

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Construção da Solução LTS_N Anisotrópica a
Partir de um Sistema Recursivo de Soluções
 LTS_N Isotrópicas**

por

Taline Foletto

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Profa. Cynthia Feijó Segatto
Orientadora

Porto Alegre, 01 de Abril de 2015.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Foletto, Taline

Construção da Solução LTS_N Anisotrópica a Partir de um Sistema Recursivo de Soluções LTS_N Isotrópicas / Taline Foletto.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2015.

49 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2015.

Orientadora: Segatto, Cynthia Feijó

Dissertação: Matemática Aplicada
Equações S_N , Espalhamento Anisotrópico, Método Recursivo, Multiregião

Construção da Solução LTS_N Anisotrópica a Partir de um Sistema Recursivo de Soluções LTS_N Isotrópicas

por

Taline Foletto

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Fenômenos de Transporte

Orientadora: Profa. Cynthia Feijó Segatto

Banca examinadora:

Prof. Dr. Bardo Ernst Bodmann
PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Rubem Mário Figueiró Vargas
Departamento Engenharia/PUCRS

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
PPGMAp/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
01 de Abril de 2015.

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Coordenador

AGRADECIMENTOS

À minha família, pelo apoio e incentivo constante;

Ao meu esposo Matias, pelo seu companheirismo, conselhos e ajuda, sempre;

À minha orientadora, por todo auxílio na elaboração desta dissertação. Pelo exemplo de profissional que és;

Aos meus colegas, especialmente à Aline, Bruna, Felipe e Fernanda, por todo incentivo e ajudas durante este estudo;

Aos membros da comissão examinadora, por suas contribuições.

Sumário

LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE TABELAS	vii
LISTA DE SÍMBOLOS	viii
RESUMO	x
ABSTRACT	xi
1 INTRODUÇÃO	1
2 O MÉTODO LTS_N	5
2.1 Formulação LTS_N clássica	5
3 MÉTODO RECURSIVO PARA CONSTRUÇÃO DA SOLUÇÃO LTS_N DE PROBLEMAS S_N ANISOTRÓPICOS . .	14
3.1 Construindo a Solução do problema S_N anisotrópico recursivamente	14
3.1.1 Exemplificando para $N = 2$	16
3.2 Problemas Heterogêneos	22
3.3 Avaliação numérica do termo de convolução	25
4 RESULTADOS NUMÉRICOS	29
4.1 Problemas em meios homogêneos	29
4.2 Problemas em meios heterogêneos	39
5 CONCLUSÃO	42
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	44

Lista de Figuras

Figura 3.1	<i>Domínio dividido em k regiões.</i>	23
Figura 4.1	<i>Fluxo Escalar $N = 40$, $L = 8$, Spline Natural(100 pontos).</i>	33
Figura 4.2	<i>Fluxo Escalar $N = 40$, $L = 8$, Spline Restrito(100 pontos).</i>	33
Figura 4.3	<i>Fluxo Escalar $N = 100$, $L = 82$, Spline Natural(100 pontos).</i>	34
Figura 4.4	<i>Fluxo Escalar $N = 100$, $L = 82$, Spline Restrito(100 pontos).</i>	35
Figura 4.5	<i>Fluxo Escalar $N = 300$, $L = 299$, Spline Natural(100 pontos).</i>	35
Figura 4.6	<i>Fluxo Escalar $N = 300$, $L = 299$, Spline Restrito(100 pontos).</i>	36
Figura 4.7	<i>Domínio dividido em 2 regiões.</i>	40

Lista de Tabelas

Tabela 4.1	Fluxo escalar em $x = 0$	31
Tabela 4.2	Fluxo escalar em $x = 0.5$	31
Tabela 4.3	Fluxo escalar em $x = 1$	32
Tabela 4.4	Relação entre Anisotropia e Número Recursões	37
Tabela 4.5	Fluxo escalar 300 pontos spline, $L = 82$	38
Tabela 4.6	Aproximação Fluxo escalar - Tol. 10^{-8} - Spline Natural	39
Tabela 4.7	Aproximação Fluxo escalar - Tol. 10^{-8} - Spline Restrito	39
Tabela 4.8	Aprox. $\phi(x)$ - Domínio Heterogêneo $N = 40$, $L^1 = 0$ e $L^2 = 8$	40
Tabela 4.9	Aprox. $\phi(x)$ - Domínio Heterogêneo $N = 100$, $L^1 = 82$ e $L^2 = 8$	40

LISTA DE SÍMBOLOS

S_N	Sistema de ordenadas discretas
N	Ordem da quadratura de Gauss
LTS_N	Transformada de Laplace de S_N
\mathcal{L}^{-1}	Operador da transformada inversa de Laplace
\mathcal{L}	Operador da transformada de Laplace
ψ	Fluxo
ψ^k	Fluxo recursivo
ψ_n	Fluxo na direção discreta μ_n
Ψ	Vetor do fluxo transformado
Ψ_1	Vetor do fluxo na direção positiva
Ψ_2	Vetor do fluxo na direção negativa
Q	Vetor fonte
\bar{Q}	Transformada de Laplace do vetor fonte
ϕ	Condição inicial
f	Fluxo incidente em $x = 0$
g	Fluxo incidente em $x = x_0$
F_n	Fluxo transformado incidente em $x = 0$, direção discreta μ_n
G_n	Fluxo transformado incidente em $x = x_0$, direção discreta μ_n
s	Parâmetro complexo proveniente da transformada de Laplace

\mathbf{A}	Matriz dependente da aproximação considerada
$\mathbf{A}_{\mathbf{C}}$	Matriz anisotrópica
$\mathbf{A}_{\mathbf{I}}$	Matriz isotrópica
$a(i, j)$	Elementos da matriz \mathbf{A}
$a^m(i, j)$	Elementos da matriz $\mathbf{A}_{\mathbf{c}}$
I	Matriz identidade
\mathbf{D}	Matriz de autovalores de \mathbf{A}
\mathbf{X}	Matriz de autovetores de \mathbf{A}
\mathbf{X}^{-1}	Matriz da inversa dos autovetores de \mathbf{A}
\mathbf{H}	Vetor convolução da matriz \mathbf{B} com o vetor \mathbf{Q}
\mathbf{B}	Matriz da transformada inversa de Laplace de $(sI - \mathbf{A})^{-1}$
$p(\cos \Theta)$	Função fase
$P_{\ell}(\mu)$	Polinômio de Legendre
$P(\mu)$	Vetor coluna de ordem N
$P_{\ell}^m(\mu)$	Funções associadas de Legendre
η	Vetor auxiliar para a mudança de base
ε_r	Erro relativo na aproximação fluxo
β_{ℓ}	Coefficientes da expansão em Polinômios de Legendre
w_k	Peso da quadratura de Gauss-Legendre
x	Espessura
x_0	Espessura máxima
μ	Direção angular
μ_n	Direção discreta
σ_t	Seção de choque macroscópica total
σ_s	Seção de choque macroscópica de espalhamento

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos um esquema recursivo visando a construção hierárquica da solução LTS_N de problemas anisotrópicos a partir da solução de problemas isotrópicos. A ideia principal deste esquema é a decomposição da matriz LTS_N anisotrópica, associada ao problema, como uma soma de duas matrizes na qual uma delas contém a parte isotrópica e a outra a parte anisotrópica do problema. A matriz que contém a parte anisotrópica é considerada como fonte no problema isotrópico. A resolução deste problema é realizada através da decomposição do fluxo angular como uma série truncada de funções intermediárias, posteriormente substituída na equação isotrópica com fonte. Em seguida, resolvemos este problema construindo um conjunto recursivo de problemas isotrópicos que são facilmente resolvidos pelo método LTS_N . Nessa dissertação, aplicamos esse método recursivo na resolução de problemas anisotrópicos em regiões homogêneas e heterogêneas. Os resultados numéricos obtidos são apresentados e comparados com a solução LTS_N anisotrópica clássica.

ABSTRACT

In this work, we present a recursive scheme targeting the hierarchical construction of anisotropic LTS_N solution from the isotropic LTS_N solution. The main idea relies in the decomposition of the associated LTS_N anisotropic matrix as a sum of two matrices in which one matrix contains the isotropic and the other anisotropic part of the problem. The matrix containing the anisotropic part is considered as the source of the isotropic problem. The solution of this problem is made by the decomposition of the angular flux as a truncated series of intermediate functions and replace in the isotropic equation. After the replacement of these into the split isotropic equation, we construct a set of isotropic recursive problems, that are readily solved by the classic LTS_N isotropic method. We apply this methodology to solve problems considering homogeneous and heterogeneous anisotropic regions. Numerical results are presented and compared with the classical LTS_N anisotropic solution.

1 INTRODUÇÃO

A equação de transporte de partículas descreve a distribuição espacial, direcional e energética de partículas em meios materiais. Existem mais de uma forma de escrever a equação de transporte de partículas neutras. Dentre elas, a formulação integro-diferencial é, sem sombra de dúvida, a mais utilizada nas aplicações de transporte de nêutrons e transferência radiativa, porém a formulação integral também é bastante empregada [1].

Existem na literatura diversas soluções analíticas para aproximações da equação de transporte de partículas em sua formulação integro-diferencial, tais como o método das ordenadas discretas (S_N) [2] e a aproximação dos esféricos harmônicos (P_n) [1], entre outras. O conjunto de equações S_N é uma aproximação clássica da equação de transporte e foi desenvolvida por Chandrasekhar no estudo de transferência radiativa em atmosferas estelares na década de 60 [2]. A ideia central desta aproximação é a avaliação do termo integral da equação de transporte de partículas por Quadratura Gaussiana e posterior aplicação do método da colocação no conjunto de direções discretas, as mesmas usadas na quadratura. Deste procedimento, resulta um conjunto de equações diferenciais nas variáveis espaciais. Dentre os métodos existentes para resolução analítica da aproximação S_N da equação de transporte de partículas neutras, encontra-se o método LTS_N , desenvolvido por Vilhena et al. na década de 90 [3]. A ideia principal do método LTS_N consiste na aplicação da Transformada de Laplace no conjunto de equações S_N , resultando num sistema de equações dependentes do parâmetro complexo "s". Tal sistema é resolvido para o fluxo transformado realizando a Transformada Inversa de Laplace, obtendo-se, com este procedimento, uma expressão analítica para a solução das equações S_N .

O método LTS_N tem sido aplicado para uma classe abrangente de problemas, dentre os quais citamos: problemas unidimensionais em meios homogêneo [4] e heterogêneos [5]; problemas envolvendo modelo de multi-grupo de energia [6] e meio composto por dois materiais em sistema de mistura aleatória [7]. Destaca-se, também, a utilização deste método em problemas envolvendo elevada ordem de quadratura e grandes espessuras [8, 9] e cuja resolução utiliza mudança de variável e aplicação da técnica da diagonalização [10] para inversão da matriz associada, eliminando o problema de overflow para grandes domínios. Para problemas cujo N é inteiro, Bonenberger [11] buscou estudar a influência da singularidade existente na direção $\mu = 0$ no comportamento da solução, apresentando um estudo da solução para N ímpar. Já Marona et al [12] investigaram problemas cuja razão de espalhamento é igual a 1; situações nas quais a equação de transporte unidimensional apresenta dois autovalores que se encontram no infinito. Desta forma, a formulação LTS_N não pode ser aplicada visto que, nestes casos, a matriz associada apresentará dois autovalores nulos e não pode ser diagonalizada. Para contornar este problema, Marona et. al utilizaram a decomposição de Schur e a expansão de Heavside para inversão da matriz simbólica associada ao método LTS_N . Ainda, problemas com dependência temporal [13, 14, 15, 16], já foram resolvidos pelo método LTS_N . Para resolução deste tipo de problema, Tomaschewski [13] aplica a transformada de Laplace na variável temporal transformando o sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias na variável espacial. A solução analítica destes problemas foi, então, encontrada pelo método LTS_N . Problemas com ou sem simetria azimutal [17, 18] e problemas considerando geometria cartesiana multidimensional ($2D$ e $3D$) [19, 20, 21] bem como para domínio convexo [22] também são resolvidos utilizando o método LTS_N . Este método de resolução da equação de transporte também já foi utilizado em problemas de engenharia nuclear, como, por exemplo, o cálculo de criticalidade [23, 24], a equação S_N de cinética de transporte dependente do tempo [25] e em problemas de transferência radiativa [26], bem como a solução do problema não

linear radiativo-condutivo [27] e problemas que consideram o coeficiente de albedo com dependência espacial [28]. É de fundamental importância destacar, ainda, os resultados obtidos por Pazos e Vilhena [29, 30] em seus estudos acerca da convergência da solução LTS_N , os quais provaram que, à medida que N cresce a solução LTS_N se aproxima da solução exata de Case [31].

Por outro lado, a formulação analítica para a solução da aproximação S_N da equação de transporte de partículas em geometria cilíndrica, pelo método LTH_N , é restrita apenas a problemas isotrópicos e linearmente anisotrópicos. Para maiores informações sobre os avanços nesta direção ver o trabalho de Gonçalves et al. [32]. Cumpre observar, ainda, que existe solução analítica para a forma integral da equação de transporte em geometria cilíndrica, porém, apenas para problemas com espalhamento isotrópico. Em sua tese de doutorado, Fernandes [33] resolve o problema de transporte anisotrópico representado na forma integral de maneira recursiva, a partir de um conjunto de equações de transporte integrais isotrópicas, onde a anisotropia é introduzida como termo fonte.

Com o objetivo de apresentar uma metodologia para resolver problemas anisotrópicos, tanto na formulação integro-diferencial quanto integral, aplicamos, nesse trabalho o método recursivo proposto por Fernandes [33] para a resolução de problemas anisotrópicos na formulação integro-diferencial. Mais ainda, aqui damos um passo adiante, aplicando esta ideia de processo recursivo para encontrar a distribuição de partículas em um meio heterogêneo, formado por placas homogêneas, evitando assim o uso de acoplamento das regiões homogêneas usando hipótese de continuidade de fluxo entre as placas homogêneas. O número de equações resolvidas de forma recursiva é escolhido de modo a obter a precisão desejada para os resultados.

A fim de cumprir o objetivo proposto, esse estudo está organizado da seguinte maneira: no Capítulo **2**, descrevemos a estrutura e o desenvolvimento do método LTS_N , o qual encontra uma solução analítica para a aproximação S_N da equação de transporte. No Capítulo **3**, apresentamos e descrevemos uma proposta

de construção da solução LTS_N de um problema anisotrópico genérico a partir de um sistema recursivo de soluções LTS_N de problemas isotrópicos. Em seguida, tomando $N = 2$ em um problema anisotrópico, exemplificamos o processo recursivo de construção da solução LTS_N . No capítulo 4, apresentamos resultados obtidos mediante a implementação de um programa em Fortran95, o qual reconstitui a solução LTS_N de problemas anisotrópicos homogêneos e heterogêneos de maneira recursiva. Essas informações foram comparadas com os dados obtidos pela execução de um programa que resolve problemas anisotrópicos de maneira clássica e os resultados de nossa análise apresentados em forma de tabelas e gráficos. Por fim, no capítulo 5, apresentamos as conclusões desse estudo e as propostas para trabalhos futuros.

2 O MÉTODO LTS_N

Neste capítulo, buscamos descrever de forma sucinta a estrutura e o desenvolvimento do método LTS_N ao longo de quase três décadas de estudos [3, 34, 4, 10, 35, 9]. Este método, proposto para resolução da aproximação S_N da equação de transporte, pode ser descrito através de três etapas, quais sejam: (i) aplicação da transformada de Laplace nas equações S_N ; (ii) inversão analítica da matriz simbólica e (iii) resolução do sistema linear resultante.

2.1 Formulação LTS_N clássica

A fim de descrevermos o método LTS_N , consideramos a equação de transporte linear unidimensional, monoenergética, estacionária e com simetria azimutal dada por:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \sigma_t \psi(x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 p(\cos \Theta) \psi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu), \quad (2.1)$$

com condições de contorno

$$\psi(0, \mu) = f(\mu) \text{ se } \mu > 0, \quad (2.2)$$

$$\psi(x_0, \mu) = g(\mu) \text{ se } \mu < 0, \quad (2.3)$$

onde $f(\mu)$ e $g(\mu)$ são os fluxos angulares incidentes na fronteira do domínio.

Na equação descrita em (2.1) temos que:

- x é a variável espacial pertencente a $[0, x_0]$;
 $\mu = \cos \theta$ onde θ é o ângulo polar, portanto $\mu \in [-1, 1]$;
 $\psi(x, \mu)$ é o fluxo angular de partículas em x na direção de μ ;
 $p(\cos \Theta)$ é a função de espalhamento, onde Θ é o ângulo formado pela direção de movimento da partícula antes da iteração e o ângulo resultante após a iteração;
 $Q(x, \mu)$ é uma fonte externa;
 σ_t é a seção de choque macroscópica total;
 σ_s é a seção de choque macroscópica de espalhamento isotrópico.

Neste trabalho, primeiramente, assumimos que a função de espalhamento pode ser aproximada por uma série truncada em polinômios de Legendre, ou seja:

$$p(\cos \Theta) = \sum_{\ell=0}^L \beta_{\ell} P_{\ell}(\cos \Theta), \quad \beta_0 = 1 \quad (2.4)$$

E, utilizando o teorema da adição para polinômios de Legendre [18], reescrevemos (2.4) como:

$$p(\cos \Theta) = \sum_{m=0}^M \sum_{\ell=m}^L \beta_{\ell}^m P_{\ell}^m(\mu') P_{\ell}^m(\mu) \cos m(\varphi - \varphi') \quad (2.5)$$

onde φ é o ângulo azimutal formado com um ângulo de referência φ' , $P_{\ell}^m(\mu)$ são funções associadas de Legendre com

$$\beta_{\ell}^m = \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} \beta_{\ell}. \quad (2.6)$$

Por estarmos considerando que o fluxo angular de partículas possui simetria azimutal, tomamos $M = 0$ em (2.5), donde, substituindo (2.5) em (2.1) resulta em:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \sigma_t \psi(x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \sum_{\ell=0}^L \beta_{\ell} P_{\ell}(\mu') P_{\ell}(\mu) \psi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu). \quad (2.7)$$

Em seguida, para obtermos a aproximação S_N associada à equação de transporte (2.7), aproximamos o seu termo integral por quadratura de Gauss-Legendre de ordem N . Escrevemos, então:

$$\int_{-1}^1 p(\cos \Theta) \psi(x, \mu') d\mu' \approx \sum_{\ell=0}^L \beta_{\ell} \sum_{k=1}^N \omega_k P_{\ell}(\mu_k) P_{\ell}(\mu) \psi(x, \mu_k) \quad (2.8)$$

onde μ_k são as raízes do polinômio de Legendre, ordenadas de forma decrescente:

$$-1 < \mu_N < \dots < \mu_{\frac{N}{2}+1} < 0 < \mu_{\frac{N}{2}} < \dots < \mu_1 < 1,$$

com N par, e os ω_k são os respectivos pesos da quadratura de Gauss-Legendre, dados por:

$$\omega_k = \int_{-1}^1 \prod_{j=1, k \neq j}^N \frac{(\mu - \mu_j)}{(\mu_k - \mu_j)} d\mu. \quad (2.9)$$

Posteriormente, aplicamos o método da colocação na variável μ considerando a função Delta de Dirac $\delta(\mu - \mu_n)$ como a função teste e as raízes do polinômio de Legendre de grau N como os pontos de colocação. Desta forma, o sistema de equações S_N associado à equação de transporte unidimensional em uma placa plana, é dado por:

$$\mu_n \frac{d}{dx} \psi_n(x) + \sigma_t \psi_n(x) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{\ell=0}^L \beta_{\ell} \sum_{k=1}^N \omega_k P_{\ell}(\mu_k) P_{\ell}(\mu_n) \psi_k(x) + Q_n(x), \quad (2.10)$$

com as condições de contorno dadas por:

$$\psi_n(0) = f_n, \text{ se } \mu_n > 0, \quad (2.11)$$

$$\psi_n(x_0) = g_n, \text{ se } \mu_n < 0. \quad (2.12)$$

Matricialmente, escrevemos (2.10) como:

$$\frac{d}{dx} \mathbf{\Psi}(x) - \mathbf{A} \mathbf{\Psi}(x) = \mathbf{Q}(x), \quad (2.13)$$

onde \mathbf{A} é uma matriz quadrada de ordem N definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} -\frac{\sigma_i}{\mu_i} + \frac{\sigma_s \omega_j}{2\mu_i} \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell P_\ell(\mu_i) P_\ell(\mu_j) & \text{se } i = j \\ \frac{\sigma_s \omega_j}{2\mu_i} \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell P_\ell(\mu_i) P_\ell(\mu_j) & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad (2.14)$$

e o vetor $\mathbf{Q}(x)$ de ordem N é definido por:

$$\mathbf{Q}(x) = \left[\frac{Q_1(x)}{\mu_1}, \dots, \frac{Q_N(x)}{\mu_N} \right]^T. \quad (2.15)$$

Ainda, o vetor fluxo angular de partículas é definido por:

$$\mathbf{\Psi}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}_1(x) \\ \mathbf{\Psi}_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \vdots \\ \Psi_{N/2}(x) \\ \Psi_{N/2+1}(x) \\ \vdots \\ \Psi_N(x) \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

onde $\mathbf{\Psi}_1(x)$ e $\mathbf{\Psi}_2(x)$ são sub-vetores do vetor fluxo angular $\mathbf{\Psi}(x)$, cada um de ordem $N/2$. O vetor $\mathbf{\Psi}_1(x)$ contém os fluxos das direções positivas de μ e o vetor $\mathbf{\Psi}_2(x)$ os fluxos das direções negativas de μ . Utilizando esta notação, reescrevemos as condições de contorno como:

$$\mathbf{\Psi}_1(0) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{N/2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Psi}_2(x_0) = \begin{bmatrix} g_{N/2+1} \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

A resolução do problema descrito por (2.10) via método LTS_N se dá aplicando Transformada de Laplace na variável espacial das equações diferenciais ordinárias representadas pelo sistema matricial (2.13). Deste procedimento, obtém-se um sistema linear de N equações e N incógnitas, dependentes do parâmetro s , dadas por:

$$(sI - \mathbf{A})\bar{\mathbf{\Psi}}(s) = \mathbf{\Psi}(0) + \bar{\mathbf{Q}}(s), \quad (2.18)$$

em que $\bar{\Psi}(s) = \mathcal{L}[\Psi(x)]$ e $\bar{\mathbf{Q}}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{Q}(x)]$ são as transformadas de Laplace, s é um parâmetro complexo e I uma matriz identidade de ordem N . Resolvendo a equação (2.18) para o fluxo angular transformado de partículas, obtemos:

$$\bar{\Psi}(s) = (sI - \mathbf{A})^{-1}\Psi(0) + (sI - \mathbf{A})^{-1}\bar{\mathbf{Q}}(s). \quad (2.19)$$

Em seguida, aplicando a transformada inversa de Laplace em (2.19), obtemos o fluxo angular transformado $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) = \mathbf{B}(x)\Psi(0) + \mathbf{H}(x), \quad (2.20)$$

com

$$\mathbf{B}(x) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - \mathbf{A})^{-1}] \quad (2.21)$$

e o vetor $\mathbf{H}(x)$ definido por:

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{B}(x) * \mathbf{Q}(x) = \int_0^x \mathbf{B}(x - \xi)\mathbf{Q}(\xi)d\xi, \quad (2.22)$$

onde o sinal $*$ representa a convolução matricial.

A igualdade (2.20) nos fornece uma expressão para a solução analítica do sistema de equações S_N (2.13). No decorrer dos estudos acerca da inversão da matriz simbólica $(sI - \mathbf{A})$ [34, 37], Segatto et al. [10, 38] observaram que os autovalores da matriz LTS_N são todos simétricos não-nulos e distintos quando $\sigma_s \neq \sigma_t$. Diante disso, a matriz A é similar ao seu espectro, ou seja, pode ser decomposta como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1}, \quad (2.23)$$

onde D é a matriz diagonal formada pelos autovalores de \mathbf{A} , e \mathbf{X} a matriz cujas colunas são autovetores associados. Assim,

$$\mathbf{B}(x) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - \mathbf{A})^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} - \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1})^{-1}]. \quad (2.24)$$

E, colocando em evidência a matriz \mathbf{X} dos autovetores à esquerda e \mathbf{X}^{-1} à direita, temos:

$$\mathbf{B}(x) = \mathcal{L}^{-1}[(\mathbf{X}(sI - D)\mathbf{X}^{-1})^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}[(\mathbf{X}(sI - D)^{-1}\mathbf{X}^{-1})], \quad (2.25)$$

e como \mathbf{X} é uma matriz constante então podemos escrever,

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X}\mathcal{L}^{-1}[(sI - D)^{-1}]\mathbf{X}^{-1}. \quad (2.26)$$

Assim, a matriz simbólica $(sI - D)$ é uma matriz diagonal, na qual os d_i são os autovalores de \mathbf{A} e, portanto, sua inversa é dada por:

$$(sI - D)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-d_2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{s-d_N} \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

cuja transformada inversa de Laplace é dada por:

$$\mathcal{L}^{-1}[(sI - D)^{-1}] = \begin{bmatrix} e^{d_1x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_2x} & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{d_Nx} \end{bmatrix} = e^{Dx}. \quad (2.28)$$

Deste modo, podemos reescrever a matriz $\mathbf{B}(x)$ como:

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X}e^{Dx}\mathbf{X}^{-1}. \quad (2.29)$$

Portanto, a solução LTS_N das equações S_N dadas em (2.13) é representada por:

$$\Psi(x) = \mathbf{B}(x)\Psi(0) + \mathbf{H}(x) = \mathbf{X}e^{Dx}\mathbf{X}^{-1}\Psi(0) + \mathbf{H}(x) \quad (2.30)$$

Entretanto, somente a parte do vetor $\Psi(0)$ que contém o valor do fluxo angular nas direções positivas da solução expressa em (2.30) é conhecida. Portanto, reescrevemos

esta solução na forma particionada a fim de calcularmos o valor do fluxo angular das direções negativas $\Psi_2(0)$, que é desconhecido:

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}(x) & \mathbf{B}_{12}(x) \\ \mathbf{B}_{21}(x) & \mathbf{B}_{22}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1(0) \\ \Psi_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(x) \\ \mathbf{H}_2(x) \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Em seguida, aplicando $x = x_0$ nas $N/2$ últimas linhas da equação (2.31), obtemos:

$$\Psi_2(x_0) = \mathbf{B}_{21}(x_0)\Psi_1(0) + \mathbf{B}_{22}(x_0)\Psi_2(0) + \mathbf{H}_2(x_0). \quad (2.32)$$

Notemos agora que os valores dos vetores $\Psi_1(0)$, $\Psi_2(x_0)$ e $\mathbf{H}_2(x_0)$ são conhecidos e, dessa forma, obtemos:

$$\Psi_2(0) = \mathbf{B}_{22}(x_0)^{-1}[\Psi_2(x_0) - \mathbf{B}_{21}(x_0)\Psi_1(0) - \mathbf{H}_2(x_0)]. \quad (2.33)$$

Segue-se, enfim, que a solução (2.30) do problema dado por (2.13) está completamente determinada.

Cabe destacar, entretanto, o comportamento exponencial desta solução analítica apresentada. Este caráter exponencial junto ao fato de que em descrições realísticas os problemas de transporte apresentam grandes espessuras e/ou altos graus de anisotropia, mostram que a solução apresentada mediante esta formulação não é apropriada para essa abrangente classe de problemas [10, 39]. Nesses casos, ocorre uma falha computacional relacionada com o uso de operações aritméticas finitas, causando *overflow*.

Estudos realizados por Gonçalves et al. [9] possibilitaram eliminar o problema de *overflow* que ocorria, nos problemas citados acima, tanto na parte homogênea quanto no termo de convolução gerado pela fonte. Para isso, usou simultaneamente a propriedade de invariância de direções discretas e a mudança de variáveis proposta por Barichello [40] para problemas homogêneos.

Por propriedade de invariância de projeções, entende-se a equivalência de condições entre as coordenadas (x, μ) e $(-x, -\mu)$, ou alternativamente o tratamento equivalente a fluxos nas direções μ e $-\mu$ [1]. Desta forma, o par $(-x, -\mu)$ pode ser recolocado por $(x_0 - x, -\mu)$ como resultado do deslocamento do ponto de reflexão de 0 para $x_0/2$. Usando esta propriedade Gonçalves et al. [9] eliminaram o *overflow* originado pelos termos de exponencial positivas para N grande, separando as soluções homogênea e particular em componentes que contém apenas os expoentes positivos e outra os negativos. Deste modo, decompueram a matriz \mathbf{e}^{Dx} como:

$$\mathbf{e}^{Dx} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{D_1x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}^{D_2(x-x_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}^{D_2x_0} \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

onde D_1 e D_2 são submatrizes diagonais de ordem $N/2$ formadas, respectivamente, por autovalores negativos e positivos da matriz A . Assim, reescrevemos a equação (2.30) como:

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(\mathbf{x}) \\ \Psi_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathbf{X} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{D_1x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}^{D_2(x-x_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}^{D_2x_0} \end{bmatrix} \mathbf{X}^{-1} \begin{bmatrix} \Psi(0) \\ \Psi(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Tomando

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}^{D_2x_0} \end{bmatrix} \mathbf{X}^{-1} \begin{bmatrix} \Psi(0) \\ \Psi(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

temos

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(\mathbf{x}) \\ \Psi_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathbf{X} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{D_1x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}^{D_2(x-x_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

onde

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{B}(x) * \mathbf{Q}(x) = \mathbf{X} \int_0^{x_0} \mathbf{e}^{D(x-\eta)} \mathbf{X}^{-1} \mathbf{Q}(\eta) d\eta. \quad (2.38)$$

Assim quando d_i for negativo, o intervalo de integração é $[0, x]$ e quando d_i for positivo é $[x_0, x]$.

Considerando

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{D_1 x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}^{D_2(x-x_0)} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

reescrevemos (2.37) como:

$$\boldsymbol{\Psi}(x) = \mathbf{B}(x)\boldsymbol{\xi} + \mathbf{H}(x), \quad (2.40)$$

sujeito às condições de contorno

$$\boldsymbol{\Psi}_1(0) = f \quad (2.41)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_2(x_0) = g, \quad (2.42)$$

a qual nos fornece a solução LTS_N do problema proposto em (2.1).

3 MÉTODO RECURSIVO PARA CONSTRUÇÃO DA SOLUÇÃO LTS_N DE PROBLEMAS S_N ANISOTRÓPICOS

Utilizando o método de resolução de equações S_N apresentado anteriormente descrevemos, neste capítulo, a construção da solução LTS_N do problema anisotrópico a partir de um sistema recursivo de soluções LTS_N de problemas isotrópicos, introduzindo a correção da anisotropia pelo termo de fonte. Em seguida, exemplificamos, passo a passo, o processo recursivo de construção da solução LTS_N de um problema anisotrópico no qual $N = 2$.

3.1 Construindo a Solução do problema S_N anisotrópico recursivamente

Para descrevermos o processo de construção da solução de problemas LTS_N anisotrópicos mediante sistema recursivo de soluções LTS_N de problemas isotrópicos, considere a seguinte equação S_N anisotrópica:

$$\frac{d}{dx}\psi_n(x) + \frac{\sigma_t}{\mu_n}\psi_n(x) = \frac{\sigma_s}{2\mu_n} \sum_{k=1}^N \mathcal{P}(\mu_n, \mu_k)\psi_k(x)w_k + \frac{1}{\mu_n}S_n(x) \quad (3.1)$$

onde $\beta_0 = 1$. Considere, ainda, condições de contorno de fluxo incidente na fronteira,

$$\psi_n(0) = f_n, \quad \text{para } n = 1, \dots, \frac{N}{2}, \quad (3.2)$$

e

$$\psi_n(x_0) = g_n, \quad \text{para } n = \frac{N}{2} + 1, \dots, N. \quad (3.3)$$

onde

$$\mathcal{P}(\mu_n, \mu_k) = \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell P_\ell(\mu_k)P_\ell(\mu_n), \quad \beta_0 = 1$$

Inicialmente, separamos o termo de espalhamento da equação (3.1) como a seguinte soma:

$$\frac{d}{dx}\psi_n(x) + \frac{\sigma_t}{\mu_n}\psi_n(x) = \frac{\sigma_s}{2\mu_n} \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell \sum_{k=1}^N P_\ell(\mu_k) P_\ell(\mu_n) \psi_k(x) w_k + \frac{1}{\mu_n} S(x, \mu) \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\psi_n(x) + \frac{\sigma_t}{\mu_n}\psi_n(x) - \frac{\sigma_s\beta_0}{2\mu_n} \sum_{k=1}^N \psi_k(x) w_k = \\ \frac{\sigma_s}{2\mu_n} \sum_{\ell=1}^L \beta_\ell \sum_{k=1}^N P_\ell(\mu_k) P_\ell(\mu_n) \psi_k(x) w_k + \frac{1}{\mu_n} S(x, \mu) \end{aligned}$$

Reescrevemos (3.4) como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\psi_n(x) + \frac{\sigma_t}{\mu_n}\psi_n(x) - \frac{\sigma_s\beta_0}{2\mu_n} \sum_{k=1}^N \psi_k(x) w_k = \\ \sum_{k=1}^N \left(\sum_{\ell=1}^L \frac{\sigma_s\beta_\ell}{2\mu_n} P_\ell(\mu_n) P_\ell(\mu_k) \right) \psi_k(x) w_k + \frac{1}{\mu_n} S(x, \mu) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Matricialmente, a equação (3.5) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{\Psi}(x) - \mathbf{A}_I\mathbf{\Psi}(x) = \mathbf{A}_C\mathbf{\Psi}(x) + \mathbf{Q}(x) \quad (3.6)$$

Aqui $\mathbf{\Psi}(x)$ representa o vetor dos fluxos angulares nas N direções discretas, \mathbf{A}_I é a matriz LTS_N Isotrópica, $\mathbf{Q}(x)$ é o vetor fonte, isto é:

$$\mathbf{Q}(x) = [Q_1(x)/\mu_1, Q_2(x)/\mu_2, \dots, Q_N(x)/\mu_N]^T$$

e a matriz \mathbf{A}_C , que contém a parte anisotrópica do espalhamento, é definida por:

$$\mathbf{A}_C = \sum_l^L \mathbf{A}_l$$

onde os elementos a_{ij}^l das matrizes \mathbf{A}_l , para $l = 1, 2, \dots, L$ são definidas por:

$$a_{ij}^l = \frac{\sigma_s\beta_l w_j}{2\mu_i} P_l(\mu_i) P_l(\mu_j) \quad (3.7)$$

Para iniciarmos um processo recursivo para a resolução do sistema S_N , supomos que o vetor fluxo angular de partículas $\Psi(x)$ seja decomposto da seguinte forma:

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi^k(x) \quad (3.8)$$

Substituindo a decomposição (3.8) na equação matricial (3.6) temos:

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \Psi^k(x) - \mathbf{A}_I \sum_{k=0}^{\infty} \Psi^k(x) = \mathbf{A}_C \sum_{k=0}^{\infty} \Psi^k(x) + \mathbf{Q}(x) \quad (3.9)$$

A solução do sistema acima pode ser encontrado de maneira recursiva. Nesse trabalho vamos escolher que cada $\Psi^k(x)$, para $k = 0, 1, 2, \dots$ sejam solução dos seguintes sistemas:

$$\frac{d}{dx} \Psi^0(x) - \mathbf{A}_I \Psi^0(x) = \mathbf{Q}(x) \quad (3.10)$$

onde são incorporadas as condições de contorno do problema original (3.2) e (3.3).

E, os fatores $\Psi^k(x)$, para $k = 1, 2, \dots$ são soluções dos sistemas:

$$\frac{d}{dx} \Psi^k(x) - \mathbf{A}_I \Psi^k(x) = \mathbf{A}_C \Psi^{k-1}(x) \quad (3.11)$$

com condições de contorno homogêneas. Cabe destacar que a solução dos problemas de contorno (3.10) e (3.11) são dadas pela solução do problema LTS_N isotrópico e que a anisotropia é introduzida através do termo fonte.

3.1.1 Exemplificando para $N = 2$

Considere a equação linear de transporte unidimensional monoenergética, estacionária, com simetria azimutal, sem fonte externa e com espalhamento anisotrópico dada por:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \sigma_t \psi(x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 p(\cos \Theta) \psi(x, \mu') d\mu', \quad (3.12)$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned} \psi(0, \mu) &= f(\mu) \text{ se } \mu > 0, \\ \psi(x_0, \mu) &= g(\mu) \text{ se } \mu < 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Nesta seção, buscamos descrever o processo de aproximação S_2 da equação (3.12) e a construção da solução LTS_2 do problema anisotrópico a partir de um sistema recursivo de soluções LTS_2 de problemas isotrópicos. Nesse sentido, considerando a equação descrita acima e o grau de anisotropia $L = 2$, primeiramente aproximamos sua função espalhamento por uma série truncada em polinômios de Legendre. Sendo assim:

$$p(\cos \Theta) = \sum_{\ell=0}^2 \beta_{\ell} P_{\ell}(\mu') P_{\ell}(\mu) \quad \beta_0 = 1. \quad (3.14)$$

Para encontramos os valores β_{ℓ} , utilizamos a fórmula recursiva proposta por Siewert [36] que é dada por:

$$\beta_{\ell} = \left(\frac{2\ell + 1}{2\ell - 1} \right) \left(\frac{L + 1 - \ell}{L + 1 + \ell} \right) \beta_{\ell-1} \quad (3.15)$$

Em seguida, aproximamos seu termo integral por quadratura de Gauss Legendre de ordem $N = 2$, ou seja:

$$\int_{-1}^1 p(\cos \Theta) \psi(x, \mu') d\mu' \approx \sum_{\ell=0}^2 \beta_{\ell} \sum_{k=1}^2 \omega_k P_{\ell}(\mu_k) P_{\ell}(\mu) \psi(x, \mu_k) \quad (3.16)$$

onde μ_k são as raízes do polinômio de Legendre, ordenadas de forma decrescente:

$$-1 < \mu_2 < \mu_1 < 1, \quad (3.17)$$

e ω_1, ω_2 os respectivos pesos da quadratura de Gauss Legendre.

Substituindo (3.16) na equação (3.12), temos:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \sigma_t \psi(x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{\ell=0}^2 \beta_{\ell} \sum_{k=1}^2 \omega_k P_{\ell}(\mu_k) P_{\ell}(\mu) \psi(x, \mu_k) \quad (3.18)$$

Finalmente, para encontrarmos a aproximação S_2 de (3.12), aplicamos o método da colocação na variável μ em (3.18) considerando a função Delta de Dirac como função teste e as raízes μ_n ($n = 1, 2$) como os pontos de colocação. Temos,

$$\int_{-1}^1 \left(\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) \right) \delta(\mu - \mu_n) d\mu + \int_{-1}^1 (\sigma_t \psi(x, \mu)) \delta(\mu - \mu_n) d\mu = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{\ell=0}^2 \beta_{\ell} \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^2 (\omega_k P_{\ell}(\mu_k) P_{\ell}(\mu) \psi(x, \mu_k)) \delta(\mu - \mu_n) d\mu \quad (3.19)$$

o que resulta em:

$$\mu_n \frac{d}{dx} \psi(x, \mu_n) + \sigma_t \psi(x, \mu_n) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{\ell=0}^2 \beta_\ell \sum_{k=1}^2 \omega_k P_\ell(\mu_k) P_\ell(\mu_n) \psi(x, \mu_k) \quad (3.20)$$

Multiplicando (3.20) por $\frac{1}{\mu_n}$, obtemos:

$$\frac{d}{dx} \psi(x, \mu_n) + \frac{\sigma_t}{\mu_n} \psi(x, \mu_n) = \frac{\sigma_s}{2\mu_n} \sum_{\ell=0}^2 \beta_\ell \sum_{k=1}^2 \omega_k P_\ell(\mu_k) P_\ell(\mu_n) \psi(x, \mu_k) \quad (3.21)$$

com condições de contorno:

$$\begin{aligned} \psi(0, \mu_n) &= f(\mu_n) \text{ se } \mu_n > 0, \\ \psi(x_0, \mu_n) &= g(\mu_n) \text{ se } \mu_n < 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ao fazermos $n = 1 : 2$ em (3.21) obtemos, portanto, o sistema de equações S_2 associado ao problema (3.12), representado matricialmente por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \Psi_1(\mathbf{x}) \\ \Psi_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\sigma_s \beta_0 \omega_1}{2\mu_1} - \frac{\sigma_t}{\mu_1} & \frac{\sigma_s \beta_0 \omega_2}{2\mu_1} \\ \frac{\sigma_s \beta_0 \omega_1}{2\mu_2} & \frac{\sigma_s \beta_0 \omega_2}{2\mu_2} - \frac{\sigma_t}{\mu_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1(\mathbf{x}) \\ \Psi_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \\ \left(\begin{bmatrix} \frac{\sigma_s \beta_1 \omega_1 P_1(\mu_1) P_1(\mu_1)}{2\mu_1} & \frac{\sigma_s \beta_1 \omega_2 P_1(\mu_1) P_1(\mu_2)}{2\mu_1} \\ \frac{\sigma_s \beta_1 \omega_1 P_1(\mu_2) P_1(\mu_1)}{2\mu_2} & \frac{\sigma_s \beta_1 \omega_2 P_1(\mu_2) P_1(\mu_2)}{2\mu_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\sigma_s \beta_2 \omega_1 P_2(\mu_1) P_2(\mu_1)}{2\mu_1} & \frac{\sigma_s \beta_2 \omega_2 P_2(\mu_1) P_2(\mu_2)}{2\mu_1} \\ \frac{\sigma_s \beta_2 \omega_1 P_2(\mu_2) P_2(\mu_1)}{2\mu_2} & \frac{\sigma_s \beta_2 \omega_2 P_2(\mu_2) P_2(\mu_2)}{2\mu_2} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Psi_1(\mathbf{x}) \\ \Psi_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Reescrevemos (3.23) como

$$\frac{d}{dx} \Psi(x) - \mathbf{A}_I \Psi(x) = \mathbf{A}_C \Psi(x) \quad (3.24)$$

onde $\Psi(x)$ representa o vetor dos fluxos angulares nas 2 direções discretas consideradas, \mathbf{A}_I é a matriz LTS_2 isotrópica e a matriz \mathbf{A}_C contém a parte anisotrópica do espalhamento.

Para resolvermos o sistema de equações S_2 recursivamente, supomos que o vetor fluxo angular $\Psi(x)$ seja decomposto como:

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^1 \Psi^k(x) = \Psi^0(x) + \Psi^1(x) \quad (3.25)$$

onde $\Psi^0(x)$ é solução de

$$\frac{d}{dx}\Psi^0(x) - \mathbf{A}_I\Psi^0(x) = 0 \quad (3.26)$$

com condições de contorno:

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= 1 \\ \psi_2(x_0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

e $\Psi^1(x)$ é solução de

$$\frac{d}{dx}\Psi^1(x) - \mathbf{A}_I\Psi^1(x) = \mathbf{A}_C\Psi^0(x) \quad (3.28)$$

com condições de contorno homogêneas.

Neste exemplo, consideramos uma placa de comprimento $x_0 = 1$, coeficientes $\sigma_s = 0.95$ e $\sigma_t = 1$. É sabido que os pesos e as raízes da quadratura Gaussiana de ordem 2 são dados por:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_2 = 1 \\ \mu_1 &= -\mu_2 = 0.57735027 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Além disso, sabemos que os polinômios de Legendre de ordem 2 são descritos por:

$$\begin{aligned} P_1(\mu_1) &= \mu_1 \\ P_1(\mu_2) &= \mu_2 \\ P_2(\mu_1) &= \frac{1}{2}(3\mu_1^2 - 1) \\ P_2(\mu_2) &= \frac{1}{2}(3\mu_2^2 - 1) \end{aligned} \quad (3.30)$$

bem como os coeficientes de anisotropia de grau 2:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 1 \\ \beta_1 &= 1.5 \\ \beta_2 &= 0.5 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Substituindo esses valores na equação (3.23), obtemos:

$$\mathbf{A}_I = \begin{bmatrix} -0.909326672697321 & 0.822724132440433 \\ -0.822724132440433 & 0.909326672697321 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix} 0.411362067375000 & -0.411362067375000 \\ 0.411362067375000 & -0.411362067375000 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Para encontrarmos a solução via método LTS_N calculamos a matriz dos autovetores de A_I e a sua inversa, bem como os autovalores de A_I dados, respectivamente, por:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -0.844368909304446 & -0.535762209380262 \\ -0.535762209380262 & -0.844368909304446 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -1.982469593256701 & 1.257900755947229 \\ 1.257900755947230 & -1.982469593256701 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$d_1 = -0.387298334077126$$

$$d_2 = 0.387298334077126 \quad (3.36)$$

Como descrito no capítulo anterior, a expressão para a solução analítica do problema (3.26) com condições de contorno (3.27) é dada por (2.40), que, da forma numérica é:

$$\begin{bmatrix} \Psi_1^0(\mathbf{x}) \\ \Psi_2^0(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.844368909304446 & -0.535762209380262 \\ -0.535762209380262 & -0.844368909304446 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-0.387298334077126 \cdot x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{0.387298334077126 \cdot (x-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1^0 \\ \xi_2^0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Os valores de ξ_1^0 e ξ_2^0 são calculados aplicando as condições de contorno ao problema e resolvendo o sistema linear resultante, obtendo:

$$\xi^0 = \begin{bmatrix} -1.454142301911536 \\ 0.626390586409032 \end{bmatrix}$$

Com esses valores conhecidos, encontramos a expressão para a solução $\Psi^0(\mathbf{x})$, a qual nos permite calcular o fluxo angular em qualquer ponto da placa:

$$\Psi^0(x) = \begin{bmatrix} 1.227832549438500e^{-0.387298334077126x} \\ 0.779074492425424e^{-0.387298334077126x} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.335596404509501e^{0.387298334077126(x-1)} \\ 0.528904736244767e^{0.387298334077126(x-1)} \end{bmatrix}$$

Desta forma, o valor do fluxo angular nos extremos do domínio considerado é dado por:

$$\Psi^0(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.42000713398675277 \end{bmatrix} \quad e \quad \Psi^0(1) = \begin{bmatrix} 0.4979650289957453 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Já a expressão para a solução analítica do problema (3.28) com condições de contorno homogêneas, é dada por:

$$\begin{bmatrix} \Psi_1^1(\mathbf{x}) \\ \Psi_2^1(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.844368909304446 & -0.535762209380262 \\ -0.535762209380262 & -0.844368909304446 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-0.387298334077126x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{0.387298334077126(x-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_2^1 \end{bmatrix} + \mathbf{H}(x) \quad (3.39)$$

onde $\mathbf{H}(x)$ é dado por:

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{X} \int_0^1 e^{D(x-\eta)} \mathbf{X}^{-1} \mathbf{A}_C \Psi^0(\eta) d\eta \quad (3.40)$$

com limites de integração $[0, x]$ para d_1 (negativo) e $[1, x]$ para d_2 (positivo).

Aplicando as condições de contorno homogêneas no problema (3.39-3.40), encontramos o vetor ξ^1 , que é dado por:

$$\xi^1 = \begin{bmatrix} -0.146932716890669 \\ 0.146355317125247 \end{bmatrix}$$

Após substituirmos esse valor no problema (3.39-3.40) é possível determinarmos a solução $\Psi^1(\mathbf{x})$ em qualquer ponto da placa. Em particular:

$$\begin{aligned}\Psi^1(0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -0.11680787708886052 \end{bmatrix} \\ \Psi^1(1) &= \begin{bmatrix} 0.1163488585512759 \\ 2.7755575615628914^{-17} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{3.41}$$

Desta forma, encontramos o vetor fluxo angular que representa a solução do problema anisotrópico descrito em (3.12-3.13) a partir de um sistema recursivo de soluções LTS_2 de dois problemas isotrópicos. Tem-se, portanto:

$$\Psi(0) = \Psi^0(0) + \Psi^1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.30319925689789223 \end{bmatrix}\tag{3.42}$$

$$\Psi(1) = \Psi^0(1) + \Psi^1(1) = \begin{bmatrix} 0.6143138875470212 \\ 2.7755575615628914^{-17} \end{bmatrix}\tag{3.43}$$

3.2 Problemas Heterogêneos

Nesta seção, aplicamos o método recursivo apresentado anteriormente para a resolução de problemas S_N de transporte em meio heterogêneo. Nesse sentido, vamos considerar uma placa heterogênea de espessura x_0 , composta por K regiões homogêneas, cada uma com seus parâmetros de transporte, conforme figura abaixo:

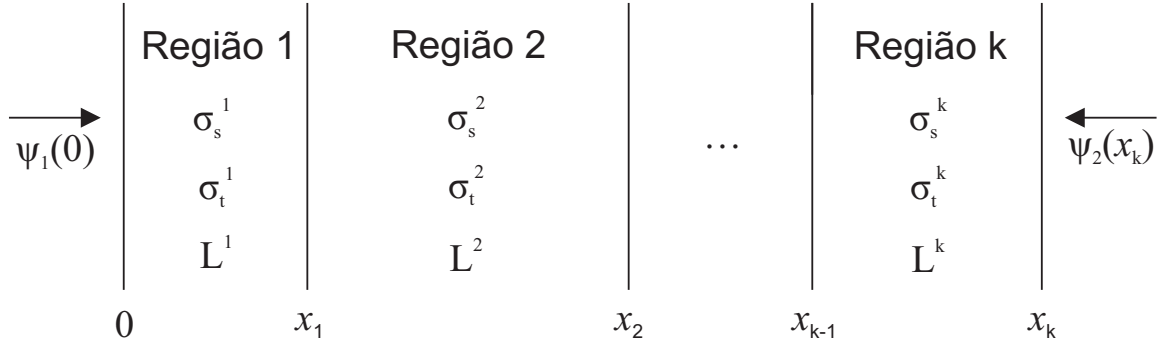


Figura 3.1: Domínio dividido em k regiões.

Escrevendo a matriz $LTS_N A^K$ para cada uma das K regiões, temos:

$$a_{ij}^k = \begin{cases} -\frac{\sigma_t^k}{\mu_i} + \frac{\sigma_s^k \omega_j}{2\mu_i} \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell^k P_\ell(\mu_i) P_\ell(\mu_j) & \text{se } i = j \\ \frac{\sigma_s^k \omega_j}{2\mu_i} \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell^k P_\ell(\mu_i) P_\ell(\mu_j) & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad (3.44)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$.

Por facilidade de apresentação do método, vamos supor que as condições de contorno são de fluxo incidentes conhecidos em $x = 0$ e $x = x_0$ e que não temos fonte externa. Desta forma, a representação matricial das equações S_N associadas ao problema descrito pela figura (3.1) é dada por:

$$\frac{d}{dx} \Psi(x) - (A^1 + \delta(x)^2(A^2 - A^1) + \dots + \delta(x)^K(A^K - A^1)) \Psi(x) = 0 \quad (3.45)$$

com condições de contorno

$$\Psi(0) = f(x) \quad (3.46)$$

e

$$\Psi(x_0) = g(x) \quad (3.47)$$

onde,

$$\delta(x)^k = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ está na } k\text{-ésima placa} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.48)$$

Buscando resolver este problema heterogêneo de forma recursiva, reescrevemos a equação (3.45) como

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) - A^1\Psi(x) = \sum_{k=2}^K \delta(x)^k (A^k - A^1)\Psi(x) \quad (3.49)$$

e tomamos

$$\Psi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi^i(x) \quad (3.50)$$

Substituindo (3.50) na equação matricial (3.49) e iniciando o processo recursivo, temos que $\Psi^0(x)$ é solução do problema S_N homogêneo

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\Psi(x)^0 - A^1\Psi(x)^0 = 0 \\ \Psi(0)^0 = f(x) \quad \text{e} \quad \Psi(x_0)^0 = g(x) \end{cases} \quad (3.51)$$

cuja solução é dada por $\Psi(x)^0 = \mathbf{B}(x)V^0$.

Seguindo o processo recursivo, temos que $\Psi(x)^i$, para $i = 1, 2, \dots$, é solução dos seguintes problemas homogêneos

$$\frac{d}{dx}\Psi(x)^i - A^1\Psi(x)^i = \sum_{k=2}^K \delta(x)^k (A^k - A^1)\Psi(x)^{i-1} \quad (3.52)$$

com condições de contorno homogêneas.

A solução destes problemas é conhecida e dada por

$$\Psi(x)^i = \mathbf{B}(x)V^i + \mathbf{B}(x) * \sum_{k=2}^K \delta(x)^k (A^k - A^1)\Psi(x)^{i-1} \quad (3.53)$$

Através deste procedimento, portanto, o problema heterogêneo é resolvido de forma idêntica ao problema homogêneo e a heterogeneidade é inserida na forma de fonte.

3.3 Avaliação numérica do termo de convolução

Os resultados apresentados na subseção (3.1.1) foram obtidos com o auxílio do Software Wolfram Mathematica 7 e a sua utilização evidenciou que, ao aumentarmos o valor de k na expressão (3.25), o cálculo analítico necessário para encontrarmos a solução destes problemas anisotrópicos se torna inviável devido ao grande número de operações, mais especificamente, de convoluções, utilizadas para a obtenção da solução de forma recursiva. Para explicarmos este fato, considere o seguinte problema:

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) - \mathbf{A}_I\Psi(x) = \mathbf{A}_C\Psi(x) \quad (3.54)$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned} \Psi(0) &= f \\ \Psi(x_0) &= g \end{aligned} \quad (3.55)$$

Suponha que

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^4 \Psi^k(x) \quad (3.56)$$

Desta forma,

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^4 \Psi^k(x) - \mathbf{A}_I \sum_{k=0}^4 \Psi^k(x) = \mathbf{A}_C \sum_{k=0}^4 \Psi^k(x) \quad (3.57)$$

Recursivamente, construímos uma solução para este problema da seguinte maneira:

$$\frac{d}{dx}\Psi^0(x) - \mathbf{A}_I\Psi^0(x) = 0 \quad (3.58)$$

com condições de contorno do problema original. A solução LTS_N deste problema isotrópico sem fonte é conhecida e dada por:

$$\Psi^0(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(x)\xi \quad (3.59)$$

Na segunda recursão, devemos resolver o seguinte sistema:

$$\frac{d}{dx}\Psi^1(x) - \mathbf{A}_I\Psi^1(x) = \mathbf{A}_C\Psi^0(x) \quad (3.60)$$

com condições de contorno homogêneas. A solução LTS_N deste problema isotrópico com fonte é conhecida e dada por:

$$\begin{aligned}\Psi^1(\mathbf{x}) &= \mathbf{B}(x)\xi + \mathbf{X}e^{D(x)}\mathbf{X}^{-1} * \mathbf{A}_C\Psi^0(x) \\ &= \mathbf{B}(x)\xi + \mathbf{X} \int_0^{x_0} e^{D(x-\eta)}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}_C\Psi^0(\eta)d\eta\end{aligned}\quad (3.61)$$

Igualmente, na recursão seguinte, o problema isotrópico com fonte descrito por

$$\frac{d}{dx}\Psi^2(x) - \mathbf{A}_I\Psi^2(x) = \mathbf{A}_C\Psi^1(x)\quad (3.62)$$

com condições de contorno homogêneas tem solução da forma:

$$\begin{aligned}\Psi^2(\mathbf{x}) &= \mathbf{B}(x)\xi + \mathbf{X}e^{D(x)}\mathbf{X}^{-1} * \mathbf{A}_C\Psi^1(x) \\ &= \mathbf{B}(x)\xi + \mathbf{X}e^{D(x)}\mathbf{X}^{-1} * (\mathbf{A}_C(\mathbf{B}(x)\xi + \mathbf{X}e^{D(x)}\mathbf{X}^{-1} * \mathbf{A}_C\Psi^0(x)))\end{aligned}\quad (3.63)$$

Da mesma forma, para $k = 3, 4$ em (3.57) com condições de contorno nulas, temos as seguintes soluções:

$$\begin{aligned}\Psi^3(\mathbf{x}) &= \mathbf{B}(x)\xi + \mathbf{X}e^{D(x)}\mathbf{X}^{-1} * \mathbf{A}_C\Psi^2(x) \\ &= \mathbf{B}(x)\xi + \mathbf{X}e^{D(x)}\mathbf{X}^{-1} * (\mathbf{A}_C(\mathbf{B}(x)\xi + \mathbf{X}e^{D(x)}\mathbf{X}^{-1} * \\ &\quad (\mathbf{A}_C(\mathbf{B}(x)\xi + \mathbf{X}e^{D(x)}\mathbf{X}^{-1} * \mathbf{A}_C\Psi^0(x))))\end{aligned}\quad (3.64)$$

e,

$$\Psi^4(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(x)\xi + \mathbf{X}e^{D(x)}\mathbf{X}^{-1} * \mathbf{A}_C\Psi^3(x)\quad (3.65)$$

onde Ψ^3 é dado pela expressão (3.64).

Desta maneira, com o aumento do valor de k em (3.57), as operações de convolução aumentam consideravelmente e os cálculos se tornam inviáveis de serem resolvidos analiticamente.

Por este motivo, neste trabalho, aproximamos o termo $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}_C\Psi^{(k-1)}(x)$ por Spline Cúbico e procedemos a integração por fórmula

de Quadratura Gaussiana. Cabe observar que este procedimento não influencia na analiticidade da solução dada via método LTS_N , visto que é utilizado apenas para aproximação numérica das integrais.

Devemos lembrar que, Spline é uma função polinomial por partes, em que, a cada dois pontos (nós) do domínio, traça-se um polinômio de grau n . Spline cúbico é uma aproximação que utiliza polinômios cúbicos por partes para interpolar uma função a cada dois pontos. Formalmente, define-se:

Definição 3.3.1 (Spline Cúbico). *Dada uma função $f(x)$ definida no intervalo $[a, b]$ e um conjunto de nós $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, definimos um interpolante Spline Cúbico S de f , como uma função que satisfaz:*

1. S é um polinômio cúbico, chamado S_j em cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, n-1$;
2. $S(x_j) = f(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$;
3. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$, $j = 0, 1, \dots, n-2$;
4. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$, $j = 0, 1, \dots, n-2$;
5. $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$, $j = 0, 1, \dots, n-2$.

Conforme descrito por Ruggiero et al. [41], a aproximação via Spline Cúbico pode ser realizada mediante a escolha de uma das condições de contorno: a Natural ou a Restrita, donde:

1. $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (**Spline Natural**)
2. $S'(x_0) = f'(x_0)$ e $S'(x_n) = f'(x_n)$ (**Spline Restrito**)

Sendo assim, a aproximação polinomial por Spline Cúbico que satisfaz a condição de contorno Natural utiliza valores nulos para as derivadas segundas

nos extremos. Esta aproximação é única nos pontos considerados. Por outro lado, a aproximação polinomial que faz uso das condições de contorno ditas Restritas, requer o conhecimento das derivadas da função em questão nos extremos do intervalo de aproximação considerado. Com esta condição, essa aproximação polinomial também é única.

Na implementação do nosso programa recursivo, utilizamos a subrotina proposta por William H. Press et al, presente em seu livro intitulado 'Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing", página 109, para o cálculo dos Splines Cúbicos [42].

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Os resultados deste estudo foram obtidos mediante a implementação de um programa em Fortran95 em dupla precisão e executados em um computador Intel (R), Core (TM), I5-2537M, CPU 1,4GHz, 64bits, 4GB de memória RAM e Windows 8 (R). Foram utilizadas as subrotinas do Lapack DGEEV para o cálculo de autovalores e autovetores, DGETRF para fatoração LU e DGETRS para a resolução do sistema linear.

4.1 Problemas em meios homogêneos

Nesta seção, analisamos os resultados referentes ao fluxo escalar de partículas obtidos mediante a implementação de um problema de transporte anisotrópico, estacionário e sem fonte externa, descrito por:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \sigma_t \psi(x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 p(\cos \Theta) \psi(x, \mu') d\mu' \quad (4.1)$$

Consideramos:

- $\sigma_s = 0.95 \text{ cm}^{-1}$;
- $\sigma_t = 1 \text{ cm}^{-1}$;
- $x_0 = 1 \text{ cm}$;
- $\Psi(0) = 1 \quad \mu > 0$;
- $\Psi(1) = 0 \quad \mu < 0$;

Simulamos o problema (4.1) considerando diferentes graus de espalhamento, quais sejam: $L = 8, 82, 299$. Os coeficientes β_ℓ utilizados em nossas simulações

foram obtidos de [43]. Para calcularmos as integrais de convolução presentes nos problemas com fonte, optamos utilizar o esquema de Quadratura de Gauss Legendre, considerando 50 pontos. A aproximação polinomial de $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}_C\Psi^{(k-1)}(x)$ foi realizada através da utilização de Splines Cúbicos, com as condições de contorno Natural e Restrita, e implementada utilizando a subrotina proposta por [42], página 109. Testamos estas aproximações considerando variados números de pontos que compunham os splines. Nos resultados que apresentamos abaixo, os Splines Natural e Restrito foram compostos por 100 pontos.

Neste estudo, apresentamos os dados referentes ao fluxo escalar de partículas, o qual é definido por:

$$\phi(x) = \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu' \quad (4.2)$$

Para o cálculo do fluxo escalar mediante o programa recursivo proposto, utilizamos como critério de parada a convergência de $\phi(x)$, dado por (4.2), impondo uma tolerância de 10^{-15} em sua aproximação. Já para o cálculo do erro na aproximação do fluxo escalar, utilizamos a fórmula do erro relativo, dada por:

$$\varepsilon_r = \frac{\phi_C(x) - \phi_R(x)}{\phi_C(x)} \quad (4.3)$$

onde ε_r é o erro relativo, $\phi_C(x)$ são os resultados para o fluxo escalar de partículas obtidos através da execução do programa que resolve a equação do transporte pelo método LTS_N Clássico (CLÁSSICO) e $\phi_R(x)$ são os resultados para o fluxo escalar obtidos na implementação do programa Recursivo proposto nesta dissertação e que utiliza Spline Natural (S.NATURAL) ou Restrito (S.RESTRITO) na interpolação polinomial.

Os dados obtidos através das simulações realizadas nos programas clássico e o recursivo foram comparados e os resultados dispostos em forma de tabelas.

A seguir, apresentamos os resultados para o fluxo escalar $\phi(x)$ considerando graus de anisotropia $L = 8, 82, 299$; valores de quadratura $N =$

40, 100, 200, 300, 400, e analisados no início, no meio e no final da placa; ou seja, em: $x = 0$, $x = 0.5$ e $x = 1$, separadamente.

		MÉTODOS			ERRO APROXIMAÇÃO (ε_r)	
L	N	CLÁSSICO	RECURSIVO		S. NATURAL	S. RESTRITO
			S. NATURAL	S. RESTRITO		
		$\phi(0)$			$\phi(0)$	
8	40	1.2915273553E+00	1.2915276697E+00	1.2915273522E+00	2.4349690980E-07	2.4071267539E-09
	100	1.2916070469E+00	1.2916080710E+00	1.2916070144E+00	7.9290242539E-07	2.5155963758E-08
	300	1.2916202887E+00	1.2916231654E+00	1.2916199116E+00	2.2271852379E-06	2.9195750738E-07
82	100	1.2287489257E+00	1.2287522418E+00	1.2287488300E+00	2.6987093705E-06	7.7869699880E-08
	200	1.2287679186E+00	1.2287750641E+00	1.2287674058E+00	5.8151904702E-06	4.1731955423E-07
	300	1.2287713743E+00	1.2287813781E+00	1.2287701502E+00	8.1412754310E-06	9.9620602791E-07
299	300	1.1933322860E+00	1.1933632184E+00	1.1933289931E+00	2.5921094815E-05	2.7593606816E-06
	400	1.1933380368E+00	1.1933774247E+00	1.1933316857E+00	3.3006417003E-05	5.3221413999E-06

Tabela 4.1: Fluxo escalar em $x = 0$

		MÉTODOS			ERRO APROXIMAÇÃO (ε_r)	
L	N	CLÁSSICO	RECURSIVO		S. NATURAL	S. RESTRITO
			S. NATURAL	S. RESTRITO		
		$\phi(0.5)$			$\phi(0.5)$	
8	40	9.2329159545E-01	9.2329158297E-01	9.2329159567E-01	1.3523513001E-08	2.3578691852E-10
	100	9.2327027685E-01	9.2327025376E-01	9.2327027959E-01	2.5013446873E-08	2.9680128054E-09
	300	9.2326697453E-01	9.2326693980E-01	9.2326700099E-01	3.7612491250E-08	2.8659696169E-08
82	100	9.2023603323E-01	9.2023594594E-01	9.2023604398E-01	9.4857717894E-08	1.1682343059E-08
	200	9.2023250429E-01	9.2023238249E-01	9.2023255589E-01	1.3235613657E-07	5.6077826817E-08
	300	9.2023186233E-01	9.2023173294E-01	9.2023196852E-01	1.4060208980E-07	1.1540061622E-07
299	300	9.1759794930E-01	9.1759801032E-01	9.1759781532E-01	6.6496332108E-08	1.4602004631E-07
	400	9.1759770636E-01	9.1759777515E-01	9.1759746788E-01	7.4966390471E-08	2.5989552105E-07

Tabela 4.2: Fluxo escalar em $x = 0.5$

		MÉTODO			ERRO APROXIMAÇÃO(ϵ_r)	
L	N	CLÁSSICO	RECURSIVO		S.NATURAL	S.RESTRITO
			S.NATURAL	S.RESTRITO		
		$\phi(1)$			$\phi(1)$	
8	40	6.0592790153E-01	6.0592714414E-01	6.0592791804E-01	1.2499642583E-06	2.7258682098E-08
	100	6.0583345920E-01	6.0583105514E-01	6.0583370834E-01	3.9681910852E-06	4.1122432608E-07
	300	6.0581776198E-01	6.0581209988E-01	6.0582068101E-01	9.3462205870E-06	4.8183156984E-06
82	100	6.6146496443E-01	6.6145745129E-01	6.6146573845E-01	1.1358341890E-05	1.1701564476E-06
	200	6.6144548757E-01	6.6143075483E-01	6.6144995370E-01	2.2273563028E-05	6.7520744595E-06
	300	6.6144194305E-01	6.6142306577E-01	6.6145192998E-01	2.8539581169E-05	1.5098733068E-05
299	300	6.8968560447E-01	6.8962898955E-01	6.8971958522E-01	8.2088008976E-05	4.9269918715E-05
	400	6.8968156135E-01	6.8961439405E-01	6.8974276259E-01	9.7388857866E-05	8.8738399304E-05

Tabela 4.3: Fluxo escalar em $x = 1$

Após análise dos fluxos escalares calculados na execução do programa Clássico e do programa Recursivo e apresentados nas tabelas acima, se verifica que foi possível reconstruir a solução LTS_N de problemas anisotrópicos de variados graus através da recorrência de soluções LTS_N de problemas isotrópicos. Nos exemplos acima, a precisão para a aproximação do fluxo escalar variou entre 10^{-5} e 10^{-8} quando interpolamos o fluxo utilizando Spline Natural e entre 10^{-5} e 10^{-10} quando utilizamos Spline Restrito para interpolação do fluxo escalar.

Os valores do fluxo escalar $\phi(x)$ obtidos através da implementação do programa Recursivo e satisfazendo tolerância imposta de 10^{-15} , convergiram após 26 recursões quando consideramos $L = 8$, após 33 recursões considerando $L = 82$ e 44 recursões para grau de anisotropia 299.

A seguir, apresentamos alguns gráficos que buscam mostrar o comportamento das aproximações do fluxo escalar $\phi(x)$ para o problema descrito em (4.1) e calculadas via programa Recursivo. O comportamento destas aproximações foram comparados com o fluxo escalar calculado via método Clássico (LTS_N).

Primeiramente, apresentamos gráficos que ilustram o comportamento da convergência do fluxo escalar $\phi(x)$ considerando $N = 40$, $L = 8$ e spline composto por 100 pontos.

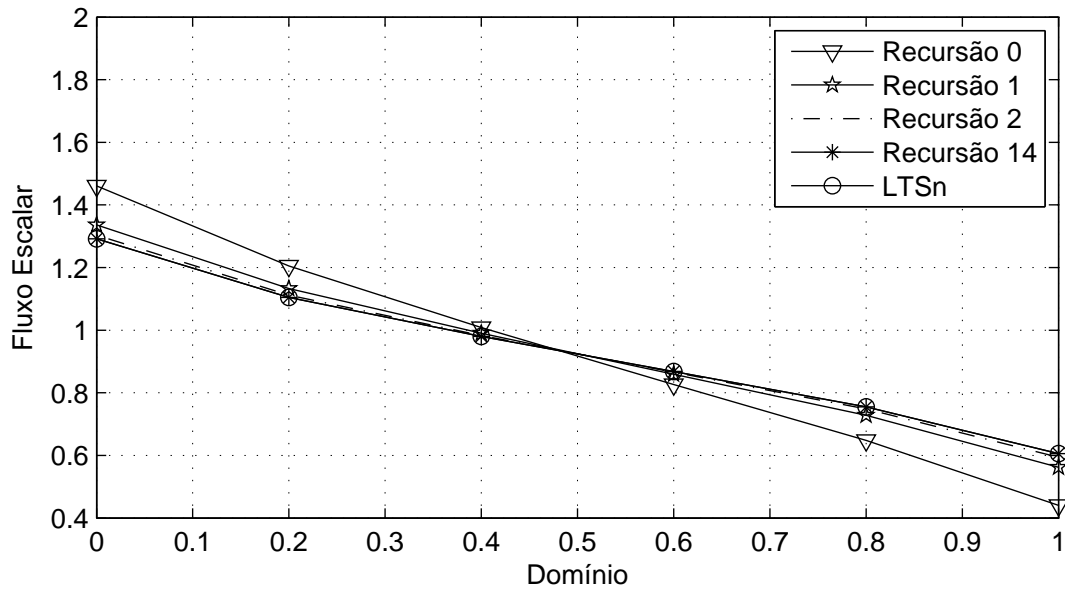


Figura 4.1: *Fluxo Escalar* $N = 40$, $L = 8$, *Spline Natural*(100 pontos).

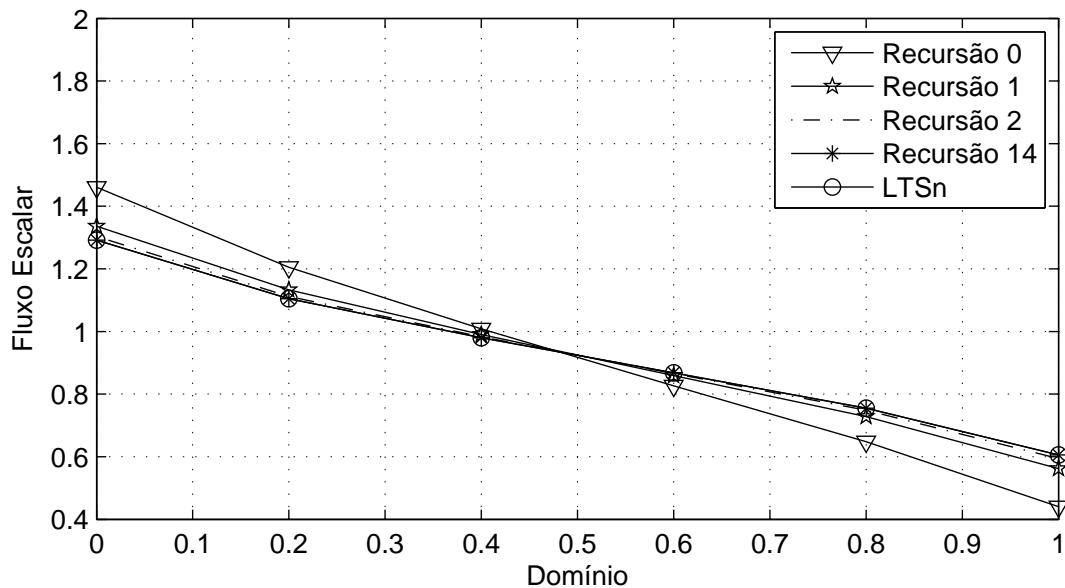


Figura 4.2: *Fluxo Escalar* $N = 40$, $L = 8$, *Spline Restrito*(100 pontos).

Os gráficos apresentados em seguida ilustram o comportamento da convergência do fluxo escalar calculado mediante a execução do programa recursivo para o caso em que $N = 100$, grau de anisotropia 82 e spline composto por 100 pontos.

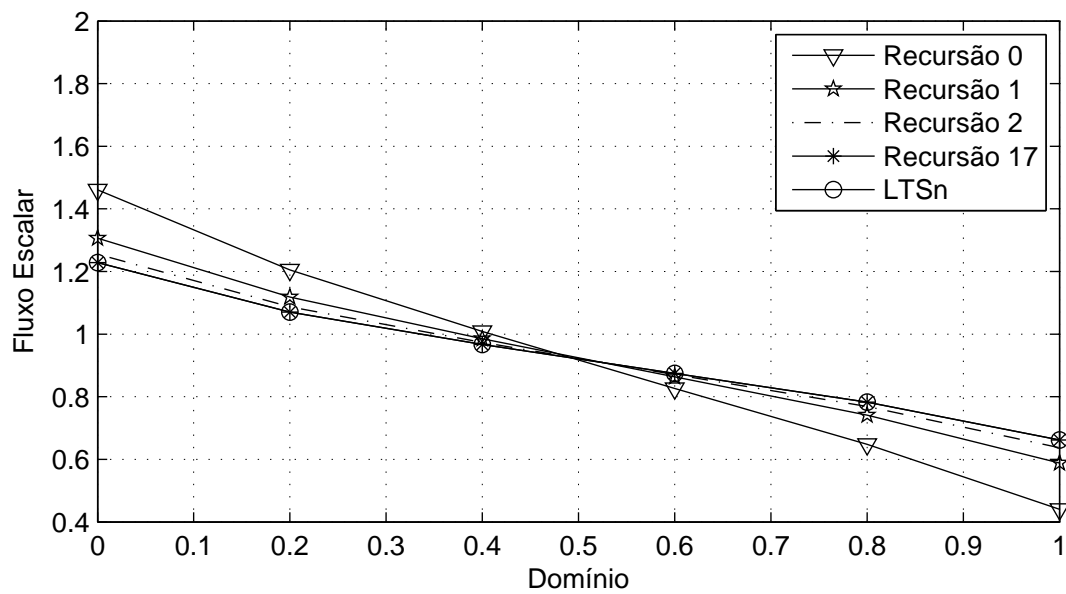


Figura 4.3: *Fluxo Escalar* $N = 100$, $L = 82$, *Spline Natural*(100 pontos).

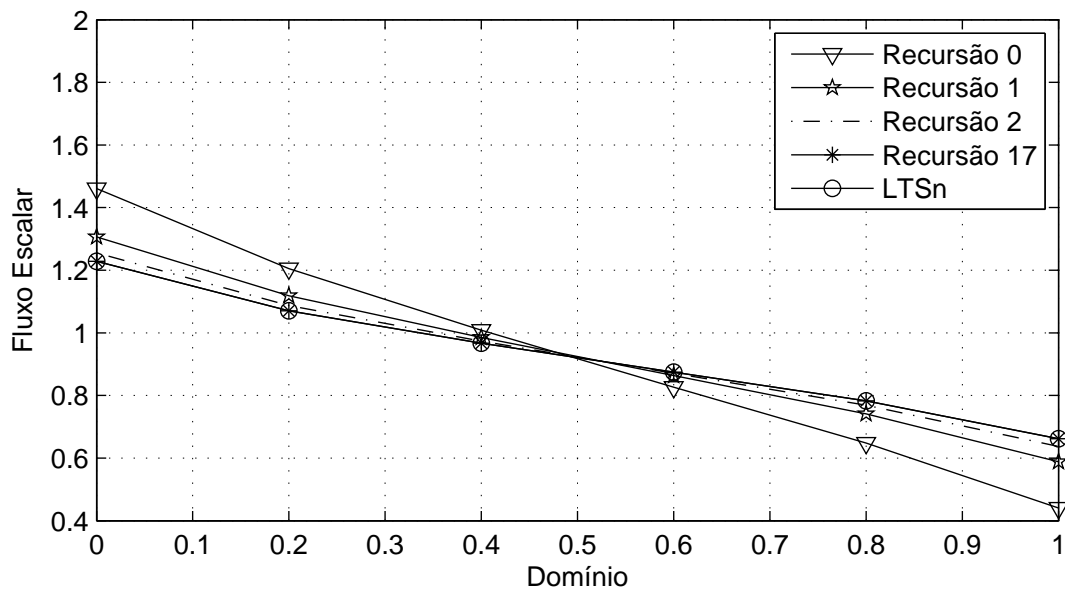


Figura 4.4: Fluxo Escalar $N = 100$, $L = 82$, Spline Restrito(100 pontos).

Finalizando, apresentamos resultados gráficos de $\phi(x)$ para o caso em que $N = 300$, $L = 299$ e spline composto por 100 pontos.

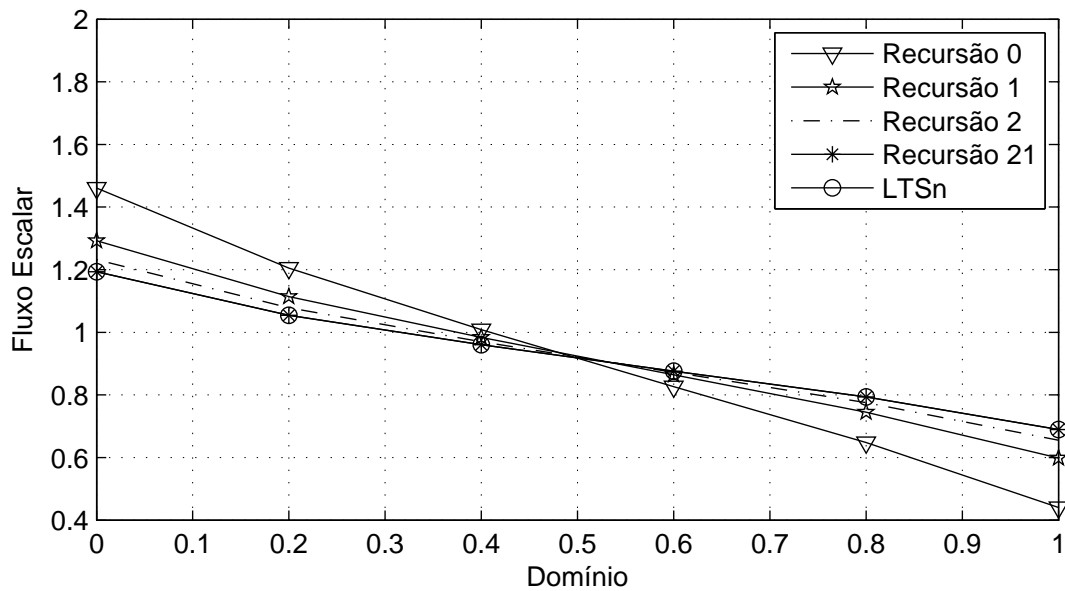


Figura 4.5: Fluxo Escalar $N = 300$, $L = 299$, Spline Natural(100 pontos).

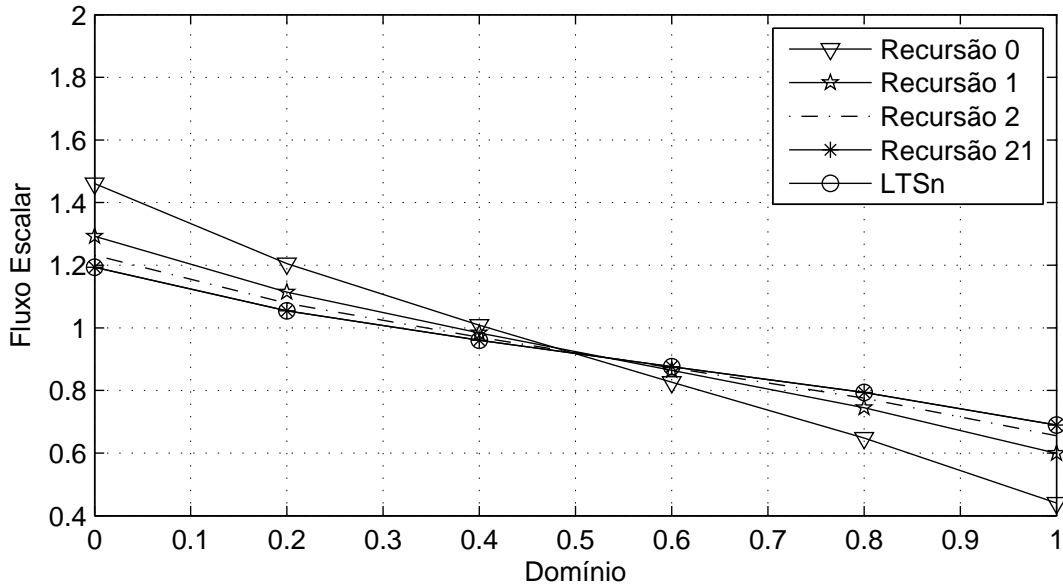


Figura 4.6: *Fluxo Escalar* $N = 300$, $L = 299$, *Spline Restrito*(100 pontos).

Os gráficos acima nos mostram uma significativa aproximação entre o resultado obtido na iteração 0 - que calcula a solução LTS_N do problema isotrópico sem fonte - e o resultado obtido na iteração 1, onde se inicia a correção da anisotropia do problema original através do termo fonte. Este fato ocorre tanto na utilização de Splines Natural quanto Restrito. É possível verificar também, em todos os casos, que entre a segunda e a última iterações, a ordem de aproximação entre as soluções recursivas fica cada vez menor e a análise da convergência das soluções torna-se impossível de ser realizada a olho nu.

A seguir, apresentamos resultados de simulações numéricas obtidos com o intuito de descrever as particularidades acerca da utilização dos Splines Natural e Restrito na implementação de nossos testes. Para isso, diversas simulações numéricas do problema descrito em (4.1) foram realizadas.

Primeiramente, buscamos descobrir se existe relação entre a tolerância imposta e o número de recursões necessárias para obtermos convergência dos fluxos escalares calculados via recursão, mantendo uma mesma ordem para o erro de

aproximação do fluxo escalar. Verificamos que há relação entre estes dois critérios. Nos testes realizados para obtenção dos resultados expostos nas tabelas (4.1- 4.3), por exemplo, é necessário impor uma tolerância de apenas 10^{-8} para mantermos a mesma ordem para o erro de aproximação do fluxo escalar $\phi(x)$, como nos mostra a tabela abaixo:

L	Recursões	
	$tol\ 10^{-8}$	$tol\ 10^{-15}$
8	14	26
82	17	33
299	21	44

Tabela 4.4: Relação entre Anisotropia e Número Recursões

Esta constatação implica, portanto, na significativa redução do tempo de execução necessário para atingir a convergência imposta. Verificou-se, ainda, que o número de iterações necessárias para a convergência de $\phi(x)$, fixados grau de anisotropia e tamanho de x_0 , não sofre influência do tipo de spline utilizado, nem do número de pontos que compõe cada spline ou da ordem de quadratura utilizada.

Em nossos testes, buscamos verificar, também, a relação existente entre o erro de aproximação do fluxo escalar e o número de pontos que compõe o spline. A tabela a seguir apresenta resultados das aproximações para $\phi(x)$ considerando grau de anisotropia $L = 82$, diferentes valores de quadratura e interpolação polinomial via Spline Natural e Restrito, com 300 pontos.

		MÉTODO			ERRO APROXIMAÇÃO(ϵ_r)	
L	N	CLÁSSICO	RECURSIVO		S.NATURAL	S.RESTRITO
			S.NATURAL	S.RESTRITO		
		$\phi(0)$			$\phi(0)$	
	100	1.2287489257E+00	1.2287490811E+00	1.2287489250E+00	1.2647862925E-07	6.2199035509E-10
	200	1.2287679186E+00	1.2287682931E+00	1.2287679148E+00	3.0483076937E-07	3.0410462155E-09
	300	1.2287713743E+00	1.2287719702E+00	1.2287713644E+00	4.8492356066E-07	8.0410972019E-09
		$\phi(0.5)$			$\phi(0.5)$	
	100	9.2023603323E-01	9.2023602944E-01	9.2023603328E-01	4.1208276076E-09	5.6065997712E-11
82	200	9.2023250429E-01	9.2023249754E-01	9.2023250467E-01	7.3301550938E-09	4.1046374050E-10
	300	9.2023186233E-01	9.2023185314E-01	9.2023186341E-01	9.9854855074E-09	1.1817260995E-09
		$\phi(1)$			$\phi(1)$	
	100	6.6146496443E-01	6.6146462545E-01	6.6146496942E-01	5.1248129716E-07	7.5370022593E-09
	200	6.6144548757E-01	6.6144466803E-01	6.6144552818E-01	1.2390196387E-06	6.1392749304E-08
	300	6.6144194305E-01	6.6144066265E-01	6.6144206784E-01	1.9357637393E-06	1.8866395204E-07

Tabela 4.5: Fluxo escalar 300 pontos spline, $L = 82$

Após comparação entre os dados apresentados nas tabelas (4.1- 4.3) e (4.5), inferimos que o aumento do número de pontos no spline utilizado na interpolação polinomial ocasiona uma melhor aproximação dos resultados referentes ao $\phi(x)$. Esta melhora na aproximação é da ordem de 10^{-2} quando se trata da utilização do Spline Natural e da ordem de 10^{-3} relativo ao uso do Spline Restrito. Cabe registrar, porém, que o aumento de pontos no spline ocasiona lentidão na execução do programa - levando até 10 minutos para completar as simulações - principalmente para altos valores de N . Este fato nos mostrou que, na prática, nesses casos, o aumento do número de pontos no spline não é viável devido ao tempo computacional exigido no cálculo do fluxo em relação à precisão da aproximação resultante deste aumento.

Por fim, verificamos a relação existente entre o erro na aproximação do fluxo escalar e a quantidade de pontos necessários em cada spline afim de se atingir um determinado erro definido a priori. Em nossas simulações, fixamos valores de quadratura e graus de anisotropia e consideramos três diferentes valores para o domínio. Como critério na comparação dos resultados, estabelecemos uma ordem de 10^{-5} , ou menor, para o erro obtido na aproximação dos fluxos. Este

erro na aproximação foi calculado no início, no meio e no final de cada placa, respectivamente. Apresentamos, abaixo, os resultados obtidos no caso em que $N = 100$, $L = 82$ e tolerância de 10^{-8} para convergência do fluxo calculado recursivamente. Consideramos três tamanhos para as placas: 0.1 cm, 1 cm e 10 cm.

N	L	x_0	$PONTOS$	ERRO APROXIMAÇÃO (ϵ_r)		
				$x = 0$	$x = x_0/2$	$x = x_0$
100	82	0.1	6	5.8155778995E-06	1.0582771540E-05	4.1636796278E-05
		1	50	1.7622507688E-05	5.8040829497E-07	6.7727658597E-05
		10	500	1.1237714041E-05	6.4868315161E-07	6.1532281846E-05

Tabela 4.6: Aproximação Fluxo escalar - Tol. 10^{-8} - Spline Natural

N	L	x_0	$PONTOS$	ERRO APROXIMAÇÃO (ϵ_r)		
				$x = 0$	$x = x_0/2$	$x = x_0$
100	82	0.1	6	1.2345003011E-06	3.5509118490E-06	1.0868413044E-05
		1	40	3.0042417232E-06	5.6080695430E-07	4.8564119736E-05
		10	350	1.7349395786E-06	4.1315030606E-07	7.2515863073E-05

Tabela 4.7: Aproximação Fluxo escalar - Tol. 10^{-8} - Spline Restrito

Esses resultados nos inferem que, para placas grandes - em especial, a interpolação polinomial utilizando Spline Restrito é mais apropriada, visto que garante a mesma ordem de aproximação do fluxo escalar necessitando de menos pontos.

4.2 Problemas em meios heterogêneos

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos para o fluxo escalar $\phi(x)$ de partículas mediante a implementação do método recursivo para problemas heterogêneos envolvendo duas regiões homogêneas. Apresentamos, também, os resultados da comparação de $\phi(x)$ com os dados obtidos na execução do programa LTS_N clássico para multiregião.

Graficamente, representamos estes problemas por:

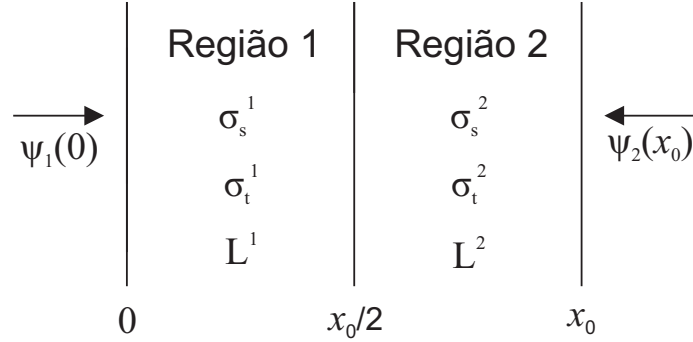


Figura 4.7: Domínio dividido em 2 regiões.

Problema 1: Região 1 Isotrópica e Região 2 Anisotrópica com $L^2 = 8$; $x_0 = 2$; $\sigma_s^1 = 0.5$; $\sigma_s^2 = 0.9$; $\sigma_t^1 = \sigma_t^2 = 1$; $N = 40$; $\psi_1(0) = 10$ e $\psi_2(2) = 0$.

MÉTODOS	FLUXO ESCALAR		
	$\phi(0)$	$\phi(1)$	$\phi(2)$
CLÁSSICO	1.1708578117E+01	3.0435959687E+00	1.7846481274E+00
RECURSIVO	1.1708575260E+01	3.0435739951E+00	1.7845642743E+00
APROX.	2.4405515091E-07	7.2196179275E-06	4.6985793453E-05

Tabela 4.8: Aprox. $\phi(x)$ - Domínio Heterogêneo $N = 40$, $L^1 = 0$ e $L^2 = 8$

Problema 2: Região 1 Anisotrópica com $L^1 = 82$ e Região 2 Anisotrópica com $L^2 = 8$; $x_0 = 2$; $\sigma_s^1 = 0.5$; $\sigma_s^2 = 0.9$; $\sigma_t^1 = \sigma_t^2 = 1$; $N = 100$; $\psi_1(0) = 10$ e $\psi_2(2) = 0$.

MÉTODOS	FLUXO ESCALAR		
	$\phi(0)$	$\phi(1)$	$\phi(2)$
CLÁSSICO	1.0775730437E+01	3.9033232975E+00	2.3286056177E+00
RECURSIVO	1.0775721085E+01	3.9032862864E+00	2.3285314848E+00
APROX.	8.6787320404E-07	9.4819642978E-06	3.1835740985E-05

Tabela 4.9: Aprox. $\phi(x)$ - Domínio Heterogêneo $N = 100$, $L^1 = 82$ e $L^2 = 8$

De acordo com os dados apresentados nas tabelas acima, podemos afirmar que foi possível reconstruir a solução $\phi(x)$ de problemas heterogêneos mediante a implementação do programa recursivo proposto, resolvendo, para este fim,

apenas problemas homogêneos e inserindo a heterogeneidade no termo de fonte. Destacamos, aqui, que a implementação do programa recursivo em meio homogêneo foi facilmente estendida para meios heterogêneos mediante pequeno ajuste na subrotina que calcula as integrais de convolução.

5 CONCLUSÃO

Nessa dissertação, utilizamos o método recursivo para construção hierárquica da solução LTS_N de equações S_N de transporte anisotrópicas partindo da solução LTS_N de equações S_N isotrópicas. Utilizamos, ainda, este mesmo procedimento recursivo na resolução de problemas de transporte em meios heterogêneos. Destacamos que a motivação para esta construção foi a generalização do método recursivo na resolução de equações anisotrópicas de transporte nas formas integral e integro-diferencial.

Analisando os resultados numéricos obtidos mediante simulação numérica do método recursivo para problemas anisotrópicos em uma região, constatou-se que o número de recursões necessárias para atingirmos a precisão desejada depende apenas do grau de anisotropia, não havendo relação com o número de direções discretas utilizadas na resolução do problema. Cabe, ainda, destacar a simplicidade de implementação computacional do método recursivo para a resolução de problemas heterogêneos, sendo necessário apenas uma pequena modificação no cálculo das integrais de convolução no algoritmo implementado para o caso homogêneo. Observamos que, para a resolução de problemas heterogêneos na forma LTS_N clássica faz-se necessário a determinação do fluxo angular em cada uma das placas, o que demanda a avaliação dos autovalores em cada região, bem como o acoplamento das interfaces através da continuidade de fluxo para a aplicação das condições de contorno. É nesse ponto que o método recursivo proposto apresenta vantagem, visto que calcula o fluxo angular uma única vez, na qual considera-se toda a placa.

Como sugestão de trabalho futuro, sugere-se o aprimoramento do algoritmo desenvolvido substituindo a interpolação polinomial via Spline Cúbico por aproximantes de Padé, por exemplo.

Como proposta de seguimento deste estudo, destacamos a utilização do método recursivo na resolução de problemas sem simetria azimutal. A formulação LTS_N clássica segue a decomposição de Chandrasekhar aplicada à dependência azimutal do fluxo angular. Os coeficientes desta decomposição são soluções de problemas anisotrópicos com simetria azimutal. Desta forma, necessitamos encontrar os autosistemas para a resolução de cada um desses problemas. Nossa ideia, é a utilização do método recursivo para resolução dos problemas com simetria azimutal provenientes da decomposição de Chandrasekhar. Desta forma, os autovalores serão calculados uma única vez, sendo que as soluções dos outros problemas com simetria azimutal serão obtidas através da primeira mediante o processo recursivo proposto nessa dissertação.

Por fim, enfatizamos que esse estudo revela a generalidade do método recursivo apresentado para a resolução da equação de transporte de partículas neutras tanto em sua forma integral quanto integro-diferencial.

Referências Bibliográficas

- [1] J. J. Duderstadt, W. R. Martin. Transport Theory, *John Wiley and Sons*. 1975.
- [2] S. Chandrasekhar. Radiative transfer. *Dover Publications Inc.* Oxford University Press, London, 1950.
- [3] M. T. Vilhena, L. B. Barichello. The LTS_N Method: A new analytical approach to solve the neutron transport equation. *Kerntechnik*, Germany, v. 56, pp. 334-336, 1991.
- [4] L. B. Barichello, M. T. Vilhena. A General Approach to One Group One Dimensional Transport Equation. *Kerntechnik.*, **58**, pp. 182-184, 1993.
- [5] L. Tavares. Cálculo dos Parâmetros Superficiais de Radiação pelo Método LTS_N . Dissertação de Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000.
- [6] M. Vilhena, L. Barichello. An Analytical Solution for the Multigroup Slab Geometry Discrete Ordinates Problems. *Transport Theory and Statistical Physics.* **24**, pp. 1337-1352, 1995.
- [7] R. Vasques. A Review of Particle Transport Theory in a Binary Stochastic Medium. Dissertação de Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2005.
- [8] G.A. Goncalves, G. Orengo, M.T. Vilhena, C.O. Graça. LTS_N Solution of the Adjoint Neutron Transport Equation with Arbitrary Source for High Order of Quadrature in a Homogeneous Slab, *Journal Quantative Spectroscopy e Radiative Transfer.*, **66**, pp. 271-276, 2000.

- [9] G. A. Goncalves, C. F. Segatto, M. T. Vilhena. The LTS_N Particular Solution in a Slab for an Arbitrary Source and Large Order of Quadrature. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **66**, pp. 271-276, 2000.
- [10] C. Segatto, M. Vilhena, M. Gomes. The One-Dimensional LTS_N Solution in a Slab with High Degree of Quadrature. *Annals of Nuclear Energy*. **26**, pp. 925-934, 1999b.
- [11] N. H. Bonemberger. Método LTS_N para N Inteiro. Dissertação de Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2005.
- [12] D. Marona, C. Segatto, M. Vilhena. On the LTS_N Solution of the Transport Equation in a Slab for $c = 1$. In *Anais do XV ENFIR- Encontro Nacional de Física de Reatores e Termo-hidráulica*, Santos, SP, Brasil, 2007.
- [13] F. Tomaschewski. Solução da equação S_N Multigrupo de Transporte Dependente do Tempo em Meio Heterogêneo. Dissertação de Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.
- [14] S.P. Renz. Solução da equação de transferência radiativa dependente do tempo pelos métodos espectral e LTS_N . Dissertação de Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1999.
- [15] J. Oliveira, A. Cardona, M. Vilhena. Solution of the One-Dimension Time-Dependent Discrete Ordinates Problem in a Slab by the Spectral and LTS_N Methods, *Annals of Nuclear Energy*, **29**, pp. 13-20, 2002a.
- [16] C.F. Segatto, M.T. Vilhena, T.T. Goncalves. An Analytical Integral Formulation for the Time-Dependent S_N Transport Equation in a Slab

- by The Double Laplace Transform Techique, *Kerotechnik*, **73**, pp. 176-178, 2008.
- [17] C. Segatto, M. Vilhena. Extension of the LTS_N Formulation for Discrete Ordinates Problem Without Azimutal Symmetry. *Annals of Nuclear Energy*, **21**, pp. 701-710, 1994.
- [18] C. Segatto. Extensão da Formulação LTS_N para Problemas de Transporte sem Simetria Azimutal e Problemas Dependentes do Tempo. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1995.
- [19] C. F. Segatto, M. T. Vilhena, S. Leite. The LTS_N Angular Multigrid Approach in a Slab. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **95**, pp. 415-442, 2005.
- [20] M. Simch, C. Segatto, M. Vilhena. An Analytical Solution for the S_N Radiative Transfer Equations with Polarization in a Slab by the LTS_N Method. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **97**, pp. 424-435, 2006.
- [21] J. Zabadal, M.T. Vilhena, L.B. Barichello. Solution of the Three-Dimensional One Group Discrete Ordinates Problem by the LTS_N Method. *Annals of Nuclear Energy.*, **22**, pp. 131-134, 1995.
- [22] J. Zabadal, M. Vilhena, L. Barichello. An Analytical Solution for the Two-Dimensional Discrete Ordinate Problem in a Convex Domain. *Progress in Nuclear Energy*. **31**, pp. 225-228, 1997.
- [23] C. Batistela, M. Vilhena. Cálculo de Criticalidade pelo Método LTS_N . In XI ENFIR-*Encontro Nacional de Física de Reatores e Termo-hidráulica*. Poços de Caldas, M. G., Brasil. volume 1, pp. 226-231, 1997a.

- [24] C. Batistela, M. Vilhena. Criticality by the LTS_N Method. *Journal of Nuclear Science and Tecnology*. **34**, pp. 603-606, 1997b.
- [25] F. Tomaschewski. Solução analítica das equações da Cinética na Formulação S_N de Transporte de Nêutrons em Geometria Unidimensional. Exame de Qualificação de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014.
- [26] C. F. Segatto, M. T. Vilhena, L. S. Tavares. The Determination of Radiant Parameters by the LTS_N Method. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **70**, pp. 227-236, 2001.
- [27] C. F. Segatto, R.F. Vargas, M. T. Vilhena, B.E.J. Bodmann. A Solution for the non-linear S_N radiative-conductive problem in a grey plane-parallel participating medium. *Journal of Thermal Sciences* **49**, pp. 1493-1499, 2010.
- [28] R.F. Vargas, C. F. Segatto, M. T. Vilhena. On the Analytical Solution of the S_N Radiative Transport Equation in a Slab for a Space-dependent Albedo coefficient. *Journal of Physics Conference Series* **369**, pp. 012-018, 2012.
- [29] R. P. Pazos, M. T. M. B. Vilhena. Convergence in Transport Theory. *Applied Numerical Mathematics*. **30**, pp. 79-92, 1999a.
- [30] R. P. Pazos, M. T. M. B. Vilhena. Convergence of the LTS_N Method: Approach of c_0 Semi-Groups. *Progress in Nuclear Energy*. **30**, pp. 77-86, 1999b.
- [31] K.M. Case. Elementary Solution of Transport Equation and Their Applications. *Annals of Physics*. **9**, pp. :1-23, 1960.

- [32] G. A. Gonçalves, S. Bogado, M. T. Vilhena. Solution of the Neutron Transport Problem with Anisotropic Scattering in Cylindrical Geometry by the Decomposition Method. *Annals of Nuclear Energy* **36**, pp. 98-102, 2009.
- [33] J. C. L. Fernandes. Solução da equação de transporte multi-grupo de nêutrons em reatores nucleares com fontes pulsadas. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2015.
- [34] L. B. Barichello. Formulação Analítica para Solução do Problema de Ordenada Discreta Unidimensional. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1992.
- [35] C. Segatto, M. Vilhena. Solução Genérica da Equação de Transporte Unidimensional para Elevadas Ordens de Quadratura. *In Anais do XI Encontro Nacional de Física de Reatores e Termo-hidráulica*. Minas Gerais, Brasil, volume 1, pp. 238-242, 1997.
- [36] C.E. Siewert, J.R. Thomas. A computational method for solving a class of coupled conductive-radiative heat transfer problems, *Journal of Quantitative Spectros and Radiative Transfer*. **45**, pp. 273-281, 1991.
- [37] J.V.P. Oliveira. Formulação LTS_N para problema de ordenada discreta com anisotropia. Dissertação de Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1993.
- [38] C. Segatto, M. Vilhena, J. Brancher. The One-Dimensional LTS_N Formulation for High Degree of Anisotropy. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **61**, pp. 39-43, 1999a.

- [39] J. Brancher, C. Segatto, M. Vilhena. The LTS_N Solution for Radiative Transfer Problem Without Azimutal Symmetry with Severe Anisotropy. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **62**, pp. 743-753, 1999.
- [40] L. B. Barichello. A particular Solution for the S_N Radiative Transfer Problems. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*., v. 53, pp. 467-469, 1995.
- [41] Ruggiero. Márcia A. Gomes, Lopes. Vera Lúcia da R. "Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais." Vol 2, Pearson Makron Books, 2010.
- [42] Press. William H et al. "Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing." Vol 1, Press Syndicate, Cambridge, 1992.
- [43] Garcia, R.D.M. and Siewert, C.E. "Benchmark Results in Radiative Transfer", *Transport Theory and Statistical Physics*, **14**, pp. 437-483, 1985.