprias produções escritas, pois eles têm as melhores condições de informar seu pensamento. Sobre a explicação da resolução de um problema entre os alunos, o autor afirma que:

> A possibilidade de explicar a estratégia para o seu parceiro na resolução de problemas pode ajudar aquele que fez uso da mesma a um reexame de seu próprio processo, além de informar ao outro o que leu. A auto-regulação na atividade orienta os processos de escrita e de fala do aluno, pois esse passa a avaliar-se e informar o que compreendeu. Entendo que a comunicação estabelecida entre os alunos sobre as regras matemáticas na resolução de problemas possa ajudá-los a mudanças de pontos de vistas. (LACERDA, 2010, p. 74)

Complementando a discussão sobre comunicação entre os alunos, trazemos a pesquisa descrita no artigo de Luvison e Grando (2012), com o 5º ano do Ensino Fundamental. As autoras investigaram, na perspectiva da resolução de problemas, a mobilização e (re)significação dos conhecimentos matemáticos explorados em um contexto de leitura e produção escrita em situações de jogo. Este trabalho contribuiu para nossa discussão sobre argumentação, na medida em que traz os diferentes gêneros textuais na sala de aula e, para isso, utiliza o jogo por sua natureza interdisciplinar. As autoras defendem que:

> Pelos diferentes gêneros textuais, orais ou escritos, os sujeitos podem compreender e interiorizar conceitos, desenvolvendo seu pensamento e transformando-os. Quando os alunos expressam seu pensamento em linguagem matemática, compartilhando suas hipóteses, fazendo analogias e também reinterpretando para o contexto do jogo, existe uma troca, uma reflexão constante em torno das textualizações, o que é uma fase importante para o seu desenvolvimento.(LUVISON & GRANDO, 2012, p.161)

Sobre o registro escrito durante o jogo, as autoras afirmam que ele foi positivo para a mudança de olhar do jogador, ao fazer com que estes analisassem suas próprias estratégias, vivenciassem novas experiências e observassem e compartilhassem suas ideias, para aprimorar as jogadas e (re)significá-las.

Diferente dos trabalhos anteriores, a dissertação de Policastro (2010) não teve foco na aplicação de uma situação, mas sim na fase posterior à situação de sala de aula, ou seja, as “ressonâncias” (POLICASTRO, 2010) provenientes da aula. Porém, a escrita também está presente: os resultados da pesquisa indicaram que a discussão sobre a matemática que estão aprendendo, e que está refletida nas ressonâncias, parece ter mobilizado os educandos a buscar critérios para orientar as produções escritas, levando-os a procurar argumentos para encaminhar tais processos. Ainda, o autor afirma que a escrita em aulas de Matemática tem a capacidade de colocar o estudante no centro de sua própria aprendizagem, pois proporciona a ele a oportunidade de lidar com uma linguagem que, para ele, é natural para expressar seus pensamentos matemáticos.

O trabalho de Duro (2012) também ressalta a importância da argumentação com foco na oposição de ideias:

> O uso do conflito e da contra-argumentação na educação pode ajudar a desenvolver no sujeito a capacidade de assumir perspectivas diferentes frente a uma mesma situação. Essa perspectiva alheia desafia sua atual

> estrutura, podendo conduzi-lo à reorganização de suas estruturas cognitivas, em patamares superiores e, por essa, à reformulação de suas ideias. (DURO, 2012, p. 95/96)

Após essas diferentes pesquisas e conclusões sobre a escrita e a discussão na sala de aula, destacamos o estudo de Larraín e Freire (2012). Apesar do foco da pesquisa ser mapear, de forma quantitativa, as conversas em aula de acordo com dimensões conceituais, argumentativas e interacionais, a introdução do artigo com a discussão sobre que são argumentação e discurso argumentativo foi essencial para a construção da nossa fundamentação teórica, de forma que a traremos com mais detalhes no próximo capítulo. Ainda, mostram como a argumentação vem sendo utilizada na sala de aula, com uma explicação breve dos trabalhos de Howe (2010), Howe et al. (2007), Mercer et al. (2004), Mercer (2009), Asterhan y Scwartz (2007; 2009) e Nussban & Sinatra (2003), que mostram o efeito da discussão no desenvolvimento conceitual de estudantes do ensino fundamental à universidade.

Todos os trabalhos aqui comentados foram de grande valia para a nossa investigação e contribuíram para o seu desenvolvimento. Infelizmente, é surpreendente que, apesar da importância da argumentação na resolução de problemas de Matemática ser ressaltada em algumas das pesquisas que apresentamos, ainda sejam tão poucas as produções acadêmicas que discutam esse tema. São menos ainda quando temos como perspectiva teórica a Epistemologia Genética, de forma que nossa investigação pretende contribuir para essa discussão e para a educação matemática em geral. Seguimos, então, para as definições e perspectivas teóricas que orientam este trabalho.

2.2 Perspectiva teórica

Para tentarmos compreender como a argumentação pode contribuir no ensino e na aprendizagem de Matemática a partir da resolução de problemas, precisamos, em primeiro lugar, definir o que é “argumentação” e o que é “problema”. Para relacionarmos esses conceitos com a Epistemologia Genética, definiremos os conceitos de esquema, assimilação e acomodação e, após, traremos as contribuições das obras *A Tomada de consciência* (1977) e *Fazer e compreender* (1978b). A análise das produções acadêmicas nos conduziu ao trabalho de Macedo

(2010) sobre o erro e a discussão das pseudonecessidades (PIAGET, 1985), que finalizam o capítulo.

2.2.1 Resolução de problemas e argumentação

Argumentar é uma noção intuitiva, que, como podemos ver em nosso Estado da Arte, é utilizada com diversos sentidos. Jiménez-Aleixandre e Erduran (2008) afirmam que a argumentação é um termo polissêmico, que tem diferentes significados segundo a aproximação teórica de quem o concebe.

Em alguns trabalhos, a concepção de Eemeren e Grootendorst (1992 apud LARRAÍN; FREIRE, 2012) prevalece, onde a argumentação tem como característica principal a controvérsia e a discussão crítica de pontos de vista contrários. Nesse sentido, temos a definição de unidade argumentativa de Leitão (2000 apud LARRAÍN; FREIRE, 2012) como o conjunto de uma posição justificada (argumento), outra posição justificada (contra-argumento) e uma terceira posição (resposta), defendendo que quando não há nenhum desses elementos, não se caracteriza por discurso argumentativo.

Concordamos que a falta de todos os elementos não caracteriza um discurso argumentativo. Porém, ter pelo menos um deles, para nós, já é uma forma de argumentação, pois implica em ter um argumento, ou seja, uma ideia/concepção fundamentada em algo, seja esse fundamento correto/possível ou não. Assim, seguimos na definição mais abrangente de Larraín e Freire (2012), que consideram o discurso argumentativo como todo discurso em que aparece ao menos uma justificação ou demanda por ela. Ainda, a argumentação pode verificar-se em uma dimensão interpessoal ou no discurso de um mesmo falante.

Consideramos a demanda de justificativa uma forma de argumentação por desafiar o estudante a buscar elementos que deem suporte para uma ideia. Porém, não podemos menosprezar a importância da oposição de ideias: Larraín e Freire (2012) trazem que a presença da oposição explícita dá o impulso para processos de pensamento reflexivo no movimento de se defender dessa oposição. Assim, apesar da argumentação não exigir necessariamente uma ideia contrária, a presença da oposição é profícua para a discussão e, assim, a contra-argumentação. Logo, em nosso trabalho, prezamos tanto pela argumentação como a justificativa de uma ideia que presenciamos com os discentes explicando sua forma de resolver o problema; quanto pela argumentação como troca de ideias opostas, na discussão entre pares ou entre os estudantes e a pesquisadora, momento em que utilizamos os preceitos do Método Clínico que descreveremos.

Ao falarmos em “problema” e, consequentemente, em “resolução de problemas”, é importante trazermos no que se fundamentam as escolas brasileiras e, assim, o reflexo em nossa prática pedagógica. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998, p.41) definem que “um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado.”. Isto implica que a solução não está disponível no início, mas é possível construí-la.

Desta forma, a resolução de problemas pressupõe que o estudante consiga elaborar um ou vários procedimentos de resolução, comparar os seus resultados com os dos colegas e validar seus procedimentos. Assim, resolver problemas não se resume em compreender o que foi proposto e em dar respostas corretas, mas, sim, é necessário desenvolver as habilidades descritas acima. Como consequência, a importância da resposta correta cede lugar à importância do processo de resolução. (BRASIL, 1998).

Sobre os “problemas matemáticos”, Echeverría (1998), afirma que são as tarefas para as quais não existe um procedimento preestabelecido que possa trazer uma solução, ou seja aquelas que envolvem a utilização de algoritmos conhecidos, ou para as quais existem fórmulas. Para ser um problema, a pessoa que está resolvendo precisa encontrar alguma dificuldade, que leve à necessidade de questionar-se sobre qual caminho precisaria seguir para alcançar a meta. Contudo, a autora também apresenta que se pode considerar um problema pelo grau de novidade que a tarefa representa para o sujeito que a está resolvendo. A autora interpreta a solução de problemas matemáticos como um método e como um objetivo. Nas suas palavras:

> É um *método de aprendizagem* na medida em que grande parte do conteúdo da Matemática escolar trata da aprendizagem de habilidades,

> técnicas, algoritmos ou procedimentos heurísticos que podem ser usados em diversos contextos (cotidiano, científico, etc.). Para alcançar uma aprendizagem significativa desse tipo de técnicas, é necessário aprender a usá-las no contexto de diversos problemas. É um *objetivo da aprendizagem,* na medida em que não é possível aprender a solucionar problemas independentemente da aprendizagem de conceitos e conhecimentos de Matemática e que, ao mesmo tempo, como vimos, a solução de problemas exige o acionamento e a coordenação de muitos processos complexos. (ECHEVERRÍA, 1998, p. 63)

As ideias de Echeverría sobre “problema matemático” seguem a linha de Pozo (1998) sobre um problema de forma geral. O autor afirma que um problema é uma situação que não conseguimos resolver de forma mais ou menos imediata, que exige uma reflexão ou tomada de decisões sobre quais passos seguir. Desta forma, um problema se diferencia de um exercício na medida em que para este último dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam de forma imediata à solução.

Não obstante, um exercício se caracteriza por usar habilidades ou técnicas sobreaprendidas (POZO, 1998), isto é, que são rotinas automatizadas em função de uma prática contínua. De certa forma, estamos exercitando habilidades já adquiridas. Enquanto que um problema apresenta uma situação nova ou diferente da que já foi aprendida, necessitando de uma utilização estratégica das técnicas conhecidas. Importante salientar que, para a resolução de um problema, é necessário conhecer as técnicas que são utilizadas nos exercícios. Por exemplo, não adianta o estudante conseguir identificar uma situação nova como possível de resolver com uma subtração, se ele não consegue realizar uma subtração.

Pozo (1998) afirma que uma mesma situação pode representar um problema para uma pessoa, enquanto que, para outra, esse problema não existe. Isso pode acontecer porque a situação em questão não é de interesse para o sujeito ou porque ele possui mecanismos para resolvê-la com investimento mínimo de recursos cognitivos, reduzindo-a a um exercício. Desta forma, as questões selecionadas têm como objetivo serem problemas para os participantes, mas não temos essa garantia como vemos na fala de Pozo. Afinal, a trajetória escolar destes pode contextualizá-las como exercícios de repetição, algo que não temos controle, visto que não sabemos todos os tipos de questões que eles já realizaram em aula. Ainda, questões que achávamos ser de aplicação direta, acabaram por ser um problema para alguns sujeitos.

Assim, definimos problema para nosso trabalho como uma situação que exige: 1) reflexão e, assim, coordenação dos elementos envolvidos; e 2) tomada de decisões sobre as ações e operações que serão utilizadas para chegar a um resultado. Ao relacionarmos com a teoria piagetiana, a resolução de problemas é entendida como método e objetivo da aprendizagem da Matemática simultaneamente. Na perspectiva de Macedo (2010), do fazer e do compreender como sistemas solidários, nós fazemos, na medida em que compreendemos, e compreendemos na medida em que fazemos.

Concluímos com Pozo (1998), que afirma que saber resolver o problema não implica em conseguir verbalizar ou descrever o que fazemos. Essa dificuldade na verbalização ou descrição do procedimento não implica em não compreender o exercício, pois há outros fatores envolvidos do campo da interação social. Porém, essa característica estará presente em nosso trabalho na discussão da resolução e pode tornar o exercício em um problema.

Definidos o que são argumentação e problema para nós, seguiremos para as definições da Epistemologia Genética, que são necessárias para entendermos as relações entre fazer e compreender, que estão no cerne desta pesquisa.

2.2.2 Definições da Epistemologia Genética

Como queremos analisar a compreensão, nosso foco na Epistemologia Genética são os trabalhos sobre o conhecimento, do que Montangero e Maurice-Naville (1998, p. 68) chamam de "quarto período" da obra de Piaget. Porém, precisamos compreender os conceitos de esquema, assimilação, acomodação e adaptação para chegarmos lá.

Piaget (1978a) salienta que o importante para o conhecimento não é a sequência de ações consideradas isoladamente, mas sim o "esquema" dessas ações, isto é, o que nelas é geral e se pode transpor de uma situação à outra. O esquema não é absolutamente perceptível e é resultado direto da generalização das próprias ações e não da sua percepção. Montangero e Maurice-Naville (1998) apresentam que o conceito de esquema é uma síntese entre os aspectos estruturais e funcionais do conhecimento, na medida em que ele é uma totalidade suscetível de se inserir em estruturas maiores e, ao mesmo tempo, um instrumento de assimilação.

Como podemos ver, falar em esquemas implica falar em assimilação. Piaget (1978a) afirma que a inteligência é assimilação, na medida em que incorpora nos seus quadros todo e qualquer dado da experiência. Piaget fala em assimilação de diversas formas (assimilação reprodutora, recognitiva, generalizadora e recíproca), mas o que é comum entre todas é a ação do sujeito: dar sentido a um objeto é agir sobre ele e assimilá-lo a um esquema de ação.

Porém, nem sempre o esquema consegue assimilar o objeto e pode haver uma modificação do esquema para tal. Dizemos, então, que houve acomodação, que é o resultado das pressões exercidas pelo meio. Se a assimilação representa a ação do sujeito sobre o objeto, a acomodação é resistência do objeto ao sujeito. Logo, o esquema designa a forma do conhecimento que assimila os dados da realidade e que é suscetível de se modificar por acomodação a essa realidade. (MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1998). Os autores complementam a relação entre assimilação e acomodação e trazem a adaptação:

> O polo acomodador exprime a pressão do real e permite ao sujeito submeter-se às exigências do meio. Na medida em que se dissocia do pólo assimilador, ele desempenha um papel de delimitação do meio e de conquista da objetividade. Por esse fato, a acomodação tem um lugar evidente na experimentação e no desenvolvimento das explicações causais. Em realidade, esse polo acomodador está presente em toda atividade inteligente, já que ela se define precisamente por um equilíbrio entre a assimilação e a acomodação. (MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE,1998, p. 99)

Piaget (1978a) define que a adaptação intelectual é um estabelecimento de equilíbrio progressivo entre um mecanismo assimilador e uma acomodação complementar.

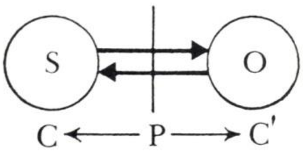
Essas definições são essenciais, visto que trabalhar com a resolução de problemas implica termos, constantemente, esquemas de ação que assimilam o objeto e se reformulam na acomodação desse objeto. Ainda, vimos que é o esquema aos quais os objetos são assimilados que dão sentido aos objetos, de forma que estes constituem a principal fonte dos conceitos. Observando o caráter de ação do esquema, estamos novamente relacionando o fazer com o compreender.

2.2.3 A ação e a compreensão

Como relatamos, nas suas investigações sobre a compreensão, Piaget pesquisou as relações entre o êxito na ação e a conceituação, ou seja, o fazer e o compreender. Ele pesquisou o êxito na ação de duas formas: 1) precoce, na obra *A Tomada de Consciência* (PIAGET, 1977); e 2) por etapas, na obra *Fazer e Compreender* (PIAGET, 1978b).

Na primeira obra, Piaget aborda a tomada de consciência, que, de forma simplificada, consistiria em compreender porque e como o êxito foi obtido na ação. Mas, como ela acontece? Na análise dos fatos, Piaget (1977) propõe que a tomada de consciência começa com a busca de um fim a partir dos dados de observação iniciais, que são o objetivo a alcançar e o conhecimento de seu desfecho como fracasso ou êxito. Indo além, ele propõe uma lei geral do conhecimento, onde a tomada de consciência não se constitui a partir do sujeito ou do objeto, mas sim da interação entre eles. O autor propõe uma representação com três elementos: sujeito (S), objeto (O) e a periferia (P).

Figura 2 – Esquema da interação sujeito objeto.



Fonte: PIAGET, 1977, p. 199.

Piaget define a periferia nem como o objeto e nem como o sujeito, mas, sim, como a reação mais imediata e exterior do sujeito em face do objeto, que consiste em utilizá-lo em conformidade com um objetivo (assimilá-lo a um esquema) e observar o resultado obtido (PIAGET, 1977). Desta forma, a tomada de consciência parte da periferia e orienta-se para os mecanismos centrais da ação do sujeito, representados no esquema por C, enquanto que o conhecimento do objeto orienta-se para suas propriedades intrínsecas, representadas por C'. Ao sabermos como ocorre a tomada de consciência, podemos pensar, então, em por que ela ocorre.

Na medida em que ela parte da busca de um objetivo, há uma constatação consciente de um êxito ou de um fracasso. Na ocorrência de um fracasso, procura-se estabelecer por que ele ocorreu. Então, o sujeito, a partir dos dados de observação relativos ao objeto, procura os pontos em que houve falha da adaptação do esquema ao objeto. Nesta etapa, podemos observar a existência das pseudonecessidades, que serão discutidas na próxima seção.

Ainda, a partir dos dados de observação relativos à ação, o sujeito analisa os meios empregados e procura correções ou substituições, se necessárias. Ou seja, o sujeito realiza um constante vaivém entre o objeto e a ação, e é por meio dele que a tomada de consciência se aproxima, por etapas, do mecanismo interno do ato e, portanto, estende-se da periferia P ao centro C (PIAGET, 1977). Duro (2012) sintetiza que a tomada de consciência permite ao sujeito retomar as suas ações e reconstruí-las em um novo patamar.

Se não há fracasso, então a tomada de consciência pode ocorrer por causa do próprio processo assimilador: ao assimilar o objeto a um esquema, o esquema dá sentido ao objeto e o esquema pode se tornar conceito e assimilação suscetível de evocações em extensão (PIAGET, 1977). Assim, para ocorrer tomada de consciência, não é necessário um fracasso da adaptação do esquema ao objeto ou um conflito entre o objetivo e o resultado (dados observáveis), pois no êxito ela também é possível pelo processo assimilador. Porém, o fato de ela ocorrer com êxito ou fracasso, não implica que sempre há tomada de consciência: por exemplo, o sujeito pode, de forma inconsciente, rejeitar ou deformar o dado de observação incômodo, e “recalcar” (PIAGET, 1977, p. 202) a fonte de conflito.

Imaginemos, a título de exemplo, que gostaríamos de estacionar um carro em uma vaga na rua no lado direito, de forma que usaríamos a marcha ré para entrar na vaga. Nesta situação, o movimento do veículo é contrário ao imposto à direção: girar a direção no sentido horário, implica fazer o veículo girar no sentido anti-horário para atingir o objetivo de entrar para virar à direita utilizando a marcha ré. Se perguntarmos para uma criança se o sentido do carro acompanha o sentido da direção, é possível que ela responda que sim. Ao mostrarmos que isso não é verdade, teríamos em um polo uma situação em que ocorre uma tomada de consciência a partir da interação da criança com o sistema de movimento do carro com a análise dos observáveis, a manipulação do objeto e a coordenação dos elementos do sistema. No outro polo, uma criança que recalca a fonte de conflito, dizendo que as rodas ou a direção estão indo em um sentido enquanto, na realidade, vão em outro. A resposta não necessariamente condiz com uma "má fé" do sujeito, pode ser um mecanismo inconsciente que é "mais simples" do que alterar um esquema de ação anterior.

Contudo, não temos apenas estes dois polos: poderíamos ter também situações intermediárias de compreensão, visto que a tomada de consciência é um movimento constante entre o objeto e ação, logo é um processo e não um momento. Ainda, ela não é uma simples leitura dos fatos, ela é uma reconstrução, que introduz novas características, sob a forma de ligações lógicas, e, na medida em que transforma o esquema de ação num conceito, ela consiste, essencialmente, numa conceituação (PIAGET, 1977).

No estudo dos êxitos precoces, conclui-se dois pontos: 1) a ação constitui um conhecimento autônomo (*savoir faire*), cuja conceituação se efetua somente por tomadas de consciência posteriores; e 2) essas tomadas de consciência seguem uma lei de sucessão que conduz da periferia para o centro, isto é, das zonas de adaptação ao objeto para atingir as coordenações internas das ações. Nos êxitos da ação por etapas, estudados no *Fazer e Compreender* (PIAGET, 1978b), essas duas constatações se verificam. O fato notável desses casos é que, a partir de certo nível, é possível observar a influência resultante da conceituação sobre a ação, o que já era hipótese no livro *A Tomada de Consciência* (PIAGET, 1977), mas impossível de se ver nos êxitos precoces.

Piaget (1978b) realiza experimentos com crianças e observa que, em relação aos sucessos elementares nos primeiros níveis, há atraso da conceituação sobre a ação, o que mostra a autonomia da ação. Aqui, a tomada de consciência parte dos resultados exteriores da ação em direção aos mecanismos centrais e inconscientes desta (coordenações gerais), passando neste caminho pela análise dos meios empregados. Nesta etapa, são reencontrados os resultados do *A Tomada de Consciência* (PIAGET, 1977).

Porém, a partir de certos níveis, observa-se que a ação é modificada pela conceituação e essa modificação da ação é construída pelas próprias ações. Por exemplo, no estudo da transmissão do movimento (PIAGET, 1978b, p.32), isto é, mover um objeto através da ação em outro que nele causa um efeito, a transitividade modifica a ação do sujeito. Contudo, ela é produto de dois fatores conjuntos, que são progressos devidos à regulação da ação e que, simultaneamente, fornecem a essas ações e a suas regulações duas novas dimensões, que são (1) uma certa capacidade de antecipação; e (2) uma regulagem mais ativa, não mais limitada às regulações automáticas por correções compensadoras. Esses dois fatores favorecem a tomada de consciência, pois ambos passam facilmente do nível do comportamento material para o da representação.

Em suma, de um lado há coordenações de movimentos (materiais e causais) e, do outro, conexões lógicas e implicativas, mas estas compõem uma mesma organização. Piaget (1978b) conclui, então, que a conceituação fornece à ação um reforço de suas capacidades de previsão e a possibilidade, em presença de uma dada situação, de dar um plano de utilização imediata, isto é, de uma forma geral, em um aumento do poder de coordenação e conceituação.

Na análise dos experimentos realizados, o autor (PIAGET, 1978b) classifica diferentes fases com coordenações progressivas de níveis bem distintos e espaçados de ação e conceituação: uma primeira fase, onde há atraso da conceituação sobre a ação; uma segunda fase, que é mais ou menos longa, onde a ação e sua conceituação são aproximadamente do mesmo nível e se efetuam trocas constantes entre as duas; e, finalmente, uma terceira fase, onde a conceituação fornece à ação mais do que apenas planos restritos e provisórios, que serão revistos e ajustados durante a execução: aqui a prática se apoia em teorias.

Vemos que Piaget (1978b) já distingue níveis entre a ação e a conceituação que podemos trazer para a resolução de problemas de Matemática. Em um primeiro momento, o estudante aciona um esquema e resolve o problema, mas não compreende. Em um segundo momento, com subfases distintas, há uma troca entre a ação e a conceituação, podendo o sujeito, através da conceituação, antecipar efeitos da ação. Em um terceiro momento, a conceituação direciona a ação e, a partir de resultados, é possível fazer constatações gerais, chegando, em certo ponto, a realizar deduções. Vemos, novamente, a interação entre sujeito e objeto neste processo, onde o esquema, a assimilação e a acomodação estão presentes. Pensar em interação e assimilação do objeto implica em pensar na abertura para os possíveis.

2.2.4 O possível e o necessário

Pensar em resolução de problemas é, de certa forma, pensar no possível e no necessário, na medida em que temos que refletir sobre todas as possibilidades de ação e as limitações impostas pelo contexto da questão. Fazer essa identificação, que nem sempre é de forma consciente, é essencial para o entendimento do problema e, assim, para a coordenação dos elementos envolvidos e, enfim, para a compreensão do problema e dos conceitos matemáticos nele envolvidos.

Piaget (apud BATTRO, 1978) define o possível como um prolongamento virtual das ações ou operações aplicadas a um conteúdo dado. Por exemplo, tendo duas cores diferentes de tinta e uma parede para pintar, há infinitas maneiras de cumprir essa tarefa: pode-se pintar a parede de apenas uma cor, ou com listras, ou com círculos, ou com flores etc. Pensar nos possíveis é pensar no universo de opções, dadas as condições da situação, ou seja, o possível é invenção e criação.

Piaget (1985) afirma que o possível não é algo observável, mas sim o produto de uma construção do sujeito em interação com as propriedades do objeto, mas inserindo-as em interpretações devidas às atividades do sujeito. Essas atividades determinam a abertura de possíveis cada vez mais numerosos, cujas interpretações são cada vez mais ricas.

Assim como o possível, o necessário não é um observável, mas sim um produto das composições inferenciais do sujeito (PIAGET, 1986). O necessário constitui a riqueza das integrações como reunião de qualidades distintas em um todo, enquanto que o possível exprime as diferenciações destas qualidades. No exemplo da pintura da parede, que citamos anteriormente, podemos impor que, com a mesma quantidade de cores cumpra-se também uma limitação (por exemplo, a parede deve ser toda de uma cor). Essa limitação implica em um número finito de possibilidades, a saber, duas. Isto é pensar no necessário, ou seja, não obrigatoriamente em limitar, mas, sim, em coordenar todas as informações da situação em questão (cores e forma de pintar) e caracterizar o que é preciso para resolver o que foi dado.

Mas, pensar além implica livrar-se de limitações, muitas vezes inconscientes ao sujeito. Essas limitações, que aparecem como algo que deve necessariamente acontecer, são o que Piaget chama de “pseudonecessidades” e aparecem constantemente na aula de Matemática: por exemplo, um quadrado desenhado com um vértice para baixo (◇) não é mais considerado quadrado, esquecendo-se das propriedades que o caracterizavam como tal inicialmente (e que não tem relação alguma com o sentido em que está desenhado). Aqui temos a pseudonecessidade de que todo quadrado deve ser representado com um dos lados paralelo ao plano horizontal (□).

Desta forma, a abertura para possíveis em uma situação consiste em se desprender das pseudonecessidades, podendo o sujeito imaginar variações no contexto em questão. Como lembram Montangero e Maurice-Naville (1998), nesse processo de pensar variações, a acomodação tem um papel essencial, visto que ela modifica os esquemas do sujeito.

Piaget traz que, do ponto de vista dos possíveis, “um erro corrigido pode ser mais fecundo para as aberturas ulteriores do que um sucesso imediato” (1985, p. 8). Neste sentido, analisar o erro pode ser mais produtivo para a identificação e entendimento das pseudonecessidades para, ao nos desprendermos delas, construirmos os possíveis e o necessário e modificarmos esquemas. Na aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas, isso significa compreender as características do problema, o que é mais importante do que apenas um acerto.

Sobre a análise do erro, Macedo (2010) afirma que, devido à compreensão, coordenar o que é da ordem do geral, ou seja, que se aplica a um conjunto de situações, ela não se limita a um espaço e tempo. Logo, nesse contexto, o erro tem a importância de corresponder a uma contradição, conflito ou falha na teoria (hipótese) que explica determinado fenômeno.

Nas palavras do autor, o erro corresponde “às lacunas em que aquilo que a criança diz não se articula com o que faz ou em que aquilo que diz em uma situação não se coordena com o que diz na situação seguinte.” (MACEDO, 2010, p. 77). Aqui, vemos a importância do erro para tentar compreender as relações entre o fazer e o compreender. Desta forma, o estudo do erro, com foco nas pseudonecessidades, nas aberturas de possíveis e na compreensão do necessário fará parte de nossa análise dos dados.

Enfim, definimos o que é “argumentar” e o que são “problemas” para compreendermos e definirmos nossa questão, bem como os fatores envolvidos na nossa pesquisa. Trouxemos definições iniciais da teoria piagetiana para entendermos a relação sujeito e objeto e compreendermos com discutiremos as relações entre o fazer e o compreender, tão presentes neste trabalho. Abordamos o possível e o necessário, tão intrincados no fazer e no compreender e que aparecem constantemente na resolução de problemas. Finalizamos problematizando o erro, que também faz parte da resolução de problemas e que pode evidenciar as pseudonecessidades do sujeito que, ao desatar-se delas, pode cogitar variações e compreender elementos novos, o que é um passo à frente no sentido da compreensão.

Tendo delineado nosso tema de pesquisa, o universo em que ela está inserida e a teoria que utilizaremos para compreender nosso objeto de estudo, a argumentação na resolução de problemas, avançamos para a metodologia. Nela explicaremos os procedimentos que definem a pesquisa e como coletaremos nossos dados.

3 METODOLOGIA

Após termos definido, no capítulo anterior, o aporte teórico, aqui descreveremos a parte metodológica deste trabalho, isto é, os procedimentos de nossa pesquisa de campo a fim de encontrar dados para responder se e como a argumentação pode contribuir no ensino e na aprendizagem da Matemática a partir da resolução de problemas. Começaremos apresentando e justificando nossa escolha por um estudo de casos múltiplos, apontando os delineamentos iniciais da pesquisa e os procedimentos que validam a qualidade do projeto de pesquisa segundo Yin (2010). A seguir, falaremos sobre os participantes da pesquisa e dos cuidados éticos, finalizando com os procedimentos adotados nos encontros para coleta de dados, descrevendo o Método Clínico piagetiano utilizado nas entrevistas e os procedimentos de sistematização dos dados.

3.1 Delineamentos da pesquisa

Como refletiremos sobre as relações entre argumentação, resolução de problemas e ensino e aprendizagem dentro do contexto de sala de aula, optamos por realizar um Estudo de Casos. O Estudo de Casos é uma investigação empírica, que investiga um fenômeno contemporâneo profundamente e em seu contexto de vida real, em especial quando os limites entre o fenômeno e o contexto não são claramente evidentes (YIN, 2010). Escolhemos realizar um estudo de casos múltiplos, pois estes são interessantes para se produzir uma lógica de replicação: buscaremos reproduzir resultados contrastantes por razões previsíveis, ou seja, uma replicação teórica (YIN, 2010), entre um caso com Ensino Fundamental II e outro com o Ensino Médio, na mesma escola.

Em síntese, Yin (2010) afirma que um projeto de pesquisa de estudo de casos deve descrever: 1) as questões do estudo; 2) as proposições, se houver; 3) a(s) unidade(s) de análise, ou seja, o que é o caso; 4) a lógica que une os dados às proposições; e 5) os critérios para interpretar as constatações. Entendemos que a questão deste trabalho implica observar quais as relações entre a resposta obtida e a argumentação sobre a resolução de problemas, feita individualmente ou em grupo. Para tal, temos como proposição que, na argumentação, é possível verificarmos o raciocínio subjacente à resolução que não está à mostra apenas com o resultado final.

Unindo a leitura das obras *A Tomada de Consciência* (PIAGET, 1977) e *Fazer e compreender* (PIAGET, 1978b), onde observamos os elementos relacionados ao êxito na ação e como a compreensão se relaciona com a ação, construímos nossas hipóteses. Pensando na resolução de problemas e em todas as combinações possíveis de êxito na ação ou na compreensão, acreditamos encontrar as seguintes situações:

- situação 1: O sujeito obtém o resultado correto na ação e a argumentação evidencia a compreensão dos conceitos envolvidos;
- situação 2: O sujeito obtém o resultado correto na ação, mas a argumentação evidencia um método errôneo de resolução ou alguma incompreensão dos conceitos envolvidos;
- situação 3: O sujeito obtém um resultado incorreto na ação ou não consegue resolver e a argumentação é coerente com o erro, evidenciando onde ele ocorreu, seja de método ou conceitual;
- situação 4: O sujeito obtém um resultado incorreto na ação ou não consegue resolver a questão, mas a argumentação evidencia compreensão dos conceitos envolvidos ou de algum método possível ou os erros cometidos, podendo acarretar na correção da resolução.

Analisando cada um dos problemas propostos para os estudantes, discutiremos os resultados obtidos e o que a argumentação escrita e a argumentação oral[6] evidenciaram dos procedimentos, conceitos e erros durante a resolução. Com esta análise, verificaremos em cada questão se alguma das quatro situações acima ocorre, e, em caso afirmativo, separaremos os participantes nestas. Também observaremos, caso o estudante não consiga resolver um problema ou realize um erro na resolução, se a argumentação com o pesquisador ou com o grupo e, assim, a observação dos empecilhos ou erros na resolução, levará à tomada de consciência. Não obstante, analisaremos se a argumentação oral apresenta mais elementos do que a argumentação escrita para a análise dos procedimentos, conceitos e pseudonecessidades utilizados pelo estudante.

[6] A argumentação oral tanto entre sujeito e pesquisadora e entre o grupo e a pesquisadora.

Assim, o nossa unidade de análise é a argumentação de estudantes do Ensino Fundamental II na resolução de problemas. Unindo estas evidências com a teoria definida no capítulo anterior, pretendemos compreender as relações entre a ação e compreensão e quais as implicações da existência ou não das situações acima na sala de aula. Assim, observaremos qual a contribuição que a argumentação na resolução de problemas pode ter no ensino e na aprendizagem de Matemática.

Porém, ter as características necessárias para um projeto de pesquisa não garante a sua qualidade. Logo, Yin (2010) aponta quatro procedimentos para tal, aqui apresentados juntamente com a fase da pesquisa em que devem ser aplicados: 1) validade externa (projeto); 2) confiabilidade (coleta); 3) validade do constructo (coleta); e 4) validade interna (análise).

A validade externa consiste em saber se as descobertas do estudo são generalizáveis, além do estudo de caso imediato. Estamos trabalhando com a generalização analítica (YIN, 2010), onde o investigador procura generalizar um conjunto determinado de resultados a alguma teoria mais ampla. Para podermos efetuá-la, utilizamos a replicação, para que nossos resultados forneçam forte apoio à teoria, mesmo que mais replicações não tenham sido feitas. Assim, nossa unidade de análise, que é a argumentação de estudantes do Ensino Fundamental II, será replicada com o Ensino Médio, a fim de compararmos os resultados.

A confiabilidade implica em tornar as etapas da coleta de dados o mais operacionais possível. Com isso, pretende-se possibilitar que outro pesquisador consiga seguir exatamente os mesmos procedimentos descritos em nosso trabalho e conduzir o mesmo estudo de caso novamente, chegando às mesmas constatações e conclusões. Para tal, descreveremos na seção 3.4 nossos procedimentos.

Yin (2010) caracteriza a validade do constructo como a identificação das medidas operacionais corretas para os conceitos que estão sendo estudados, ou seja, desenvolver um conjunto suficientemente operacional de medidas para deixar claros os julgamentos para a coleta de dados. Na seção 3.5, apresentaremos nossos procedimentos de sistematização de dados e nossos critérios de seleção para análise. Não obstante, o autor afirma que uma tática para aumentar a validade do constructo é a utilização de várias fontes de evidências. Tal tática foi utilizada em nossa pesquisa, onde tivemos como fontes de evidência o esboço escrito da resolução, a explicação escrita da resolução, a arguição individual ou em grupo e as anotações da pesquisadora. Cabe ressaltar que, apesar de não termos essas fontes em todas as questões, temos pelo menos duas delas em cada problema.

Por fim, a validade interna busca o estabelecimento da relação causal, pela qual se acredita que determinadas condições levem a outras condições. Em nosso trabalho, consiste em construir a explanação, não com base em inferências, mas sim no que foi diretamente observado, permeado pela teoria utilizada nesta pesquisa. Yin (2010) apresenta que esta explanação final é provavelmente resultado de uma série de "iterações" (p. 170), isto é, uma sequência constante de construção de proposição, comparação das descobertas, revisão da proposição, comparação com outras características do caso e comparação entre os casos, repetindo esse processo quantas vezes for necessário.

O autor também aponta que o estabelecimento de um banco de dados e o encadeamento das evidências são práticas que colaboram para a construção da explanação. O encadeamento de evidências consiste em estabelecer um caminho entre as questões iniciais da pesquisa e as conclusões do estudo de casos, de forma que um observador externo seja capaz de traçar os passos em qualquer direção. Essa prática, assim como as iterações, foram utilizadas em nossa análise de dados, como poderá ser visto no capítulo a seguir. Determinada a metodologia de trabalho, passamos para a prática, começando pelos participantes.

3.2 Participantes

Para a escolha da escola que participou do projeto, foi utilizado um critério de conveniência, ao optarmos por uma escola conhecida pela pesquisadora e que é aberta para projetos e pesquisas[7]. À direção foram explicadas as diretrizes do trabalho e discutimos, juntamente com os professores dos anos de nosso interesse, sobre as possibilidades existentes para a coleta. Após o acordo com o os

[7] Para preservar a identidade dos participantes, omitimos o nome da instituição.

professores, a Carta de Apresentação e Autorização (Apêndice A) foi assinada pela direção e foi entregue à escola o projeto de dissertação com as modificações realizadas após a sua defesa, em 2013.

Para este trabalho, foi realizada uma coleta de dados com discentes dos 6° e 7° anos do Ensino Fundamental II e do 3° ano do Ensino Médio. Buscamos estudantes de diferentes idades e etapas de desenvolvimento para a replicação teórica, por acreditar que estes aspectos podem ser determinantes para a sua prática argumentativa e por possibilitar diferentes tipos de evidências a partir das proposições iniciais da pesquisa. Não obstante, o histórico de aprendizagem Matemática pode também interferir na realização da atividade, pois, tendo definições, conceitos e procedimentos diferentes, os estudantes podem utilizar distintas formas para responder a um mesmo problema.

A escola concordou que a coleta de dados do Ensino Fundamental II fosse realizada na *Assessoria de Leitura e Escritura*. A assessoria tem como objetivo trabalhar com a leitura e a escritura em diferentes disciplinas da grade curricular, sendo os discentes divididos entre os professores de cada área. Cabe salientar que não participamos da separação dos estudantes nas assessorias e os indicados para a área de Matemática não possuíam dificuldade nem com esta disciplina, nem com leitura e escrita, sendo o objetivo dos encontros os estudantes trabalharem com interpretação e resolução de problemas. Cada assessoria tinha duração de dois períodos seguidos (45 minutos cada) durante a manhã e compunha a grade curricular obrigatória. A professora titular nos pediu que os estudantes recebessem trabalhos para casa durante os encontros.

A pesquisa com o Ensino Médio foi realizada na *Oficina de Resolução de Problemas de Matemática: ENEM e Vestibular* que a escola ofereceria em horário extraclasse durante à tarde para discentes do 2° e 3° anos do Ensino Médio e também era composta de dois períodos em sequência. A participação dos estudantes em alguma oficina é compulsória, mas estes optavam por aquela pela qual tinham mais interesse. Importante ressaltar que, apesar de a Oficina ser direcionada para resolução de questões do ENEM e de vestibulares, não saímos de nosso foco de estudo, apenas selecionamos problemas destes exames. Ainda, acreditamos que por ter esse foco, nosso público procurava aprofundar conteúdos já trabalhados, o que foi constatado com a discussão no primeiro encontro. Ou seja, nem na Assessoria e nem na Oficina trabalhamos com estudantes que possuíam dificuldade em Matemática a ponto de interferir no andamento da pesquisa.

O grupo do Ensino Fundamental II possuía treze estudantes, dos quais dez entregaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) (Apêndices B e Apêndice C) assinado e participaram até o último encontro, com algumas faltas durante estes[8]. O grupo do Ensino Médio possuía onze discentes, todos do 3°ano. Destes, nove entregaram o Termo e participaram até o último encontro[9]. Desta forma, totalizamos 19 participantes observados, sendo dez em um caso e nove em outro caso. Ressaltamos que tal quantidade de participantes é considerada adequada por Delval (2002) para a condução do Método Clínico.

3.3 Cuidados éticos

Os estudantes foram convidados a participar da coleta de dados e, de forma alguma, a participação era obrigatória. A pesquisadora realizou o convite no primeiro encontro, momento em que os discentes receberam um TCLE direcionado aos seus responsáveis, visto que todos os participantes eram menores de idade, que foi assinado por estes e pelos estudantes. Cada participante recebeu uma via com os dados da pesquisadora, da orientadora e os telefones do PPGEdu ao qual são vinculadas caso desejarem entrar em contato.

Todos os participantes eram livres para retirar seu consentimento a qualquer momento, se assim o quisessem, sem qualquer penalização ou prejuízo tendo em vista os riscos inerentes aos instrumentos utilizados, como enfado ou constrangimento. A preservação da identidade dos mesmos está assegurada através da identificação dos participantes por meio de código, apenas identificando se estes são do Ensino Fundamental II (por exemplo, estudantes F1, F2 etc.) ou se

[8] Dois alunos participaram até o final, mas decidiram por não entregar autorização e não serão analisados. Um aluno não quis participar da pesquisa desde o início, mas realizou algumas atividades que não fazem parte dos dados coletados.

[9] Um aluno participou de algumas atividades, mas não entregou autorização, de forma que os dados não constarão na pesquisa. Um aluno compareceu apenas ao primeiro encontro e, após, trocou de oficina.

são do Ensino Médio (M1, M2 etc.). Como não pretendemos realizar distinção de gênero entre os participantes, utilizaremos como padrão o artigo masculino. A pesquisadora será identificada nas transcrições dos áudios por “P”.

O registro das evidências encontradas ficarão sob a guarda da pesquisadora por um período de cinco anos. A pesquisadora acordou com os envolvidos na pesquisa (estudantes, responsáveis e professores da escola) um encontro para apresentação e discussão dos resultados obtidos. Esses resultados serão utilizados para fins específicos da pesquisa e serão divulgados em eventos e revistas científicas.

3.4 Procedimentos

Nos encontros, os estudantes foram convidados a resolver questões de Matemática nas quais a prática argumentativa estava presente, tanto de forma escrita quanto de forma oral. Isto é, os discentes resolveram questões onde, além de encontrar o resultado obtido, deveriam explicar para os colegas ou para a pesquisadora ou escrever para um sujeito indeterminado[10] qual o processo utilizado para encontrar o resultado, independente de este estar correto ou não. Para selecionarmos os problemas propostos, discutimos com as professoras das turmas quais os conteúdos que já haviam sido trabalhados e questionamos sobre as possíveis dificuldades em relação à Matemática.

A fim de obtermos mais informações sobre os conteúdos que poderíamos utilizar com o Ensino Fundamental II, realizamos, no primeiro encontro, uma atividade com questões de Matemática elementar (Apêndice D). Nesta lista, colocamos exercícios de repetição do tipo “calcule” e “resolva” sobre operações básicas com números naturais, frações e números decimais e também histórias matemáticas. A partir deste material, descartamos questões que necessitassem o uso de frações e números decimais, pois percebemos dificuldades nestes tópicos. É importante salientar que, como será discutido neste trabalho, o fato de terem obtido sucesso nas questões de histórias matemáticas e de números naturais não garante

[10] O “sujeito indeterminado” foi identificado como um colega, mas não especificamos alguém do grupo. É importante termos consciência de que o fato do texto ser direcionado para algum colega pode ter influenciado nos termos utilizados e na forma de expressão das ideias.

que os participantes compreendam esses temas. Optamos por trabalhar questões do nível 1 da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), pois correspondem aos conteúdos e a raciocínios lógico-matemáticos dos anos com os quais trabalhávamos no Ensino Fundamental II. Desta forma, tivemos questões sobre operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão), propriedades e definições de números naturais, lógica elementar e raciocínio combinatório.

Priorizamos, no Ensino Fundamental II, questões de lógica, pois exigem raciocínio dedutivo e "propiciam uma experiência rica para o desenvolvimento de operações de pensamento como previsão e checagem, levantamento de hipóteses, busca de suposições, análise e classificação." (SMOLE, 2001, p. 114). O autor complementa que as estratégias de resolução para problemas de lógica, como a tentativa e erro, o uso de tabelas, criação de diagramas etc. são importantes. Por essas características e por não exigirem algum conteúdo de Matemática escolar, consideramos que esses problemas seriam interessantes para analisarmos a resolução e a argumentação dos estudantes.

Os conteúdos das questões trabalhadas com o Ensino Médio foram discutidos com a professora responsável pela oficina, bem como com os estudantes, de acordo com os seus interesses. Como a oficina pretendia trabalhar com resolução de problemas de ENEM e vestibular, selecionamos questões do ENEM de 2010 a 2013 e dos vestibulares da UFRGS, da Pontifícia Universidade Católica (PUC), da Escola Superior de Propaganda e Marketing (ESPM) e do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Para fins comparativos, repetimos a aplicação de algumas questões do Ensino Fundamental II com o Ensino Médio. Assim, os conteúdos trabalhados com Ensino Médio foram porcentagem e regra de três, lógica, raciocínio combinatório, transformação de unidades de medidas, desenho de gráficos e elementos (imagem, domínio e período) de funções seno e cosseno, geometria plana e geometria espacial.

Para decidirmos a quantidade de encontros que seriam realizados, levamos em consideração a sugestão da banca do projeto de dissertação de, pelo menos, cinco encontros e validade científica sobre a quantidade de evidências para a realização da pesquisa. Yin (2010) diz que em um relatório de um estudo de casos devem ser apresentadas evidências suficientes para que o leitor confie que o pesquisador entende do assunto que está sendo abordado e que se saturou nos aspectos do caso. Assim, na medida em que iniciamos a análise dos dados durante a coleta, verificamos que as quatro situações descritas na seção 3.1 começaram a se repetir, de forma que optamos por realizarmos sete encontros de dois períodos cada (totalizando 14 períodos de 45 minutos cada) com cada caso. Após a análise das atividades realizadas no último encontro com o Ensino Fundamental II, a pesquisadora voltou à escola e entrevistou os participantes individualmente, em outro espaço, que não a sala de aula, totalizando, neste caso, sete encontros com o grupo e uma entrevista individual.

Os encontros, as datas de realização, a descrição das atividades realizadas e os dados obtidos em cada um estão discriminados nos quadros abaixo.

Quadro 15 – Encontros da Assessoria de Leitura e Escritura – 6° e 7° anos do Ensino Fundamental II.

ENCONTRO	DATA	DESCRIÇÃO	DADOS
Encontro 1	02.04.14	Conversa inicial de apresentação da pesquisa e entrega dos TCLE (Apêndice B).	-
		Conversa das impressões e sentimentos sobre a disciplina de Matemática.	• Anotações da pesquisadora.
		Resolução individual de uma lista de atividades (Apêndice D).	• Escrito (individual). • Áudio da resolução (individual). • Anotações da pesquisadora.
Encontro 2	09.04.14	Resolução individual das questões 1 e 5.	• Escrito (individual). • Áudio da resolução (individual). • Anotações da pesquisadora.
Encontro 3	16.04.14	Arguição da questão 1 da aula anterior.	• Áudio arguição (individual). • Anotações da pesquisadora.
		Resolução da questão 6, individualmente, e depois discussão em duplas.	• Escrito (individual e grupo).
		Resolução da questão 3 individualmente.	• Escrito (individual).
Encontro 4	23.04.14	Duplas do encontro anterior analisando a resolução escrita da questão 6 feita pelos colegas e fazendo correções.	• Escrito (grupo). • Áudio da discussão (grupo). • Anotações da pesquisadora.
		Arguição de algumas resoluções da questão 3.	• Áudio da arguição (individual). • Anotações da pesquisadora.
Encontro 5	30.04.14	Resolução em grupo de questões diferentes das demais (2 e 7) e, depois, explicação para os outros.	• Escrito (grupo). • Áudio da discussão (grupo). • Anotações da pesquisadora.
		Arguição de algumas resoluções da questão 3.	• Áudio da arguição (individual). • Anotações da pesquisadora.

Encontro 6	07.05.14	Jogo “Enciclopédia”: resolução de charadas (questões 8, 9 e 10) individualmente e votação da melhor resposta.	• Escrito (individual). • Anotações da pesquisadora.
Encontro 7	14.05.14	Conversa sobre o jogo do encontro passado e divulgação dos resultados.	-
		Discussão da questão 3 com todo o grupo.	• Áudio da discussão (todos). • Anotações da pesquisadora.
		Resolução individual de folha com as questões 11, 12, 13, 14 e 15.	• Escrito (individual).
Entrevista	11.06.14	Arguição individual da atividade do último encontro.	• Áudio da arguição (individual). • Anotações da pesquisadora.

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Quadro 16 – Oficina de Resolução de Problemas: ENEM e vestibular – 3° ano EM.

ENCONTRO	DATA	DESCRIÇÃO	DADOS
Encontro 1	02.04.14	Conversa inicial de apresentação da pesquisa e entrega dos TCLE (Apêndice C).	-
		Discussão sobre a prova da UFRGS e do ENEM.	-
		Folha com as questões 16, 17 e 18.	• Escrito (individual). • Áudio da resolução (individual). • Anotações da pesquisadora.
Encontro 2	09.04.14	Correção dos exercícios do encontro anterior.	-
Encontro 3	16.04.14	Resolução individual da questão 4 e 19.	• Escrito (individual). • Áudio da resolução (individual). • Anotações da pesquisadora.
Encontro 4	23.04.14	Resolução em dupla das questões 20, 21 e 22.	• Escrito (grupo). • Áudio da resolução (grupo). • Anotações da pesquisadora.
Encontro 5	30.04.14	Resolução em grupo das questões 23 e 24.	• Escrita (grupo). • Anotações da pesquisadora.
		Resolução individual da questão 3 do Ensino Fundamental II.	• Escrita (individual). • Áudio da arguição (individual). • Anotações da pesquisadora.
		Resolução individual e discussão no grupo da questão 7 do Ensino Fundamental II.	• Escrita (individual). • Áudio da discussão (grupo). • Anotações da pesquisadora.
		Arguição individual da questão 4.	• Áudio da arguição (individual). • Anotações da pesquisadora.
Encontro 6	07.05.14	Duplas do encontro passado analisando a escrita dos colegas e fazendo correções (questões 23 e 24).	• Escrita (grupo). • Anotações da pesquisadora.
		Arguição da questão 3.	• Áudio das arguições (individual). • Anotações da pesquisadora.
-	14.05.14	Passeio escolar.	-

-	21.05.14	Conselho de Classe.	-
Encontro 7	28.05.14	Resolução das questões 25, 26, 27, 28 e 29.	• Escrita (grupo). • Áudio da resolução (grupo). • Anotações da pesquisadora.
		Resolução das questões 14 e 15 do Ensino Fundamental II.	• Escrita (individual).

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Acreditamos que a resolução individual ou em grupo possui características diferentes, pois podem entrar em jogo o respeito unilateral e possibilidade de respeito mútuo, respectivamente. Não abordaremos as particularidades da situação em grupo, mas realizamos ambas as atividades e as analisamos seguindo o mesmo critério.

A arguição individual e a intervenção da pesquisadora nos grupos têm como base o Método Clínico de Piaget. O Método Clínico é uma estratégia de investigação, criada por Piaget a partir da clínica médica, a qual Juan Delval (2002) realizou uma investigação das suas características ao longo dos trabalhos de Piaget. Delval (2002) afirma que Método não foi sempre igual, mas sim Piaget foi adaptando-o aos novos problemas e temas que abordava ao longo das suas investigações desde o seu início, em 1921 (PIAGET, 1921). Porém, a essência do Método sempre se manteve ao utilizar situações que tentassem revelar a forma de pensamento dos sujeitos.

Delval (2002) salienta que, em relação à clínica utilizada pela medicina, a novidade no Método Clínico é o fato de utilizá-lo como um método para o estudo dos "indivíduos normais em evolução" (p. 70). Um grande mérito de Piaget foi transformar um método, que antes era destinado ao diagnóstico individual, em um procedimento geral, para investigar o funcionamento da mente humana. O cerne do método está na resposta às ações do sujeito. Nas palavras do autor:

> A essência do método consiste na intervenção constante do experimentador em resposta à atuação do sujeito, com a finalidade de descobrir os caminhos que segue seu pensamento, dos quais o sujeito não tem consciência e que, portanto, não pode tornar explícitos de maneira voluntária. Por isso, essa intervenção é orientada pelas hipóteses que o experimentador vai formulando acerca do significado das ações do sujeito. (DELVAL, 2002, p. 53)

Assim, o Método Clínico se caracteriza por ser uma entrevista realizada por meio de perguntas, para investigar como as crianças pensam, percebem, agem e sentem. Procura-se descobrir “o que não é evidente no que os sujeitos fazem ou dizem, o que está por trás da aparência de sua conduta, seja em ações ou palavras” (DELVAL, 2002, p. 67). Os procedimentos utilizados são o que Delval ressalta como característica principal do Método e que o diferencia de outros, que é essa intervenção do experimentador em resposta às ações ou explicações do sujeito.

Para tal, são realizadas perguntas, a fim de compreender como e por que o sujeito agiu de uma maneira específica e também confrontar essa conduta com outra distinta, buscando a coerência ou contradição das respostas pela contra-argumentação. Assim, a contra-sugestão é considerada dentro do Método como “uma estratégia útil quando não conseguimos esclarecer as ideias do sujeito ou não estamos seguros de sua firmeza ou de que tenham sido sugeridas por nossas perguntas” (DELVAL, 2002, p. 146).

Não realizamos uma replicação literal, mas mantivemos seus princípios através da criação de situações (os problemas que eram resolvidos) e entrevistas com perguntas, a fim de instigar o questionamento dos estudantes e promover a discussão, como, por exemplo:

- Como você chegou a esta resposta?
- Por que você utilizou essa forma de resolução?
- Conheço outro estudante que resolveria esta questão de forma diferente. O que você acha disso?
- Outro colega chegou na resposta tal (diferente da obtida pelo entrevistado). O que você acha disso? Você acha que é possível? Como você acha que ele chegou a este resultado?

Escolhemos o Método Clínico por acreditarmos que esta interação constante durante a entrevista é profícua para procurarmos e observamos a forma de pensamento dos estudantes. Não obstante, acreditamos, como Delval (2002), que a contra-sugestão é propícia para criar situações de desequilíbrio no sujeito e para apresentar-lhe hipóteses, bem como dar-lhe a chance de testá-las.

Delval (2002) aponta que no Método Clínico o experimentador procura analisar o que está acontecendo e esclarecer seu significado durante a entrevista, bem como criar hipóteses e fazer intervenções para comprová-las imediatamente. Assim, o Método exige que a intervenção do experimentador seja flexível e sensível ao que o sujeito está fazendo. Não obstante, Yin (2010) traz como características de um bom pesquisador ser um bom ouvinte, assimilando grandes quantidades de novas informações imparcialmente e não somente através da modalidade auditiva, mas por múltiplas modalidades (fazer observações intensas, sentir o que pode estar acontecendo etc.). Ainda, ter uma noção clara dos assuntos do estudo, entendendo a finalidade da investigação e os aspectos teóricos é necessário, pois, sem isto, é possível que o pesquisador perca indícios importantes. Neste sentido, Yin (2010) alega que o pesquisador deve ser capaz de interpretar a informação à medida em que está sendo coletada e verificar imediatamente se há necessidade de evidências adicionais.

Vemos que ambos os autores ressaltam as características importantes a desenvolver, e nós as desenvolvemos durante a pesquisa. Verificamos, em diversos momentos, a dificuldade de coordenar todos os elementos presentes na coleta de dados mantendo-se o máximo possível dentro do planejado para as intervenções. Buscamos cumprir os itens descritos pelos autores, através de um constante processo de questionamento durante a coleta dos dados, sempre tendo em mente a nossa perspectiva teórica. Porém, este não é um trabalho simples, na medida em que temos que formular novas perguntas, não previstas, tentando seguir o Método Clínico, bem como lidar com os outros grupos trabalhando simultaneamente.

Nosso ambiente de investigação era um ambiente agitado e com barulho, em função das discussões, com diversas situações ocorrendo simultaneamente, o que pode implicar em dados que não puderam ser coletados e momentos em que poderíamos ter feito outras perguntas ou evitar interrupções. Porém, de forma geral, os participantes colaboravam com a coleta ao cumprirem o que era pedido pela pesquisadora e ao manterem silêncio durante as gravações dos áudios. Os ruídos que pudessem atrapalhar nas transcrições foram removidos com uso do programa de edição *Audacity*[11].

Tendo em vista nosso intuito de trazer a pesquisa para a sala de aula, acreditamos que nosso trabalho se manteve fiel ao contexto da vida real de nosso objeto de estudo. Não obstante, ao final da pesquisa, conseguimos olhar para nossos procedimentos e ver como o tornar-se pesquisador é um processo interminável, de forma que a prática de pesquisar e a análise contínua do nosso trabalho contribuam para a melhoria das habilidades descritas por Yin (2010).

3.5 Procedimentos de sistematização dos dados

Para explicarmos como realizamos a coleta, descreveremos aqui, de forma geral, os procedimentos de sistematização dos dados. Em alguns encontros, realizamos mais de uma arguição ou escrita, todas seguindo os procedimentos aqui descritos[12].

1) Seleção da questão
   a. Escolhíamos a(s) questão(ões) de acordo com o nível de dificuldade e conteúdo matemático[13].
2) Resolução e escrita
   a. Os participantes recebiam uma cópia do enunciado da questão e a resolviam individualmente. No trabalho em grupo, cada participante recebia uma cópia do enunciado e, num primeiro momento, refletia individualmente sobre a resolução; após, o grupo se reunia, discutia e resolvia conjuntamente (dentro do possível, estas discussões foram gravadas).

---

[11] Disponível gratuitamente em http://audacity.softonic.com.br/.

[12] No Encontro 4, do Ensino Fundamental II, onde os alunos analisaram e corrigiram a escrita de outros colegas, após a digitalização da questão, todas as respostas foram transcritas pela pesquisadora no computador para que os participantes não identificassem a autoria.

[13] As questões foram selecionadas previamente à oficina, mas, de acordo com as dificuldades encontradas na resolução e interesse dos estudantes por algum conteúdo específico (principalmente no Ensino Médio), algumas questões foram eliminadas e outras adicionadas ao planejamento. Ainda, como a análise dos dados iniciou simultaneamente à realização da oficina, conteúdos que geraram mais discussões e resultados distintos foram utilizados novamente, como o caso do pensamento combinatório e raciocínio lógico.

b. Durante a resolução das questões, tiramos fotos dos desenhos e das escritas antes da resposta final, se fosse necessário para uso posterior.
c. Perguntávamos se os participantes desejavam uma folha em branco ou com linhas para a escrita da resolução. Entregávamos tal material (metade de uma folha A4), que era confeccionado antes da oficina.
d. Se o participante/grupo tivesse dificuldade na resolução e chamasse a pesquisadora, tal conversa era gravada.
e. Após a escrita, o enunciado e a folha com a resolução eram entregues à pesquisadora.

3) Digitalização do material escrito
   a. Digitalizamos e editamos os materiais coletados, tirando a identificação dos participantes e colocando código no nome do arquivo para identificação pela pesquisadora.

4) Arguição
   a. Após, realizávamos a arguição, que era gravada. Nas atividades individuais, a arguição era realizada no encontro seguinte (uma semana depois) onde, primeiro, apresentávamos o enunciado novamente e pedíamos que o participante o lesse. A seguir, entregávamos a resolução escrita por ele e pedíamos que a lesse em voz alta. Neste momento, começávamos a arguição com base no Método Clínico, questionando procedimentos utilizados e confrontando a resposta obtida com as respostas encontradas pelos outros participantes. Nas resoluções realizadas em grupo, a arguição foi realizada com o grupo logo após o término da atividade.

5) Transcrição
   a. Após, transcrevemos os áudios e os corrigimos de acordo com a norma culta da Língua Portuguesa, para melhor entendimento e fluência da leitura.

Em função da grande quantidade de dados obtidos, não poderíamos discutir profundamente todas as questões. Assim, optamos por analisar todos os dados e expô-los de forma abreviada, em quadros, que encontram-se, juntamente com uma breve descrição dos encontros, nos Apêndices E e F. Pela impossibilidade de mostrarmos todas as análises neste texto em função de sua extensão, apresentaremos, com detalhes, as questões 1, 2 e 3 (realizadas pelo Ensino Fundamental) e 3 e 4 (realizadas pelo Ensino Médio) por serem as com maior número de situações (1, 2, 3 e 4) distintas.

Definidas as características da pesquisa, podemos sintetizar que nossa investigação consiste em um estudo de casos múltiplos, onde o caso 1 é a argumentação na resolução de problemas de Matemática com o Ensino Fundamental II e, o caso 2, é uma replicação com o Ensino Médio, que pretende mostrar conclusões contrastantes. Partimos da proposição de que, na argumentação, é possível verificarmos o raciocínio subjacente à resolução e temos como hipótese que há quatro relações possíveis entre a resposta obtida e a compreensão do exercício.

Aliando a nossa perspectiva teórica, analisaremos, na argumentação, as pseudonecessidades existentes e a coordenação dos elementos do problema através dos esquemas e conceitos utilizados, bem como a abertura para novos possíveis e o entendimento do necessário, que descreveremos com mais detalhes a seguir. Seguimos, agora, para a análise do material escrito e dos áudios coletados das questões dentro de cada caso, na perspectiva das teorias estudadas.

4 ANÁLISE DOS DADOS

Começaremos a análise dos dados explicitando nossos critérios de análise e as situações em que separamos as resoluções das questões feitas pelos participantes. Após, apresentaremos dois quadros, onde classificamos as questões segundo as situações descritas anteriormente. Para exemplificar nossa análise, apresentaremos três problemas realizados pelo caso 1 (Ensino Fundamental II) e dois resolvidos pelo caso 2 (Ensino Médio). Limitamos-nos a fazer uma breve consideração ao final de cada problema sobre os aspectos que observamos, mas as discutiremos amplamente no próximo capítulo.

4.1 Categorias de análise e situações

Antes de falarmos de cada caso, cabe lembrar que a unidade de análise é a argumentação escrita e oral na resolução de problemas de Matemática. Relatamos, no capítulo anterior, que acreditamos encontrar quatro relações entre o resultado de um problema e a sua resolução. Chamaremos essas relações de situações 1, 2, 3 e 4 e, em cada questão, analisaremos quais estão presentes. Porém, para compreender como analisaremos os dados dentro de cada situação, temos de estabelecer nossas categorias para análise.

Com base na teoria piagetiana (PIAGET, 1977; 1978; 1985; 1986) e na análise do erro de Macedo (2010), observamos em cada questão dois pontos: um, relativo ao fazer e compreender; e outro, relativo ao possível e ao necessário.

- Categoria 1 – Fazer e compreender

Vimos que Piaget (1977, 1978b) fala de diferentes níveis entre a ação e a compreensão. O autor mostra que há etapas em que a ação supera a compreensão; outras em que ambas estão em um mesmo patamar e há trocas constantes; e, por fim, em que a ação é modificada pela compreensão. Aqui, não dividiremos os estudantes nestes níveis, mas sim discutiremos a relação entre a ação e compreensão em relação ao êxito no exercício (obtenção da resposta correta) e a compreensão do conteúdo matemático envolvido na resolução. Acreditamos que estas relações implicam quatro situações distintas que abordaremos a seguir.

- Categoria 2 – O possível e o necessário

Ao resolver um problema, devemos pensar nas suas características e condições. Isso implica refletir sobre os possíveis e o necessário, que, na medida em que são identificados, levam à coordenação dos elementos do problema. Esta categoria pretende, então, verificar se os estudantes conseguem identificar os possíveis e o necessário do problema, bem como se há coordenação de todos os elementos deste. Não obstante, cogitar os possíveis implica desprender-se de pseudonecessidades, de forma que também observaremos se há evidências na escrita ou fala do participante que indiquem a existência de alguma(s) pseudonecessidade(s). Ou seja, estamos analisando o processo de conceituação dos conteúdos matemáticos envolvidos, em que as pseudonecessidades, a cogitação de possíveis e a compreensão do necessário constituem esse processo.

A partir dessas duas categorias, que utilizamos para analisar a resolução escrita e a argumentação oral do estudante, inferimos quais elementos envolvidos na resolução (possível, necessário, conceitos, esquemas etc.) o estudante compreende. Comparamos essa análise com o resultado da ação sobre o problema, ou seja, sobre o procedimento e a resposta obtidos. Se o participante não conseguiu encontrar uma resposta, verificamos se a argumentação forneceu elementos ou provocou desequilíbrios que o levem a compreender os elementos e o conteúdo matemático envolvidos na resolução. Não obstante, analisamos se a argumentação oral ou a escrita foi suficiente para a realização das inferências.

Retomaremos, a seguir, as situações possíveis descritas no capítulo anterior e nas quais separamos a resolução dos estudantes em cada questão.

- Situação 1: O sujeito obtém o resultado correto na ação e a argumentação evidencia a compreensão dos conceitos envolvidos.

Aqui, temos um sujeito que obtém o resultado correto do exercício, ou de forma precoce ou por etapas, mas, mais importante que isso, utiliza uma forma de resolução possível e a compreende, bem como os conceitos envolvidos. Não obstante, é capaz de coordenar todas as informações presentes no exercício para pensar nos possíveis e, ainda, estabelecer o necessário do contexto do problema.

- Situação 2: O sujeito obtém o resultado correto na ação, mas a argumentação evidencia um método errôneo de resolução ou alguma incompreensão dos conceitos envolvidos.

Incluímos nessa situação sujeitos que obtém o resultado correto por dois motivos: ou utilizam um procedimento correto, mas não compreendem o seu uso; ou não utilizam um procedimento correto. Em ambas as circunstâncias, ele pode apresentar algum erro na resolução. Não compreender o uso do procedimento mostra o caráter automático da resolução e a falta de reflexão sobre o método utilizado nesta. O erro apresentado pode ser de conceituação, de dificuldade de coordenar todas as informações, aparecimento de pseudonecessidades etc.

Nestes episódios, a contra-argumentação vem com o objetivo de verificar se há desequilíbrio por parte do sujeito ou não, bem como analisar se há reflexão sobre o método e algum nível de tomada de consciência após a discussão.

- Situação 3: O sujeito obtém um resultado incorreto na ação ou não consegue resolver, e a argumentação é coerente com o erro, evidenciando onde ele ocorreu, seja de método ou conceitual.

Nesta situação, o procedimento de resolução não é possível de ser utilizado, levando a um resultado incorreto ou a não obtenção de resultado. Como na situação anterior, o erro apresentado pode ser de conceituação, de dificuldade de coordenar todas as informações, aparecimento de pseudonecessidades etc. e a contra-argumentação é utilizada com o objetivo de verificar se há desequilíbrio por parte do sujeito ou não.

Estão incluídos nessa situação os sujeitos que, mesmo após a discussão, não conseguem chegar à resposta correta e, então, voltamos a analisar os motivos de isso acontecer.

- Situação 4: O sujeito obtém um resultado incorreto na ação ou não consegue resolver a questão, mas a argumentação evidencia compreensão dos conceitos envolvidos ou de algum método possível ou, ainda, os erros cometidos, podendo acarretar na correção da resolução.

Aqui, o sujeito obtém um resultado incorreto, mas a argumentação evidencia que ele compreende os erros (procedimentais, conceituais, etc.) que levaram a essa resposta e é capaz de corrigi-los, levando à compreensão do conteúdo matemático envolvido na questão. Ainda, o sujeito pode afirmar não conseguir chegar a uma resposta, mas, durante a argumentação, ele toma consciência do seu erro, de um método de resolução possível ou rompe com uma pseudonecessidade que o impedia de resolver a questão.

Essas quatro situações, constituídas a partir da união da prática docente com o estudo do fazer e compreender, não apareceram em todas as questões. Mas, durante toda a pesquisa, apareceram mais de uma vez, tanto com o Ensino Fundamental II quanto com o Ensino Médio. Não obstante, cabe lembrar que a mesma pessoa pode estar em situações diferentes, dependendo dos conceitos, procedimentos e aberturas de possíveis e necessário de cada questão, como veremos com as questões 1 e 2 (vide estudante F2). Como podemos perceber na discussão teórica e na descrição acima, em todas elas, a ação e a compreensão se fazem presentes, bem como a discussão dos possíveis e do necessário e a conceituação. Não somente observaremos as situações, mas, também, como a argumentação escrita e oral aparece em cada uma delas, constatando, ao final, se alguma delas fornece mais dados sobre o raciocínio utilizado pelo estudante.

4.2 Análise dos dados

Para cada questão utilizada nos encontros, montamos um quadro, que mostra a resposta obtida, a explicação dada e a situação (dentre as 1, 2, 3 e 4) em qual o subcaso (estudante) se encontra. A legenda das tabelas é: A, para acerto; E, para erro; 1, 2, 3 e 4 para identificar as situações descritas anteriormente; e I, para inconclusivo, ou seja, quando não temos informações suficientes para classificar em uma das situações descritas. Sobre os subcasos inconclusivos, colocamos observações, para indicar porque não conseguimos concluir em qual situação está o subcaso. Estes quadros, juntamente com o enunciado da questão e uma breve descrição do encontro a qual se refere, podem ser encontradas nos Apêndices E e

F. Abaixo, mostramos dois quadros que representam a gama de situações 1, 2, 3 e 4 encontradas nas questões utilizadas em cada caso.

Quadro 17 – Situações encontradas nas questões do Ensino Fundamental II.

Questão	**Situações**			
Questão 1	1	2	3	-
Questão 2	1	-	3	4
Questão 3	1	-	3	4
Questão 5	1	2	-	-
Questão 6	1	2	3	-
Correção da questão 6	1	2	3	-
Questão 7	1	-	-	-
Questão 8	-	-	-	-
Questão 9	-	-	-	-
Questão 10	-	-	-	-
Questão 11	1	-	3	-
Questão 12	1	-	3	4
Questão 13	-	-	-	-
Questão 14	-	-	3	-
Questão 15	1	-	3	-

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Quadro 18 – Situações encontradas nas questões do Ensino Médio.

Questões	Situações			
Questão 3	1	2	3	-
Questão 4	1	2	3	4
Questão 7	1	-	3	-
Questão 14	-	-	3	-
Questão 15	-	-	3	-
Questão 16	-	-	-	-
Questão 17	-	-	-	-
Questão 18	-	-	-	-
Questão 19	1	2	-	-
Questão 20	-	-	-	4
Questão 21	-	-	-	-
Questão 22	-	2	3	-
Questão 23	-	-	3	-
Correção da questão 23	-	-	3	-
Questão 24	1	-	3	-
Correção da questão 24	-	-	3	-
Questão 25	1	-	-	-
Questão 26	-	2	-	-
Questão 27	-	2	-	-
Questão 28	1	-	-	-
Questão 29	-	-	-	4

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Analisando os dados do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio, encontramos o maior número de situações distintas nas questões 1, 2, 3, 6 e 12 com o Ensino Fundamental II e questões 3 e 4 com o Ensino Médio. Sobre o Ensino Fundamental, relatamos anteriormente que, na questão 6, não realizamos a arguição individual dos participantes e, por isso, optamos por não a discutirmos profundamente aqui, pois apenas poderíamos inferir sobre o pensamento dos participantes. Na medida em que discutiremos a questão 1, acreditamos que trazer a análise da questão 12 seria repetitivo, pois os motivos que levam às classificações nas situações descritas na questão 12 são análogos aos da questão 1 (não coordenação dos elementos da questão e presença de pseudonecessidades). Logo, para evidenciarmos como realizamos a análise, com base nas categorias descritas na seção anterior e nas situações que encontramos, mostraremos a seguir as resoluções das questões 1, 2 e 3 pelo Ensino Fundamental II e questões 3 e 4 pelo Ensino Médio.

4.3 Descrição das questões 1, 2, 3 e 4

Como relatado no capítulo anterior, tivemos de selecionar algumas questões para apresentar sua análise completa, em função da grande quantidade de dados obtidos. Escolhemos, então, as questões do Ensino Fundamental e do Ensino Médio que tiveram maior número de situações 1, 2, 3 e 4 dentre as respostas e as apresentaremos em cada caso.

4.3.1 Caso 1 – Ensino Fundamental II

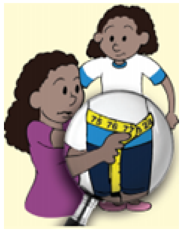
Para o Ensino Fundamental II, priorizamos questões do nível 1 (6° e 7° anos) da OBMEP, por serem questões formuladas para os anos com que estávamos trabalhando.

4.3.1.1 Primeira questão analisada – Subtração.

A questão abaixo, da prova de nível 1 da OBMEP de 2013, foi escolhida por ser de um conteúdo básico do Ensino Fundamental, a saber, adição e subtração de números naturais. A princípio, classificaríamos essa questão como exercício, pois a aplicação direta da subtração a resolveria. Porém, a utilizamos justamente para verificar se, inclusive em uma questão onde não esperávamos encontrar uma variedade de respostas, a argumentação poderia mostrar que ela é, na verdade, um problema.

Figura 3 – Questão 1 (realizada dia 9 de abril de 2014).

Ao medir a cintura de Marta com uma fita métrica, Dona Célia observou que as marcas de 23 cm e 77 cm ficaram sobrepostas, como na figura. Qual é a medida da cintura de Marta?



A) 23 cm.

B) 50 cm.

C) 54 cm.

D) 77 cm.

E) 100 cm.

Fonte: Prova nível 1 da 1ª fase da OBMEP 2013.

Temos que a medição da cintura de Marta não começa no zero cm na fita métrica, mas sim no 23 cm. Dessa forma, devemos descontar 23 cm do valor final (77 cm) obtido na medição. Analogamente, poder-se-ia realizar adições ao 23 cm até chegar ao 77 cm. Assim, o valor que indica o quanto há entre 23 cm e 77 cm, e, assim, a medida da cintura de Marta é 54 cm, letra C.

Esta questão, que foi a primeira realizada após a lista de verificação dos conteúdos já trabalhados, serviu para observarmos que a presença de alternativas poderia atrapalhar os estudantes na resolução. Vimos que alguns, por encontrarem um número que estava dentre as respostas possíveis, contentava-se com o resultado obtido. Assim, para os encontros seguintes, retiramos as alternativas de todas as questões para que os participantes não se baseassem nelas para argumentar que seu resultado estava correto.

A seguir, apresentaremos quatro subcasos: F1 (situação 1), F2 (situação 2), F3 (situação 3) e F4 (inconclusivo).

a) Estudante F1 (situação 1)

Figura 4 – Resolução da questão 1 por F1.

1. Ao medir a cintura de Marta com uma fita métrica, Dona Célia observou que as marcas de 23 cm e 77 cm ficaram sobrepostas, como na figura. Qual é a medida da cintura de Marta?

A) 23 cm.
B) 50 cm.
C) 54 cm.
D) 77 cm.
E) 100 cm.

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 5 – Escrita da resolução da questão 1 por F1.

A resposta é 54 cm, porque o primeiro número que se começa a medir é o 23, e vai até o 77, então tem 54 cm entre o 23 e o 77.

$$\begin{array}{r} 77 \\ -23 \\ \hline 54 \end{array}$$

Fonte: Acervo da pesquisadora.

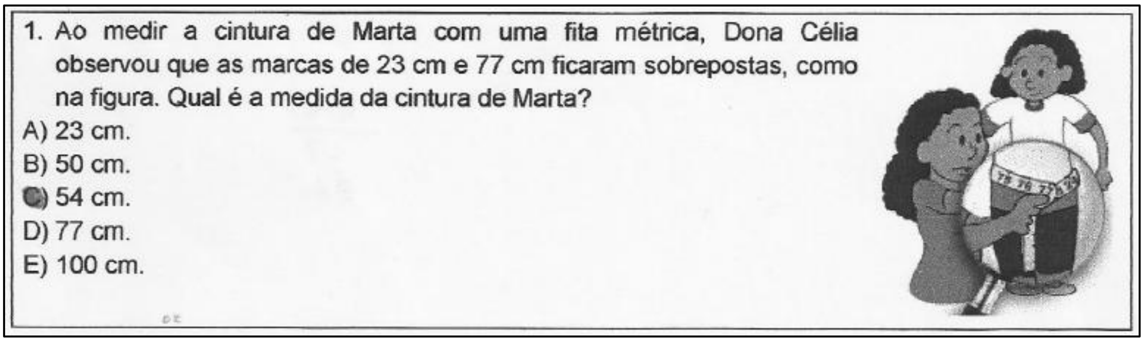
Na escrita de F1, observamos que ele utilizou corretamente a operação de subtração, a fim de obter o quanto havia entre o 23 cm e o 77 cm. Na sua fala, ele complementa:

> F1 – [...] é como se o vinte e três fosse o um e teria que ver quantos têm entre vinte e três e setenta e sete.

Com o algoritmo utilizado e as explicações escrita e verbal de F1, somos levados a crer que ele compreende a subtração como um procedimento correto para verificar a quantidade que há entre dois valores. Observamos na fala “é como se o vinte e três fosse o um” que F1 consegue coordenar as informações do problema e visualizar a necessidade de descontar esse valor do total. Ainda, esta fala indica que a compreensão supera a ação, no sentido de que F1, ao coordenar as características do exercício, compreende a situação e modifica a sua ação original (cálculo referente ao início da medição no algarismo um) para este contexto (cálculo para uma medição que inicia no 23). Aqui, tanto a argumentação escrita quanto a verbal são claras e evidenciam as observações que fizemos.

b) Estudante F2 (situação 2)

Figura 6 – Resolução da questão 1 por F2.

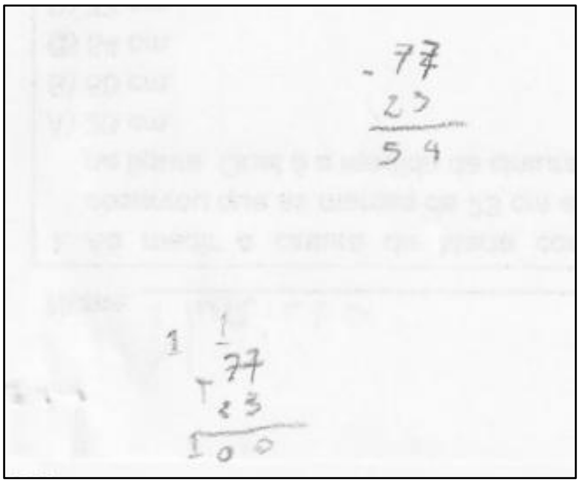


1. Ao medir a cintura de Marta com uma fita métrica, Dona Célia observou que as marcas de 23 cm e 77 cm ficaram sobrepostas, como na figura. Qual é a medida da cintura de Marta?

A) 23 cm.
B) 50 cm.
C) 54 cm.
D) 77 cm.
E) 100 cm.

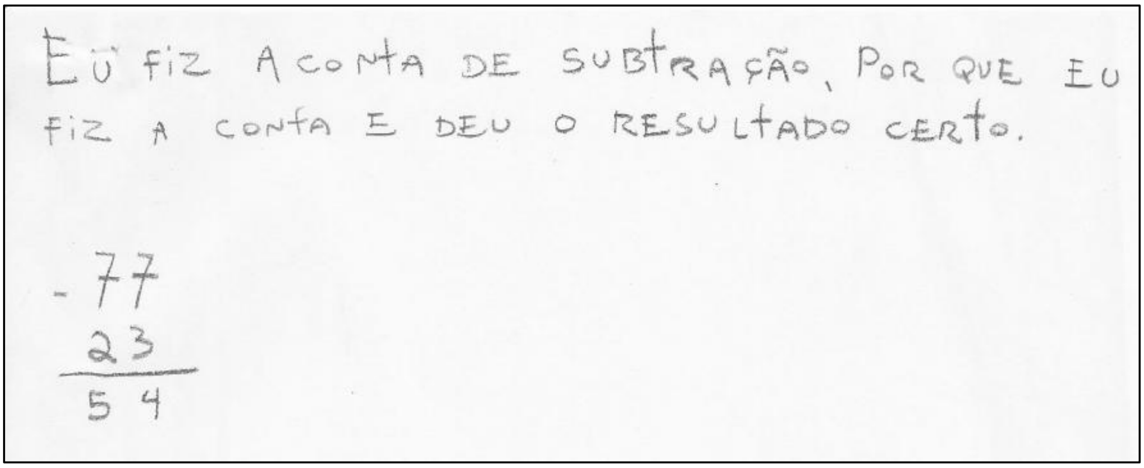
Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 7 – Esboço da resolução da questão 1 por F2.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 8 – Escrita da resolução da questão 1 por F2.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

A resolução de F2 aponta que ele fez dois cálculos: um de subtração, que resulta em 54 cm (correto); e um de adição, que resulta em 100 cm. Porém, nas figuras 6 e 8, observamos que ele escolheu como resposta o valor 54 cm. Apesar de ter obtido o resultado correto, na sua escrita F2 não deixou claro o motivo de ter escolhido o 54 cm, apenas afirmando que a conta de subtração foi a que “deu o resultado certo”.

Na arguição, F2 nos contou que:

F2 – É que eu já tinha feito essa conta, na aula, de tarde, e a sora disse que estava certa.

P – Sim, e como é que...

F2 – E agora a gente fez, de novo, então...

P – Ahhhh, tá.

F2 – Dava pra ver que esse aqui era o resultado.

P – Então, tu sabias que aquele era o resultado, mas, por que tu usaste uma subtração?

F2 – Por causa que se fosse mais, não ia dar certo assim. Ia dar cem.

P – E tem cem nas respostas.

F2 – Sim, mas não era pra ser cem. A fita métrica, assim junta, tem que fazer menos. Eu acho que é isso.

P – Sempre que uma fita métrica se junta, tem que fazer menos?

F2 – Eu acho... Quando dá assim, em cima, acho que sim. Quando for o número maior em cima, acho que não.

P – Tá, e deixa eu te fazer outra pergunta: outra pessoa fez o seguinte: se chegou no setenta e sete, então quer dizer que a cintura mede setenta e sete, que também tem nas respostas. Tu achas que essa pessoa está certa ou ela está errada?

F2 – Está errada.

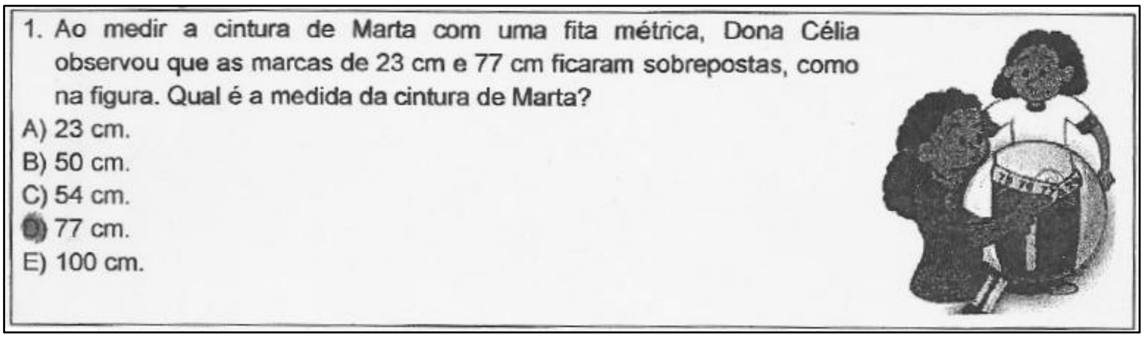
P – Por quê?

F2 – Não sei.

Nossa interpretação da fala de F2 é que, para escolher entre os dois cálculos que realizou, ele se baseou na aula da tarde, onde a resposta correta foi confirmada pela professora. Inclusive, F2 afirma que “quando for o número maior em cima, acho que não” deve ser realizada uma subtração, o que não se verifica. Ou seja, acreditamos que F2 não compreendeu porque nesta situação pode ser utilizada uma subtração, tanto que, quando questionado sobre a possibilidade de ser outra resposta, ele não sabe afirmar porque ela está incorreta. Aqui, a argumentação oral complementou a escrita ao trazer novas informações sobre o procedimento utilizado por F2.

c) Estudante F3 (situação 3)

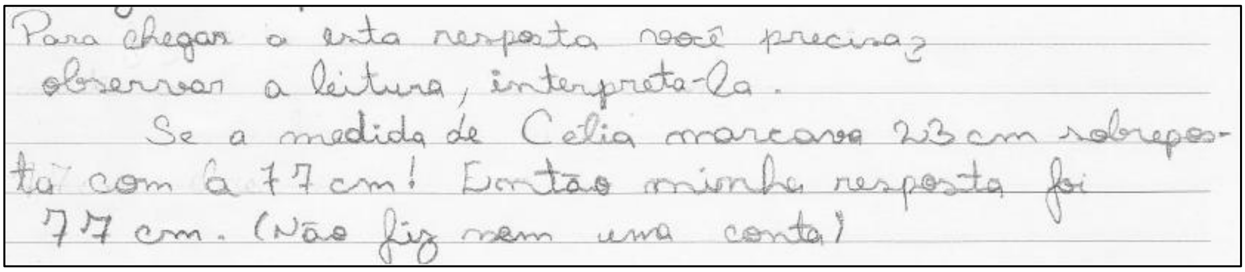
Figura 9 – Resolução da questão 1 por F3.



1. Ao medir a cintura de Marta com uma fita métrica, Dona Célia observou que as marcas de 23 cm e 77 cm ficaram sobrepostas, como na figura. Qual é a medida da cintura de Marta?
A) 23 cm.
B) 50 cm.
C) 54 cm.
D) 77 cm.
E) 100 cm.

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 10 – Escrita da resolução da questão 1 por F3.



Para chegar a esta resposta você precisa? observar a leitura, interpreta-la.
Se a medida de Célia marcava 23cm sobreposta com a 77cm! Então minha resposta foi 77 cm. (Não fiz nem uma conta)

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Na resposta marcada por F3 e na sua escrita da resolução, percebe-se que ele não fez “nenhuma conta”. Na arguição da resolução, F3 afirma que:

> F3 – Eu acho que não precisa fazer alguma conta. Porque, quando ficam sobrepostas, seria, eu acho, o número que tá em cima. [...] E não o número que está embaixo.

Ao darmos a contra-sugestão de que outros colegas que resolveram esta questão chegaram a valores diferentes, como 54 cm e 100 cm, F3 consegue identificar quais operações que resultaram nestas respostas. Questionado sobre a possibilidade destas respostas estarem corretas ou não, ele afirma:

F3 – Não sei. É que, pra mim, eu botei setenta e sete, então pode ser que esteja certo ou errado... depende da vista da pessoa. Depende de como ela leu e depende de como ela interpretou.

P – E tu achas que tem mais de uma interpretação possível pra esse mesmo problema?

F3 – Além da minha?

P – O que eu quero dizer é se tu achas que tem mais de uma resposta que tu achas possível pra ser a resposta correta.

F3 – Não sei, acho que não... Porque não poderia ser vinte e três, ou até poderia ser o vinte e três, se ele estivesse sobreposto ao setenta e sete.

A fala de F3 "poderia ser o vinte e três, se ele estivesse sobreposto" nos leva a crer na existência de uma pseudonecessidade que interpretamos como "o valor que estiver sobreposto é o que determina a medida da cintura", independente de onde se começa a contagem e se esse valor é menor ou maior do que o superposto. É notável que F3 compreende como os colegas obtiveram as respostas 54 cm e 100 cm, mas não cogita que a operação utilizada por eles possa ser possível. Ou seja, a contra-argumentação não foi o suficiente para que F3 percebesse a pseudonecessidade na qual se baseia para a resolução.

d) Estudante F4 (inconclusivo)

Figura 11 – Resolução da resolução da questão 1 por F4.

1. Ao medir a cintura de Marta com uma fita métrica, Dona Célia observou que as marcas de 23 cm e 77 cm ficaram sobrepostas, como na figura. Qual é a medida da cintura de Marta?

A) 23 cm.
B) 50 cm.
C) 54 cm.
D) 77 cm.
E) 100 cm.

$$\begin{array}{r} 77 \\ -\ 23 \\ \hline 54 \end{array}$$

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 12 – Escrita da resolução da questão 1 por F4.

Eú escolhi sobtração por que se eu fizen 77 memos o 23 e obvio que vai dan 54 o resultado da conta. A cintura da marta vai ser 54cm

Fonte: Acervo da pesquisadora.

A resposta de F4 não esclarece o motivo da utilização da subtração. Na fala, ele afirma que:

P – Mas por que tem que ser menos? Por que não pode ser mais?

F4 – Porque está medindo.

P – E quando tu medes as coisas tu sempre fazes subtração?

F4 – É.

P – Se eu, por exemplo, for medir qual é o perímetro dessa sala. É uma medida, mas eu vou fazer esse lado, mais aquele, mais aquele e mais aquele [aponta os lados da sala]. Não é uma subtração. Por que nesse caso, então, eu tenho que fazer uma subtração?

F4 – Porque o resultado certo dá pra fazer subtração.

Acreditamos que a forma como questionamos F4 sobre sempre usar subtração pode tê-lo induzido à resposta positiva. Apesar de F4 parecer saber qual deveria ser a resposta correta e, por isso, justificar com uma subtração, não podemos afirmar que F4 não compreende o exercício, apenas por não ter especificado como obteve a resposta. Essa situação é diferente da de F2, que afirma que já havia resolvido esta questão. Por esse motivo, consideramos este subcaso como inconclusivo.

As três primeiras respostas que apresentamos já mostram algumas relações entre a resolução e a compreensão do problema: F1 consegue resolver e compreende os conceitos envolvidos, coordenando as informações; F2 obtém a resposta correta, mas dá indícios de que não compreende a operação que deve utilizar para resolver o exercício; e F3, que apresenta uma pseudonecessidade e, após a argumentação com a pesquisadora, ela ainda persiste. Ainda, vemos que essa questão, que consideramos como exercício por envolver somente o conteúdo de adição e subtração de números naturais, tornou-se problema para alguns estudantes, na medida em que tiveram de pensar sobre a forma de resolução. Não obstante, com o subcaso de F4, vemos que nem sempre a argumentação é suficiente para analisarmos o pensamento utilizado. Porém, através dela, podemos fazer algumas inferências sobre este.

4.3.1.2 Segunda questão analisada – Lógica e operações

Figura 13 – Questão 2 (aplicada dia 30 de abril de 2014).

Caetano fez cinco cartões, cada um com uma letra na frente e um número atrás. As letras formam a palavra OBMEP e os números são 1, 2, 3, 4 e 5. Observe os quadrinhos e responda: qual é o número atrás do cartão com a letra M?

Fonte: Prova da 1ª fase do nível 1 da OBMEP de 2013 (adaptada).

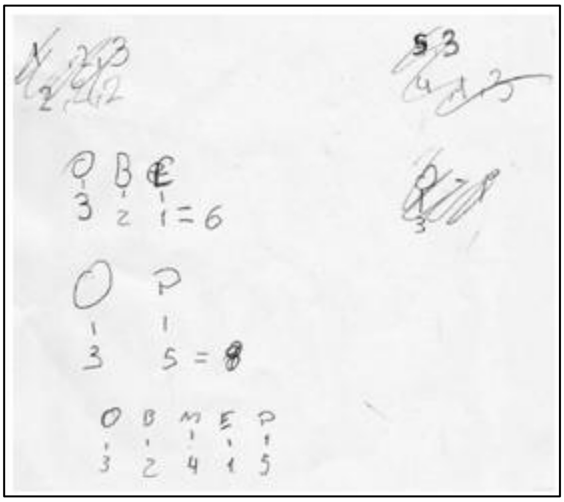
Nesta questão, temos que levar em consideração as informações dos dois quadros para resolvê-la. Espera-se que o sujeito observe que as únicas possibilidades para “O” e “P” são os números cinco e três, pois são os únicos, dentre os disponibilizados no enunciado, que somados resultam em oito, ou seja, cumprem a condição do quadro da direita. Se “O” for cinco, não há dois valores dentre os fornecidos que, somados a cinco, resultem em seis, ou seja, satisfaçam o quadro da esquerda. Logo, “O” necessariamente vale três e “P” vale cinco. Na medida em que “O” vale três, as únicas opções para “B” e “E” são um e dois para que “O”, mais “B”, mais “E” resulte em seis e satisfaça o quadro da esquerda. Assim, o único número que não foi utilizado é quatro, que corresponde à única letra não utilizada, ou seja, “M”.

Esta questão foi resolvida em grupo e analisaremos as resoluções de F4 (situação 1), que não fez com sua dupla e do trio F2, F3 e F5 (situações 3, 3 e 4, respectivamente). Os outros grupos de estudantes realizaram outras questões, pois a atividade consistia em: 1) resolver a questão com o grupo; 2) trocar os integrantes entre os grupos com questões diferentes; 3) explicar a resolução para aqueles que não tinham resolvido a questão. Aqui, temos a escrita e a discussão com a pesquisadora, não entre os participantes.

a) Estudante F4 (situação 1)

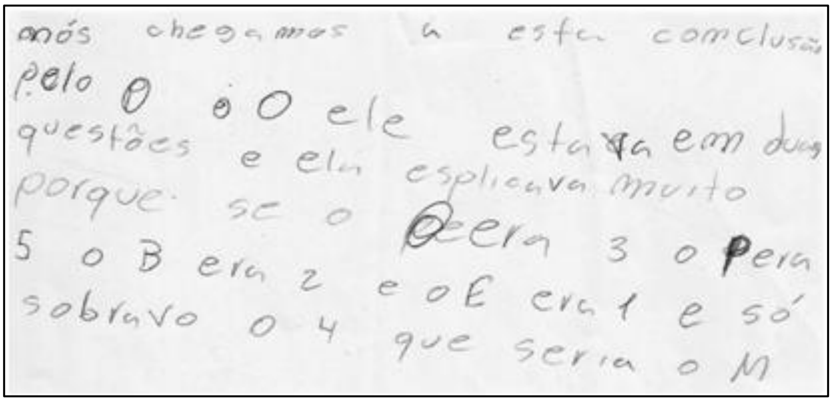
O estudante F4 estava em dupla com outro colega, que não se envolveu na atividade. Assim, F4 trabalhou individualmente.

Figura 14 – Esboço da resolução da questão 2 por F4.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 15 – Escrita da resolução da questão 2 por F4.



nós chegamos a esta conclusão
pelo O o O ele estava em duas
questões e ela esplicava muito
porque se o O era 3 o P era
5 o B era 2 e o E era 1 e só
sobravo o 4 que seria o M

Fonte: Acervo da pesquisadora.

No esboço apresentado por F4, vemos que ele colocou os valores para as letras de forma que satisfizessem as condições da questão. Na escrita da resolução, percebemos que F4 consegue cogitar hipóteses e, assim, antecipar resultados na medida em que ele afirma que "se o 'O' era 3, o 'P' era cinco" e , assim, conclui o resultado correto. Porém, apesar de não influenciar a resposta do problema, em nenhum momento F4 trabalha com a unicidade desta resposta: ele apenas afirma o que aconteceria se "O" valesse três. Ainda, ele dá valores para "B" e "E", o que é impossível, dadas as condições da questão. Questionamos-nos: F4 concluiu a resposta correta porque compreende que essa é a única forma de resolver o problema, ou porque encontrou uma solução possível, atribuindo valores aleatoriamente, que satisfazem todas as condições, concluindo que essa pode ser a resposta? Esta dúvida não é esclarecida com a escrita, de forma que procuramos elucidá-la no momento da arguição.

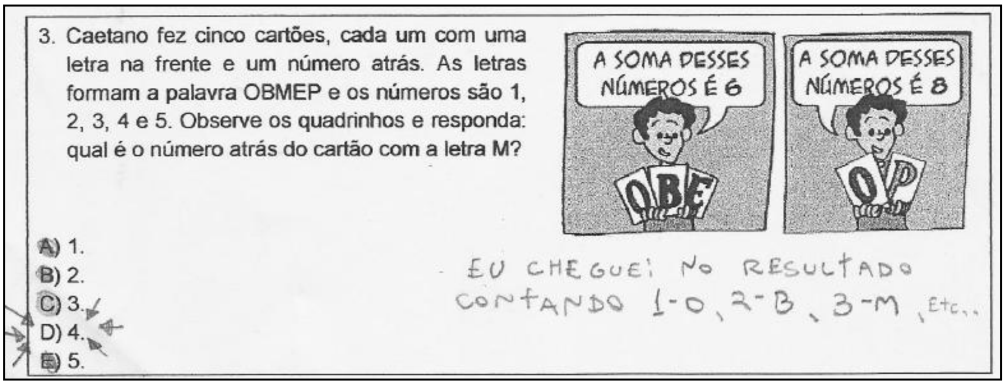
> F4 – Nós chegamos a essa conclusão pelo "O". O "O", ele estava em duas questões. Ele explicava muito. Porque se o "O" era três, o "P" era cinco, o "B" era o dois e o "E" era um. E só sobrava o quatro, que seria o "M".
>
> P – OK. E o "O", ele não poderia ser cinco, por exemplo?
>
> F4 – Não.
>
> P – Por quê?
>
> F4 – Porque seria a primeira questão, que aqui dá seis. [...] E cinco, mais duas letras daria um.

A resolução foi feita de modo correto, partindo-se da necessidade da letra "O" cumprir as condições dos dois quadros do problema. Na fala, F4 ressalta a importância do "O" e condiciona as outras letras em função dele, ou seja, F4 modifica a sua ação de resolução, em função da compreensão da importância da letra "O" dentro das características do problema. Ainda, F4 consegue visualizar nossa hipótese de "O" valer cinco e afirmar que ela não é possível, pois "cinco mais duas letras daria um" e não há como isso acontecer no exercício. Ou seja, mesmo que o sujeito tenha atribuído valores para "B" e "E" e talvez tenha encontrado a resposta por teste na figura, vemos que ele consegue cogitar possibilidades e desenvolver um raciocínio lógico a partir das condições estipuladas pelo exercício. Assim, ele argumenta conosco de forma condizente com sua resposta correta, coordenando as características do problema.

b) Grupo dos estudantes F2, F3 e F5 (situações 3, 3 e 4, respectivamente).

Diferente de F4, que obteve a resposta certa neste exercício, o grupo de F2, F3 e F5 não o conseguiu em um primeiro momento.

Figura 16 – Resolução da questão 2 por F3[14].

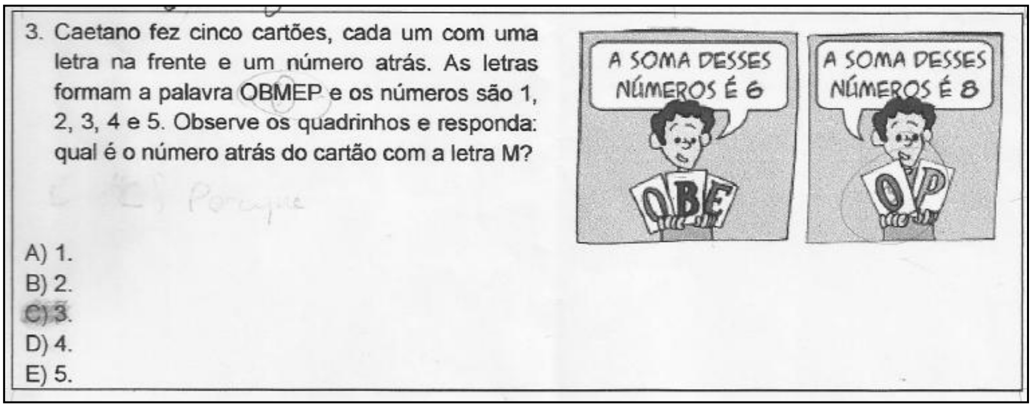

3. Caetano fez cinco cartões, cada um com uma letra na frente e um número atrás. As letras formam a palavra OBMEP e os números são 1, 2, 3, 4 e 5. Observe os quadrinhos e responda: qual é o número atrás do cartão com a letra M?

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Na resolução escrita por F3, vemos, abaixo das figuras que ele utilizou, a ordem colocada no enunciado como condição para a correspondência entre as letras e os números. Assim, por ser a palavra “OBMEP” e a numeração 1, 2, 3, 4 e 5, ter-se-ia que o “O” corresponde ao 1, o “B” corresponde ao 2, o “M” corresponde ao 3 etc. Dessa forma, o “M” deveria ser 3. Porém, se F3 utilizou esta ordem, como os valores fechavam com os quadros do problema? Teria ele levado os quadros em consideração no momento da resolução? Veremos na discussão com o grupo.

Figura 17 – Resolução da questão 2 por F2.


3. Caetano fez cinco cartões, cada um com uma letra na frente e um número atrás. As letras formam a palavra OBMEP e os números são 1, 2, 3, 4 e 5. Observe os quadrinhos e responda: qual é o número atrás do cartão com a letra M?

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Na resolução de F2, onde há apenas as marcas da escrita de “É ‘C’, porque” apagadas, temos que a resposta obtida é três. Porém, não há nenhuma informação sobre a forma de resolução que ele utilizou para concluir este resultado. Se observarmos a forma de resolução de F3, que era do mesmo grupo de F2, a resposta seria letra “C”, então é possível que ambos tenham utilizado o mesmo

[14] A alternativa foi marcada após a discussão com o grupo.

raciocínio de resolução. F5, que também fazia parte do grupo, não escreveu uma resolução individual.

As escritas destes dois componentes do grupo mostram que não foi obtida a resposta correta, mas, mais relevante do que isso, a resolução por parte de F3 possivelmente mostra uma pseudonecessidade de correspondência entre a ordem das letras e dos números e a de F2 não nos diz nada sobre o raciocínio utilizado. Na conversa com o grupo, tais questões apareceram de forma evidente, como será relatado a seguir. Cabe observar que, apesar de marcarem a resposta três, o grupo afirmava que a questão estava errada, mais especificamente, os quadros estavam errados, pois não fechava o resultado do quadro com o obtido por eles. Aqui, vemos que o quadro não é considerado necessidade do problema e não é levado em consideração para obter a resposta, mas sim no caminho inverso: é decidida a resposta com base em uma pseudonecessidade e, se não confere com o quadro, o quadro é considerado errado.

Apesar de terem colocado uma resposta final (3), na arguição o grupo afirma não encontrar uma resposta correta. A primeira dificuldade apresentada foi o pressuposto de que as letras deveriam seguir a ordem em que foi colocado no enunciado. Consideramos que F3 foi além nessa conclusão ao perceber que, independente da ordem, o “M”, por estar no meio, valeria 3. Ou seja, F3 já mostrou que haveria outra possibilidade de numeração, mas ainda atrelada à ordem, só que, agora, decrescente. Porém, na sequência, houve o seguinte diálogo, que mostra a oscilação das conclusões do grupo, ora devendo seguir a ordem do enunciado, ora, não:

P – Ok. Mas tem que seguir essa ordem? Eu não posso botar que o “O” vale cinco, por exemplo e o “B” vale dois?

F2 – Pode.

F5 – Pode.

P – Tem alguma coisa dizendo aqui, que me impeça de fazer isso?

F3 – Eu acho que não, acho que tem que ser em ordem.

P – Por quê?

F3 – Por causa do que ele tá dizendo aqui.

Apesar de F3 afirmar que não há nada no enunciado que impeça de trocar a ordem da correspondência, ele afirma que “por causa do que ele ta dizendo aqui” deve-se seguir a ordem. F5, quando do questionamento sobre a ordem, cogita a possibilidade de “O” ser cinco e “P” ser um, o que daria seis, mas “não tem como dar oito”. Ao questionar o grupo se existia alguma possibilidade de dar oito para a soma de “O” e “B”, F5 afirma que sim “mas, se um valesse cinco e o outro três”. Após, F2 e F3 voltam a dizer que não é possível fazer aquelas afirmações para os valores dados, enquanto F5 fica pensando sobre a questão e afirma que a resposta é quatro (correta). Porém, em seguida, F5 acha que a resposta é um. Continuando a discussão, F5 traz outra questão que ainda não havia sido discutida:

F5 – Aqui só tem duas letras, então só pode dois números. Mas os únicos números que dão são cinco e três, OK?

P – OK.

F5 – E no outro, teria que dar seis, seria o quatro e o dois, só que aqui tem três letras. Não tem como dar. Daria sete, a única possibilidade.

Nesta fala, fica à mostra que F5 compreendeu a possibilidade de combinações para “O” e “P”, mas não para o outro quadro, no qual ele repete o raciocínio que utilizou para “O” e “P”, concluindo que deveria ser dois e quatro no segundo quadro. Porém, ao considerar a necessidade imposta pelo exercício de serem três letras e, uma delas, a letra “O” que já foi utilizada, ele percebe que esse raciocínio não é mais possível. Ele, então, pergunta:

F5 – Toda letra tem um número atrás? Tipo, aqui tem dois “O”s? Pode repetir o número?

Pelo grupo não ter verbalizado a necessidade do exercício da letra “O” corresponder ao mesmo número para ambos os quadros, talvez ele não a tivesse considerado até então e isso poderia estar impedindo de resolver o exercício. Respondida a dúvida, F5 faz hipóteses:

F5 – Três [murmurando]... tá, essa aqui faz cinco e três, dá oito. E se aqui fosse... um deles fosse três, outro dois e outro um... tá... daria seis também.

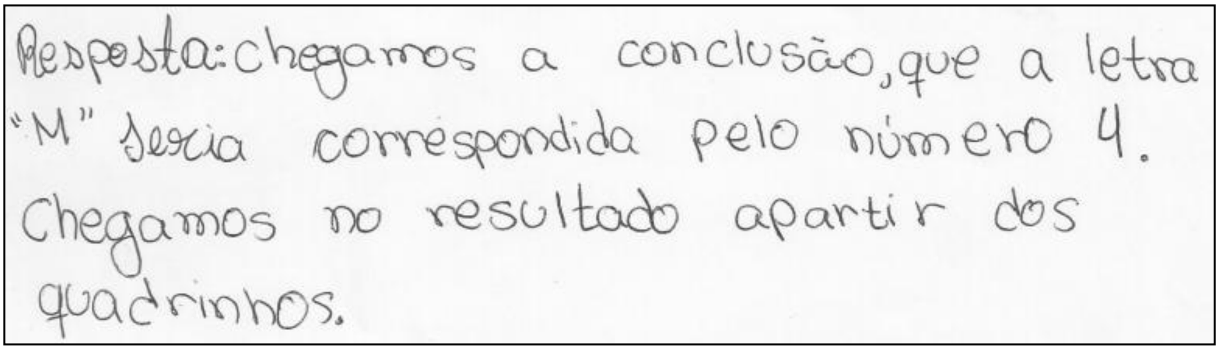
Nota-se que F5 conseguiu encontrar números que satisfaçam todas as condições impostas pelo exercício. Neste momento, o questionamos sobre a possibilidade de “O” ser cinco e “P” três ao invés de “P” cinco e “O” três:

P – E se fosse ao contrário? Se o “O” fosse cinco e o “P” fosse três. F5 – Não tem como, porque esse aqui não pode ficar junto. P – Por quê? F5 – Porque tem que ser três números. Se fosse igual a cinco, só daria pra mais um número pra ficar seis.

A resposta de F5 foi imediata à pergunta, o que é surpreendente frente ao fato de que ele não conseguia antecipar as condições das letras no início dessa discussão. Este encadeamento de pensamentos de F5 foi possível verificarmos com a argumentação, pois a escrita representa as conclusões em um determinado momento, e não a sua trajetória. Esta análise mostra uma situação onde os estudantes não conseguiam resolver a questão, mas, com a argumentação com a pesquisadora e entre eles, F5 mostrou que rompeu as pseudonecessidades e conseguiu coordenar os conceitos, condições e necessidades do problema, de forma que o colocamos na situação 4. Ao longo da resolução de F5, vemos, no início, um primeiro nível em que a ação supera a compreensão e o exercício é classificado como errado pelo estudante; após, ocorrem trocas constantes entre ação e compreensão, na medida em que F5 começa a desprender-se das pseudonecessidades, ao passo que compreensão modifica a ação, quando o estudante coordena as informações do exercício.

Porém, cabe salientar que na continuação da atividade, onde os participantes deveriam explicar para os outros grupos como resolveram a sua questão, F2 e F3 não o conseguiram e concluíram que não sabiam como resolver, o que caracteriza a situação 3. Ou seja, o diálogo que descrevemos acima, apesar de ser com o grupo, foi propício apenas para F5. Finalizando, trazemos a resolução do grupo após a discussão na figura abaixo.

Figura 18 – Escrita da resolução da questão 2 pelo grupo F2, F3 e F5.


Resposta: chegamos a conclusão, que a letra "M" seria correspondida pelo número 4. Chegamos no resultado apartir dos quadrinhos.

Fonte: Acervo da pesquisadora.

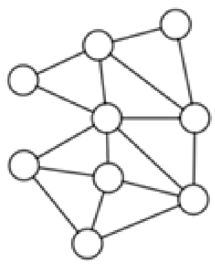
Esta escrita mostra que a resposta correta foi obtida, mas ainda não esclarece a forma de resolução. Ou seja, se apenas ela fosse utilizada como objeto de análise, ainda não seria possível concluir o procedimento utilizado, bem como se os estudantes compreenderam as condições e se eram capazes de realizar as antecipações necessárias para realizar a atividade.

De forma geral, vemos que essa questão foi interessante por ter uma necessidade que deve ser considerada para a resolução. O subcaso de F5 nos é satisfatório por mostrar que, apesar não conseguir resolver, ele compreendia os conceitos necessários para a resolução e isso foi possível verificar na argumentação descrita acima. Não podemos dizer que a argumentação é condição necessária para que essa tomada de consciência aconteça, mas vemos que ela foi de grande valia nessa situação.

4.3.1.3 Terceira questão analisada – Raciocínio combinatório.

Figura 19 – Questão 3 (aplicada dia 16 de abril com o Ensino Fundamental e 30 de abril de 2014 com o Ensino Médio).

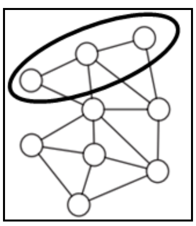
De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?



Fonte: Prova da 1ª fase do nível 1 da OBMEP 2012 (adaptada).

Esta questão, por envolver pensamento combinatório e teste de possibilidades, pode ser feita de diferentes maneiras dependendo de onde começarmos a preencher o diagrama, todas levando ao mesmo resultado. A forma mais utilizada pelos participantes e que consideramos melhor de visualizar para explicitarmos aqui, é começando pelos três círculos[15] superiores marcados na figura abaixo.

Figura 20 – Uma das formas de começar a colorir o diagrama.

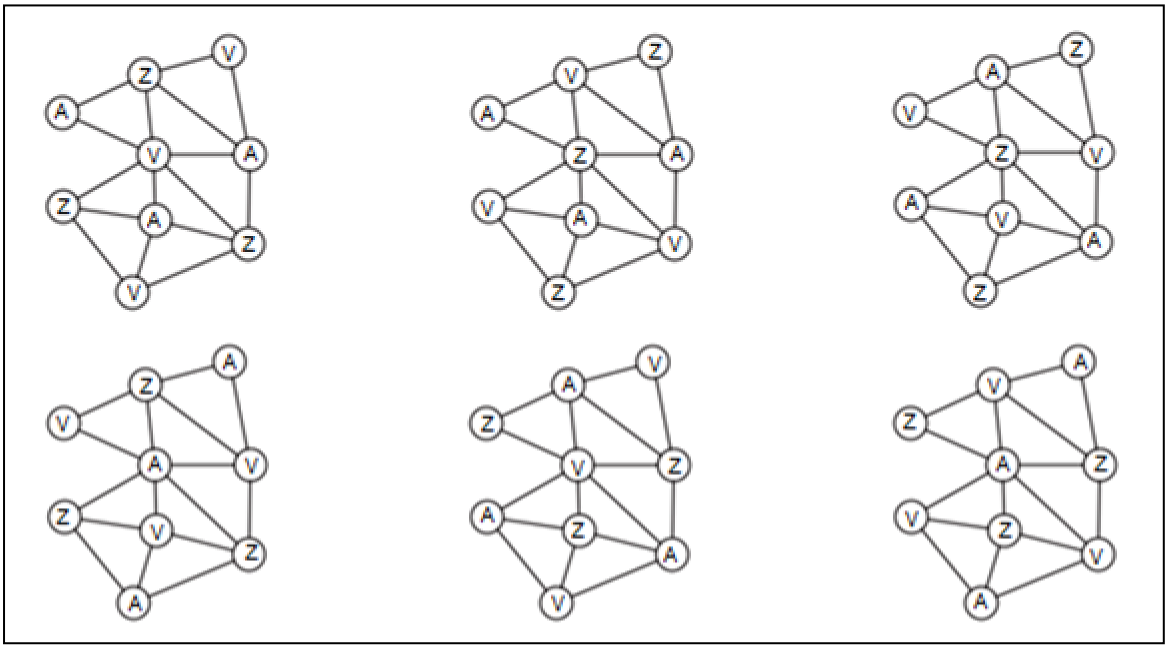


Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

[15] Alguns sujeitos utilizaram a palavra “bolinhas” para os círculos. Não realizamos a correção durante os áudios, pois consideramos desnecessário e que poderia atrapalhar a discussão.

No modo como os círculos estão ligados, à medida que colocamos as cores nos espaços que destacamos na figura anterior, os demais são preenchidos em função destes. Ou seja, para cada organização das três cores, todos os demais são fixos, não havendo outra forma de preenchimento. Abaixo, mostramos todas as possibilidades de preenchimento utilizando como legenda para a cor amarela a letra A; para a cor azul, Z; e, para a cor vermelha, V.

Figura 21 – Todas as possibilidades de distribuição das cores nos diagramas.



Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Poderíamos pensar também que, como os três círculos superiores determinam os demais, então ao permutarmos as três cores, obteríamos o total. Pela análise combinatória, permutação de três elementos sem repetição nos dá um total de três fatorial (3! = 3.2.1), isto é, 6 formas distintas, a saber: (A, Z, V), (A, V, Z), (V, A, Z), (V, Z, A), (Z, A, V), (Z, V, A). Cabe salientar que não era necessário saber o conceito de permutação para resolver a questão.

Destacamos essa questão em relação às demais por ter sido aplicada em ambos os grupos e ser a que gerou o maior número de respostas distintas: no Ensino Fundamental II foram obtidas as respostas 1, 3, 4, 5, 6, 27; no Ensino Médio, 3, 6, 8, 27. Observamos duas dificuldades em ambos os casos, que eram a falta de organização e a impossibilidade de conferência da resposta. Utilizando os diagramas dados, os participantes conseguiam encontrar pelo menos uma forma de organização, mas muitos não conseguiam estabelecer uma ordem de alteração nas cores para encontrar os outros resultados: por exemplo, começavam colocando azul – vermelho – amarelo, depois testavam vermelho – amarelo – azul e se perdiam no total das possibilidades de ordenação destas cores. Outros começavam, por exemplo, por azul – vermelho – amarelo, mas depois esqueciam essa troca e a repetiam em outra tentativa.

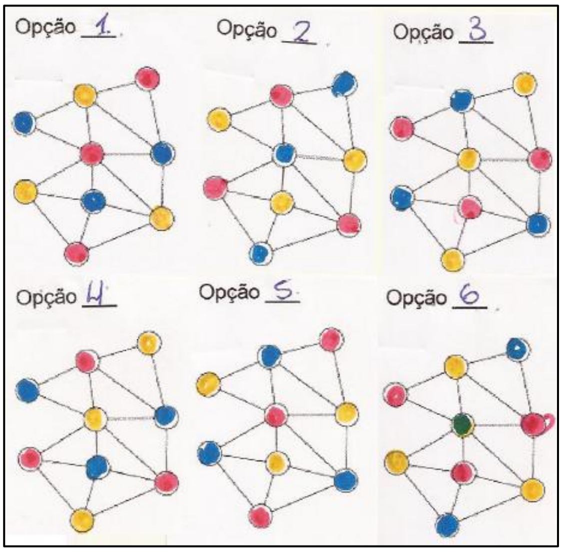
Em outro exercício, de raciocínio combinatório, realizado no último encontro com o Ensino Fundamental II, esta falta de ordem reapareceu. Aqui, os possíveis são imprescindíveis para conseguir resolver o problema, assim como considerar a necessidade de não haver ligação entre os círculos de mesma cor.

Sobre a resposta final, com raras exceções, os estudantes não conseguiam afirmar que o resultado obtido era o correto, mas sim diziam que eram as combinações que tinham conseguido obter, deixando aberta a possibilidade de haver outros. Acredito que o fato de não haver uma prova real, mas apenas uma condicionalidade das cores em função da disposição do diagrama, tenha sido um dificultador neste exercício.

Prevíamos que algum material concreto pudesse ser necessário, pelo menos no início da resolução, para ajudar no entendimento do enunciado e observar as possibilidades de pintura do diagrama. Então, disponibilizamos diagramas iguais aos do enunciado em branco (quantos fosse necessário) e canetas/lápis coloridos. Alguns estudantes não realizaram testes. A seguir, mostramos quatro situações ocorridas com o Ensino Fundamental II para ilustrar a diversidade de respostas: F5 (situação 1), F3 (situação 3), F4 (situação 3) e F6 (situação 4).

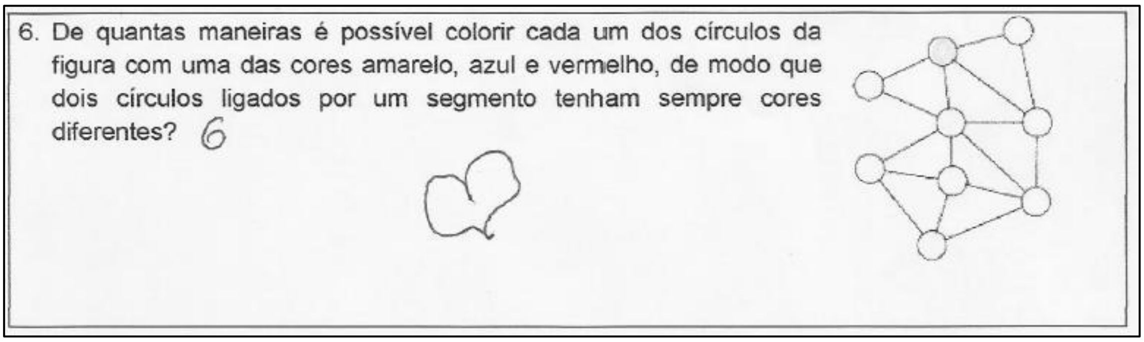
a) Estudante F5 (situação 1)

Figura 22 – Testes realizados por F5.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

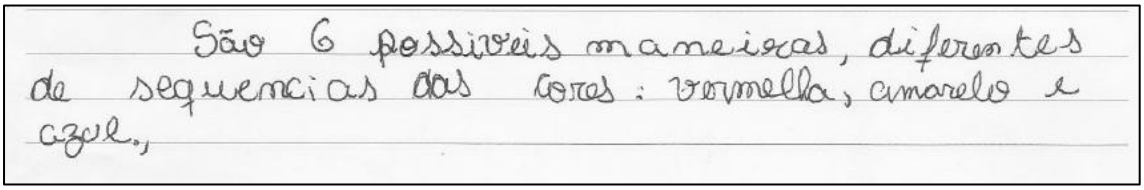
Figura 23 – Resolução da questão 3 por F5.



6. De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes? 6

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 24 – Escrita da resolução da questão 3 por F5.



São 6 possiveis maneiras, diferentes de sequencias das cores: vermelho, amarelo e azul.,

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Vemos que todos os testes realizados por F5 estão corretos e ele afirma como resposta final 6 (certa). Porém, a explicação de F5 (figura 24) não é suficiente para verificarmos como ele resolveu o exercício, de forma que analisaremos a explicação verbal (editada).

F5 – Primeiro eu pintei de uma cor. Depois, eu fui interferindo: pintei de azul, vermelho, amarelo; depois, troquei amarelo pra vermelho. Aí eu fiz outro jeito também... que que isso?... amarelo. Aí primeiro eu troquei vermelho e azul, depois eu peguei azul e vermelho. Fui trocando duas cores.

P – Entendi. E isso tu tens certeza de que te dá todos os possíveis?

[F5 concorda com a cabeça].

P – Teve gente que fez esse exercício e que chegou a resposta vinte e sete, mas não desenhou todos. Tu achas que é possível?

F5 – Acho que não.

P – Por quê?

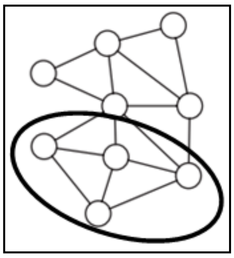
F5 – Vai repetir.

P – Tu tens certeza que repete?

F5 – Absoluta.

Na argumentação com F5, ele mostra um raciocínio para construir os desenhos que não condiz com os três círculos superiores como mostramos. Pela sua descrição, onde diz que trocou duas cores e pela ordem que numerou os testes (figura 22, p. 95), acreditamos que ele se refere aos círculos inferiores da figura, como mostrado no desenho abaixo:

Figura 25 – Destaque do diagrama condizente com a resposta de F5.

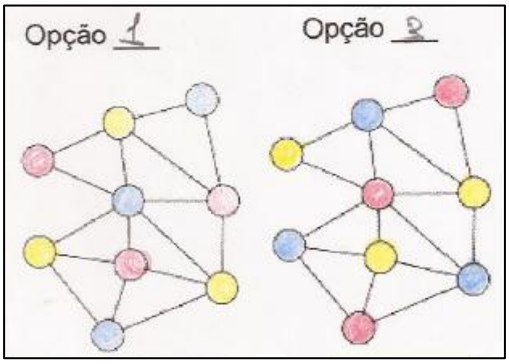


Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

F5 não verbaliza ou escreve que há uma implicação das demais cores em função da escolha destas quatro por onde ele começou. Porém, acreditamos que ele consegue coordenar os possíveis envolvidos no exercício visto que, ao realizar as trocas entre as cores e estabelecer uma ordem para encontrar um novo diagrama, ele cogita todas as opções possíveis. De outra forma, podemos considerar que a sequência de diagramas corretos e a certeza de que seriam apenas seis são um indício de que a compreensão do exercício modificou a ação de pintura do diagrama. Isso fica à mostra nos testes realizados e através da discussão, de forma que a escrita não foi produtiva para nossa análise nesse subcaso.

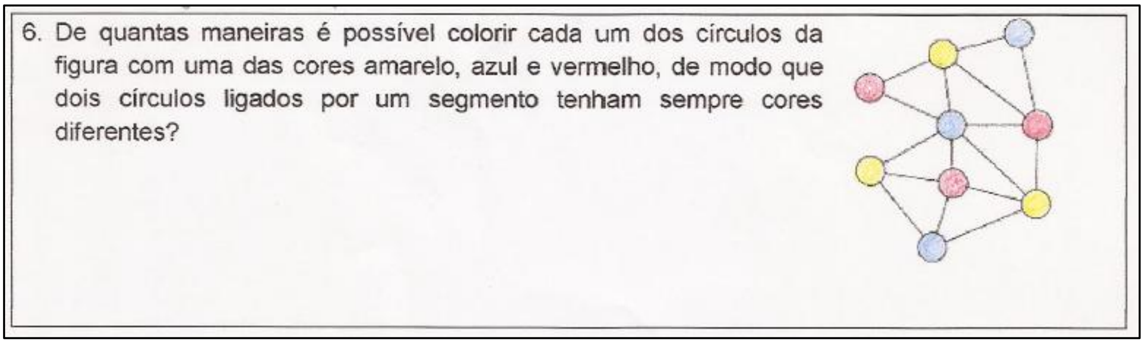
b) Estudante F3 (situação 3)

Figura 26 – Testes realizados por F3.



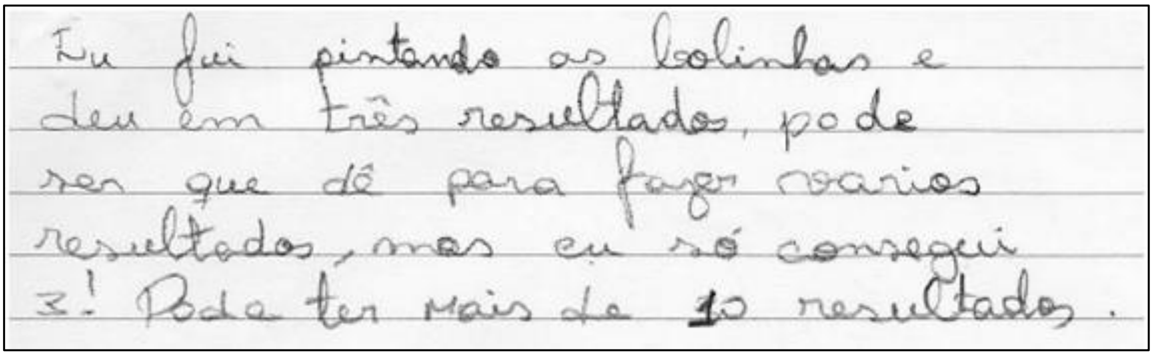
Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 27 – Resolução da questão 3 por F3.


6. De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 28 – Escrita da resolução da questão 3 por F3.


Eu fui pintando as bolinhas e
deu em três resultados, pode
ser que dê para fazer varios
resultados, mas eu só consegui
3! Pode ter mais de 10 resultados.

Fonte: Acervo da pesquisadora.

O estudante F3 afirma, na sua explicação, que obteve três respostas, mas mostra nos testes e na resposta apenas duas disposições distintas. Ele diz que há a possibilidade de haver outras formas de pintar e que sua resposta é três porque foi o que “conseguiu” fazer. Porém, a frase “Pode ter mais de 10 resultados” não tem um motivo explícito para estar na sua explicação. Por quê 10? Por quê não mais, ou menos? Foi necessário recorrermos à argumentação oral.

Ao perguntarmos o procedimento utilizado, F3 afirma que colocou o azul em cima, depois o azul “aqui do lado” e assim foi trocando. Porém, vemos que ele não realiza mais nenhuma troca. Ainda, determinar somente a cor azul não é suficiente, pois ela pode estar ligada a vermelho ou amarelo, ou seja, para cada posição do azul, há duas formas de preencher o diagrama.

Quando questionamos sua opinião sobre as respostas encontradas pelos colegas (quatro, seis ou vinte e sete), F3 afirmou:

F3 – Eu acho que pode, depende assim das cores que ele for usando. Depende do jeito que ele for pintar. [...]

P – E tu achas que, se ele fizesse vinte e sete desenhos, ele não iria repetir nenhum deles?

F3 – Pode ser que sim, como pode ser que não.

P – Tá bom. E por que tu colocaste que tu achas que pode ser mais do que dez?

F3 – Porque...

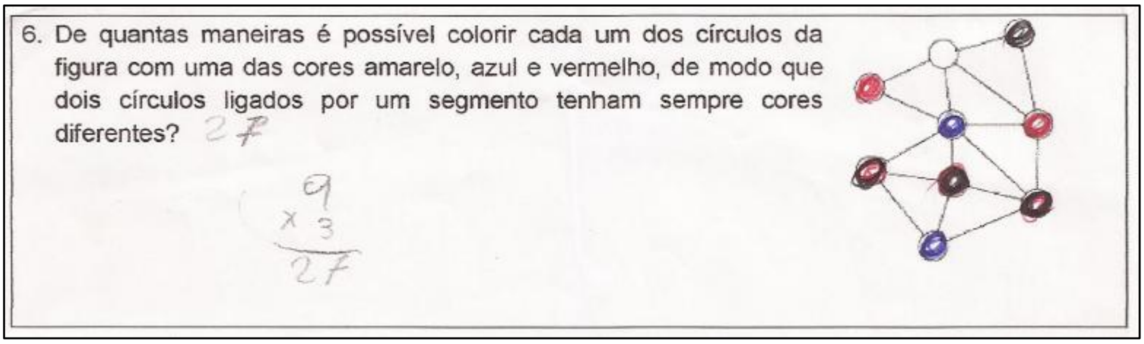
P – Esse dez tem algum motivo ou tu botaste...?

F3 – Eu botei porque eu ouvi que ele [outro colega] disse que era mais de vinte e sete. Ele disse uma coisa assim, então eu botei mais de dez para as pessoas saberem que podem existir mais do que três.

Nesse extrato, vemos que F3 se fundamenta no que ele ouviu o colega dizer para afirmar que poderiam ser “mais de 10” respostas e adiciona essa informação à sua resolução. Apesar disso, ele mostra não ter certeza se o 27 é possível ou não. Os testes realizados por F3 mostram que ele é capaz de coordenar as condições de cores e as ligações entre os círculos, mas a repetição de um dos testes pode indicar que ele não consegue estabelecer uma ordem de alteração nas cores, dessa forma repetindo um dos testes e não buscando outros possíveis. Podemos pensar, também, que a resolução de F3 dá indícios de que a ação supera a compreensão do problema, pois ele afirma, como resposta àquelas combinações de cores que conseguiu realizar, ou seja, baseia sua resposta na ação de colorir em si. Não obstante, interpretamos a afirmação “Depende do jeito que ele for pintar” como uma desconsideração da necessidade de não haver ligação entre cores iguais do exercício, pois a pintura não depende de quem a está pintando, mas sim das condições estipuladas pelo problema.

c) Estudante F4 (situação 3)

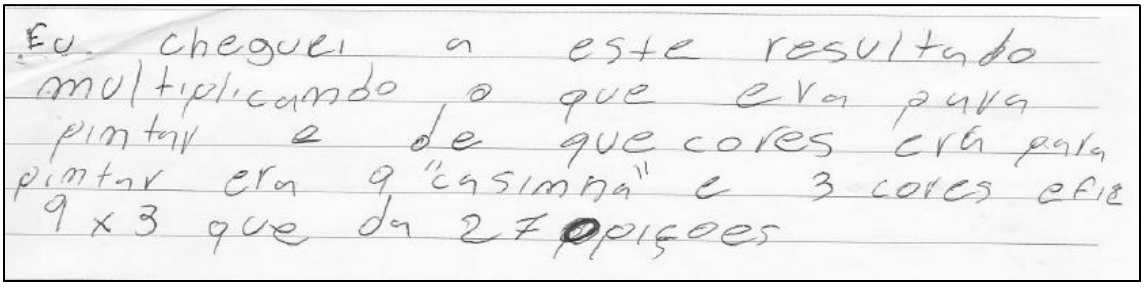
Figura 29 – Resolução da questão 3 por F4.


6. De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes? 27

$$\begin{array}{r} 9 \\ \times\ 3 \\ \hline 27 \end{array}$$

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 30 – Escrita da resolução da questão 3 por F4.


Eu cheguei a este resultado multiplicando o que era para pintar e de que cores era para pintar era 9 "casimha" e 3 cores efiz 9 x 3 que da 27 opiçoes

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Tanto a resposta quanto a explicação dadas por F4, mostram que ele fez uma multiplicação entre o total de círculos no diagrama (nove) e total de cores para pintá-lo (três), obtendo 27 possibilidades. Na argumentação conosco, F4 afirma:

F4 – Sempre vai dar vinte e sete. [Os colegas] Só não fizeram mais, porque não quiseram tentar várias formas. Tem várias formas de fazer.

P – Mas eu não entendi o que te levou a pensar que é uma multiplicação. Me explica: por que tem que ser uma multiplicação?

F4 – Não, é que eu aprendi assim. Meu pai me ensinou assim. Me ensinaram assim.

P – O teu pai fez essa questão com diagrama, também contigo?

F4 – Não essa.

P – E tu tens certeza de que a situação que ele fez contigo, ele pode fazer desse mesmo jeito?

F4 – Pode ser... ou pintando.

F4 diz, então, repetir o raciocínio utilizado em outra questão resolvida com seu pai, mostrando que generalizou um esquema de outra situação que, visivelmente, não poderia ser aplicado aqui. Inferimos que a opção por uma multiplicação seria uma extensão de problemas geométricos de multiplicação trabalhados no Ensino Fundamental I. Por exemplo, um teatro possui 4 fileiras com 5 cadeiras cada, logo possui 4 vezes 5 cadeiras. Pela fala de F4 e por ter feito apenas um teste erroneamente, acreditamos que ele não conseguiu coordenar com a pintura a necessidade das cores diferentes ligadas no diagrama.

Ao afirmarmos que outros colegas obtiveram resultado três ou seis, questionamos se ele acreditava estar correta a resposta obtida.

F4 – Pode ser que está certo, pode ser que está errado... depende de como fizeram.

P – Então, tu achas que nesse exercício tem três respostas corretas: o três, o seis e o vinte e sete que tu chegaste?

F4 – Tem mais também: tem dez, tem...

P – Mas, quantas respostas corretas pode ter o exercício?

F4 – Várias!

P – Quanto...

F4 – O que consegue fazer!

P – Uma coisa é quantas tu consegues fazer, outra coisa é quantas são possíveis. Quantas são possíveis é um número e esse não é um número que vai mudar de um estudante para outro.

F4 – Tá, vinte e sete.

Sentimos a necessidade de diferenciarmos os testes que cada um conseguia fazer e quantas combinações poderiam existir no exercício, pois percebemos que a afirmação inicial de F4 de que “só não fizeram mais, porque não quiseram tentar várias formas” correspondia à crença de que existiam mais possibilidades e queríamos verificar se ele achava que poderiam ser até 27 ou mais. Nesta fala, percebemos que F4 acredita que 27 é o máximo possível e que os colegas que obtiveram um número menor de resultados poderiam ter encontrado mais.

Por dizer que uma maneira de fazer seria pintando, perguntamos como ele faria:

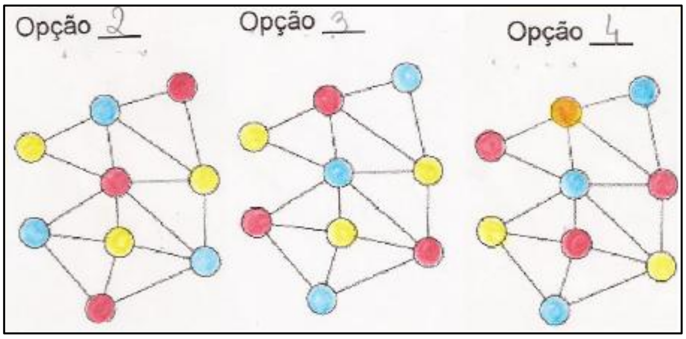
P – Então, tá. Se tu fosses fazer pra mim, como é que tu irias fazer?

F4 – Fazer... separado assim, depois eu... eu ia mudando um pouco, sempre tentando deixar uma igual, na mesma casa.

Na sua fala, F4 pode estar apresentando uma ideia de procedimento correta, mas ele não realizou nenhum teste a não ser o apresentado na resposta final (figura 29, p. 100). Ainda, em função da multiplicação resultar em um número maior de respostas, as limitações impostas pela condição do problema não foram consideradas. Ou seja, F4 não considerou o necessário da situação, não coordenando os elementos do problema e havendo uma superação da ação em relação à compreensão das características do contexto. Aqui, tivemos uma dificuldade na contra-argumentação: com os estudantes que obtiveram três ou seis combinações, falarmos que alguém havia obtido a resposta 27, mesmo que disséssemos que não haviam sido desenhadas todas as possibilidades, gerou a dúvida sobre a existência de mais combinações em alguns participantes. Porém, por 27 ser a resposta mais alta encontrada no grupo, mostrar que outros chegaram em 3 ou 6 não é conflituoso com a resposta de F4, de forma que não houve um desequilíbrio. Assim, uma possibilidade para F4 compreender a matemática e as condições envolvidas no problema seria o próprio processo assimilador, ou seja, assimilar e coordenar as características do problema, incluindo o possível e o necessário.

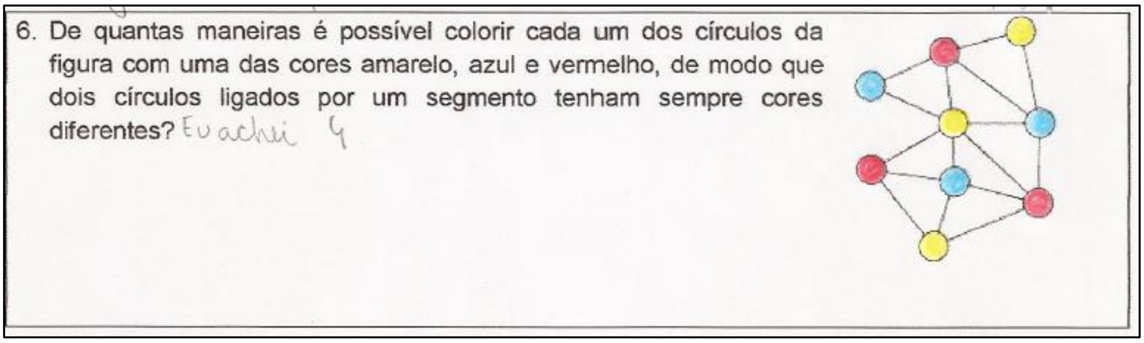
d) Estudante F6 (situação 4)

Figura 31 – Testes realizados por F6.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

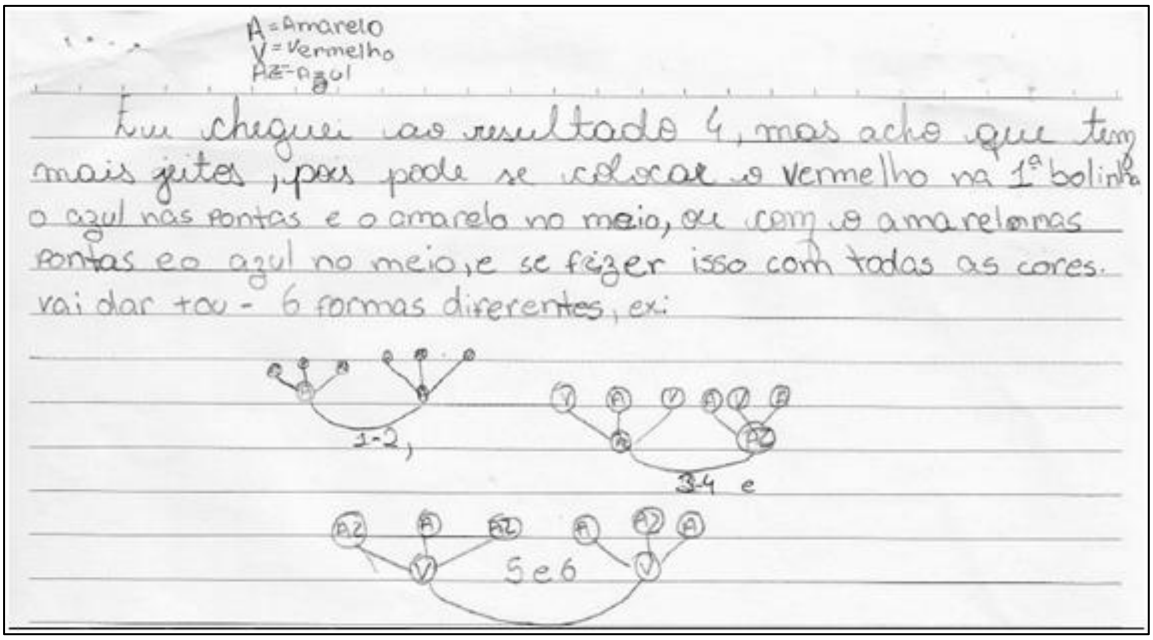
Figura 32 – Resolução da questão 3 por F6.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

A resposta de F6 mostra que ele obteve quatro formas distintas de disposição das cores, todas elas apresentadas nos três testes da figura 31 e na resposta da figura 32.

Figura 33 – Escrita da resolução da questão 3 por F6.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Porém, a explicação escrita e a fala de F6, mostram que ele acredita que há outras maneiras de fazer, chegando ao total de “mais ou menos seis”. A escrita de F6, com rascunhos do diagrama e a sua explicação de “azul nas pontas e o amarelo no meio”, mostram que ele utilizou os mesmos círculos inferiores do diagrama que F5 para começar o desenho.

A escrita e a fala de F6 mostram que, apesar dele não ter colocado como resposta o número correto, ele consegue operar de forma combinatória nesta questão, cogitando possibilidades e suas implicações no diagrama. Ou seja, F6 obteve uma resposta incorreta (quatro), mas a argumentação escrita e oral condizem a com a resposta correta, mostrando a coordenação das condições impostas pelo problema. Na arguição de F6, ele confirma o procedimento utilizado e afirma que obteve seis resultados, mas só fez quatro. Observamos que a compreensão do possível e do necessário do problema modificaram a ação de F6, que conseguiu pensar em outras formas de colorir o diagrama ao coordenar os elementos da situação.

A partir dos subcasos analisados, podemos concluir que o caso 1 (Ensino Fundamental II) apresentou as quatro situações distintas que acreditávamos encontrar de relações entre o resultado correto obtido na ação e a compreensão dos elementos do problema. As razões que nos levaram a classificar os estudantes em cada uma delas incluem a discussão do possível e do necessário, bem como as relações entre ação e compreensão. Verificamos que, em alguns subcasos, a argumentação oral foi necessária, visto que a escrita não era suficiente para fazermos inferências sobre a compreensão; em outros, a argumentação escrita foi suficiente. De forma geral, a argumentação foi positiva para a análise da resolução das questões.

Em relação a nossa pergunta, verificamos, no caso 1, que a argumentação pode contribuir para a aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas, na medida em que o estudante pode refletir sobre o seu método de resolução, podendo, inclusive, modificá-lo, como na questão dos cartões (vide estudante F5). Não obstante, a argumentação contribui para o ensino da disciplina ao evidenciar aspectos da resolução, que não são mostrados apenas com a resposta final, criando uma oportunidade para o professor (no caso, a pesquisadora) analisá-los, questionar os estudantes e identificar erros e pseudonecessidades presentes na resolução. Seguiremos para o caso 2, com o Ensino Médio, onde replicaremos o método utilizado com o caso 1.

4.3.2 Caso 2 – Ensino Médio

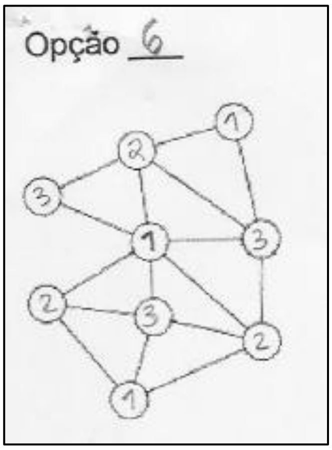
Como relatamos em nossa metodologia, o caso 2, realizado com o Ensino Médio, tem como objetivo produzir efeitos contrastantes em relação ao caso 1 com o Ensino Fundamental II. Acreditamos que essa replicação aconteceria em função do Ensino Médio, em geral, estar em uma etapa do desenvolvimento diferente do Ensino Fundamental II, sendo capaz de mais coordenações e possuir esquemas mais “refinados” de resolução de problemas. Para tal, começamos com a questão 3, realizada no Ensino Fundamental II para comparar resultados e que nos causou grande surpresa. Neste momento, percebemos que não se tratava de uma replicação teórica, mas sim de uma replicação direta. Logo após, analisaremos uma questão do ENEM relativa ao conteúdo de porcentagem.

4.3.2.1 Primeira questão analisada – Raciocínio combinatório

Começaremos pela questão 3, que já discutimos com o Ensino Fundamental II. Lembrando que, para resolvê-la, é necessário que o sujeito preencha o diagrama com três cores, de forma que dois círculos de mesma cor não estejam ligados e há seis formas distintas de pintarmos o diagrama. Mostraremos os subcasos M1 (situação 1), M2 (situação 2), M3 (situação 3), M4 (situação 3), M5 (situação 3) e M6 (inconclusivo).

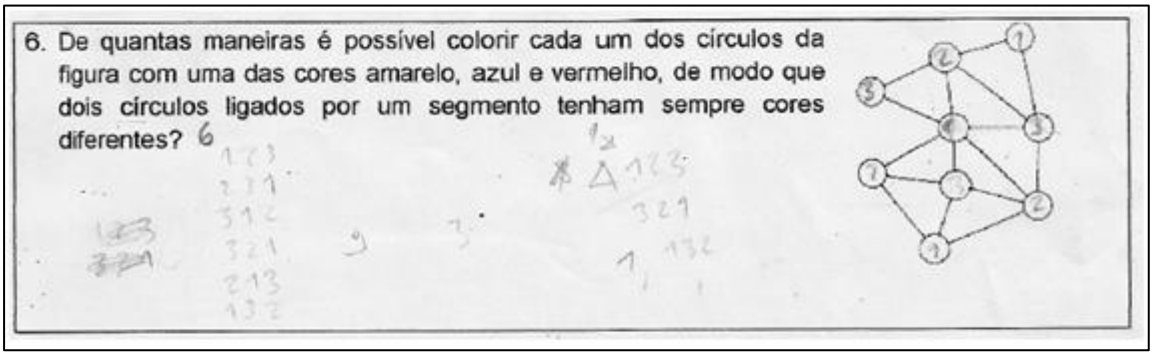
a) Estudante M1 (situação 1)

Figura 34 – Testes realizados por M1.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 35 – Resolução da questão 3 por M1.


6. De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes? 6

Fonte: Acervo da pesquisadora.

M1 realizou apenas um teste e, na sua resposta, apontou as combinações com os números 1, 2 e 3 que ele atribui para as cores. A análise do material escrito indica que M1 compreendeu a consequência da escolha das três cores, o que se confirma na argumentação (editada):

M1 – Assim: os triângulos, eles têm três bolinhas, não é? Só que eu substituí por 1-2-3. Então, faz o triângulo 1-2-3, 2-3-1, 3-1-2, 3-2-1, 2-1-3, 1-3-2, entendeu?

P – Tá.

M1 – Se tu fazer um triângulo, por exemplo, tu já vais estar determinando que vai tá em todos os outros, entendeu?

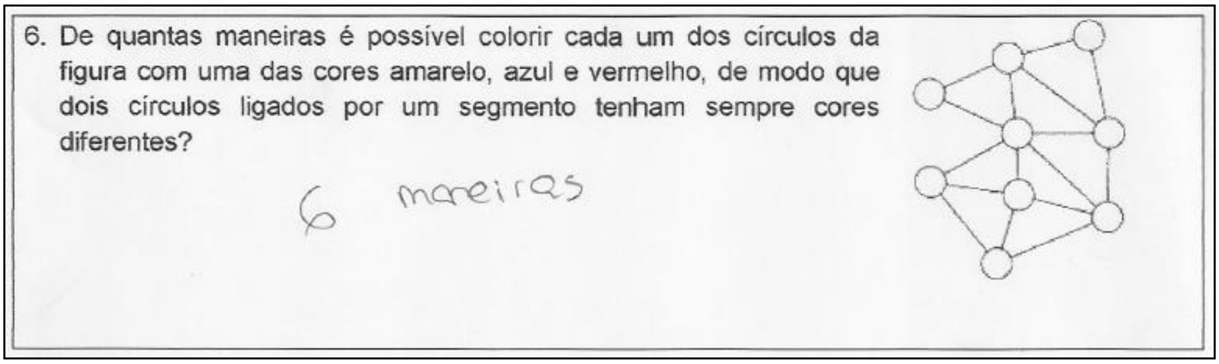
P – Uhmm... entendi.

M1 – Tu podes usar, por exemplo, qualquer um desses, que daí vai fazer com que todos mudem, entendeu? E faça seis combinações diferentes.

Vemos, então, que M1 não somente enxerga as possibilidades a partir de combinações de três círculos na figura, mas também compreende que essas combinações implicam as cores das demais. Ou seja, basta olhar estes três círculos e suas cores para termos a figura toda. Este subcaso evidencia a influência da compreensão na ação, sendo o estudante capaz de generalizar os resultados em uma situação análoga independente do desenho. Assim, verificamos na argumentação que M1 coordena todas as informações do exercício e consegue cogitar os possíveis, coordenando as condições do problema.

b) Estudante M2 (situação 2)

Figura 36 – Resolução da questão 3 por M2.

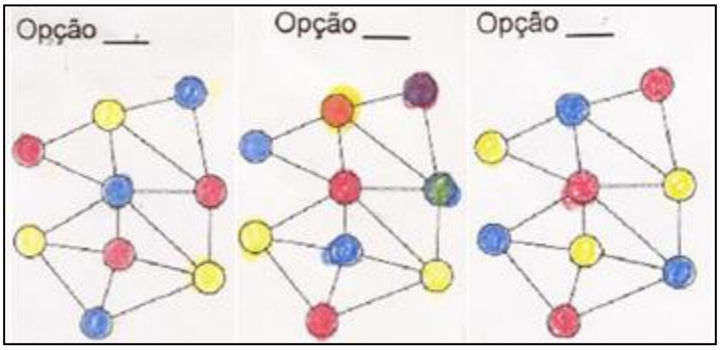


6. De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?

6 maneiras

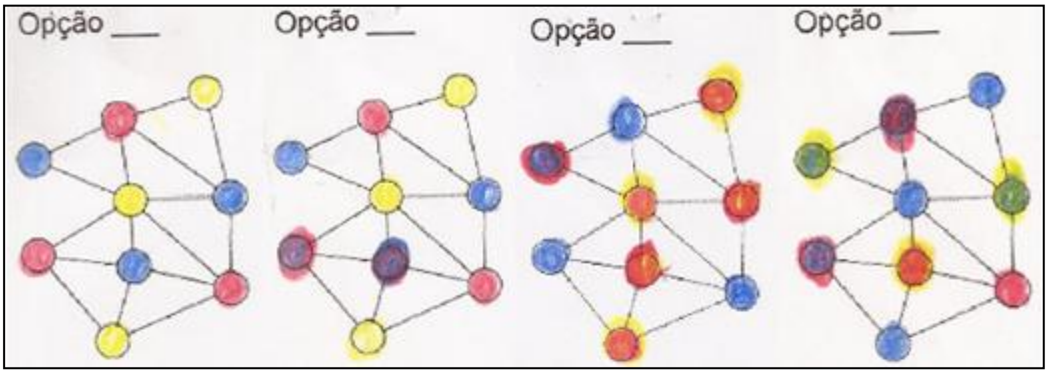
Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 37 – Testes realizados por M2 (1).



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 38 – Testes realizados por M2 (2).



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Os testes de M2 não estão claros, a ponto de avaliarmos se ele os realizou corretamente. Na fala de M2, pudemos verificar a regularidade na troca das cores para determinar todos os possíveis. Porém, o que nos fez classificar M2 como a situação 2, foi a discussão com a pesquisadora sobre os testes possíveis.

P – Entendi. E tu achas que tem mais possíveis pra fazer ou não, que esse é o máximo? M2 – Tem. Eu acho que tem, é que, eu consegui fazer só seis, mas, se tu mexer com várias “coisinhas”, eu acho que tu consegues fazer mais, mas eu achei seis.

Vemos, na fala de M2, que, apesar de conseguir estabelecer uma ordem para encontrar as possibilidades de diagrama, ele não relaciona a necessidade criada pelas condições do problema. Ainda, vemos que a ação (“mexer com várias ‘coisinhas’”) modifica a resposta, dando indícios de que M2 não coordena as limitações impostas pelo problema. Ou seja, não visualiza que estas seis que encontrou são as únicas possíveis.

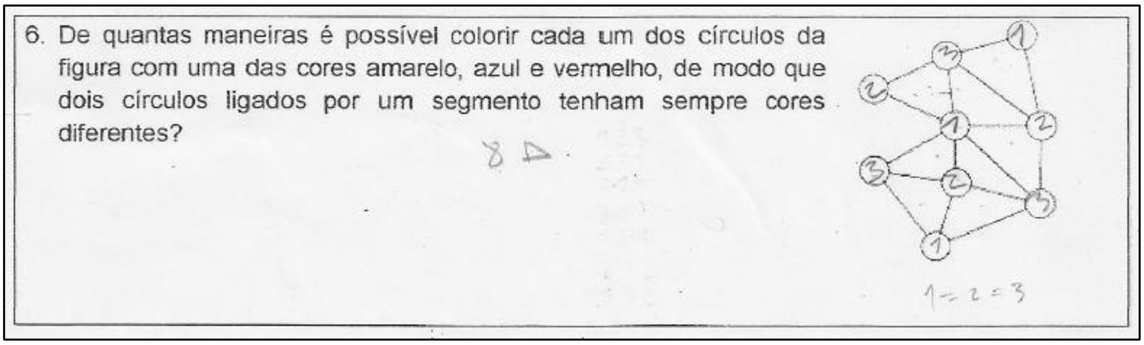
c) Estudante M3 (situação 3)

Durante a resolução da questão, M3 perguntou se seu raciocínio estava correto:

M3 – Fazendo o joguinho com essas três cores, têm seis possibilidades de dar diferentes das cores. Eu pensei: entre esses três aqui têm seis possibilidades, entre esses três também têm seis possibilidades e esse três, têm seis. Somando os três, dá dezoito possibilidades. P – Uhmm, entendi. Agora, se por um acaso, tu montares uma possibilidade dessas aqui, ela interfere na outra possibilidade de baixo? M3 – Interfere. P – Porque, se interferir, daí tu tens que cuidar pra ver se nesses teus dezoito tu não tens repetições, que é a mesma coisa do caso do M4.

M3 começa a resolução com o raciocínio correto de combinação das três cores, mas realiza repetições ao pensar em grupos de três círculos separados e não observar a implicação da escolha da cor nos demais. Quando apontamos a possibilidade de repetição, ele repensa sua resolução e, após conversar com o colega M4, ele entrega como resposta final o seguinte:

Figura 39 – Resolução da questão 3 por M3.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Na leitura da escrita de M3, pensamos que o número oito representava a sua resposta final. Na arguição, ele afirma (editado):

M3 – Tem três cores... tem oito no total... Acho que seis, tá apagado aqui... seis vezes, a gente chegou na resposta.

P – E como é que vocês chegaram nesse seis?

M3 – É que a gente botou um aqui... daí, a gente foi tentando fazer as combinações. E a partir desse um, aqui no meio, dá pra fazer várias combinações. Dá para fazer três combinações com esse um aqui no meio.

M3 começa por confirmar o oito como resposta, mas logo após muda para seis (correta). Pela figura, acreditamos que ele começou pelo centro, porém, ao colocar-se o “um no meio”, não é possível fazer três combinações, independente de onde esteja o um: é possível fazer apenas duas. Logo, a fala de M3 não corresponde ao total de seis, pois deveria resultar em nove combinações possíveis. Como após a resolução os participantes conversaram em duplas sobre as conclusões à que chegaram, e M3 se uniu a M4 (que obteve a resposta correta), acreditamos que ele mudou a sua resposta para seis na fala por acreditar no procedimento utilizado por M4, apesar de não conseguir explicá-lo.

Quando questionado sobre a possibilidade da resposta ser três ou vinte e sete, M3 responde:

M3 – Três é possível... eu não sei se essa resposta é a mais correta pelo que o M4... eu também achava que era três.

P – Mas, vocês conseguiram fazer seis?

M3 – Sim, deu certo.

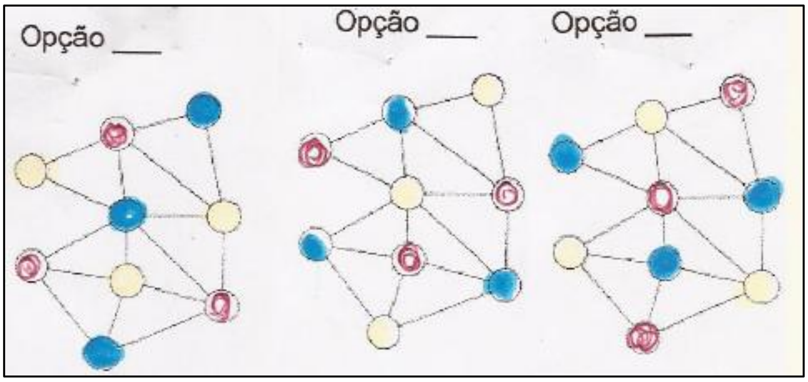
P – Uhum. Então, tu achas que pode ou que não pode ser três?

M3 – Acho que não pode, eu achava que podia ser três, mas agora eu acho que não tenho tanta certeza.

Percebemos que a possibilidade da resposta três gerou um desequilíbrio no estudante, pois ele afirma já não ter mais certeza. Ainda, ele afirma haver a resposta “mais correta”, o que, para nós, aponta que a resposta seis, apesar de correta, não corresponde à necessidade das cores dos círculos. Ou seja, M3 não percebe que, escolhidas as cores de três círculos, os demais serão decorrência destes, o que garante que só há seis combinações possíveis. Cabe observar também que, mesmo tendo dito que conseguiu fazer seis combinações corretas, ele cogita três como resposta, o que é uma contradição, visto que conseguiu fazer mais do que três combinações.

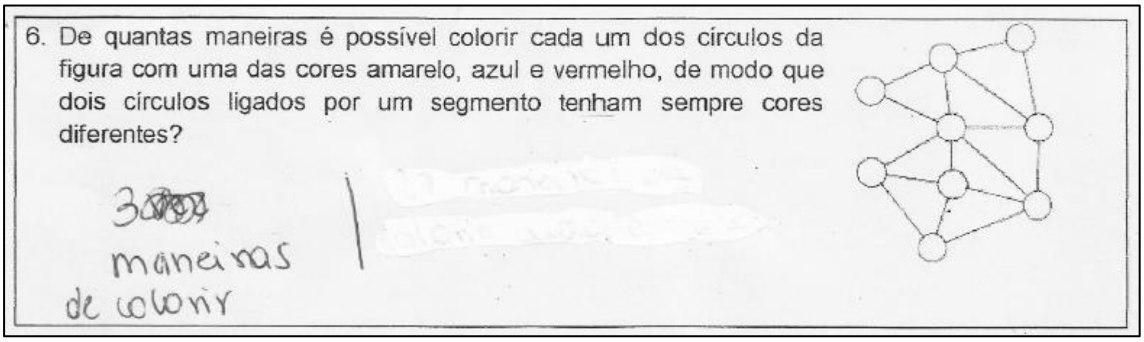
d) Estudante M4 (situação 3)

Figura 40 – Testes realizados por M4.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 41 – Resolução da questão 3 por M4.



6. De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?

3 maneiras de colorir

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Os testes e a resposta escrita de M4 mostram que ele chegou a três formas diferentes de resolução. Porém, na figura, está apagada a resposta “27 maneiras de colorir”, que foi questionada na arguição.

M4 – O que eu apaguei aqui tinha botado vinte e sete porque são vinte e sete bolinhas, para colorir, mas ele tá perguntando a maneira, não as bolinhas. Daí, quando eu li de novo, eu apaguei e botei que são três maneiras.

P – Tá. E tu achas que tem mais maneiras de fazer do que essas três que tu conseguiste?

M4 – Eu acho que não. Acho que só tem essas três pelo que eu tentei.

P – Uhum. Teve pessoas que chegaram à resposta seis e pessoas que chegaram à resposta vinte e sete.

M4 – Uhum.

P – Mas, por exemplo, a de vinte e sete não fez todas as vinte e sete maneiras.

M4 – Uhum.

P – Então, tu achas que é possível que existam vinte e sete, tu achas que é muito, pouco...?

M4 – Eu acho que é muito, pra essa quantidade de bolinhas e pra essa quantidade de cores.

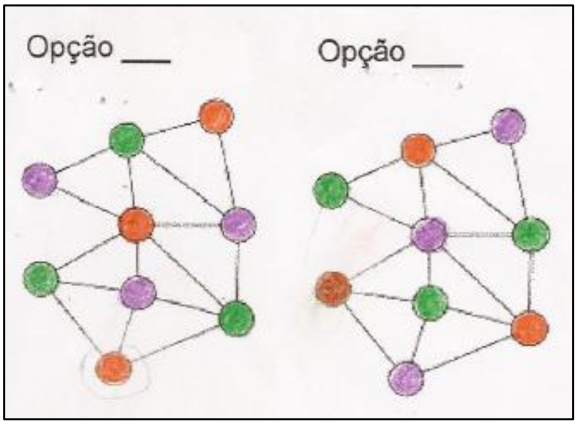
P – E seis, tu achas muito, ou pouco?

M4 – Uhmmm... seis eu não sei, porque eu só consegui fazer três. Então eu não consigo enxergar que possa ter seis maneiras.

Apesar de 27 não representar o número de círculos, como diz M4, pudemos ver que ele o nega como resposta por considerar que a quantidade de maneiras é um valor menor. Talvez dado o procedimento utilizado e a dificuldade em desenhar mais do que três possibilidades, ele descarte o 27 e argumente que não consegue enxergar que possam existir mais maneiras do que as que ele encontrou. Essa postura, mesmo não sendo decisiva para a conclusão do problema, é diferente da dos estudantes do fundamental que, na maioria dos casos, não descartavam a existência de outras possibilidades que não tivessem feito e relativizavam a resposta, de acordo com a interpretação de cada um.

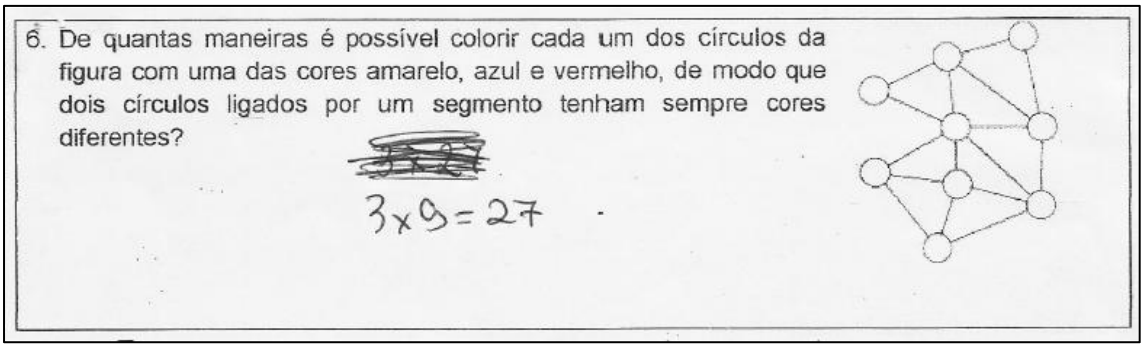
e) Estudante M5 (situação 3)

Figura 42 – Testes realizados por M5.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 43 – Resolução da questão 3 por M5.


6. De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?

~~3x27~~

3x9=27

Fonte: Acervo da pesquisadora.

M5 apresentou dois testes corretos e a resposta 27, que já abordamos com a análise de F4 (p. 99). Na arguição, M5 afirmou que:

M5 – [...] Mas eu pensei que, como elas tinham que estar uma vez em cada coisa, eu multipliquei pelo número de bolinhas que tinha. Deu nove vezes três, vinte e sete. Mais ou menos assim...

[...]

P – Ah, tá. Teve outras pessoas que fizeram por teste e conseguiram chegar a três e chegaram a seis.

M5 – Uhmm...

P – E será que tu consegues chegar a vinte e sete, ou não?

M5 – Ah, fazendo desenho?

P – É.

M5 – Consigo, mas é muito difícil... trabalhoso. Eu acho que consegue.

P – Tá.

M5 – Eu não posso dizer que não, né, se deu vinte e sete.

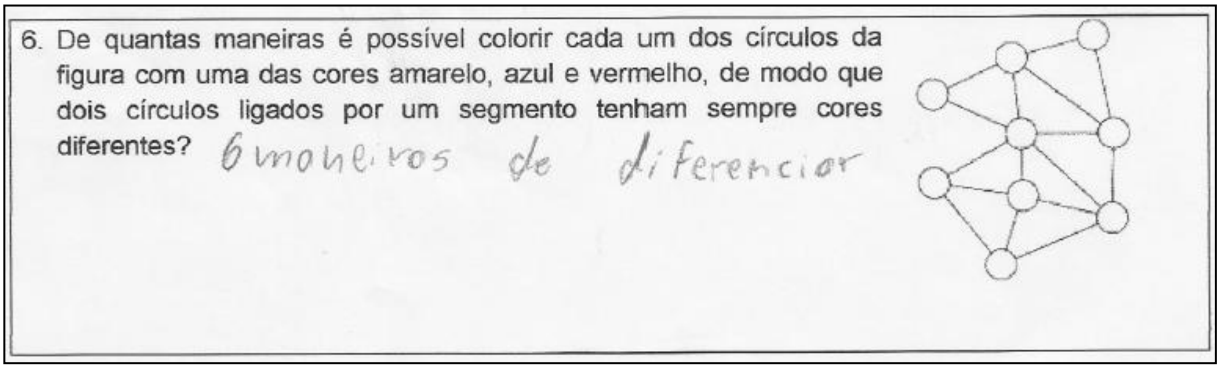
P – E me explica por que tu fizeste uma multiplicação vezes o nove. Eu entendi que o nove é o número de bolinhas, mas por que tu fizeste uma multiplicação?

M5 – Porque é quantas vezes... tu quer saber quantas vezes cada quadradinho pode... cada... se... ahn... bolinha pode ser pintada pela cor.

A justificativa de que cada círculo pode ter uma cor desconsidera a restrição imposta pelas ligações dos círculos com a coloração, logo M5 não coordena todas as informações do problema (como o estudante F4) e não considera a necessidade da ligação dos círculos. Ao insistirmos sobre a multiplicação, ele afirma que não sabe por que a utilizou. Não obstante, observamos que o fato de ter chegado a vinte e sete condiciona a resposta de M5 sobre poder conseguir desenhar todos, ou seja, uma implicação lógica, mas não uma conclusão com base na lógica do problema.

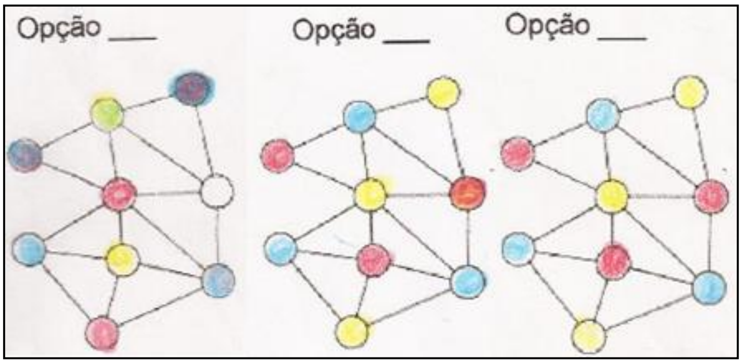
f) Estudante M6 (inconclusivo)

Figura 44 – Resolução da questão 3 por M6.


6. De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes? 6 maneiras de diferenciar

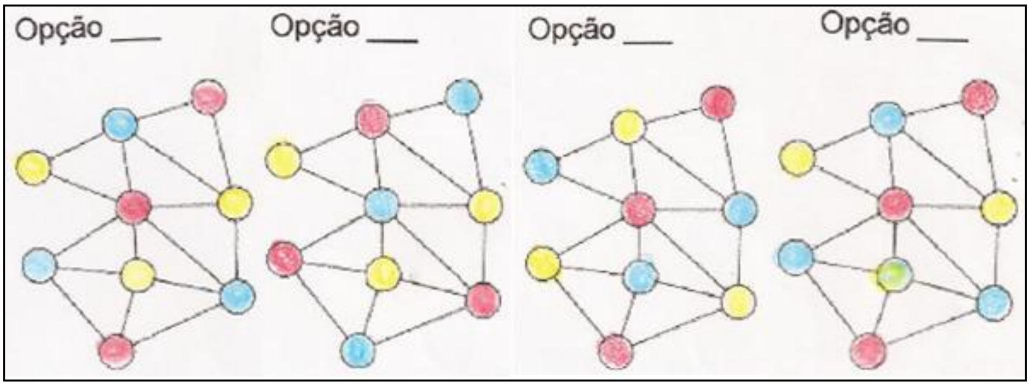
Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 45 – Testes realizados por M6 (1).



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 46 – Testes realizados por M6 (2).



Fonte: Acervo da pesquisadora.

M6 obtém a resposta correta e realiza alguns testes, sem mostrar todas as formas possíveis. Na fala, M6 começa corretamente com o estabelecimento de uma regra começando pelos três círculos superiores (editada):

P – Como que tu pintaste esses? Me explica o teu raciocínio.

M6 – Primeiro assim: eu peguei três papeizinhos desses e botei um do lado do outro. Na primeira bolinha, eu botei vermelho. Na primeira bolinha do outro, eu não botei vermelho. Na terceira bolinha do outro, eu botei vermelho no último. Sendo que no papelzinho do meio, o vermelho tava no do meio. Assim, eu fui preenchendo todos.

P – Uhum...

M6 – De modo aleatório. Depois eu virei os papeizinhos e têm as outras duas bolinhas, do outro lado da figura. Eu fiz a mesma coisa. E, a partir disso, eu consegui fazer de seis maneiras diferentes.

Porém, vemos que ele muda a regra de alteração das cores após virar as figuras e diz que, a partir desses preenchimentos, conseguiu seis maneiras distintas. Se M6 utilizasse corretamente uma dessas regras, já obteria as seis formas, então acreditamos que ele as realizou de forma incompleta e, por isso, realizou as duas. Cabe ressaltar que as duas estão corretas, então não podemos afirmar que M6 não compreende a situação. Ainda, realizar as duas regras implicaria haver repetições, o que podemos ver que acontece nos testes do estudante.

Ao questioná-lo, ele afirma que tentou diferentes maneiras de obter mais respostas, mas não obteve sucesso. Porém, ao mostrarmos as respostas encontradas pelos outros participantes, ele afirma:

P – Tu achas que é possível ser só três, ser vinte e sete...?

M6 – Olha, eu acho que entre três e seis o mais certo é seis, mas vinte e sete eu acho exagero.

P – Tu achas demais?

M6 – Na verdade eu... eu não sei como calcular isso, mas eu... eu aposto no seis.

Acreditamos que há dúvida na fala de M6, mas não podemos afirmá-lo veementemente, diferente do subcaso de M2 que afirma haver outras formas. Pelas razões apresentadas, consideramos o subcaso de M6 inconclusivo.

Além deste problema apresentar três situações distintas, ele também é rico na análise pela sua diversidade de respostas. Com os subcasos apresentados, pudemos ver que há diferentes características em cada resolução que podem implicar em distintas situações. Ainda, como na questão 1 do Ensino Fundamental II (vide estudante F4, p. 99), a argumentação com M6 não foi suficiente para concluirmos em qual situação o classificamos. Porém, a partir dela, pudemos realizar inferências sobre a compreensão do estudante que não faríamos, se apenas observássemos sua resposta, que estava correta.

4.3.2.2 Segunda questão analisada – Porcentagem.

Figura 47 – Questão 4 (aplicada dia 16 de abril de 2014).

Um laboratório realiza exames em que é possível observar a taxa de glicose de uma pessoa. Os resultados são analisados de acordo com o quadro a seguir.

Hipoglicemia	Taxa de glicose menor ou igual a 70 mg/dL
Normal	Taxa de glicose maior que 70 mg/dL e menor ou igual a 100 mg/dL
Pré-diabetes	Taxa de glicose maior que 100 mg/dL e menor ou igual a 125 mg/dL
Diabetes Melito	Taxa de glicose maior que 125 mg/dL e menor ou igual a 250 mg/dL
Hiperglicemia	Taxa de glicose maior que 250 mg/dL

Um paciente fez um exame de glicose nesse laboratório e comprovou que estava com hiperglicemia. Sua taxa de glicose era de 300 mg/dL. Seu médico prescreveu um tratamento em duas etapas. Na primeira etapa ele conseguiu reduzir sua taxa em 30% e na segunda etapa em 10%.

Ao calcular a sua taxa de glicose após as duas reduções, o paciente verificou que estava na categoria de

A) hipoglicemia.
B) normal.
C) pré-diabetes.
D) diabetes melito.
E) hiperglicemia.

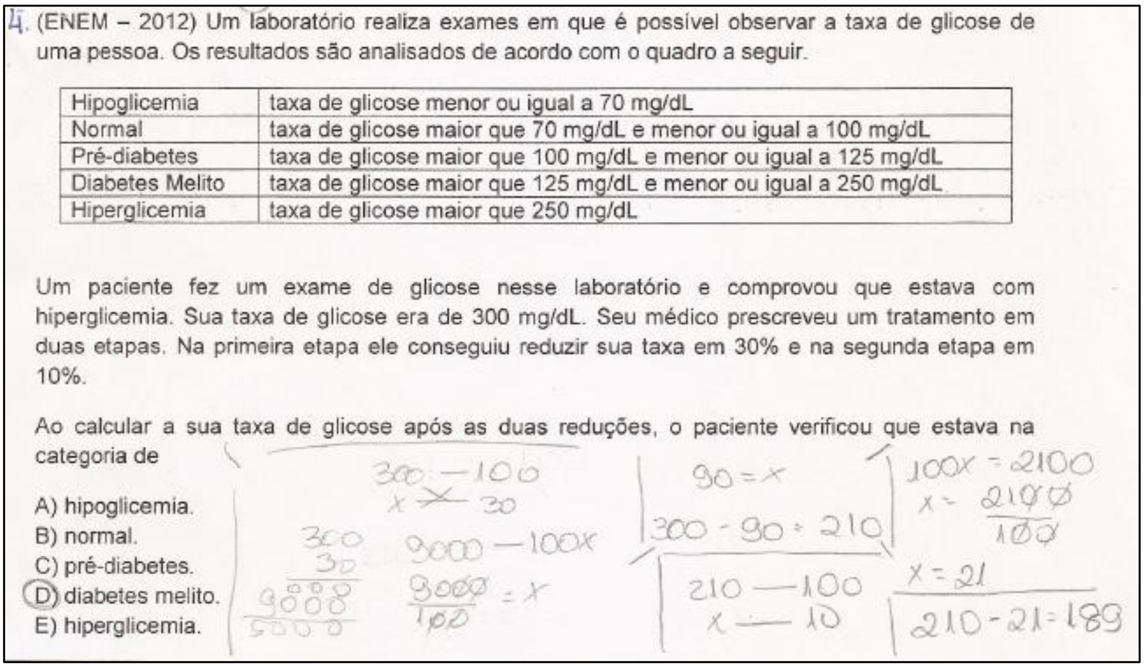
Fonte: ENEM 2012.

Este exercício consiste em duas reduções em percentual, que podem ser realizadas de diferentes formas. Mostraremos aqui uma das opções a partir de duas regras de três. Na primeira, queremos reduzir 30% da taxa atual, que é 300 mg/dL, logo calculamos 70% de 300 mg/dL para obtermos o total após a redução de 30%. Por regra de três, temos que 100% está para 300 assim como 70% está para “x”. Obtemos “x” igual a 210 mg/dL. Na segunda parte do tratamento, houve uma redução de 10% sobre o valor atual, ou seja, devemos calcular 90% de 210 mg/dL. Analogamente, obtemos 189 mg/dL. Logo, como 189 mg/dL está entre 125 mg/dL e 250 mg/dL, o paciente, após o tratamento, se encontra na categoria diabetes melito.

Esta questão foi aplicada no segundo encontro sobre porcentagens e aqui mostramos quatro subcasos: M2 (situação 1), M7 (situação 2), M8 (situação 3) e M6 (situação 4).

a) Estudante M2 (situação 1)

Figura 48 – Resolução da questão 4 por M2.



4. (ENEM – 2012) Um laboratório realiza exames em que é possível observar a taxa de glicose de uma pessoa. Os resultados são analisados de acordo com o quadro a seguir.

Hipoglicemia	taxa de glicose menor ou igual a 70 mg/dL
Normal	taxa de glicose maior que 70 mg/dL e menor ou igual a 100 mg/dL
Pré-diabetes	taxa de glicose maior que 100 mg/dL e menor ou igual a 125 mg/dL
Diabetes Melito	taxa de glicose maior que 125 mg/dL e menor ou igual a 250 mg/dL
Hiperglicemia	taxa de glicose maior que 250 mg/dL

Um paciente fez um exame de glicose nesse laboratório e comprovou que estava com hiperglicemia. Sua taxa de glicose era de 300 mg/dL. Seu médico prescreveu um tratamento em duas etapas. Na primeira etapa ele conseguiu reduzir sua taxa em 30% e na segunda etapa em 10%.

Ao calcular a sua taxa de glicose após as duas reduções, o paciente verificou que estava na categoria de

A) hipoglicemia.
B) normal.
C) pré-diabetes.
D) diabetes melito.
E) hiperglicemia.

300 — 100
x — 30

300
30
9000

9000 — 100x

$\frac{9000}{100} = x$

90 = x

300 - 90 = 210

210 — 100
x — 10

100x = 2100

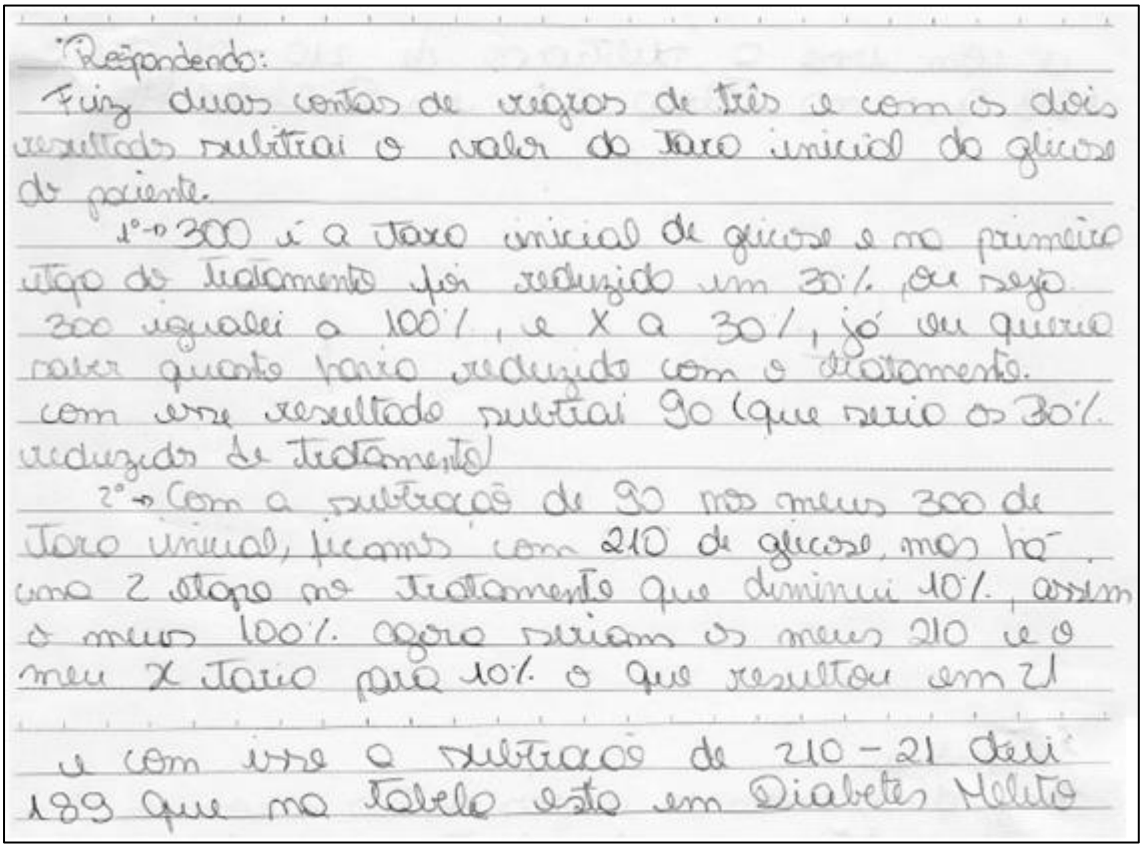
$x = \frac{2100}{100}$

x = 21

210 - 21 = 189

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 49 – Escrita da resolução da questão 4 por M2.


Respondendo:
Fiz duas contas de regras de três e com os dois resultados subtrai o valor da taxa inicial da glicose da paciente.
1° → 300 é a taxa inicial de glicose e no primeiro etapa do tratamento foi reduzido em 30%, ou seja 300 igualei a 100%, e X a 30%, já eu queria saber quanto havia reduzido com o tratamento.
com esse resultado subtrai 90 (que seria os 30% reduzidos do tratamento)
2° → Com a subtração de 90 nos meus 300 de taxa inicial, ficamos com 210 de glicose, mas há uma 2 etapa no tratamento que diminui 10%, assim o meus 100% agora seriam os meus 210 e o meu X taxa para 10% o que resultou em 21
e com esse a subtração de 210 - 21 deu 189 que na tabela está em Diabetes Melito

Fonte: Acervo da pesquisadora.

M2 acertou a resposta e apresentou uma escrita clara e objetiva da resolução. Questionamos M2 sobre as respostas encontradas pelos colegas:

P – Teve várias respostas diferentes, dentre as respostas diferentes teve pré-diabetes, teve também hiperglicemia. O que tu achas?

M2 – Eu acho que a pessoa pode ter errado o cálculo.

P – É?

M2 – É.

P – E essa é a única possibilidade?

M2 – Uhmmm... eu posso ter errado o cálculo. [risos] Não sei. Não sei mesmo.

P – Tu tens certeza que o teu cálculo está certo?

M2 – Sim.

Percebemos que M2 não cogita que há outras respostas para o exercício, podendo ter ocorrido algum erro no cálculo para justificar o erro dos colegas ou o seu. A informação de haver outras respostas não gera um desequilíbrio. Contudo, ao final, M2 reitera que acredita que seu cálculo está correto e mantém a sua resposta. A descrição dos passos utilizados indica que a compreensão dos elementos do problema influencia a ação (cálculos utilizados, ordem de resolução, tomada de decisões) de M2. A argumentação oral não dá mais informações sobre a compreensão de M2 sobre os conteúdos envolvidos na questão, mas consideramos a escrita suficiente para afirmarmos que ele compreende o conceito de porcentagem e sua aplicação.

b) Estudante M7 (situação 2)

Figura 50 – Resolução da questão 4 por M7.

4. (ENEM – 2012) Um laboratório realiza exames em que é possível observar a taxa de glicose de uma pessoa. Os resultados são analisados de acordo com o quadro a seguir.

Hipoglicemia	taxa de glicose menor ou igual a 70 mg/dL
Normal	taxa de glicose maior que 70 mg/dL e menor ou igual a 100 mg/dL
Pré-diabetes	taxa de glicose maior que 100 mg/dL e menor ou igual a 125 mg/dL
Diabetes Melito	taxa de glicose maior que 125 mg/dL e menor ou igual a 250 mg/dL
Hiperglicemia	taxa de glicose maior que 250 mg/dL

Um paciente fez um exame de glicose nesse laboratório e comprovou que estava com hiperglicemia. Sua taxa de glicose era de 300 mg/dL. Seu médico prescreveu um tratamento em duas etapas. Na primeira etapa ele conseguiu reduzir sua taxa em 30% e na segunda etapa em 10%.

Ao calcular a sua taxa de glicose após as duas reduções, o paciente verificou que estava na categoria de

A) hipoglicemia.
B) normal.
C) pré-diabetes.
D) diabetes melito.
E) hiperglicemia.

$$\begin{array}{r} 300 \\ -\,250 \\ \hline 50\,mg/dL \end{array}$$

50 — 40%
x — 100

$40x = 5000$

$x = \frac{5000}{40} \rightarrow x = 125$

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 51 – Escrita da resolução da questão 4 por M7.

Eu diminui o 300 mg/dL com o 250 mg/dL,
que resultou em 50 mg/dL.
Sendo assim, fiz regra de três, 50 mg/dc está
para 40 %, e "x" está para 100 %.

Resultado: 125 mg/dc.
Letra "b" → Diabetes Melito

Fonte: Acervo da pesquisadora.

O estudante M7 realiza uma diminuição de 250 mg/dL do valor 300 mg/dL, resultando 50 mg/dL sobre os quais ele calcula a porcentagem de 40%. Consideramos esse erro inicial relativo à interpretação do enunciado. Ao questionarmos M7 sobre o 50 mg/dL, ele afirma:

M7 – Ele estava com hiperglicemia, que seriam duzentos e cinquenta. Já que a taxa de glicose era de trezentos, eu diminuí a taxa de glicose com a hiperglicemia [ri].

P – Uhum.

M7 – Deu cinquenta. Eu fiz isso... Mas deve estar tudo errado.

Notamos que M7 realiza a soma de 30% e 10%, calculando 40% do valor total. Nossa experiência de sala de aula mostra que somar duas porcentagens é um erro comum, em função do estudante não compreender que cada uma delas é calculada sobre um total que muda, ou seja, a redução de 30% é sobre um valor, enquanto que a de 10% é sobre outro valor, não podendo-se, assim, somar as duas porcentagens. Por essa característica, consideramos este erro conceitual em relação à porcentagem.

Ainda, M7 monta erroneamente a regra de três, trocando a porcentagem de lugar e chegando ao resultado de 125 mg/dL. Este erro também foi cometido pelo estudante M6 e será abordado mais adiante. Se ele tivesse calculado a porcentagem corretamente, ou seja, 40% de 50 como ele pretendia (vide figura 50, p.122), teria obtido 20 mg/dL, que corresponderia à hipoglicemia. Ao analisar na tabela a qual grupo o paciente pertenceria, M7 concluiu que seria diabetes melito, apesar de 125 mg/dL corresponder à categoria pré-diabetes. Ou seja, apesar dos erros, ele marcou a resposta correta. Este é um exemplo claro de que a resposta, ainda mais sendo uma questão objetiva, pode não corresponder ao conhecimento e uso corretos de conceitos para a resolução do problema. Quando questionado sobre a sua resposta estar correta ou não, M7 afirma:

P – Mas tu achas que isso está errado ou que está certo?

M7 – Eu acho que está errado. Não, eu acho que no final consegui o mesmo resultado de todo mundo, só que eu fiz de um jeito diferente.

P – E o teu cento e vinte e cinco, por que ele se encaixou em diabetes melito?

M7 – É que a taxa de glicose da diabetes melito varia entre cento e vinte e cinco, é maior que cento e vinte e cinco, e menor ou igual a duzentos e cinquenta.

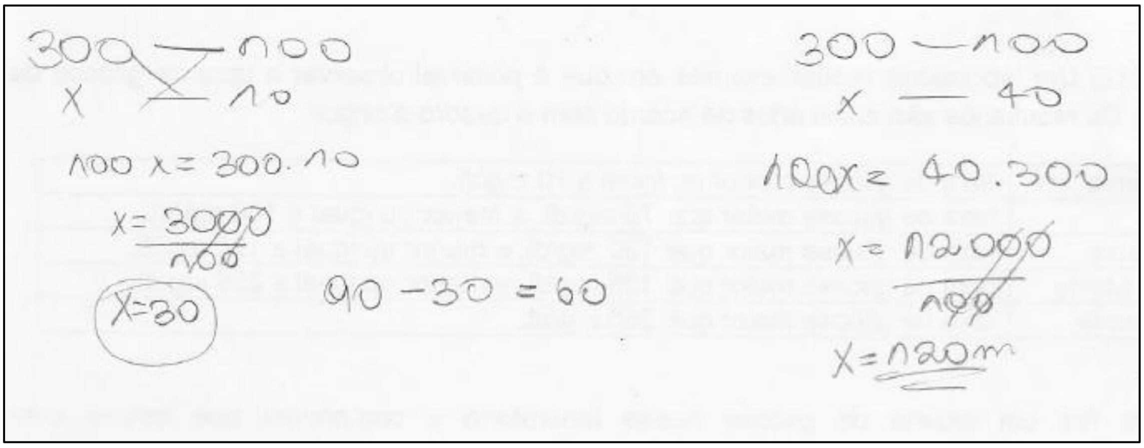
P – E o pré-diabetes?

M7 – É sem... menor... é... ai, agora já não sei.

Não obstante, na arguição, ele afirma que não poderia somar as porcentagens “porque disseram que estava errado”, mas não sabe o porquê. No trecho acima, diz que fez “de um jeito diferente” e que não sabia mais porque havia encaixado 125 mg/dL em diabetes melito, ou seja, a arguição confirma a resposta obtida e que M7 não compreende os procedimentos utilizados. Apesar de, durante a argumentação, ele não perceber os seus erros, a partir da escrita e da arguição, pudemos identificar os equívocos que não estariam aparentes se tivéssemos pedido apenas a alternativa correta.

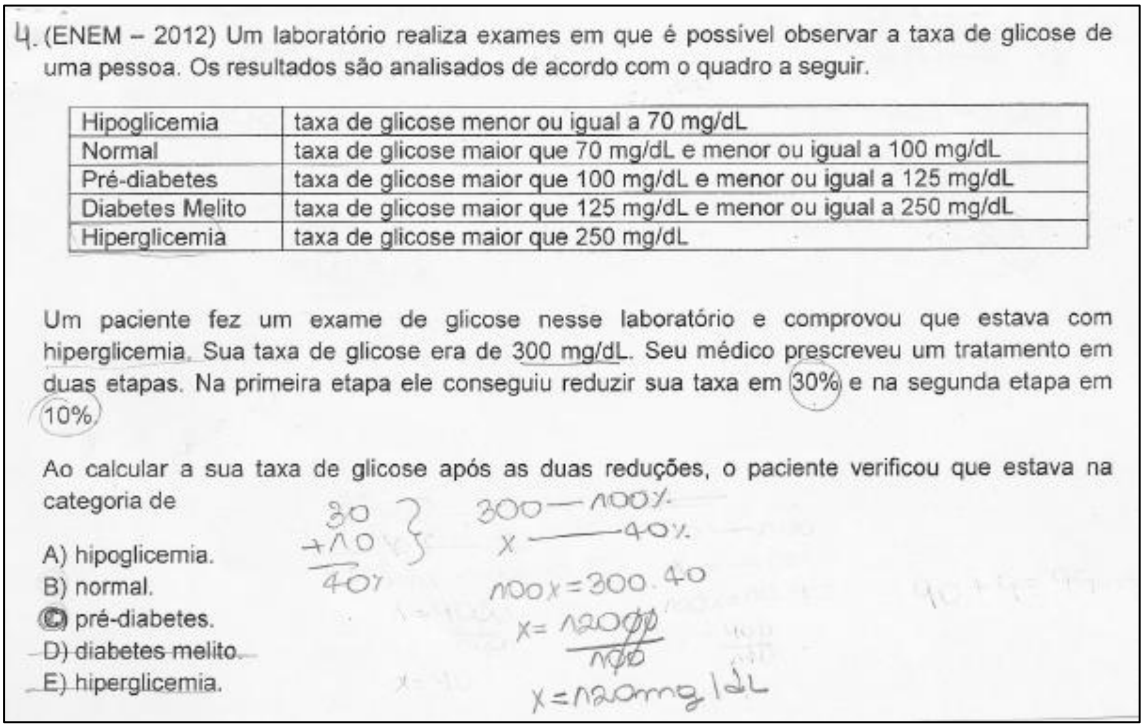
c) Estudante M8 (situação 3)

Figura 52 – Esboço da resolução da questão 4 por M8.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 53 – Resolução da questão 4 por M8.



4. (ENEM – 2012) Um laboratório realiza exames em que é possível observar a taxa de glicose de uma pessoa. Os resultados são analisados de acordo com o quadro a seguir.

Hipoglicemia	taxa de glicose menor ou igual a 70 mg/dL
Normal	taxa de glicose maior que 70 mg/dL e menor ou igual a 100 mg/dL
Pré-diabetes	taxa de glicose maior que 100 mg/dL e menor ou igual a 125 mg/dL
Diabetes Melito	taxa de glicose maior que 125 mg/dL e menor ou igual a 250 mg/dL
Hiperglicemia	taxa de glicose maior que 250 mg/dL

Um paciente fez um exame de glicose nesse laboratório e comprovou que estava com hiperglicemia. Sua taxa de glicose era de 300 mg/dL. Seu médico prescreveu um tratamento em duas etapas. Na primeira etapa ele conseguiu reduzir sua taxa em 30% e na segunda etapa em 10%.

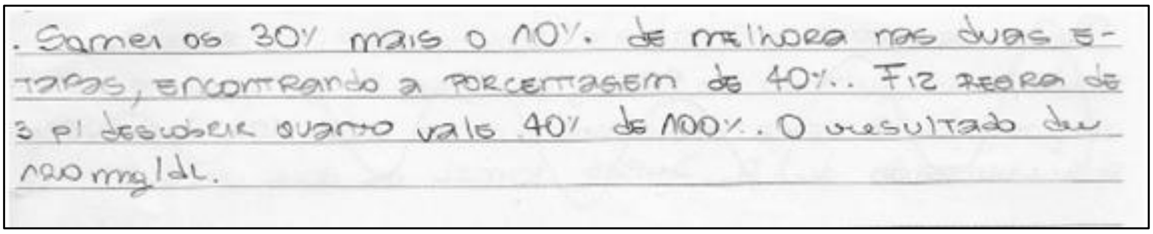
Ao calcular a sua taxa de glicose após as duas reduções, o paciente verificou que estava na categoria de

A) hipoglicemia.
B) normal.
C) pré-diabetes.
D) diabetes melito.
E) hiperglicemia.

30 + 10 = 40%
300 — 100%
x — 40%
100x = 300 . 40
x = 12000/100
x = 120mg/dL

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 54 – Escrita da resolução da questão 4 por M8.



Somei os 30% mais o 10%. de melhora nas duas etapas, encontrando a porcentagem de 40%.. Fiz regra de 3 p/ descobrir quanto vale 40% de 100%. O resultado deu 120 mg/dL.

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Apesar de M8 ter começado a resolução no rascunho corretamente, calculando 30% da taxa inicial do paciente, na sua explicação, ele diz que queria descobrir quanto vale 40% de 100% (e não de 300) e, na sua resposta final, ele afirma que somou as duas reduções, obtendo 40% de desconto no total (300 mg/dL), como realizado pelo estudante M7. A fala de M8 confirma sua escrita:

M8 – [...] Primeiro, eu calculei as duas porcentagens, porque aqui falava que no final das duas, então, pra mim, eu podia tanto fazer separado quanto somar aqui as duas, que ia dar na mesma coisa. Eu peguei os trezentos, que era os cem por cento da glicose dele. Fiz regra de três, “x” por quarenta por cento, que foi trinta mais dez por cento, que foi o que deu o resultado da minha soma. [...] Eu marquei como pré-diabetes, porque está entre cem e cento e vinte e cinco.

[...]

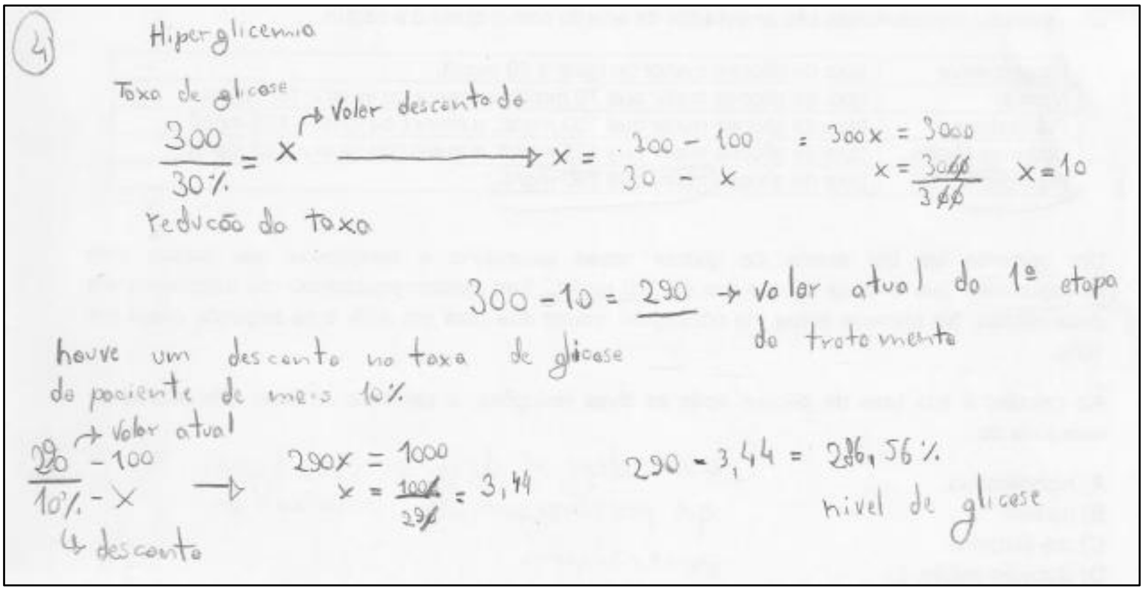
P – E esse cento e vinte a que tu chegaste ele é o quê?

M8 – Quanto que depois dessas duas reduções de trinta e dez por cento, quanto que estava agora a hiperglicemia dele.

Podemos ver que M8 explica como procedeu e confirma o seu erro. Assim, concluímos que ele obteve um resultado incorreto, e a sua argumentação confirma este resultado, mostrando um erro conceitual em relação à porcentagem. Posteriormente, na análise do áudio com M8, vimos que perdemos a oportunidade de, após sua afirmação de que poderia fazer 40% ou 30% e 10%, pedirmos para verificar se era a mesma coisa ou não, através do cálculo. Fazer esta proposta poderia ter propiciado um momento de reflexão sobre o procedimento e sobre o conceito de porcentagem.

d) Estudante M6 (situação 4)

Figura 55 – Esboço da resolução da questão 4 por M6.



4)

Hiperglicemia

Taxa de glicose

$\frac{300}{30\%} = x \xrightarrow{} x = \frac{300 - 100}{30 - x} \quad : \quad 300x = 3000 \quad x = \frac{30\cancel{00}}{3\cancel{00}} \quad x = 10$

↳ Valor desconto do

redução da taxa

$300 - 10 = \underline{290}$ → valor atual da 1ª etapa do tratamento

houve um desconto na taxa de glicose do paciente de mais 10%

→ Valor atual

$\frac{290}{10\%} - \frac{100}{x} \longrightarrow 290x = 1000 \quad x = \frac{100\cancel{0}}{29\cancel{0}} = 3{,}44$

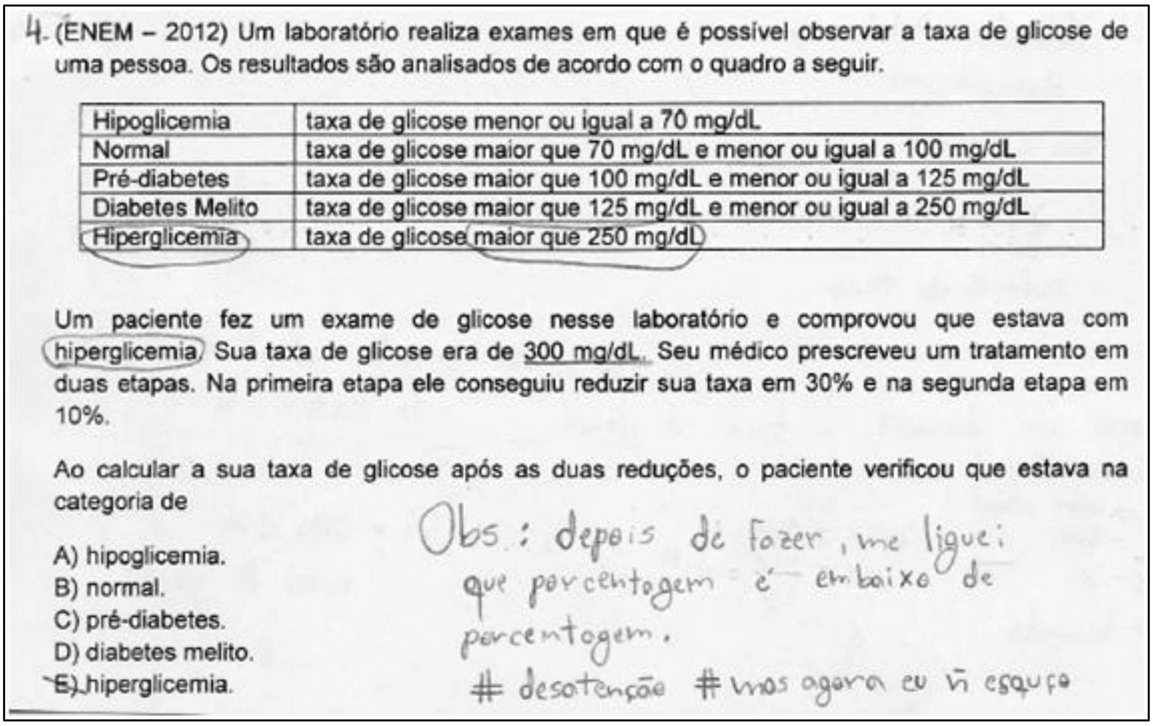
↳ desconto

$290 - 3{,}44 = 286{,}56\%$

nivel de glicose

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 56 – Resolução da questão 4 por M6.



4. (ENEM – 2012) Um laboratório realiza exames em que é possível observar a taxa de glicose de uma pessoa. Os resultados são analisados de acordo com o quadro a seguir.

Hipoglicemia	taxa de glicose menor ou igual a 70 mg/dL
Normal	taxa de glicose maior que 70 mg/dL e menor ou igual a 100 mg/dL
Pré-diabetes	taxa de glicose maior que 100 mg/dL e menor ou igual a 125 mg/dL
Diabetes Melito	taxa de glicose maior que 125 mg/dL e menor ou igual a 250 mg/dL
Hiperglicemia	taxa de glicose maior que 250 mg/dL

Um paciente fez um exame de glicose nesse laboratório e comprovou que estava com hiperglicemia. Sua taxa de glicose era de 300 mg/dL. Seu médico prescreveu um tratamento em duas etapas. Na primeira etapa ele conseguiu reduzir sua taxa em 30% e na segunda etapa em 10%.

Ao calcular a sua taxa de glicose após as duas reduções, o paciente verificou que estava na categoria de

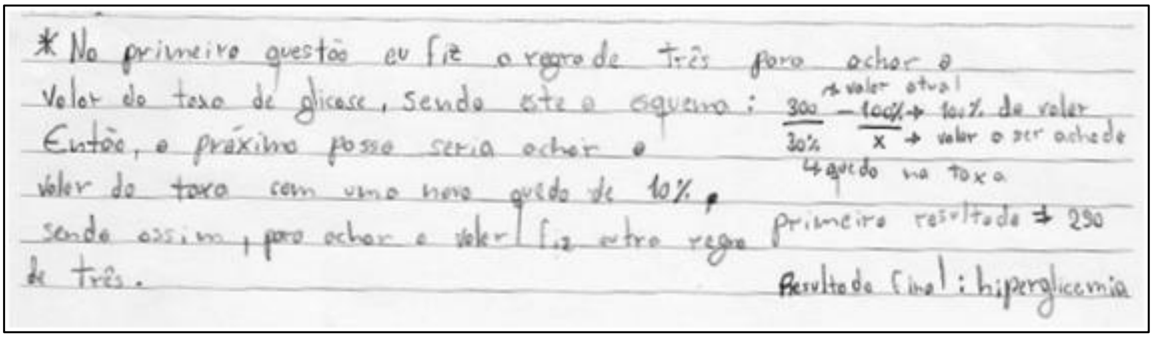
A) hipoglicemia.
B) normal.
C) pré-diabetes.
D) diabetes melito.
E) hiperglicemia.

Obs: depois de fazer, me liguei que porcentagem é embaixo de porcentagem.

desatenção # mas agora eu ñ esqueço

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 57 – Escrita da resolução da questão 4 por M6.


* No primeiro questão eu fiz o regra de três para achar o valor da taxa de glicose, sendo este o esquema: Então, o próximo passo seria achar o valor da taxa com uma nova queda de 10%, sendo assim, para achar o valor fiz outra regra de três.

300 ← valor atual — 100% → 10% do valor

30% — x → valor a ser achado

4 queda na taxa

primeiro resultado ≠ 290

Resultado final: hiperglicemia

Fonte: Acervo da pesquisadora.

No rascunho e na explicação de M6, vemos que ele interpreta corretamente a questão sobre utilizar regra de três e saber que deve calculá-la duas vezes, uma vez para cada redução. Porém, M6 arma o algoritmo para a regra de três de forma incorreta, trocando a porcentagem e o valor de posição, o que não garante a proporção. Dessa forma, ele obtém um resultado incorreto.

Porém, na escrita que pode ser vista na figura, M6 mostra que cometeu uma “falta de atenção” e reconhece o seu erro. Na arguição, M6 explica corretamente quais os passos que deve realizar, inclusive a montagem da regra de três que foi o seu erro inicial, e afirma que errou a questão por um “detalhe” e que não conseguiu arrumar por falta de tempo.

O “detalhe” relatado por M6 é, obviamente, importante. Porém, acreditamos que o erro cometido não é um erro conceitual, mas sim de armação da conta. Não pudemos identificar se ele percebeu seu erro porque comparou a resposta com a de algum colega, ou se porque analisou cada passo de forma crítica. Porém, cabe aqui o questionamento: a armação da conta é discutida no momento em que é ensinada, ou seja, ela tem sentido para os estudantes ou é um processo que é decorado e utilizado porque conduz à resposta?

Acreditamos que essa pergunta é importante porque, se há uma discussão sobre a armação da conta, o erro cometido pelo estudante pode ser conceitual por não compreender a proporção, ou, se o algoritmo é imposto como método e é decorado, o erro pode representar apenas um “detalhe”, uma falta de atenção como relatado. Não podemos discutir sobre a forma como foi ensinado o algoritmo, pois isso corresponde ao contexto da sala de aula, do qual não participamos. Porém, na análise da escrita e da fala de M6, podemos ver que ele compreende em que situação utilizar uma porcentagem e que ela se refere a um total, logo consideramos que ele chegou à resposta incorreta, mas a sua argumentação condiz com a solução correta do problema.

Na questão 3, que foi realizada com ambos os casos, o caso 1 apresentou as situações 1, 3 e 4, enquanto que o caso 2 apresentou as situações 1, 2 e 3. Contudo, verificamos a existência das quatro situações em ambos os casos, em diferentes questões. Ainda, as razões que nos levaram a classificar os subcasos dentro das quatro situações se repetiram entre os dois casos, a saber: a existência de pseudonecessidades, análise do possível e do necessário, falta de coordenação dos elementos do problema e relações entre ação e compreensão. Em algumas questões, houve a repetição de raciocínio encontrados no caso 1, como no problema do diagrama (vide estudantes F4 e M5). Logo, consideramos que o caso 2 não mostrou resultados contrastantes em relação ao caso 1, mas, sim, corroborou para as evidências em relação às contribuições da argumentação na resolução de problemas para o ensino e a aprendizagem de Matemática. Sobre a análise da resolução feita pelos estudantes, o caso 2 acrescenta a discussão sobre a prática docente que não tínhamos considerado no caso 1, como pudemos observar na discussão da resolução da questão 4 (vide estudante M6).

No próximo capítulo, descreveremos de forma mais ampla as considerações sobre a análise dos dados e sobre o trabalho como um todo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciaremos com nossa pergunta e considerações sobre o que observamos em nossa análise de dados, citando alguns exemplos. Apresentaremos alguns aspectos das práticas escrita e oral, onde abordaremos uma das hipóteses feitas. Traremos reflexões sobre este trabalho de forma geral, discutindo um questionamento surgido durante a pesquisa e finalizaremos com alguns aspectos da trajetória no PPGEdu.

Com este trabalho, pretendíamos investigar se e como a argumentação pode contribuir no ensino e na aprendizagem de Matemática a partir da resolução de problemas. Concluímos que sim, a argumentação na resolução de problemas pode contribuir para o ensino e a aprendizagem de Matemática em duas perspectivas: a do educador e a do estudante. Para o educador, a análise do raciocínio do estudante pode mostrar mais sobre o seu processo de compreensão do conteúdo matemático do que apenas a resposta final e, também, proporcionar a reflexão sobre a prática docente. Além destas duas características poderem influenciar diretamente o processo de aprendizagem do estudante, cabe destacar que, para este, a argumentação pode propiciar momentos de reflexão sobre a forma de resolução, levando ou não à compreensão dos elementos do problema e da sua resolução. Faremos considerações sobre estas perspectivas a seguir.

Sobre nossas hipóteses de relações entre a resposta obtida e a compreensão da resolução, concluímos que as quatro situações foram encontradas e, assim, verifica-se a existências destas relações. Contudo, não temos uma constância entre os casos, por exemplo, a falta de compreensão não implica existência de uma pseudonecessidade: encontramos casos de falta de coordenação dos possíveis e do necessário, erros de conceituação e de procedimento. A pesquisa mostrou, ainda, que nossa proposição inicial, de que na argumentação é possível verificarmos o raciocínio subjacente à resolução que não está à mostra apenas com o resultado final, é verdadeira. Por vezes, a argumentação não foi suficiente para afirmarmos as pseudonecessidades presentes ou classificarmos o tipo de erro como discutimos na questão 4 de porcentagem (vide resolução de M6), onde apenas fizemos inferências. Porém, a argumentação deixou evidente que estes existiam, o que já lhe confere um status positivo para o uso em sala de aula.

Aqui entra a perspectiva do professor: sendo a argumentação uma prática, que mostra aspectos do raciocínio do estudante, podemos analisar em que medida a ação e a compreensão estão relacionadas na resolução de um problema. Assim, seja por identificar que o discente realmente compreendeu um conteúdo, seja para verificar erros de procedimento ou conceituação, seja para identificar possíveis pseudonecessidades existentes, a argumentação é positiva para o docente.

Analisar a resolução, e assim, a ação e a compreensão por parte do estudante, também é uma forma de repensarmos constantemente nossa prática profissional. Acreditamos que a resposta correta no processo de aprendizagem do estudante não é o principal, sendo a compreensão da Matemática o verdadeiro objetivo. Logo, usar mecanicamente um algoritmo ou uma propriedade, mas não compreender seu uso ou aplicação pode ser uma ressonância de uma aula em que o foco não é a compreensão dos tópicos da disciplina, mas, sim, resolver corretamente uma tarefa. A prática que somente ensina macetes objetiva respostas e acertos e não reflexão. Ainda, saber macetes, fórmulas ou todas as propriedades relativas a um conteúdo não implica conseguir resolver problemas, mas sim exercícios: é preciso pensar sobre em que situações esse conhecimento é aplicável, para quais objetivos e como utilizá-los.

Sobre essa reflexão e trazendo nossa discussão do estado da arte sobre o contexto para a argumentação, é importante que o professor tenha como meta uma sala de aula onde a discussão possa acontecer. Consideramos essenciais para tal enfatizar o respeito sobre a opinião do colega, legitimar diferentes formas de resolução, dar espaço para que os estudantes tragam a experiência e as curiosidades do dia a dia para a sala de aula, ser um mediador da construção do conhecimento e não um detentor do saber, tornar-se pesquisador, problematizar as situações de sala de aula e incentivar o questionamento dos discentes. Todas essas características não são apenas da disciplina de Matemática ou de seu professor, mas, sim, constituem o que consideramos essencial para um ambiente de produção e significação do conhecimento em qualquer área, onde a interação (entre professor aluno, entre colegas, entre aluno e a Matemática) é o caminho para tal. Neste sentido, pensar o lugar da prática argumentativa na sala de aula é repensar o ser professor.

Na perspectiva do estudante, observamos, em nossa pesquisa, que a argumentação sobre a resolução de problemas de Matemática pode ser um caminho para a reflexão sobre os procedimentos, “certezas” e conceitos utilizados. Desta forma, a argumentação, em alguns subcasos, foi um meio para a compreensão destes elementos e, assim, para a obtenção da resposta correta, como na resolução da questão 2 dos cartões da OBMEP (vide estudante F5). Não temos a pretensão de afirmar que a argumentação é a única forma para tal, apenas ressaltamos que ela foi profícua nos casos estudados e que, por esse motivo, deveria ser mais pesquisada e utilizada em sala de aula. Sabemos, também, que o seu uso nem sempre implica a compreensão, como no problema 1 da medição da cintura de Marta (vide estudante F2).

Aqui, ressaltamos a importância da teoria piagetiana como aporte teórico. Em primeiro lugar, acreditamos que pensar em ensino de Matemática implica em pensar no estudante: ele é nosso foco, porque cremos que compreender a construção do conhecimento é essencial para entender a especificidade da aprendizagem de Matemática. Em segundo lugar, na resolução de problemas, o fazer e o compreender estão presentes e relacionados, como podemos ver na discussão das resoluções realizadas pelos estudantes. Em terceiro lugar, sobre as questões, ter o olhar de Piaget para compreender os conceitos e os esquemas admissíveis para as situações e a abertura para os possíveis foi essencial para pensarmos sobre o processo de resolução. Em quarto lugar, na medida em que utilizamos a análise do erro, compreender as pseudonecessidades, os esquemas e o processo assimilador foi de grande valia para nossa pesquisa. E, finalizando, mas não menos importante, o Método Clínico, que norteou nossas entrevistas, já é uma prova de que a argumentação, no caso, com a contra-argumentação, contribui para a compreensão do que está subjacente ao pensamento do sujeito.

Cabe lembrarmos, também, a relevância do estudo de casos para esta pesquisa, que direcionou todas as suas etapas e, com suas características e procedimentos de validade, corrobora para os resultados obtidos. Ao analisarmos a replicação do caso 1, verificamos que as situações 1, 2, 3 e 4 e os motivos que levaram a essa classificação se repetiram (por vezes em questões diferentes) entre Ensino Fundamental II e Médio. Esse fato realça que estas situações acontecem por diferentes motivos (cogitar os possíveis, compreender o necessário, coordenar os elementos do problema etc.) em diferentes etapas do desenvolvimento, e o histórico de estudo da Matemática não se mostrou determinante para a compreensão de um exercício, podendo ele ser um problema por suas características, como o foi o problema 1, da medição da cintura de Marta, e o problema 3, do diagrama, para vários estudantes, tanto do Ensino Fundamental II quanto para o Ensino Médio.

Porém, notamos que os estudantes do Ensino Médio realizaram mais implicações lógicas do que os do Ensino Fundamental II, principalmente em relação à defesa da sua resposta. Vemos essas situações em falas como no problema 3 do diagrama (vide estudante M5), que sustenta que não pode dizer que não é possível fazer três combinações distintas se obteve a resposta sendo 27 formas de colorir. Ainda, vemos que os discentes do Ensino Médio conseguiram atingir níveis mais altos de abstração e generalização do que os estudantes do Ensino Fundamental II, como também no problema 3 (vide subcaso M1), em que há substituição das cores por números e percebe-se a implicação da escolha das cores, coordenando as necessidades e os possíveis do problema e generalizando o resultado da implicação ao analisar apenas as disposições das três cores, sem necessitar fazer todos os testes.

Verificamos, também, que, dentre os casos expostos em nossa análise, temos que a argumentação oral, na maioria deles, mostrou mais elementos da resolução do que a argumentação escrita. Porém, isso não é regra, podendo variar de acordo com a prática escrita e oral do estudante, como na questão 4 de porcentagem (vide subcaso M2) onde houve uma explicação da resolução pela escrita claramente. Sobre a escrita e a oralidade, temos algumas considerações a fazer, baseadas em nossas observações e que devem ser pensadas para o seu uso em sala de aula.

A prática escrita envolve a norma culta portuguesa, onde os estudantes podem não escrever porque não o fazem corretamente. A escrita pode ser cansativa, exigindo muitas palavras e explicações. Porém, a escrita também é um meio de comunicação com algum discente que seja tímido e que não costume se manifestar na sala de aula. Já a argumentação oral é mais rápida do que a escrita e possibilita a correção automática: se o estudante fala de uma forma que não entendemos, ele pode reformular a fala durante a conversa. Ainda, a oralidade, em geral, envolve dois sujeitos frente a frente, podendo entrar fatores de influência no diálogo como a expressão, a forma de falar, a entonação etc. Contudo, verificamos que alguns discentes não se sentem confortáveis com a discussão oral, às vezes por terem que refletir rapidamente para dar a resposta ou aparentar constrangimento em conversar com o professor/pesquisador.

Assim, não há uma fórmula infalível de argumentação, ela depende da turma, do estudante e do professor. A escrita exige a reflexão quanto à clareza, pois é necessário passar uma informação ou questionar o sujeito sem estar frente a frente com ele. Ou seja, é necessário questionar-se se o texto é claro, colocando-se na posição de leitor para a compreensão[16]. Enquanto isso, a oralidade exige do docente agilidade para interpretar constantemente o que a fala do estudante pode representar, para cogitar hipóteses durante a discussão e fazer perguntas que não estavam previstas. Logo, defendemos que as duas práticas devem ser trabalhadas pelo professor com sua turma, pois, somente assim, ele saberá quais são os melhores caminhos para a argumentação. Porém, lembramos a discussão de Larraín e Freire (2012), que trouxemos na análise teórica, de que a presença da oposição pode ser um gatilho para o pensamento reflexivo para a defesa de um ponto de vista ou construção de um contra-argumento. A argumentação, pelas características citadas acima, pode ser menos trabalhosa e mais ágil na prática oral do que na escrita, porém, acreditamos que a escrita também é válida, como vimos no trabalho de Nacarato (2012), que utiliza relatórios escritos para a discussão da resolução de questões.

Apesar de não ser o foco deste trabalho, um questionamento esteve presente desde nossa pesquisa no Estado da Arte e durante a análise dos dados: se observamos que a resposta não é uma implicação direta da compreensão de um conteúdo matemático, como entra a avaliação escolar nesse contexto? Sabemos, por experiência docente, que na maioria das provas de Matemática é exigida a apresentação do cálculo. Ora, aqui mostramos que o cálculo não quer dizer compreensão do conteúdo, pois esta vai muito além do procedimento: conceitos,

[16] Poderíamos complementar essa discussão com o estudo da interação, da cooperação e da descentração a partir dos *Estudos Sociológicos* (PIAGET, 1973) e *O juízo moral na criança* (PIAGET, 1994). Como este não compunha o foco desta pesquisa, não o realizamos, mas deixamos a sugestão para futuras investigações e para pensar a replicação desta.

possibilidades, coordenação de elementos, generalização. Ainda, vimos que o procedimento pode ser apenas uma memorização para um tipo de situação e não implicar conhecimento. Para que serve, então, esta prova de Matemática?

Defendemos, como Nunes (2010), que a avaliação contínua devia estar integrada ao ensino-aprendizagem, constituindo um processo de ensino-aprendizagem-avaliação. Na medida em que a prova tem como objetivo verificar o conhecimento do estudante sobre um tópico, se a argumentação pode ser uma prática para entender o raciocínio, ela deveria compor esse momento de avaliação. Ainda, a avaliação não deveria ser o momento final da aprendizagem, pois, em geral após a verificação, segue-se para um novo conteúdo e o discente que não atingiu a nota mínima fica "em recuperação". Supondo que a avaliação fosse o suficiente para inferir sobre o conhecimento do estudante, qual é o sentido de uma prática que o avalia, conclui o que ele não sabe e não volta a esses conteúdos para que, enfim, o estudante o compreenda? Nossa pesquisa nos fez repensar nossa prática de sala de aula e questionar o sistema que acreditamos ser predominante nas instituições escolares, onde a avaliação é um fim: nós acreditamos que ela deve ser um meio. Acreditamos que pesquisas nessa área complementariam este trabalho.

Para nós, é relativamente fácil (re)pensar a prática docente, refletir sobre estratégias e sobre o aprendizado dos estudantes, cogitar novas possibilidades de ensino: somos professores e, se o somos, é porque essas questões nos fascinam e sobre elas pensamos constantemente. Porém, sermos pesquisadores é uma tarefa nova, que não fazia parte de nossa prática e que tivemos que aprender durante essa caminhada. Concluímos, afinal, que ser professor também é ser pesquisador: é estar atento a tudo que acontece no ambiente escolar, é buscar outros trabalhos para tentar entender a prática docente, é estabelecer critérios para observação e para testar uma teoria. Ser um professor questionador, sem o caráter de pesquisador, é olhar situações e apenas fazer inferências, sem conseguir ir a fundo no problema que nos toca e, por vezes, o abandonar por não sabermos como agir.

Acreditamos ter alcançado os objetivos deste trabalho ao verificarmos e analisarmos as diferentes relações entre o fazer e o compreender, na perspectiva da resolução de problemas, utilizando a argumentação; ao observarmos, através da argumentação, o raciocínio subjacente na resolução do exercício; e ao analisarmos, a partir das teorias estudadas, como o estudante chegou à resposta final, buscando entender se ele compreende ou não o conteúdo matemático envolvido. De forma ampla, o objetivo final desta investigação sempre foi pensar possibilidades para o ensino e a aprendizagem de Matemática. Esperamos contribuir para as discussões sobre a prática docente e o ambiente construído na sala de aula de Matemática, bem como para as pesquisas sobre o processo de aprendizagem de Matemática pelos estudantes do Ensino Fundamental II e Médio.

Acreditamos que ainda há muito para se pesquisar sobre este tema e existem outras dimensões que podem ser trabalhadas, como propostas metodológicas, estudantes de outros contextos sociais e culturais, estudantes de outras etapas de desenvolvimento, em outras disciplinas etc. A crítica aos nossos procedimentos também é profícua para contribuirmos para pesquisas futuras, de forma que salientamos a dificuldade de lidar com uma grande quantidade de dados. Vemos que poderíamos ter proposto menos problemas e aprofundado a discussão de cada um deles. Finalizando a reflexão sobre nossa pesquisa, não podemos deixar de voltar ao nosso problema inicial do projeto de dissertação, onde pretendíamos abordar as habilidades e competências no ENEM. É possível o diálogo deste tema com nosso trabalho, ao pensarmos a argumentação como habilidade, e a resolução de problemas como competência. Assim como a discussão da avaliação em sala de aula, fica também esta proposta para pesquisas futuras.

Se acreditamos que a resposta correta não deve ser o objetivo final do problema, mas sim a compreensão, não pensamos diferente sobre este trabalho. Apesar de ele ser a conclusão de uma etapa, sabemos que a maior conquista durante o Mestrado em Educação no PPGEdu na UFRGS foi a trajetória: as dificuldades encontradas neste processo de investigação, estudo e escrita e os novos caminhos construídos contribuíram para nosso crescimento como estudantes, pesquisadores e professores. O principal fruto do Mestrado não é o fim com a dissertação, mas sim o processo de aprendizagem da teoria piagetiana durante esta trajetória. Concluir esta caminhada é finalizar uma etapa e também começar uma nova, em que continuaremos nossos estudos e permaneceremos com a constante reflexão de nossa prática pedagógica e de pesquisa.

6 REFERÊNCIAS

BATTRO, Antonio M. **Dicionário terminológico de Jean Piaget.** Trad. Lino de Macedo. São Paulo: Livraria Pioneira Editora, 1978.

BAGNE, J. & NACARATO, A. M. A prática do diálogo em sala de aula: uma condição para a elaboração conceitual matemática dos alunos. **Reflexão e Ação (Online)**, Santa Cruz do Sul, v.20, n.2, jul./dez, p. 186-214, 2012.

BECKER, Fernando. Epistemologia Genética e conhecimento matemático. In: BECKER, Fernando; FRANCO, Sérgio Roberto K. (orgs.). **Revisitando Piaget***.* 3. ed. Porto Alegre: Mediação, 1998.

BECKER, Fernando. **Educação e construção do conhecimento**. Porto Alegre: ARTMED, 2001.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª a 8ª série)**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CRESPO CRESPO, C. & FARFÁN, R.; LEZAMA, J. Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. **Revista Relime**, v. 12. (1) março, p. 29-66, 2009.

DELVAL, Juan. **Introdução à prática do método clínico: descobrindo o pensamento das crianças**. Trad. Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed, 2002.

DURO, Mariana Lima. **Análise Combinatória e Construção de Possibilidades: O raciocínio formal no ensino médio***.* 2012. 106 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2012.

ECHEVERRÍA, María Del Puy Pérez. A Solução de Problemas em Matemática. In: POZO, Juan Ignácio. **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender***.* Porto Alegre: ArtMed, 1998.

FLAVELL, J. H. As operações Formais e a Percepção. In: FLAVELL, J. H. **A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget**. São Paulo: Pioneira, 1996. p.207-240.

FONSECA, J. A. **Análise combinatória na educação de jovens e adultos: uma proposta de ensino a partir da resolução de problemas**. 2012. 178 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2012.

FONSECA, M. C. F. R & CARDOSO, C. de A. Educação Matemática e letramento: textos para ensinar Matemática e Matemática para ler o texto. In: NACARATO, Adair & LOPES, Celi. **Escritas e leituras na Educação Matemática**. Ed. Autêntica, 2005.

INHELDER, B. & PIAGET, J. **Da lógica da criança à lógica do adolescente: ensaio sobre a construção das estruturas operatórias formais**. São Paulo: Pioneira, 1976.

LACERDA, A.G. **A interpretação e a comunicação das regras matemáticas na resolução de problemas de divisão por alunos da 5ª série do ensino fundamental**. 2010. 103 f. Dissertação. (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém. 2010.

LARRAÍN, Antonia & FREIRE, Paulina. El uso de discurso argumentativo en la enseñanza de ciencias: Un estudio exploratorio. **Estudios Pedagógicos** XXXVIII, n. 2, p. 133-155, 2012.

LUVISON, C. C. & GRANDO, R. C. Gêneros textuais e a Matemática: uma articulação possível no contexto da sala de aula. **Revista Reflexão e Ação**, Santa Cruz do Sul, v. 20, n. 2, jul./dez, p. 154-185, 2012.

MACEDO, Lino de. O lugar dos erros nas leis ou nas regras. In: MACEDO, Lino de (Org.). **Cinco estudos de educação moral**. (Coleção psicologia e educação) São Paulo: Casa do Psicólogo, 1996. p.179 – 209.

MACEDO, Lino de. **Ensaios construtivistas**. 6. ed. (Coleção psicologia da educação/dirigida pelo autor) São Paulo: Casa do Psicólogo, 2010.

MACHADO, Nílson José. **Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua**. 3. ed. São Paulo: Cortez: Autores associados, 1993.

MEZZAROBA, Cristiane Dorst. **Problemas de lógica como motivadores no fazer matemática no sexto ano**. 2009. 147 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade de Brasília (UnB), Brasília, 2009.

MOLINARI, Adriana Maria Corder. **Representação de problemas aritméticos de divisão: um estudo dos procedimentos empregados por alunos do Ensino Fundamental I**. 2010. 249 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, 2010.

MONTANGERO, Jaques & MAURICE-NAVILLE, Danielle. **Piaget ou a inteligência em evolução***.* Trad. Fernando Becker e Tânia Beatriz Iwaszko Marques. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

NACARATO, A. M. A comunicação oral nas aulas de Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. **Revista Eletrônica de Educação,** São Carlos, SP, v. 6, n.1, p. 9-26, 2012. Disponível em http://www.reveduc.ufscar.br.

NUNES, Célia Barros. **O Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de Matemática***.* 2010. 429 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2010.

PEPECE JUNIOR, Antonio Rafael. **Análise da produção escrita de estudantes da EJA em atividades algébricas**. 2011. 119 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Ensino dde Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

PIAGET, Jean. Essai sur quelques aspects Du développement de la notion de partie chez l'enfant**. Journal de Psychologie Normale et Pathologie**, ed.18, p. 449-480, 1921.

PIAGET, Jean. **Estudos sociológicos***.* Rio de Janeiro: Forense, 1973.

PIAGET, Jean. **A tomada de consciência***.* Trad. Edson Braga de Souza. São Paulo: Melhoramentos, Ed. da Universidade de São Paulo, 1977.

PIAGET, Jean. **O nascimento da inteligência na criança**. Trad. Álvaro Cabral. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978a.

PIAGET, Jean. **Fazer e compreender**. Trad. Christina Larroudé de Paula Leite. São Paulo: Melhoramentos, Ed. da Universidade de São Paulo, 1978b.

PIAGET, Jean. **O possível e o necessário: evolução dos possíveis na criança**. Trad. Bernardina Machado de Albuquerque. Porto Alegre: Artes Médicas, 1985.

PIAGET, Jean. **O possível e o necessário: evolução dos necessários na criança**. Trad. Bernardina Machado de Albuquerque. Porto Alegre: Artes Médicas, 1986.

PIAGET, Jean. **O juízo moral na criança**. Trad. Elzon Lenardon. São Paulo: Summus, 1994.

PIAGET, Jean. **Seis Estudos de Psicologia**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1999.

POLICASTRO, Milena Soldá. **Ressonância das aulas de matemática: da produção escrita ao diálogo e transformação cognitiva**. 2010. 137 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, 2010.

POZO, Juan Ignácio. **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Trad. Beatriz Affonso Neves – Porto Alegre: ArtMed, 1998.

SILVA, João Alberto da. As Relações entre Área e Perímetro na Geometria Plana: o papel dos observáveis na construção da explicação. **Boletim de Educação Matemática (Bolema)**, Rio Claro, SP, v. 3, p. 81-104, 2009.

SOUZA, M. E. C. O. **A questão da argumentação e prova na matemática: o caso da medida da soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer**. 2009. 115 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2009.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In: NASSER, L. (Ed.) **1° Anais do Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro: UFRJ, 1993. p.1-26.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. (Ed.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 155-191.

VERGNAUD, G. O que é aprender? In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. (Orgs.) **A aprendizagem Matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. Curitiba: CRV, 2009a, p. 13-35.

VERGNAUD, Gérard. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Trad. Maria Lucia Faria Moro; Revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009b.

YIN, Robert K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. Tradução Ana Thorell; revisão técnica Cláudio Damacena. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

APÊNDICE A – CARTA DE APRESENTAÇÃO E AUTORIZAÇÃO PARA ESCOLA

À direção do ____,

Meu nome é Brunna Sordi Stock e sou mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação da UFRGS (PPGEdu UFRGS) orientada pela Profª. Dra. Maria Luiza Rheingantz Becker. Venho por meio deste apresentar meu projeto de pesquisa e solicitar autorização para desenvolvê-lo no ______________________.

Este projeto, de título “A argumentação na resolução de problemas de Matemática: uma análise a partir da Epistemologia Genética” tem como objetivo pesquisar como os alunos utilizam a argumentação na resolução de problemas de Matemática e como essa prática pode corroborar para a aprendizagem de Matemática. O projeto propõe a participação da investigadora em dez encontros na assessoria de *Leitura e Escritura* (em conjunto com a professora Marlusa Benedetti) e dez encontros na *Oficina de Resolução de Problemas de Matemática: ENEM e Vestibular* (em conjunto com a professora Lúcia Couto Terra) oferecidas pela escola, nas quartas-feiras a alunos de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental e do 2º e 3º anos do Ensino Médio, respectivamente. O início do trabalho está previsto para dia 2 de abril de 2014.

Os riscos para os participantes são de enfado, enfrentamento de situações desafiadoras e de reflexão e constrangimento para apresentar trabalhos para a turma, análogos a outras atividades escolares. Contudo, como benefício, os participantes terão uma oportunidade de trabalhar com a Matemática em um ambiente diferente da sala de aula (o que pode estimular o estudo dessa disciplina), é um momento de aprendizagem sobre discussão e argumentação de ideias e um possível momento de desenvolvimento da cognição em Matemática. O convite aos alunos será feito oralmente em sala de aula. Será enviado um Termo de Consentimento Livre Esclarecido aos responsáveis pelos estudantes com espaço para assentimento a ser assinado por cada um dos que concordarem em participar.

Para a coleta de dados serão retiradas fotografias dos procedimentos nas oficinas, preservando a identidade dos participantes. Os materiais produzidos nos encontros serão digitalizados e as arguições em grupo e feitas pela pesquisadora serão gravadas em áudio e transcritas. O Termo de Consentimento Livre Esclarecido inclui a autorização para estes procedimentos. Será utilizado um código de conhecimento restrito da investigadora para os registros de dados com objetivo de preservar o nome dos participantes. O(a) participante tem a liberdade de deixar de participar da pesquisa em qualquer momento sem que isso lhe traga algum prejuízo. Os resultados da pesquisa serão divulgados em meios acadêmicos e a identificação do(a) participante será preservada. Os dados da pesquisa serão guardados durante cinco anos e após serão incinerados.

Quaisquer dúvidas sobre o trabalho podem ser retiradas comigo pelo telefone ____________ ou pelo e-mail brunna.stock@gmail.com em qualquer momento ou com a professora orientadora do projeto, Dra. Maria Luiza R. Becker, através do Pós-Graduação em Educação pelo telefone (51) 3308-3428.

Grata pela sua atenção,

____

Mestranda BRUNNA SORDI STOCK

____

Orientadora MARIA LUIZA R. BECKER

Eu, ..., em nome da direção do ____________________________ autorizo a realização da pesquisa “A argumentação na resolução de problemas de Matemática: uma análise a partir da Epistemologia Genética” no CAp.

Porto Alegre, ... de .... de 2014.

....

Assinatura e carimbo

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO ENSINO FUNDAMENTAL II

Caros pais ou responsáveis,

Meu nome é Brunna Sordi Stock e sou mestranda do Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, orientada pela Profª Dra. Maria Luiza R. Becker. Venho por meio deste lhes informar de um projeto que realizarei no ______________________________ filho(a) está sendo convidado(a) a participar, se assim lhe interessar.

Este projeto, de título "A argumentação na resolução de problemas de Matemática: uma análise a partir da Epistemologia Genética", tem como objetivo pesquisar como os alunos utilizam a argumentação na resolução de problemas de Matemática e como essa prática pode corroborar para a aprendizagem de Matemática. O projeto tem previsão de ser realizado durante 10 (dez) encontros com duração de 1h20min cada, um por semana durante dez semanas, na assessoria de Leitura e Escritura, com a presença da mestranda junto com a professora responsável pela assessoria. O(a) seu(sua) filho(a) está sendo convidado(a) a participar dessa pesquisa. Os riscos presentes são de enfado, enfrentamento de situações desafiadoras e de reflexão e constrangimento para apresentar trabalhos para a turma, análogos aos de outras situações de aprendizagem escolar. Contudo, como benefício, terá uma oportunidade de trabalhar com a Matemática em um ambiente diferente da sala de aula (o que pode estimular o estudo dessa disciplina), é um momento de aprendizagem sobre discussão e argumentação de ideias e um possível momento de desenvolvimento da cognição em Matemática.

Para a coleta de dados serão retiradas fotografias dos procedimentos nas oficinas, preservando a identidade dos participantes. Os materiais produzidos nos encontros serão digitalizados e as arguições em grupo e feitas pela pesquisadora serão gravadas em áudio e transcritas. O(A) participante tem a liberdade de deixar de participar da pesquisa em qualquer momento sem que isso lhe traga algum prejuízo. Os resultados da pesquisa serão divulgados em meios acadêmicos e o nome do(a) participante não será identificado sendo seu nome de conhecimento apenas da pesquisadora. Os dados da pesquisa serão guardados durante cinco anos e após serão incinerados.

Peço que esta autorização seja entregue, pelo(a) aluno(a), até o dia 9 de abril de 2014 diretamente para mim. Quaisquer dúvidas sobre o trabalho podem ser retiradas comigo pelo telefone ____________ ou pelo e-mail brunna.stock@gmail.com em qualquer momento. Para contato com a professora orientadora do projeto, Dra. Maria Luiza R. Becker, contatar o Pós-Graduação em Educação pelo telefone (51) 3308-3428.

Grata pela sua atenção,

____

Mestranda BRUNNA SORDI STOCK

____

Orientadora MARIA LUIZA BECKER

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (continuação)

Eu,___________________________________, autorizo meu(minha) filho(a) o(a) aluno(a) ____ do ano ____________ do Ensino Fundamental da turma _______ a participar do projeto intitulado “A argumentação na resolução de problemas de Matemática: uma análise a partir da Epistemologia Genética”, organizado pela mestranda Brunna Sordi Stock e sob orientação da professora Dra. Maria Luiza R. Becker.

Porto Alegre, ... de .... de 2014.

____

Assinatura do responsável

TERMO DE ASSENTIMENTO

Eu, _____________________________________, aluno(a) do ano ________ do Ensino Fundamental da turma _____________ concordo em participar do projeto intitulado “A argumentação na resolução de problemas de Matemática: uma análise a partir da Epistemologia Genética”, organizado pela mestranda Brunna Sordi Stock e sob orientação da professora Dra. Maria Luiza R. Becker.

Porto Alegre .... de .... de 2014.

____

Assinatura do(a) aluno(a)

APÊNDICE C – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO ENSINO MÉDIO

Caros pais ou responsáveis,

Meu nome é Brunna Sordi Stock e sou mestranda do Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, orientada pela Profª Dra. Maria Luiza R. Becker. Venho por meio deste lhes informar de um projeto que realizarei no ________________________________ e do qual o(a) seu(sua) filho(a) está sendo convidado(a) a participar, se assim lhe interessar.

Este projeto, de título "A argumentação na resolução de problemas de Matemática: uma análise a partir da Epistemologia Genética", tem como objetivo pesquisar como os alunos utilizam a argumentação na resolução de problemas de Matemática e como essa prática pode corroborar para a aprendizagem de Matemática. O projeto tem previsão de ser realizado durante 10 (dez) encontros com duração de 1h05min cada, um por semana durante dez semanas, na *Oficina de Resolução de Problemas de Matemática: ENEM e Vestibular*, com a presença da mestranda junto com a professora responsável pela oficina. O(A) seu(sua) filho(a) está sendo convidado(a) a participar dessa pesquisa. Os riscos presentes são de enfado, enfrentamento de situações desafiadoras e de reflexão e constrangimento para apresentar trabalhos para a turma, análogos aos de outras situações de aprendizagem escolar. Contudo, como benefício, terá uma oportunidade de trabalhar com a Matemática em um ambiente diferente da sala de aula (o que pode estimular o estudo dessa disciplina), é um momento de aprendizagem sobre discussão e argumentação de ideias e um possível momento de desenvolvimento da cognição em Matemática.

Para a coleta de dados serão retiradas fotografias dos procedimentos nas oficinas, preservando a identidade dos participantes. Os materiais produzidos nos encontros serão digitalizados e as arguições em grupo e feitas pela pesquisadora serão gravadas em áudio e transcritas. O(A) participante tem a liberdade de deixar de participar da pesquisa em qualquer momento sem que isso lhe traga algum prejuízo. Os resultados da pesquisa serão divulgados em meios acadêmicos e o nome do(a) participante não será identificado, sendo seu nome de conhecimento apenas da pesquisadora. Os dados da pesquisa serão guardados durante cinco anos e após serão incinerados.

Peço que esta autorização seja entregue, pelo(a) aluno(a), até o dia 9 de abril de 2014 diretamente para mim. Quaisquer dúvidas sobre o trabalho podem ser retiradas comigo pelo telefone ____________ ou pelo e-mail brunna.stock@gmail.com em qualquer momento. Para contato com a professora orientadora do projeto, Dra. Maria Luiza R. Becker, contatar o Pós-Graduação em Educação pelo telefone (51) 3308-3428.

Grata pela sua atenção,

____

Mestranda BRUNNA SORDI STOCK

____

Orientadora MARIA LUIZA BECKER

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (continuação)

Eu,____________________________________, autorizo meu(minha) filho(a) o(a) aluno(a) ____ do ano _____________ do Ensino Médio da turma ________ a participar do projeto intitulado "A argumentação na resolução de problemas de Matemática: uma análise a partir da Epistemologia Genética", organizado pela mestranda Brunna Sordi Stock e sob orientação da professora Dra. Maria Luiza R. Becker.

Porto Alegre, ... de .... de 2014.

____

Assinatura do responsável

TERMO DE ASSENTIMENTO

Eu, ______________________________________, aluno(a) do ano _________ do Ensino Médio da turma ______________ concordo em participar do projeto intitulado "A argumentação na resolução de problemas de Matemática: uma análise a partir da Epistemologia Genética", organizado pela mestranda Brunna Sordi Stock e sob orientação da professora Dra. Maria Luiza R. Becker.

Porto Alegre .... de .... de 2014.

____

Assinatura do(a) aluno(a)

APÊNDICE D – LISTA DE ATIVIDADES DO PRIMEIRO ENCONTRO ENSINO FUNDAMENTAL

Atividade 1

1) Resolva as operações abaixo.
a) 10+5

b) 25+15

c) 10-5

d) 25-15

e) 4+8+3

f) 8-4+3

2) Resolva as operações abaixo.
a) 3x8

b) 14x5

c) 27:3

d) 80:10

3) Resolva as operações abaixo.
a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$

b) $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{8}-\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{5}$

4) Resolva as operações abaixo
a) 2,5 + 5,3

b) 7,6 – 3,41

c) 10,2 x 5,8

5) Leia atentamente os enunciados abaixo e resolva o que se pede.
a) Artur tinha 3 carrinhos de brinquedo e ganhou mais 6 de aniversário. Quantos ele ficou no total?

b) Joana tinha cinco bombons. Na Páscoa ela ganhou mais alguns de sua avó e ficou com 10 no final. Quantos bombons ela ganhou?

c) Lucas tinha algumas figurinhas e ganhou mais 10 de um amigo, ficando com 58 no total. Quantas figurinhas ele tinha no início?

APÊNCIDE E – ENCONTROS COM O ENSINO FUNDAMENTAL II

Quadro 19 – Encontro 1 com o Ensino Fundamental II.

ENCONTRO 1 – 02.04.14	
Participantes presentes: F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7, F8, F9 e F10.	
DESCRIÇÃO	DADOS
Conversa inicial de apresentação da pesquisa e entrega dos TCLE (Apêndice B).	-
Conversa sobre as impressões e os sentimentos em relação à disciplina de Matemática.	• Anotações da pesquisadora.
Resolução individual de uma lista de atividades (Apêndice D).	• Escrito (individual). • Áudio da resolução (individual). • Anotações da pesquisadora.

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Este encontro tinha como objetivo explicarmos as atividades e verificarmos quais conteúdos matemáticos poderíamos utilizar. Para tal, aplicamos uma lista de atividades (Apêndice D) onde constatamos a dificuldade em números decimais e frações, conteúdos que estavam sendo iniciados ou que ainda não tinham sido trabalhados com estes estudantes. Por seu caráter de teste, não contabilizamos para análise o material recolhido neste encontro.

Quadro 20 – Encontro 2 com o Ensino Fundamental II.

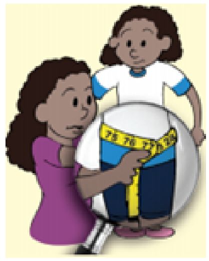
ENCONTRO 2 – 09.04.14	
Participantes presentes: F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7, F8, F9 e F10.	
DESCRIÇÃO	DADOS
Resolução individual das questões 1 e 5.	• Escrito (individual). • Áudio da resolução (individual). • Anotações da pesquisadora.

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Individualmente, os participantes resolveram as questões 1 e 5. Realizamos a arguição da questão 1, no encontro 3, na semana seguinte.

Figura 58 – Questão 1 realizada no Encontro 1 (09/04/14).

Ao medir a cintura de Marta com uma fita métrica, Dona Célia observou que as marcas de 23 cm e 77 cm ficaram sobrepostas, como na figura. Qual é a medida da cintura de Marta?



A) 23 cm.
B) 50 cm.
C) 54 cm.
D) 77 cm.
E) 100 cm.

Fonte: Prova nível 1 da 1ª fase da OBMEP 2013.

Quadro 21 – Questão 1 resolvida pelo Ensino Fundamental II.

	Resposta	Explicação	Situação	Observação
F1	A	A	1	-
F2	A	E	2	-
F3	E	E	3	-
F4	A	I	-	A argumentação de F4 não deixa claro que ele compreende o conteúdo. Porém, por termos feito uma pergunta que, após, consideramos tendenciosa, consideramos este subcaso como inconclusivo.
F5	A	A	1	-
F6	A	A	1	-
F7	A	A	1	-
F8	A	A	1	-
F9	A	A	1	-
F10	A	A	1	-

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Figura 59 – Questão 5 realizada no Encontro 2 (09/04/14).

Joãozinho subtraiu o menor número de três algarismos diferentes do maior número de três algarismos diferentes. Que resultado ele obteve?

A) 882.
B) 883.
C) 885.
D) 886.
E) 888.

Fonte: Prova nível 1 da 1ª fase da OBMEP 2013.

Quadro 22 – Questão 5 resolvida pelo Ensino Fundamental II.

	Resposta	Explicação	Situação	Observações
F1	A	A	1	-
F2	A	A	1	-
F3	A	I	-	Utiliza "somar os menores algarismos" e "somar os maiores algarismos", o que não se aplica na situação. Não fica claro se ele confundiu os termos e realmente compreendeu, ou se utilizou algum critério de soma que não seria possível para esta questão.
F4	I	I	-	Não fica clara qual é a resposta, pois há duas alternativas marcadas e duas contas distintas.
F5	A	A	1	-
F6	A	A	1	-
F7	A	A	1	-
F8	A	A	1	-
F9	A	A	1	-
F10	A	E	2	-

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Após este encontro, percebemos que os estudantes, ao encontrar uma resposta que não constava nas alternativas, apagavam o que estavam fazendo e tentavam outro método. Para evitarmos perdas nas resoluções, a partir do encontro seguinte, alteramos as questões, retirando suas alternativas.

Quadro 23 – Encontro 3 com o Ensino Fundamental II.

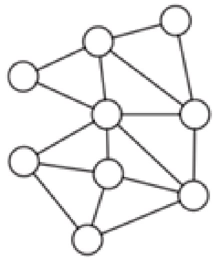
ENCONTRO 3 – 16.04.14	
Participantes presentes: F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7, F8, F9 e F10.	
DESCRIÇÃO	DADOS
Arguição da questão 1 da aula anterior.	• Áudio arguição (individual). • Anotações da pesquisadora.
Resolução da questão 6 individualmente e, depois, discussão em duplas.	• Escrito (individual e grupo).
Resolução da questão 3 individualmente.	• Escrito (individual).

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Pretendíamos realizar a arguição das questões 1 e 5 enquanto os estudantes resolvessem as questões 6, em dupla, e 3, individualmente. Porém, conseguimos apenas questionar sobre a questão 1, em função do tempo.

Figura 60 – Questão 3 realizada no Encontro 3 (16/04/14).

De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?



Fonte: Prova nível 1 da 1ª fase da OBMEP 2012 (adaptada).

Quadro 24 – Questão 3 resolvida pelo Ensino Fundamental II.

	Resposta	Explicação	Situação	Observações
F1	A	A	1	-
F2	E	E	3	-
F3	E	E	3	-
F4	E	E	3	-
F5	A	A	1	-
F6	E	A	4	-
F7	E	E	3	-
F8	E	E	3	-
F9	E	E	3	-
F10	E	E	3	-

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Após, os participantes discutiram a questão 6, em duplas, e escreveram uma resolução final. Todas as resoluções foram digitalizadas para serem entregues e corrigidas pelas outras duplas na semana seguinte.

Figura 61 – Questão 6 realizada no Encontro 3 (16/04/14).

Durante a aula, dois celulares tocaram ao mesmo tempo. A professora logo perguntou aos alunos: “De quem são os celulares que tocaram?” Guto disse: “O meu não tocou”, Carlos disse: “O meu tocou” e Bernardo disse: “O de Guto não tocou”. Sabe-se que um dos meninos disse a verdade e os outros dois mentiram. Quem mentiu e quem não mentiu? O celular de que aluno tocou?

Fonte: Prova nível 1 da 1ª fase da OBMEP 2013 (adaptada).

Quadro 25 – Questão 6 resolvida pelo Ensino Fundamental II.

		Resposta	**Explicação**	**Situação**	**Observações**
Dupla 1	F1	A	A	1	-
	F5	A	A	1	-
Dupla 2	F2	E	E	3	-
	F3	E	E	3	-
Dupla 3	F4	-	-	-	F4 estava em dupla com um estudante que não entregou o TCLE, de forma que seus dados não foram contabilizados.
Dupla 4	F6	A	E	2	-
	F7	A	E	2	-
Dupla 5	F8	-	-	-	F8 estava em dupla com um estudante que não entregou o TCLE, de forma que seus dados não foram contabilizados.
Dupla 6	F9	-	E	-	Não reponderam a tudo o que era pedido.
	F10	-	E	-	

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Por ser a questão 6 de conteúdo lógico, a interpretação dos estudantes foi fundamental para sua resolução. A sequência desta atividade deu-se no próximo encontro, onde os estudantes analisam a resposta dos colegas.

Quadro 26 – Encontro 4 com o Ensino Fundamental II.

<table>
<tr><th colspan="2">ENCONTRO 4 – 23.04.14</th></tr>
<tr><td colspan="2">Participantes presentes: F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7, F8, F9 e F10.</td></tr>
<tr><td>DESCRIÇÃO</td><td>DADOS</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Duplas do encontro anterior analisando a resolução escrita da questão 6 feita pelos colegas e fazendo correções.</td><td>• Escrito (grupo).</td></tr>
<tr><td>• Áudio da discussão (grupo).
• Anotações da pesquisadora.</td></tr>
<tr><td>Arguição de algumas resoluções da questão 3.</td><td>• Áudio da arguição (individual).
• Anotações da pesquisadora.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Organizamos os participantes nas mesmas duplas do encontro passado, e cada dupla recebeu todas as resoluções realizadas na aula anterior, que não estavam identificadas. Os estudantes deveriam analisar, de forma crítica, todas as escritas, inclusive a sua. Nesta atividade, pretendíamos observar se, na análise de diferentes formas de resolução, haveria mudança nas implicações lógicas realizadas pela dupla. Porém, encontramos duplas que eram incoerentes, corrigindo os trabalhos usando critérios diferentes em cada um e encontrando diversos resultados diferentes. Ainda, verificamos que muitas implicações realizadas não respeitavam a lógica do problema, mas sim a lógica pessoal dos estudantes que traziam para sua realidade o contexto da questão.

Quadro 27 – Correção da questão 6 resolvida pelo Ensino Fundamental II.

	Resposta	Correções	Observações
F1 e F5	A	Incoerência (situação 2)	Concordam com a resposta do grupo 6, que não justifica com argumentos lógicos.
F2 e F3	E	Incoerência (situação 3)	Corrigem chegando a três respostas distintas.
F4	-	-	-
F6 e F7	A	Coerência (situação 1)	Corrigem de acordo com o mesmo critério, porém continuam não utilizando implicações lógicas.
F8	-	-	-
F9 e F10	-	Incoerência (-)	Corrigem chegando a três respostas distintas.

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Apesar da gama de situações dessa questão, optamos por não apresentá-la detalhadamente na análise de dados por não termos questionado os participantes individualmente (como será relatado, tentamos em outro momento, mas não foi possível). Acreditamos que a argumentação, aqui, seria fundamental para mostrar as incoerências para os participantes e observar se haveria ou não desequilíbrios.

Quadro 28 – Encontro 5 com o Ensino Fundamental II.

ENCONTRO 5 – 30.04.14	
Participantes presentes: F2, F3, F4, F5, F6, F7, F8 e F10.	
DESCRIÇÃO	DADOS
Resolução em grupo de questões diferentes das demais (2 e 7) e, depois, explicação para os outros.	• Escrito (grupo). • Áudio da discussão (grupo). • Anotações da pesquisadora.
Arguição de algumas resoluções da questão 3.	• Áudio da arguição (individual).

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Neste encontro, os participantes foram divididos em quatro grupos, sendo que dois resolveram a questão 2 e os outros dois, a 7. Após a resolução e a sua escrita, a pesquisadora trocou os participantes entre os grupos, de forma que novos grupos foram criados, compostos por estudantes que resolveram questões distintas, onde cada integrante do novo grupo deveria explicar a resolução do seu problema. Após, a pesquisadora conversou com os grupos e pediu para que cada integrante explicasse como os outros resolveram a sua questão.

Figura 62 – Questão 2 realizada no Encontro 5 (30/04/14).

Caetano fez cinco cartões, cada um com uma letra na frente e um número atrás. As letras formam a palavra OBMEP e os números são 1, 2, 3, 4 e 5. Observe os quadrinhos e responda: qual é o número atrás do cartão com a letra M?

Fonte: Prova nível 1 da 1ª fase da OBMEP 2013 (adaptada).

Quadro 29 – Grupos que resolveram a questão 2 no Ensino Fundamental II.

Grupos que resolveram a questão 2		Resposta	Explicação	Situação	Observações
Grupo 1	F2	-	E	3	O grupo não conseguia resolver a questão até a discussão com a pesquisadora. Na discussão com F7, integrante de outro grupo, verificou-se que F5 compreendeu o exercício, mas F2 e F3 não.
	F3	-	E	3	
	F5	-	A	4	
Individual	F4	A	A	1	-

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Quadro 30 – Grupos que não resolveram a questão 2 no Ensino Fundamental II.

Grupos que não resolveram a questão 2		**Resposta**	**Explicação**	**Situação**	**Observações**
Grupo 2	F6	A	A	1	-
	F7	A	A	1	-
Grupo 3	F8	-	I	-	No áudio, F4, que estava explicando para F8, o interrompe constantemente e F8 não chega a uma conclusão final. Por isso, classificamos este subcaso como inconclusivo.
	F10	-	A	4	F10 não conseguia compreender, em um primeiro momento, por isso não há resolução escrita deste subcaso. Após a discussão e o cogitar de possibilidades, F10 compreende o exercício.

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Figura 63 – Questão 7 realizada no Encontro 5 (30/04/14).

Gabriel comprou uma rosa, um cravo e um lírio e quer dar uma flor para cada uma de suas três amigas. Ele sabe que uma amiga não gosta de cravos, outra não gosta de lírios e a terceira não gosta de rosas. De quantas maneiras ele pode distribuir as flores de modo a agradar às três amigas?

Fonte: Prova nível 1 da 1ª fase da OBMEP 2011 (adaptada).

Quadro 31 – Grupos que resolveram a questão 7 no Ensino Fundamental II.

Grupos que resolveram a questão 7		**Resposta**	**Explicação**	**Situação**	**Observações**
Grupo 2	F6	A	A	1	-
	F7	A	A	1	-
Grupo 3	F8	A	A	1	-
	F10	A	A	1	-

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Quadro 32 – Grupos que não resolveram a questão 7 no Ensino Fundamental II.

Grupos que não resolveram a questão 7		**Resposta**	**Explicação**	**Situação**	**Observações**
Grupo 1	F2	-	-	-	Em função da dificuldade de F3 e F2 para explicarem a sua questão (2), não houve tempo para F7 lhes explicar a sua (questão 7).
	F3	-	-	-	
	F5	A	A	1	-
Individual	F4	A	A	1	-

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Quadro 33 – Encontro 6 com o Ensino Fundamental II.

ENCONTRO 6 – 07.05.14	
Participantes presentes: F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7, F8, F9 e F10.	
DESCRIÇÃO	DADOS
Jogo “Enciclopédia”: resolução de charadas (questões 8, 9 e 10) individualmente e votação da melhor resposta.	• Escrito (individual). • Anotações da pesquisadora.

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Realizamos essa atividade, não com o objetivo de coletar dados para análise, mas, sim, em busca da qualidade dos dados. Em situações anteriores, vimos que algumas respostas pareciam descuidadas, outras eram feitas rapidamente, somente quando solicitávamos sua entrega. Ainda, durante a correção das resoluções da questão 6, fomos questionados quanto à necessidade de correções e como realizá-las, como se houvesse um padrão estabelecido, que os estudantes devessem cumprir. Acreditamos que a situação de jogo poderia instigar os participantes a empenharem-se nas atividades, então criamos uma atividade baseada no jogo Enciclopédia (Grow ®), onde deveriam julgar as resoluções dos colegas e votar na melhor resposta. Assim, o jogo exigia que os participantes escrevessem o melhor possível para conseguir mais votos e, assim, vencer. Pudemos observar que todos os estudantes se dedicaram a escrever a resposta de forma mais clara do que as observadas até então. Não obstante, ter a resposta legitimada pelos colegas e não pela pesquisadora foi importante para voltarmos à discussão ocorrida no encontro anterior, onde os estudantes questionaram porque as correções eram necessárias e quando deveriam parar de fazê-las.

A discussão proporcionada pelo jogo foi importante para tranquilizarmos os estudantes quanto as suas respostas, mostrando exemplos de boas escritas que eles realizaram e incentivando que continuassem com seu empenho. Ainda, abordamos, de forma crítica, o que seria uma resposta compreensível e as diferentes formas de correção. Ao final desta atividade, acreditamos que, apesar de não fornecer dados que pudemos analisar da mesma forma que outras questões, ela foi produtiva e esclarecedora para alguns alunos. Pensando em uma replicação do estudo, acreditamos que ela poderia ser realizada no início da pesquisa.

Figura 64 – Questão 8 realizada no Encontro 6 (07/05/14).

Você precisa atravessar um rio com um leão, um carneiro e um fardo de capim. Na canoa, só cabe um animal ou o fardo de capim por vez. Se você levar o capim, o leão come o carneiro; se levar o leão, o carneiro come o capim. Como fazer?

Fonte: http://divertindocommatematica.blogspot.com.br

Figura 65 – Questão 9 realizada no Encontro 6 (07/05/14).

Um atleta percorreu o seguinte percurso entre a sua casa e a praça: saiu de casa, correu 5Km em direção a praça; correu 2Km no sentido de casa; correu 7Km no sentido da praça. Se a distância entre a sua casa e a praça é 18Km, quanto falta para ele chegar até a praça?

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Figura 66 – Questão 10 realizada no Encontro 6 (07/05/14).

Buscando água, uma rã caiu em um poço de 30 metros de profundidade. Na sua busca por sobrevivência, a obstinada rã conseguia subir 3 metros cada dia, sendo que a noite resbalava e descia 2 metros. Quantos dias a rã demorou para sair do poço?

Fonte: http://www.somatematica.com.br/

Quadro 34 – Encontro 7 com o Ensino Fundamental II.

ENCONTRO 7 – 14.05.14	
Participantes presentes: F1, F2, F3, F4, F5, F6, F8, F9 e F10.	
DESCRIÇÃO	DADOS
Conversa sobre o jogo do encontro passado e divulgação dos resultados.	-
Discussão da questão 3 com todo o grupo.	• Áudio da discussão (todos). • Anotações da pesquisadora.
Resolução individual de folha com as questões 11, 12, 13, 14 e 15.	• Escrito (individual).

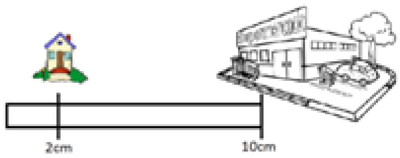
Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Começamos com a divulgação dos resultados do jogo do encontro passado e *feedback* da atividade para aplicações futuras. Após, dada a diversidade de resoluções da questão 3, tanto no Ensino Fundamental II quanto no Ensino Médio, realizamos uma discussão no grupo. Essa discussão foi interessante para observarmos que, mesmo com a argumentação dos colegas e a divulgação do resultado correto, F4 sustentava a sua resposta 27. Isso mostra que a argumentação e, inclusive, a resposta correta, não são suficientes para a compreensão do resultado e para a reflexão do procedimento utilizado por F4.

Na sequência, aplicamos um conjunto de exercícios (questões 11, 12, 13, 14 e 15) que foi resolvido individualmente e onde não era exigida a apresentação da resolução escrita, podendo apenas haver o resultado. Os exercícios 11, 12, 14 e 15 correspondiam a conteúdos matemáticos já utilizados em encontros anteriores, bem como possuíam resoluções análogas a estes. Em função das diferentes respostas, optamos por realizar mais um encontro que não estava previsto, onde foi feita a arguição individual das questões 11, 12, 14 e 15. A questão 13 não foi questionada pela dificuldade que os estudantes atribuíram a esta e muitos não a resolveram. As tabelas destas questões serão apresentadas no próximo tópico.

Figura 67 – Questão 11 realizada no Encontro 7 (14/05/14).

Júlia estava medindo distâncias em um mapa com uma régua. Neste mapa a casa de sua avó encontra-se em na marca correspondente ao 2cm na régua e o mercado na marca do 10cm. Qual é a distância no mapa entre a casa da avó de Júlia e o mercado?



Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Quadro 35 – Questão 11 resolvida pelo Ensino Fundamental II.

	Resposta	**Explicação**	**Situação**	**Observações**
F1	A	A	1	-
F2	A	A	1	-
F3	E	E	3	-
F4	A	A	1	-
F5	A	A	1	-
F6	A	A	1	-
F8	A	A	1	-
F9	A	A	1	-

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Figura 68 – Questão 12 realizada no Encontro 7 (14/05/14).

Uma formiguinha andou sobre a borda de uma régua, da marca de 6cm até a marca de 20cm. Ela parou para descansar na metade do caminho. Em que marca ela parou?

Fonte: Prova nível 1 da 1ª fase da OBMEP 2011 (adaptada).

Quadro 36 – Questão 12 resolvida pelo Ensino Fundamental II.

	Resposta	Explicação	Situação	Observações
F1	A	A	1	-
F2	E	E	3	-
F3	E	E	3	-
F4	E	A	4	-
F5	E	E	3	-
F6	A	A	1	-
F8	E	E	3	-
F9	E	E	3	-

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Figura 69 – Questão 13 realizada no Encontro 7 (14/05/14).

Davi estava fazendo uma conta no caderno quando sua caneta estragou e borrou quatro algarismos, como na figura. Ele se lembra que só havia algarismos ímpares na conta. Qual é a soma dos algarismos manchados?

Fonte: Prova nível 1 da 1ª fase da OBMEP 2009 (adaptada).

Figura 70 – Questão 14 realizada Encontro 7 (14/05/14).

Ari, Bruna e Carlos almoçam juntos todos os dias e cada um deles pede água ou suco.

- Se Ari pede a mesma bebida que Carlos, então Bruna pede água.
- Se Ari pede uma bebida diferente da de Bruna, então Carlos pede suco.
- Se Bruna pede uma bebida diferente da de Carlos, então Ari pede água.
- Apenas um deles sempre pede a mesma bebida.

Quem pede sempre a mesma bebida e que bebida é essa?

Fonte: Prova nível 1 da 1ª fase da OBMEP 2008 (adaptada).

Quadro 37 – Questão 14 resolvida pelo Ensino Fundamental II.

	Resposta	Explicação	Situação	Observações
F1	E	E	3	-
F2	E	E	3	-
F3	E	E	3	-
F4	E	E	3	-
F5	E	E	3	-
F6	E	E	3	-
F8	E	E	3	-
F9	E	-	-	Afirma que não tem “mínima ideia de como fez” a questão 4.

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Figura 71 – Questão 15 realizada no Encontro 7 (14/05/14).

Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?

Fonte: Prova nível 1 da 1ª fase da OBMEP 2007 (adaptada).

Quadro 38 – Questão 15 resolvida pelo Ensino Fundamental II.

	Resposta	Explicação	Situação	Observações
F1	A	A	1	-
F2	E	E	3	-
F3	E	E	3	-
F4	E	E	3	-
F5	E	E	3	-
F6	E	E	3	-
F8	E	E	3	-
F9	E	E	3	-

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Quadro 39 – Entrevista com o Ensino Fundamental II.

ENTREVISTA – 11.06.14	
Participantes presentes: F1, F2, F3, F4, F5, F6, F8 e F9.	
DESCRIÇÃO	DADOS
Arguição individual da atividade do último encontro.	• Áudio da arguição (individual). • Anotações da pesquisadora.

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Pretendíamos utilizar este encontro para questionarmos sobre as questões 11, 12, 14 e 15 e, também, para confrontarmos as incoerências entre as correções das respostas da questão 6. Porém, como alguns alunos faltaram à aula, os grupos não estariam completos, logo não realizamos esta segunda arguição.

APÊNCIDE F – ENCONTROS COM O ENSINO MÉDIO

Quadro 40 – Encontro 1 com o Ensino Médio.

ENCONTRO 1 – 02.04.14	
Participantes presentes: M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7, M8 e M9.	
DESCRIÇÃO	DADOS
Conversa inicial de apresentação da pesquisa e entrega dos TLCE (Apêndice C).	-
Discussão sobre a prova da UFRGS e do ENEM.	-
Folha com as questões 16, 17 e 18.	• Escrito (individual). • Áudio da resolução (individual). • Anotações da pesquisadora.

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Começamos com uma conversa e explicação sobre o trabalho que seria realizado. Entregamos os TCLE e instruímos sobre sua devolução. Depois, por ser a Oficina de resolução de problemas de vestibular e ENEM, discutimos sobre os tipos de questões que seriam realizadas e ouvimos os interesses dos estudantes sobre esses temas. Enfim, entregamos as questões 16, 17 e 18, que deveriam ser resolvidas individualmente. Este primeiro encontro serviu, também, para identificarmos como seria a dinâmica do grupo, e percebemos que a maioria dos participantes não resolvia a questão individualmente, como era pedido. Acreditamos que isso aconteceu devido à ansiedade para encontrar uma resposta e verificação desta com a dos outros colegas. Previamos obter como dados deste encontro a resolução escrita e a explicação oral dos estudantes, porém, alguns dos participantes não devolveram a folha. A partir desse encontro, decidimos tirar fotos durante a resolução, caso isso acontecesse novamente. Por não termos o material escrito de todos os estudantes, não pudemos analisar em qual situação os grupos estavam inseridos.

Figura 72 – Questão 16 realizada no Encontro 1 (02/04/14).

Na compra de três unidades idênticas de uma mesma mercadoria, o vendedor oferece um desconto de 10% no preço da segunda unidade e um desconto de 20% no preço da terceira unidade. A primeira unidade não tem desconto. Comprando três unidades dessa mercadoria, o desconto total é

A) 8%.
B) 10%.
C) 22%.
D) 30%.
E) 32%.

Fonte: Exame Vestibular UFRGS 2014.

Figura 73 – Questão 17 realizada no Encontro 1 (02/04/14).

Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras. Um cliente deseja comprar um produto que custava R$50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão de fidelidade da loja. Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de

A) 15,00.
B) 14,00.
C) 10,00.
D) 5,00.
E) 4,00.

Fonte: ENEM 2013.

Figura 74 – Questão 18 realizada no Encontro 1 (02/04/14).

A massa das medalhas olímpicas de Londres 2012 está entre 375g e 400g. Uma medalha de ouro contém 92,5% de prata e 1,34% de ouro, com o restante em cobre. Nessa olimpíada, os Estados Unidos ganharam 46 medalhas de ouro.

Supondo que todas as medalhas ouro obtidas pelos atletas estadunidenses tinham a massa máxima, a quantidade de ouro que esses atletas ganharam em conjunto

A) é menor do que 0,3kg.
B) está entre 0,3kg e 0,5kg.
C) está entre 0,5kg e 1kg.
D) está entre 1kg e 2kg.
E) é maior do que 2kg.

Fonte: Exame Vestibular UFRGS 2013.

Quadro 41 – Encontro 2 com o Ensino Médio.

ENCONTRO 2 – 09.04.14	
Participantes presentes: M1, M2, M5, M6 e M8.	
DESCRIÇÃO	DADOS
Correção dos exercícios do encontro anterior.	-

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Em função das discussões do encontro anterior, dos pedidos dos participantes e da quantidade pequena de estudantes presentes, utilizamos este encontro para mostrar uma resposta possível para os problemas já resolvidos e discutir as resoluções. Essa necessidade de resolução e confirmação dos procedimentos utilizados pelos estudantes foi constante com o Ensino Médio e, em certo ponto, um empecilho em função do tempo.

Quadro 42 – Encontro 3 com o Ensino Médio.

ENCONTRO 3 – 16.04.14	
Participantes presentes: M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7, M8 e M9.	
DESCRIÇÃO	DADOS
Resolução individual da questão 4 e 19.	• Escrito (individual). • Áudio da resolução (individual). • Anotações da pesquisadora.

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Neste encontro, os participantes resolveram as questões 4 e 19. A questão 4 foi resolvida individualmente, e a arguição individual foi realizada no encontro 5.

Figura 75 – Questão 4 realizada no Encontro 3 (16/04/14).

Um laboratório realiza exames em que é possível observar a taxa de glicose de uma pessoa. Os resultados são analisados de acordo com o quadro a seguir.

Hipoglicemia	Taxa de glicose menor ou igual a 70 mg/dL
Normal	Taxa de glicose maior que 70 mg/dL e menor ou igual a 100 mg/dL
Pré-diabetes	Taxa de glicose maior que 100 mg/dL e menor ou igual a 125 mg/dL
Diabetes Melito	Taxa de glicose maior que 125 mg/dL e menor ou igual a 250 mg/dL
Hiperglicemia	Taxa de glicose maior que 250 mg/dL

Um paciente fez um exame de glicose nesse laboratório e comprovou que estava com hiperglicemia. Sua taxa de glicose era de 300 mg/dL. Seu médico prescreveu um tratamento em duas etapas. Na primeira etapa ele conseguiu reduzir sua taxa em 30% e na segunda etapa em 10%.

Ao calcular a sua taxa de glicose após as duas reduções, o paciente verificou que estava na categoria de

A) hipoglicemia.
B) normal.
C) pré-diabetes.
D) diabetes melito.
E) hiperglicemia.

Fonte: ENEM 2012.

Quadro 43 – Questão 4 resolvida pelo Ensino Médio.

	Resposta	Explicação	Situação	Observações
M1	A	A	1	-
M2	A	A	1	-
M3	A	A	1	-
M4	A	A	1	-
M5	A	A	1	-
M6	E	A	4	-
M7	E	E	3	-
M8	A	E	2	-
M9	E	E	3	-

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

A questão 19 foi realizada individualmente e socializada com os colegas durante a resolução. Poucos apresentaram a escrita, porque não conseguiram chegar a um resultado dentre as opções fornecidas. Pudemos verificar a forma de resolução ao questionarmos as duplas, após a discussão dos resultados obtidos.

Figura 76 – Questão 19 realizada no Encontro 3 (16/04/14).

Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R$500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (certificado de depósito bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

	Rendimento mensal (%)	IR (imposto de renda)
POUPANÇA	0,560	ISENTO
CDB	0,876	4% (sobre o ganho)

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é

A) a poupança, pois totalizará um montante de R$502,80.
B) a poupança, pois totalizará um montante de R$500,56.
C) o CDB, pois totalizará um montante de R$504,38.
D) o CDB, pois totalizará um montante de R$504,21.
E) o CDB, pois totalizará um montante de R$500,87.

Fonte: ENEM 2011.

Quadro 44 – Questão 19 resolvida pelo Ensino Médio.

		Resolução individual	**Resolução após discussão**	**Explicação**	**Situação**	**Observações**
Grupo 1	M1	A	A	E (áudio)	2	
	M3	-	A	A (áudio)	1	
Grupo 2	M2	-	-	E (áudio)	-	M5 e M8 não entregaram nem a resolução individual nem a resolução após a discussão.
	M6	-	-	A (áudio)	-	
Individual	M4	-	-	-	-	M4 e M9 partilharam suas resoluções com colegas que não entregaram o TCLE, logo, seus dados não foram contabilizados.
Individual	M9	-	-	-	-	
Grupo 3	M5	A	A	A (áudio)	1	
	M8	-	A	A (áudio)	1	
Individual	M7	-	A	A (áudio)	1	

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Quadro 45 – Encontro 4 com o Ensino Médio.

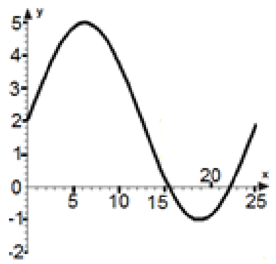
ENCONTRO 4 – 23.04.14	
Participantes presentes: M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7, M8 e M9.	
DESCRIÇÃO	DADOS
Resolução em dupla das questões 20, 21 e 22.	• Escrito (grupo). • Áudio da resolução (grupo). • Anotações da pesquisadora.

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Neste encontro, os participantes resolveram as questões 20, 21 e 22. A questão 20, a primeira entregue, gerou ampla discussão por se tratar de uma forma distinta de questionamento da qual os estudantes estavam acostumados: eles haviam resolvido exercícios de função trigonométrica, em que a mesma era apresentada e eles deveriam desenhar o gráfico, enquanto que propusemos uma situação onde o gráfico estava desenhado, e eles deveriam inferir sobre a função trigonométrica. Percebemos um estranhamento inicial, onde os estudantes afirmavam que não conseguiriam resolver e não tentavam utilizar o que já sabiam sobre funções. Desta forma, nossos questionamentos tiveram o caráter de indicar caminhos para que conseguissem refletir sobre e tentassem resolver o problema, sugerindo casos particulares e tentando mostrar analogias possíveis. Neste encontro, foi difícil lidarmos com a ansiedade dos participantes em pedir ajuda para resolver, de forma que diversas discussões foram perdidas.

Figura 77 – Questão 20 realizada no Encontro 4 (23/04/14).

A figura a seguir representa um esboço do gráfico de uma função $y = A + Bsen(x/4)$, que é muito útil quando se estudam fenômenos periódicos, como, por exemplo, o movimento de uma mola vibrante. Então, o produto das constantes A e B é



Fonte: Exame Vestibular PUCRS 2013 (adaptada).

Quadro 46 – Questão 20 resolvida pelo Ensino Médio.

		Resposta	Explicação	Situação	Observações
Grupo 1	M1	-	I	-	Não apontou indícios de compreensão de todos os elementos do problema.
	M3	-	-	-	Não se manifestou na discussão.
Grupo 2	M2	-	A	4	-
	M6	-	A	4	-
Grupo 3	M4	-	-	-	Não conseguimos realizar gravação.
	M7	-	-	-	
	M9	-	-	-	
Grupo 4	M5	-	I	-	Não apontou indícios de compreensão de todos os elementos do problema.
	M8	-	I	-	

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Em função do tempo despendido na questão 20, a questão 21 não foi resolvida e a questão 22 foi resolvida por apenas dois grupos.

Figura 78 – Questão 21 realizada no Encontro 4 (23/04/14).

O número de interseções da função $f(x) = sen5x$ com o eixo das abscissas no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ é

Fonte: Exame Vestibular UFRGS 2012 (adaptada).

Figura 79 – Questão 22 realizada no Encontro 4 (23/04/14).

O período da função definida por $f(x) = sen\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ é

Fonte: Exame Vestibular UFRGS – 2010 (adaptada).

Quadro 47 – Questão 22 resolvida pelo Ensino Médio.

		Resposta	Explicação	Situação	Observações
Grupo 1	M1	E	E	3	-
	M3	E	E	3	-
Grupo 4	M5	A	E	2	-
	M8	A	E	2	-

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Quadro 48 – Encontro 5 com o Ensino Médio.

ENCONTRO 5 – 30.04.14	
Participantes presentes: M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7 e M8.	
DESCRIÇÃO	DADOS
Resolução em grupo das questões 23 e 24.	• Escrita (grupo).
Resolução individual da questão 3 do Ensino Fundamental II.	• Escrita (individual). • Áudio da arguição (individual). • Anotações da pesquisadora.
Resolução individual e discussão no grupo da questão 7 do Ensino Fundamental II.	• Escrita (individual). • Áudio da discussão (grupo). • Anotações da pesquisadora.
Arguição individual da questão 4.	• Áudio da arguição (individual). • Anotações da pesquisadora.

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Neste encontro, os participantes foram divididos em duplas para resolver as questões 23 e 24. O grupo de M1 e M3 não resolveu a questão 24. No encontro seguinte, foram entregues todas as resoluções para todas as duplas e eles deveriam corrigir a escrita dos colegas.

Figura 80 – Questão 23 realizada no Encontro 5 (30/04/14).

Seja ABC um triângulo retângulo cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem 8 cm e 6 cm, respectivamente. Se D é um ponto sobre $\overline{AB}$ e o triângulo ADC é isósceles, a medida do segmento $\overline{AD}$, em cm, é igual a

Fonte: Exame Vestibular ITA 2011 (adaptada).

Quadro 49 – Questão 23 resolvida pelo Ensino Médio.

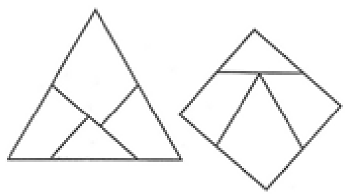
	Resposta	Explicação	Situação	Observações
M1 e M3	E	E	3	-
M2 e M6	E	E	3	-
M4 e M7	E	E	3	-
M5 e M8	E	E	3	-

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Figura 81 – Questão 24 realizada no Encontro 5 (30/04/14).

As figuras abaixo apresentam uma decomposição de um triângulo equilátero em peças que, convenientemente justapostas, formam um quadrado.

O lado do triângulo mede 2 cm, então, o lado do quadrado mede, em centímetros,



Fonte: Exame Vestibular UFRGS 2011 (adaptada).

Quadro 50 – Questão 24 resolvida pelo Ensino Médio.

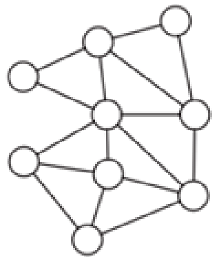
	Resposta	Explicação	Situação	Observações
M1 e M3	-	-	-	O grupo não resolveu a questão 24.
M2 e M6	E	E	3	-
M4 e M7	A	A	1	-
M5 e M8	E	E	3	-

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Ainda, os estudantes resolveram individualmente a questão 3, cuja arguição será realizada no encontro 6, e a questão 7, primeiro individualmente e, após, em grupo.

Figura 82 – Questão 3 realizada no Encontro 5 (30/04/14).

De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?



Fonte: Prova da 1ª fase do nível 1 da OBMEP 2012 (adaptada).

Quadro 51 – Questão 3 resolvida pelo Ensino Médio.

	Resposta	Explicação	Situação	Observações
M1	A	A	1	-
M2	A	E	2	-
M3	E	E	3	-
M4	E	E	3	-
M5	E	E	3	-
M6	A	I	-	Não deixa claro como verificou se há repetições e se cogita outras respostas ou não.
M7	-	-	-	Não entregou a escrita e não quis gravar a arguição.
M8	E	E	3	-

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Figura 83 – Questão 7 realizada no Encontro 5 (30/04/14).

Gabriel comprou uma rosa, um cravo e um lírio e quer dar uma flor para cada uma de suas três amigas. Ele sabe que uma amiga não gosta de cravos, outra não gosta de lírios e a terceira não gosta de rosas. De quantas maneiras ele pode distribuir as flores de modo a agradar às três amigas?

Fonte: Prova nível 1 da 1ª fase da OBMEP 2011.

Quadro 52 – Questão 7 resolvida pelo Ensino Médio.

		Resposta	Explicação	Situação	Observações
Grupo 1	M1	A	A (áudio)	1	-
	M3	A	A (áudio)	1	-
Grupo 2	M2	E	E (áudio)	3	-
	M6	E	E (áudio)	3	-
Grupo 3	M4	A	A (escrita)	1	-
	M7	A	A (escrita)	1	-
Grupo 4	M5	-	I (escrita)	-	Há dois números circulados na resolução e, pelo desenho, não conseguimos identificar nem o método utilizado, nem a resposta final.
	M8	E	E (escrita)	3	-

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Optamos por não descrever a questão 7 detalhadamente, por não termos uma homogeneidade do tipo de explicação entre todos os participantes. Isto é, de alguns tivemos a argumentação oral e, de outros, a escrita.

Quadro 53 – Encontro 6 com o Ensino Médio.

ENCONTRO 6 – 07.05.14	
Participantes presentes: M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7 e M9.	
DESCRIÇÃO	DADOS
Duplas do encontro passado analisando a escrita dos colegas e fazendo correções (questões 23 e 24).	• Escrita (grupo). • Anotações da pesquisadora.
Arguição da questão 3.	• Áudio das arguições (individual). • Anotações da pesquisadora.

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Para este encontro, as questões do encontro anterior foram digitalizadas e entregues para cada dupla. Dois participantes que não estavam no encontro anterior participaram deste, mas seus dados não foram contabilizados por um deles não ter entregado o TCLE. As tabelas abaixo apresentam o comparativo entre o resultado obtido no encontro anterior na primeira coluna; na segunda, se a correção no trabalho dos colegas indica compreensão da questão; e, na terceira, em qual das quatro situações o grupo está incluído.

Quadro 54 – Correção da questão 23 resolvida pelo Ensino Médio.

	Resultado obtido no encontro anterior	**Resultado obtido a partir da correção dos trabalhos**	**Situação**	**Observações**
M1 e M3	E	E	3	-
M2 e M6	E	E	3	-
M4 e M7	E	E	3	-
M5	E	E	3	-
M9	-	-	-	M9 trabalhou com um participante que não entregou o TCLE, logo, estes dados não foram contabilizados.

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Quadro 55 – Correção da questão 24 resolvida pelo Ensino Médio.

	Resultado obtido no encontro anterior	**Resultado obtido a partir da correção dos trabalhos**	**Situação**	**Observações**
M1 e M3	-	I	-	M1 e M3 não resolveram a questão no encontro anterior. Sua correção baseou-se em afirmar se concordavam ou não com a resposta dos colegas, mas não a corrigiram.
M2 e M6	E	E	-	-
M4 e M7	E	E	3	-
M5	E	E	3	-
M9	-	-	-	M9 trabalhou com um participante que não entregou o TCLE, logo, estes dados não foram contabilizados.

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Realizamos, também, a arguição individual da questão 3 aplicada no encontro passado e já apresentada.

Quadro 56 – Encontro 7 com o Ensino Médio.

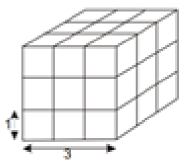
ENCONTRO 7 – 28.05.14	
Participantes presentes: M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7, M8 e M9.	
DESCRIÇÃO	DADOS
Resolução das questões 25, 26, 27, 28 e 29.	• Escrita (grupo). • Áudio da resolução (grupo). • Anotações da pesquisadora.
Resolução das questões 14 e 15 do Ensino Fundamental II.	• Escrita (individual).

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Os estudantes se dividiram em duplas e cada dupla realizou um exercício diferente. Após a resolução e escrita, formaram-se novas duplas onde cada integrante havia resolvido uma questão, e os estudantes deveriam explicar para o colega como haviam resolvido o seu exercício. Obtivemos desta atividade a resolução feita pela dupla e o áudio da discussão da pesquisadora com a dupla após a alteração dos integrantes. Era pedido que o estudante que não tivesse resolvido a questão explicasse como o colega o fez.

Figura 84 – Questão 25 realizada no Encontro 7 (28/04/2014).

Um cubo de madeira de 3 cm de aresta. Duas faces opostas foram pintadas de amarelo e as outras quatro faces foram pintadas de verde. Em seguida o cubo foi serrado em 27 cubinhos de 1cm de aresta, conforme indicado no desenho. Quantos cubinhos têm faces pintadas com as duas cores?



Fonte: Prova nível 1 da 1ª fase da OBMEP 2005 (adaptada).

Quadro 57 – Questão 25 resolvida pelo Ensino Médio.

	Resposta	**Explicação**	**Situação**	**Observação**
M5 e M8	A	A	1	Obtém a resposta correta após discussão com a pesquisadora.

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Figura 85 – Questão 26 realizada no Encontro 7 (28/04/2014).

Na figura os quatro círculos são tangentes e seus centros são vértices de um quadrado de lado 4cm. Qual é o comprimento, em centímetros, da linha destacada?

Fonte: Prova do nível 3 da 1ª fase da OBMEP 2006 (adaptada).

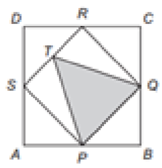
Quadro 58 – Questão 26 resolvida pelo Ensino Médio.

	Resposta	Explicação	Situação	Observação
M4 e M7	A	E	2	Baseiam-se em um aspecto visual que se verifica para esta questão em particular.

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Figura 86 – Questão 27 realizada no Encontro 7 (28/04/2014).

Na figura, o quadrado ABCD tem área 40cm². Os pontos P, Q, R e S são pontos médios dos lados do quadrado e T é o ponto médio do segmento RS. Qual é a área do triângulo PQT?



Fonte: Prova do nível 1 da 1ª fase da OBMEP 2009 (adaptada).

Quadro 59 – Questão 27 resolvida pelo Ensino Médio.

	Resposta	Explicação	Situação	Observação
M9	A	E	2	Baseia-se em um aspecto visual que não se verifica para esta questão em particular.

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Figura 87 – Questão 28 realizada no Encontro 7 (28/04/2014).

Juliana tem 8 cartões de papelão, retangulares e iguais. Se ela enfileirar todos os cartões juntando apenas lados de mesma medida, a maior fila que ela poderá obter terá comprimento 176 cm e a menor terá comprimento 96 cm. Qual é o perímetro de cada cartão?

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

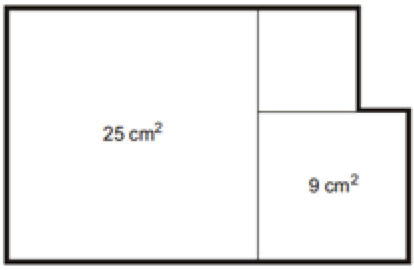
Quadro 60 – Questão 28 resolvida pelo Ensino Médio.

	Resposta	Explicação	Situação	Observação
M1 e M3	A	A	1	-
M5 e M8	A	A	1	-

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Figura 88 – Questão 29 realizada no Encontro 7 (28/04/2014).

A figura é formada por três quadrados, um deles com área de 25 cm² e o outro com 9 cm². Qual é o perímetro da figura?



Fonte: Prova do nível 1 da 1ª fase da OBMEP 2006.

Quadro 61 – Questão 29 resolvida pelo Ensino Médio.

	Resposta	Explicação	Situação	Observação
M2 e M6	E	A	4	Não respondem o que foi pedido, mas calculam corretamente os processos intermediários que levam a resposta.

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Figura 89 – Questão 14 realizada no Encontro 7 (28/04/2014).

Ari, Bruna e Carlos almoçam juntos todos os dias e cada um deles pede água ou suco.

- Se Ari pede a mesma bebida que Carlos, então Bruna pede água.
- Se Ari pede uma bebida diferente da de Bruna, então Carlos pede suco.
- Se Bruna pede uma bebida diferente da de Carlos, então Ari pede água.
- Apenas um deles sempre pede a mesma bebida.

Quem pede sempre a mesma bebida e que bebida é essa?

Fonte: Prova nível 1 da 1ª fase da OBMEP 2008 (adaptada).

Quadro 62 – Questão 14 resolvida pelo Ensino Médio.

	Resposta	Explicação	Situação	Observações
M1	-	-	-	Deixou a questão em branco.
M2	E	-	-	Escreveu apenas a resposta.
M3	E	E (escrita)	3	-
M4	E	E (escrita)	3	-
M5	E	E (escrita)	3	-
M6	E	E (escrita)	3	-
M7	E	E (escrita)	3	-
M8	E	E (escrita)	3	-
M9	E	E (escrita)	3	-

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Figura 90 – Questão 15 realizada no Encontro 7 (28/04/2014).

Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?

Fonte: Prova nível 1 da 1ª fase da OBMEP 2007 (adaptada).

Quadro 63 – Questão 15 resolvida pelo Ensino Médio.

	Resposta	Explicação	Situação	Observações
M1	E	E (escrita)	3	-
M2	E	E (escrita)	3	-
M3	E	E (escrita)	3	-
M4	E	E (escrita)	3	-
M5	E	E(escrita)	3	-
M6	E	E (escrita)	3	-
M7	E	E (escrita)	3	-
M8	E	E (escrita)	3	-
M9	E	E (escrita)	3	-

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.