Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Equações Semilineares Elípticas com o Termo Não-Linear Relacionado ao Primeiro Autovalor

Dissertação de Mestrado

Juliana da Silva Ricardo

Porto Alegre, 24 Março de 2015

Dissertação submetida por Juliana da Silva Ricardo[1] , como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino

Banca examinadora:
Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino (IM - UFRGS, ORIENTADOR)
Prof. Dr. Álvaro Luiz de Bortoli (IM- UFRGS)
Profª. Drª. Patrícia Kruse Klaser (IM - UFRGS)
Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano (IM - UFRGS)

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

AGRADECIMENTOS

Agradeço á Deus, por ter me guiado durante essa trajetória, sempre me mostrando que apesar das dificuldades e desafios, vale apena persistir e seguir em frente com nosso sonho.

Á toda minha família. Em especial aos meus queridos pais Luiz Lopes e Maria das Graças e ao meu irmão Ricardo, por todo o apoio que me deram desde do início quando fui estudar em outro Estado, por sempre acreditarem e confiarem em mim. Sem essa ajuda, não teria sido capaz de chegar onde cheguei, com certeza eles são a minha referência e a base de tudo que consegui construir, por eles vale todos os meus esforços. Gostaria de dedicar este trabalho aos meus avôs, Maria e José, Otilia e Luiz, pelo exemplo que foram e são para toda nossa família.

Á família do Adilson, por todo o amparo e carinho que tiveram comigo sempre.

Aos meus professores da FURG, por todo incentivo e terem me mostrado o quanto vale a pena continuar os estudos.

Ao meu orientador Leonardo Prange Bonorino, por todos ensinamentos matemáticos e toda confiança que depositou em mim quando aceitou a orientação. Obrigada pela paciência e disponibilidade durante essa caminhada.

Aos membros da banca, pela participação e importantes sugestões.

Aos meus colegas da pós, pelos momentos de descontração e por tornarem os dias mais alegres. Em particular, a minha amiga Marília, por dividir todos os momentos comigo, ser essa pessoa tão querida e que posso contar sempre.

Em especial agradeço ao meu marido Adilson, não só por termos vivido juntos esse sonho, mas pelo modo como foi vivenciado, com muito apoio e compreensão nos momentos difíceis e de angustia, por fazer essa trajetória mais leve e por todos os momentos felizes que vivemos juntos nessa etapa da nossa vida.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos equações semilineares elípticas onde o termo não-linear é uma espécie de perturbação da função linear, cujo coeficiente é o primeiro autovalor. Usando técnicas clássicas de minimização e o Teorema do Ponto de Sela, que é uma variante do Teorema do Passo da Montanha, mostramos existência de solução.

Abstract

In this work we study semilinear elliptic equations where the non-linear term is a kind of linear function perturbation, whose coefficient is the first eigenvalue. Using conventional minimization techniques and the Saddle Point Theorem, which is a variant of the Step Mountain Theorem, we show existence of solution.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A partir do século XIX, com Dirichlet e Riemann, introduziu-se uma nova maneira de resolver Equações Diferenciais Parciais. Essa técnica ficou conhecida como Cálculo das Variações e consiste em encontrar pontos mínimos ou, em geral, pontos críticos do funcional associado à Equação Diferencial. O matemático Hilbert foi o pioneiro na utilização do método e provou a existência de solução para um problema de Dirichlet.

O objetivo deste trabalho, é mostrar a existência de solução fraca para o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave. Sobre a função $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ assumiremos as seguintes hipóteses:

•$f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função **Carathéodory**:

(i) $f(x,t)$ é mensurável em x, para todo t fixo.

(ii) $f(x,t)$ é contínua em t, para todo x fixo.

•f satisfaz a **Condição de crescimento**: $\exists\, c \geq 0,$ tal que

$$|f(x,s)| \leq c|s|^{p-1} + b(x), \ \forall\, x \in\ \Omega \text{ e } \ \forall s \geq 0, \tag{1.2}$$

onde $1 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$, se $n \geq 3$ e $1 \leq p < \infty$, se $n = 2$, e a função $b \in L^{p'}(\Omega)$, para $p' = \frac{2n}{n+2}$.

Encontrar soluções fracas de (1.1) é encontrar os pontos críticos do funcional $\phi : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por:

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx, \tag{1.3}$$

onde $F : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por:

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,\xi)d\xi. \tag{1.4}$$

Note que, no espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, o funcional ϕ está bem definido, devido a condição de crescimento (1.2) e a desigualdade de Poincaré.

Este trabalho foi desenvolvido tomando por referência o artigo publicado por **Figueiredo** [6], onde serão utilizados dois métodos para encontrar os pontos críticos do funcional (1.3): minimização do funcional e o Teorema do Ponto de Sela. Para aplicarmos tais técnicas, precisaremos definir alguns conceitos, a saber:

• os limites assintóticos:

$$K_\pm(x) := \limsup_{s\to\pm\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} \text{ e } L_\pm(x) := \liminf_{s\to\pm\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2},$$

• as funções : $G_+ : \Omega \times R^+ \to R$ e $G_- : \Omega \times R^- \to R$, definidas por :

$$F(x,s) = \frac{1}{2}K_\pm(x)s^2 + G_\pm(x,s), s > 0 \ (s < 0)$$

que são perturbarções da parte quadrática envolvendo $K_\pm$. E os limites:

$$\Gamma_+(x) := \limsup_{s\to+\infty} \frac{G_+(x,s)}{s}, \gamma_+(x) := \liminf_{s\to+\infty} \frac{G_+(x,s)}{s}$$
$$\Gamma_-(x) := \limsup_{s\to-\infty} \frac{G_-(x,s)}{s}, \gamma_-(x) := \liminf_{s\to-\infty} \frac{G_-(x,s)}{s}.$$

Para uma função dada $m(x) : L^r(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, r > \frac{n}{2}$,trabalharemos com o problema de autovalor com peso,

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu_j m(x)u \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\mu_j = \mu_j(m(x)),\ j = 1, 2...$, denotam os autovalores. A função $m(x)$ é conhecida como função peso.
Temos que $\mu_1(m(x))$ é o primeiro autovalor do problema de autovalor com peso $m(x)$ e seu quociente de Rayleigh satisfaz para todo $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\mu_1(m(x)) \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega m(x)(u)^2 dx}.$$

No **capítulo 2** deste trabalho serão apresentadas as definições mais gerais e que serão importantes para leitura deste texto.

No **capítulo 3**, trabalharemos com a técnica de minimização do funcional, onde mostraremos que o funcional definido em (1.3) tem ponto de mínimo. Para provar esse fato, utilizaremos o seguinte resultado:

Teorema (3.1): Seja $H_0^1(\Omega)$ um Espaço de Hilbert e suponha que $\phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfaça:

(i) ϕ é fracamente semicontínuo inferiormente, ou seja, $\phi(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} \phi(u_n)$, sempre que $u_n \to u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$,

(ii) coercivo, ou seja, $\phi(u) \to +\infty$, sempre que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty$.

Então, ϕ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\phi(u_0) = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} \phi(u)$.

Com isso, teremos quatro resultados válidos sobre a solução do problema (1.1), o primeiro resultado segue:

Teorema(3.2.1): Considere o problema (1.1):

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

com a função f satisfazendo a condição (1.2) e ser Carathéodory. Se existem funções K_+^0 e $K_-^0 \in L^r(\Omega),\ r > \frac{N}{2}$ tal que $K_\pm \leq K_\mp^0$ e:

(i) $K_+^0 \leq 0$ ou $\mu_1(K_+^0) > 1$

(ii) $K_-^0 \leq 0$ ou $\mu_1(K_-^0) > 1$

Então o problema possui solução fraca.

Os outros resultados de existêcnia de solução deste capítulo, irão utilizar os problemas conhecidos como ressonantes, ou seja, problemas em que os limites assintóticos $K_{\pm}$ pertencem ao espectro do laplaciano. Trabalharemos com os seguintes casos:

$(A) K_+ \in L^r(\Omega),\ r > \frac{N}{2},$ tal que $\mu_1(K_+) = 1$ e $\mu_1(K_-) > 1,$

$(B) K_- \in L^r(\Omega),\ r > \frac{N}{2},$ tal que $\mu_1(K_-) = 1$ e $\mu_1(K_+) > 1,$

$(C) K_{\pm} \in L^r(\Omega),\ r > \frac{N}{2},$ tal que $\mu_1(K_-) = \mu_1(K_+) = 1.$

Em **Paiva** [9] é possível encontrar outros exemplos e resultados para estes tipos de problemas.
Segue abaixo, o resultado de existência de solução utilizando o caso ressonante (A), o teorema também é válido para os casos (B) e (C) :

Teorema (3.2.7) : Considere o problema (1.1):

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

com a função f satisfazendo a condição de crescimento (1.2) e ser Carathéodory. Suponha o caso ressonante (A) e também que a função $\Gamma_+ \in L^r(\Omega), r > \frac{n}{2}$ com:

$$\int \Gamma_+(x)\psi_+(x)dx < 0,$$

onde $\psi_+(x) > 0$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta \psi_+ = K_+\psi_+ \text{ em } \Omega \\ \psi_+ = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

então o problema possui solução fraca.

No **capítulo 4**, aplicaremos uma versão do teorema do Passo da Montanha, um resultado bastante importante que vem sendo usado para encontramos pontos críticos, devido a **Ambrosetti e Rabinowits**[1], segue:

Teorema do Passo da Montanha: Seja $\phi \in C^1(H_0^1, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição de Palais-Smale. Suponha também:

(i) $\phi(0) = 0$;
(ii) $\exists$ constantes $r, a > 0; \phi(u) \geq a, \text{se } \|u\| = r$;
(iii) $\exists v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|v\| > r, \phi(v) \leq 0$.
Defina $\tau = \{g \in C([0,1]; H_0^1(\Omega))\ ; g(0) = 0, g(1) = v\}$. Então:

$$c := \inf_{g \in \tau} \max_{0 \leq t \leq 1} \phi(g(t))$$

é o valor crítico de ϕ.

A versão do teorema anterior, mais adequada ao trabalho, é dado pelo:

Teorema do Ponto de Sela de Rabinowitz: Seja X um espaço de Banach, onde $X = W \oplus Z$ é uma soma direta de um subespaço fechado W com Z e $dimW < \infty$. Considere $Q = \{u \in W : \|u\| \leq \rho\}, \rho > 0$. Para $\phi : X \to \mathbb{R} \in C^1$, temos:

$$c := \inf_{\gamma \in \tau} \max_{u \in Q} \phi(\gamma(u)),$$

onde $\tau = \{\gamma \in C(Q, X); \gamma(u) = u \text{ em } \partial Q\}$. Se

(i) $\max_{\partial Q} \phi < b = \inf_Z \phi$,

(ii) ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale,

então $c \geq b$ é um valor crítico de ϕ.

Esse resultado permite-nos obter pontos críticos do tipo sela e com isso, mostrar que é válido o seguinte resultado de existência de solução:

Teorema(4.2.1): Considere o problema (1.1):

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde f satisfaz a condição (1.2) e é Carathéodory. Suponha o caso ressonante (C) e que as funções Γ_- e $\gamma_+ \in L^r(\Omega), r > \frac{n}{2}$, são tais que:

$$\int \Gamma_-(x)\psi_-(x) < 0,$$

onde $\psi_-(x) > 0$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta\psi_- = K_-\psi_- \text{ em } \Omega \\ \psi_- = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

e também,

$$\int \gamma_+(x)\psi_+(x) > 0,$$

onde $\psi_+(x) > 0$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta\psi_+ = K_+\psi_+ \text{ em } \Omega \\ \psi_+ = 0 \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Assuma também que vale:

$$|g_\pm(x,s)| \leq c|s|^\alpha + b(x), \text{ onde } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \text{ e } b \in L^1(\Omega).$$

onde,

$$\begin{aligned} g_+(x,s) &= f(x,s) - K_+(x)s, \ \textit{para } s > 0, \\ g_-(x,s) &= f(x,s) - K_-(x)s, \ \textit{para } s < 0. \end{aligned}$$

Então o problema possui solução fraca.

A prova dos teoremas anteriores não serão apresentadas neste trabalho, mas podem ser encontradas em [14], [13], [11] e [16], respectivamente.

Para o conhecimento de outros resultados sobre o método do Cálculo das Variações, pode-se consultar [3], [4], [5], [8], [12], [15].

Capítulo 2

Premilinares

Neste capítulo, tratamos de alguns pré-requisios para que se tenha uma melhor compreensão dos resultados que apresentaremos. Iniciamos com definições gerais de Análise, EDP e Teoria Varacional. Por fim, enunciamos teoremas que tem grande importância no desenvolvimento deste trabalho, como referências para este capítulo, temos [13] e [10].

2.1 Definições

Observamos as seguintes notações:

• $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, limitado e de classe C^1.
• $\langle , \rangle$ produto interno.
• $\|.\|$ norma.
• μ = medida de Lebesgue.
• O espaço das **funções contínuas** em Ω é denotado por: $C(\Omega)$.
• O espaço das funções k vezes **continuamente diferenciáveis** em Ω é denotado por: $C^k(\Omega)$.
• O conjuntos das funções **infinitamente diferenciáveis em** Ω é denotado por: $C^\infty(\Omega)$.
• $V \subset\subset \Omega$ quando seu fecho é um compacto de Ω.
• O espaço das funções **infinitamente diferenciáveis e suporte compacto** em Ω é denotado por: $C_0^\infty(\Omega)$.

2.1.1 Funções mensuráveis e Convergências

Definição 2.1.1. Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R},$ onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,é dita **mensurável**,se dado $A \subset \mathbb{R}$ aberto, temos que $f^{-1}(A)$ é um subconjunto mensurável em Ω.

Definição 2.1.2. Uma função $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada **Carathéodory**, se satisfaz:

(i) $f(x,t)$ é mensurável em $x, \forall t$ fixo.

(ii) $f(x,t)$ é contínua em $t, \forall x$ fixo.

Definição 2.1.3. O espaço $L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$, é definido como:

$$L^p(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} \ ; \text{ u é mensurável e } \int |u|^p dx < \infty\}$$

e sua **norma** é dada por:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 2.1.4. O espaço das funções **localmente integráveis** é definido como:

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R}; \int_V |u| dx < \infty, \forall\ V \subset\subset \Omega\}.$$

Definição 2.1.5. Dizemos que $f_n \to f$ **em quase todo ponto** (q.t.p.) se:

$$\exists M \subset \Omega, \text{ com } \mu(M) = 0 \text{ tal que } \forall \epsilon > 0 \text{ e } x \in \Omega/M, \ \exists N(\epsilon, x) \text{ tal que}$$

$$\text{se } n \geq N(\epsilon, x) \text{ então } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Definição 2.1.6. Dizemos que $f_n \to f$ **uniformemente** se:

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N(\epsilon); \ n \geq N(\epsilon) \text{ e } x \in \Omega \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Definição 2.1.7. Dizemos que $f_n \to f$ **em norma** $L^p(\Omega)$, com $f_n, f \in L^p(\Omega)$, se:

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N(\epsilon); \ n \geq N(\epsilon) \Rightarrow \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f_n - f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Definição 2.1.8. Seja H um espaço de Hilbert. Dizemos que uma sequência $\{u_n\} \subset H$, **converge fracamente** para $u \in H$, se:

$$\phi(u_k) \to \phi(u), \forall \phi \in H^*$$

onde H^* é o espaço dual de H, ou seja:

$$H^* = \{\phi : H \to \mathbb{R}; \phi \text{ é linear e } \exists c > 0 \text{ tal que } |\phi(u)| \leq c\|u\|\}.$$

Definição 2.1.9. Seja H um espaço de Hilbert. Dizemos que uma sequência $\{u_n\} \subset H$, **converge fortemente** para $u \in H$, se:

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - u\|_H = 0.$$

2.1.2 Espaço de Sobolev

Definição 2.1.10. Seja $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dizemos que v é $\alpha-$ ésima **derivada fraca** de u,

$$\int u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int v \phi dx, \forall \phi \in C_0^\infty,$$

onde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, com $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ e

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial_{x_2}^{\alpha_2}} ... \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Denotamos $D^\alpha u = v$.

Definição 2.1.11. O espaço de **Sololev** é definido como:

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^1_{loc}(\Omega), \exists D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$$

e sua **norma** é dada por:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty.$$

Observação 2.1.12.

1. O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é um **espaço de Banach**.

2. Quando $k = 1$ e $p = 2$, podemos definir o espaço de Sobolev:

$$W^{1,2}(\Omega) := H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i \in \{1, ...n\}\},$$

com a norma em $H^1(\Omega)$, dada por:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega (u)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, podemos definir:

$$H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$$

o conjunto das funções que se "anulam na fronteira", ou seja,

$$H_0^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega); "u = 0" \text{ em } \partial\Omega\}.$$

O espaço $H_0^1(\Omega)$ é um **espaço de Hilbert**, em relação ao produto interno:

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla(u)\nabla(v)dx$$

e a norma que próvem deste produto interno é definida como:

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := (\langle u, v\rangle)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Notação: $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Observação 2.1.13. 1. O **dual** do espaço $H_0^1(\Omega)$ é denotado por $H^{-1}(\Omega)$. Se $f \in H^{-1}(\Omega)$, definimos a norma em $H^{-1}(\Omega)$, como:

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\left\{\langle f, u\rangle \ ; u \in H_0^1(\Omega), \ \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le 1\right\}.$$

2.1.3 Teoria Clássica de EDP

Definição 2.1.14. Considere o operador L definido em $C^2(\Omega)$:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n a^{i,j}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u.$$

Dizemos que o operador L é uniformemente elíptico se existe uma constante $\lambda > 0$, tal que:

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \lambda|\xi|^2, \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

onde $a^{ij}(x) = A(x)$ é uma matriz simétrica de coeficientes mensuráveis.

Definição 2.1.15. Dada $u \in C^2(\Omega)$, definimos **Laplaciano** de u, como:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_ix_i}.$$

Observação 2.1.16. O Laplaciano é um exemplo de operador elíptico.

Definição 2.1.17. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, considere o problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w \text{ em } \Omega \\ w = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

Caso o problema tenha solução $w \neq 0$, dizemos que λ é um **autovalor** do Laplaciano e w é a **autofunção** associada a λ.
Definiremos λ_1, como sendo o **primeiro** autovalor do operador Laplaciano, onde sua fórmula explícita é dada por:

$$\lambda_1 = \min_{u \neq 0 \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int |\nabla u|^2 dx}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

Observação 2.1.18. O quociente acima é chamado de **Quociente de Rayleigh**.

Observação 2.1.19. Se $\bar{\Omega}$ for compacto, o primeiro autovalor é sempre positivo.

2.1.4 Teoria Variacional

Definição 2.1.20. Considere o funcional $\phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$. O funcional é **diferenciável em u** $\in H_0^1(\Omega)$, se existe $T : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ funcional, linear e contínuo, tal que:

$$\lim_{\|\varphi\| \to 0} \frac{|\phi(u + \varphi) - \phi(u) - T(\varphi)|}{\|\varphi\|} = 0.$$

Observação 2.1.21.
1. O funcional T é chamado **derivada de Fréchet** de ϕ e definimos $\phi'(u) = T$.

Definição 2.1.22. Dizemos que $\phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R} \in C^1$, se existe $\phi^{'}(u), \forall u \in H_0^1$ e $\phi^{'} : H_0^1(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))^*$ é contínua.

Definição 2.1.23. Quando $\phi^{'}(u) = 0$, dizemos que u é **ponto crítico** do funcional ϕ.

Definição 2.1.24. Definimos $K_c := \{u \in H_0^1(\Omega); \phi(u) = c, \phi'(u) = 0\}$. Quando o conjunto $K_c \neq \varnothing$, dizemos que c é um **valor crítico**.

Definição 2.1.25. Dizemos que o funcional ϕ é **fracamente semicontínuo inferiormente** em $H_0^1(\Omega)$, se tivermos :

$$\phi(u) \leq \liminf_{n \to +\infty} \phi(u_n),$$

sempre que $u_n \to u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$.

Observação 2.1.26. Exemplo de funcional semicontínuo inferiomente:

$$w \longmapsto \int_\Omega |\nabla w|^2 dx, \text{ onde } w \in H_0^1(\Omega).$$

Definição 2.1.27. Chamamos $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ de **sequência minimizante**, quando:

$$\phi(u_n) \longrightarrow \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \phi(u), \; n \to \infty.$$

Definição 2.1.28. O funcional ϕ é **coercivo**, quando:

$$\phi(u) \to +\infty, \text{ sempre que } \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty.$$

2.2 Teoremas

Teorema 2.2.1. ***(Teorema de Fubini)***: *Suponhamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então, para quase todo $x \in \Omega_1$,*

$$F(x,y) \in L_y^1(\Omega_2) \text{ e } \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L_x^1(\Omega_1).$$

De maneira análoga, para quase todo $y \in \Omega_2$, temos:

$$F(x,y) \in L_x^1(\Omega_1) \text{ e } \int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L_y^2(\Omega_2).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx.$$

Teorema 2.2.2. ***(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)***: *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis, tal que $f_n \to f q.t.p.$ Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e,*

$$\int f dx = \lim_{n \to \infty} \int f_n dx.$$

Teorema 2.2.3. ***(Lema de Fatou)***: *Assuma f_n são não negativas e integráveis, então:*
$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n dx.$$

Teorema 2.2.4. *Sejam (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que:*

$$f_n \to f \text{ em } L^p(\Omega).$$

Então, existe uma subsequência (f_{n_j}), tal que:

(i) $f_{n_j}(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω.

(ii) $|f_{n_j}(x)| \leq g(x)$ *q.t.p. em* $\Omega, \forall j,$ *onde* $g \in L^p(\Omega)$.

Teorema 2.2.5. ***(Desigualdade de Hölder)***: *Seja $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$, com $1 < p < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então:*

$$fg \in L^1(\Omega) \text{ e } \|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema 2.2.6. ***(Teorema da Divergência)***: *Se $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ e Ω é um conjunto aberto, com fronteira suave, então:*

$$\int_\Omega u\Delta v \, dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \eta} \, dS - \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$$

Teorema 2.2.7. *Seja H um espaço de Hilbert e (u_n) uma sequência limitada em H. Então existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $u \in H$, tal que $u_{n_j} \to u$ fracamente em H.*

Teorema 2.2.8. *Seja H um espaço de Hilbert e (u_n) uma sequência em H. Se $u_n \to u$ fracamente em H e $\|u_n\| \to \|u\|$ em H, então:*

$$u_n \to u \text{ fortemente em } H.$$

Observação 2.2.9. Sequências que convergem fracamente em H, são limitadas.

Teorema 2.2.10. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, limitado, $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < n$. Então, existe $C = C(n, p, \Omega) > 0$, tal que:*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ e } 1 \leq q \leq p^*, \text{ onde } p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Observação 2.2.11. 1. No teorema anterior, o caso em que $p = q = 2$, chamamos de **Desigualdade de Poincaré**:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Observação 2.2.12. Na desigualdade anterior, não podemos trocar $H_0^1(\Omega)$ por $H^1(\Omega)$, pois as funções constantes pertencem a $H^1(\Omega)$ e não satisfazem as desigualdades de Poincaré, pois possuem derivada nula.

Teorema 2.2.13. ***(Imersões de Sobolev):*** *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, for limitado com fronteira suave, as seguintes imersões são contínuas:*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),\ 1 \leq p \leq \infty, n = 1 \text{ ou } n = 2.$$

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),\ 1 \leq p \leq 2^*,\ n \geq 3,\ \text{onde } 2^* = \frac{2n}{n-2}.$$

Teorema 2.2.14. ***(Imersões de Rellich Kondrachov)****: Se Ω for limitado, as seguintes imersões são compactas:*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),\ 1 \leq p < 2^*,\ n \geq 3,\ \text{onde } 2^* = \frac{2n}{n-2}.$$

Teorema 2.2.15. ***(Princípio Varacional para primeiro autovalor)****:*

(i) $\lambda_1 = \min\{\int_\Omega |u|^2 dx; u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1\}$.

(ii) Além disso, o mínimo acima é atingido por uma função w_1, positiva em Ω, que resolve:

$$\begin{cases} -\Delta w_1 = \lambda_1 w_1 \text{ em } \Omega \\ w_1 = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

(iii) Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

então u é multiplo de w_1.

Capítulo 3

Minimização do funcional ϕ

Neste capítulo utilizaremos a técnica de minimização, para mostrar que o problema (1.1):

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde f é uma função Carathéodory e satisfaz a condição de crescimento (1.2), tem solução fraca.

Para garantir a existência do ponto de mínimo, iremos mostrar que o funcional ϕ definido em (1.3) é fracamente semicontínio inferiormente e coersivo, com isso, podemos utilizar o seguinte resultado:

Teorema 3.0.16. *Seja $H_0^1(\Omega)$ um Espaço de Hilbert e suponha que ϕ:$H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é:*

(i) fracamente semicontínuo inferiormente, ou seja, $\phi(u) \le \liminf_{n\to+\infty} \phi(u_n)$, sempre que $u_n \to u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$.

(ii) coercivo, ou seja, $\phi(u) \to +\infty$, sempre que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty$.

Então ϕ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\phi(u_0) = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} \phi(u)$.

Nas próximas seções provaremos que o funcional (1.3), satisfaz (i) e (ii).

3.1 Semicontinuidade inferior fraca

Vamos iniciar mostrando que ϕ é fracamente semicontínuo inferiormente, ou seja, mostraremos:

$$\phi(u) \le \liminf_{n\to+\infty} \phi(u_n),$$

se $u_n \to u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$. Seja $u_n \to u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$. Usando a definição de ϕ, precisamos mostrar que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx \leq \liminf_{n\to+\infty}\left[\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega F(x,u_n)dx\right].$$

Usando o fato que o funcional $\psi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido como:

$$\psi(v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx$$

é fracamente semicontínuo inferiormente, já temos que:

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx. \tag{3.1}$$

Vamos mostrar que:

$$-\int_\Omega F(x,u)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} -\int_\Omega F(x,u_n)dx.$$

Considere (u_{n_k}) uma subsequência de (u_n) minimizante, ou seja,

$$\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega F(x,u_{n_k})dx = \lim_{n\to+\infty}\inf\int_\Omega F(x,u_n)dx.$$

Como por hipótese $u_n \to u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$, então segue que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Pelo Teorema de Imersão de Rellich Kondrachov (2.2.14), passando a uma sequência se necessário, temos que $u_{n_k} \to u$ fortemente em $L^2(\Omega)$. Além disso, $u_{n_k} \to u$ $q.t.p.$.
Usando a definição de F em (1.4), temos:

$$\begin{aligned} F(x,u_{n_k}) &= \int_0^{u_{n_k}} f(x,\xi)d\xi \\ &\leq \int_0^{u_{n_k}} \left(c|\xi|^{p-1} + b(x)\right)d\xi \\ &= c\frac{|\xi|^p}{p} + b(x)\xi\Big|_0^{u_{n_k}} \\ &= c\frac{|u_{n_k}|^p}{p} + b(x)u_{n_k}. \end{aligned}$$

Então,

$$c\frac{|u_{n_k}|^p}{p} + b(x)u_{n_k} - F(x,u_{n_k}) \geq 0.$$

Note que, podemos aplicar Lema de Fatou (2.2.3) na desigualdade anterior:

$$\int_\Omega \liminf_{k\to+\infty} c\frac{|u_{n_k}|^p}{p}+b(x)u_{n_k}-F(x,u_{n_k})dx \leq \liminf_{k\to+\infty}\int_\Omega c\frac{|u_{n_k}|^p}{p}+b(x)u_{n_k}-F(x,u_{n_k})dx,$$

somando em ambos os lados o termo $-\int_\Omega \lim_{k\to+\infty} c\frac{|u_{n_k}|^p}{p}+b(x)u_{n_k}$, temos:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \liminf_{k\to+\infty}\left[c\frac{|u_{n_k}|^p}{p}+b(x)u_{n_k}-F(x,u_{n_k})\right]dx-\int_\Omega \lim_{k\to+\infty} c\frac{|u_{n_k}|^p}{p}+b(x)u_{n_k}dx\\
&\leq \liminf_{k\to+\infty}\int_\Omega c\frac{|u_{n_k}|^p}{p}+b(x)u_{n_k}-F(x,u_{n_k})dx-\int_\Omega \lim_{k\to+\infty} c\frac{|u_{n_k}|^p}{p}+b(x)u_{n_k}dx
\end{aligned}\tag{3.2}$$

Agora trabalharemos com um lado de cada vez, da desigualdade acima. Começaremos desenvolvendo o lado direito de (3.2).

Note que, existe $\lim_{k\to+\infty} c\frac{|u_{n_k}|^p}{p}+b(x)u_{n_k}$ e é dado por $c\frac{|u|^p}{p}+b(x)u$ q.t.p. Então podemos escrever:

$$\begin{aligned}
&\liminf_{k\to+\infty}\int_\Omega c\frac{|u_{n_k}|^p}{p}+b(x)u_{n_k}-F(x,u_{n_k})dx-\int_\Omega \lim_{k\to+\infty} c\frac{|u_{n_k}|^p}{p}+b(x)u_{n_k}dx\\
&\quad=\liminf_{k\to+\infty}\left[\int_\Omega c\frac{|u_{n_k}|^p}{p}+b(x)u_{n_k}-F(x,u_{n_k})dx-\int_\Omega c\frac{|u|^p}{p}+b(x)udx\right],
\end{aligned}$$

usando propriedade de integral e lim inf, chegamos na seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to+\infty}\int_\Omega c\frac{|u_{n_k}|^p}{p} &+ b(x)u_{n_k}-F(x,u_{n_k})dx-\int_\Omega \lim_{k\to+\infty} c\frac{|u_{n_k}|^p}{p}+b(x)u_{n_k}dx\\
&\leq \liminf_{k\to+\infty}\int_\Omega -F(x,u_{n_k})dx.
\end{aligned}\tag{3.3}$$

Agora, desenvolvendo o lado esquerdo de (3.2), vamos usar primeiro a propriedade de integral que nos permite escrever a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \liminf_{k\to+\infty}\left[c\frac{|u_{n_k}|^p}{p}+b(x)u_{n_k}-F(x,u_{n_k})\right]dx-\int_\Omega \lim_{k\to+\infty} c\frac{|u_{n_k}|^p}{p}+b(x)u_{n_k}dx\\
&=\int_\Omega \left[\liminf_{k\to+\infty}\left[c\frac{|u_{n_k}|^p}{p}+b(x)u_{n_k}-F(x,u_{n_k})\right]-\lim_{k\to+\infty} c\frac{|u_{n_k}|^p}{p}+b(x)u_{n_k}\right]dx.
\end{aligned}$$

Como existe $\lim_{k\to+\infty} c\frac{|u_{n_k}|^p}{p}+b(x)u_{n_k}$, o lado direito da igualdade anterior fica:

$$\int_\Omega \liminf_{k\to+\infty}\left[c\frac{|u_{n_k}|^p}{p}+b(x)u_{n_k}-F(x,u_n)-c\frac{|u|^p}{p}+b(x)u\right]dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \liminf_{k\to+\infty} -F(x,u_{n_k})dx \\
&= -\int_\Omega F(x,u)dx, \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

segue de (3.3) e (3.4), que:

$$
-\int_\Omega F(x,u)dx \leq \liminf_{k\to+\infty} -\int_\Omega F(x,u_{n_k})dx. \qquad (3.5)
$$

Utilizando (3.1) e (3.5), temos:

$$
\begin{aligned}
\phi(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \int_\Omega F(x,u)dx \\
&\leq \frac{1}{2}\liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^2dx + \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega -F(x,u_n)dx \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2dx - \int_\Omega F(x,u_n)dx\right] \\
&= \liminf_{n\to+\infty}\phi(u_n).
\end{aligned}
$$

Com isso, mostramos que ϕ é fracamente semicontínuo inferiormente em $H_0^1(\Omega)$.

3.2 Coercividade do Funcional ϕ

Nesta seção, exploraremos a hipótese de coercividade de ϕ. Antes relembremos o problema de autovalor com peso, onde para uma função peso dada $m(x) : L^r(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, r > \frac{n}{2}$, queremos encontrar uma função u e autovalores $\mu_j = \mu_j(m(x)),\ j = 1, 2...$ que satisfaçam:

$$
\begin{cases}
-\Delta u = \mu_j m(x)u \text{ em } \Omega \\
u = 0 \text{ na } \partial\Omega.
\end{cases}
$$

Como exemplo, podemos considerar o problema de autovalor na reta, onde buscamos $u : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ que satisfaça:

$$
\begin{cases}
-u'' = -u \\
u = 0 \text{ em } \{0, 2\pi\}.
\end{cases}
$$

Neste caso sabemos, que temos como solução $u(x) = sen(x)$.
Agora queremos encontrar uma solução para um problema "variante" do anterior, utilizando por exemplo, dado o peso $m : \mathbb{R} - \{0, 2\} \to \mathbb{R}$:

$$m(x) = \frac{6 + 6x + x^2}{2x + x^2}.$$

Note que a função $u(x) = (2x + x^2)e^x$ e $\mu(m(x)) = 1$ satisfazem :

$$\begin{cases} -u'' = \mu(m(x)).m(x)u \\ u = 0 \text{ em } \{-2, 0\}, \end{cases}$$

logo é solução do problema de autovalor com peso.
Uma caracterização que será bastante utilizada é a do primeiro autovalor $\mu_1(m(x))$, onde seu quociente de Rayleigh satisfaz para todo $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\mu_1(m(x)) \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega m(x)(u)^2 dx}.$$

Também relembremos as funções:

$$K_\pm(x) := \limsup_{s \to \pm\infty} \frac{2F(x, s)}{s^2} \text{ e } L_\pm(x) := \liminf_{s \to \pm\infty} \frac{2F(x, s)}{s^2}.$$

Usaremos essas notações para os próximos teoremas.

Teorema 3.2.1. *Suponhamos que existam duas funções K_+^0 e $K_-^0 \in L^r(\Omega), r > N/2$ tal que $K_\pm \leq K_\pm^0$ e :*

(i) ou $K_+^0 \leq 0$ ou $\mu_1(K_+^0) > 1$,

(ii) ou $K_-^0 \leq 0$ ou $\mu_1(K_-^0) > 1$.

Então ϕ é um funcional coercivo.

Demonstração. Queremos mostrar que ϕ é um funcional coercivo, para tal, separaremos a demonstração nos seguintes casos:

(1) $K_+^0 \leq 0$ e $K_-^0 \leq 0$,

(2) $\mu_1(K_+^0) > 1$ e $K_-^0 \leq 0$,

(3) $\mu_1(K_-^0) > 1$ e $K_+^0 \leq 0$,

(4) $\mu_1(K_+^0) > 1$ e $\mu_1(K_-^0) > 1$.

Antes mostraremos que para $\epsilon > 0$, vale a desigualdade:

$$F(x,s) \leq (K_\pm^0 + \epsilon)s^2 + b_\pm, \tag{3.6}$$

com K_+^0, b_+, se $s > 0$ e K_-^0, b_-, se $s < 0$, onde b_+ e b_- são funções positivas e integráveis, a serem definidas.
Começamos por demonstrar o caso $s > 0$. Por hipótese temos que $K_+ \leq K_+^0$.
Como

$$K_+ = \limsup_{s\to+\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} \leq K_+^0,$$

usando definição de $\limsup$, dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar um M grande tal que $s \geq M$ implica

$$\frac{2F(x,s)}{s^2} \leq K_+^0 + \epsilon.$$

Segue que

$$F(x,s) \leq \frac{1}{2}(K_+^0 + \epsilon)s^2. \tag{3.7}$$

Dado $x \in \Omega$ e $0 < |s| \leq M$, usando a definição (1.2) para a função *F(x,s)* e a condição de crescimento para *f(x,s)*, temos:

$$\begin{aligned}|F(x,s)| = |\int_0^s f(x,\xi)d\xi| \leq \int_0^s |f(x,\xi)|d\xi \;&\leq\; c\int_0^s |\xi|^{p-1} + b(x)d\xi \\ &=\; c\frac{|\xi|^p}{p} + b(x)\xi|_0^s \\ &=\; c\frac{|s|^p}{p} + b(x)s \\ &\leq\; c\frac{M^p}{p} + b(x)M.\end{aligned}$$

Tomando $b_+ = c\frac{M^p}{p} + b(x)M \in L^1(\Omega)$, temos:

$$|F(x,s)| \leq b_+, \tag{3.8}$$

juntando (3.7) para $|x| > M$ e (3.8) para $s < M$, segue a desigualdade que queríamos :

$$F(x,s) \leq \frac{1}{2}(K_+^0 + \epsilon)s^2 + b_+, s > 0.$$

Agora vamos ao caso $s<0$. Analogamente, $K_- \leq K_-^0$. Pela definição de K_-, temos

$$K_- = \limsup_{s\to -\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} \leq K_-^0.$$

Pela definição $\limsup$, dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar um M grande, tal que para $s \leq -M$ vale:

$$\frac{2F(x,s)}{s^2} \leq K_-^0 + \epsilon,$$

logo

$$F(x,s) \leq \frac{1}{2}(K_-^0 + \epsilon)s^2. \tag{3.9}$$

Dado $x \in \Omega$ e $-M < s < 0$, usando a definição (1.2) para *F(x,s)* e a condição de crescimento para *f(x,s)*, temos :

$$\begin{aligned}
F(x,s) \leq |F(x,s)| &= |\int_0^s f(x,\xi)d\xi| \\
&= |-\int_s^0 f(x,\xi)d\xi| \\
&= |\int_s^0 f(x,\xi)d\xi| \\
&\leq \int_s^0 |f(x,\xi)|d\xi \\
&\leq \int_s^0 c|\xi|^{p-1} + b(x)d\xi
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\tau = -\xi \Rightarrow d\tau = -d\xi$

$$\begin{aligned}
|F(x,s)| \leq -\int_{-s}^0 c|\tau|^{p-1} + b(x)d\tau &\leq \int_0^{-s} c|\tau|^{p-1} + b(x)d\tau \\
&= c\frac{|\tau|^p}{p} + b(x)\tau|_0^{-s} \\
&= c\frac{|-s|^p}{p} + b(x)(-s) \\
&< c\frac{|M|^p}{p} + b(x)M.
\end{aligned}$$

Tomando, $b_- = c\frac{|M|^p}{p} + b(x)M \in L^1(\Omega)$, temos que:

$$|F(x,s)| \leq b_-, \tag{3.10}$$

juntando as desigualdades (3.9) e (3.10):

$$F(x,s) \leq \frac{1}{2}(K_- + \epsilon)s^2 + b_-, s < 0.$$

Logo está provada a desigualdade que queríamos.

Agora vamos tratar dos casos que citamos no início da demonstração, lembre-se que nosso objetivo é mostrar que ϕ é coercivo.

Caso 1: Quando acontece $K_+^0 \leq 0$ e $K_-^0 \leq 0$.

Pela definição:

$$\phi(u) \;=\; \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx,$$

separando na parte em que $u > 0$ e $u < 0$, onde $u^+(x) = u(x), u \geq 0$ e $u^+(x) = 0, u < 0$ e $u^-(x) = u^+(x) - u(x)$, temos:

$$\phi(u) \;=\; \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \int_\Omega F(x,u^+)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx - \int_\Omega F(x,u^-)dx,$$

usando a estimativa (3.6):

$$\begin{aligned}\phi(u) \;\geq\; & \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (K_+^0 + \epsilon)|u^+|^2 - \int_\Omega b_+ dx \\ + \; & \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (K_-^0 + \epsilon)|u^-|^2 dx - \int_\Omega b_- dx. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Como $K_+^0 \leq 0$ e $K_-^0 \leq 0$, escolhendo $\epsilon = \frac{\lambda_1}{2}$, onde λ_1 é o primeiro autovalor do problema do Laplaciano. Da estimativa acima, ficamos:

$$\begin{aligned}\phi(u) \;\geq\; & \frac{1}{2}[\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega |u^+|^2 dx] - \int_\Omega b_+ dx \\ + \; & \frac{1}{2}[\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx - \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega |u^-|^2 dx] - \int_\Omega b_- dx.\end{aligned}$$

Utilizando o Quociente de Rayleigh para o λ_1, ficamos:

$$\begin{aligned}\phi(u) \;\geq\; & \frac{1}{2}[\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx] - \int_\Omega b_+ dx \\ + \; & \frac{1}{2}[\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx] - \int_\Omega b_- dx.\end{aligned}$$

logo,

$$\phi(u) \geq \frac{1}{4}[\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx] + \frac{1}{4}[\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx] - [\int_\Omega b_+ dx + \int_\Omega b_- dx].$$

Como b_+ e $b_- \in L^1(\Omega)$, suas integrais são finitas, portanto:

$$\phi(u) \;\; \geq \;\; c_1 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - c_2 = c_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} - c_2,$$

onde $c_1 = \frac{1}{4}$ e $c_2 = [\int_\Omega b_+ dx + \int_\Omega b_- dx]$.

Logo ϕ é coercivo, pois sempre que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty$, $\phi(u) \to +\infty$.

Caso 2 : Quando acontece $K_-^0 \leq 0$ e $\mu_1(K_+^0) > 1$.

Pela definição (1.3),

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx.$$

Como anteriormente, separaremos as integrais quando $u > 0$ e $u < 0$ e utilizaremos a desigualdade (3.6) :

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \int_\Omega F(x,u^+)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx - \int_\Omega F(x,u^-)dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (K_+^0 + \epsilon)|u^+|^2 dx - \int_\Omega b_+ dx + \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (K_-^0 + \epsilon)|u^-|^2 dx - \int_\Omega b_- dx. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Temos por hipótese que $\mu_1(K_+^0) > 1$, então podemos escolher um $\epsilon > 0$ tal que $\mu_1(K_+^0 + \epsilon) > 1$. Usando o Quociente de Rayleigh para o primeiro autovalor $\mu_1(K_+^0 + \epsilon)$, chegaremos na seguinte desigualdade (que provaremos após a demonstração deste caso):

$$(1-\delta_1)\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (K_+^0 + \epsilon)(u^+)^2 dx. \qquad (3.13)$$

Note que usando (3.13) em (3.12) obtemos:

$$\begin{aligned}
\phi(u) &\geq (1-\delta_1)\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \int_\Omega b_+ dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (K_-^0 + \epsilon)|u^-|^2 dx - \int_\Omega b_- dx.
\end{aligned}$$

Também temos por hipótese que $K_{-}^{0} \leq 0$, escolhendo $\epsilon = \frac{\lambda_1}{2}$, segue que:

$$\phi(u) \geq (1-\delta_1)\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \int_\Omega b_+ dx + \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx - \int_\Omega b_- dx,$$

onde $\delta_1 = \frac{1}{\mu_1(K_+^0+\epsilon)} < 1$. Tomando $c_0 = \min\{\frac{(1-\delta_1)}{2}, \frac{1}{4}\} > 0$, temos que:

$$\phi(u) \geq c_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega b_+ dx - \int_\Omega b_- dx.$$

Como as funçoes b_+ e $b_- \in L^1(\Omega)$, temos que suas integrais são finitas, logo podemos escrever a desigualdade acima como:

$$\phi(u) \geq c_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - c_1,$$

portanto ϕ é coercivo, pois quando $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty$, temos que $\phi(u) \to +\infty$.

Observação 3.2.2. (Prova da desigualdade (3.13)):

$$(1-\delta_1)\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (K_+^0+\epsilon)(u^+)^2 dx$$

Demonstração:
Utilizando o quociente de Rayleigh para o autovalor $\mu_1(K_+^0+\epsilon)$, temos:

$$\mu_1(K_+^0+\epsilon) \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx}{\int_\Omega (K_+^0+\epsilon)(u^+)^2 dx},$$

então segue:

$$\int_\Omega (K_+^0+\epsilon)(u^+)^2 dx \leq \frac{1}{\mu_1(K_+^0+\epsilon)}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx.$$

Escrevendo $\delta_1 = \frac{1}{\mu_1(K_+^0+\epsilon)} < 1$, somando e subtraindo 1 a δ_1, teremos:

$$\begin{aligned}\int_\Omega (K_+^0+\epsilon)(u^+)^2 dx &\leq ((\delta_1-1)+1)\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - (1-\delta_1)\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$(1-\delta_1)\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \int_\Omega (K_+^0 + \epsilon)(u^+)^2 dx,$$

multiplicando por $\frac{1}{2}$, chegamos na desigualdade :

$$\frac{1}{2}(1-\delta_1)\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (K_+^0 + \epsilon)(u^+)^2 dx,$$

como queríamos mostrar.

Caso 3: Quando acontece $K_+^0 \leq 0$ e $\mu_1(K_-^0) > 1$.

A prova de que com essas hipóteses o funcional ϕ é coercivo é análogo ao caso 2, logo omitiremos essa demostração e provaremos o próximo caso.

Caso 4: Quando acontece $\mu_1(K_+^0) > 1$ e $\mu_1(K_-^0) > 1$.

Utilizando a definição de ϕ, temos:

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx,$$

separando em $u > 0$ e $u < 0$, segue:

$$\phi(u) \;=\; \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \int_\Omega F(x,u^+)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx - \int_\Omega F(x,u^-)dx.$$

Usando a desigualdade (3.6)

$$\begin{aligned}\phi(u) \;\geq\; & \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (K_+^0 + \epsilon)(u^+)^2 dx - \int_\Omega b_+ + \\ + \; & \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (K_-^0 + \epsilon)(u^-)^2 dx - \int_\Omega b_- dx. \quad (3.14)\end{aligned}$$

Da mesma forma que no caso 2, iremos usar o Quociente de Rayleigh, agora para os autovalores $\mu_1(K_+^0 + \epsilon)$ e $\mu_1(K_-^0 + \epsilon)$ e chegaremos nas desigualdades

$$(1-\delta_1)\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \int_\Omega (K_+^0 + \epsilon)(u^+)^2 dx$$

e

$$(1-\delta_2)\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx - \int_\Omega (K_-^0+\epsilon)(u^-)^2 dx.$$

Usando em (3.14) ficamos com:

$$\phi(u) \geq (1-\delta_1)\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \int_\Omega b_+ dx + (1-\delta_2)\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx - \int_\Omega b_- dx,$$

tomando $\delta = \min\{(1-\delta_1)\frac{1}{2},(1-\delta_2)\frac{1}{2}\} > 0$, temos:

$$\delta[\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx] - [\int_\Omega b_+ dx + \int_\Omega b_- dx].$$

Somando as integrais, usando o fato das funções b_+ e $b_- \in L^1(\Omega)$ e tomando $c_0 = \delta$ teremos a seguinte desigualdade:

$$\phi(u) \geq c_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 - c_1.$$

Logo, o funcional ϕ será coercivo, pois em todos os casos conseguimos mostrar que quando $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty$, temos que $\phi(u) \to +\infty$, provando assim o teorema.

□

Nem sempre temos que o funcional ϕ (1.3) é coercivo, como é ilustrado no seguinte resultado:

Observação 3.2.3. Suponha que existam duas funções L_+^0 e $L_-^0 \in L^r(\Omega)$, com $r > \frac{n}{2}$ e $L_\pm \geq L_\pm^0$, que são positivas em subconjuntos de medida positiva em Ω e de tal modo que pelo menos um dos autovalores, $\mu_1(L_+^0) < 1$ ou $\mu_1(L_-^0) < 1$. Então ϕ não é coercivo.

Demonstração. Queremos mostrar que ϕ não é coercivo, vamos assumir $\mu_1(L_+^0) < 1$. O caso $\mu_1(L_-^0) < 1$ é análogo.

Seja $\psi_1 > 0$ a autofunção associada a $\mu_1(L_+^0)$. Note que:

$$1 - \mu_1(L_+^0) > 0,$$

multiplicando a desigualdade por $\int_\Omega L_+^0 \psi_1^2 dx$, temos:

$$(1-\mu_1(L_+^0))\int_\Omega L_+^0 \psi_1^2 dx > 0,$$

dividindo por $\int_\Omega \psi_1^2 dx$, então:

$$\frac{(1-\mu_1(L_+^0))\int_\Omega L_+^0 \psi_1^2 dx}{\int_\Omega \psi_1^2 dx} > 0. \tag{3.15}$$

Podemos escolher $\epsilon > 0$, tal que:

$$\frac{(1-\mu_1(L_+^0))\int_\Omega L_+^0 \psi_1^2 dx}{\int_\Omega \psi_1^2 dx} > \epsilon.$$

Agora, mostraremos que existe uma função $c(x) \in L^1(\Omega)$, tal que:

$$F(x,s) \geq \frac{1}{2}(L_+^0 - \epsilon)s^2 - c(x), s \geq 0. \tag{3.16}$$

Pela definição $L_+ = \liminf_{s\to+\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2}$, como $L_+ \geq L_+^0$, segue que $\liminf_{s\to+\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} \geq L_+^0$, usando a definição de lim inf, dado ϵ existe M tal que para $s \geq M$, vale:

$$\frac{2F(x,s)}{s^2} \geq L_+^0 - \epsilon.$$

Multiplicando a desigualdade por $\frac{s^2}{2}$, temos:

$$F(x,s) \geq \frac{1}{2}(L_+^0 - \epsilon)s^2. \tag{3.17}$$

Dado $x \in \Omega$ e $|s| \leq |M|$, vale:

$$-F(x,s) \leq |F(x,s)| = |\int_0^s f(x,\xi)d\xi| \leq \int_0^s |f(x,\xi)|d\xi,$$

utilizando a condição de crescimento (1.2), segue que:

$$\int_0^s |f(x,\xi)|d\xi \leq c\int_0^s |\xi|^{p-1} + b(x)d\xi = c\frac{|s|^p}{p} + b(x)s \leq c\frac{|M|^p}{p} + b(x)M.$$

Tomando, $c(x) = c\frac{|M|^p}{p} + b(x)M \in L^1(\Omega)$ e multiplicando por (-1) a desigualdade acima, temos para $|s| \leq M$:

$$F(x,s) \geq -c(x). \tag{3.18}$$

Juntando (3.17) e (3.18):

$$F(x,s) \geq \frac{1}{2}(L_+^0 - \epsilon)s^2 - c(x), s > 0.$$

Agora utilizaremos a desigualdade acima, para estimar o funcional ϕ. Para $r > 0$ e usando a definição de ϕ, temos:

$$\phi(r\psi_1) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla r\psi_1|^2 dx - F(x, r\psi_1)dx,$$

usando a estimativa acima para $F(x,s)$, ficamos :

$$\phi(r\psi_1) \leq \frac{r^2}{2}\int_\Omega |\nabla\psi_1|^2 dx - \frac{r^2}{2}\int_\Omega (L_+^0 - \epsilon)\psi_1^2 dx - \int_\Omega c(x)dx. \tag{3.19}$$

Como $\mu_1(L_+^0)$ é o primeiro autovalor, podemos utilizar seu quociente de Rayleigh e a desigualdade (3.19), obtendo:

$$\phi(r\psi_1) \leq \frac{r^2}{2}\mu_1(L_+^0)\int_\Omega L_+^0\psi_1^2 dx - \frac{r^2}{2}\int_\Omega (L_+^0 - \epsilon)\psi_1^2 dx - \int_\Omega c(x)dx,$$

separando a integral que envolve ϵ,

$$\phi(r\psi_1) \leq \frac{r^2}{2}\int_\Omega |\nabla\psi_1|^2 dx - \frac{r^2}{2}\int_\Omega L_+^0\psi_1^2 dx + \frac{r^2}{2}\int_\Omega \epsilon\psi_1^2 dx + \int_\Omega c(x)dx,$$

logo

$$\phi(r\psi_1) \leq \frac{r^2}{2}[(\mu_1(L_+^0) - 1)\int_\Omega L_+^0\psi_1^2 + \epsilon\int_\Omega \psi_1^2]dx - \int_\Omega c(x)dx.$$

Como a integral de $c(x)$ é finita e $(\mu_1(L_+^0) - 1) < 0$, pois $\mu_1(L_+^0) < 1$, temos que

$$\phi(r\psi_1) \to -\infty, r \to +\infty,$$

logo ϕ não é coercivo.

□

Para demonstrarmos os próximos teoremas de coercividade, será preciso definir alguns conceitos importantes. Trabalharemos com os problemas ressonantes, citados na introdução, logo sabemos que K_- e K_+, são autovalores do problema de autovalor do laplaciano. Este fato será usado como hipótese nos próximos teoremas.

Começamos considerando os seguintes casos ressonantes:

(A) $K_+ \in L^r(\Omega), r > \frac{n}{2}$, tal que $\mu_1(K_+) = 1$ e $\mu_1(K_-^0) > 1$,

(B) $K_- \in L^r(\Omega), r > \frac{n}{2}$, tal que $\mu_1(K_-) = 1$ e $\mu_1(K_+^0) > 1$,

(C) $K_\pm \in L^r(\Omega), r > \frac{n}{2}$, tal que $\mu_1(K_+) = \mu_1(K_-) = 1$.

Considere também as funções : $G_+ : \Omega \times R^+ \to R$ e $G_- : \Omega \times R^- \to R$, definidas por :

$$F(x,s) = \frac{1}{2}K_\pm(x)s^2 + G_\pm(x,s), s > 0(s < 0) \tag{3.20}$$

que são perturbarções da parte quadrática envolvendo $K_\pm$. E por último defina os limites:

$$\Gamma_+(x) := \limsup_{s\to+\infty} \frac{G_+(x,s)}{s}, \gamma_+(x) := \liminf_{s\to+\infty} \frac{G_+(x,s)}{s} \tag{3.21}$$

e

$$\Gamma_-(x) := \limsup_{s\to-\infty} \frac{G_-(x,s)}{s}, \gamma_-(x) := \liminf_{s\to-\infty} \frac{G_-(x,s)}{s}. \tag{3.22}$$

Agora podemos apresentar o primeiro resultado de coercividade:

Teorema 3.2.4. *Assuma o caso (A), ou seja, $K_+ \in L^r(\Omega), r > \frac{n}{2}$, tal que $\mu_1(K_+) = 1$ e $\mu_1(K_-^0) > 1$. Suponha que a função $\Gamma_+ \in L^r(\Omega), r > \frac{n}{2}$ e que*

$$\int \Gamma_+(x)\psi_+(x)dx < 0,$$

onde $\psi_+(x) > 0$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta\psi_+ = K_+\psi_+ \ em\, \Omega \\ \psi_+ = 0 \ na\, \partial\Omega, \end{cases}$$

Então o funcional ϕ é coercivo.

Demonstração. Esta prova será demonstrada por contradição. Vamos provar que se ϕ não é coercivo, teremos que :

$$\int \Gamma_+(x)\psi_+(x) \geq 0.$$

Antes mostraremos que podemos escolher um $\epsilon > 0$ e uma função c(x) $\in L^1(\Omega)$ (dependendo de ϵ), para o qual vale a seguinte desigualdade:

$$G_+(x,s) \leq (\Gamma_+(x)+\epsilon)s + c(x), \text{ para } s \geq 0, \tag{3.23}$$

que será usada para estimar o funcional ϕ.

Pela definição (3.21), temos que:

$$\Gamma_+(x) \geq \gamma_+(x).$$

Pela definição de $\liminf$, $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0$ tal que $s \geq M$ implica:

$$\gamma_+(x) \geq \frac{G_+(x,s)}{s} - \epsilon,$$

logo

$$\Gamma_+(x) \geq \gamma_+(x) \geq \frac{G_+(x,s)}{s} - \epsilon,$$

somando ϵ e multiplicando por s, a desigualdade fica:

$$(\Gamma_+(x)+\epsilon)s \geq G_+(x,s). \tag{3.24}$$

Dado um $x \in \Omega$ e $|s| \leq M$, usando (3.20), temos :

$$G_+(x,s) = F(x,s) - \frac{1}{2}K_+s^2,$$

substituindo a desigualdade (3.6) de $F(x,s)$, temos:

$$G_+(x,s) \leq \frac{1}{2}(K_+^0+\epsilon)s^2 - b_+ - \frac{1}{2}K_+(x)s^2.$$

Colocando em evidência s^2, temos para $|s| \leq M$,

$$G_+(x,s) \leq \frac{M^2}{2}[(K_+^0+\epsilon) - K_+(x)] - b_+,$$

onde $(K_+^0+\epsilon) - K_+ \geq 0$. Tomando $c(x) = \frac{M^2}{2}[(K_+^0+\epsilon) - K_+(x)] - b_+$, segue que:

$$G_+(x,s) \leq c(x). \tag{3.25}$$

Então juntando (3.24) e (3.25), teremos a desigualdade que queríamos:

$$G_+(x,s) \leq (\Gamma_+(x)+\epsilon)s + c(x), s \geq 0.$$

O próximo passo será estimar o funcional ϕ, pela definição (1.3) :

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx,$$

separando na parte em que $u > 0$ e $u < 0$, temos:

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \int_\Omega F(x,u^+)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx - \int_\Omega F(x,u^-)dx.$$

Para o caso em que $u > 0$, usaremos a estimava (3.20) e para o caso $u < 0$, usaremos a estimativa (3.6), então teremos:

$$\begin{aligned} \phi(u) \ &\geq \ \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+(u^+)^2 dx - \int_\Omega G_+(x,u^+)dx \\ &+ \ \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (K_-^0+\epsilon)(u^-)^2 dx - \int_\Omega b_- dx. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Suponhamos que o funcional ϕ não é coercivo, ou seja, existe uma sequência (u_n) em $H_0^1(\Omega)$ tal que $|\phi(u_n)| \leq \beta$ e $\|u_n\| \to \infty$, substituindo (u_n) em (3.26) e dividindo por $\|u_n\|^2$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(u_n)}{\|u_n\|^2} \geq & \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{|\nabla u_n^+|^2}{\|u_n\|^2}dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+(x)\frac{|u_n^+|^2}{\|u_n\|^2}dx - \int_\Omega (\Gamma_+(x)+\epsilon)\frac{|u_n^+|}{\|u_n\|^2}dx \\ - & \int_\Omega \frac{c}{\|u_n\|^2}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{|\nabla u_n^-|^2}{\|u_n\|^2}dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{(K_-^0+\epsilon)(u_n^-)^2}{\|u_n\|^2}dx - \int_\Omega \frac{b_-}{\|u_n\|^2}dx. \end{aligned}$$

Escrevendo $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$, onde $v_n^+ = \frac{u_n^+}{\|u_n\|}$ e $v_n^- = \frac{u_n^-}{\|u_n\|}$, a desigualdade anterior fica:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(u_n)}{\|u_n\|^2} \geq & \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+(x)|v_n^+|^2 dx - \int_\Omega (\Gamma_+(x)+\epsilon)\frac{|v_n^+|}{\|u_n\|}dx \\ & - \int_\Omega \frac{c}{\|u_n\|^2}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^-|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (K_-^0+\epsilon)|v_n^-|^2 dx \\ & - \int_\Omega \frac{b_-}{\|u_n\|^2}dx. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Como v_n é limitada em $H_0^1(\Omega)$, pelo teorema (2.2.7) temos que v_n possui uma subsequência que converge fracamente para $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Pela imersão

compacta de Sobolev (2.2.13), temos que $v_n \to v_0$ em $L^2(\Omega)$. E ainda, $v_n \to v_0$ q.t.p. em $H_0^1(\Omega)$.
Por hipótese $\mu_1(K_-^0) > 1$, então podemos escolher um ϵ tal que $\mu_1(K_-^0+\epsilon) > 1$. Afirmamos que, usando o quociente de Rayleigh desse primeiro autovalor temos que a parte que envolve v_n^- será limitada inferiomente por zero. De fato:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^-|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (K_-^0+\epsilon)|v_n^-|^2 dx$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^-|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \mu_1(K_-^0+\epsilon)(K_-^0+\epsilon)|v_n^-|^2 dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^-|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^-|^2 dx = 0. \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$, $\|u_n\| \to \infty$, então:

(i) :

$$\int_\Omega \frac{c}{\|u_n\|^2}, \int_\Omega \frac{b_-}{\|u_n\|^2} \to 0$$

(ii) :

$$\int_\Omega (\Gamma_+ + \epsilon)\frac{v_n^+}{\|u_n\|} \to 0$$

(iii) :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega K_+(x)|v_n^+|^2 dx \to \frac{1}{2}\int_\Omega K_+(x)|v_0^+|^2 dx,$$

pelo Teorema da Convergência Dominada (2.2.2).

(iv) : Como $v_n^+ \to v_0^+$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$ e o funcional $w \longmapsto \int_\Omega |\nabla w|^2 dx$ é fracamente semicontínuo inferiormente, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\inf \frac{1}{2}\int_\Omega |v_n^+|^2 = \lim_{n\to\infty}\inf \frac{1}{2}\|\nabla v_n^+\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{2}\|\nabla v_0^+\|_{L_2^2} = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_0^+|^2$$

Aplicando (i), (ii), (iii), (iv) e (3.27) na sesigualdade (3.2.8), ficamos com

$$0 \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_0^+|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+|v_0^+|^2. \qquad (3.29)$$

Note que v_0^+ é solução de $-\Delta\psi_+ = K_+\psi_+$ na $\Omega, \psi_+ = 0$ na $\partial\Omega$ e portanto, $v_0^- = 0$. Para ver que v_0^+ é solução, basta mostrar que:

$$0 \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_0^+|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+|v_0^+|^2. \tag{3.30}$$

De fato:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_0^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+|v_0^+|^2 dx &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_0^+|^2 dx - \frac{\mu_1(K_+)}{2}\int_\Omega K_+|v_0^+|^2 dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_0^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_0^+|^2 dx = 0.
\end{aligned}$$

Por (3.29) e (3.30), temos que :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_0^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+|v_0^+|^2 dx = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_0^+|^2 dx = \frac{1}{2}\int_\Omega K_+|v_0^+|^2 dx$$

e pelo Teorema da Divergência (2.2.6):

$$\frac{1}{2}\int_\Omega -v_0^+\Delta|v_0^+|^2 dx = \int_\Omega \nabla v_0^+\nabla v_0^+ dx,$$

do que decorre que $-\Delta v_0 = K_+ v_0$ no sentido fraco.
Voltando a desigualdade (3.27), mas dessa vez juntando as integrais que envolvem o ∇v_n :

$$\begin{aligned}
\frac{\phi(u_n)}{\|u_n\|^2} &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+(x)|v_n^+|^2 dx - \int_\Omega (\Gamma_+(x)+\epsilon)\frac{|v_n^+|}{\|u_n\|^2}dx \\
&- \int_\Omega \frac{c}{\|u_n\|^2}dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (K_-^0+\epsilon)|v_n^-|^2 dx - \int_\Omega \frac{b_-}{\|u_n\|^2}dx.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Observe que $\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx = 1$, pois

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 = \int_\Omega |\nabla \frac{u_n}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}}|^2 dx = \frac{1}{\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx = \frac{1}{\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}}\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} = 1,$$

então quando $\|v_n\| \to \infty, n \to \infty$ e $\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx = 1$, a desigualdade (3.31), fica:

$$0 \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+|v_0^+|^2 dx,$$

segue que $v_0^+ \neq 0$ e $v_0^+ > 0$, conseguentemente, $v_0 = v_0^+ - v_0^- = v_0^+ > 0$ em Ω.
Temos por hipótese que $\mu_1(K_+) = 1$, usando seu quociente de Rayleigh na desigualdade (3.31), temos:

$$\frac{\phi(u_n)}{\|u_n\|^2} \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^+|^2 dx - \int_\Omega (\Gamma_+(x)+\epsilon)\frac{|v_n^+|}{\|u_n\|}dx - \int_\Omega \frac{c}{\|u_n\|^2}dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega (K_-^0+\epsilon)|v_n^-|^2 dx - \int_\Omega \frac{b_-}{\|u_n\|^2}dx.$$

Como $\mu_1(K_-^0) > 1$, segue que $\mu_1(K_-^0+\epsilon) > 1$ para ϵ pequeno e com isso, usando o quociente de Rayleigh para $\mu_1(K_-^0+\epsilon)$ e também que,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^+|^2 dx = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^-|^2 dx,$$

temos:

$$\frac{\phi(u_n)}{\|u_n\|^2} \geq -\int_\Omega (\Gamma_+(x)+\epsilon)\frac{|v_n^+|}{\|u_n\|}dx - \int_\Omega \frac{c}{\|u_n\|^2}dx - \int_\Omega \frac{b_-}{\|u_n\|^2}dx.$$

Multiplicando por $\|u_n\|$ e fazendo $\|u_n\| \to \infty, n \to \infty$, ficamos com

$$0 \geq -\int_\Omega (\Gamma_+ + \epsilon)v_0 \, dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega (\Gamma_+ + \epsilon)v_0 \, dx \geq 0.$$

Quando $\epsilon \to 0$, temos que $\int_\Omega (\Gamma_+ v_0)dx \geq 0$, com $v_0 > 0$. Contradizendo, a hipótese que $\int_\Omega (\Gamma_+ v_0)dx < 0$. Logo, ϕ tem que ser coercivo.

$\square$

O próximo teorema é análogo ao anterior, sua prova será dada de forma mais direta, sem muitas justificativas.

Teorema 3.2.5. *Assuma o caso (B), ou seja, $K_- \in L^r(\Omega), r > \frac{n}{2}$, tal que $\mu_1(K_-) = 1$ e $\mu_1(K_+^0) > 1$. Suponha que a função $\gamma_- \in L^r(\Omega), r > \frac{n}{2}$ e que*

$$\int \gamma_-(x)\psi_-(x) > 0,$$

onde $\psi_-(x) > 0$ *é solução de*

$$\begin{cases} -\Delta\psi_- = K_-\psi_- \ em\, \Omega \\ \psi_- = 0 \ na\, \partial\Omega, \end{cases}$$

Então o funcional ϕ *é coercivo.*

Demonstração. Já sabemos de (1.3) que

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx,$$

separando na parte em que $u > 0$ e $u < 0$, temos:

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \int_\Omega F(x,u^+)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx - \int_\Omega F(x,u^-)dx,$$

para o caso em que $u > 0$, usaremos a estimava (3.6) e para o caso $u < 0$, usaremos a estimativa (3.20), então teremos:

$$\begin{aligned} \phi(u) \ &\geq \ \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (K_+^0 + \epsilon)(u^+)^2 dx - \int_\Omega b_+ dx \\ &+ \ \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_-(u^-)^2 dx - \int_\Omega G_-(x,u^-)dx. \end{aligned}$$

Usando a definição (3.22), conseguimos mostrar que podemos obter um ϵ, tal que:

$$G_-(x,s) \leq (\gamma_-(x) + \epsilon)s + c^{'}(x),$$

para $s \leq 0$ e $c^{'}(x) \in L^1(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned} \phi(u) \ &\geq \ \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (K_+^0 + \epsilon)(u^+)^2 dx - \int_\Omega b_+ dx + \\ &+ \ \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_-(u^-)^2 dx - \int_\Omega (\gamma_-(x) + \epsilon)(u^-)dx \\ &- \ \int_\Omega c^{'}(x)dx. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Suponhamos que ϕ não seja coercivo, então existe uma sequência $(u_n) \in H_0^1(\Omega)$ tal que $|\phi(u_n)| \leq \beta$ e $\|u_n\| \to \infty$. Definindo $v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|}$, (passando a uma subsequência se necessário), como v_n é limitada, pelos teoremas (2.2.7) e (2.2.13) converge fracamente em $H_0^1(\Omega)$, fortemente em $L^2(\Omega)$ e q.t.p. para uma função v_0 em $H_0^1(\Omega)$. Podemos então reescrever a desigualdade (3.32) como:

$$\begin{aligned} \frac{const}{\|u_n\|^2} &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (K_+^0 + \epsilon)|v_n^+|^2 dx - \int_\Omega \frac{b_+}{\|u_n\|^2} dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^-|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_-|v_n^-|^2 dx - \int_\Omega (\gamma_-(x) + \epsilon)\frac{v_n^-}{\|u_n\|} dx \\ &- \int_\Omega \frac{c'}{\|u_n\|^2} dx. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Por hipótese temos que $\mu_1(K_+^0) > 1$, logo podemos encontrar um ϵ tal que $\mu_1(K_+^0 + \epsilon) > 1$. Note que, usando o quociente de Rayleigh de $\mu_1(K_+^0 + \epsilon)$, temos que a parte que envolve v_n^+ é limitada por zero. Fazendo $\|u_n\| \to \infty$ em (3.33), temos:

$$0 \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_0^-| dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_-|v_0^-|^2 dx,$$

com isso, podemos mostrar que v_0^- é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta\psi_- = K_-(x)\psi_- \text{ em } \Omega \\ \psi_- = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

portanto, $v_0^+ = 0$.
Observe que $\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx = 1$, usando esse fato na desigualdade (3.33) e fazendo $\|u_n\| \to \infty$, temos:

$$0 \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_\Omega (K_+^0 + \epsilon)|v_0^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_-|v_0^-|^2 dx,$$

com isso, $v_0^- \neq 0$ e $v_0^- > 0$, consequentemente $v_0 = v_0^+ - v_0^- > 0$ em Ω. Por último, por hipótese temos que $\mu_1(K_-) = 1$, se usarmos o quociente de Rayleigh para esse primeiro autovalor e também para $\mu_1(K_- + \epsilon)$, temos:

$$\frac{\beta}{\|u_n\|^2} \geq -\int_\Omega (\gamma_- + \epsilon)\frac{v_n^-}{\|u_n\|} dx - \int_\Omega \frac{c'}{\|u_n\|^2} dx - \int_\Omega \frac{b_+}{\|u_n\|^2} dx$$

Multiplicando por $\|u_n\|$ e fazendo $\|u_n\| \to \infty$, temos que:

$$0 \geq \int_\Omega (\gamma_- + \epsilon) v_0 \, dx.$$

Como $\epsilon \to 0$, segue que $0 \geq \int_\Omega (\gamma_-) \, v_0 \, dx$, com $v_0 > 0$, o que contradiz nossa hipótese. Logo ϕ tem que ser coercivo. □

Segue abaixo, o último teorema usando casos ressonantes.

Teorema 3.2.6. *Assuma o caso (C), ou seja, $K_\pm \in L^r(\Omega), r > \frac{n}{2}$, tal que $\mu_1(K_+) = \mu_1(K_-) = 1$. Suponha que as funções Γ_+ e $\gamma_- \in L^r(\Omega), r > \frac{n}{2}$, são tais que:*

$$\int \Gamma_+(x)\psi_+(x) < 0,$$

onde $\psi_-(x) > 0$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta \psi_+ = K_+ \psi_+ \ \mathit{em} \ \Omega \\ \psi_+ = 0 \ \mathit{na} \ \partial\Omega, \end{cases}$$

e também,

$$\int \gamma_-(x)\psi_-(x) > 0,$$

onde $\psi_-(x) > 0$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta \psi_- = K_- \psi_- \ \mathit{em} \ \Omega \\ u = 0 \ \mathit{na} \ \partial\Omega, \end{cases}$$

Então o funcional ϕ é coercivo.

Demonstração. A prova deste teorema, também será feita por contradição, vamos supor que ϕ não é coercivo e chegar em uma contradição com as hipóteses de Γ_+ e γ_-. Já foi mostrado que usando as definições (3.21) e (3.22), temos as seguintes desigualdades:

$$G_+(x, s) \leq (\Gamma_+ + \epsilon)s + c(x), s > 0$$

e

$$G_-(x, s) \leq (\gamma_- + \epsilon)s + c^{'}(x), s < 0.$$

Usando a definição de ϕ e separando em $u > 0$ e $u < 0$, temos:

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \int_\Omega F(x,u^+)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx - \int_\Omega F(x,u^-)dx.$$

Como $F(x,s) = \frac{1}{2}K_\pm s^2 + G_\pm(x,s), s > 0 (s < 0)$, podemos reescrever a equação anterior como:

$$\begin{aligned} \phi(u) \ \geq\ & \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+(x)(u^+)^2 dx - \int_\Omega (\Gamma_+ + \epsilon)(u^+)dx - \int_\Omega c(x)dx \\ +\ & \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_-(x)(u^-)^2 dx - \int_\Omega (\gamma_- + \epsilon)(u^-)dx \\ -\ & \int_\Omega c^{'}(x)dx. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Supondo ϕ não coercivo, existe uma sequência $(u_n) \in H_0^1(\Omega)$, tal que $|\phi(u_n)| \leq \beta$ e $\|u_n\| \to \infty$. Definindo $v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|}$ (passando a uma subsequência se necessário), como v_n é limitada, temos pelos teoremas (2.2.7) e (2.2.13) que v_n converge fracamente em $H_0^1(\Omega)$, fortemente em $L^2(\Omega)$ e q.t.p. para uma função v_0 em $H_0^1(\Omega)$.
Dividindo a desigualdade (3.34) por $\|u_n\|^2$ e substituindo v_n, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\|u_n\|^2} \ \geq\ & \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+|v_n^+|^2 dx - \int_\Omega (\Gamma_+ + \epsilon)\frac{|v_n^+|}{\|u_n\|}dx \\ -\ & \int_\Omega \frac{c}{\|u_n\|^2}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^-|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K(x)|v_n^-|^2 dx \\ -\ & \int_\Omega (\gamma_- + \epsilon)\frac{v_n^-}{\|u_n\|}dx - \int_\Omega \frac{c^{'}}{\|u_n\|^2}dx. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Por hipótese, temos que $\mu_1(K_+) = 1$ e $\mu_1(K_-) = 1$, usando o quociente de Rayleigh, conseguimos mostrar que:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+|v_n^+|^2 \geq 0,$$

e

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^-|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_-|v_n^-|^2 \geq 0.$$

Fazendo, $\|u_n\| \to \infty$, em (3.35):

$$0 \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_0^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+|v_0^+|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_0^-|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_-|v_0^-|^2 dx,$$

somando as integrais que envolve os gradientes, temos:

$$0 \geq \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega} K_+|v_0^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega} K_-|v_0^-|^2 dx.$$

Com isso, vemos que v_0 é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta v_0 = K_+ v_0^+ - K_- v_0^- \text{ em } \Omega \\ v_0 = 0 \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Juntando as integrais que envolvem os gradientes na desigualdade (3.35), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\|u_n\|^2} \geq \; & \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega} K_+|v_n^+|^2 dx - \int_{\Omega} (\Gamma_+ + \epsilon)\frac{|v_n^+|}{\|u_n\|} dx - \int_{\Omega} \frac{c}{\|u_n\|^2} dx \\ - \; & \frac{1}{2}\int_{\Omega} K(x)|v_n^-|^2 dx - \int_{\Omega} (\gamma_- + \epsilon)\frac{v_n^-}{\|u_n\|} dx - \int_{\Omega} \frac{c'}{\|u_n\|^2} dx. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Usando que $\int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 dx = 1$ e fazendo $\|u_n\| \to \infty$, temos que:

$$0 \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_{\Omega} K_+|v_0^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega} K_-|v_0^-|^2 dx,$$

com isso $v_0 = v_0^+ - v_0^- \neq 0$ e ainda, $v_0 > 0$ em Ω. Multiplicando a desigualdade (3.36) por $\|u_n\|$ e usando o quociente de Rayleigh para os autovalores $\mu_1(K_+)$ e $\mu_1(K_-)$, temos :

$$\frac{\beta}{\|u_n\|} \geq -\int_{\Omega} (\Gamma_+ + \epsilon) v_n^+ dx - \int_{\Omega} \frac{c}{\|u_n\|} dx - \int_{\Omega} (\gamma_- + \epsilon) v_n^- dx - \int_{\Omega} \frac{c'}{\|u_n\|} dx.$$

Fazendo $\|u_n\| \to \infty$ e $\epsilon \to 0$, temos que:

$$0 \geq -\int_{\Omega} \Gamma_+ v_0 \, dx - \int_{\Omega} \gamma_- v_0 dx,$$

o que não pode ocorrer, pois se acontecesse iria contradizer a hipótese sobre Γ_+e γ_-, logo ϕ é coercivo.

$\square$

Neste capítulo, mostramos que o funcional ϕ é fracamente semicontínuo inferiomente e coercivo, logo é possível aplicar o Teorema 3.0.16 e garantir o seguinte resultado:

Teorema 3.2.7. *Considere o problema (1.1):*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde f satisfaz a condição de crescimento (1.2) e ser Carathéodory. Assuma as hipóteses do Teorema 3.2.4. Então o problema possui solução fraca.

Observação 3.2.8. Note que, o resultado acima, vale também substituindo 3.2.4 pelos Teoremas 3.2.1, 3.2.5 e 3.2.6.

Capítulo 4

Ponto de Sela

No presente capítulo, também temos como objetivo mostrar que o problema (1.1) tem solução fraca. Neste caso, garantiremos que o funcional ϕ definido em (1.3) tem ponto crítico do tipo sela, utilizando o seguinte resultado:

Teorema 4.0.9. ***(Teorema do Ponto de Sela de Rabinowitz):*** *Seja X um espaço de Banach, onde $X = W \oplus Z$ é uma soma direta de um subespaço fechado W com Z e $dimW < \infty$. Dado $\rho > 0$, considere $Q = \{u \in W : \|u\| \leq \rho\}$. Para $\phi : X \to \mathbb{R} \in C^1$, defina:*

$$c := \inf_{\gamma \in \tau} \max_{u \in Q} \phi(\gamma(u)),$$

onde $\tau = \{\gamma \in C(Q, X); \gamma(u) = u \text{ em } \partial Q\}$. Se

(i) $\max_{\partial Q} \phi < b = \inf_Z \phi$,

(ii) ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale,

então $c \geq b$ é um valor crítico de ϕ.

Nas próximas seções iremos verificar que o funcional ϕ (1.3), satisfaz as hipóteses do teorema anterior. Na seção 4.1, mostraremos que $\phi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Na seção 4.2, demonstraremos resultados que irão validar as hipóteses (i) e (ii) do teorema anterior. E por último, na seção 4.3 mostraremos como aplicar o teorema 4.0.9.

4.1 Diferenciabilidade do funcional ϕ

Vamos provar que ϕ é diferenciável. Sabemos por (1.3) que

$$\phi(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x, u) dx.$$

Denotaremos,

$$\phi_1(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \frac{\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{2} \ \text{ e } \ \phi_2(u) = \int_\Omega F(x,u)dx.$$

A prova será dividida em duas etapas, primeiro mostraremos que $\phi_1 \in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$ e depois o mesmo para ϕ_2.

Afirmação 1: ϕ_1 é diferenciável.

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$, então $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_1(u)}{\partial v} &= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\|u+tv\|^2 - \|u\|^2}{t} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0} 2\langle u,v\rangle + t\|v\|^2 \\
&= \frac{1}{2}2\langle u,v\rangle = \langle u,v\rangle.
\end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que de fato :

$$\phi_1^{'}(u) = \langle u, .\rangle,$$

ou seja, que nossa candidata é realmente a derivada de ϕ_1,

$$\lim_{\|v\|\to 0}\frac{\frac{1}{2}\|u+v\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2 - \langle u,v\rangle}{\|v\|} = \lim_{\|v\|\to 0}\frac{\|v\|^2}{2\|v\|} = \lim_{\|v\|\to 0}\frac{\|v\|}{2} = 0,$$

portanto ϕ_1 é derivável em $H_0^1(\Omega)$.

Para mostrar a continuidade de ϕ_1', provaremos que se $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$, então:

$$\phi_1^{'}(u_n) \to \phi_1^{'}(u) \text{ em } H^{-1}(\Omega) \text{ ou seja, } \|\phi_1^{'}(u_n) - \phi_1^{'}(u)\|_{H^{-1}(\Omega)}; \to 0, n \to +\infty.$$

Considere uma sequência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$,tal que $u_n \to u$ converge fortemente em $H_0^1(\Omega)$. Dados, $\epsilon > 0$ e $v \in H_0^1(\Omega)$; $\|v\| \leq 1$, temos para n suficientemente grande:

$$|(\phi_1^{'}(u_n) - \phi_1^{'}(u))v| = |\langle u_n - u, v\rangle| \leq \|u_n - u\|\|v\| \leq \epsilon,$$

o que implica:

$$\|\phi_1'(u_n) - \phi_1'(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{v\in H_0^1(\Omega), \|v\|\leq 1} |(\phi_1'(u_n) - \phi_1'(u))v| \leq \epsilon.$$

Logo,

$$\|\phi_1'(u_n) - \phi_1'(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \to 0, n \to +\infty,$$

então ϕ_1' é contínua e portanto $\phi_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmação 2 : $\phi_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.
Para a diferenciabilidade, considere $u \in H_0^1(\Omega)$. Defina r por

$$r(v) = \phi_2(u+v) - \phi_2(u) - \int_\Omega f(x,u)vdx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.1}$$

Resta mostrar

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{|r(v)|}{\|v\|} = 0,$$

ou seja, dado $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que se $\|v\| < \delta$ temos $|r(v)| \leq \epsilon\|v\|$.

Usando a definição de ϕ_2, temos que (4.1), fica :

$$r(v) = \left[\int_\Omega F(x,u+v)dx - \int_\Omega F(x,u)dx\right] - \int_\Omega f(x,u)vdx. \tag{4.2}$$

Considere uma função

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, g(t) = F(x, u+tv).$$

Note que, g é contínua e que $g'(t) = f(x, u+tv)v$.
Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned} \int_0^1 g'(t)\ dt &= g(1) - g(0) \\ \int_0^1 f(x,u+tv)v\ dt &= F(x,u+v) - F(x,u) \\ \int_\Omega \int_0^1 f(x,u+tv)v\ dt\ dx &= \int_\Omega F(x,u+v) - F(x,u)\ dx. \end{aligned}$$

Usando a última igualdade em (4.2), temos:

$$\begin{aligned}
r(v) &= \int_\Omega \left[\int_1^0 f(x,u+tv)dt\right]dx - \int_\Omega f(x,u)v\,dx \\
r(v) &= \int_\Omega \left[\int_1^0 \left(f(x,u+tv) - f(x,u)\right)vdt\right]dx \\
|r(v)| &\leq \int_\Omega \left[\int_1^0 |f(x,u+tv) - f(x,u)|\,|v|dt\right]dx.
\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Fubini (2.2.1), obtemos:

$$|r(v)| \leq \int_1^0 \left[\int_\Omega |f(x,u+tv) - f(x,u)|\,|v|dx\right]dt. \tag{4.3}$$

Seja $p = \frac{2n}{n-2} = 2^*$ e $p' = \frac{2n}{n+2}$, note que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Das imersões de Sobolev (2.2.13), temos que $v \in L^p(\Omega)$. E ainda, $f \in L^{p'}(\Omega)$ pois,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x,u)|^{p'}dx &\leq \int_0^1 \left[c|u|^{p-1} + b(x)\right]dx \\
&\leq \int_0^1 c^{p'}|u|^{(p-1)p'}dx + b(x)^{p'}dx \\
&= K_1\int_0^1 |u|^{(p-1)p'}dx + \int_0^1 b(x)^{p'}dx,
\end{aligned}$$

como por hipótese $b \in L^{p'}(\Omega)$, temos que sua integral é finita, logo:

$$\int_0^1 |f(x,u)|^{p'}dx \leq K_1\int_\Omega |u|^{(p-1)p'}dx + K_2. \tag{4.4}$$

Note que:

$$\begin{aligned}
1 &< p-1 < \frac{2n}{n-2} - 1 = \frac{n+2}{n-2} \\
1 < 1\frac{2n}{n+2} &< (p-1)p' < \frac{n+2}{n-2}\frac{2n}{n+2} = \frac{2n}{n-2} = 2^*, n \geq 3 \\
1 &< (p-1)p' < 2^*.
\end{aligned}$$

Pela imersão de Sobolev (2.2.13), temos $u \in L^{(p-1)p'}(\Omega)$, logo:

$$\int_0^1 |u|^{(p-1)p'}dx < +\infty.$$

Segue que:

$$\int_0^1 |f(x,u)|^{p'} dx < +\infty,$$

então $f \in L^{p'}(\Omega)$. Aplicando a desigualdade de Hölder (2.2.5) em (4.3):

$$|r(v)| \leq \int_0^1 \|f(x,u+tv) - f(x,u)\|_{L^{p'}(\Omega)} \|v\|_{L^p(\Omega)} dt.$$

Agora vamos provar que:

$$f(x,u+tv) \to f(x,u) \text{ em } L^{\frac{p}{(p-1)}}(\Omega), \text{ uniformemente em t.}$$

Uma forma equivalente seria,

$$f(x,u+tv_n) \to f(x,u) \text{ em } L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega), \text{ uniformamente em t, onde}$$

$$v_n \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Considere $v_n \in H_0^1(\Omega)$, onde $v_n \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Da imersão de Sobolev (2.2.13), $v_n \to 0$ em $L^p(\Omega)$, a menos de uma subsequência, pelo teorema (2.2.4) temos

$$|v_n(x)| \leq g(x), \text{ onde } g \in L^p(\Omega).$$

E ainda,

$$(u + tv_n) \to u \text{ em } L^p(\Omega).$$

Assim, a menos de uma subsequência temos:

$$(u + tv_n)(x) \to u(x) \ q.t.p \text{ em } \Omega.$$

Segue que

$$|(u+tv_n)| \leq |u(x)| + t|v_n(x)| \leq |u(x)| + g(x), \text{ q.t.p em } \Omega \ , \ \forall t \in [0,1],$$

onde $|u| + g \in L^p(\Omega)$. Note que $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, logo:

$$f(x, u + tv_n(x)) \to f(x, u(x)) \text{ q.t.p em } \Omega$$

$$|f(x, u+tv_n(x)) - f(x,u(x))|^{\frac{p}{p-1}} \to 0, \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Usando a condição de crescimento, hipótese inicial que temos sobre f:

$$\begin{aligned}
|f(x,u+tv_n(x)) - f(x,u(x))|^{\frac{p}{p-1}} &\leq \left(c|u+tv_n|^{p-1} + b(x) + c|u|^{p-1} + b(x)\ \right)^{\frac{p}{p-1}} \\
&\leq D[c^{\frac{p}{p-1}}|u+tv_n|^p + b(x)^{p'} \\
&+ c^{\frac{p}{p-1}}|u|^{p-1} + b(x)^{p'}].
\end{aligned}$$

Como $t \in [0,1]$ e $b(x) \in L^{p'}(\Omega)$, temos:

$$\begin{aligned} |f(x,u+tv_n(x)) - f(x,u(x))|^{\frac{p}{p-1}} &\leq K_1|u|^p + (g(x))^p + K_2 + K_3|u|^p + K_4 \\ &\leq K|u|^p + (g(x))^p + K_5 \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada (2.2.2) :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |f(x,u+tv_n(x)) - f(x,u(x))|^{\frac{p}{p-1}}dx\right) = 0.$$

Então,

$$f(x,u+tv_n(x)) \to f(x,u(x)) \text{ em } L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega).$$

E por último, mostremos a convergência uniforme em $t \in [0,1]$. Suponha por contradição, que não temos a convergência. Logo

$$\exists \epsilon_0 > 0 \ e \ t_{n_j} \subset [0,1]; \ |f(x,u+t_{n_j}v_{n_j}(x)) - f(x,u(x))| \geq \epsilon_0, \ \forall n_j \in \mathbb{N}.$$

Analogamente as contas anteriores, chegamos que a menos de subsequência,

$$\text{dado } \epsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}; \ \|f(x,u+v_{n_j}(x)) - f(x,u(x))\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} < \epsilon, \ \forall n_j \geq n_0,$$

uma contradição com nossa suposição, logo :

$$f(x,u+tv_n) \to f(x,u) \text{ em } L^{p'}(\Omega),$$

uniformemente em t ,onde $v_n \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$.

Dado $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$; $\|f(x,u+tv_n) - f(x,u(x))\|_{L^{p'}(\Omega)} < \epsilon$, sempre que $\|v\|_{L^{p'}} < \delta$, $\forall t \in [0,1]$ temos então que (4.3) fica:

$$|r(v)| \leq \epsilon\|v\|_{L^p(\Omega)},$$

pela Imersão de Sobolev (2.2.13),

$$|r(v)| \leq C_\epsilon\|v\|, \text{ com } \|v\| < \delta.$$

Segue que ϕ_2 é diferenciável, com:

$$\phi'(u)v = \int_\Omega f(x,u)vdx, \forall v \ \in H_0^1(\Omega).$$

Agora, iremos mostrar que:

$$\|\phi_2'(u+v_n) - \phi_2'(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \to 0, \text{ sempre que}, v_n \to 0, n \to +\infty.$$

Considere uma sequência $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$, onde $v_n \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Da imersão de Sobolev (2.2.13), segue que $v_n \to 0$ em $L^p(\Omega)$, logo $(u + v_n) \to u$ em $L^p(\Omega)$.
A menos de uma subsequência,

$$(u + v_n)(x) \to u(x) \text{ q.t.p em } \Omega \text{ e}$$

$$|(u + v_n(x))| \leq g(x) \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ onde } g \in L^p(\Omega).$$

Como $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, temos:

$$f(x, u + v_n(x)) \to f(x, u(x)) \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Portanto,

$$|f(x, u + v_n(x) - f(x, u(x))|^{\frac{p}{p-1}} \to 0 \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Além disso, usando a condição de crescimento de f, $b(x) \in L^{p'}$ e que $|u + v_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em Ω, temos:

$$\begin{aligned}
|f(x, u + tv_n(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{p}{p-1}} &\leq \left(c|u + tv_n|^{p-1} + b(x) + c|u|^{p-1} + b(x)\ \right)^{\frac{p}{p-1}} \\
&\leq c^{\frac{p}{p-1}}|u + tv_n|^p + b(x)^{p'} + c^{\frac{p}{p-1}}|u|^{p-1} \\
&+ b(x)^{p'} \\
&\leq C_1|u|^p + |v_n|^p + C_2 + C_3|u|^p + C_4 \\
&\leq C|u|^p + g(x)^p + C' \in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada (2.2.2):

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |f(x, u + v_n(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{p}{p-1}} dx \right) = 0,$$

segue que $f(x, u + v_n(x)) \to f(x, u(x))$ em $L^{p'}(\Omega)$.
Logo, dado $\epsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f(x, u + v_n(x)) - f(x, u(x))\|_{L^{p'}(\Omega)} < \epsilon, \forall n \geq n_0$.
Sendo $h \in H_0^1(\Omega)$, temos:

$$|\phi_2'(u + v_n)h - \phi_2'(u)h| \leq \int_\Omega |f(x, u + v_n) - f(x, u)|\ |h| dx.$$

Como $|h| \in L^p(\Omega)$ e $|f(x, u + v_n) - f(x, u)| \in L^{p'}(\Omega)$, podemos aplicar a desigualdade de Hölder (2.2.5) e obter:

$$|\phi_2'(u + v_n)h - \phi_2'(u)h| \leq \|f(x, u + v_n) - f(x, u)\|_{L^{p'}(\Omega)} \|h\|_{L^p(\Omega)}.$$

Pela imersão de Sobolev (2.2.13),

$$|\phi_2'(u+v_n)h - \phi_2'(u)h| \leq K\|f(x,u+v_n - f(x,u))\|_{L^{p'}(\Omega)}\|h\| \leq \epsilon, \text{ se } \|h\| \leq 1.$$

Então, temos:

$$\|\phi_2'(u+v_n)-\phi_2'(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{h\in H_0^1(\Omega),\|h\|\leq 1} |\left(\phi_2'(u+v_n) - \phi_2'(u)\right)h| \leq \epsilon, \forall n \geq n_0,$$

logo

$$\|\phi_2'(u+v_n) - \phi_2'(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \to 0.$$

Portando, ϕ_2 é contínuo e com isso, $\phi_2 \in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$.
Como $\phi_1,\ \phi_2 \in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$, mostramos então que $\phi \in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$.

4.2 Condição de compacidade Palais - Smale

O próximo teorema irá nos garantir que ϕ é ilimitado inferiormente, note que com isso ϕ não será coercivo. Nossas hipóteses são:

(i) O caso (C), ou seja, $K_+ \in L^r(\Omega), r > \frac{n}{2}$ são tais que $\mu_1(K_+) = \mu_1(K_-) = 1$.

(ii) As funções Γ_- e $\gamma_+ \in L^r(\Omega), r > \frac{n}{2}$ satisfazem respectivamente:

$$\int_\Omega \Gamma_-(x)\psi_-(x)dx < 0 < \int_\Omega \gamma_+(x)\psi_+(x)dx, \tag{4.5}$$

com $\psi_+, \psi_- > 0$ soluções dos problemas

$$\begin{cases} -\Delta\psi_+ = K_+\psi_+ \text{ em } \Omega \\ \psi_+ = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta\psi_- = K_-\psi_- \text{ em } \Omega \\ \psi_- = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

Observação 4.2.1. Note que a hipótese (C), está tanto na parte em que falamos de coercividade, quanto agora que iremos tratar da não coercividade do funcional. Apesar de parecer estranho, basta notar as hipóteses que foram feitas sob $\gamma_+, \gamma_-, \Gamma_+, \Gamma_-$ em (4.1) e no Teorema 3.2.6.

Teorema 4.2.2. *Assuma (C) e (4.5). Então:*

(i) $\phi(r\psi_+) \to -\infty, \phi(-r\psi_-) \to -\infty,$ *quando* $r \to +\infty$.

(ii) Existe um hiperplano H *que separa estritamente* ψ_+ *e* $-\psi_-$*, onde o funcional* ϕ *é limitado inferiormente.*

Demonstração. Iniciaremos provando o item (i). Pela definição (1.3) do funcional ϕ, temos que para $r > 0$:

$$\phi(r\psi_+) \quad = \quad \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla r\psi_+|^2 dx - \int_\Omega F(x, r\psi_+)dx,$$

usando (3.20) na equação anterior:

$$\phi(r\psi_+) = \frac{r^2}{2}\int_\Omega |\nabla \psi_+|^2 dx - \frac{r^2}{2}\int_\Omega K_+|\psi_+|^2 dx - \int_\Omega G_+(x, r\psi_+)dx.$$

Por hipótese, $\mu_1(K_+) = 1$, então podemos escrever:

$$\phi(r\psi_+) = \frac{r^2}{2}\int_\Omega |\nabla \psi_+|^2 dx - \frac{r^2}{2}\mu(K_+)\int_\Omega K_+|\psi_+|^2 dx - \int_\Omega G_+(x, r\psi_+)dx \tag{4.6}$$

Usando o quociente de Rayleigh de $\mu_1(K_+)$, temos:

$$\phi(r\psi_+) = \frac{r^2}{2}\int_\Omega |\nabla \psi_+|^2 dx - \frac{r^2}{2}\int_\Omega |\nabla \psi_+|^2 dx - \int_\Omega G_+(x, r\psi_+)dx, \tag{4.7}$$

então

$$\phi(r\psi_+) = -\int_\Omega G_+(x, r\psi_+)dx,$$

multiplicando por $\frac{-1}{r}$, ficamos com:

$$-\frac{\phi(r\psi_+)}{r} = \int_\Omega \frac{G_+(x, r\psi_+)}{r}.$$

Usando a propriedade $-\limsup a = \liminf(-a)$ e o Lema de Fatou (2.2.3), temos:

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to+\infty} \frac{\phi(r\psi_+)}{r} = -\liminf_{r\to+\infty}\int_\Omega \frac{G_+(x, r\psi_+)}{r}dx \quad &\leq \quad -\int_\Omega \liminf_{r\to\infty+} \frac{G_+(x, r\psi_+)}{r}\frac{\psi_+}{\psi_+}dx \\ &= \quad -\int_\Omega \gamma_+\psi_+ dx < 0,\end{aligned}$$

segue que quando $r \to +\infty$, temos que $\phi(r\psi_+) \to -\infty$.

Analogamente provaremos a segunda parte de (i) que diz que $\phi(-r\psi_-) \to -\infty$, quando $r \to +\infty$, porém agora iremos somente explicitar as contas, pois os argumentos, são os mesmos do caso anterior. Para $r > 0$:

$$\begin{aligned}
\phi(-r\psi_-) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(-r\psi_-)|^2 dx - \int_\Omega F(x, -r\psi_-)dx \\
&= \frac{r^2}{2}\int_\Omega |\nabla\psi_-|^2 dx - \frac{r^2}{2}\int_\Omega K_-|\psi_-|^2 dx - \int_\Omega G_-(x, -r\psi_-)dx \\
&= \frac{r^2}{2}\int_\Omega |\nabla\psi_-|^2 dx - \frac{r^2}{2}\int_\Omega |\nabla\psi_-|^2 dx - \int_\Omega G_-(x, -r\psi_-)dx \\
&= -\int_\Omega G_-(x, -r\psi_-)dx,
\end{aligned}$$

multiplicando por $\frac{-1}{r}$ e usando $-\limsup a = \liminf -a$:

$$\begin{aligned}
\limsup_{r\to+\infty} \frac{\phi(-r\psi_-)}{r} &= -\liminf_{r\to+\infty}\int_\Omega -\frac{G_-(x, -r\psi_-)}{r} \\
&\leq -\int_\Omega \liminf_{r\to+\infty} -\frac{G_-(x, -r\psi_-)}{r}\frac{\psi_-}{\psi_-}dx \\
&= -\int_\Omega \gamma_-\psi_- dx < 0.
\end{aligned}$$

Quando $r \to +\infty$, temos que $\phi(-r\psi_-) \to -\infty$.

Agora provaremos o item (ii). Por hipótese, $\psi_+, \psi_- > 0$ são soluções de:

$$-\Delta\psi_+ = K_+\psi_+ \text{ em } \Omega$$

e

$$-\Delta\psi_- = K_-\psi_- \text{ em } \Omega.$$

Seja, $\psi = \frac{\psi_+ + \psi_-}{2}$. Note que ψ é a primeira autofunção associada ao problema de autovalor com peso:

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \mu(m)m\psi \text{ em } \Omega \\ \psi = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde

$$m = \frac{K_+\psi_+ + K_-\psi_-}{2(\psi_+ + \psi_-)} \text{ e } \mu(m) = 1.$$

Observe que:

(a) $m \in L^r, r > \frac{n}{2}$, pois as funções $K_\pm \in L^r$ e $m \leq max\{K_+, K_-\}$.

(b) $\mu_1(m) = 1$, pois como $\mu(m) = 1$ é autovalor e a autofunção associada a ele, $\frac{\psi_+ + \psi_-}{2}$, não muda de sinal, então $\mu(m)$ é o primeiro autovalor, isto é, $\mu_1(m) = \mu(m) = 1$.

Considere agora H subespaço de $H_0^1(\Omega)$ que é ortogonal a ψ na norma $L^2(\Omega)$, ou seja,

$$H = \{h \in H_0^1(\Omega); \int_\Omega h\psi dx = 0\}.$$

Como $\psi_+ > 0$ e $\psi_- > 0$, temos que $\psi = \frac{\psi_+ + \psi_-}{2} > 0$. Assim,

$$\int_\Omega \psi\psi_+ dx > 0 \text{ e } -\int_\Omega \psi\psi_- dx < 0.$$

Com isso temos que ψ_+ e $-\psi_-$ estão em lados opostos do hiperplano H. Resta mostrar que ϕ é limitado inferiormente. Pela definição (1.3) de ϕ e $F(x,s) = \frac{1}{2}K_\pm s^2 + G_\pm(x,s), s > 0 (s < 0)$, temos que:

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_\pm(u)^2 dx - \int_\Omega G_\pm(x,u)dx. \end{aligned}$$

Definindo :

$$\Psi(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+|u|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_-|u|^2 dx \tag{4.8}$$

como sendo a parte quadrática de ϕ, vamos provar que Ψ é limitado inferiormente, mais precisamente,

$$\Psi(u) \geq c\int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \forall u \in H, \tag{4.9}$$

onde c é constante positiva. Com isso, estaremos mostrando que ϕ também será limitado inferiormente, pois

$$\begin{aligned} -\int_\Omega G_+(x,u)dx &\geq -\int_\Omega (\Gamma_+ + \epsilon)u + c(x)dx > -\infty \qquad (4.10) \\ -\int_\Omega G_-(x,u)dx &\geq -\int_\Omega (\gamma_- + \epsilon)u + c'(x)dx > -\infty. \end{aligned}$$

Vamos supor por contradição que Ψ não satisfaça (4.9), então existe uma sequência $(u_n) \subseteq H$, com $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$, tal que :

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega K_+|u_n^+|^2 dx - \int_\Omega K_-|u_n^-|^2 dx \leq 0. \qquad (4.11)$$

Como (u_n) é limitada, pelo teorema (2.2.7) $u_n \to u_0 \in H_0^1(\Omega)$ fracamente, usando a Imersão de Sobolev (2.2.13), $u_n \to u_0$ em $L^2(\Omega)$ e ainda, converge q.t.p. em Ω. Como $u_n \to u_0$ em $L^2(\Omega)$ e H é um hiperplano, então $u_0 \in H$. Aplicando o limite, temos que a desigualdade (4.11) fica:

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \int_\Omega K_+|u_0^+|^2 dx - \int_\Omega K_-|u_0^-|^2 dx \leq 0. \qquad (4.12)$$

Lembremos que por hipótese temos o caso (C), então sabemos $\mu_1(K_+) = \mu_1(K_-) = 1$. Utilizando em (4.8), temos:

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\mu_1(K_+)}{2}\int_\Omega K_+|u^+|^2 dx - \frac{\mu_1(K_-)}{2}\int_\Omega K_-|u^-|^2 dx.$$

Aplicando o quociente de Rayleigh dos autovalores $\mu_1(K_+) = \mu_1(K_+)$ na equação anterior, temos que Ψ é limitado inferiormente por zero:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\mu_1(K_+)}{2}\int_\Omega K_+|u^+|^2 dx - \frac{\mu_1(K_-)}{2}\int_\Omega K_-|u^-|^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = 0. \qquad (4.13) \end{aligned}$$

De (4.12) e (4.13), temos que:

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \int_\Omega K_+|u_0^+|^2 dx - \int_\Omega K_-|u_0^-|^2 dx = 0. \qquad (4.14)$$

Como $\int_\Omega |\nabla u_n^2| dx = 1$, (4.11) fica:

$$\lim_{n\to\infty} 1 - \int_\Omega K_+|u_n^+|^2 dx - \int_\Omega K_-|u_n^-|^2 dx = 0,$$

o que implica que $u_0 \neq 0$.
Lembremos um resultado (2.2.8), que nos diz: se $u_n \to u_0$ fracamente em

$H_0^1(\Omega)$ e $\|u_n\| \to \|u\|$, então $u_n \to u_0$ fortemente em $H_0^1(\Omega)$. Note que, então $u_0 \in H$, o que implica u_0 muda de sinal em Ω. Logo de (4.14) e (4.13), u_0 é mínimo do funcional $\Psi \in H_0^1(\Omega)$, consequentemente satisfaz a equação:

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = K_+ u_0^+ - K_- u_0^- \text{ em } \Omega \\ u_0 = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

segue que,

$$\int_\Omega |\nabla u_0^+|^2 dx - \int_\Omega K_+ |u_0^+|^2 dx = 0.$$

Então, $u_0^+ \neq 0$, já que u_0 muda de sinal e é solução do problema:

$$\begin{cases} -\Delta u_0^+ = K_+ u_0^+ \text{ em } \Omega \\ u_0^+ = 0 \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Com isso, segundo o teorema (2.2.15) u_0^+ é um múltiplo positiva de ψ_+, pois são autofunções do mesmo autovalor, então $u_0 = u_0^+$. Temos que u_0 é sempre positiva, uma contradição, já que mostramos que u_0, muda de sinal.
Logo, Ψ satisfaz (4.9), provando o item (ii).

$\square$

No próximo teorema, vamos mostrar que de fato, o funcional ϕ satisfaz:

Condição de Palais-Smale: Dizemos que o funcional ϕ satisfaz a condição de Palais- Smale, se dada uma sequência $(u_n) \subseteq H_0^1(\Omega)$, tal que $\phi(u_n)$ é limitada e $\phi'(u_n) \to 0, n \to +\infty$, então (u_n) possui uma subsequência convergente em $H_0^1(\Omega)$.

Antes adicionaremos as seguintes hipóteses.

Defina g_+ e g_-, da seguinte maneira:

$$g_+(x,s) = f(x,s) - K_+(x)s, \ para \ s > 0,$$
$$g_-(x,s) = f(x,s) - K_-(x)s, \ para \ s < 0.$$

Vamos supor que existem $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ e $b \in L^1(\Omega)$, tais que:

$$|g_\pm(x,s)| \leq c|s|^\alpha + b(x). \tag{4.15}$$

Teorema 4.2.3. *Assuma (C), (4.5) e (4.15). Então o funcional satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência em $H_0^1(\Omega)$, tal que:

$$|\phi(u_n)| \leq K \text{ e } |\langle \phi'(u_n), w\rangle| \leq \epsilon_n \|w\|, \forall w \in H_0^1(\Omega), \epsilon_n \to 0.$$

Queremos mostrar que (u_n) possui uma subsequência convergente.

Afirmação: Se (u_n) é limitada, usando a condição de crescimento de f, temos que (u_n) tem uma subsequência que converge em $H_0^1(\Omega)$.

Suponhamos que $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \to \infty$. Seja $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. Como v_n é limitada, pelo teorema (2.2.7) passando a uma subsequência, temos que:

$$v_n \to v_0 \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega),$$

usando a imersão de Sobolev (2.2.13):

$$v_n \to v_0 \text{ fortemente em } L^2(\Omega)$$

e ainda,

$$v_n(x) \to v_0(x) \text{ q.t.p em } H_0^1(\Omega).$$

Faremos a prova por etapas:

Etapa 1: Como por hipótese, $\phi(u_n) \leq K$, então $v_n \to v_0$ fortemente em $H_0^1(\Omega)$ e v_0 ou é ψ_+ ou e $-\psi_-$.
Pela definição,

$$\phi(u_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega F(x, u_n)dx.$$

Usando (3.16), temos:

$$\begin{aligned}\phi(u_n) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+(u_n^+)^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_-(u_n^-)^2 dx - \int_\Omega G_+(x, u_n^+)dx \\ &- \int_\Omega G_-(x, u_n^-)dx.\end{aligned}$$

Dividindo por $\|u_n\|^2$, utilizando $\phi(u_n) \leq K$ e$\int_\Omega |\nabla v_n| dx = 1$, podemos escrever:

$$\frac{K}{\|u_n\|^2} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+(v_n^+)^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega k_-(v_n^-)^2 dx - \int_\Omega \frac{G_+(x, u_n^+)}{\|u_n\|^2}dx - \int_\Omega \frac{G_-(x, u_n^-)}{\|u_n\|^2}dx.$$

Fazendo $n \to \infty$, temos que $\|u_n\| \to \infty$ e:

$$0 \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+(v_0^+)^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_-(v_0^-)^2 dx,$$

com isso, $v_0 \neq 0$. Como

$$\int_\Omega |\nabla v_0|^2 dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx = 1,$$

$$0 \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_0|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+(v_0^+)^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_-(v_0^-)^2 dx.$$

Por outro lado, como $\mu(K_+) = \mu(K_-) = 1$, decorre

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_0|^2 dx &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_0^+|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_0^-|^2 dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega K_+(v_0^+)^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega K_-(v_0^-)^2 dx,
\end{aligned}$$

logo

$$\int_\Omega |\nabla v_0|^2 dx = 1.$$

Assim, $v_n \to v_0$ fortemente em $H_0^1(\Omega)$. Note que, v_0 é solução do problema:

$$\begin{cases} -\Delta v_0 = K_+ v_0^+ - K_- v_0^- \text{ em } \Omega \\ v_0 = 0 \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo mesmo argumento dado, no final do teorema anterior, podemos mostrar que $v_0 = \psi_+$ ou $v_0 = -\psi_-$, vamos assumir que $v_0 = \psi_+$.

Etapa 2: A parte negativa (u_n^-) da sequência (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Vamos supor por contradição que acontece $\|u_n^-\| \to \infty$. Escrevendo, $z_n = \frac{u_n^-}{\|u_n^-\|}$, passando a uma subsequência:

$$z_n \to z_0 \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega),$$

pela imersão de Sobolev (2.2.13),

$$z_n \to z_0 \text{ fortemente em } L^2(\Omega),$$

e ainda,

$$z_n(x) \to z_0(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Por hipótese, temos que:

$$|\phi(u_n)| \leq K \text{ e } |\langle \phi'(u_n), w\rangle| \leq \epsilon_n \|w\|,$$

tomando $w = u_n^-$, segue:

$$|\langle \phi'(u_n), u_n^-\rangle| \leq \epsilon_n \|u_n^-\|.$$

Usando que

$$\phi(u_n^-) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n^-|^2 dx - \int_\Omega F(x, u_n^-)dx \text{ e } F(x, u_n^-) = \int_0^{u_n^-} f(x,\xi)d\xi,$$

então:

$$\begin{aligned} |\langle \phi'(u_n^-), u_n^-\rangle| &= |\int_\Omega \nabla(u_n^-)\nabla(u_n^-)dx - \int_\Omega f(x, u_n^-)u_n^-| \\ &= |\int_\Omega |\nabla u_n^-|dx - \int_\Omega K_-|u_n^-|^2 dx - \int_\Omega g_-(x, -u_n^-)u_n^- dx| \leq \epsilon_n \|u_n^-\|. \end{aligned}$$

Segue de (4.15)

$$|\int_\Omega |\nabla u_n^-|^2 dx - \int_\Omega K_-|u_n^-|^2 dx| - \int_\Omega c|u_n^-|^{\alpha+1}dx + \int_\Omega b(x)u_n^- dx \leq \epsilon_n \|u_n^-\|$$

$$|\int_\Omega |\nabla u_n^-|^2 dx - \int_\Omega K_-|u_n^-|^2 dx| \leq \int_\Omega c|u_n^-|^{\alpha+1}dx + \int_\Omega b(x)|u_n^-|dx + \epsilon_n \|u_n^-\|. \tag{4.16}$$

Como $b \,\epsilon\, L^{p'}(\Omega)$, com $p' = \frac{2N}{N+2}$, temos que seu conjugado é dado por $q = \frac{2N}{N-2} = 2^*$, logo $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} = 1$ e com isso, podemos aplicar a desigualdade de Hölder (2.2.5), obtendo:

$$\int_\Omega b(x)|u_n^-|dx \leq \|b\|_{L^{p'}} \|u_n^-\|_{L^{2^*}} \leq \|\|_{L^{p'}} \|u_n^-\|.$$

Por um argumento análogo, temos

$$c\int_\Omega |u_n^-|^{\alpha+1}dx \leq k\|u_n^-\|_{L^2}^{\alpha+1} \leq k\|u_n^-\|^{\alpha+1}.$$

Usando essas estimativas em (4.16), ficamos com

$$|\int_\Omega |\nabla u_n^-|^2dx - \int_\Omega K_-|u_n^-|^2dx| \leq k\|u_n^-\|^{\alpha+1} + \|b(x)\|_{L^{p'}}\|u_n^-\| + \epsilon_n\|u_n^-\| \quad (4.17)$$

Note que não podemos garantir que

$$c\int_\Omega |\nabla u_n^-|^2dx \leq \int_\Omega |\nabla u_n^-|^2dx - \int_\Omega K_-|u_n^-|^2dx, \ k > 0, \quad (4.18)$$

pois se pudessemos, usaríamos na desigualdade (4.16) e então $\|u_n^-\|$ seria limitada, contradizendo a hipótese que assumimos.
Observe que usando o quociente de Rayleigh para o autovalor $\mu_1(K_-)$, temos que:

$$\int_\Omega |\nabla u_n^-|^2dx - \int_\Omega K_-|u_n^-|^2dx \geq 0,$$

dividindo por $\|u_n\|^2$ e aplicando limite, teremos:

$$\liminf_{n\to+\infty}\left[\int_\Omega |\nabla z_n|^2dx - \int_\Omega K_-|z_n|^2dx\right] = 0.$$

Como $\int_\Omega |\nabla z_0|dx \leq 1$, segue que:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla z_0|^2dx - \int_\Omega K_-|z_0|^2dx &\leq 1 - \int_\Omega K_-|z_0|^2dx \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla z_n|^2dx - \int_\Omega K_-|z_n|^2dx = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $z_0 \neq 0$ e de maneira análoga a prova do teorema anterior,concluimos que z_0 é solução de

$$\begin{cases} -\Delta z_0 = K_- z_0 \text{ em } \Omega \\ z_0 = 0 \text{ na } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.19)$$

Este fato implica em $z_0 = \psi_-$, onde $\psi_- > 0$. Como consequência, teríamos que ter $u_n^- \to +\infty$, porém isso não pode acontecer pois $\frac{u_n}{\|u_n\|} \to +\infty$ e $v_0 = \psi_+ > 0$. Logo, (u_n^-) é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Etapa 3: Pela hipótese inicial, podemos escrever:

$$|\langle\phi'(u_n), w\rangle| = |\int_\Omega \nabla u_n \nabla w dx - \int_\Omega f(x, u_n)w dx| \leq \epsilon_n\|w\|.$$

Então, reescrevendo a igualdade acima como:

$$
\begin{aligned}
|\langle\phi'(u_n), w\rangle| &= |\int_\Omega \nabla u_n \nabla w dx - \int_\Omega K_+ u_n w dx + \int_\Omega (K_- - K_+) u_n^- w dx \\
&- \int_\Omega g_+(x, u_n^+) w dx - \int_\Omega g_-(x, u_n^-) w dx| \leq \epsilon_n \|w\|,
\end{aligned}
$$

usando $w = w_n$, onde $w_n = u_n - t_n\psi_+$ e t_n é tal que

$$\int_\Omega \nabla w_n \nabla \psi_+ dx = 0.$$

Aplicando (4.15), segue :

$$
\begin{aligned}
|\int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx - \int_\Omega K_+ w_n^2 dx| &\leq |\int_\Omega (K_- - K_+) u_n^- w_n dx| + c\|w_n\| + k\|u_n\|^\alpha \|w_n\| \\
&+ \epsilon_n \|w_n\|.
\end{aligned}
$$

Como (u_n^-) é limitada e $\epsilon \to 0$, obtemos:

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx \leq c\|w_n\| + c\|u_n^-\|^\alpha \|w_n\|. \tag{4.20}$$

Etapa 4: Dado $\epsilon > 0$, $b_\pm \in L^r(\Omega)$, tal que:

$$
\begin{aligned}
G_+(x, s) &\geq (\gamma_+ - \epsilon)s - b_+, s > 0 \\
G_-(x, s) &\geq (\Gamma_- + \epsilon)s - b_-, s < 0.
\end{aligned}
$$

Como $|\phi(u_n)| \leq K$, podemos usar que $-K \leq \phi(u_n)$ e obter:

$$
\begin{aligned}
-K &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_\pm (u_n)^2 dx - \int_\Omega G_\pm(x, u_n) dx \\
-K + \int_\Omega G_\pm(x, u_n) dx &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_\pm (u_n)^2 dx.
\end{aligned}
$$

Usando as estimativas para G_+, G_-, temos:

$$
\begin{aligned}
-K + \int_\Omega (\gamma_+ - \epsilon)(u_n^+) dx - \int_\Omega b_+ dx + \int_\Omega (\Gamma_- + \epsilon)(-u_n^-) dx - \int_\Omega b_- dx \\
\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+ (u_n^+)^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_- (u_n^-)^2 dx,
\end{aligned}
$$

dividindo a desigualdade por $\|u_n\|$ e usando que $v_0 = \psi_+$, quando fizermos $\|u_n\| \to \infty,\ n \to \infty$, teremos:

$$\int_\Omega (\gamma_+ - \epsilon)\psi_+ dx \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\|u_n\|}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+|u_n^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_-|u_n^-|^2 dx\right].$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ e usando a hipótese (4.5),temos que:

$$0 < \int_\Omega \gamma_+\psi_+ \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\|u_n\|}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+|u_n^+|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_-|u_n^-|^2\right] \quad (4.21)$$

A expressão dentro do conchetes na desigualdade anterior, é igual a:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+ w_n^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (K_+ - K_-)|u_n^-|^2 dx,$$

basta notar:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n| dx &= \frac{1}{2}t_n^2\int_\Omega |\nabla \psi_+|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w_n| dx \\
&= \frac{1}{2}t_n^2\int_\Omega K_+(\psi_+)^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w_n| dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega K_+(u_n)^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+(w_n)^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w_n| dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega K_+(u_n^+)^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega K_+(u_n^-)^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_+(w_n)^2 dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w_n| dx.
\end{aligned}$$

Aplicando a estimativa (4.20) e que u_n^- é limitada, obtemos que (4.21) é igual a zero, o que é impossível, pela hipótese (4.5). Concluímos, que (u_n) tem que ser limitada. Logo pela afirmação feita no início da demonstração,(u_n) possui uma subsequência fracamente convergente em $H_0^1(\Omega)$ e com isso, satisfaz a condição de Palais-Smale. $\square$

4.3 Aplicação do Teorema do Ponto de Sela

Nosso objetivo nesta seção é aplicar o Teorema 4.0.9 e garantir que ϕ tem ponto crítico. E com isso, mostraremos que vale o seguinte resultado:

Teorema 4.3.1. *Considere o problema (1.1):*

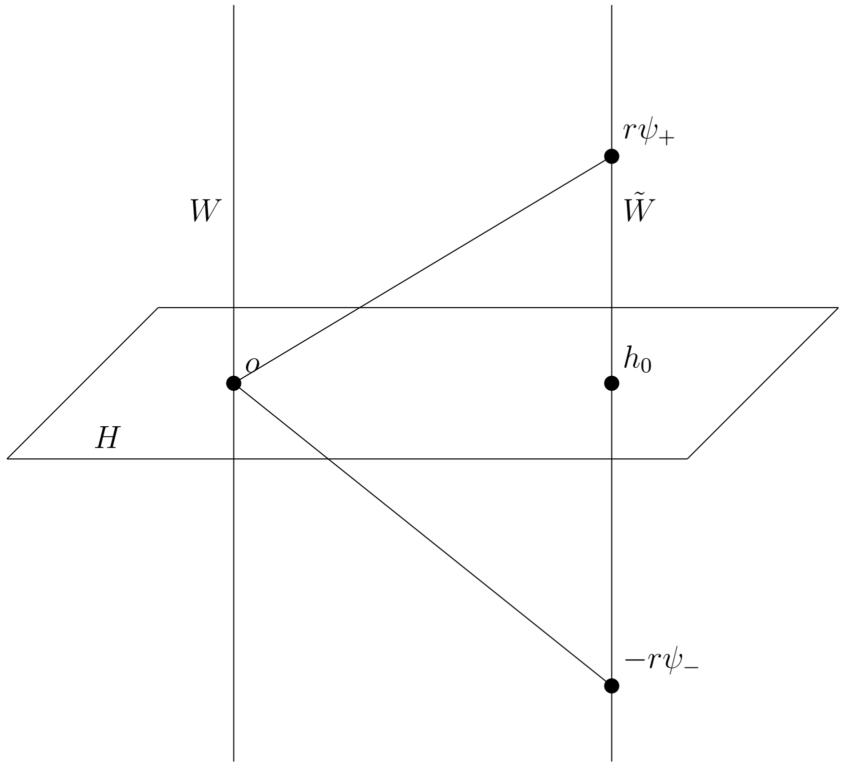
$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde f é uma função Carathéodory e satisfaz a condição de crescimento (1.2). *Assuma também as hipóteses (C),(4.1) e (4.7), então o problema tem solução fraca.*

Seguem abaixo, as hipóteses do teorema 4.0.9 que precisamos mostrar, para poder aplicá-lo e com isso, demonstrar o teorema 4.2.1.

(i) Existe $a > 0$ tal que $\phi(u) \geq a$, em $H = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \int_\Omega u\psi dx = 0\}$.

(ii) $\phi(u) < a$ para $u \in B_\rho(h_0)$, onde ρ é um número real positivo, $\tilde{W}$ uma reta que passa por $r\psi_+$ e $-r\psi_-$ e $h_0 = \tilde{W} \cap H$ ($\tilde{W}$ é uma translação de um subespaço de dimensão 1 tal que $W \oplus H = H_0^1(\Omega)$).
Veja a figura abaixo:



Observação 4.3.2. O fato de aplicarmos o teorema para $\tilde{W}$ ao invéns de W, não invalida o resultado, visto que a origem é irrelevante. Basta fazer uma translação no sitema de coordenadas.

(iv) Vale a condição de Palais-Smale

Demonstração. Vamos provar:
(i) $\exists\ a > 0$ tal que $\phi(u) \geq a$, em $H = \{u \in H_0^1(\Omega) / \int_\Omega u\psi dx = 0\}$.

Para a prova deste fato, basta aplicar o Teorema 4.1.1 item (ii).

(ii) $\phi(u) < a$ para $u \in B_\rho(h_0)$, onde ρ é um número real positivo, $\tilde{W}$ uma reta que passa por $r\psi_+$ e $-r\psi_-$ e $h_0 = \tilde{W} \cap H$ ($\tilde{W}$ é uma translação de um subespaço de dimensão 1 tal que $W \oplus H = H_0^1(\Omega)$).

Pelo Teorema 4.1.1, item(i), existe $\rho = r > 0$, tal que $\phi(r\psi_+) < a$ e $\phi(-r\psi_-) < a$. Logo, $\phi(u) < a$ para $u \in \partial(\tilde{W} \cap B_\rho(h_0) = \{r\psi_+, -r\psi_-\}$.

(iii) Condição de Palais-Smale.

A prova está garantida no Teorema 4.1.2.

Como as hipóteses do Teorema 4.0.9 são satisfeitas, vale o teorema e com isso, ϕ tem ponto crítico. Agora podemos garantir que é válido o Teorema 4.3.1, ou seja, que o problema (1.1) possui solução fraca.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] A. Ambrosetti and P.H.Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*,J. Funct.Anal 14(1973), 349-381.

[2] D.G. de Figueiredo, *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, in "Lecture Notes in Mathematics,"Vol.957,pp.34-87, Springer-Verlag,New York, 1982.

[3] D.G. de Figueiredo, "*Lecture Notes on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*,"Tata Institute of Fundamental Research Lectures in Mathematics and Physics, Vol.81, Springer-Verlag(1989).

[4] D.G.Figueiredo, *Métodos varacionais em Equações Diferenciais, Matemática Universitária*, N.7(1988), 21-47.

[5] D.G.Figueiredo and Ivar Massabò, *Semilinear Elliptic Equations with the Primitive of the Nonlinearity Interacting with the First Eigenvalue*.J. of Mathematical Analysis and Applications, N.156(1991), 381.394.

[6] D.G. de Figueiredo and J.P.Gossez, *Nonlinear perturbations of a linear elliptic problem near its first eigenvalue*, J. Differential Equations 30 (1978), 1-30.

[7] D. Gilbert and N.S.Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Seconder Order*, segunda edição, Springer, Berlim, 1983.

[8] E.Landesman and A.C.Lazer, *Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance*, J. Math. Mech.19(1970),609-623.

[9] F.O.V. de Paiva, *Multiplicidade de soluções para problemas Elípticos com Ressonância*, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Tese de Doutorado,2002.

[10] G.B.Robert, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classies Library Edition Published, 1995.

[11] J. Chabrowshi, *Introduction to the theory of critical points*. University of Queensland. Department of Mathematics. Instructinal Workshop in Analysis and Geometry, 1995.

[12] J.Mawhin,J.R.Ward and M.Willem, *Variational methods and semilinear elliptic equations*, Arch. Rational Mech. Anal.95(1986),269-277.

[13] L.C. Evans, *Partial Differential Equations, Graduated Studies in Mathematics*, Vol.19, American Mathematical Society(1988).

[14] N.de Assis Lima, *Análise Funcional não-Linear Aplicada ao Estudo de Problemas Elípticos Não Locais*, Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, Dissertação de Mestrado,2010.

[15] P.H.Rabinowitz, *Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations*,in "Nonlinear Analysis: A Collection of Papers in Honour of E.H.Rothe"(L.Cesari,R.Kannan, and H.F.Weinberger,Eds.), pp. 161 - 177. Academic Press, San Diego,1979.

[16] P.H.Rabinowitz, Minimax Methods in critical point theory with applications equations (Regional Conference series in Mathematics, ISSN 0160 - 7642, no 65). "Expository lectures from the CBMS Regional Conference held at the University of Miami, 1984.