Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

COMPOSIÇÕES DE FIBONACCI E MONOIDES LIVRES

Dissertação de Mestrado

GIOVANE MANSAN

Porto Alegre

2015

Dissertação submetida por Giovane Mansan[*] junto ao curso de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência Matemática.

Data: 27 de março de 2015.

Orientador:
Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

Banca examinadora:
Prof. Dr. Carlos Hoppen (PPGMAp - UFRGS)
Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos (UNICAMP)
Prof. Dr. Vilmar Trevisan (PPGMAp - UFRGS)

[*]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Agradecimentos

À minha família, pelo apoio e pela paciência.

Ao meu orientador, por guiar-me em todo processo do trabalho.

Aos professores do departamento de matemática por contribuirem beneficamente com minha formação.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pelo ambiente e suporte aos estudos e a pesquisa.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Agradeço a todos que contribuiram direta ou indiretamente com a produção dessa dissertação.

Resumo

Nesta dissertação, estudaremos fórmulas expressando números de Fibonacci como somas sobre composições, tais como

$$F_{2n-2} = \sum_{a \in C(n)} (2^{a_1 - 1} - 1) \cdots (2^{a_k - 1} - 1), \; n \geq 1,$$

onde a soma se estende sobre todas as composições $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de n, para um k qualquer. Daremos uma explicação sistemática de tais fórmulas usando monoides livres. O número de composições de n em partes 1 e 2 é o $(n+1)$-ésimo número de Fibonacci F_{n+1}, e essas composições estão associadas a um monoide livre. Veremos algumas fórmulas surgindo a partir de submonoides livres desse monoide livre. Alternativamente, e sempre que possível, tentaremos interpretar combinatorialmente os resultados tratados aqui.

Abstract

In this dissertation, we study formulas expressing Fibonacci numbers as sums over compositions, such as

$$F_{2n-2} = \sum_{a \in C(n)} (2^{a_1 - 1} - 1) \cdots (2^{a_k - 1} - 1), \; n \geq 1,$$

where the sums are over all compositions $a_1, a_2, \ldots, a_k$ of n, for any k. We will give a systematic explanation of such formulas using free monoids. The number of compositions of n with parts 1 and 2 is the $(n+1)$th Fibonacci number F_{n+1}, and these compositions form a free monoid. We will see some formulas coming from free submonoids of this free monoid. Alternatively, and whenever possible, we try to interpret combinatorially such results.

Sumário

Introdução

O estudo das partições é, de fato, muito mais antigo do que o das composições. Há registros pré-históricos de gravuras rupestres listando contagens de pequenos grupos de animais, dispostos curiosamente na forma de algo que chamamos hoje de “partições”. Mas foi com Euler que surgiu realmente um estudo sistemático das partições envolvendo os conceitos aplicados atualmente.

Já o estudo das composições envolvendo palavras é algo razoavelmente recente. Alguns resultados envolvendo o estudo das composições de inteiros remontam a 1893, publicados por Percy Alexander MacMahon, enquanto Axel Thue conduziu uma pesquisa inicial sobre a combinatória nas palavras em 1906. Nas décadas seguintes o principal foco de pesquisa em Combinatória Enumerativa era em partições e permutações. Até o final da década de 60, foram publicados artigos individuais envolvendo composições sob vários aspectos, mas não havia um interesse de pesquisa concentrado.

A virada ocorreu nos anos 70, quando diferentes grupos de autores desenvolveram novas direções de pesquisa. Eles estudavam composições e palavras que fossem restritas de alguma forma, e não resumia-se a apenas enumerar o número total daqueles objetos, mas também importava verificar certas características. A maioria das publicações sobre composições e palavras foram feitas nas últimas décadas. Os autores têm estudado vários aspectos das composições e das palavras, generalizando resultados anteriores e introduzindo novos conceitos.

O que faremos nessa dissertação é estudar o artigo [5] de Gessel e Li e reescreve-lo com complementações de leitura, como, por exemplo, acrescentando explicações adicionais. Tentaremos justificar todas as afirmações desse artigo que derem espaço a isso. Incluiremos conteúdos adicionais que ajudem a contextualizar as ideias desenvolvidas. Acrescentaremos exemplos, e proposições com suas respectivas provas. Há, no artigo, cálculos e resultados não muito diretos, que complementaremos com calculos adicionais, por exemplo, em uma igualdade presente no artigo, não tão obvia, entre funções geradoras, escreveremos igualdades intermediárias elucidativas. Utilizando as ideias do artigo, daremos uma aplicação aos números de Tribonaci e uma nova demonstração de uma recorrência obtida em [3]. O leitor notará que a ordem da teoria trabalhada na dissertação segue mais ou menos a mesma ordem da trabalhada no artigo.

No Capítulo 1 introduziremos os pré-requisitos para o que desenvolveremos a seguir. Também enunciaremos o principal teorema da dissertação, o Teorema 1.10. As conclusões do teorema principal são bem conhecidas, algumas delas inclusive são objeto do Exercício 35 da página 121 do livro de Stanley [16]. O que é novo no artigo é o método usado para provar esses resultados. É um método baseado na teoria dos monoides livres, que serve para provar e descobrir novos resultados. Durante toda dissertação abordaremos provas para os ítens do Teorema 1.10.

No Capítulo 2, começamos a desenvolver a teoria dos monoides livres e é onde fazemos a conexão deles com os conjuntos de composições. Também provaremos quatro lemas úteis para garantir que um submonoide de um monoide livre seja livre.

No capítulo 3 estudaremos um monoide livre específico, com base em um alfabeto de apenas duas letras 1 e 2. Veremos que a análise de alguns submonoides livres desse monoide fornece fórmulas interessantes envolvendo os números de Fibonacci F_n, além de produzir alguns teoremas mais gerais.

No Capítulo 4 trataremos da multisecção dos monoides livres e, em especial, das composições de Fibonacci, estabelecendo, assim, algumas ferramentas úteis para desenvolver os dois últimos capítulos. Faremos também interpretações alternativas de algumas dessas ferramentas. Essa multisecção nos permitirá considerar apenas as composições de Fibonacci de inteiros congruentes a "algum inteiro" módulo "algum natural".

Nos Capítulos finais 5 e 6 trataremos das funções geradoras para as composições de Fibonacci de inteiros pares, ímpares, divisíveis por 3, e que deixam restos 1 e 2 na divisão por 3. Além disso daremos interpretações alternativas para algumas dessas fórmulas.

Em geral, veremos que alguns casos particulares dos teoremas trabalhados aqui fornecem fórmulas envolvendo os números de Fibonacci, admitindo, às vezes, como dito antes, interpretações combinatórias ou alternativas.

Capítulo 1

Pré-requisitos

1.1 Ideias preliminares

Definição 1.1. *Uma composição de um inteiro n é uma sequência finita $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de inteiros positivos, chamados de partes da composição, cuja soma é igual a n.*

Cabe ressaltar que, diferentemente do estudo das *partições*, a troca da ordem das partes altera a composição. Geralmente uma dada composição é escrita como uma soma ordenada de suas partes.

Exemplo 1.2. *Para $n = 16$ vale que $(2, 4, 10)$ e $(4, 2, 10)$ são composições distintas de 16, que podem ser representadas como $2 + 4 + 10$ e $4 + 2 + 10$, respectivamente. Entretanto ambas representam a mesma partição.*

Uma questão inicial que surge, tanto no estudo das composições quanto no das partições, é a de calcular a quantidade total de composições ou de partições de um certo inteiro positivo n. Geralmente definem-se por $c(n)$ o número total de composições de n, e por $p(n)$ o número total de partições de n. Há formas simples de calcular $c(n)$. Temos, por exemplo, um modo combinatório que consiste no seguinte: primeiro dispomos n pontos em linha horizontalmente. Ao colocar no máximo uma barra vertical entre cada dois pontos vizinhos, vemos que as barras determinam compartimentos de pontos. Ao dispor o número de pontos de cada compartimento numa soma na ordem em que cada um aparece, fornecemos uma composição de n. Por exemplo, a composição de 15 dada por $5+1+1+3+4+1$ esta associada a

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot | \cdot | \cdot | \cdot\ \cdot\ \cdot | \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot | \cdot$$

Claramente cada disposição de pontos e barras está associada a exatamente uma composição, e cada composição, por sua vez, está associada a uma única disposição de pontos e barras. Daí, o número de composições de n é igual ao número de disposições de pontos e barras. Como temos a opção de colocar ou não uma barra entre cada dois pontos vizinhos, ou seja, duas opções por dupla de pontos vizinhos, e como há $n-1$ duplas de pontos vizinhos, há um total de 2^{n-1} disposições de barras e pontos com exatamente n pontos. Segue que

$$c(n) = 2^{n-1}$$

Em muitos aspectos, a teoria das composições é muito mais simples do que a teoria das partições. A função geradora das partições $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$, $|x| < 1$, tem um comportamento complicado. Da expressão $P(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-x^n}$ segue que ela não pode ser prolongada analiticamente além do disco unitário, visto que o conjunto de singularidades de $P(x)$ em $\mathbb{C}$ é um conjunto denso na circunferência $|x| = 1$. Já a função geradora das composições $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n)x^n$ tem a expressão $C(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}x^n = 1 + \frac{x}{1-2x} = \frac{1-x}{1-2x}$, ou seja, é uma função racional e tem uma única singularidade, que ocorre em $x = \frac{1}{2}$.

As fórmulas que calculam $p(n)$ são, em geral, bem mais complicadas, por exemplo, há uma recorrência para $p(n)$ devida a Euler:

$$p(n) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \left(p\left(n - \frac{j(3j-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{j(3j+1)}{2}\right)\right).$$

Enquanto uma recorrência para $c(n)$ pode ser dada facilmente a partir da fórmula $c(n) = 2^{n-1}$:

$$c(n) = 2c(n-1)$$

para $n \geq 2$ com $c(0) = 1$ e $c(1) = 1$

Se quisermos conhecer fórmulas fechadas para $p(n)$, que dependam apenas de n, tal como ocorre com a expressão $c(n) = 2^{n-1}$, veremos que o contraste da diferença entre os níveis de complicação aumenta. Temos, por exemplo, uma fórmula dada por Hans Rademacher em 1937 que diz o seguinte:

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} A_k(n) \frac{d}{dn} \left\{ \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n - \frac{1}{24}\right)}\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{24}}} \right\},$$

onde $A_k(n)$ é uma soma tipo-Kloosterman,

$$A_k(n) = \sum_{\substack{0 \leq h < k \\ mdc(h,k)=1}} \exp\left(\pi i s(h,k) - \frac{2\pi i n h}{k}\right),$$

e $s(h,k)$ é uma soma de Dedekind,

$$s(h,k) = \sum_{j=1}^{k-1} \left(\left(\frac{j}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right),$$

com

$$((x)) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}, & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

que é bem mais complicada do que a fórmula $c(n) = 2^{n-1}$.

Voltando agora às composições, temos o seguinte.

Definição 1.3. *Seja $C(n)$ o conjunto de todas as composições de n, então iremos escrever $\sum_{a\in C(n)}$ para uma soma sobre todas as composições $a_1a_2\cdots a_k$ de n, com qualquer número de partes.*

Exemplo 1.4. $C(3)=\{(1,2),(2,1),(1,1,1),(3)\}$*, ou seja* $|C(3)|=4$*. Daí*

$$\begin{aligned}\sum_{a\in C(3)} a_1\cdot a_2\cdots a_k &= 1\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot 1\cdot 1+3\\ &= 2+2+1+3\\ &= 8\,.\end{aligned}$$

Definição 1.5. *O n-ésimo número de Fibonacci F_n é definido pela recorrência $F_0=0$, $F_1=1$ e $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ para $n\geq 2$.*

Podemos encontrar soluções em forma fechada para a recorrência $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$. Supõe que ela admita soluções do tipo $F_n=x^n$ com $x\neq 0$, agora basta determinar x. Daí, temos a equação $x^n-x^{n-1}-x^{n-2}=0$, que equivale à equação de segundo grau $x^2-x-1=0$, cujas soluções são

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\quad\text{e}\quad\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Agora note que qualquer combinação linear de α^n e β^n é solução de $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$. Resta exigir que ela cumpra as condições iniciais, isto é,

$$\begin{aligned}a\alpha^0+b\beta^0 &= 0\\ a\alpha^1+b\beta^1 &= 1\,,\end{aligned}$$

o que ocorre se, e somente se, $b=-a$ e $a\alpha-a\beta=1$, ou seja,

$$a=\frac{1}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\sqrt{5}}\quad\text{e}\quad b=-a=-\frac{1}{\sqrt{5}}\,,$$

isso fornece a fórmula não-recursiva para os números de Fibonacci

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\beta^n=\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}\,,$$

que é conhecida como a fórmula de Binet para os números de Fibonacci.

Definição 1.6. *O n-ésimo número de Lucas L_n é definido por $L_0 = 2$, e $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ para $n \geq 1$.*

Note que $L_1 = F_2 + F_0 = 1 + 0 = 1$ e que, para todo $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} L_n &= F_{n+1} + F_{n-1} = F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3} \\ &= F_n + F_{n-2} + F_{n-1} + F_{n-3} \\ &= L_{n-1} + L_{n-2}, \end{aligned}$$

mas $L_2 = F_3 + F_1 = 2+1 = 1+2 = L_1 + L_0$, isto é, L_n obedece à mesma recorrência que F_n, e só difere nas condições iniciais. Portanto os valores de α e de β são os mesmos da fórmula de Binet e, como antes, as condições iniciais vão determinar uma combinação linear que obedeça às igualdades

$$\begin{aligned} a\alpha^0 + b\beta^0 &= 2 \\ a\alpha^1 + b\beta^1 &= 1. \end{aligned}$$

A primeira igualdade diz que $a + b = 2$, a segunda que $a = b$, daí $a = b = 1$ e

$$L_n = \alpha^n + \beta^n.$$

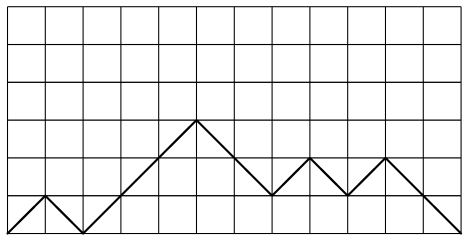
1.1.1 Caminhos de Dyck

No Capítulo 5 faremos uma referência aos caminhos de Dyck. Por isso daremos aqui alguns pré-requisitos que justifiquem tal referência.

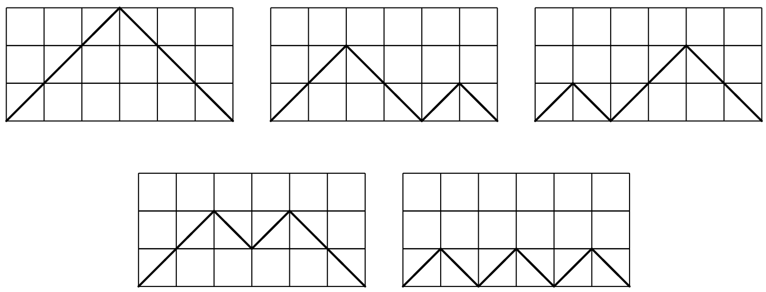
Definição 1.7. *Um caminho de Dyck de comprimento $2n$ é uma rota no plano cartesiano, acima do eixo x, que parte do ponto $(0,0)$ e vai até $(2n,0)$ onde os únicos passos permitidos são dados pelos vetores $(1,1)$ ou $(1,-1)$.*

Podemos representar qualquer caminho de Dyck de comprimento $2n$ no reticulado de comprimento $2n$ e altura n.

Exemplo 1.8. *Abaixo temos um caminho de Dyck de comprimento* 12 *e altura* 3*:*



Exemplo 1.9. *Há* 5 *caminhos de Dyck de comprimento* 6*:*

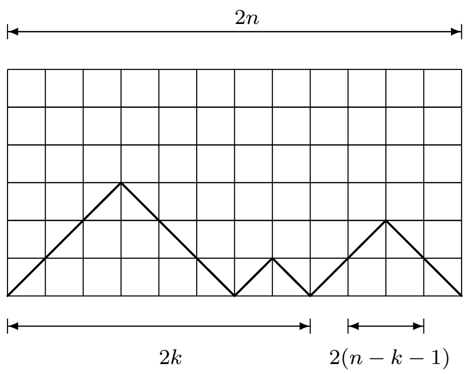


Estamos interessados em contar o número total de caminhos de Dyck de um certo comprimento com no máximo uma certa altura.

Vamos primeiro fazê-lo sem a limitação da altura. Seja a_n o número de caminhos de Dyck de comprimento $2n$ e altura qualquer. Definimos a função geradora $f(x)$ da sequência $\{a_n\}_{n\geq 0}$ por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Note que a_n pode ser calculado combinatorialmente como segue: para cada caminho de Dyck contado por a_n fixe a penúltima posição, da esquerda para a direita, em que o caminho de Dyck intercepta o eixo x e suponha que isso ocorra na posição $2k$. Esquematicamente temos:



Note que, à esquerda dessa posição, há a_k possibilidades, enquanto que, à direita, como o caminho não pode mais interceptar o eixo x, há a_{n-k-1} possibilidades. Variando k de 0 a $n-1$, encontramos a igualdade:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k-1}\,.$$

Multiplicando ambos os lados por x^n e somando de $n = 1$ a ∞, encontramos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k-1} x^n \\
&= x \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k} x^{n-1} \\
&= x \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} x^n \\
&= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \\
&= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$f(x) - 1 = x f(x)^2\,. \tag{1.1}$$

Mas esta igualdade é equivalente a

$$f(x) = \frac{1}{1 - x f(x)}\,.$$

Agora, nesta última igualdade, substituindo o termo $f(x)$ da expressão da direita pela própria expressão da direita, que é igual a $f(x)$, obtemos

$$f(x) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 - xf(x)}}\,.$$

aplicando isso repetidamnte, encontramos a expressão em frações contínuas:

$$f(x) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{\ddots}}}}\,.$$

Note que, da igualdade (1.1) acima, resolvendo a equação de segundo grau, obtemos a expressão alternativa

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}\,.$$

Agora, vamos definir $a_{n,h}$ como o número de caminhos de Dyck de comprimento $2n$ e altura de no máximo h. Defina $f_h(x)$ por

$$f_h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,h} x^n\,.$$

Como antes, $a_{n,h}$ pode ser calculado combinatoriamente: para cada caminho de Dyck contado por $a_{n,h}$ fixe a penúltima posição, da esquerda para a direita, em que o caminho de Dyck intercepta o eixo x e suponha que iso ocorra na posição $2k$. Note que, à esquerda dessa posição, há $a_{k,h}$ possibilidades, enquanto na direita, como o caminho não pode mais interceptar o eixo x, há $a_{n-1-k,h-1}$ possibilidades, pois o caminho da direita é contado a partir da linha logo acima do eixo x, o que justifica a redução da altura para $h - 1$. Daí temos

$$a_{n,h} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,h} a_{n-1-k,h-1}\,.$$

Multiplicando ambos os lados por x^n e somando de $n = 1$ a ∞ encontramos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,h} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,h} a_{n-1-k,h-1} x^n \\
&= x \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,h} a_{n-1-k,h-1} x^{n-1} \\
&= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{k,h} a_{n-k,h-1} x^n \\
&= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,h} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,h-1} x^n \right) ,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$f_h(x) - 1 = x f_h(x) f_{h-1}(x),$$

o que equivale a

$$f_h(x) = \frac{1}{1 - x f_{h-1}(x)}.$$

Com esta última igualdade em mãos, se quisermos a função geradora que conte os caminhos de Dyck de comprimento $2n$ e altura de no máximo 3, por exemplo, calculamos:

$$f_3(x) = \frac{1}{1 - x f_2(x)} = \frac{1}{1 - \dfrac{x}{1 - x f_1(x)}}.$$

Mas só há um caminho de Dyck com altura de no máximo 1 para cada comprimento $2n$, ou seja,

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

e daí,

$$f_3(x) = \frac{1}{1 - \dfrac{x}{1 - x f_1(x)}} = \frac{1}{1 - \dfrac{x}{1 - \dfrac{x}{1-x}}} .$$

1.2 O Teorema principal sob uma abordagem envolvendo funções geradoras

Faremos aqui o estudo de algumas fórmulas que expressam números de Fibonacci como somas sobre composições. A seguir, temos teorema principal comentado na introdução.

Teorema 1.10. *Os seguintes itens são verdadeiros para $n \geq 1$:*

(i) F_{n+1} é o número de composições de n em partes iguais a 1 ou 2.

(ii) F_{n-1} é o número de composições de n em partes maiores do que 1.

(iii) F_n é o número de composições de n em partes ímpares.

(iv) $F_{2n} = \sum_{a \in C(n)} a_1 a_2 \cdots a_k$

(v) $F_{2n-2} = \sum_{a \in C(n)} (2^{a_1-1} - 1) \cdots (2^{a_k-1} - 1)$.

(vi) $F_{2n+1} = \sum_{a \in C(n)} 2^{\#\{i : a_i = 1\}}$.

A partir daqui, estamos interessados em explicar como encontrar tais identidades, como prová-las com funções geradoras e como prová-las combinatoriamente. Para isso vamos precisar do lema abaixo (ver em [10] e [11]).

Lema 1.11. *Seja $u_1, u_2, u_3, \ldots$ uma sequência de números. Então a soma*

$$\sum_{a \in C(n)} u_{a_1} u_{a_2} \cdots u_{a_k}$$

é o coeficiente de x^n em

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} u_i x^i\right)^{-1}.$$

Demonstração. Note que a afirmação do Lema 1.11 é equivalente a seguinte igualdade de funções geradoras

$$\left(1-\sum_{i=1}^{\infty} u_i x^i\right)^{-1} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{a\in C(n)} u_{a_1}u_{a_2}\cdots u_{a_k}\right)x^n .$$

A prova que daremos consiste em verificar tal igualdade. Ela pode ser escrita assim

$$\begin{aligned}
1 &= \left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{a\in C(n)} u_{a_1}u_{a_2}\cdots u_{a_k}\right)x^n\right)\left(1-\sum_{i=1}^{\infty} u_i x^i\right)\\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{a\in C(n)} u_{a_1}u_{a_2}\cdots u_{a_k}\right)x^n\\
&\quad -\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{a\in C(n)} u_{a_1}u_{a_2}\cdots u_{a_k}\right)x^n\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i x^i\right)
\end{aligned}$$

que (cancelando os dois $1's$ e trocando a expressão negativa de lado) equivale a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{a\in C(n)} u_{a_1}u_{a_2}\cdots u_{a_k}\right)x^n = \left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{a\in C(n)} u_{a_1}u_{a_2}\cdots u_{a_k}\right)x^n\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i x^i\right)$$

cujo lado direito, ao ser desenvolvido pelo produto dos somatórios, torna-se igual a

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{a\in C(i)} u_{a_1}u_{a_2}\cdots u_{a_k}\right)u_{n-i}\right)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n .$$

Comparando os coeficientes, os de x^0 são nulos e os de x^1 são u_1 em ambos os lados, portanto tal igualdade é verdadeira se, e somente se,

$$\sum_{a\in C(n)} u_{a_1}u_{a_2}\cdots u_{a_k} = u_n + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{a\in C(i)} u_{a_1}u_{a_2}\cdots u_{a_k}\right)u_{n-i}\,,\ \ \forall n\geq 2\,, \tag{1.2}$$

o que pode ser verificado bijetivamente: note que acrescentar a parte $n-i$ ao final de uma composição de i gera uma composição de n, e omitir a última parte de uma composição de n terminada em $n-i$, gera uma composição de i. Em outras palavras,

$$C(n)\setminus\{(n)\} = \bigcup_{i=1}^{n-1} C(i)\times\{(n-i)\}\,,$$

onde $C_A \times C_B$ é definido como o conjunto de todas as concatenações entre cada composição de C_A e de C_B nessa ordem, ou, mais precisamente, a composição $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pertence a $C_A \times C_B$ se, e somente se, existe algum inteiro não negativo k tal que $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in C_A$ e $(a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n) \in C_B$.

Isto implica que, para todo $n \geq 2$,

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{a \in C(n)} u_{a_1} u_{a_2} \cdots u_{a_k} \right) - u_n &= \sum_{a \in C(n) \setminus \{(n)\}} u_{a_1} u_{a_2} \cdots u_{a_k} \\
&= \sum_{a \in \bigcup_{i=1}^{n-1} C(i) \times \{(n-i)\}} u_{a_1} u_{a_2} \cdots u_{a_k} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{a \in C(i) \times \{(n-i)\}} u_{a_1} u_{a_2} \cdots u_{a_k} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{a \in C(i)} u_{a_1} u_{a_2} \cdots u_{a_k} \cdot u_{n-i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{a \in C(i)} u_{a_1} u_{a_2} \cdots u_{a_k} \right) u_{n-i}\,,
\end{aligned}
$$

o que equivale a igualdade (1.2), concluindo assim a verificação desejada. $\square$

A fim de provar o Teorema 1.10 usando funções geradoras, vamos precisar da fórmula abaixo

$$
\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2} \quad . \tag{1.3}
$$

Ela é bem conhecida e apresentamos uma demonstração dela a seguir, mas nós também a provaremos mais adiante como uma aplicação das ideias desenvolvidas no Capítulo 2.

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n &= \underbrace{F_0}_{=0} + \underbrace{F_1 x}_{=x} + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \\
&= x + x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} \\
&= x + x \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\
&= x + x \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\
\Longrightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n (1 - x - x^2) = x \\
\Longrightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}
\end{aligned}$$

□

Agora, note que o item (i) do Teorema 1.10 segue da aplicação do Lema 1.11 para a sequência $(u_i)_{i \geq 1}$ onde $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ e $u_i = 0$, $\forall i \geq 3$, e do fato de que, neste caso, a soma $\sum_{a \in C(n)} u_{a_1} u_{a_2} \cdots u_{a_k}$ é precisamente o número de composições de n em partes iguais a 1 ou 2. Essa soma é, pelo Lema 1.11, o coeficiente de x^n em

$$\left(1 - x - x^2\right)^{-1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Mas tal coeficiente é, como consequência da igualdade (1.3), o $(n+1)$-ésimo número de Fibonacci F_{n+1}.

Para os itens (ii) e (iii) precisaremos das duas seguintes equações.

Nas proposições abaixo e ao longo de toda a dissertação, as séries de potências são séries de potências formais, não importando a convergência das mesmas.

Proposição 1.12.

$$1 + \frac{x^2}{1 - x - x^2} = (1 - x^2 - x^3 - x^4 - \cdots)^{-1}$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
(1-x^2-x^3-x^4-\cdots)^{-1} &= \left(1-\frac{x^2}{1-x}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1-x-x^2}{1-x}\right)^{-1} \\
&= \frac{1-x}{1-x-x^2} \\
&= 1+\frac{x^2}{1-x-x^2}
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.13.

$$1+\frac{x}{1-x-x^2} = (1-x-x^3-x^5-\cdots)^{-1}$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
(1-x-x^3-x^5-\cdots)^{-1} &= \left(1-\frac{x}{1-x^2}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1-x-x^2}{1-x^2}\right)^{-1} \\
&= \frac{1-x^2}{1-x-x^2} \\
&= 1+\frac{x}{1-x-x^2}
\end{aligned}$$

□

Para provar o item (ii) aplicamos o Lema 1.11 com $u_1 = 0$ e $u_i = 1\ \forall i \geq 2$. Note daí que a soma $\sum_{a\in C(n)} u_{a_1}u_{a_2}\cdots u_{a_k}$ é igual ao número de composições de n com partes maiores do que 1, sendo, pelo Lema 1.11, o coeficiente de

$$(1-x^2-x^3-x^4-\cdots)^{-1}\ ,$$

que, pela Proposição 1.12, é igual a

$$1+\frac{x^2}{1-x-x^2}\ ,$$

cujo coeficiente de x^n é F_{n-1}.

Similarmente para o item (*iii*) fazemos $u_i = 0$, se i é par e $u_i = 1$, se i é ímpar. Daí, a soma do Lema 1.11 fica igual ao número de composições de n em partes ímpares e, pelo mesmo lema, é o coeficiente de $(1 - x - x^3 - x^5 - \cdots)^{-1}$ que, pela Proposição 1.13, é igual a

$$1 + \frac{x}{1 - x - x^2} \quad ,$$

que tem o coeficiente de x^n igual a F_n.

Para provar os itens (*iv*), (*v*) e (*vi*) vamos precisar das duas fórmulas seguintes, cujas demonstrações seguem abaixo. Elas também serão provadas no Capítulo 5 como uma aplicação das ideias desenvolvidas no Capítulo 4:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} x^n = \frac{x}{1 - 3x - x^2} \tag{1.4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1} x^n = \frac{1 - x}{1 - 3x - x^2} \tag{1.5}$$

Demonstração. Primeiro defina a_n e b_n pelas funções geradoras:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \frac{x}{1 - 3x - x^2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n &= \frac{1 - x}{1 - 3x - x^2}\,. \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$
\begin{aligned}
x\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}x^{2n} &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\
&= \frac{x}{1-x-x^2}\cdot\frac{1+x-x^2}{1+x-x^2} \\
&= \frac{x+x^2-x^3}{1-3x^2+x^4} \\
&= x\frac{1-x^2}{1-3x^2+x^4} + \frac{x^2}{1-3x^2+x^4} \\
&= x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $b_n = F_{2n+1}$ e $a_n = F_{2n}$ e o resultado segue. □

Para provar os itens (iv), (v) e (vi) também usaremos as igualdades das três próximas proposições,

Proposição 1.14.

$$1 + \frac{x}{1-3x+x^2} = (1 - x - 2x^2 - 3x^3 - \cdots)^{-1}$$

Demonstração. Temos $1 + \dfrac{x}{1-3x+x^2} = \dfrac{1-2x+x^2}{1-3x+x^2}$. Resta verificar que

$$(1-2x+x^2)(1-x-2x^2-3x^3-\cdots) = 1-3x+x^2. \tag{1.6}$$

Novamente os coeficientes de x^0, x^1 e x^2 são claramente os mesmos nos dois lados da equação. Para x^k com $k \geq 3$, temos no lado esquerdo de (1.6)

$$(1-2x+x^2)(\cdots - (k-2)x^{k-2} - (k-1)x^{k-1} - kx^k - \cdots)$$

e dai, $(-1(k-2) + 2(k-1) - k)x^k = 0x^k = 0$. Logo os coeficientes de x^k são nulos em ambos os lados para $k \geq 3$ e segue o resultado. □

Proposição 1.15.

$$1 + \frac{x^2}{1-3x+x^2} = (1 - x^2 - 3x^3 - 7x^4 - 15x^5 - \cdots - (2^{k-1}-1)x^k - \cdots)^{-1}$$

Demonstração. Temos $\quad 1+\dfrac{x^2}{1-3x+x^2}=\dfrac{1-3x+2x^2}{1-3x+x^2}\quad$ resta verificar que

$$(1-3x+2x^2)(1-x^2-3x^3-7x^4-15x^5-\cdots)=1-3x+x^2 \tag{1.7}$$

Novamente os coeficientes de x^0, x^1, x^2 e x^3 são claramente os mesmos nos dois lados da equação. Para x^k com $k \geq 4$, temos no lado esquerdo de (1.7)

$$(1-3x+2x^2)(\cdots-(2^{k-3}-1)x^{k-2}-(2^{k-2}-1)x^{k-1}-(2^{k-1}-1)x^k\cdots)$$

e dai, $(-2(2^{k-3}-1)+3(2^{k-2}-1)-1(2^{k-1}-1))x^k=0x^k=0$. Logo os coeficientes de x^k são nulos em ambos os lados para $k \geq 4$ e segue o resultado. □

Proposição 1.16.

$$\frac{1-x}{1-3x+x^2}=(1-2x-x^2-x^3-x^4-x^5-\cdots)^{-1}$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
(1-2x-x^2-x^3-x^4-x^5-\cdots)^{-1} &= \left(1-2x-\frac{x^2}{1-x}\right)^{-1}\\
&= \left(\frac{(1-x)(1-2x)-x^2}{1-x}\right)^{-1}\\
&= \left(\frac{1-x+2x^2-2x-x^2}{1-x}\right)^{-1}\\
&= \left(\frac{1-3x+x^2}{1-x}\right)^{-1}\\
&= \frac{1-x}{1-3x+x^2}
\end{aligned}$$

□

Agora note que o item (iv) segue similarmente aplicando o Lema 1.11 à sequência $(u_i)_{i\geq 1}$ definida por $u_i=i$, usando a equação (1.4) e a Proposição 1.14, nos fornecendo automaticamente:

$$
\begin{aligned}
1+\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}x^n &= 1+\frac{x}{1-3x-x^2}\\
&= (1-x-2x^2-3x^3-\cdots)^{-1}\\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{a\in C(n)} a_1a_2\cdots a_k\right)z^n
\end{aligned}
$$

Para o item (v) faça $u_i = 2^{i-1}-1$ no Lema 1.11, use a equação (1.4) e a Proposição 1.15, fornecendo

$$
\begin{aligned}
1+\sum_{n=1}^{\infty} F_{2n-2}x^n &= 1+x\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}x^n\\
&= 1+\frac{x^2}{1-3x+x^2}\\
&= (1-x^2-3x^3-7x^4-15x^5\cdots)^{-1}\\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{a\in C(n)} (2^{a_1-1}-1)\cdots(2^{a_k-1}-1)\right)z^n.
\end{aligned}
$$

Finalmente, o item (vi) segue da equação (1.5), da Proposição 1.16 e da aplicação do Lema 1.11 a $u_1=2$ e, para $i\geq 2$, $u_i=1$, e daí

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1}x^n &= \frac{1-x}{1-3x-x^2}\\
&= (1-2x-x^2-x^3-x^4-x^5-\cdots)^{-1}\\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{a\in C(n)} 2^{\#\{i:a_i=1\}}\right)x^n.
\end{aligned}
$$

Com isso o Teorema 1.10 está provado (usando funções geradoras).

Capítulo 2

Monoides livres

A seguir, faremos um breve estudo sobre a teoria dos monoides direcionado à sua aplicação à teoria das composições.

2.1 Definições iniciais

Um monoide é um conjunto com uma operação binária que tem as propriedades associativa e do elemento neutro. O tipo de monoide do qual faremos uso é construido por meio de um conjunto A que chamaremos de *Alfabeto.*

Definição 2.1. *Definimos A^* como o conjunto de todas as palavras (sequências finitas) de elementos de A.*

Agora note que, com a operação de concatenação, o conjunto A^* é um monoide cuja unidade é a palavra vazia. Assim, diremos que A^* é o *monoide livre sobre A.*

Há uma interessante relação entre o monoide livre A^* e as composições de inteiros. Observe que, quando $A \subseteq \mathbb{N}$, onde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ é o conjunto dos inteiros positivos, podemos associar a cada palavra de A^* uma composição cujas partes pertençam a A, o que nos fornece uma relação bijetiva entre o conjunto de todas as composições cujas partes pertençam a A e o monoide livre A^*.

Em geral, dizemos que M *é um monoide livre* se é um monoide isomorfo a um monoide livre da forma A^*. Quando M é um monoide livre, existe um subconjunto P de M tal que para todo elemento de M há uma única fatoração como produto de elementos de P, note que se pode obter P pela aplicação do isomorfismo ao alfabeto A de A^* do qual M é isomorfo (também vale a volta, como veremos mais adiante). Dizemos que P é o conjunto dos primos de M.

Observação 2.2. *Note que P é único. Suponha, por contradição, que P não seja único, e seja $Q \subseteq M$ outro conjunto de primos diferente de P. Sem perda de generalidade tome $x \in P$ sem ser a palavra vazia e tal que $x \notin Q$, daí existem palavras não vazias $y_1, y_2, \dots, y_n \in Q$ com $n \geq 2$ tal que $x = y_1 y_2 \dots y_n$, mas cada palavra y_i também pode ser fatorada em elementos de P, isso fornece uma nova fatoração para x em elementos de P (além dele próprio), o que dá uma contradição com a definição de P.*

Exemplo 2.3. *Se $M = A^*$ então P é o alfabeto A de A^*.*

A fim de fazer uma transição bem adaptada das questões sobre composições de inteiros para questões sobre monoides livres, precisaremos eventualmente saber de qual número é uma dada composição que esteja associada a uma certa palavra, e portanto definimos uma *função peso* $\omega : M \to \mathbb{N}$ como sendo uma função que satisfaz $\omega(m_1 m_2) = \omega(m_1) + \omega(m_2)$ para todo $m_1, m_2 \in M$ e $\omega(m) = 0$ se, e somente se, m é a palavra vazia.

Exemplo 2.4. *Em $\{a, b, c\}^*$, fixe uma palavra x e defina r, s e t como sendo os números de repetições das letras a, b e c respectivamente. Podemos definir uma* *função* $\omega : \{a, b, c\}^* \to \mathbb{N}$ *por* $\omega(x) = 1 * r + 2 * s + 3 * t$. *Neste caso temos, por exemplo, que* $\omega(a) = 1$, $\omega(b) = 2$ *e* $\omega(c) = 3$. *Claramente a função* ω *é uma função peso.*

Note que ω é determinada pelos valores que assume nos primos de M. Também poderemos estar interessados em contar o número de partes de uma composição olhando apenas para a palavra associada a ela, e daí definimos a *função comprimento* $l(x) = k$ quando $x = m_1 m_2 \cdots m_k$ onde cada $m_i \in A$.

Definição 2.5. *Seja* L *um submonoide de um monoide livre* M. *Dizemos que um elemento* $p \in L$ *é irredutível (em* L*) se* p *não é o elemento unidade de* M *e* p *não pode ser expresso como o produto de dois elementos de* L *diferentes da unidade.*

Note que a irredutibilidade de p depende de ambos p e L e que, apesar de essa fatoração sempre ser possível, em geral não é única. Mas se L é um monoide livre então essa fatoração é única e os elementos irredutíveis são os primos de L.

Seja M um monoide livre com uma função peso ω. Se x é uma indeterminada então a aplicação $m \mapsto x^{\omega(m)}$ é um homomorfismo de M no monoide das potências de x com a multiplicação. Considere a sequência $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ onde u_i é igual ao número de primos de peso i, supondo que tal número é finito para todo i. Isso dá a igualdade abaixo:

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} u_i x^i\right)^{-1} = \left(1 - \sum_{p \in P} x^{\omega(p)}\right)^{-1}, \tag{2.1}$$

onde P é o conjunto dos primos de M. Por outro lado, a unicidade da fatoração em primos em M garante que o número de palavras em M de peso n seja igual a soma

$$\sum_{a \in C(n)} u_{a_1} u_{a_2} \cdots u_{a_k}$$

e também igual ao coeficiente de x^n em

$$\sum_{m \in M} x^{\omega(m)},$$

levando à igualdade

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{a \in C(n)} u_{a_1} u_{a_2} \cdots u_{a_k} \right) x^n = \sum_{m \in M} x^{\omega(m)}. \tag{2.2}$$

Agora note que as expressões da esquerda das igualdades (2.1) e (2.2) são iguais pelo Lema 1.11 e, portanto, as da direita também são, fornecendo-nos a igualdade

$$\sum_{m \in M} x^{\omega(m)} = \left(1 - \sum_{p \in P} x^{\omega(p)} \right)^{-1}, \tag{2.3}$$

que é válida sempre que M é um monoide livre e P é o conjunto dos primos de M. Veremos que os itens do Teorema 1.10 podem ser interpretados desta maneira.

No que segue, estaremos interessados especialmente em monoides livres que sejam submonoides de A^* para algum alfabeto A. Por exemplo o conjunto das palavras em $\{a\}^*$ de comprimento par é um submonoide livre de $\{a\}^*$. O conjunto de palavras em $\{a\}^*$ de comprimento diferente de 1 é também um submonoide mas esse não é livre, visto que a^5 ou a^6 têm duas fotorações possíveis cada uma, $a^5 = a^2 \cdot a^3 = a^3 \cdot a^2$ e $a^6 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^3 \cdot a^3$ em palavras que não podem mais ser fatoradas. O conjunto de palavras em $\{a, b\}^*$ que iniciam com a, juntamente com a palavra vazia, é um submonoide livre cujos primos são da forma ab^i, para $i \in \mathbb{N}_0$ onde $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2.2 Ferramentas úteis

A seguir, discutiremos alguns lemas que são extremamente úteis para classificar submonoides de monoides livres que são livres.

Proposição 2.6. *Seja M um submonoide de um monoide livre A^*. Então M é livre se, e somente se, existe um subconjunto P de M tal que para todo elemento de M há uma única fatoração como produto de elementos de P*

Demonstração. Se M é livre há um isomorfismo entre M e algum A^*, que leva A em algum subconjunto de M, que chamamos de P. Note que P é como no enunciado e daí "$\Rightarrow$"segue. Por outro lado, se existe $P \subseteq M$ como afirmado pelo enunciado, construa uma bijeção qualquer entre P e algum alfabeto A, faça sua expansão a M e A^* preservando a operação de concatenação (produto de palavras). Tal expansão é um isomorfismo entre M e A^*, e o resultado segue. $\square$

Note que P é o conjunto dos primos e é igual ao conjunto das palavras irredutíveis do monoide livre M.

Lema 2.7. *Suponha que M é um submonoide de um monoide livre A^* com a propriedade de que cada palavra não vazia de M tem uma única fatoração da forma xy onde x é irredutível em M e $y \in M$. Então M é livre.*

Demonstração. Usaremos a Proposição 2.6 para concluir que M é livre. Por isso, provaremos por indução em n que toda palavra em M de comprimento n tem uma única fatoração em irredutíveis de M. Para $n = 0$ a asserção da indução segue. Agora suponha que w seja uma palavra em M de comprimento n maior do que zero e que todas as palavras em M de comprimento menor do que n têm uma única fatoração em irredutíveis. Seja $w = x_1 x_2 \cdots x_k$ uma fatoração de w em irredutíveis. Visto que w tem uma única fatoração da forma xy onde x é irredutível em M e $y \in M$, precisamos ter $x_1 = x$ e $x_2 \cdots x_k = y$. Como o comprimento de y é menor do que o de w, a hipótese de indução diz que y tem uma única fatoração em irredutíveis, que é $y = x_2 \cdots x_k$, assim $x_2 \cdots x_k$ ficam bem determinados, e a fatoração de w em irredutíveis também fica bem determinada como $w = x_1 x_2 \cdots x_k$, daí segue a prova por indução e portanto segue o resultado. $\square$

Definição 2.8. *Dizemos que um submonoide M de um monoide livre A^* satisfaz o critério de Schützenberger se ele obedece a propriedade de que, para todos p, q e r em A^*, se p, pq, qr e r estão em M então q está em M.*

O seguinte resultado útil é devido a Schützenberger ([13], Teorema 1.4); veja também Tilson [17].

Lema 2.9. *Seja M um submonoide de um monoide livre A^*. Então M é livre se, e somente se, M satisfaz o critério de Schützenberger.*

Demonstração. Primeiramente, suponha que M satisfaz o critério de Schützenberger. Queremos mostrar que a hipótese do Lema 2.7 segue. Seja w uma palavra não vazia de M e suponha que $w = xv$ onde x é irredutivel em M e $v \in M$. Suponha também que w também pode ser fatorado como $w = xy \cdot z$ onde y é não vazia e xy e z estão em M. Queremos provar que xy não é irredutível. Visto que x, $yz = v$, xy e z estão em M, pelo critério de Schützenberger nos temos que $y \in M$, e isto implica que xy é não irredutível, e daí w tem uma única fatoração possível que obedece a forma da hipótese do Lema 2.7, portanto w obedece a hipótese deste lema e M é livre.

Agora, suponha que M é livre, e suponha que p, pq, qr e r estão em M. Seja $w = pqr$. Então, como M é livre, w tem uma única fatoração $w = u_1u_2 \cdots u_k$ em primos de M (Proposição 2.6). As fatorações $w = p \cdot qr$ e $w = pq \cdot r$ em elementos de M implica que para algum $i \leq j$, nos tenhamos $p = u_1 \cdots u_i$, $q = u_{i+1} \cdots u_j$ e $r = u_{j+1} \cdots u_k$, e assim $q \in M$, portanto o critério de Schützenberger segue. $\square$

Necessitaremos, agora, dos seguintes conceitos antes de enunciar o próximo lema.

Definição 2.10. *Sejam u e v duas palavras. Dizemos que u se sobrepõe com v se existem palavras x e y não vazias tais que $ux = yv$ e $l(y) < l(u)$ (e assim $l(x) < l(v)$).*

Note que, como x e y não são a palavra vazia, ambas devem ter comprimentos $l(x)$ e $l(y)$ maiores do que zero.

Exemplo 2.11. *ab se sobrepõe com bc porque* $ab \cdot c = a \cdot bc$ *e vale que* $l(a) = 1 < 2 = l(ab)$ *(e também que* $l(c) = 1 < 2 = l(bc)$*).*

Definição 2.12. *Dizemos que uma palavra w é não-sobreposta se ela não se sobrepõe com ela própria.*

Exemplo 2.13. *É fácil ver que aa se sobrepõe com ela própria, mas ab é não-sobreposta porque, se fosse, existiriam palavras x e y tais que* $abx = yab$ *e* $0 < l(x), l(y) < l(ab) = 2$*, o que implicaria que* $l(x) = l(y) = 1$*, e daí as palavras x e y teriam uma única letra cada uma. Mas a igualdade* $ab \cdot x = y \cdot ab$ *é impossível, já que as expressões dos dois lados são palavras de três letras cada, onde a letra central é a em uma e b na outra.*

Definição 2.14. *Seja w uma palavra de um monoide livre* A^**. Denotamos por* A_w *o conjunto de palavras de* A^* *que iniciam com w, incluindo a palavra vazia.*

Então A_w é um submonoide de A^*.

Exemplo 2.15. *Se* $A = \{a\}$ *e* $w = a^2$*, então* A_w *não é livre, visto que* A_w *é o conjunto de palavras em* $\{a\}^*$ *de comprimento não igual a* 1 *e que ele viola o critério de Schützenberger (faça* $p = r = aa$*,* $q = a$*, daí* $p = r \in A_w$*,* $pq = qr = aaa \in A_w$ *mas* $q = a \notin A_w$*) e segue do Lema 2.9. Por outro lado, se* $A = \{a, b\}$ *e* $w = ab$ *então fica facil de ver que* A_w *é livre, pois os primos são, como vimos antes, da forma* ab^i *com* $i \in \mathbb{N}_0$ *e daí segue pela Proposição 2.6.*

Vai ser conveniente nos referirmos a A_w como "o monoide das palavras em A^* que iniciam com w", e mais geralmente, sempre que falarmos de monoides de palavras com alguma propriedade, estará implícito que a palavra vazia esteja inclusa, mesmo que a palavra vazia não obedeça à propriedade.

Lema 2.16. *O submonoide* A_w *do monoide livre* A^* *é livre se, e somente se, w é não-sobreposta.*

Demonstração. Mostraremos primeiro que a condição é suficiente. Suponha que w é não-sobreposta. Vamos mostrar que o critério de Schützenberger é válido, o que implica, pelo Lema 2.9, que A_w é livre. Suponha que p, pq, qr e r estejam em A_w e que r seja não vazia (o que evita o caso trivial). Então como qr e r ambos iniciam com w, e w é não-sobreposta, devemos ter ou $l(q) = 0$ implicando que q é a vazia, pertencente a A_w, ou $l(q) \geq l(w)$ (pois, caso contrário, o w inicial de qr seria forçado a sobrepor-se com o w inicial de r, contradizendo o fato de w ser não-sobreposta), que implica que, como qr inicia com w, assim o faz q, e portanto $q \in A_w$.

Para a necessidade, nós mostraremos que, se w se sobrepõe com ele próprio, então A_w não é livre. Suponha que w se sobrepõe com ele próprio, assim existem palavras t, u e v tais que $t = wu = vw$, onde v (e assim também u) têm comprimento menor que o de w. Vamos mostrar que wt tem duas fatorações diferentes em irredutíveis em A_w. Qualquer palavra em A_w que não é irredutível precisa ter um comprimento de pelo menos duas vezes o comprimento de w, assim $wu \in A_w$ e $wv \in A_w$ são ambos irredutíveis. Consequentemente $w \cdot wu$ e $wv \cdot w$ são duas diferentes fatorações de wt em irredutíveis de A_w, assim A_w não é livre. $\square$

Observação 2.17. *Podemos mostrar, similarmente, que se u não se sobrepõe com v então o submonoide de A^* de palavras que iniciam com u e terminam com v é livre.*

Capítulo 3

Composições de Fibonacci

Definição 3.1. *Uma composição de Fibonacci de n é uma composição de n cujas partes pertençam ao conjunto* $\{1, 2\}$.

Assim, o conjunto de todas as composições de Fibonacci é o monoide livre $\{1, 2\}^*$. A maioria dos nossos resultados será consequência do fato de que existem F_{n+1} composições de Fibonacci de n, o que pode ser provado observando que o número de composições de Fibonacci de n segue a mesma recorrência de F_{n+1} (por indução, o número de composições de Fibonacci de n é igual ao número das terminadas em 1 $(= F_n)$ mais o número das terminadas em 2 $(= F_{n-1})$). Há muitas outras identidades que podem ser provadas usando essa interpretação dos números de Fibonacci em Benjamin e Quinn [2] .

Aplicando a igualdade (2.3) a este monoide livre $\{1, 2\}^*$ com a função peso $\omega(1) = 1$, $\omega(2) = 2$, junto com o fato de que existem F_{n+1} composições de Fibonacci de n, obtemos a função geradora

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} x^n = \frac{1}{1 - x - x^2} \, ,$$

que é equivalente a (1.3). As provas dos itens (i)-(vi) do Teorema 1.10 e de outras fórmulas similares poderão ser todas baseadas em submonoides livres do monoide livre das composições de Fibonacci.

3.1 Submonoides livres do monoide livre das composições de Fibonacci

Agora, vamos considerar o monoide $\{1, 2\}_1$ das composições de Fibonacci que iniciam com 1 (incluindo a composição de Fibonacci vazia). Pelo Lema 2.16 este monoide é livre (embora seja fácil ver isso diretamente), e os primos são as composições da forma 12^i, para $i \geq 0$. Assim a função geradora para os primos neste monoide livre é $\sum_{i=0}^{\infty} x^{2i+1}$.

Segue que se s_n é o número de composições de Fibonacci de n que iniciam com 1, com $s_0 = 1$, então

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \left(1 - \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i+1}\right)^{-1} \tag{3.1}$$

e o lado direito de (3.1) é a função geradora para composições com partes ímpares. Mas o número de composições de Fibonacci de n que iniciam com 1 é justamente número de composições de Fibonacci de $n-1$, assim vemos que para $n > 0$, o número de composições de n em partes ímpares é igual ao número de composições de Fibonacci de $n-1$, que é F_n. Assim (iii) segue.

Podemos dar uma prova bijetiva simples deste fato. Suponha que c é uma composição de Fibonacci de $n-1$. Assim $1c$ é uma composição de n que inicia com 1, que pode ser expressa unicamente como $12^{i_1}12^{i_2}\cdots 12^{i_k}$. Então a correspondente composição de n em partes ímpares é $(1+2i_1, 1+2i_2, \cdots, 1+2i_k)$.

Podemos aplicar exatamente a mesma análise com os papéis de 1 e 2 trocados, e vamos encontrar que o número de composições de Fibonacci de n que iniciam com 2 é igual ao número de composições de n em parte maiores do que 1, isto é o ítem (ii) do Teorema 1.10.

Um resultado similar é aplicado a composições cujas partes pertençam a qualquer conjunto de duas partes (veja Zeilberger [18], Sills [14] e Munagi [12], Teorema 1.2):

Teorema 3.2. *Sejam p e q inteiros distintos. Então para $n \geq p$, o número de composições de $n - p$ em partes iguais a p ou q é igual ao número de composições de n em partes da forma $p + qi$, onde $i \in \mathbb{N}_0$.*

Demonstração. Primeiramente, note que anexar uma parte p no inicio de uma composição de $n-p$ em partes n e p fornece uma composição de n que inicia com p. No monoide livre $\{p, q\}_p$ de composições em partes p e q que iniciam com p, os primos são composições da forma pq^i com $i \in \mathbb{N}_0$. Assim, uma bijeção entre composições de $n > 0$ que iniciam com p e composições de n em partes da forma $p+qi$ (ou seja uma bijeção entre $\{p, q\}_p$ e $\{p+qi \mid i \in \mathbb{N}_0\}^*$) é dada pela função que leva $pq^{i_1}pq^{i_2}\cdots pq^{i_k}$ em $(p + qi_1, p + qi_2, \cdots, p + qi_k)$. $\square$

A identidade de funções geradoras que corresponde ao Teorema 3.2 é

$$1 + \frac{x^p}{1 - x^p - x^q} = \left(1 - \frac{x^p}{1 - x^q}\right)^{-1}$$

onde o coeficiente de x^n na função geradora da esquerda conta o número de composições de $n-p$ em partes p e q e, na da direita, o coeficiente de x^n conta o número de composições de n em partes da forma $p + qi$, com $i \in \mathbb{N}_0$.

Mais geralmente, podemos mostrar que, para todo $k \geq 1$,

$$1 + x^k \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} x^n = 1 + \frac{x^k}{1 - x - x^2}$$

é a função geradora de um monoide livre.

Teorema 3.3. *Fixe um inteiro $k \geq 2$. O monoide M das composições de Fibonacci iniciando com 21^{k-2} é um monoide livre do qual os primos são da forma $21^{k-2}1^iq$, onde $i \in \mathbb{N}_0$ e q é a palavra vazia ou é uma composição de Fibonacci que inicia com 2 e não contém 21^{k-2}.*

A função geradora dos primos de M é $\dfrac{x^k}{1-x-x^2+x^k}$, e assim temos uma interpretação combinatória para a identidade:

$$1 + \frac{x^k}{1-x-x^2} = \left(1 - \frac{x^k}{1-x-x^2+x^k}\right)^{-1} \tag{3.2}$$

Demonstração. Pelo Lema 2.16, M é um monoide livre, e é fácil de ver que os primos de M são como foi afirmado pelo enunciado do teorema. Seja Q o monoide das composições de Fibonacci que iniciam com 2 e não contêm 21^{k-2} (note que tal conjunto é um monoide). Então Q é um monoide livre (em virtude da Proposição 2.6) do qual o conjunto dos primos (que é igual ao conjunto dos irredutíveis) consiste em composições da forma 21^i, com $0 \leq i \leq k-3$. Assim, os primos têm pesos que variam de 2 a $k-1$ sendo um de cada peso nesse intervalo. Portanto a função geradora para Q é

$$\begin{aligned}
\left(1 - \sum_{j=2}^{k-1} x^j\right)^{-1} &= \left(1 - x^2 \sum_{j=0}^{k-3} x^j\right)^{-1} \\
&= \left(1 - x^2 \frac{1-x^{k-2}}{1-x}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1-x-x^2+x^k}{1-x}\right)^{-1} \\
&= \frac{1-x}{1-x-x^2+x^k},
\end{aligned}$$

e como os primos de M são da forma $21^{k-2}1^iq$, segue que a função geradora para os primos de M é

$$\overbrace{x^k}^{21^{k-2}} \cdot \overbrace{\frac{1}{1-x}}^{1^i} \cdot \overbrace{\frac{1-x}{1-x-x^2+x^k}}^{q} = \frac{x^k}{1-x-x^2+x^k}.$$

$\square$

Para $k = 2$, M é um monoide livre de composições que inicicam com 2, e os primos, como dito antes, são da forma 21^i, para $i \geq 0$.

Para $k = 3$, a função geradora para os primos de M é

$$\begin{aligned}
\frac{x^3}{1-x-x^2+x^3} &= \frac{x^3}{(1-x)^2(1+x)} \cdot \frac{1+x}{1+x} \\
&= \frac{x^3+x^4}{(1-x^2)^2} \\
&= x^3\frac{1}{(1-x^2)^2} + x^4\frac{1}{(1-x^2)^2}
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x^2)^2} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n\right)^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}1\right)(x^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}
\end{aligned}$$

E daí

$$\begin{aligned}
x^3\frac{1}{(1-x^2)^2} + x^4\frac{1}{(1-x^2)^2} &= x^3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n} + x^4\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n+3} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n+4} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}nx^{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}nx^{2n+2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor x^n
\end{aligned}$$

Ou seja, o número de primos de peso n é $\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$, o que, juntamente com as Igualdades (2.3) e (2.2) (ou usando diretamente o Lema 1.11 com u_i igual ao número de primos de peso i) fornece uma função geradora para M:

$$\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor x^n\right)^{-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{a\in C(n)}\left\lfloor\frac{a_1-1}{2}\right\rfloor\cdots\left\lfloor\frac{a_k-1}{2}\right\rfloor\right)x^n$$

Mas a Igualdade (3.2) do Teorema 3.3 também fornece a função geradora de M que pode ser escrita assim:

$$1+\frac{x^3}{1-x-x^2}=1+\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-2}x^n.$$

Comparando coeficientes chegamos à fórmula

$$F_{n-2}=\sum_{a\in C(n)}\left\lfloor\frac{a_1-1}{2}\right\rfloor\cdots\left\lfloor\frac{a_k-1}{2}\right\rfloor. \tag{3.3}$$

válida para $n\geq 2$. Podemos também obter essa fórmula combinatoriamente mostrando que existem $\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$ primos de M com peso n. Neste caso, os primos são da forma $21^{i+1}2^j$ para $i,j\in\mathbb{N}_0$. Agora, note que o número de primos de um certo peso n é igual ao número de pares distintos $i,j\in\mathbb{N}_0$ tais que $\omega(21^{i+1}2^j)=n$, que é uma igualdade equivalente a $i+1+2(j+1)=n$, que, por sua vez, equivale a $i=n-2j-3$. Como $i,j\geq 0$, procuramos a quantidade de soluções $j\geq 0$ de $n-2j-3\geq 0$. Note que $j\in\mathbb{N}_0$ implica que

$$0\leq n-2j-3\Leftrightarrow j\leq\frac{n-3}{2}\Leftrightarrow j\leq\left\lfloor\frac{n-3}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor-1$$

e daí $j=0,1,2,3,\ldots,\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor-1$ conta, precisamente, $\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$ soluções possíveis.

Existe uma interpretação um pouco mais simples de (3.3). Em vez de composições de Fibonacci que iniciam com 21, consideramos composições de Fibonaci que iniciam com 1 e terminam com 2. Isto forma um monoide livre cujos primos são da forma 1^i2^j, onde $i,j\geq 1$. O número de primos de peso n fica igual ao número de soluções $i,j\geq 1$ de $i+2j=n$, ou melhor, de $n-2j=i\geq 1$. Mas,

$$1\leq n-2j\Leftrightarrow j\leq\frac{n-1}{2}\Leftrightarrow j\leq\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$$

e, portanto, $j = 1, 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ conta $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ soluções possíveis.

Os casos $k = 2, 3, 4$ ou 5 em (3.2) são casos particulares das identidades

$$1 + \frac{a}{1-a-b} = \left(1 - \frac{a}{1-b}\right)^{-1} \tag{3.4}$$

$$1 + \frac{ab}{1-a-b} = \left(1 - \frac{ab}{(1-a)(1-b)}\right)^{-1} \tag{3.5}$$

$$1 + \frac{a^2 b}{1-a-b} = \left(1 - \frac{a^2 b}{(1-a)(1-b-ab)}\right)^{-1} \tag{3.6}$$

que também podem ser interpretadas em termos de monoides livres.

Existem outras aplicações interessantes destas fórmulas. Tomar $a = b = x$ em (3.4), fornece

$$1 + \frac{x}{1-2x} = \left(1 - \frac{x}{1-x}\right)^{-1},$$

onde a expressão da direita conta, pela igualdade (2.3), as palavras do monoide livre $\mathbb{N}^*$ de todas as composições de inteiros, o que mostra que o número total de composições de n, para $n > 0$, é 2^{n-1}. Tomar $a = b = x$ em (3.5), fornece

$$1 + \frac{x^2}{1-2x} = \left(1 - \frac{x^2}{(1-x)^2}\right)^{-1} = \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)x^n\right)^{-1},$$

onde a expressão da direita conta, pela igualdade (2.3), as palavras de um monoide livre no qual há $n-1$ primos de cada peso n, mas os coeficientes dessa expressão são descritos pela igualdade (2.2), mostrando que, para $n \geq 2$,

$$2^{n-2} = \sum_{a \in C(n)} (a_1 - 1) \cdots (a_k - 1).$$

Tomando $a = b = x$ em (3.6), e usando o fato de que

$$\frac{x^3}{(1-x)(1-x-x^2)} = \frac{x}{1-x-x^2} - \frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} (F_n - 1)x^n,$$

encontramos

$$1 + \frac{x^3}{1-2x} = \left(1 - \frac{x^3}{(1-x)(1-x-x^2)}\right)^{-1} = \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} (F_n - 1)x^n\right)^{-1},$$

onde a expressão da direita conta, novamente pela igualdade (2.3), palavras de um monoide no qual há $F_n - 1$ primos de peso n, daí novamente os coeficientes de tal expressão são descritos pela igualdade (2.2), o que mostra que, para $n \geq 3$,

$$2^{n-3} = \sum_{a \in C(n)} (F_{a_1} - 1) \cdots (F_{a_k} - 1) \,. \tag{3.7}$$

Note que os termos não nulos aparecem a partir de composições em partes maiores do que 2. A fórmula (3.7) "explica"porque os três primeiros valores não nulos de $F_n - 1$ são as três primeiras potencias de 2 (isto é, $F_3 - 1 = 1$, $F_4 - 1 = 2$ e $F_5 - 1 = 4$), visto que para $3 \leq n < 6$ existe justamente 1 termo não nulo na soma (3.7). Que $F_n - 1 = 2^{n-3}$ para $3 \leq n < 6$ pode também ser visto a partir de

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (F_n - 1)x^n &= \frac{x}{1 - x - x^2} - \frac{x}{1 - x} \\
&= \frac{x^3}{1 - 2x + x^3} \\
&= x^3 \frac{1}{1 - (2x - x^3)} \\
&= x^3 (1 + (2x - x^3) + (2x - x^3)^2 + (2x - x^3)^3 + \cdots) \\
&= x^3 (1 + 2x + 4x^2 + \cdots)
\end{aligned}$$

Colocar $a = x$ e $b = x^m$ em (3.5), fornece uma generalização de (3.3):

Teorema 3.4. *Fixe $m \leq 1$ e defina os números r_n por*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n = \frac{1}{1 - x - x^m} \,.$$

Então para $n \geq m + 1$ temos

$$r_{n-m-1} = \sum_{a \in C(n)} \left\lfloor \frac{a_1 - 1}{m} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{a_k - 1}{m} \right\rfloor ,$$

onde os únicos termos não nulos correspondem a composições em partes maiores ou iguais a $m + 1$.

Demonstração. Pela definicão de r_n e por (3.5) com $a = x$ e $b = x^m$, temos

$$1 + \sum_{n=m+1}^{\infty} r_{n-m-1} x^n = 1 + \frac{x^{m+1}}{1 - x - x^m} = \left(1 - \frac{x^{m+1}}{(1-x)(1-x^m)}\right)^{-1}.$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{x^{m+1}}{(1-x)(1-x^m)} \cdot \frac{1-x^m}{1-x^m} &= x^{m+1}(1 + x + \cdots + x^{m-1})\frac{1}{(1-(x^m))^2} \\
&= x^{m+1}(1 + x + \cdots + x^{m-1})(1 + 2x^m + 3x^{2m} + 4x^{3m} + \cdots) \\
&= x(1 + x + \cdots + x^{m-1})(1x^m + 2x^{2m} + 3x^{3m} + 4x^{4m} + \cdots) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor x^n
\end{aligned}$$

e o resultado segue. □

Podemos dar uma interpretação combinatória do Teorema 3.4. O número r_n conta as composições de n em partes 1 e m, assim para $n \geq m + 1$, r_{n-m-1} é o número de tais composições iniciadas com 1 e terminadas em m. Estas composições formam um monoide livre no qual os primos são da forma $1^i m^j$, onde $i, j \geq 1$, e existem $\left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor$ delas com peso n. Os números r_n para $m = 3, 4, 5, 6, \ldots, 15$ são as sequências A000930, A003269, A003520, A005708-A005711 e A017898-A017909 que podem ser consultadas no site de Sloane [15] descrito na bibliografia desta dissertação. Esse site tem uma base de dados contendo em torno de 200.000 sequências incluindo, quando possível, função geradora, recorrência, formula fechada e referências.

3.2 Outras Aplicações

Para ilustrar mais a aplicabilidade do método desenvolvido neste capítulo e nos anteriores, daremos outro exemplo.

Vamos considerar o monoide livre M das composições com partes no conjunto $\{1,2,3\}$, isto é, $M = \{1,2,3\}^*$. Seja M_n o número de tais composições de n. Os primos desse monoide são 1, 2 e 3. Portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2-x^3}\,.$$

Isso equivale à igualdade

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} M_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} M_{n-2} x^n + \sum_{n=3}^{\infty} M_{n-3} x^n + 1$$

Segue que a sequência (M_n) satisfaz a recorrência

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2} + M_{n-3}, \quad \forall n \geq 3.$$

Isto também poderia ser justificado dividindo em casos, conforme o elemento final da composição fosse 1, 2 ou 3.

É fácil ver que $M_0 = 1$, $M_1 = 1$, $M_2 = 2$, $M_3 = 4$, $M_4 = 7$, $M_5 = 13$, ...

Os números de Tribonacci T_n são definidos como sendo a solução da recorrência

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}, \quad T_0 = T_1 = 0, \quad T_2 = 1.$$

Calculando mais alguns termos, pela recorrência, encontramos

$$T_3 = 1, \quad T_4 = 2, \quad T_5 = 4, \quad T_6 = 7.$$

Segue que $M_n = T_{n+2}$, pois satisfazem a mesma recorrência e as mesmas condições iniciais.

A partir daí, obtemos a função geradora dos números de Tribonacci

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n = \frac{x^2}{1-x-x^2-x^3}\,.$$

A seguir passamos a considerar o submonoide das composições de números pares, com partes no conjunto $\{1,2,3\}$. O peso da composição de um inteiro par da forma $2n$ é definido como sendo igual a n. E daí:

Os primos de peso 1 são 11, 2

Os primos de peso 2 são 31, 13, 121

Os primos de peso 3 são 1221, 321, 123, 33

Os primos de peso 4 são 12221, 3221, 1223, 323

Para todo $n \geq 3$, existem 4 primos de peso n, a saber, $1222\cdots21$, $3222\cdots21$, $1222\cdots23$, $3222\cdots23$.

Daí segue a função geradora

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} M_{2n}x^n &= (1-2x-3x^2-4x^3-4x^4-4x^5)^{-1} \\
&= \left(1-2x-3x^2-4x^3\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)^{-1} \\
&= \left(1-2x-3x^2-\left(\frac{4x^3}{1-x}\right)\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1-x-2x+2x^2-3x^2+3x^3-4x^3}{1-x}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1-3x-x^2-x^3}{1-x}\right)^{-1} \\
&= \frac{1-x}{1-3x-x^2-x^3}
\end{aligned}$$

e também a identidade

$$T_{2(n+1)} = M_{2n} = \sum_{a\in C(n)} 2^{\sharp\{i|a_i=1\}} \cdot 3^{\sharp\{j|a_j=2\}} \cdot 4^{\sharp\{k|a_k\geq 3\}}.$$

Por exemplo, para $n = 3$, temos $C(3) = \{3, 12, 21, 111\}$ e

$$T_8 = M_6 = 4^1 + 2^1 \cdot 3^1 + 2^1 \cdot 3^1 + 2^3 = 24.$$

Agora, como uma outra aplicação, daremos uma demonstração curta para o seguinte resultado de [3].

Defina $c(n, \hat{2})$ como o número de composições sem partes iguais 2. Então vale a

Proposição 3.5. *Para todo $n \geq 3$, $c(n,\hat{2})$ é dado por*

$$c(n,\hat{2}) = 2c(n-1,\hat{2}) - c(n-2,\hat{2}) + c(n-3,\hat{2})$$

com as condições iniciais $c(0,\hat{2}) = c(1,\hat{2}) = c(2,\hat{2}) = 1$, e pela função geradora

$$G_c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n,\hat{2})x^n = \frac{1-x}{1-2x+x^2-x^3}\,.$$

Demonstração. Aqui o conjunto dos primos é $\{1,3,4,5,6,7,\dots\}$. Por (2.3), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c(n,\hat{2})x^n &= \frac{1}{1-x-x^3-x^4-x^5-\cdots} = \frac{1}{1-x-x^2-x^3-\cdots+x^2} \\
&= \frac{1}{1-\dfrac{x}{1-x}+x^2} = \frac{1-x}{1-x-x+x^2-x^3} \\
&= \frac{1-x}{1-2x+x^2-x^3}\,,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
1-x &= (1-2x+x^2-x^3)\sum_{n=0}^{\infty} c(n,\hat{2})x^n \\
&= \underbrace{c(0,\hat{2})}_{=1} + \underbrace{\left(c(1,\hat{2})-2c(0,\hat{2})\right)}_{=-1}x + \underbrace{\left(c(2,\hat{2})-2c(1,\hat{2})+c(0,\hat{2})\right)}_{=0}x^2 \\
&\quad + \sum_{n=3}^{\infty} \underbrace{\left(c(n,\hat{2})-2c(n-1,\hat{2})+c(n-2,\hat{2})-c(n-3,\hat{2})\right)}_{=0}x^n\,,
\end{aligned}$$

o que, comparando os coeficientes, fornece

$$c(0,\hat{2}) = 1,$$

$$c(1,\hat{2}) = -1 + 2c(0,\hat{2}) = 1,$$

$$c(2,\hat{2}) = 2c(1,\hat{2}) - c(0,\hat{2}) = 1$$

e, para todo $n \geq 3$,

$$c(n,\hat{2}) = 2c(n-1,\hat{2}) - c(n-2,\hat{2}) + c(n-3,\hat{2})$$

□

Uma interpretação combinatória para a recorrência pode ser dada como segue. Há três tipos de composições de n sem partes iguais a 2: as terminadas em 1 (contadas por $c(n-1,\hat{2})$), as terminadas em 3 (contadas por $c(n-3,\hat{2})$), e as terminadas em uma parte maior ou igual a 4. Mas o número destas últimas, como efeito de subtrair 1 da última parte em cada composição, é igual ao número das composições de $n-1$ sem partes 2 terminadas por uma parte maior ou igual a 3, que são iguais as composições de $n-1$ sem partes 2 não terminadas 1. Mas o número de composições desse tipo é igual a $c(n-1,\hat{2})$ menos o número das terminadas em 1, que são contadas por $c(n-2,\hat{2})$. Daí a recorrência segue.

Há um problema interssante que consiste em calcular o número c_n de partes 2 em todas as composições de Fibonacci de um certo inteiro n. Por exemplo, como as composições de Fibonacci de 4 são $2+2$, $2+1+1$, $1+2+1$, $1+1+2$ e $1+1+1+1$, então $c_4 = 5$. Podemos calcular c_n usando a seguinte função geradora em duas variáveis:

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x-yx^2} = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j}x^i y^j \ ,$$

onde $a_{i,j}$ é o número de composições de i em que a parte 2 aparece j vezes.

Note que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,1) = \frac{x^2}{(1-x-x^2)^2} = \sum_{\substack{i=0\\j=1}}^{\infty} j a_{i,j} x^i y^{j-1}\Big|_{y=1} = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j\geq 1} j a_{i,j}\right) x^i \ .$$

Mas

$$c_i = \sum_{j\geq 1} j a_{i,j} \ ,$$

de forma que

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{x^2}{(1-x-x^2)^2} \ .$$

Com $(1-x-x^2)^2 = 1-2x-x^2+2x^3+x^4$, isso implica que

$$\begin{aligned} x^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i - \sum_{i=0}^{\infty} 2c_i x^{i+1} - \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i+2} + \sum_{i=0}^{\infty} 2c_i x^{i+3} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i+4} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i - \sum_{i=1}^{\infty} 2c_{i-1} x^i - \sum_{i=2}^{\infty} c_{i-2} x^i + \sum_{i=3}^{\infty} 2c_{i-3} x^i + \sum_{i=4}^{\infty} c_{i-4} x^i \,, \end{aligned}$$

isto é, para todo $n \geq 4$

$$c_n = 2c_{n-1} + c_{n-2} - 2c_{n-3} - c_{n-4}$$

com $c_0 = c_1 = 0$, $c_2 = 1$ e $c_3 = 2$

Para encontrar a função geradora do número d_n de vezes em que o 1 aparece consideramos a função geradora g dada por

$$g(x,y) = \frac{1}{1-yx-x^2} = \sum_{i,j=0}^{\infty} b_{i,j} x^i y^j \,,$$

onde $b_{i,j}$ é o número de composições de i em que o 1 aparece j vezes. Seguindo a mesma ideia anterior obtemos

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,1) = \frac{x}{(1-x-x^2)^2} = \sum_{\substack{i=0 \\ j=1}}^{\infty} j b_{i,j} x^i y^{j-1} \Big|_{y=1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j\geq 1} j b_{i,j} \right) x^i \,.$$

Como $d_i = \sum_{j\geq 1} j b_{i,j}$, temos

$$\sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i = \frac{x}{(1-x-x^2)^2} \,.$$

Portanto

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{x^2}{(1-x-x^2)^2} = x \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i = \sum_{i=1}^{\infty} d_{i-1} x^i \,,$$

isto é, $c_i = d_{i-1}$, para $i \geq 1$.

Essa relação pode ser interpretada combinatorialmente, como segue: fixe $n \geq 1$. Tome uma composição de Fibonacci de n que contenha partes 2, escolha um desses 2 e substitua-o por 1. Claramente obtemos uma única composição de Fibonacci de

$n-1$. Por outro lado, tome uma composição de Fibonacci de $n-1$ que contenha partes 1, escolha uma dessas partes 1 e substitua-o por 2. Claramente obtemos uma única composição de Fibonacci de n. Assim, cada composição de Fibonacci de n com uma parte 2 escolhida está associada biunivocamente a uma composição de Fibonacci de $n-1$ com uma parte 1 escolhida ou, em outras palavras, cada parte 2 de uma composição de Fibonacci de n está associada biunivocamente a uma parte 1 de uma composição de Fibonacci de $n-1$. Ou seja, o número de partes 2 das composições de Fibonacci de n é igual ao número de partes 1 das composições de Fibonacci de $n-1$, e daí $c_i = d_{i-1}$.

Capítulo 4

Multisecção de monoides livres

Para explicar resultados tais como os itens (iv)-(vi) do Teorema 1.10 precisamos considerar composições de números que sejam somente pares ou somente ímpares. Mais geralmente, dando m e i, poderiamos considerar composições de Fibonacci somente de números que sejam congruentes a i módulo m.

O seguinte resultado diz que os monoides associados aos conjuntos de composições de nosso interesse são livres.

Lema 4.1. *Seja M um monoide livre com uma função peso e seja m um inteiro positivo. Então o submonoide de M que contém os elementos de pesos divisíveis por m é livre.*

Demonstração. Usaremos o Lema 2.9. Suponhamos que p, pq, qr e r têm pesos divisíveis por m. Sabemos que $\omega(qr) = \omega(q) + \omega(r)$, ou seja, $\omega(q) = \omega(qr) - \omega(r)$, onde $\omega(qr)$ e $\omega(r)$ são divisíveis por m. Isso garante que $\omega(q)$ seja divisível por m. Daí, o critério de Schützenberger se aplica e o resultado segue. $\square$

4.1 Multisecção do monoide livre das composições de Fibonacci

Devemos, agora, aplicar o Lema 4.1 em monoides livres de Fibonacci. Defina $f_{m,i}$ por

$$f_{m,i} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{mn+i+1} x^n \,,$$

assim o coeficiente de x^n em $f_{m,i}$ é o número de composições de Fibonacci de $mn+i$.

Segue pelo Lema 4.1 que o monoide das composições de Fibonacci de múltiplos de m é livre. Definiremos agora uma função peso neste monoide livre tomando o peso de uma composição de mn como sendo n. Então a função geradora deste monoide (nesta nova função peso) é $f_{m,0}$.

Agora seja w uma composição de Fibonacci não-sobreposta de um inteiro $r = mk - i$, onde $k \geq 1$ e $0 \leq i < m$. Então pelos Lemas 2.16 e 4.1, o monoide das composições de Fibonacci de multiplos de m, iniciadas com w, é um monoide livre. A função geradora para este monoide livre pode ser encontrada considerando que, como as palavras são iniciadas por w, então elas devem ser composições de Fibonacci de inteiros maiores ou iguais a r, assim

$$mn \geq mk - i \Leftrightarrow n \geq \frac{mk-i}{m} \Leftrightarrow n \geq \left\lceil \frac{mk-i}{m} \right\rceil = k \,.$$

Portanto $n \geq k$, ou seja, as palavras do monoide são composições de Fibonacci de inteiros mn com $n \geq k$, e como há F_{mn-r+1} composições de Fibonacci de mn

(palavras de peso n) iniciadas com w, a função geradora assume a forma

$$\begin{aligned} 1+\sum_{n=k}^{\infty} F_{mn-r+1}x^n &= 1+\sum_{n=0}^{\infty} F_{m(n+k)-r+1}x^{n+k} \\ &= 1+\sum_{n=0}^{\infty} F_{mn+i+1}x^{n+k} \\ &= 1+x^k f_{m,i}\,. \end{aligned}$$

Nesta seção, consideraremos alguns poucos casos desta função geradora, válida para m arbitrário. Nas duas próximas seções veremos em mais detalhes os casos $m=2$ e $m=3$.

Não é dificil mostrar (usando a fórmula de Binet para os números de Fibonacci) que

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{mn+j}x^n = \frac{F_j+(-1)^j F_{m-j}x}{1-L_m x+(-1)^m x^2}\,, \tag{4.1}$$

onde L_n é o n-ésimo número de Lucas ($L_0=2$ e $L_n=F_{n-1}+F_{n+1}$).

Demonstração. Sabemos que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$ e que $L_n=\alpha^n+\beta^n$ onde $\alpha =$

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Note que $\alpha\beta = -1$. Daí segue diretamente que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} F_{mn+j}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{mn+j} - \beta^{mn+j})x^n \\
&= \frac{\alpha^j}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^m x)^n - \frac{\beta^j}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} (\beta^m x)^n \\
&= \frac{\alpha^j}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-\alpha^m x} - \frac{\beta^j}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-\beta^m x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\alpha^j - \beta^m \alpha^j x - \beta^j + \alpha^m \beta^j x}{1 - \alpha^m x - \beta^m x + (\alpha\beta)^m x^2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\alpha^j - \beta^{m-j}(\beta\alpha)^j x - \beta^j + \alpha^{m-j}(\alpha\beta)^j x}{1 - \alpha^m x - \beta^m x + (\alpha\beta)^m x^2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\alpha^j - \beta^{m-j}(-1)^j x - \beta^j + \alpha^{m-j}(-1)^j x}{1 - \alpha^m x - \beta^m x + (-1)^m x^2} \right) \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^j - \beta^j) + (-1)^j \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{m-j} - \beta^{m-j})x}{1 - (\alpha^m + \beta^m)x + (-1)^m x^2} \\
&= \frac{F_j + (-1)^j F_{m-j} x}{1 - L_m x + (-1)^m x^2}
\end{aligned}$$

□

4.2 Algumas interpretações para as funções geradoras de F_{mn+1} e de F_{mn-1}

Podemos encontrar interpretações simples em monoides livres para funções geradoras para F_{mn+1} e F_{mn-1}.

Para F_{mn+1} temos a seguinte fórmula, devida a Hoggatt [7].

Teorema 4.2.

$$f_{m,0} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{mn+1}x^n = \frac{1 - F_{m-1}x}{1 - L_m x + (-1)^m x^2} = \left(1 - F_{m+1}x - \frac{F_m^2 x^2}{1 - F_{m-1}x}\right)^{-1} \tag{4.2}$$

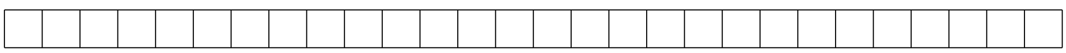
Demonstração. A primeira igualdade é a definição de $f_{m,0}$. O caso $j = 1$ de (4.1) justifica a segunda igualdade. A fórmula $L_m = F_{m-1} + F_{m+1}$, e a identidade de Cassini $F_{m+1}F_{m-1} - (-1)^m = F_m^2$ justificarão a terceira, como vemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1 - F_{m-1}x}{1 - L_m x + (-1)^m x^2} &= \left(\frac{1 - L_m x + (-1)^m x^2}{1 - F_{m-1}x}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1 - F_{m-1}x - F_{m+1}x + (-1)^m x^2}{1 - F_{m-1}x}\right)^{-1} \\
&= \left(1 + \frac{-F_{m+1}x + (F_{m+1}F_{m-1} - F_m^2)x^2}{1 - F_{m-1}x}\right)^{-1} \\
&= \left(1 + \frac{-F_{m+1}x(1 - F_{m-1}x) - F_m^2 x^2}{1 - F_{m-1}x}\right)^{-1} \\
&= \left(1 - F_{m+1}x - \frac{F_m^2 x^2}{1 - F_{m-1}x}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

□

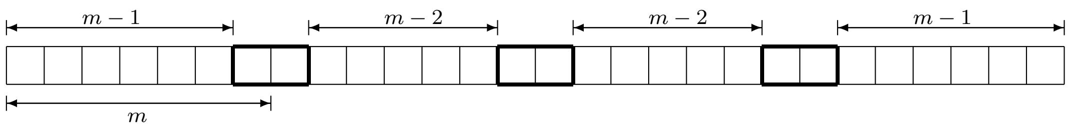
Podemos interpretar o Teorema 4.2 combinatorialmente pela descrição dos primos do monoide livre das composições de Fibonacci dos múltiplos de m. Note que os primos de peso 1 são composições de Fibonacci de m, que são contadas por F_{m+1}. Os primos de peso $n > 1$ são composições de múltiplos de m irredutíveis, ou seja, que não podem ser decompostas em duas composições de múltiplos de m de peso maior ou igual a 1. Para contar tais composições faremos a seguinte analogia:

Fixe um inteiro mn do qual contaremos as decomposições irredutíveis. Podemos pensar nas composições em partes 1 e 2 como sendo formas de se preencher o reticulado de altura unitária e base medindo mn unidades reticuladas



com peças quadradas e dominós:

Agora, note que uma composição, de algum múltiplo de m, só pode ser quebrada nas posições do reticulado múltiplas de m, se quisermos que as duas composições resultantes da quebra devam ser, também, múltiplas de m. Assim, uma tal composição é irredutível se, e somente se, não pode ser quebrada nas posições múltiplas de m, o que ocorre se, e somente se, houver dominós ocupando tais posições, já que os dominós assim alocados impedem a quebra da composição em outras duas múltiplas de m. Em suma, a alocação dos dominós nestas posições fornece o reticulado parcialmente preenchido:



que, após ser completamente preenchido com peças quadradas e dominós, torna-se uma composição de Fibonacci da forma $u2v_1 2v_2 2v_3 2 \ldots 2v_k 2w$ onde u e w são composições de Fibonacci de $m-1$ (há F_m composições desse tipo) e cada v_i é uma composição de Fibonacci de $m-2$ (há F_{m-1} composições desse tipo). Assim, o número de composições de um inteiro mn, com $n \geq 2$, que tenham tal forma é igual a $F_m^2 F_{m-1}^{n-2}$ e, portanto, a função geradora que conta esses primos, de peso $n \geq 2$, é dada por

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} F_m^2 F_{m-1}^{n-2} x^n &= F_m^2 x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (F_{m-1}x)^n \\
&= F_m^2 x^2 \cdot \frac{1}{1 - F_{m-1}x} \\
&= \frac{F_m^2 x^2}{1 - F_{m-1}x}
\end{aligned}
$$

o que completa a interpretação do Teorema 4.2.

Há uma fórmula análoga para F_{mn-1}, correspondendo a composições de Fibonacci de múltiplos de m iniciados por 2, que dão a função geradora $1 + xf_{m,m-2}$.

Um cálculo direto fornece o seguinte resultado, também devido a Hoggatt [7].

Teorema 4.3.

$$1 + xf_{m,m-2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn-1}x^n = \left(1 - F_{m-1}x - \frac{F_m^2 x^2}{1 - F_{m+1}x}\right)^{-1} \tag{4.3}$$

Demonstração. A primeira igualdade segue da definição de $f_{m,m-2}$. Agora, partindo da expressão da direita e usando novamente a fórmula $L_m = F_{m-1} + F_{m+1}$ e a identidade de Cassini, encontramos

$$\begin{aligned}
\left(1 - F_{m-1}x - \frac{F_m^2 x^2}{1 - F_{m+1}x}\right)^{-1} &= \left(\frac{1 \overbrace{-F_{m+1}x - F_{m-1}x}^{=-L_m x} + \overbrace{F_{m-1}F_{m+1}x^2 - F_m^2 x^2}^{=(-1)^m x^2}}{1 - F_{m+1}x}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1 - L_m x + (-1)^m x^2}{1 - F_{m+1}x}\right)^{-1} \\
&= \frac{1 - F_{m+1}x}{1 - L_m x + (-1)^m x^2} \\
&= 1 + \frac{-F_{m+1}x + L_m x - (-1)^m x^2}{1 - L_m x + (-1)^m x^2} \\
&= 1 + x\left(\frac{F_{m-1} + (-1)^{m-1}x}{1 - L_m x + (-1)^m x^2}\right).
\end{aligned}$$

Mas o caso $j = m - 1$ da igualdade (4.1) é

$$\frac{F_{m-1} + (-1)^{m-1}x}{1 - L_m x + (-1)^m x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{nm+m-1}x^n\,,$$

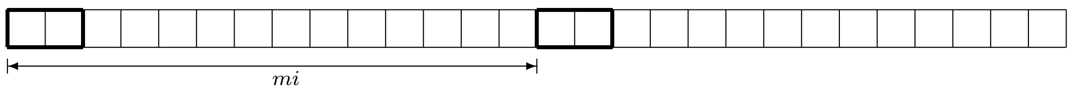
e daí

$$1 + x\left(\frac{F_{m-1} + (-1)^{m-1}x}{1 - L_m x + (-1)^m x^2}\right) = 1 + x\sum_{n=0}^{\infty} F_{nm+m-1}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_{nm-1}x^n\,,$$

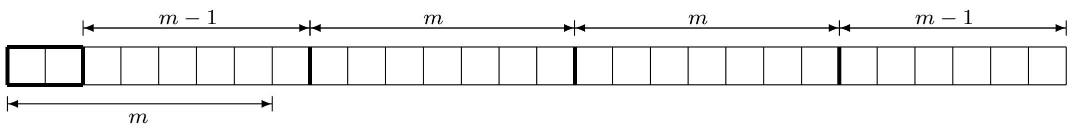
o que justifica a segunda igualdade do teorema. □

Existe uma interpretação combinatória simples para o Teorema 4.3. No monoide livre das composições de Fibonacci de múltiplos de m iniciados por 2, os primos de peso 1 são as composições de Fibonacci de m iniciadas por 2, e há F_{m-1} delas. Para contar os primos de peso maior do que 1 fazemos uma analogia similar à anterior de preencrer o reticulado de altura unitária com unidades quadradas e dominós.

Agora, uma dada composição de um inteiro mn deve ser iniciada por 2, o que, no reticulado, se traduz em dizer que a peça mais à esquerda deva ser um dominó. Fixe o inteiro mn com $n > 1$. Queremos o número de composições irredutíveis desse inteiro, que é igual ao número de formas de se preencher o reticulado mn iniciando com um dominó de forma que não seja possível fazer a quebra do reticulado em outros dois que sejam também múltiplos de m e iniciados por dominó. Note que a quebra do reticulado em outros dois é possível se, e somente se, essa quebra ocorrer em uma posição mi múltipla de m cuja peça vizinha à direita de tal posição seja um dominó:



Assim, a composição é irredutível se, e somente se, tal situação não ocorre, ou seja, se, e somente se, não houver dominó vizinho à direita de qualquer posição mi múltipla de m. Note que a ausência de tais dominós, garante que as posições $mi+1$ estejam desobstruidas para quebra, o que as torna pontos de inicio e fim de composições de Fibonacci independentes. Com isso, chegamos à forma da composição irredutível:



Assim, cada primo de peso maior do que 1 neste monoide livre assume a forma $2uv_1 \dots v_k w$, para $k \geq 0$, onde u e w são composições de Fibonacci de $m - 1$ (contadas por F_m) e cada v_i é uma composição de Fibonacci de m (contadas por F_{m+1}).

Portanto, o número de composições de Fibonacci de um inteiro mn, com $n > 1$, iniciadas por 2 irredutíveis é igual a $F_m^2 F_{m+1}^{n-2}$ e, portanto, a função geradora que conta esses primos, de peso $n > 1$, é dada por

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} F_m^2 F_{m+1}^{n-2} x^n &= F_m^2 x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (F_{m+1}x)^n \\
&= F_m^2 x^2 \cdot \frac{1}{1 - F_{m+1}x} \\
&= \frac{F_m^2 x^2}{1 - F_{m+1}x}
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração do Teorema 4.3.

Para $i = m - 1$, temos por (4.1) (caso $j = m$)

$$f_{m,m-1} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{m(n+1)} x^n = \frac{F_m}{1 - L_m x + (-1)^m x^2} \tag{4.4}$$

e o cálculo direto

$$\begin{aligned}
1 + x f_{m,m-1} &= 1 + \frac{F_m x}{1 - L_m x + (-1)^m x^2} \\
&= \frac{1 - L_m x + F_m x + (-1)^m x^2}{1 - L_m x + (-1)^m x^2} \\
&= \left(\frac{1 - L_m x + (-1)^m x^2}{1 - L_m x + F_m x + (-1)^m x^2} \right)^{-1} \\
&= \left(1 - \frac{F_m x}{1 - L_m x + F_m x + (-1)^m x^2} \right)^{-1} \\
&= \left(1 - \frac{F_m x}{1 - (F_{m+1} + F_{m-1})x + F_m x + (-1)^m x^2} \right)^{-1} \\
&= \left(1 - \frac{F_m x}{1 - (F_m + F_{m-1} + F_{m-1})x + F_m x + (-1)^m x^2} \right)^{-1} \\
&= \left(1 - \frac{F_m x}{1 - 2F_{m-1} x + (-1)^m x^2} \right)^{-1}
\end{aligned}$$

fornece

$$1 + x f_{m,m-1} = \left(1 - \frac{F_m x}{1 - 2F_{m-1} x + (-1)^m x^2} \right)^{-1} \tag{4.5}$$

É possível descrever os primos correspondentes explicitamente, mas parece não haver uma explicação combinatória para a função geradora (4.5).

Notemos também que se m é ímpar então por (4.1),

$$f_{m,m-1} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{mn+m} x^n = \frac{F_m}{1 - L_m x - x^2}\,.$$

Embora, a primeira vista, essa fórmula pareça ter uma explicação combinatória simples, uma visão mais aguçada instiga à percepção contrária, e mais ainda, sugere que tal explicação talvez nem exista.

Nos próximos dois capítulos consideraremos a bissecção e a trissecção com mais detalhes.

Capítulo 5

Bissecção do monoide livre das composições de Fibonacci

Consideraremos agora o caso $m = 2$ de (4.1), dando

$$f_{2,0} = \frac{1-x}{1-3x+x^2}$$

e

$$f_{2,1} = \frac{1}{1-3x+x^2}\,.$$

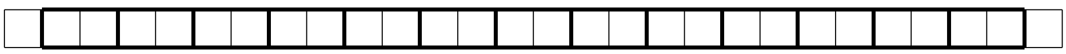
Podemos dar uma interpretação combinatória à igualdade $f_{2,1} = (1-x)^{-1} f_{2,0}$:

Por definição $f_{2,1} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+2} x^n$ conta o número de composições de Fibonacci de $2n+1$, enquanto $f_{2,0} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1} x^n$ conta as de $2n$. Mas $(1-x)^{-1} f_{2,0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1}\right) x^n$. Assim, obtemos a igualdade $\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1}\right) x^n$, que é equivalente a $F_{2n+2} = \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1}$, $\forall n$, que tem a interpretação combinatória que segue. Dentro das composições de Fibonacci de $2n+1$, fixe a posição onde o 1 aparece pela última vez (no sentido que vai da esquerda para a direita). Como só há partes 2 à direita desse 1, ele deve ocupar uma posição ímpar da forma $2k+1$ com $0 \leq k \leq n$ e, portanto, à sua esquerda há uma composição de $2k$. Ora, há F_{2k+1} composições de Fibonacci de $2k$. Como o k varia de 0 a n, o resultado segue.

O Caso $m = 2$ de (4.2) é

$$f_{2,0} = \underbrace{\frac{1-x}{1-3x+x^2} = (1-2x-x^2-x^3-\cdots)^{-1}}_{\text{Prop. 1.16}} = \left(1-2x-\frac{x^2}{1-x}\right)^{-1}. \quad (5.1)$$

Para encontrar os primos (irredutíveis) do monoide livre das composições de Fibonacci dos inteiros pares podemos fazer a mesma analogia feita anteriormente, que consistia no preenchimento do reticulado com unidades quadradas e dominós. Primeiramente, note que as duas composições de 2 são irredutíveis. Para inteiros pares maiores que 2, note que a quebra do reticulado de um inteiro par resultará em outros dois reticulados de inteiros pares se, e somente se, tal quebra ocorrer em uma posição par do reticulado inicial, o que pode ocorrer se, e somente se, no reticulado inicial, não houver um dominó bloqueando a tal posição par da quebra. Assim, a composição é irredutivel se, e somente se, houver dominós bloqueando todas as posições pares:



cuja forma é 12^i1 para inteiros $i > 0$.

Voltando a igualdade (5.1), a função geradora para os primos, juntamente com (2.2) (onde u_i é igual ao número de primos de peso i, ou seja, $u_1 = 2$ e $u_i = 1$, $\forall i \geq 2$) fornece a fórmula do item (vi) do Teorema 1.10

$$F_{2n+1} = \sum_{a \in C(n)} 2^{\#\{i : a_i = 1\}}.$$

Temos também a identidade

$$\begin{aligned}
1+x^k f_{2,0} &= 1+\frac{x^k(1-x)}{1-3x+x^2} \\
&= \frac{1-3x+x^2+x^k(1-x)}{1-3x+x^2} \\
&= \left(\frac{1-3x+x^2}{1-3x+x^2+x^k(1-x)}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1-3x+x^2+x^k(1-x)-x^k(1-x)}{1-3x+x^2+x^k(1-x)}\right)^{-1} \\
&= \left(1-\frac{x^k(1-x)}{1-3x+x^2+x^k-x^{k+1}}\right)^{-1}, \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

assim $\dfrac{x^k(1-x)}{1-3x+x^2+x^k-x^{k+1}}$ é a função geradora para os primos do monoide livre das composições de Fibonacci de inteiros pares iniciados com 21^{2k-2}. Apenas o caso $k=1$ de (5.2), que é também o caso $m=2$ de (4.3), é especialmente simples (contudo a sequência que conta os primos para $k=2$ é A052921). Aqui temos

$$\begin{aligned}
1+\sum_{n=1}^{\infty} F_{2n-1}x^n &= 1+xf_{2,0} \\
&= \left(1-x-\frac{x^2}{1-2x}\right)^{-1} \\
&= (1-x-\sum_{n=2}^{\infty} 2^{n-2}x^n)^{-1}
\end{aligned}$$

que, pelo Lema 1.11, fornece

$$\begin{aligned}
F_{2n-1} &= \sum_{a\in C(n)} 2^{a_1-2}2^{a_2-2}\cdots 2^{a_k-2}\cdot 2^{\#\{i:a_i=1\}} \\
&= \sum_{a\in C(n)} 2^{\#\{i:a_i=1\}}\cdot 2^{a_1+a_2+\ldots a_k}\cdot 2^{-2k} \\
&= \sum_{a\in C(n)} 2^{\#\{i:a_i=1\}+n-2k}
\end{aligned}$$

onde k é o número de partes da composição a.

Notemos também que a fórmula das frações contínuas

$$\begin{aligned}1 + xf_{2,0} &= 1 + \frac{x(1-x)}{1-3x+x^2} = \frac{1-2x}{1-3x+x^2} \\ &= \frac{1}{\left(\dfrac{1-3x+x^2}{1-2x}\right)} = \frac{1}{1-\dfrac{x-x^2}{1-2x}} \\ &= \frac{1}{1-\dfrac{x}{\left(\dfrac{1-2x}{1-x}\right)}} = \frac{1}{1-\dfrac{x}{1-\dfrac{x}{1-x}}}\end{aligned}$$

mostra que F_{2n-1}, para $n > 0$, é o número de caminhos de Dyck de comprimento $2n$ e altura de no máximo 3.

As fórmulas para o $f_{2,1}$ são um pouco mais simples do que aquelas para $f_{2,0}$.

Teorema 5.1. *Fixe um inteiro $k \geq 1$. O conjunto das composições de Fibonacci de números pares iniciados por 12^{k-1} é um monoide livre cujos primos são da forma $12^{k-1}2^iq12^j$, onde i e j são inteiros não negativos e q é um elemento do monoide livre Q com primos*

$$12^l12^m, \text{ para } l \geq 0 \text{ e } 0 \leq m \leq k-2.$$

Isto fornece a identidade

$$1 + x^kf_{2,1} = 1 + \frac{x^k}{1-3x+x^2} = \left(1 - \frac{x^k}{1-3x+x^2+x^k}\right)^{-1}. \tag{5.3}$$

Para $k = 1$, o monoide livre Q contém somente a palavra vazia, e os primos são da forma 12^i12^j para $i, j \geq 0$.

Demonstração. Seja M o monoide das composições de Fibonacci dos números pares iniciados por 12^{k-1}. Pelos Lemas 2.16 e 4.1 M é um monoide livre. Um primo de M é uma composição de Fibonacci que começa com 12^{k-1} e contém um número par de $1's$, onde a j-ésima parte 1, para $j > 1$ e ímpar, é seguida por no máximo $k-2$ partes 2. Está claro que estes primos são como os descritos na proposição. A função geradora para os primos de Q segue do fato de que o peso de um primo de Q é $\omega(12^l 12^m) = l + m + 1$, com $l, m \geq 0$. O que implica que a função geradora para composições da forma $12^l 12^m$ com m fixo seja

$$\frac{x^{m+1}}{1-x}.$$

Dai, para encontrar a função geradora para todos os primos de Q devemos variar o m de 0 a $k-2$ e somar as funções geradoras resultantes, fornecendo

$$\sum_{m=0}^{k-2} \frac{x^{m+1}}{1-x} = \frac{x}{1-x} \sum_{m=0}^{k-2} x^m = \frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-x^{k-1}}{1-x} = \frac{x-x^k}{(1-x)^2}.$$

Consequentemente, a função geradora para Q é

$$u(x) = \left(1 - \frac{x-x^k}{(1-x)^2}\right)^{-1} = \left(\frac{1-3x+x^2+x^k}{(1-x)^2}\right)^{-1} = \frac{(1-x)^2}{1-3x+x^2+x^k}.$$

Assim, a função geradora para os primos de M é

$$x^k \cdot \frac{1}{1-x} \cdot u(x) \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x^k}{1-3x+x^2+x^k}$$

□

Para $k = 1$, (5.3) fornece

$$\begin{aligned} 1 + \frac{x}{1-3x+x^2} &= \frac{(1-x)^2}{1-3x+x^2} \\ &= \left(\frac{1-3x+x^2}{(1-x)^2}\right)^{-1} \\ &= \left(1 - \frac{x}{(1-x)^2}\right)^{-1} \\ &= (1 - x - 2x^2 - 3x^3 - \cdots)^{-1}. \end{aligned}$$

Podemos ver diretamente que existem n composições primas de $2n$, pois elas são composições de $2n$ da forma $12^i 12^j$ e existem n soluções de $i + j = n - 1$.

Esta identidade, juntamente com o fato de que

$$1 + \frac{x}{1-3x+x^2} = 1 + x f_{2,1} = 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+2} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_{2n} x^n$$

e com o Lema 1.11 para $u_i = i$, fornece a fórmula (iv) do Teorema 1.10,

$$F_{2n} = \sum_{a \in C(n)} a_1 a_2 \cdots a_k, \tag{5.4}$$

para $n \geq 1$, como mostrado por Moser e Whitney [11]

Stanley ([16], página 172) dá uma interpretação combinatória de (5.4): Dados os n pontos em linha considere todas as maneiras de inserir no máximo uma barra entre cada dois deles e circular um ponto em cada compartimento. De quantas maneiras isso pode ser feito? Inserir as barras equivale a formar uma composição $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in C(n)$ de n. A escolha do ponto para circular no primeiro compartimento pode ser feita de a_1 maneiras, no segundo, de a_2 maneiras e assim por diante. Então, depois de escolhidas as barras, a escolha dos pontos a serem circulados pode ser feita de $a_1 \cdot a_2 \cdots a_k$, maneiras. Então a coisa toda pode ser feita de

$$\sum_{a \in C(n)} a_1 \cdot a_2 \cdots a_k$$

maneiras. E portanto, a soma $\sum_{a \in C(n)} a_1 a_2 \cdots a_k$ é o número de formas de se inserir no máximo uma barra vertical em cada um dos $n-1$ espaços separando uma linha de n pontos, e então circular um ponto em cada compartimento. Agora, substituimos as barras e pontos circulados por 1 e os demais pontos por 2. Obtém-se, assim, uma composição de Fibonacci de $2n-1$. Para justificar isso, note que inicialmente lá teria n pontos, sendo 1 deles circulado $\Longrightarrow 2 \ldots 212 \ldots 2 \Longrightarrow$ composição de $2n-1$. Aí acrescenta 1 barra e circula 1 ponto $\Longrightarrow$ continua dando uma composição de $2n-1$. Daí, acrescenta mais 1 barra e circula mais 1 ponto $\Longrightarrow$ continua dando uma composição de $2n-1$. Portanto, no fim, encontraremos uma composição de $2n-1$. Por outro lado, qualquer composição de $2n-1$ pode ser convertida para uma sequência de n pontos com no máximo uma barra entre cada dois pontos e exatamente um ponto circulado em cada compartimento. Para verificar isso, tome uma composição de $2n-1$. Da esquerda para direita, troque cada 2 por um ponto, o primeiro 1 troque por um ponto circulado, o segundo 1 por uma barra, o terceiro 1 por um ponto circulado, e assim por diante, até o último 1 que deve ser um ponto circulado já que a quantidade de 1 tem que ser ímpar, uma vez que $2n-1$ é ímpar. Agora, precisamos verificar se a quantidade de pontos, contando também os circulados, é igual à n: suponha que tenhamos a pontos não circulados, b barras e c pontos circulados, queremos determinar $a+c$. Vale que $2n-1 = 2a+b+c$, mas note que, por construção, há uma barra a menos do que pontos circulados, ou seja, $b = c-1$, consequentemente $2n-1 = 2a+b+c = 2a+2c-1$ mas $2n-1 = 2a-2(n-a)-1$, isto implica que $n-a = c$, isto é, $n = a+c$. Portanto, há n pontos no total.

Assim concluimos que, substituindo cada barra por um 1, cada ponto não circulado por um 2, e cada ponto circulado por um 1, fornecemos todas as composições de Fibonacci de $2n-1$ exatamente uma vez. Logo, segue a conclusão pois já sabemos que existem F_{2n} dessas composições. Como um exemplo para $n=8$, temos

$$\cdot \odot \mid \odot \cdot \mid \odot \mid \cdot \cdot \odot \iff 21112111221$$

Podemos explicar esta bijeção em termos da nossa abordagem sobre os monoides livres: se inserirmos uma barra no início de cada arranjo de pontos e barras, teremos uma sequência de configurações da forma $\mid \cdot^i \odot \cdot^j$, e esta configuração corresponde ao primo 12^i12^j.

Para $k=2$, a função geradora para os primos no Teorema 5.1 é

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{1-3x+2x^2} &= \frac{x^2}{(1-2x)(1-x)} \\
&= x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \\
&= x^2 \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} 2^i\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)x^{n+2} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}(2^{n-1}-1)x^n\,,
\end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}
1+\frac{x^2}{1-3x+x^2} &= 1+x^2 f_{2,1} = 1+x^2\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+2}x^n \\
&= 1+\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+2}x^{n+2} \\
&= 1+\sum_{n=2}^{\infty} F_{2n-2}x^n\,.
\end{aligned}$$

Isto fornece a fórmula do item (v) do Teorema 1.10:

$$F_{2n-2} = \sum_{a\in C(n)} (2^{a_1-1}-1)(2^{a_2-1}-1)\cdots(2^{a_k-1}-1), \tag{5.5}$$

para $n \geq 1$ (o caso $n=1$ é facil de verificar). Conforme descrito pelo Teorema 5.1 para o caso $k=2$, as composições primas que correspodem a (5.5) são da forma $122^i q 12^j$, onde i e j são inteiros não negativos e q é um elemento do monoide livre Q com primos

$$12^l 1, \text{ para } l \geq 0,$$

ou seja, são da forma

$$122^{l_0}\,\underbrace{12^{l_1}1^2 2^{l_2}1^2\cdots 1^2 2^{l_m}1}_{q}\,12^{l_{m+1}}$$

com $m \geq 0$, onde $l_0, \ldots, l_{m+1}$ são inteiros não negativos. Para ver combinatoriamente que existem $2^{n-1} - 1$ tais composições de $2n$, iniciamos com a composição de $2n - 2$ com $n - 1$ partes, todas iguais a 2. Escolhemos algum subconjunto não vazio dessas partes, o que pode ser feito de $2^{n-1} - 1$ formas. Agora substituimos o primeiro 2 selecionado por 1 e substituimos cada um dos outros 2 selecionados por 11. Finalmente inserimos 12 no começo.

Para $k > 2$, os primos no Teorema 5.1 são mais complicados, por exemplo, para $k = 3$, a fórmula (5.3) produz

$$1 + \frac{x^3}{1 - 3x + x^2} = \left(1 - \frac{x^3}{1 - 3x + x^2 + x^3}\right)^{-1}.$$

Por um lado, a expressão da esquerda é

$$\begin{aligned} 1 + \frac{x^3}{1 - 3x + x^2} &= 1 + x^3 f_{2,1} = 1 + x^3 \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+2} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+2} x^{n+3} \\ &= 1 + \sum_{n=3}^{\infty} F_{2n-4} x^n \,, \end{aligned}$$

uma expressão tão simples quanto as dos casos anteriores, mas por outro, a função geradora para os primos

$$\frac{x^3}{1 - 3x + x^2 + x^3}$$

tem os coeficientes dados pela sequência A048739. Se definíssemos $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ por esta sequência, daí, ao aplicar o Lema 1.11, teriamos uma fórmula

$$F_{2n-4} = \sum_{a \in C(n)} u_1 u_2 \ldots u_k, \quad \forall n \geq 3.$$

Para $k = 4$, (5.3) fornece

$$1 + \frac{x^4}{1 - 3x + x^2} = \left(1 - \frac{x^4}{1 - 3x + x^2 + x^4}\right)^{-1}.$$

a expressão da esquerda é igual a

$$
\begin{aligned}
1+\frac{x^4}{1-3x+x^2} &= 1+x^4 f_{2,1} = 1+x^4\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+2}x^n \\
&= 1+\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+2}x^{n+4} \\
&= 1+\sum_{n=4}^{\infty} F_{2n-6}x^n\,,
\end{aligned}
$$

mas a função geradora para os primos

$$\frac{x^4}{1-3x+x^2+x^4}$$

tem seus coeficientes dados pela sequência A077849. Ou seja, para $n \geq 4$

$$F_{2n-6} = \sum_{a\in C(n)} u_1 u_2 \ldots u_k,$$

onde $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é a sequência A077849.

Capítulo 6

Trissecção do monoide livre das composições de Fibonacci

Agora consideraremos trissecções da sequência de Fibonacci, para as quais temos por (4.1) que

$$f_{3,0} = \frac{1-x}{1-4x-x^2}$$
$$f_{3,1} = \frac{1+x}{1-4x-x^2}$$
$$f_{3,2} = \frac{2}{1-4x-x^2}$$

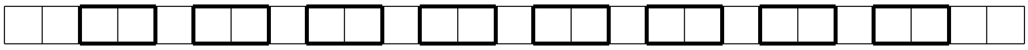
O Teorema 4.2 e sua interpretação combinatória nos dão uma interpretação combinatória para a identidade

$$f_{3,0} = (1-3x-4x^2-4x^3-\cdots)^{-1} = \left(1-3x-4\frac{x^2}{1-x}\right)^{-1} \tag{6.1}$$

que fornece a fórmula

$$F_{3n+1} = \sum_{a\in C(n)} 3^{\#\{i:a_i=1\}}4^{\#\{j:a_j\neq 1\}},$$

para $n \geq 0$: o monoide livre das composições de Fibonacci de números divisíveis por 3 tem três primos de peso 1, 111, 12, e 21, e para os primos de peso n para cada $n \geq 2$ fazemos a analogia do reticulado: uma palavra é irredutível se, e somente se, não pode ser quebrada nas posições múltiplas de 3, o que ocorre se, e somente se, houver dominós impedindo as quebras dessas posições. Assim, cada irredutível é da forma



Ou seja, os primos de peso $n \geq 2$ são da forma

$$abc,$$

onde a e c são ou 11 ou 2 e b é a composição

$$2121 \cdots 212$$

com $n-2$ partes 1 e $n-1$ partes 2, o que totaliza 4 primos de cada peso $n \geq 2$.

A seguir, daremos uma interpretação para o monoide livre do caso $m = 3$ de (4.5):

$$1 + xf_{3,2} = 1 + \frac{2x}{1-4x-x^2} = \left(1 - \frac{2x}{1-2x-x^2}\right)^{-1} \tag{6.2}$$

Note que o lado esquerdo de (6.2) é igual a

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_{3n}x^n$$

e, por isso, conta composições de Fibonacci de números divisíveis por 3 que começam com a parte 1, pois o número de composições de Fibonacci de $3n$ começadas em 1 é igual ao número de composições de Fibonacci de $3n-1$, que é $F_{3n-1+1} = F_{3n}$. Neste monoide livre existem dois primos de peso 1, 111 e 12. Para $n \geq 2$, um primo p de peso n, por ser primo, não pode resultar da concatenação de uma composição de peso 1 no final de uma composição de peso $n-1$, e portanto deve terminar em 21, 211 ou 22. Assim, dependendo desse final, ele deve ser de um, e apenas um, dos seguintes três tipos:

(1) p é obtido a partir de um primo de peso $n-1$ pela inclusão de 21 no final;

(2) p é obtido a partir de um primo de peso $n-1$ terminado com a parte 1 pela substituição desse 1 por 211;

(3) p é obtido a partir de um primo de peso $n-1$ terminado com a parte 1 pela substituição desse 1 por 22;

Seja a_n o número de primos de peso n e seja b_n o número de primos de peso n que terminam com a parte 1. Então temos $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$ e $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$. Assim

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} = a_{n-1} + 2(a_{n-2} + b_{n-2}) \\ &= (a_{n-1} + a_{n-2}) + (a_{n-2} + 2b_{n-2}) = (a_{n-1} + a_{n-2}) + a_{n-1} \\ &= 2a_{n-1} + a_{n-2} \end{aligned}$$

vale para $n \geq 3$ (pois b_i só está definido para $i \geq 1$), e como $a_2 = a_1 + 2b_1 = 2 + 2 = 4 = 2a_1 + a_0$, onde $a_0 = 0$, a recorrência vale para $n \geq 2$. Agora, resta determinar a função geradora para a_n definida pela recorrência $a_0 = 0$, $a_1 = 2$ e $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$, o que resolvemos diretamente como segue:

Defina a função geradora que queremos determinar como

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Daí

$$\begin{aligned}
A(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n + \underbrace{a_1}_{=2} x + \underbrace{a_0}_{=0} \\
&= 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n + 2x \\
&= 2x \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n}_{=A(x)} + 2x + x^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{=A(x)} \\
&= 2xA(x) + 2x + x^2 A(x) \\
&\Rightarrow\ A(x) = \frac{2x}{1-2x-x^2}.
\end{aligned}$$

Daí, constatamos que a função geradora para os primos é

$$\frac{2x}{1-2x-x^2}, \tag{6.3}$$

e a igualdade (6.2) segue. Os coeficientes de (6.3) são as sequências A052542 e A163271. Elas são duas vezes os números de Pell, a sequência A000129.

O caso $m = 3$ do Teorema 4.3 é

$$1 + xf_{3,1} = \left(1 - x - \frac{4x^2}{1-3x}\right)^{-1} = \left(1 - x - \sum_{n=2}^{\infty} 4 \cdot 3^{n-2} x^n\right)^{-1},$$

Notemos também que

$$1 + xf_{3,0} = \left(1 - \frac{x(1-x)}{1-3x-2x^2}\right)^{-1},$$

onde os primos são contados por A104934 e

$$1 + xf_{4,3} = \left(1 - \frac{3x}{1-4x+x^2}\right)^{-1},$$

onde os primos são contados por A005320.

Considerações finais

A ideia de aplicar a teoria dos monoides às composições forneceu-nos aqui métodos alternativos para demonstração de alguns teoremas sobre composições, mais especificamente para teoremas que envolveram determinados submonoides livres do monoide livre das composições de Fibonacci. Tal aplicação forneceu curiosos resultados, mais ou menos praticos e envolvendo geralmente os números de Fibonacci.

Um fato que simplificou as contagens de todas as palavras com determinado peso foi a redução desse problema ao de contar apenas as palavras primas. Isso foi consequência de considerar certos conjuntos de composições como submonoides livres gerados pelos seus primos. Daí, o uso do Lema 1.11 e das funções geradoras ocorreu naturalmente.

A teoria dos monoides de palavras, por referir-se a palavras em geral, deixa livre a ideia de se pensar em sua aplicação no âmbito das composições em geral, indo além de das composições de Fibonacci. Fica essa possibilidade de aplicação aberta e portanto propensa a sugerir novas ideias a futuros trabalhos.

Referências Bibliográficas

[1] Andrews, G. E.; Eriksson, K., Integer Partitions, *Cambridge University Press*, Cambridge (2004).

[2] A. T. Benjamin and J. J. Quinn, Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial Proof. *The Dolciani Mathematical Expositions*, 27. Mathematical Association of America, Washington, DC, 2003.

[3] P. Z. Chinn and S. Heubach. Integer sequences related to compositions without 2's, *J-Integer Sequences* **6** (2003), Article 03.2.3.

[4] P. Flajolet, Combinatorial aspects of continued fractions, *Disc. Math.* **32** (1980), 125–161.

[5] I. M. Gessel and J. Li. Compositions and Fibonacci Identities, *J-Integer Sequences* **16** (2013), Article 13.4.5.

[6] Heubach, Silvia, and Toufik Mansour. Combinatorics of compositions and words. *CRC Press*, 2009.

[7] V. E. Hoggatt, Jr., Generalized rabbits for generalized Fibonacci numbers, *Fibonacci Quart.* **6** (1968), 105–112.

[8] V. E. Hoggatt, Jr. and D. A. Lind, A primer for the Fibonacci numbers: Part VI, *Fibonacci Quart.* **5** (1967), 445–460.

[9] V. E. Hoggatt, Jr. and D. A. Lind, Fibonacci and binomial properties of weighted compositions, *J. Combin. Theory* **4** (1968), 121–124.

[10] V. E. Hoggatt, Jr. and D. A. Lind, Compositions and Fibonacci numbers, *Fibonacci Quart.*, **7** (1969), 253–266.

[11] L. Moser and E. L. Whitney, Weighted compositions, *Canad. Math. Bull.* **4** (1961), 39–43.

[12] A. O. Munagi, Euler-type identities for integer compositions via zig-zag graphs, *Integers* **12** (2012), #A60.

[13] M.-P. Schützenberger, Une théorie algébrique du codage, *Séminaire Paul Dubreil et Charles Pisot, 9e année: 1955/56, Algébre et théorie des nombres*, Exp. No. 15, Secrétariat mathématique, Paris, 1956.

[14] A. V. Sills, Compositions, partitions, and Fibonacci numbers, *Fibonacci Quart.* **49** (2011), 348–354.

[15] N. J. A. Sloane, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, http://oeis.org.

[16] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Volume 1, 2nd edition, Cambridge University Press, 2011.

[17] B. Tilson, The intersection of free submonoids of a free monoid is free, *Semigroup Forum* **4** (1972), 345–350.

[18] D. Zeilberger, The composition enumeration reciprocity theorem, *The Personal Journal of Shalosh B. Ekhad and Doron Zeilberger*, http://www.math.rutgers.edu/ zeilberg/pj.html, Feb. 28, 2012.