Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura

Grupos Amenos e o Paradoxo de Banach-Tarski

Jhon Fredy Tavera Bucurú

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de Mestre em Matemática Pura

Prof. Alexandre Tavares Baraviera
Orientador

Porto Alegre, Março de 2015

Agradecimentos

¡Muchas Gracias!

Conteúdo

Introdução

Lebesgue propôs sua visão de integração em 1904. Foi então uma pergunta natural saber se a medida de Lebesgue poderia ser estendida como uma medida finitamente aditiva definida sobre todos os subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ que fosse invariante por translações isométricas. Hausdorff demonstrou em 1914 que para $n \geq 3$ era falso, e em 1923 Banach demonstrou que era verdade para $n \leq 2$ [1]. Em 1924 usando o axioma da escolha Stefan Banach e Alfred Tarski provaram que dada uma esfera unitária no $\mathbb{R}^3$ existe uma forma de dividi-la em dois conjuntos disjuntos cada um deles dividido em peças finitas disjuntas tais que ao movimentar com translações e rotações as peças de cada conjunto, obtemos duas esferas unitárias iguais à original. Este resultado contra intuitivo vem do fato de assumir contraditoriamente que todo subconjunto $\mathbb{R}^3$ é Lebesgue-mensurável. Em 1929 Von Neuman mostrou que a razão profunda para esta diferença, reside no grupo de isometrias do $\mathbb{R}^n$ (vendo-o como um grupo discreto). O nome "amenable" foi introduzido por Mahlon M. Day em 1949, neste trabalho usaremos a tradução para o português "ameno".

Em 1953 Dixmier estendeu a noção de grupo topológico ameno (amenable).

No capítulo 1 (Preliminares) definiremos conceitos básicos usados no trabalho, e demonstraremos a existência e unicidade da medida de Haar, a motivação de fazer esta prova é porque durante o trabalho sempre usaremos este fato.

No capítulo 2 mostraremos o paradoxo de Banach-Tarski e provaremos o Teorema de Tarski (Teorema 10) o qual criará uma motivação natural para a definição de grupo ameno.

No capítulo 3 definiremos grupo ameno e mostraremos equivalências, exemplos e propriedades. Na seção 3.1 mostraremos a equivalência da existência de uma média sobre o grupo e uma média sobre $L^\infty(G)$, com exemplos. Nas seções 3.2 e 3.3 faremos um estudo um pouco mais geométrico dos grupos, mostraremos a equivalência da existência de uma sequência de Følner e enunciaremos alguns resultados obtidos via crescimento, com exemplos. Nas seções 3.4 e 3.5 exibiremos duas conjecturas feitas com respeito à caracterização de Grupos amenos, e mencionaremos contraexemplos.

No capítulo 4 definiremos Grupos hiperbólicos, os quais são grupos interessantes e amplamente estudados devido as suas propriedades geométricas, porém neste trabalho só faremos alguns exemplos triviais.

No Capítulo 5, o qual foi motivado porque achava-se que estes dois grupos estavam muito relacionados, usaremos os exemplos feitos em capítulos anteriores para mostrar que o mais provável é que não, e daremos uma referência de um artigo onde combinam os dois conjuntos e estudam algumas de suas propriedades.

Em resumo este é um texto introdutório, tentamos abordar alguns dos tópicos mais comuns e dar uma ideia deles, além de oferecer bibliografias para serem estudadas por quem tenha interesse. Boa leitura.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo definiremos alguns conceitos e mostraremos alguns resultados necessários para os capítulos seguintes, o leitor pode aprofundar-se nestes resultados no livro "Measure Theory" de Donald L. Cohn ([14]).

1.0.1 Grupos

Definição 1 (Grupo)**.** *Um grupo $(G, \cdot)$ é um conjunto não-vazio G dotado de uma operação binária $\ll \cdot \gg$, que cumpre as seguintes propriedades:*

1. *$\forall\, a, b \in G$ tem-se que $a \cdot b \in G$ (fecho).*

2. *$\forall\, a, b, c \in G$ cumpra-se a fórmula $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associatividade).*

3. *Existe um elemento $e \in G$ tal que $\forall\, a \in G$ tem-se $e \cdot a = a = a \cdot e$ (elemento neutro).*

4. *Para cada $a \in G$ existe um $b \in G$ tal que $a \cdot b = e = b \cdot a$. De agora em diante escreveremos $b = a^{-1}$ (elemento inverso).*

A seguir, há uma lista de definições referentes aos grupos:

Grupo finito: grupo com finitos elementos.

Grupo abeliano: grupo que satisfaz,

5. $\forall\, a, b \in G$ *cumpre-se a fórmula* $(a \cdot b) = (b \cdot a)$ (*comutatividade*).

Subgrupo: Um subgrupo A de um grupo $(G, \cdot)$, é um subconjunto não vazio $A \subseteq G$ que cumpre ser um grupo com a restrição do operador binário $\ll \cdot \gg$ aos elementos de A. Denota-se $A \leq G$.

Subgrupo normal: Um subgrupo N de um grupo $(G, \cdot)$ é normal se é invariante por conjugação, isto é para cada $n \in N$ tem-se que $a \cdot n \cdot a^{-1} \in N$ para todo $a \in G$. Usualmente denota-se como $N \trianglelefteq G$.

Classe lateral:

Afirmação 1. *Seja G um grupo. $x, y \in G$, $x \equiv y \ (mod\, H) \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$ define uma relação de equivalência no conjunto G.*

Consideremos a classe de equivalência $\overline{x} = \{y \in G : \ y \equiv x \, (mod \, H)\}$.
Assim, $y \in \overline{x} \Leftrightarrow y \in G : \ y \equiv x \, (mod \, H) \Leftrightarrow yx^{-1} = h \in H$, para algum $h \in H \Leftrightarrow y = hx$ para algum $h \in H$. Se denotarmos $Hx = \{hx : \ h \in H$ então temos que $\overline{x} = Hx$, chamada uma classe lateral (à direita) de H em G. Representaremos o conjunto quociente $\{\overline{x} : \ x \in G\}$ por G/H, isto é, $G/H = \{Hx : \ x \in G\}$ é o conjunto de todas as classes laterais (à direita) de H em G.

Grupo quociente:

Afirmação 2. *Seja G um grupo e $N \trianglelefteq G$. Então, $\forall \, x, y \in G$, $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$ define uma operação no conjunto das classes G/N e mais ainda G/N é um grupo com essa operação.*

Este grupo receberá o nome de grupo quociente de G por N.

Transversal: Dado o conjunto das classes laterais de um grupo, podemos escolher um elemento de cada classe lateral (se necessário usando o axioma da escolha) e chamá-lo o representante da classe. Chamamos este conjunto de representantes de Transversal do grupo.

Índice: Seja G um grupo e um subgrupo $H \leq G$ definimos o índice de H em G como $(G : H) :=$ (quantidade de classes laterais a esquerda em G definidas pelo subgrupo H).

Definição 2 (Grupos solúveis)**.**

- *Uma série subnormal de um grupo G é uma sequência finita de subgrupos $\{G_i\}_{i=1}^{n}$, onde cada um deles é um subgrupo normal do seguinte. Usualmente é denotado como $1 \rhd G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_n = G$. Note que como G_i só precisa ser subgrupo normal de G_{i+1}, então não é necessário que seja subgrupo normal de G.*
  Os grupos quocientes G_i/G_{i+1} são chamados de grupos fatores da série.

- *Um grupo G é chamado solúvel se admite uma série subnormal onde todos os grupos fatores são abelianos.*

Historicamente a motivação para a definição de grupos solúveis foi dada pela teoria de Galois. Pois uma equação polinomial é solúvel por radicais, se e somente se, o seu correspondente grupo de Galois for solúvel (Ver capítulo 7, Teorema 5 [7]), o que responde à pergunta de quando um polinômio pode ser fatorizável ou não em um dado corpo (conjunto), supondo certas condições.

Definição 3 (Grupos nilpotentes)**.**

- *Dado um grupo G, definimos o centro do grupo $Z(G) := \{g \in G : \forall \, h \in G, \ gh = hg\}$. Por tanto o centro do grupo é o conjunto dos elementos que comutam com todos os elementos do grupo, e este resulta ser um subgrupo normal comutativo.*

- *Um grupo G diz-se nilpotente se ele contém uma série de subgrupos*

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G$$

tal que cada subgrupo $G_{i-1} \rhd G$ e cada quociente G_i/G_{i-1} está contido no centro de G/G_{i-1}, $1 \leq i \leq n$.
Uma tal série de subgrupos de G diz-se uma série central de G.

1.0.2 Grupos livres

Seja A um conjunto qualquer, não necessariamente finito, de elementos que denotaremos por a_i, para $i \in I$. Consideramos A como um **alfabeto** e os elementos a_i como **letras** do alfabeto. Qualquer símbolo da forma a_i^n com $n \in \mathbb{Z}$ é uma **sílaba**, e uma cadeia finita de w de sílabas escritas em justaposição é uma **palavra**. Apresentamos também a **palavra vazia** 1, que não tem sílabas.

Exemplo 1. *Seja $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. Então, se adotamos a convenção de que a_i^1 é o mesmo que a_i,*

$$a_2^4 a_3^{-1} a_2^4 a_1, \quad a_1^{-3} a_3^{-1}, \quad e \quad a_2$$

*são **palavras**.*

Têm-se dois tipos de modificações naturais para algumas palavras: as **contrações elementares**. A primeira consiste em substituir $a_i^m a_i^n$ em uma palavra, por a_i^{m+n}. O segundo tipo consiste em substituir a_i^0 em uma palavra por 1, isto é, remove-la da palavra. Por meio de um número finito de contrações elementares, toda palavra pode ser substituída por uma palavra onde não é possível efetuar mais contrações elementares, chamada de **palavra reduzida**. Note que as contrações elementares são equivalentes formalmente as manipulações usuais de exponentes inteiros.

Definimos $F[A]$ o conjunto de todas as palavras reduzidas formadas por nosso alfabeto A.

Definição 4 (Grupo livre)**.** *$(F[A], \cdot)$ é o grupo livre gerado por A, com o produto.*

$$w_1 \cdot w_2 = \{ \text{ forma reduzida da palavra obtida pela justaposição de } w_1 w_2\}.$$

Exemplo 2. *se $w_1 = a_2^3 a_1^4 a_2^{-2}$ e $w_2 = a_2^2 a_1^{-3} a_2^{-3} a_1^{-5}$*

$$w_1 \cdot w_2 = a_2^3 a_1^1 a_2^{-3} a_1^{-5}$$

Denotaremos o grupo livre gerado por dois elementos como F_2.

Proposição 1. *F_2 é enumerável.*

Demonstração. Considere os conjuntos $W^n := \{W : |w| = n, \ w \in F_2\}$ onde $|w|$ é a quantidade de letras do alfabeto que a palavra reduzida w contém. Note que, $|W^n| \leq 4^n$ ($|W^n|$ é cardinalidade do conjunto W^n) e $F^2 = \cup_{k=1}^n W^k$, como a união enumerável de conjuntos finitos é enumerável então F_2 é enumerável. □

1.0.3 Ação de grupo

Definição 5 (Ação de grupo)**.** *Seja G um grupo, seja C uma categoria, e seja X um objeto em C. Uma ação de G em X na categoria C é um homomorfismo de grupo $G \to Aut_C(X)$. Em outras palavras, uma ação de grupo de G em X consiste de uma família $(f_g)_{g \in G}$ de automorfismos de X tais que*

$$f_g \circ f_h = f_{g \cdot h}$$

para todo $g, h \in G$.

Nós consideraremos daqui em diante a categoria C como a categoria dos conjuntos, para detalhes da definição ver Definição 4.1.1, [12].

Definição 6 (Ação livre sobre um conjunto). *Seja G um grupo, seja X um conjunto e seja $G \times X \to X$ uma ação de G sobre X. Esta ação é livre se*

$$g \cdot x \neq x$$

para todo $g \in G \setminus \{e\}$ e todo $x \in X$. Em outras palavras, uma ação é livre se e somente se cada elemento não trivial do grupo atua sem pontos fixos.

1.1 Grupos localmente compactos

Definição 7 (Grupo Topológico). *Um grupo topológico é uma terna $(G, \tau, \cdot)$ tal que:*

i) (G, τ) *é um espaço topológico.*

ii) $(G, \cdot)$ *é um grupo.*

iii) $\phi : G \times G \to G \quad \phi(x, y) = x \cdot y$ *é contínua.*

iv) $\alpha : G \to G \quad \alpha(x) = x^{-1}$ *é contínua.*

Um espaço topológico (X, τ) é localmente compacto se para cada ponto $x \in X$ existe uma vizinhança U tal que $\overline{U}$ é compacto.

Um grupo topológico $(G, \tau, \cdot)$ é **localmente compacto** se (G, τ) é um espaço topológico localmente compacto e Haussdorff.
Uma razão pela qual nós adicionamos a condição de ser Hausdorff fora da unicidade do limite é por que estamos interessados em saber se os subconjuntos compactos são mensuráveis (lembre que em um espaço de Hausdorff os subconjuntos compactos são fechados).

Exemplo 3. *Alguns grupos localmente compactos são:*

- *todo grupo G com a topologia discreta.*
- $\mathbb{R}$ *com a topologia usual.*
- *todo espaço vetorial topológico $(G, \tau, +)$.*

1.1.1 Medida de Haar

Definição 8 (Anel). *Seja X um conjunto. Um anel R de subconjuntos de X é um conjunto não-vazio de subconjuntos de X que é fechada pelas operações elementares de conjuntos:*

$$A, B \in R \Rightarrow \begin{cases} A \cup B \in R \\ A \setminus B \in R \end{cases}$$

Definição 9 (Álgebra). *Seja X um conjunto. Uma álgebra R de subconjuntos de X é um conjunto não-vazio de subconjuntos que contém a X e que é fechada pelas operações elementares de conjuntos:*

$$A, B \in R \Rightarrow \begin{cases} A \cup B \in R \\ A^c = X \setminus A \in R \end{cases}$$

Definição 10 (σ-álgebra). *Uma álgebra diz-se uma σ-álgebra de subconjuntos de X se também for fechada para uniões enumeráveis:*

- *$A_j \in R$ para $j = 1, 2, \ldots$ implica $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in R$*

Um espaço mensurável é uma dupla (X, R), onde M é um conjunto e R é uma σ-álgebra de subconjuntos de X

Definição 11 (Medida). *Uma medida num espaço mensurável (X, R) é uma função $\mu : R \to [0, +\infty]$ que satisfaz:*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$*
2. *$\mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ para quaisquer $A_j \in R$ disjuntos dois-a-dois.*

A tripla (X, R, μ) é chamada espaço de medida. A segunda propriedade da definição é chamada σ-aditividade.

A seguir definiremos um conceito mais fraco que a medida, o qual será usado no resto do texto.

Definição 12 (Média sobre uma álgebra). *Uma média m sobre uma álgebra R de subconjuntos de X, $\mu : R \to [0, +\infty]$ que satisfaz:*

i) $m(\emptyset) = 0$.

ii) $m(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = m(A_1) + \cdots + m(A_n)$ se $A_1, \ldots, A_n \in R$ são dois a dois disjuntos.

Se um grupo G atua sobre X deixando R invariante, estão dizemos que m é G-invariante se:

iii) $m(gA) = m(A)$, $\forall g \in G$ e $A \in R$.

Pela segunda propriedade da definição dizemos que m é finitamente aditiva.

(Esta definição 12 foi modificada da definição apresentada no livro "Kazhdans property (T)" [1] pag 421)
É claro que toda medida é uma média mas nem toda média é uma medida. Note que m ser uma média G-invariante implica que cada ação do grupo leva elementos da álgebra R em elementos da álgebra R da mesma "grandeza"(onde a "grandeza" de $A \in R$ esta dada por $m(A)$).
Dizemos que $2^X = P(X)$ é o conjunto de partes do conjunto X, isto é o conjunto de todos os conjuntos de X.

Definição 13. *Seja X um conjunto e seja $\sum \subseteq 2^X$. Então, denotamos $\sigma[\sum]$ a σ-álgebra gerada por $\sum$.*

Definição 14 (Média absolutamente contínua). *Se (X, R, μ) onde R é uma álgebra e μ uma média. Se ν é uma média definida sobre R. Dizemos que ν é absolutamente contínua com respeito a μ, e neste caso escrevemos $\nu \ll \mu$, quando*

$$\nu(M) = 0 \text{ para todo } M \in R \text{ tal que } \mu(M) = 0.$$

Definição 15. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subseteq X$. Denotamos o interior de A como A^o e o fecho de A como $\overline{A}$.*

Definição 16 (Subconjuntos de Borel). *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subseteq X$. Então, A é um subconjunto de Borel de X se $A \in \sigma[\tau]$.*

Definição 17 (Espaço de medida topológico). *Seja $(X, \sum, \mu)$ é um espaço de medida topológica, onde X é um espaço topológico, $\sum$ é a coleção de subconjuntos de Borel de X e μ é a medida.*

Definição 18 (Medida de Borel). *Uma medida μ sobre um espaço de medida topológico $(X, \sum, \mu)$ é chamada medida de Borel se X é Hausdorff*

Definição 19 (Medida exterior). *Uma medida exterior sobre um conjunto X é uma aplicação $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ que satisfaz as propriedades:*

1. $\mu(E) \geq 0, \ \ \forall\, E \subseteq X.$
2. $E_1 \subseteq E_2$ *então* $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$. *(monotonicidade)*
3. $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$. *(subaditividade contável)*

Definição 20 (Espaço de medida completo). *Um espaço de medida é completo se todo subconjunto de um conjunto de medida nula é mensurável.*

Teorema 1 (Extensão de Caratheodory). *Seja μ^* uma medida exterior em X, então o conjunto $M \subseteq 2^X$ de todos os subconjuntos mensuráveis é uma σ-álgebra, a restrição $\mu = \mu^*_{|M}$ é uma medida e (X, M, μ) é completo.*

Demonstração. Ver Teorema 1.3.4., [14]. □

Definição 21 (Medida de Haar). *Seja G um grupo topológico com a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(G)$. Uma medida de Haar à esquerda (direita) sobre G é uma medida μ que satisfaz*

i) *μ é Borel regular não vazia sobre G (notação: U é aberto e K é compacto)*

- *se* $K \subseteq G \Rightarrow \mu(K) \lneq \infty$
- *regular externa, isto é*

$$A \in \mathcal{B}(G) \Rightarrow \mu(A) = inf\{\mu(U) : \ A \subseteq U\}$$

- *regular interna, isto é*

$$U \subseteq G \Rightarrow \mu(U) = sup\{\mu(K) : \ K \subseteq U\}$$

ii) $\mu(gA) = \mu(A)$ *(resp.* $\mu(Ag) = \mu(A)$*)* $\forall g \in G$ e $\forall A \in \mathcal{B}(G)$.

De fato, Alfred Haar em 1933 mostrou que existe uma "única" medida invariante unilateral em um grupo localmente compacto e separável, e esta é a medida que leva seu nome. É fácil mostrar que se μ é uma medida de Haar a esquerda para o grupo G então $\mu_-(A) = \mu(A^{-1})$ $(A^{-1} = \{x \in G : x^{-1} \in A\})$ é uma medida de Haar a direita, além disso se o grupo é compacto a medida de Haar é bilateral, isto foi provado por Von Neuman 1936. Como a medida de Haar será usada com frequência no Capítulo 2, nós provaremos aqui sua existência e unicidade, mas para isso precisamos de alguns resultados. Esta prova foi obtida de [15], para aprofundar nos detalhes da prova , ver [14].

Lema 1. *Seja $f : X \to Y$ e seja $E \subseteq 2^Y$. Então, $\sigma[f^{-1}(E)] = f^{-1}(\sigma[E])$ (aqui $\sigma[X]$ representa uma σ-álgebra de subconjuntos de X).*

Lema 2. *Seja $(X, \sum, \mu)$ um espaço de medida topológico e seja $f : X \to X$ um homeomorfismo. então as seguintes afirmações são equivalentes.*

1. $A \in \sum$.
2. $f(A) \in \sum$.

3. $f^{-1}(A) \in \sum$.

Lema 3. *Seja* (X, τ) *um espaço de Hausdorff, seja* K *um subconjunto compacto e sejam* U_1, U_2 *abertos de* X *tais que* $K \subseteq U_1 \cup U_2$. *Então, existem subconjuntos compactos* K_1, K_2 *de* X *tais que* $K_1 \subseteq U_1$ *e* $K_2 \subseteq U_2$, *e* $K = K_1 \cup K_2$.

Lema 4. *Seja* $(X, \sum, \mu)$ *um espaço de medida. Seja* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função mensurável, e seja* $A \subseteq X$ *mensurável. Então, se* $A = \{x \in X : f(x) \gneq 0\}$ *e* $\mu(A) \gneq 0$, *existe algum* $a \gneq 0$ *tal que* $\mu(\{x \in A : f(x) \geq a\}) \gneq 0$.

Lema 5. *Seja* G *um grupo topológico, seja* K *um subconjunto compacto de* G, *e seja* U *um aberto tal que* $K \subseteq U$. *Então, existe um aberto* V *contendo a unidade do grupo tal que* $KV \subseteq U$.

Teorema 2. *[Existência] Seja* G *um grupo localmente compacto. Então, existe uma medida de Haar esquerda de* G.

Demonstração. Passo 1: Definir $(K : V)$.
Seja K um compacto de G e V um subconjunto de G com interior diferente de vazio. Então, $\{gV^o : g \in G\}$ é uma cobertura aberta de K, pois por definição de grupo topológico a ação $\widehat{g}(x) = g \cdot x$ é um homomorfismo, como K é compacto, existe um subcobertura finita e portanto elementos finitos de G, $g_1, \ldots, g_n$, tais que $K \subseteq \cup_{i=1}^{n} g_k V^o$. Definimos $(K : V)$ como o menor inteiro não negativo para o qual a sequência existe.

Passo 2: Definir μ_U.
Denotamos a $\mathcal{K}$ a coleção de subconjuntos compactos de G, e por $\mathcal{U}$ a coleção de subconjuntos abertos contendo a identidade do grupo. Dado que G é localmente compacto, existe um subconjunto compacto com interior não vazio: chamamos ele de K_0 (lembre que por definição para cada ponto do grupo localmente compacto existe um vizinhança cujo fecho é compacto, pelo que tal compacto contém pelo menos o aberto que por definição contém a vizinhança). Para cada $U \in \mathcal{U}$, defina a função $\mu_u : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\mu_U(K) = \frac{(K : U)}{(K_0 : U)}$$

Como $K_0 \neq \emptyset$ então $(K_0 : U) \neq 0$ portanto μ_U está bem definido.

Passo 3: Mostrar que $0 \leq \mu_U(K) \leq (K : K_0)$.
Como $(K : U)$ é sempre um inteiro não negativo, $\mu_U(K)$ é sempre não negativo. Mostraremos que $(K : U) \leq (K : K_0)(K_0 : U)$ para cada $K \in \mathcal{K}$ e para cada $U \in \mathcal{U}$. Daqui em diante escreveremos $(K : K_0) = m$ e $(K_0 : U) = n$. Então, sejam $g_1, \ldots, g_m \in G$ e $h_1, \ldots, h_n \in G$ tais que $K \subseteq \cup_{i=1}^{m} g_i K_0$ e $K_0 \subseteq \cup_{j=1}^{n} h_j U$. Então,

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} g_i \bigcup_{j=1}^{n} h_j U = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} g_i h_j U,$$

Portanto K pode ser coberto por mn classes de U, e assim $(K : U) \leq mn = (K : K_0)(K_0 : U)$. Isto mostra que

$$0 \leq \mu_U(K) \leq (K : K_0).$$

Passo 4: Construir a medida de Haar sobre $\mathcal{K}$
Defina $X := \prod_{K \in \mathcal{K}} [0, (K : K_0)]$ o espaço produto de intervalos fechados, o qual é um espaço topológico compacto pelo Teorema de Tychonoff (Ver Teorema 25). Como $0 \leq \mu_U(K) \leq$

$(K : K_0)$, cada μ_U pode-se ver como um ponto em X. Para cada $V \in \mathcal{U}$, defina $C(V) := \{\mu_u : U \in \mathcal{U}, U \subseteq V\}$. Mostraremos que a coleção $\{C(V) : V \in \mathcal{U}\}$ possui a propriedade da interseção finita. Sejam $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{U}$ então $\mu_{\cap_{k=1}^{n} V_k} V_k \in \bigcap_{k=1}^{n} C(V_k)$, portanto $\bigcap_{k=1}^{n} C(V_k)$ é não-vazia. Agora, como X compacto então $\cap_{V \in \mathcal{U}} C(V) \neq \emptyset$. Escolhemos um elemento dessa intersecção o qual denotamos por μ.

Passo 5: Mostrar que $\mu(K_1) \leq \mu(K_2)$ se $K_1 \subseteq K_2$
Sejam $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ tais que $K_1 \subseteq K_2$. Primeiro mostraremos que para cada $U \in \mathcal{U}$ tem-se $\mu_U(K_1) \leq \mu_U(K_2)$, mas isto é verdade pois as classes de U que cobrem K_2 também cobrem K_1 então $(K_1 : U) \leq (K_2 : U)$ e isto implica que $\mu_U(K_1) \leq \mu_U(K_2)$. Podemos ver os elementos $f \in X$ como funções que vão de $\mathcal{K}$ a $\mathbb{R}$, considere a função $F : X \to \mathbb{R}$ definida como $F(f) = f(K_1) - f(K_2)$. Note que a projeção p de X a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida como $p(f) = (f(K_1), f(K_2))$ é continua na topologia produto, e a função de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ que subtrai a primeira coordenada da segunda também é continua, como F é composição destas funções tem-se que F é continua. Além disso esta função é não-negativa em $C(V)$ (suponha que $F(\mu)$ é negativo e considere uma vizinhança W dele contida em $(-\infty, 0]$, como F é continua e μ um ponto de acumulação dos μ_U, existe $\mu_{U_0} \in F^{-1}(W)$ tal que $\mu_{U_0}(K_1) \gneq \mu_{U_0}(K_2)$ o que é uma contradição).

Passo 6: Mostrar que $\mu(K_1 \cup K_2) \leq \mu(K_1) + \mu(K_2)$.
Sejam $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$. Primeiro mostraremos que $\mu_U(K_1 \cup K_2) \leq \mu_U(K_1) + \mu_U(K_2)$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Isto é trivial porque uma cobertura para K_1 com $(K_1 : U)$ classes de U, junto com um cobrimento de $(K_2 : U)$ classes de U para K_2, são um recobrimento para $K_1 \cup K_2$, isto é $(K_1 \cup K_2 : U) \leq (K_1 : U) + (K_2 : U)$ portanto $\mu_U(K_1 \cup K_2) \leq \mu_U(K_1) + \mu_U(K_2)$.
Procedendo de forma similar ao Passo 5, a função F é continua e não negativa sobre cada $C(V)$, e já que é não negativa para $\mu \in X$. Temos $\mu(K_1 \cup K_2) \leq \mu(K_1) + \mu(K_2)$.

Passo 7: Mostrar que $\mu_U(K_1 \cup K_2) = \mu_U(K_1) + \mu_U(K_2)$ se $K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} = \emptyset$.
Sejam $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ tais que $K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} = \emptyset$. Sejam $g_1, \ldots, g_n \in G$ tais que $n = (K_1 \cup K_2 : U)$ e $K_1 \cup K_2 \subseteq_{k=1}^{n} g_kU$. Se algum g_kU intercepta a K_1 e a K_2, então $g_k \in K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1}$ o que seria uma contradição. Por isso g_kU intercepta só a K_1 ou só a K_2, então reindexando os índices existe um numero m, tal que $0 \leq m \leq n$ e $K_1 \subseteq \cup_{k=1}^{m} g_kU$, $K_2 \subseteq \cup_{k=m+1}^{n} g_kU$. Isto é $(K_1 : U) + (K_2 : U) \leq (K_1 \cup K_2 : U)$ e pelo resultado do Passo 6 têm-se $\mu_U(K_1 \cup K_2) = \mu_U(K_1) + \mu_U(K_2)$ para cada $U \in \mathcal{U}$.

Passo 8: Mostrar que $\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2)$ se $K_1 \cap K_2 = \emptyset$.
Sejam $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ tais que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Então podemos achar conjuntos disjuntos U_1, U_2 tais que $K_1 \subseteq U_1$ e $K_2 \subseteq U_2$ (pois (G, τ) é um espaço de Hausdorff). Pelo Lemma 5, existem vizinhanças abertas V_1, V_2 da unidade do grupo G tal que $K_1V_1 \subseteq U_1$ e $K_2V_2 \subseteq U_2$. Seja $V := V_1 \cap V_2$, como $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ então $K_1V \cap K_2V = \emptyset$. Por isso para cada $U \in \mathcal{U}$ com $U \subseteq V^{-1}$, temos $K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} = \emptyset$ e pelo Passo 7 $\mu_U(K_1 \cup K_2) = \mu_U(K_1) + \mu_U(K_2)$. Por último, como a função contínua que envia os $f \in X$ em $f(K_1) + f(K_2) - f(K_1 \cup K_2)$ é 0 para cada $f \in C(V^{-1})$. Em particular, $\mu(K_1) + \mu(K_2) = \mu(K_1 \cup K_2)$.

Passo 9: Estender μ a todos os subconjuntos de G.
Para $U \subseteq G$ aberto defina

$$\mu(U) := sup\{\mu(K) : K \subseteq U,\ K \in \mathcal{K}\}.$$

Mostraremos que se K é compacto e aberto então as duas definições são iguais (lembre que a outra definição esta no Passo 4). Isto é, nós mostraremos que

$$\mu(K) := sup\{\mu(K') : K' \subseteq K,\ K' \in \mathcal{K}\}.$$

Trivialmente, $\mu(K) \in sup\{\mu(K') : K' \subseteq K,\, K' \in \mathcal{K}\}$ então $\mu(K) \leq sup\{\mu(K') : K' \subseteq K,\, K' \in \mathcal{K}\}$. A outra desigualdade é dada pelo Passo 5, isto é $sup\{\mu(K') : K' \subseteq K,\, K' \in \mathcal{K}\} \leq \mu(K)$. Por tanto as duas definições são compatíveis quando K é um compacto aberto. Além disso, é fácil ver que na extensão, $\mu(U_1) \leq \mu(U_2)$ se $U_1 \subseteq U_2$.
Agora, para um subconjunto arbitrário $A \subseteq G$, defina

$$\mu(A) := inf\{\mu(U) : A \subseteq U, U \textit{ é aberto}\}.$$

Similarmente, esta extensão de μ sobre todos os subconjuntos de G, satisfaz a propriedade que $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$ se $A_1 \subseteq A_2$.

Passo 10: Mostra que μ é uma medida externa sobre G.

- $\mu(\emptyset) = 0$ porque $(\emptyset : U) = 0$ para cada $U \in \mathcal{U}$.

- μ é não-negativa.
  Para provar isto, note que da definição da extensão é suficiente mostrar que μ não é negativa sobre $\mathcal{K}$. Seja $K \in \mathcal{K}$ fixo, a função que envia a $f \in X$ a $f(K)$ é contínua (por um razonamento similar da função F), como esta função é não negativa sobre cada μ_U, pela continuidade é não negativa sobre cada $C(V)$, portanto é não negativa sobre μ, é dizer $\mu(A) \geq 0$ como queria-se provar.

- μ é subaditiva contável.
  Primeiro mostraremos que para cada coleção contável de conjuntos abertos $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, tem-se
  $$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n).$$
  Seja $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma coleção contável de subconjuntos abertos de G, seja K um subconjunto compacto contido em $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Então $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_k$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Aplicando o Lemma 3 indutivamente, podemos achar compactos $K_1, \ldots, K_n$ tal que $K = \bigcup_{k=1}^{n}$ e $K_k \subseteq U_k$ para $1 \leq k \leq n$. Então aplicando o Passo 6 indutivamente,
  $$\mu(K) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(K_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(U_k) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n).$$
  isto permite que
  $$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) = sup\left\{\mu(K) : K \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n,\ K \in \mathcal{K}\right\} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n).$$
  Agora seja $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma coleção enumerável de subconjuntos arbitrários de G. Se $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \infty$, então é trivial que $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$. Suponha $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \lneq \infty$. Seja $\epsilon \gneq 0$, e para cada $n \in \mathbb{N}$ escolha um U_n aberto tal que $A_n \subseteq U_n$ e $\mu(U_n) \leq \mu(A_n) + \epsilon/2^n$ (isto é possível por causa da definição de μ). Então
  $$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) + \epsilon \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) + \epsilon.$$
  Mas como ϵ é arbitrário, temos que
  $$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n),$$
  portanto μ é uma medida externa sobre G.

Passo 11: Mostrar que a coleção de conjuntos Caratheodory mensuráveis contem os subconjuntos de Borel de G.
Para mostrar que a coleção de conjuntos Caratheodory mensuráveis contém os subconjuntos de Borel de G, é suficiente mostrar que cada subconjunto aberto de G é mensurável (por que a coleção de conjuntos mesuráveis gera uma σ-álgebra, e se esta coleção contém a topologia de G com certeza também vai conter a σ-álgebra gerada pela topologia). Sejam $U \subseteq G$ um aberto e $A \subseteq G$. Se $\mu(A) = \infty$ então trivialmente $\mu(A) \geq \mu(A \cap U) + \mu(A \cap U^c)$, suponha que $\mu(A) \lneq \infty$. Seja $\epsilon \gneq 0$, e escolha um V aberto tal que $A \subseteq V$ e $\mu(V) \leq \mu(A) + \epsilon$. Seja K um subconjunto compacto de $V \cap U$ tal que $\mu(U \cap V) - \epsilon \leq \mu(K)$ (isto é possível por causa da definição de μ), e seja L um subconjunto compacto de $V \cap K^c$ tal que $\mu(V \cap K^c) - \epsilon \leq \mu(L)$ (note que $V \cap K^c$ é aberto pois nos espaços de Hausdorff os compactos são fechados). Já que $K \subseteq U$, $V \cap U^c \subseteq V \cap K^c$, temos

$$\mu(V \cap U^c) - \epsilon \leq \mu(V \cap K^c) - \epsilon \leq \mu(L).$$

e pelo Passo 8,

$$\mu(A \cap U) + \mu(A \cap U^c) - 2\epsilon \leq \mu(V \cap U) + \mu(V \cap U^c) - 2\epsilon \leq \mu(K) + \mu(L)$$

$$= \mu(K \cup L) \leq \mu((V \cap U) \cup (V \cap K^c)) \leq \mu(V) \leq \mu(A) + \epsilon.$$

Isto mostra que

$$\mu(A \cap U) + \mu(A \cap U^c) \leq \mu(A) + 3\epsilon.$$

E como ϵ é arbitrário, temos que

$$\mu(A \cap U) + \mu(A \cap U^c) \leq \mu(A),$$

Já que U é mensurável . Segue que μ restrita aos subconjuntos de Borel de G, é uma medida de Borel

Passo 12: Mostrar que μ é regular.
Considerando a μ como um elemento de X, μ é finita sobre os compactos de G. Além disso pela construção de $\mu(A) = inf\{\mu(U) : A \subseteq U,\ U\ \textit{é aberto}\}$ μ é regular externa , similarmente μ é regular interna (mostramos que a extensão é compatível com esta definição para subconjuntos abertos que é por construção regular interna).

Passo 13: Mostrar que μ é invariante por translação.
Fixe $g \in G$. Os elementos $x_1, \ldots, x_n$ geram uma cobertura para K se os elementos $gx_1, \ldots, gx_n$ geram um recobrimento para gK, isto é $(K : U) = (gK : U)$ para cada $U \in \mathcal{U}$, e de aqui $\mu_U(K) = \mu_U(gK)$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Segue que a função contínua que envia a cada $f \in X$ a $f(K) - f(gK)$ é 0 sobre cada $C(U)$, e cada $\mu(K) = \mu(gK)$. Portanto μ é invariante a esquerda. Concluímos que μ é uma medida de Haar a esquerda sobre G. □

Definição 22 ($C_c(G)$). *$C_c(G)$ é o conjunto de funções contínuas com suporte compacto, isto é o subconjunto do domínio onde a função não se anula é compacto.*

Lema 6. *Seja G um grupo localmente compacto e seja $f \in C_c(G)$. Então, para cada $\epsilon \gneq 0$, existe uma vizinhança aberta U da identidade tal que sempre que $y \in xU$, tem-se que $|f(x) - f(y)| \lneq \epsilon$.*

Lema 7. *Seja G um grupo topológico e seja μ uma medida de Haar a esquerda sobre G. Então, para cada $x \in G$, $\int_G f(x \cdot g)\, d\mu(g) = \int_G\ f(g) d\mu(g)$ para cada $f \in L^1(G)$.*

Demonstração. Seja $x \in G$.
Passo 1: Provar para as funções características.
Seja A um subconjunto mensurável e $f = \mathcal{X}_A$. Então,

$$\begin{aligned}\int_G f(x \cdot g)\, d\mu(g) &= \int_G \mathcal{X}_A(x \cdot g)\, d\mu(g) = \int_G \mathcal{X}_{x^{-1}A}(g)\, d\mu(g) = \mu(x^{-1}A) = \mu(A) \\ &= \int_G \mathcal{X}_A(g)\, d\mu(g) = \int_G f(g)\, d\mu(g)\end{aligned}$$

Passo 2: Provar para as funções simples.
Seja f uma função simples então existem constantes $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e conjuntos mensuráveis $A_1, \ldots, A_n$ tais que $f = \sum_{k=1}^n a_k \mathcal{X}_{A_k}$. Então,

$$\begin{aligned}\int_G f(x \cdot g)\, d\mu(g) &= \sum_{k=1}^n a_k \int_G \mathcal{X}_{A_k}(x \cdot g)\, d\mu(g) = \sum_{k=1}^n \int_G \mathcal{X}_{A_k}(g)\, d\mu(g) \\ &= \int_G f(g)\, d\mu(g)\end{aligned}$$

Passo 3: Provar para funções mensuráveis não negativas.
Seja f uma função mensurável não negativa sobre G. Então existe uma sequência monótona crescente de funções simples ϕ_n que convergem pontualmente em quase todo ponto de f.

$$\int_G f(x \cdot g)\, d\mu(g) = \lim_{n\to\infty} \int_G \phi_n(x \cdot g)\, d\mu(g) = \lim_{n\to\infty} \int_G \phi_n(g)\, d\mu(g) = \int_G f(g)\, d\mu(g)$$

Passo 4: Provar para uma função integrável de valores reais (codomínio real).
Seja f uma função integrável de valores reais sobre G. Defina $f_+(g) = \begin{cases} f(g) & se\ f(g) \geq 0 \\ 0 & se\ f(g) \lneq 0 \end{cases}$ e Defina $f_-(g) = \begin{cases} -f(g) & se\ f(g) \leq 0 \\ 0 & se\ f(g) \gneq 0 \end{cases}$. Então f_+, f_- são funções mensuráveis não negativas, por tanto

$$\begin{aligned}\int_G f(x \cdot g)\, d\mu(g) &= \int_G f_+(x \cdot g)\, d\mu(g) - \int_G f_-(x \cdot g)\, d\mu(g) \\ &= \int_G f_+(g)\, d\mu(g) - \int_G f_-(g)\, d\mu(g) = \int_G f(g)\, d\mu(g)\end{aligned}$$

Passo 5: Provar para $f \in L^1(G)$.
Seja $f \in L^1(G)$. Defina a $R := Re(f)$ e a $I := Im(f)$. Então R, I são funções mensuráveis de valores reais, por tanto

$$\begin{aligned}\int_G f(x \cdot g)\, d\mu(g) &= \int_G R(x \cdot g)\, d\mu(g) + i \int_G I(x \cdot g)\, d\mu(g) \\ &= \int_G R(g)\, d\mu(g) + i \int_G I(g)\, d\mu(g) = \int_G f(g)\, d\mu(g)\end{aligned}$$

□

Teorema 3 (Unicidade)**.** *Seja G um grupo localmente compacto, e sejam μ e μ' duas medidas de Haar sobre G. Então, $\mu = a\mu'$ para algum $a \in \mathbb{R}^+$.*

Demonstração. Passo 1: Achar um subconjunto compacto com medida não nula.
Como μ é não nula, existe algum conjunto A mensurável com medida não nula (com respeito a μ). Segue que, pela "regularidade externa", existe pelo menos um subconjunto U tal que $A \subseteq U$ e $\mu(U) \gneq 0$ e pela "regularidade interna", existe pelo menos um compacto K tal que $K \subseteq U$ e $\mu(K) \gneq 0$.

Passo 2: Mostrar que $\int_G f \, d\mu \gneq 0$ para $f \in C_c(G)$ não negativa e não identicamente nula.
Seja $f \in C_c(G)$ não negativa e não identicamente nula. Defina $U := f^{-1}(\mathbb{R}^+)$. U é não vazia porque f é não identicamente 0. Por continuidade, U é aberto, como K é compacto (K é o compacto do Passo 1) e U é não vazio, existe um número finito de elementos $g_1, \ldots, g_n$ tal que $K \subseteq \cup_{k=1}^n g_k U$, por isto

$$0 \lneq \mu(K) \lneq \sum_{k=1}^{n} \mu(g_k U) = n\mu(U),$$

por tanto $\mu(U) \gneq 0$. Então, pelo Lema 4, segue que existe um $a \gneq 0$, tal que $V = \{g \in G : f(g) \geq a\}$ é de medida positiva. Segue que

$$\int_G f \, d\mu \geq \int_V f \, d\mu \geq a\mu(V) \gneq 0.$$

Passo 3: Defina h.
Seja $g \in C_c(G)$ não negativa e não identicamente 0, e seja $f \in C_c(G)$ uma função arbitrária. Fixaremos a função g durante o resto da prova. Defina

$$h(x, y) := \frac{f(x)g(y \cdot x)}{\int_G g(t \cdot x) \, d\mu'(t)}.$$

Pelo Passo 2 o denominador nunca se anula, por tanto h esta bem definida sobre todo $G \times G$. Note também, que h tem suporte compacto, pois f e g têm.

Passo 4: Mostrar que h é contínua.
Para mostrar que h é uma função contínua, é suficiente mostrar que $I(x) \equiv \int_G g(t \cdot x) \, d\mu'(t)$ é uma função contínua. Defina $K = \mathit{supp}[g]$, seja $x_0 \in G$, e seja U uma vizinhança aberta de x_0 cujo fecho é compacto (que existe porque G é localmente compacto). $K \times \overline{U}^{-1}$ é compacto pelo Teorema de Tychonoff (Ver Teorema 25), como $K \cdot \overline{U}^{-1}$ é compacto porque é a imagem de $K \times \overline{U}^{-1}$ de uma função contínua, seja $\epsilon \gneq 0$, e escolha $\delta \gneq 0$ tal que $\delta\mu'(K \cdot \overline{U}^{-1}) \lneq \epsilon$, que podemos pois $K \cdot \overline{U}^{-1}$ é compacto, e sua medida é finita. Pelo Lema 6 existe uma vizinhança aberta V da identidade tal que sempre que $y \in xV$, tenha-se $|g(x) - g(y)| \lneq \delta$.
Então, sempre que $x \in U \cap x_0 \cdot V$, uma vizinhança aberta de x_0, $t \cdot x \in t \cdot x_0 \cdot V$, tal que

$$|I(x) - I(x_0)| \leq \int_G |g(t \cdot x) - g(t \cdot x_0) \, d\mu'(t)| \leq \delta\mu'(K \cdot \overline{U}^{-1}) \lneq \epsilon,$$

onde usamos o fato de que o integrando se anula para t forá de $K\overline{U}^{-1}$. Assim, I é contínuo, e h é contínuo, portanto $h \in C_c(G \times G)$.

Passo 5: Mostrar que $\frac{\int f(x) \, d\mu(x)}{\int g(x) \, d\mu(x)} = C$ onde C é uma constante independente de μ.
Pela generalização do Teorema de Fubini (Ver Teorema 7.6.4, [14]), nós temos que

$$\begin{aligned}
\int_G \left[\int_G h(x,y)\, d\mu'(y)\right] d\mu(x) &= \int_G \left[\int_G h(x,y)\, d\mu(x)\right] d\mu'(y) \\
&= \int_G \left[\int_G h(y^{-1}x,y)\, d\mu(x)\right] d\mu'(y) \\
&= \int_G \left[\int_G h(y^{-1}x,y)\, d\mu'(y)\right] d\mu(x) \\
&= \int_G \left[\int_G h(y^{-1},xy)\, d\mu'(y)\right] d\mu(x),
\end{aligned}$$

Aplicamos o Lema 7 varias vezes. Assim

$$\begin{aligned}
\int_G f(x)\, d\mu(x) &= \int_G \left[f(x)\frac{\int_G g(yx)\, d\mu'(y)}{\int_G g(tx)\, d\mu'(t)}\right] d\mu(x) \\
&= \int_G \left[\int_G \frac{\int_G f(x)g(yx)}{\int_G g(tx)\, d\mu'(t)} d\mu'(y)\right] d\mu(x) = \int_G \left[\int_G h(x,y)\, d\mu'(y)\right] d\mu(x) \\
&= \int_G \left[\int_G h(y^{-1},xy)\, d\mu'(y)\right] d\mu(x) \\
&= \int_G \left[\int_G \frac{f(y^{-1})g(x)}{\int_G g(ty^{-1})\, dt} d\mu'(y)\right] d\mu(x) \\
&= \left(\int_G g(x)\, d\mu(x)\right)\left(\int_G \frac{f(y^{-1})}{\int_G g(ty^{-1})\, d\mu'(t)} d\mu'(y)\right)
\end{aligned}$$

Assim, $\frac{\int f(x)\, d\mu(x)}{\int g(x)\, d\mu(x)} = C$, onde C é alguma constante independente de μ.

Passo 6: Mostrar que $\int_G f\, d\mu' = a\int_G f\, d\mu$ para alguma constante positiva a.
Como a constante C não depende de μ, poderia ser o caso que

$$\frac{\int_G f\, d\mu}{\int_G g\, d\mu} = C = \frac{\int_G f\, d\mu'}{\int_G g\, d\mu'},$$

e já que

$$\int_G f\, d\mu' = a\int_G f\, d\mu,$$

onde $a \equiv \frac{\int_G g\, d\mu'}{\int_G g\, d\mu}$.

Passo 7: Mostrar que $\mu' = a\mu$.
Para $f \in C_c(G)$, defina $\phi(f) = \int_G f\, d\mu$ e $\psi(f) = \int_G f\, d\nu$ onde ν é uma medida definida como $\nu := 1/a\mu'$. Tanto ϕ como ψ são funcionais lineares positivos sobre $C_c(G)$, e

$$\phi(f) = \int_G f\, d\mu = \frac{1}{a\int_G f\, d\mu'} = \int_G f\, d\nu = \psi(f).$$

Portanto, pela representação de Riesz (Ver Teorema 7.2.8, [14]), segue que $\mu = \nu$, é dizer $\mu' = a\mu$ com $a \in \mathbb{R}^+$, como queria-se provar. $\square$

Teorema 4 (Existência e unicidade da medida de Haar)**.** *Se G é um grupo localmente compacto, então existe uma medida de Haar a esquerda (direita) sobre G que é única a menos de um múltiplo por escalar real.*

Demonstração. Ver Teorema 2 e Teorema 3. □

Teorema 5 (Unicidade da medida de Haar compactos)**.** *Se G é um grupo compacto, então a medida de Haar sobre G é única, e invariante a esquerda e direita.*

Exemplo 4. *Considere o círculo unitário* $\mathbb{S}^1 = ([0,1]/(0 \equiv 1), +)$ *Neste caso a medida de Haar é a medida de Lebesgue.*

Exemplo 5. *Considere* $(\mathbb{Z}, +)$*. Neste caso a medida de contagem é a medida de Haar.*

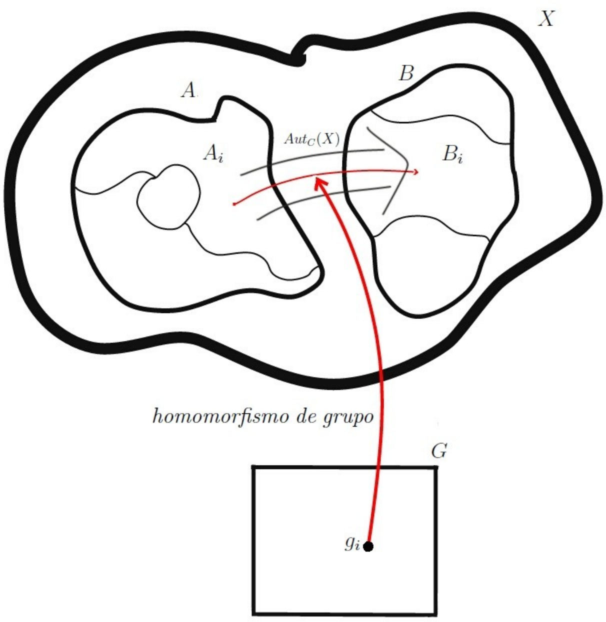
Capítulo 2

Teorema de Tarski

2.1 Paradoxo de Banach-Tarski

Nesta seção provaremos que dada uma bola em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ existem dois subconjuntos disjuntos tais que por meio de rotações e translações sobre suas partições pode-se reobter a bola. Como é sabido as rotações e translações são isometrias, as quais preservam área e volume, o que nos levaria, erroneamente, a pensar que dada uma esfera podemos obter duas com o mesmo volume; este fato só deixa em evidência a inexistência de uma medida definida sobre todos os possíveis subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ e cujo valor na bola seja 1.

Definição 23. *Seja G atuando sobre X, $(A, B \subseteq X)$. Dizemos que A, B são finitamente G-equidecomponíveis ($A \backsim B$) se existem partições finitas $A_1, \ldots, A_n$ de A e $B_1, \ldots, B_n$ de B e existem $g_1, \ldots, g_n \in G$ tais que $B_i = g_i(A_i)$ para cada i. Denotamos $A \lesssim B$ se $A \backsim C$ e $C \subset B$.*
Uma realização h de $A \sim B$ é uma bijeção $h : A \to B$ tal que para cada i, temos $h(a_i) = g_i a_i \quad a_i \in A_i$.



Proposição 2. *$\backsim$ é uma relação de equivalência.*

Demonstração.

- Reflexiva, é evidente pois basta pegar o neutro.

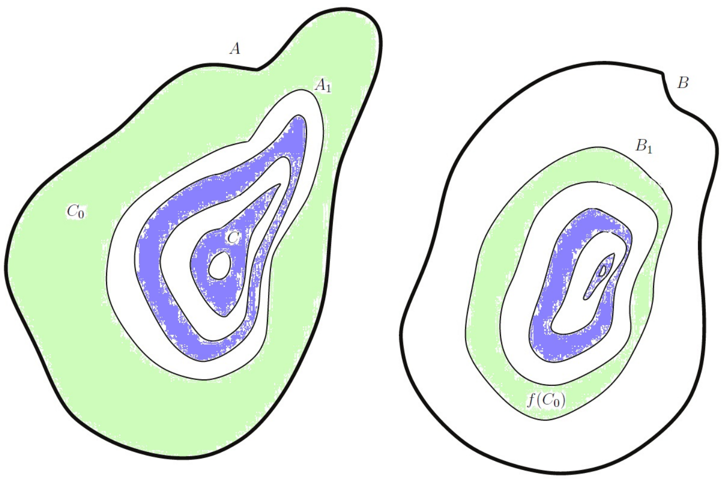
- Simétrica.
  Dada $A \sim B$ com os elementos do grupo $g_1, \dots, g_n$ então é evidente que pegando $g_1^{-1}, \dots, g_n^{-1}$ tenha-se $B \sim A$.

- Transitiva.
  Suponha que que $A \sim B$ e $B \sim D$ com as decomposições $A = \cup_{i=1}^n A_i$, $B = \cup_{i=1}^n B_i = \cup_{j=1}^m C_j$, $D = \cup_{j=1}^m D_j$ e elementos do grupo $g_1, \dots, g_n$, $h_1, \dots, h_m$. Então podemos criar novas partições definindo $A_{ij} := g_i^{-1}(B_i \cap C_j)$, $g_{ij} := g_i \mid_{A_{ij}}$, $h_{ij} := h_j \mid_{B_i \cap C_j}$ e $D_{ij} := h_{ij} g_{ij}(A_{ij})$ para $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Isto da uma realização de $A \sim D$.

$\square$

Teorema 6 (Banach-Schröder-Bernstein). *Seja G atuando sobre X e A, $B \subset X$. Se $A \precsim B$ e $B \precsim A$ então $A \backsim B$.*

Demonstração. Como $A \precsim B$ e $B \precsim A$ existem subconjuntos $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$ e realizações $f : A \to B_1$ e $g : A_1 \to B$.
Definimos $C_0 := A \setminus A_1$ e $C_{n+1} := g^{-1}f(C_n)$ para $n \geq 0$ e seja $C := \cup_{n=1}^{\infty} C_n$ a união desses conjuntos, note que $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são disjuntos; pois se $C_n \cap C_m \neq \emptyset$, sem perda de generalidade suponha que $n \leq m$, logo existem $p, q \in C_0$ tais que $(g^{-1}f)^n(p) = (g^{-1}f)^{m-n}(g^{-1}f)^n(q)$, como f, g são bijeções $p = (g^{-1}f)^{m-n}(q)$ e como $p \in A \setminus A_1$ e $(g^{-1}f)^{m-n}(q) \in A_1$, assumir $C_n \cap C_m \neq \emptyset$ é um absurdo; logo $A \setminus A_1 \cup A_1 \setminus C \cup C$ é uma partição de A.
Para cada $a \in A_1$, $a \in C_{n+1} \Leftrightarrow g(a) \in f(C_n)$ $\forall n \geq 0$ então $a \notin C \Leftrightarrow g(a) \notin f(C \cup C_0)$ logo $a \in A_1 \setminus C \Leftrightarrow g(a) \in B \setminus f(C \cup C_0)$, como f é uma bijeção e C, C_0 são disjuntos, tem-se $f(C) \cap f(C_0) = \emptyset$, então $g(A_1 \setminus C) = B \setminus \{f(C) \cup f(C_0)\}$. Note que se $h : F \to D$ é uma realização de $F \sim D$ e $S \subseteq F$ então $S \sim h(S)$. Com esta observação temos $A_1 \setminus C \sim B \setminus \{f(C) \cup f(C_0)\}$, $A \setminus A_1 \sim f(C_0)$ e $C \sim f(C)$ então concluímos que $A \sim B$. $\square$



Corolário 1. *Se existem subconjuntos disjuntos e próprios A, B de X tais que $A \backsim X \backsim B$ então existem subconjuntos disjuntos e próprios D, F de X tais que $X = D \cup F$ e $D \backsim X \backsim F$.*

Demonstração. Já que $X \sim B \subseteq (X \setminus A) \subset X$ temos que $X \precsim X \setminus A$, por outro lado como $X \setminus A \subset X$ tem-se $X \setminus A \precsim X$ e pela Proposição 6, $X \sim X \setminus A$. Logo $A = D$ e $F = X \setminus A$. $\square$

Definição 24. *Dizemos que X é finitamente G-paradoxal se existem $A, B \subseteq X$ disjuntos e $(A \backsim X \backsim B)$.*

O "finitamente" é porque usamos partições finitas na hora de fazer a G-equidecomponibilidade. Para a seguinte proposição nós precisamos do axioma da escolha

Definição 25 (Axioma da escolha)**.** *Se X é um conjunto não vazio, existe uma "função de escolha", $f : P(X) \setminus \emptyset \to X$ tal que para todo $A \subseteq X$, tem-se $f(A) \in A$, ou seja f escolhe um elemento de A.*

Proposição 3.

i) O grupo livre F_2 (ver Definição 4) é finitamente F_2-paradoxal (atuando sobre si mesmo por multiplicação a esquerda).

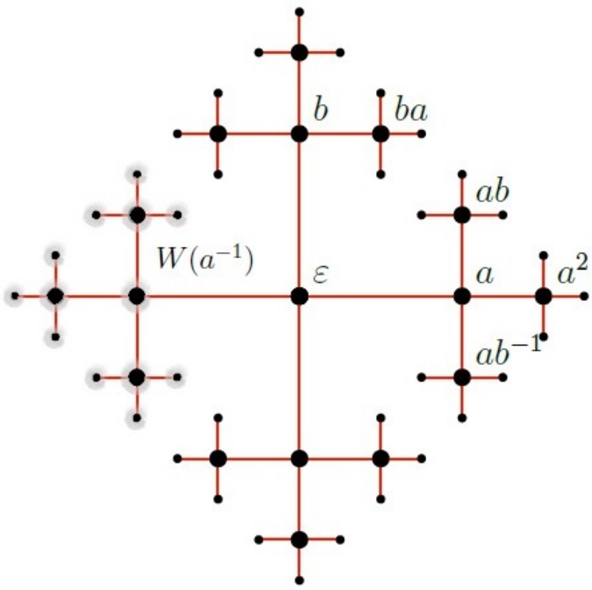
ii) Se F_2 atua livremente sobre o conjunto X então X é finitamente F_2-paradoxal.

Demonstração.

$i)$ Seja F_2 o gerado por $\{a, b\}$ e seja $W(x)$ o conjunto das palavras reduzidas começando com x. Então escrevendo

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_2 &= \{1\} \cup W(a) \cup W(a^{-1}) \cup W(b) \cup W(b^{-1}) \\ &= W(a) \cup aW(a^{-1}) \\ &= W(b) \cup bW(b^{-1}) \end{aligned}$$

Seja $A =: W(a) \cup W(a^{-1})$ como $\{1(W(a)) = W(a),\ a(W(a^{-1}) = aW(a^{-1})\}$ têm-se $A \sim F_2$ e seja $B =: W(b) \cup W(b^{-1})$, como $\{1(W(b)) = W(b),\ b^{-1}(bW(b^{-1})) = W(b^{-1})\}$, têm-se $F_2 \sim B$ pelo que satisfaz-se as condições do Corolário 1.



$ii)$ Seja $\overline{M}$ a classe de equivalência dada pelas F_2-orbitas de X, onde a órbita de $a \in X$ é definida como $\overline{a} = \{b \in X : \exists\, g \in F_2,\ g(a) = b\}$. Pelo Axioma da escolha tomamos um só elemento de cada classe e definimos como M o conjuntos destes representantes, note que se $a \in X$ então $g_i(a) \neq g_j(a)\ \ \forall\, g_i, g_j \in F_2$ pois de outra forma $g_i^{-1} g_j(x)$ teria um ponto fixo e a ação já não seria livre. Para $c \in F_2$, defina $X_c := \{z(m) : z \in W(c),\ m \in M\}$. Então os conjuntos $X_a, X_{a^{-1}}, X_b, X_{b^{-1}}$ são disjuntos, pelo que $X = X_a \cup aX_{a^{-1}} = X_b \cup bX_{b^{-1}}$ e basta usar o mesmo argumento do inciso $i)$.

$\square$

No $\mathbb{R}^n$ as isometrias que deixam invariante a origem de coordenadas são aplicações lineares (bijetivas), que conservam a norma $\| f(x) \| = \| x \|$ e o produto escalar $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. No $\mathbb{R}^3$ chamam-se de transformações lineares ortogonais de $\mathbb{R}^3$ e são aquelas cuja matriz associada verifica a igualdade $A^T = A^{-1}$ (é uma matriz ortogonal de ordem 3) e seu determinante é ± 1. O conjunto das matrizes ortogonais de ordem 3 formam o subgrupo $O(3,\mathbb{R})$ do grupo das isometrias G_3 de $\mathbb{R}^3$: As matrizes ortogonais de ordem 3 com determinante 1 formam um subgrupo de $O(3,\mathbb{R})$, o grupo especial ortogonal $SO(3,\mathbb{R})$.

Lema 8 (Ping-Pong Lema)**.** *Seja G um grupo gerado por dois elementos a e b de ordem infinita. Suponha que há uma G-ação sobre um subconjunto X tal que há subconjuntos não vazios $A, B \subset X$ com B não contido em A e tal que para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ temos.*

$$a^n \cdot B \subset A \quad \text{e} \quad b^n \cdot A \subset B.$$

Então G é livremente gerado por $\{a, b\}$.

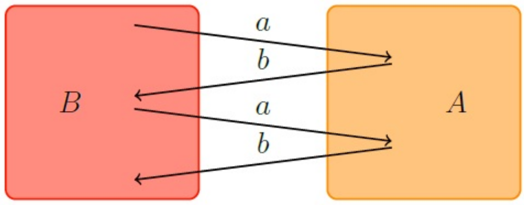


Figura extraída de [12].

Demonstração. Ver pagina 70 "Geometric group theory, an introduction", Clara Löh □

Proposição 4. *O grupo especial ortogonal $SO(3,\mathbb{R})$ contém um F_2 (ver Definição 4) a menos de um isomorfismo de grupos.*

Prova por ping-pong lema. Sejam $\rho^{\pm 1}$ e $\sigma^{\pm 1}$ as rotações ao redor dos eixos z e x respectivamente e com ângulo *arccos* $\frac{1}{3}$, então suas respectivas representações matriciais são:

$$\rho^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1/3 & \mp 2\sqrt{2}/3 & 0 \\ \pm 2\sqrt{2}/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \sigma^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & \mp 2\sqrt{2}/3 \\ 0 & \pm 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Demostraremos que o grupo de palavras reduzidas geradas pelo alfabeto $\{\rho, \rho^{-1}, \sigma, \sigma^{-1}\}$ é F_2 usando o ping-pong lemma.

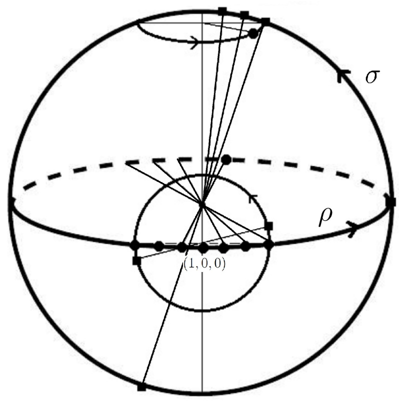
Primeiro para construir os conjuntos façamos um estudo da órbita de $(1, 0, 0)$ pela ação do nosso grupo. Por indução sobre o comprimento k da palavra reduzida w, mostraremos que $w(1, 0, 0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k$ onde $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
Para o comprimento $n = 1$ têm-se $\rho^{\pm}(1, 0, 0) = (1, \pm 2\sqrt{2}, 0)/3 \quad 1, \pm 2, 0 \in \mathbb{Z}$ e $\sigma^{\pm 1}(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$; para $n = k-1$ por hipótese de indução $w'(1, 0, 0) = (a', b'\sqrt{2}, c')/3^{k-1}$ onde $a', b', c' \in \mathbb{Z}$ e aplicando as matrizes $\rho^{\pm 1}$ e $\sigma^{\pm 1}$ nestes vetores temos

$$\rho^{\pm 1} w'(1, 0, 0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k$$
$$a = a' \mp 4b' \quad b = b' \pm 2a' \quad c = 3c' \tag{2.1}$$

$$\sigma^{\pm 1} w'(1, 0, 0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k$$
$$a = 3a' \quad b = b' \mp 2c' \quad c = c' \pm 4b' \tag{2.2}$$

Agora considere os conjuntos $A = \{p = w(1,0,0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k : c$ seja divisível por $3\}$ é dizer os elementos da órbita de $(1,0,0)$ tais que ao ser expressados dessa forma (como já mostramos que podem ser escritos) resulta c ser divisível por 3, e o conjunto $B = \{p = w(1,0,0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k : a$ seja divisível por $3\}$.

Note que, $\rho(1,0,0) = (1, 2\sqrt{2}, 0)/3^1 \in A$ mas não pertence a B e $\sigma\rho(1,0,0) = (3, 2\sqrt{2}, 8)/3^2 \in B$ mas não pertence a A. Pelo que $A \subsetneq B$ e $B \subsetneq A$.
Seja $b \in B$ então $b = (a', b'\sqrt{2}, c')/3^{k-1}$ é um elemento da órbita de $(1,0,0)$, logo pelo argumento antes provado e a equação (1.1) têm-se que $\rho^{\pm 1}(b) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k$ onde $c = 3c'$, como $c' \in \mathbb{Z}$, c é divisível por 3, então $\rho^n(A) \subset B \;\; \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (pois de fato só precisávamos que fosse um elemento da órbita). Usando a equação (1.2) e o mesmo argumento pode-se mostrar que $\sigma^n(B) \subset A \;\; \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. □



Demostração usual

Proposição 5. *O grupo especial ortogonal $SO(3, \mathbb{R})$ contem um F_2 (ver Definição 4) a menos de um isomorfismo de grupos.*

Demonstração. Sejam $\rho^{\pm 1}$ e $\sigma^{\pm 1}$ as rotações com sentido anti-horário ao redor dos eixos x e z respectivamente e com ângulo $arccos\,\frac{1}{3}$, então suas respectivas representações matriciais são:

$$\rho^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1/3 & \mp 2\sqrt{2}/3 & 0 \\ \pm 2\sqrt{2}/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \sigma^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & \mp 2\sqrt{2}/3 \\ 0 & \pm 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Se o grupo de palavras reduzidas geradas pelo alfabeto $\{\rho, \rho^{-1}, \sigma, \sigma^{-1}\}$ não é F_2 (a menos de isomorfismo de grupo) implica que existem pelo menos uma matriz representada por duas palavras reduzidas diferentes, por exemplo

$$\rho^4\sigma^{-3}\rho^{-2} = \sigma^6\rho^2$$

então, fazendo lei do cancelamento (grupo)

$$\rho^4\sigma^{-3}\rho^{-4}\sigma^{-6} = 1.$$

Com esta observação nossa demostração se reduz a mostrar que qualquer palavra reduzida dada por este alfabeto é diferente da identidade. Considere os possíveis dois casos:

1) A palavra reduzida w é da forma σ^n, $\forall n \in \mathbb{Z}$.
   Como σ^n é uma rotação em torno ao eixo x com um ângulo $arccos\,\frac{1}{3}$, σ^n é diferente da identidade pois de outro modo $arccos\,\frac{1}{3} \equiv 0 \,mod\, \pi$ o que é uma contradição.

2) A palavra reduzida w tem pelo menos uma letra ρ ou ρ^{-1}. Note que $w(1,0,0) = v\rho^{\pm 1}(1,0,0)$ onde v é uma palavra reduzida. Por indução sobre o comprimento da palavra, mostraremos que $v\rho^{\pm 1}(1,0,0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k$ onde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e b não é divisível por 3, isto implicará $b \neq 0$.
Para o comprimento $n = 1$ têm-se $\rho^{\pm}(1,0,0) = (1, \pm 2\sqrt{2}, 0)/3 \quad 1, \pm 2, 0 \in \mathbb{Z}$; para $n = k-1$ por hipótese de indução $v'\rho^{\pm}(1,0,0) = (a', b'\sqrt{2}, c')/3^{k-1}$ onde $a', b', c' \in \mathbb{Z}$ e aplicando as matrizes $\rho^{\pm 1}$ e $\sigma^{\pm 1}$ nestes vetores temos

$$\rho^{\pm 1}v'\rho^{\pm 1}(1,0,0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k$$
$$a = a' \mp 4b' \quad b = b' \pm 2a' \quad c = 3c' \tag{2.3}$$

$$\sigma^{\pm 1}v'\rho^{\pm 1}(1,0,0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k$$
$$a = 3a' \quad b = b' \mp 2c' \quad c = c' \pm 4b' \tag{2.4}$$

Para mostrar que b não é divisível por 3; para $n = 1$, $\rho^{\pm 1}(1,0,0) = (1, \pm 2\sqrt{2}, 0)/3$, ± 2 não é divisível por 3, agora, por hipóteses de indução seja $v'\rho^{\pm 1}(1,0,0) = (a', b'\sqrt{2}, c')/3^{k-1}$ com b não divisível por 3 e considere os possíveis seguentes casos

- quando $v' = \sigma^{\pm 1}v''$ e $v''\rho^{\pm 1}(1,0,0) = (a'', b''\sqrt{2}, c'')/3^{k-2}$
  - $\rho^{\pm 1}\sigma^{\pm 1}v''\rho^{\pm 1}(1,0,0) = \rho^{\pm 1}v'\rho^{\pm 1}(1,0,0)$.
    pelas equações 2.3 e 2.4 temos

    $$b = b' \pm 2a' \quad a' = 3a''$$

    como $-2a'$ é divisível por 3 e b' não (por hipótese de indução), fazendo a soma usual de módulos pode-se demostrar que b não é divisível por 3.
  - $\sigma^{\pm 1}\sigma^{\pm 1}v''\rho^{\pm 1}(1,0,0) = \sigma^{\pm 1}v'\rho^{\pm 1}(1,0,0)$.
    pelas equações 2.3 e 2.4 temos

    $$b = b' \mp 2c' = b' \mp 2(c'' \pm 4b'') = b' + b'' \mp 2c'' - 9b'' = 2b' - 9b''$$

    como $-9b''$ é divisível por 3 e b' não (por hipótese de indução), pelo mesmo argumento b não é divisível por 3.
- quando $v' = \rho^{\pm}v''$
  - $\sigma^{\pm 1}\rho^{\pm 1}v''\rho^{\pm 1}(1,0,0) = \sigma^{\pm 1}v'\rho^{\pm 1}(1,0,0)$.
    use o mesmo argumento do caso $\rho^{\pm 1}\sigma^{\pm 1}v''\rho^{\pm 1}(1,0,0)$
  - $\rho^{\pm 1}\rho^{\pm 1}v''\rho^{\pm 1}(1,0,0) = \rho^{\pm 1}v'\rho^{\pm 1}(1,0,0)$.
    use o mesmo argumento do caso $\sigma^{\pm 1}\sigma^{\pm 1}v''\rho^{\pm 1}(1,0,0)$

□

Proposição 6 (Paradoxo de Hausdorff). *Existe um subconjunto enumerável D da 2-esfera $\mathbb{S}^2$ (esfera unitária na $\mathbb{R}^3$) tal que $\mathbb{S}^2 \setminus D$ é finitamente $SO(3,\mathbb{R})$-paradoxal.*

Demonstração. Cada elemento não trivial de $SO(3,\mathbb{R})$ fixa exatamente dois pontos em $\mathbb{S}^2$ (a interseção da esfera com o eixo de rotação). Pela Proposição 5, $F_2 \subset SO(3,\mathbb{R})$. Seja D a união dos pontos que são fixos por alguma rotação que pertença a F_2. Como F_2 atua livremente sobre $\mathbb{S}^2 \setminus D$, pela Proposição 3 tem-se que $\mathbb{S}^2 \setminus D$ é finitamente F_2-paradoxal, pelo que também $SO(3,\mathbb{R})$. Além disso como F_2 é enumerável tem-se que D também é. □

Observação 1. *Todo ponto fixo de uma rotação gerada pelo alfabeto $\{\rho, \rho^{-1}, \sigma, \sigma^{-1}\}$ esta contido na órbita de $(1,0,0)$ por F_2 ou na órbita $(0,0,1)$ por F_2. Pois se $w\rho$ é uma palavra reduzida, como o ponto fixo de ρ é $(0,0,1)$ então o ponto fixo de $w\rho$ é $w^{-1}(0,0,1)$, um argumento similar tem-se para $w\sigma$.*

Proposição 7. *Se D um subconjunto contável da 2-esfera $\mathbb{S}^2$ então $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{S}^2 \setminus D$ são $SO(3,\mathbb{R})$-equidecomponíveis.*

Demonstração. Sejam p, q um par de pontos antipodais de $S^2 \setminus D$ (que existe pois D é contável e S^2 não) chamamos a s_θ á rotação do eixo orientado (pq) e de ângulo θ.
Para cada $z \in D$ seja

$$A(z) = \{\theta : s_\theta(z) \in D\};$$

$A(z)$ é contável por D, logo a união

$$A = \cup_{z \in D} A_z$$

é também contável, então existe um ângulo θ_0 tal que sua n-ésima rotação, $s^n_{\theta_0}(D) \cap D = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Seja $\overline{D} := \cup_{n=0}^{\infty} s^n_{\theta_0}(D)$ o conjunto das n-ésimas rotações de D pelo ângulo θ_0 então $\mathbb{S}^2 = \overline{D} \cup (\mathbb{S}^2 \setminus \overline{D}) \sim s_{\theta_0}(\overline{D}) \cup (\mathbb{S}^2 \setminus \overline{D}) = \mathbb{S}^2 \setminus D$ pois $s_{\theta_0}(\overline{D}) \subset \overline{D}$ e $\cup_{n=1}^{\infty} s^n_{\theta_0}(D) \cap D = \emptyset$. □

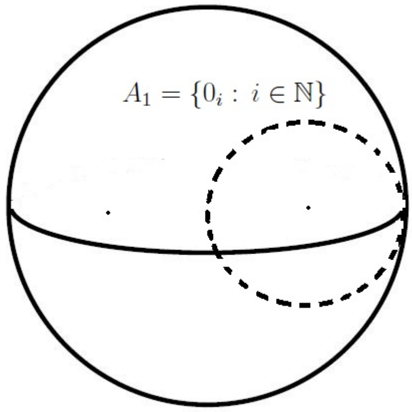
Teorema 7 (Paradoxo de Banach-Tarski)**.** *Seja G_3 o grupo de isometrias de $\mathbb{R}^3$. A esfera unitária $\mathbb{S}^2$ (superfície bidimensional) é $SO(3,\mathbb{R})$-paradoxal como cada esfera centrada no origem. A bola untaria $\mathbb{D}^3$ e cada bola (solida) de $\mathbb{R}^3$ é G_3-paradoxal, além disso $\mathbb{R}^3$ também é G_3-paradoxal.*

Demonstração. Pela Proposição 6, $SO(3,\mathbb{R})$- equidecomponivel é uma relação transitiva e pelas proposições 7 e 6 têm-se que $\mathbb{S}^2$ é $SO(3,\mathbb{R})$-paradoxal, como este resultado não depende do raio, quaisquer esfera centrada no zero é $SO(3,\mathbb{R})$-paradoxal.
Consideraremos as bolas centradas na origem pois G_3 contem todas as translações e provaremos só para a bola unitária $\mathbb{D}^3$ porque a prova não dependera do raio. A decomposição de $\mathbb{S}^2$ permite uma decomposição no conjunto $\mathbb{D}^3 \setminus \{0\}$ pois cada subconjunto A de $\mathbb{S}^2$ corresponde um a um com o subconjunto $\{\lambda A : 0 \lneq \lambda \leq 1\}$ de $\mathbb{D}^3 \setminus \{0\}$, isto significa que a bola privada da origem $\mathbb{D}^3 \setminus \{0\}$ é $SO(3,\mathbb{R})$-paradoxal.
Daqui, que é suficiente mostrar que $\mathbb{D}^3$ é G_3-equidecomponível com $\mathbb{D}^3 \setminus \{0\}$; é dizer, que um ponto pode ser absorvido. Para isso considere uma translação t de modo que a distância euclidiana $d(0, t(0)) = \frac{1}{2}$; e uma rotação ρ com ângulo θ de modo que $\frac{\theta}{\pi}$ seja irracional e cujo eixo de rotação não intercepta a $t(0)$. Então os pontos

$$(t\rho^0)(t^{-1}(0)) = 0_0 \quad (t\rho)(t^{-1}(0)) = 0_1 \quad (t\rho^2)(t^{-1}(0)) = 0_2 \ldots$$

são todos distintos pois se existissem $0_m = 0_n$ com $m \gneq n$ teríamos $0_{m-n} = 0_0$ e portanto $(m-n)\theta = 2k\pi$ o que contradiz a irracionalidade do cociente $\frac{\theta}{\pi}$.
Chamamos $A_1 = \{0_i : i \in \mathbb{N}\}$ o conjunto de estes pontos, é claro que $(t\rho t^{-1})(A_1) = A_1 \setminus \{0\}$.
Finalmente, $\mathbb{D}^3 = A_1 \cup \mathbb{D}^3 \setminus A_1 \sim (t\rho t^{-1})(A_1) \cup \mathbb{D}^3 \setminus A_1 = \mathbb{D}^3 \setminus \{0\}$; em outras palavras, nós achamos dois pedaços da bola (cuja união é a bola) onde podemos movimentar um deles por meio de translações e rotações para recuperar a bola privada de um ponto.
A prova para $\mathbb{R}^3$ segue do mesmo argumento, mas neste caso $\{\lambda A : 0 \lneq \lambda\}$.

□



Corolário 2. *Seja G_n o grupo de isometrias e $SO(n,\mathbb{R})$ o grupo de rotações de $\mathbb{R}^n$. Se $n \geq 3$ e $n \in \mathbb{N}$ a esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}$ (superfície $n-1$ dimensional) é $SO(n,\mathbb{R})$-paradoxal, como cada esfera centrada no origem. Além disso, cada bola (solida) de $\mathbb{R}^n$ é G_n-paradoxal e da mesma forma $\mathbb{R}^n$ também é G_n-paradoxal.*

Demonstração. (por indução matemática) Por indução a esfera unitária centrada na origem, $\mathbb{S}^{n-1}$ é $SO(n,\mathbb{R})$-paradoxal, pelo que existem partições $\{A_i\}$, $\{B_j\}$ de $\mathbb{S}^{n-1}$. Defina

$$D_i := \{(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : (x_1,\ldots,x_n)/\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2} \in A_i\}$$

e

$$F_j := \{(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : (x_1,\ldots,x_n)/\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2} \in B_j\}.$$

Note que $\{D_i\}$, $\{F_j\}$ são uma partição da esfera $\mathbb{S}^n$ sem os pólos $(0,\ldots,0,\pm1)$. Como $(A \sim \mathbb{S}^{n-1} \sim B)$, existem partições finitas $(j \leq n)$ $\{S_j\} \subset \mathbb{S}^{n-1}$, $\{B_j\} \subset B$ e rotações $g_j \in SO(n,\mathbb{R})$ tais que $B_j = g_j(S_j)$, note que se $g_j^* = \begin{pmatrix} g_j & [0] \\ [0] & 1 \end{pmatrix}$ têm-se $F_j = g_j^*(S_j)$ então $\mathbb{S}^n \setminus \{(0,\ldots,0,\pm1)\} \sim F$, da mesma forma mostra-se que $D \sim \mathbb{S}^n \setminus \{(0,\ldots,0,\pm1)\}$, o seguinte é usar um argumento similar que o feito na prova do Teorema 7 para absorver os dois pólos, daqui que $\mathbb{S}^n$ é $SO(n+1,\mathbb{R})$-paradoxal. A prova para as bolas e o $\mathbb{R}^n$ usa o mesmo argumento que o Teorema 7.

□

Definição 26 (álgebra). *Seja X um conjunto, uma álgebra R de subconjuntos de X é uma classe não vazia de subconjuntos que contem X que é fechada pelas operações elementares de conjuntos:*

$$A, B \in R \Rightarrow \begin{cases} A \cup B \in R \\ A^c = A \setminus X \in R \end{cases}$$

Definição 27 (σ-álgebra). *Uma álgebra diz-se uma σ-álgebra de subconjunto de X se também for fechada para uniões enumeráveis:*

- *$A_j \in R$ para $j = 1, 2, \ldots$ implica $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in R$*

Um espaço mensurável é uma dupla (X, R) onde M é um conjunto e R é uma σ-álgebra de subconjuntos de X

Definição 28 (medida). *uma medida em um espaço mensurável (X, R) é uma função $\mu : R \to [0, +\infty]$ que satisfaz:*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$*

2. $\mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ *para qualquer* $A_j \in R$ *disjuntos dois a dois.*

A tripla (X, R, μ) *é chamada espaço de medida. A segunda propriedade da definição é chamada* σ*-aditividade.*

A seguir definiremos um conceito mais fraco que a medida, o qual sera usado no resto do texto.

Definição 29 (média ou medida finitamente aditiva sobre uma álgebra)**.** *Uma média* m *sobre uma álgebra* R *de subconjuntos de* X*,* $\mu : R \to [0, +\infty]$ *que satisfaz:*

i) $m(\emptyset) = 0$

ii) $m(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = m(A_1) + \cdots + m(A_n)$ *se* $A_1, \ldots, A_n \in R$ *são dois a dois disjuntos*

Se um grupo G *atua sobre* X *deixando* R *invariante, estão dizemos que* m *é* G*-invariante se:*

iii) $m(gA) = m(A)$ $\forall g \in G$ *e* $A \in R$

Pela segunda propriedade da definição dizemos que m *é finitamente aditiva. Daqui em diante chamaremos a medida finitamente aditiva de média para evitar confusão.*

Note que m ser uma média G-invariante implica que cada ação do grupo leva elementos da álgebra R em elementos da álgebra R da mesma "grandeza"(onde a "grandeza" de $A \in R$ esta dada por $m(A)$).

Observação 2. *Note que se* $E \subseteq X$ *é* G*-paradoxal e admitimos uma média* (m) G*-invariante sobre todos os possíveis subconjuntos de* X $(P(X))$ *tal que* $m(E) \lneq \infty$ *pode-se mostrar que* $m(E) = 0$*. Pois como existem* $g_i, h_j \in G$ *e* $\cup_{i=1}^{n} A_i = A \subset E$ *e* $\cup_{j=1}^{m} B_j = B \subset E$ *disjuntos e próprios tal que* $A \sim E \sim B$ *então* $m(E) \geq \sum_{i=1}^{n} m(A_i) + \sum_{j=1}^{m} m(B_j) = \sum_{i=1}^{n} m(g_i A_i) + \sum_{j=1}^{m} m(h_j B_j) = m(\cup_{i=1}^{n} A_i) + m(\cup_{j=1}^{m} B_j) = m(E) + m(E)$ *como* $m(E) \lneq \infty$ *tem-se* $m(E) = 0$*.*

Se S é um subconjunto acotado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $S \subseteq n\mathbb{D}^n$. Como $\mathbb{D}^n$ é G_n-paradoxal, pela Observação 2 concluímos que para toda média m G_n-invariante definida sobre $P(\mathbb{R}^n)$ tem-se $m(S) = 0$.

2.2 Semigrupo de tipos

Dada uma ação de G sobre X, nesta seção mostraremos no Teorema 10 que um subconjunto $E \subseteq X$ não admite uma decomposição G-paradoxal (Ver Definição 24) se e somente se existe uma média G-invariante (Ver Definição 29) sobre $P(E)$ tal que $m(E) = 1$, para isso faremos uso de uma notação que nos permitirá literalmente adicionar conjuntos, então o fato de $E \subseteq X$ ser paradoxal poderia simplesmente ser escrito como $E = 2E$.

Definição 30. *Se* G *atua sobre um conjunto* X *defina a extensão da ação como segue, seja* $X^* = X \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$*,* $G^* = \{(g, h) : g \in G,\ h \text{ é uma permutação}\}$ *e o grupo* G^* *atuando sobre* X^* *por* $(g, h)(x, n) = (g(x), h(n))$*. Se* $E^* \subseteq X^*$ *então os* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *tais que* E^* *tem pelo menos uma segunda coordenada* n*, são chamados os* ***níveis*** *de* E^* *e se estes são finitos dizemos que* E^* *é limitado. Denotamos a* $E \subset X$ *como* $E \times \{0\}$*.*

A ação de G^* que estende a G trata a todos os níveis da mesma forma, por exemplo, se $E \subseteq X$ então $E \times \{n\}$ é G^*-equidecomponivel com $E \times \{m\}$, além disso a G-equidecomponibilidade e a G^*-equidecomponibilidade estão intimamente relacionadas pois, se E_1, $E_2 \subseteq X$, têm-se que $E_1 \backsim_G E_2 \Leftrightarrow E_1 \times \{n\} \backsim_{G^*} E_2 \times \{m\}$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$. Já que as cópias $E \times \{n\}$ de E em diferentes níveis podem ser identificadas com E, o conjunto $E \times \{0, 1\}$ é o conjunto que intuitivamente poderíamos escrever como $2E$.

Definição 31. *A equidecomponibilidade gera uma classe de equivalência nos subconjuntos limitados de X^*, se E^* é acotado chamamos a sua classe de equivalência $[E^*] = \{H^* \subseteq X^* : H^* \backsim_{G^*} E^*, H^* \text{ limitado}\}$ o **tipo** de E^*. Seja Y a união de todos os tipos, e a operação $+$ definida, como*

$$[A^*] + [B^*] = [A^* \cup B']$$

*onde $B' = \{(b, m+k)$ para k suficientemente grande, de modo que os níveis do B' e A^* não coincidam$\}$ quando $(b, m) \in B^*$; é dizer B' é uma traslação (shift) do B^*, aumentando seus níveis. Pode-se criar o **semigrupo de tipos** $(Y, +)$ o qual é comutativo e tem unidade $0 = [\emptyset]$ (Para mais detalhes Ver [5] capitulo 8).*

Resulta pois natural um produto pelos números naturais $n[E^*] = [E^*]+[E^*]+\ldots+[E^*]$, $n \in \mathbb{N}$ e a definição de uma ordem como: $[E^*] \leq [F^*]$ quando $\exists\, [D^*] \in Y :\ [E^*] + [D^*] = [F^*]$. Note que $[E^*] \leq [F^*] \Leftrightarrow E^* \precsim F^*$ (E^* é G^*-equidecomponível com um subconjunto de F^*) pelo que o Teorema 6 de Banach-Schröder-Bernstein toma a forma simples: $[E]^* \leq [F]^*$ e $[F]^* \leq [E]^* \Leftrightarrow [E^*] = [F^*]$.
É importante ressaltar que o semigrupo de tipos satisfaz a condição Arquimediana com respeito a $[X]$: para cada $[E^*] \in Y$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $[E^*] \leq n[X]$.

Proposição 8. *Se A^*, B^* são subconjuntos limitados de X^* então $[A^* \cup B^*] \leq [A^*] + [B^*]$ e tem-se a igualdade se $[A^*] \cap [B^*] = \emptyset$.*

Demonstração. É fácil ver que, se B' é alguma traslação de B^* aumentando seus níveis então $B^* \sim B'$, por tanto se $A^* \cap B^* = \emptyset$ teríamos $A^* \cup B^* \sim A^* \cup B'$ (pois já não teríamos o problema de que um ponto fora imagem de duas bijeções), é assim que $[A^*] + [B^*] = [A^* \cup B^*] + [A^* \cap B^*]$. □

Proposição 9. *$E \subseteq X$ é paradoxal se e somente se $[E] = 2[E]$ em Y.*

Demonstração.

- $\Rightarrow$ Por hipóteses existem $A, B \subset E$ tal que $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = E$ e $A \sim E \sim B$. Então $[A \cup B] = [E]$, pela Proposição 8 tem-se $[A] + [B] = [A \cup B]$, e por último $[A] = [E] = [B]$ pois $A \sim E \sim B$.

- $\Leftarrow$ Por definição $E \subset X$ é denotado como $E \times \{0\}$ portanto $[E \times \{0\}] = [E \times \{0\}] + [E \times \{0\}] = [E \times \{0\} \cup E \times \{1\}]$ pela Proposição 8.

  Afirmação 3. *Seja G atuando sobre Z e $X, Y \subset Z$. Se $X \sim_G Y$ e X_1, X_2 é uma partição para X então existe uma partição Y_1, Y_2 para Y tal que $X_1 \sim_G Y_1$ e $X_2 \sim_G Y_2$.*

  Pela Afirmação 3 existe uma partição $[F_1 \times \{0\}], [F_2 \times \{0\}]$ de $[E \times \{0\}]$ tal que $[F_1 \times \{0\}] \sim_{G^*} [E \times \{0\}]$ e $[F_2 \times \{0\}] \sim_{G^*} [E \times \{1\}]$. Como $E \times \{0\} \sim_{G^*} E \times \{1\}$ temos então que F_1, F_2 é uma partição de E e que $F_1 \sim E \sim F_2$.

  Prova da Afirmação 3. Como $X \sim_G Y$ então existem $g_i \in G$ e partições $A_i \subset X$, $B_i \subset Y$ tais que $g_i(A_i) = B_i$ com $i = \{1, \ldots, n\}$. Note que $A_i = (A_i \cap X_1) \cup (A_i \cap X_2)$ e $(A_i \cap X_1) \cap (A_i \cap X_2) = \emptyset$ portanto como g_i é uma bijeção $g_i(A_i \cap X_1) \cap g_i(A_i \cap X_2) = \emptyset$ e $(\cup_{i=1}^n g_i(A_i \cap X_1)) \cup (\cup_{i=1}^n g_i(A_i \cap X_2)) = Y_1 \cup Y_2 = Y$. □

□

Teorema 8 (Lei do cancelamento)**.** *Seja $[E^*], [F^*] \in Y$ e $n \in \mathbb{N}$, se $n[E^*] = n[F^*]$ então $[E^*] = [F^*]$.*

Demonstração. Se $n[E^*] = n[F^*]$, então existem dois subconjuntos disjuntos $M^*, N^* \subset X^*$ limitados e G^*-equidecomponíveis, com partições $M^* = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, $N^* = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$ tal que cada $[A_i] = [E^*]$ e cada $[B_i] = [F^*]$ (basta fazer uma translação nos níveis de algum dos dois). Seja $\rho : M^* \to N^*$ realização que faz que $M^* \sim_{G^*} N^*$, e sejam as bijeções $\phi_i : A_1 \to A_i$, $\sigma_i : B_1 \to B_i$ que fazem que $A_1 \sim_{G^*} A_i$ e $B_1 \sim_{G^*} B_i$ (ϕ_1, σ_1 são a identidade). Para cada $a \in A_1$ seja $\overline{a} = \{a, \phi_2(a), \ldots, \phi_n(a)\}$ e para cada $b \in B_1$ seja $\overline{b} = \{b, \phi_2(b), \ldots, \phi_n(b)\}$. Note que $\{\overline{a} : a \in A_1\}$, $\{\overline{b} : b \in B_1\}$ são uma partição para M^*, N^* respectivamente.
Podemos criar um grafo bipartido (ver Definição 60) se olhamos a $\{\overline{a} : a \in A_1\}$ como uma parte do conjunto dos vértices e a $\{\overline{b} : b \in B_1\}$ como a outra. Cada vértice $\overline{a}$ têm n arestas, pois $\rho\phi_i(a)$ é uma aresta entre $\overline{a}$ e $\overline{b}$, como também cada $\overline{b}$ também têm n arestas $(\rho^{-1}\sigma_i(b))$ por tanto nosso grafo é n-regular, e pelo Teorema 26 tem-se um emparelhamento perfeito, M. Para cada vértice $\overline{a}$, existe uma única aresta $\{\overline{a}, \overline{b}\}$ em M, e $\overline{a}$ esta conetado a $\overline{b}$ por $\rho\phi_i(a) = \sigma_j(b)$ para alguns i, j. Seja $C_{ij} = \{a \in A_1 : \{\overline{a}, \overline{b}\} \in M,\ \rho\phi_i(a) = \sigma_j(b)\}$ semelhantemente, seja $D_{ij} = \{b \in B_1 : \{\overline{a}, \overline{b}\} \in M,\ \rho\phi_i(a) = \sigma_j(b)\}$. Então a função $\sigma_j^{-1}\rho\phi_i$ é uma realização entre C_{ij} e D_{ij} pois σ_j^{-1}, ρ e ϕ_i também são. Já que C_{ij}, D_{ij} são uma partição para A_1 e B_1 respectivamente, tem-se $A_1 \sim_{G^*} B_1$ que é o mesmo que $[E^*] = [F^*]$. □

Corolário 3. *Seja $[E^*] \in Y$ e $n \in \mathbb{N}$, se $(n+1)[E^*] \leq n[E^*]$ então $[E^*] = 2[E^*]$.*

Substituindo a desigualdade da hipóteses sobre se mesma temos: $n[E^*] \geq (n+1)E^* = nE^* + E^* \geq (n+1)E^* + E^* = nE^* + 2E^*$ repetindo este processo eventualmente obteremos $nE^* \geq nE^* + nE^* = 2nE^*$. Já que $nE^* \leq 2nE^*$, temos que $nE^* = 2nE^* = n(2E^*)$ e pela lei cancelamento $E^* = 2E^*$.

Corolário 4. *Se G atua sobre X e $E \subseteq X$ é G-paradoxal, então é equidecomponível com cada subconjunto A de E com a propriedade que $E \subseteq g_1A \cup g_2A \cup \cdots \cup g_nA$ para alguns $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$. dai segue que tal A é G-paradoxal e cada dois tais subconjuntos de E são G-equidecomponíveis.*

Demonstração. Como $[E] \subseteq [g_1A \cup g_2A \cup \cdots \cup g_nA] \leq [g_1A] + \cdots + [g_nA]$ tem-se que $[E] \leq n[A]$, e como E é G-paradoxal então $[E] = 2[E] = \cdots = n[E]$ pelo que $n[A] \leq n[E] \leq n[A]$ $(A \subseteq E)$ logo $n[A] = n[E]$ e pelo cancelamento $A = E$, isto é $A \sim_G E$ e portanto como E é G-paradoxal então A também é. Se B é um outro subconjunto que cubre a E com cópias finitas dele então $B \sim E$, logo $B \sim A$. □

Corolário 5. *Se $n \geq 2$ então qualquer dois subconjuntos de S^n com interior não vazio são SO_{n+1}-equidecomponíveis e cada um deles é SO_{n+1}-paradoxal.*

Teorema 9. *Seja $(Y, +, 0, \epsilon)$ um semigrupo comutativo com identidade 0 e um elemento específico ϵ, então são equivalentes:*

1) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\epsilon \nleq n\epsilon$.

2) Existe uma função $\mu : Y \to [0, \infty]$ tal que $\mu(\epsilon) = 1$ e $\mu(x+y) = \mu(x) + \mu(y)$ para todo $x, y \in Y$. Além disso se $x_i, y_j \in Y$ e $x_1 + \cdots + x_m \leq y_1 + \cdots + y_n$ então

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(x_i) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(y_j)$$

(note que μ é um homomorfismo de semigrupo, entre Y e $([0, \infty], +)$).

Demonstração.

2) ⇒ 1) Seja $x, y \in Y$; note que $\mu(x) \leq \mu(y)$ se $x \leq y$, e $\mu(n\epsilon) = n$, donde $(n+1)\epsilon \leq n\epsilon$ implicaria $n + 1 \leq n$, o que é um absurdo.

1) $\Rightarrow$ 2) A ideia desta demostração será usar a compactação do espaço produto $[0, \infty]^Y$ (todas as funções de Y a $[0, \infty]$, ver Anexos "Requisitos de análise funcional"). Note que a compactação de $[0, \infty]^Y$ é resultado do Teorema de Tychonoff que diz que produtos de espaços compactos é compacto (Ver [4]) e o qual precisa do axioma da escolha. Sem perda de generalidade, assumimos que todos os elementos de Y são limitados com respeito a ϵ ($x \in Y$ tem-se $x \leq n\epsilon$ com $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Note que se x não esta limitado por ϵ, qualquer y maior do que x tampouco, logo uma vez tenhamos uma média sobre os elementos limitados podemos estender a média nos elementos não limitados atribuindo a eles o ∞.

Afirmação 4. *Se Y_0 é um subconjunto finito de Y tal que $\epsilon \in Y_0$, e cada $x_i \in Y$ é limitado por ϵ ($x_i \leq n\epsilon$ com $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), então existe uma função $\nu : Y_0 \to [0, \infty]$ tal que*

(i) $\nu(\epsilon) = 1$.

(ii) Se $x_i, y_j \in Y_0$ satisfazem $x_1 + \cdots + x_m \leq y_1 + \cdots + y_n$ então

$$\sum_{i=1}^{m} \nu(x_i) \leq \sum_{j=1}^{n} \nu(y_j) \lneq \infty$$

.

O uso desta afirmação que daqui a pouco vai ser demostrada junto com as propriedades que se derivam da compactação de $[0, \infty]^Y$ vai nos permitir mostrar a existência da média desejada.

Para algum Y_0 como na Afirmação 4, seja $M(Y_0)$ o conjunto das funções $f \in [0, \infty]^Y$ satisfazendo (1) $f(\epsilon) = 1$ e (2) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ sempre que $x, y, x + y \in Y_0$; se vemos $x + y$ como um só elemento e usamos a Afirmação 4, é fácil ver que $M(Y_0) \neq \emptyset$. Agora, como $[0, \infty]^Y$ é compacto então a coleção de seus subconjuntos fechados têm a propriedade da interseção finita (a interseção finita de subconjuntos fechados é diferente de vazio). Demonstraremos que cada $M(Y_0)$ é fechado provando que todo ponto de acumulação de $M(Y_0)$ pertence a ele mesmo. Para isso, note que a sucessão $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ depende só das coordenadas contidas em Y_0 e pelo Teorema 23 temos que $\langle f_n \rangle$ converge pontualmente a g, logo $|f_n(\epsilon) - g(\epsilon)| \leq \delta$ e se $x, y, x+y \in Y_0$ então $|g(x) + g(y) - g(x+y)| \leq |g(x) - f_n(x)| + |g(y) - f_n(y)| + |g(x + y) - f_n(x + y)| \leq \delta$ para um δ arbitrariamente pequeno.

Como $M(Y_1) \cap \cdots \cap M(Y_n) \supseteq M(Y_1 \cup \cdots \cup Y_n)$ onde cada Y_i é um subconjunto finito de Y contendo ϵ, pela propriedade da interseção finita existe um $\nu \in M(\cup Y_i)$; como só estamos considerando os elementos limitados por ϵ e estes são finitos, então existe uma média μ sobre Y como a desejada, definida como

$$\mu(x) = \begin{cases} \nu(x) & se\ \exists\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad x \leq n\epsilon \\ \infty & \textit{caso contrario} \end{cases}$$

para todo $x \in Y$.

Prova da Afirmação 4. A prova será feita sobre a cardinalidade de Y_0. Se $Y_0 = \{\epsilon\}$, $\mu(\epsilon) = 1$ é a função desejada, neste caso a propriedade *(ii)* da Afirmação 4 se reduz a mostrar que se $m\epsilon \leq n\epsilon$ então $m \leq n$. Se $m\epsilon \leq n\epsilon$ e $n + 1 \leq m$, então $(n + 1)\epsilon \leq m\epsilon \leq n\epsilon$ (por propriedade da ordem), o que é uma contradição pela hipóteses 1) do Teorema 9. Esta será a única parte onde a hipótese sobre ϵ será usada.

Agora suponha $|Y_0| \gneq 1$, e seja α algum elemento de $Y_0 \setminus \{\epsilon\}$. Por hipóteses de indução existe uma função v' satisfazendo as condições da Afirmação 4 em $Y_0 \setminus \{\alpha\}$, por nossa hipótese de limitação todos os elementos estão limitados por algum $n\epsilon$; por tanto v só tem valores finitos. Defina a função ν em Y_0 como

$$\nu(x) = \begin{cases} v'(x) \ \ se \ \ x \neq \alpha \\ inf\{(\sum v'(y_k) - \sum v'(x_l))/r\} \ \ se \ \ x = \alpha \end{cases}$$

Onde o inf esta sobre os inteiros positivos r e os $x_1, \ldots, x_q, y_1, \ldots y_p \in Y_0 \setminus \{\alpha\}$ satisfazendo $x_1 + \cdots + x_q + r\alpha \leq y_1 + \cdots + y_p$.
Já que uma consequência da propriedade (ii) é que $0 \leq v(\alpha)$ ($\epsilon \leq \epsilon + \alpha$ como $1 \leq 1 + v(\alpha)$), resta provar que ν continua satisfazendo a propriedade (ii). A prova sera feita estudando os possíveis casos de $w_1 + \cdots + w_m + s\alpha \leq z_1 + \cdots + z_n + t\alpha$ onde $w_i, z_j \in Y_0 \setminus \{\alpha\}$ e $s, t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

caso 1 $s = t = 0$ por hipótese de indução.

caso 2 $s \gneq 0$ e $t = 0$ por definição de $\nu(\alpha)$.

caso 3 $t \gneq 0$ e $s = 0$. Nós deveríamos mostrar que $\sum v'(w_i) \leq t\nu(\alpha) + \sum v'(z_j)$ isto é que $\nu(\alpha) \geq w' = (\sum v'(w_i) - \sum v'(z_j))/t$. Seja $x_1 + \cdots + x_q + r\alpha \leq y_1 + \cdots + y_p$ a desigualdade tipica da definição de $\nu(\alpha)$ então basta mostrar que $(\sum v'(y_k) - \sum v'(x_l))/r \geq w'$ pois $\nu(\alpha)$ é a maior cota inferior. Multiplicando a desigualdade $w_1 + \cdots + w_m \leq z_1 + \cdots + z_n + t\alpha$ por r e adicionando a mesma quantidade a ambos lados

$$rw_1 + \cdots + rw_m + tx_1 + \cdots + tx_q \leq rz_1 + \cdots + rz_n + rt\alpha + tx_1 + \cdots + tx_q$$

substituindo, e por desigualdade

$$rw_1 + \cdots + rw_m + tx_1 + \cdots + tx_q \leq rz_1 + \cdots + rz_n + ty_1 + \cdots + ty_p$$

Por hipótese de indução, temos

$$r \sum v'(w_i) + t \sum v'(x_l) \leq r \sum v'(z_j) + t \sum v'(y_k)$$

Que implica que $(\sum v'(y_k) - \sum v'(x_l))/r \geq w'$ como queria-se mostrar.

caso 4 $t \gneq 0$ e $s \gneq 0$. Note que ainda não provamos propriedades de cancelamento na desigualdade que nos permitam reduzir este caso a algum dos anteriores).

multiplicando por r e adicionando a mesma quantidade a ambos lados da desigualdade

$$rw_1 + \cdots + rw_m + rs\alpha + tx_1 + \cdots + tx_q \leq rz_1 + \cdots + rz_n + rt\alpha + tx_1 + \cdots + tx_q$$

substituindo, e por desigualdade

$$rw_1 + \cdots + rw_m + tx_1 + \cdots + tx_q + rs\alpha \leq rz_1 + \cdots + rz_n + ty_1 + \cdots + ty_p$$

logo

$$\sum v'(w_i) + s\nu(\alpha) \leq \sum v'(z_j) + t((\sum v'(y_k) - \sum v'(x_l))/r)$$

Pela definição do inf (maior cota inferior) tem-se

$$\sum v'(w_i) + s\nu(\alpha) \leq \sum v'(z_j) + t\nu(\alpha) \leq \sum v'(z_j) + t((\sum v'(y_k) - \sum v'(x_l))/r)$$

como queria-se mostrar

□

□

Teorema 10 (Teorema de Tarski)**.** *Seja G um grupo atuando sobre o conjunto X, e seja $E \subset X$.*
Existe uma média ν G-invariante sobre $P(X)$, com $\nu(E) = 1$ se e somente se E não é G-paradoxal.

Demonstração. $\Rightarrow$ por contraposição na observação 2, pois já tínhamos demonstrado por absurdo que se E é G-paradoxal e existe uma média ν cumprindo as condições então $\nu(E) = 0$

$\Leftarrow$ Seja $(Y, +)$ o semigrupo de tipos de G atuando sobre X, como E não é G-paradoxal então $[E] \neq 2[E]$ $([E] = [E \times \{0\}])$, e pelo Corolário 3 dado pela lei cancelamento se cumpre a condição 1) do Teorema 9. Com isto se garante uma função μ sobre o semigrupo de tipos Y tal que $\mu([E]) = 1$ e $\mu([F]_1 + [F_2]) = \mu([F]_1) + \mu([F_2])$ iterando esta ultima propriedade obtemos $\mu(\sum_{i=1}^{m}[F]_i) = \sum_{i=1}^{m}\mu([F]_i)$ quando $[F]_i \in Y$. Como $P(X) \subset Y$ resta definir nossa média desejada como $\nu(E) = \mu([E])$, pois $\nu(E) = 1, \nu(\emptyset) = \mu([\emptyset]) = 0$ e $\nu(\cup_{i=1}^{m}F_i) = \mu([\cup_{i=1}^{m}F_i]) = \mu(\sum_{i=1}^{m}[F]_i) = \sum_{i=1}^{m}\mu([F]_i) = \sum_{i=1}^{m}\nu(F_i)$ para F_i dois a dois disjuntos (segunda igualdade Ver Proposição 8).

□

Capítulo 3

Grupos Amenos (Amenable)

Definição 32. *Dizemos que μ é uma média de probabilidade sobre X se μ é uma média e $\mu(X) = 1$.*

Definição 33 (Grupo Ameno abstrato)**.** *Seja G um grupo atuando sobre si mesmo por translações a esquerda. Dizemos que G é ameno se existe uma média de probabilidade μ finitamente aditiva sobre $P(G)$ (partes de G) tal que $\mu(gA) = (\mu(A))$ para cada $g \in G$ e cada $A \subseteq P(G)$.*

Para vermos um grupo G no sentido abstrato é ver ele como se fosse uma estrutura algébrica.

Proposição 10. *G é ameno no sentido abstrato se e somente se G não é G-paradoxal.*

Demonstração. Por Teorema 10. $\square$

Exemplo 6. *F_2 não é ameno no sentido abstrato porque pela Proposição 3, F_2 é F_2-paradoxal.*

Os grupos ameno no sentido abstrato (discreto) foram em um primeiro momento considerados por Von Neuman na decada de 1920's, ele conjecturou que um grupo não era ameno no sentido abstrato se e somente se contém uma cópia de F_2 (salvo isomorfismo), até que no ano de 1980 Ol'shanskii provou que não (Ver [8]), mostrando que o grupo monstro Tarski (que é um grupo infinito onde todos seus subgrupos próprios são cíclicos e têm como ordem um primo p fixo) não é ameno no sentido abstrato. O nome "amenable" foi introduzido por Mahlon M. Day em 1949, e em 1950 Dixmier estendeu a noção para grupos topológicos (Ver [10]) esta nova definição permite desenvolver teoria no estudo das algebras de Banach , C^*-álgebras, em geometria diferencial, etc (Ver [11]).

Definição 34 (Grupo Ameno topológico)**.** *Seja $(G, \tau, \cdot)$ um grupo topológico Hausdorff localmente compacto atuando sobre si mesmo por translações a esquerda. Dizemos que G é ameno se existe uma média de probabilidade μ finitamente aditiva sobre $\mathcal{B}(G)$ (os conjuntos de Borel de G) tal que $\mu(gA) = (\mu(A))$ para cada $g \in G$ e cada $A \subseteq B(G)$.*

Exemplo 7. *(F_2, τ) é ameno no sentido topológico, se $\tau = \{\emptyset, F_2\}$ (topologia indiscreta), pois o conjunto dos Borelianos é ele mesmo, então basta considerar a média de probabilidade μ, tal que $\mu(F_2) = 1$ e $\mu(\emptyset) = 0$.*

Note que todo grupo G no sentido abstrato, pode ser dotado da topologia discreta (é claro que os elementos da topologia discreta são os mesmos que pertencem a $P(G)$), é por isso que se G é ameno no sentido abstrato, G é ameno no sentido topológico com a topologia discreta. Além disso, G é ameno com qualquer outra topologia com que seja Hausdorff e localmente compacto pois basta restringir a média aos conjuntos de Borel. É por esta razão que todas as propriedades dos grupos amenos no sentido topológico são hereditárias dos grupos ameno no sentido abstrato.

A motivação pela que o grupo topológico têm que ser Hausdorff e localmente compacto é para garantir a medida de Haar sobre o grupo (ver Teorema 4).

Note que a medida de Haar de um grupo G, não é suficiente parar fazer dele ameno, pois a medida de Haar não necessariamente é de probabilidade ($\mu_H(G) \neq 1$).

A proposição 11 nos mostrará construtivamente como a média de probabilidade G- invariante sobre G induz uma em X, quando G atua sobre X.

Proposição 11. *Seja G atuando sobre X.*
Se G é ameno no sentido abstrato $\Rightarrow$ Existe uma média de probabilidade G-invariante a esquerda sobre X, ou seja X não é G-paradoxal.

Demonstração. (por construção) Seja μ a média que faz a G um grupo ameno abstrato. Escolha um ponto $x \in X$ e defina

$$v : P(X) \to [0,1] \text{ como } v(A) = \mu(H_A), \ \ H_A = \{g \in G : g(x) := g \cdot x \ \in A\}$$

1) $\forall g \in G$, $g(x)$ é uma bijeção, logo esta bem definida para todo ponto $x \in X$, isso quer dizer que $g(x) \notin \emptyset$
$$v(\emptyset) = \mu(H_\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$$

2) $v(X) = \mu(H_X) = \mu(G) = 1$

3) Para demonstrar que ν é finitamente aditiva, considere $A = \cup_{i=1}^n A_i$ onde $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Note que,
$H_{\cup_{i=1}^n A_i} = \{g \in G : \ g(x) \in \bigcup_{i=1}^n A_i\} = \{g \in G : \ g(x)$ pertence a A_1 ou A_2 ou $\ldots$ ou $A_n\} = \bigcup_{i=1}^n H_{A_i}$, então
$$v(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \mu(H_{\cup_{i=1}^n A_i}) = \mu(\bigcup_{i=1}^n H_{A_i}) = \bigcup_{i=1}^n \mu H_{A_i} = \bigcup_{i=1}^n v(H_{A_i})$$

4) v é G-invariante, pois dado $g_0 \in G$ fixo, tem-se
$$g_0 H_A = \{g_0 g : \ g(x) \in A\} = \{h : \ h(x) \in g_0 A\} = H_{g_0 A}$$
então como μ é G-invariante
$$v(g_0 A) = \mu(H_{g_0 A}) = \mu(g_0 H_A) = v(A)$$

□

Exemplo 8 (grupo compacto)**.** *Se G é um grupo topológico compacto então G é ameno no sentido topológico pois sua medida de Haar é invariante a esquerda e direita, única e finita (Ver Teorema 5); portanto normalizável.*

Exemplo 9. *O círculo unitário $\mathbb{S}^1$ é um grupo topológico abeliano e compacto, onde podemos identificar a $\mathbb{S}^1$ das seguintes formas:*
Com o produto de $\mathbb{C}$
$$\mathbb{S}^1 = (\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot).$$
Com a soma de $\mathbb{R}$
$$\mathbb{S}^1 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$$
$$\mathbb{S}^1 = ([0,1]/(0 \equiv 1), +)$$
Pelo Teorema de Haar (Ver Teorema 5) existe uma única medida invariante pelas rotações e finita, que é precisamente a medida de Lebesgue , portanto a medida de Lebesgue normalizada faz de $\mathbb{S}^1$ um grupo ameno no sentido topológico.

Exemplo 10 (grupo finito). *Todo grupo finito é compacto pois seus recobrimentos abertos são sempre finitos,neste caso sua medida de Haar é a medida μ da contagem*

$$\mu(A) = \{\text{quantidade de elementos em } A\}.$$

Exemplo 11. *Considere o quadrado $\boxdot(a,b,c,d)$, a rotação de 180 graus $r(\boxdot(a,b,c,d)) = \boxdot(c,d,a,b)$ e a identificação $a \equiv c$ $i(\boxdot(a,b,c,d)) = \boxdot(c,b,a,d)$. Podemos considerar X como o conjunto de arestas $X = \{a,b,c,d\}$ (se deve ter cuidado com esta forma de ver o problema pois o X não está considerando a ordem das arestas) e definir sobre X a permutação $r(X) = \{r(a) = c,\ r(b) = d,\ r(c) = a,\ r(d) = b,\ \}$ e a permutação $i(X) = \{r(a) = c,\ r(b) = b,\ r(c) = a,\ r(d) = d,\ \}$. Note que o grupo $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ atua sobre X de modo que $((0,0),x) = \mathbb{I}(x)$, $((0,1),x) = r(x)$, $((1,0),x) = i(x)$, $((1,1),x) = i(r(x)) = r(i(x))$). Para obter uma media de probabilidade finitamente aditiva sobre X que seja invariante pela ação de G (é dizer que seja invariante pela rotação de de 180 graus (r), a identificação $a \equiv c$ (i) e suas composições), definimos*

$$v(A) = \mu(H_A), \quad H_A = \{g \in G : g(a) \in A\}$$

basta conhecer a média dos conjuntos unitários

$$v(\{a\}) = \mu(H_{\{a\}}) = \frac{2}{4}, \quad H_{\{a\}} = \{(0,0),(1,1)\}$$

$$v(\{d,b\}) = \mu(H_{\{d,b\}}) = \frac{0}{4}, \quad H_{\{d,b\}} = \{\emptyset\}$$

$$v(\{c\}) = \mu(H_{\{c\}}) = \frac{2}{4}, \quad H_{\{c\}} = \{(1,0),(0,1)\}$$

De fato nossa média v é invariante pela ação de G pois

$$v((1,0)(\{a\})) = v((0,1)(\{a\})) = v(\{c\})$$

$$v((0,0)(\{d,b\})) = v((1,0)(\{d,b\})) = v((0,1)(\{d,b\})) = v((1,1)(\{d,b\})) = v(\{d,b\})$$

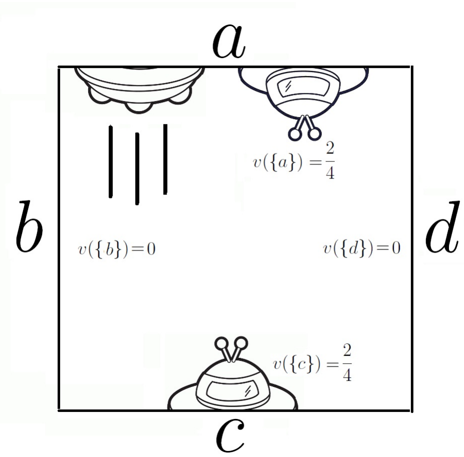
$$v((1,0)(\{c\})) = v((0,1)(\{c\})) = v(\{a\})$$

$$v((0,0)(\{a\})) = v((1,1)(\{a\})) = v(\{a\})$$

$$v((0,0)(\{c\})) = v((1,1)(\{c\})) = v(\{c\})$$

Note que o fato de ser G-invariante obriga a todos os conjuntos unitários cujos elementos sejam imagens de (a) por algum elemento da ação, a ter a mesma média que $\{a\}$ isto deixa em evidência uma forma bastante restritiva de criar médias pois dado um conjunto unitário qualquer, ele tem média $v(\{a\})$ ou 0.

Além disso, note que se identificamos as arestas usando as combinações das permutações (r), (i) e temos uma nave que passará pela aresta (a) esta média responde naturalmente a pergunta. Qual é a probabilidade de que nossa nave saia pelo conjunto de arestas A?.



As médias de probabilidade finitamente aditivas e G-invariante sobre X não são únicas basta pegar

$$v(A) = \mu(H_A), \quad H_A = \{g \in G : g(b) \in A\}$$

neste caso

$$v(\{b\}) = \mu(H_{\{b\}}) = \frac{3}{4}, \quad H_{\{b\}} = \{(0,0),(1,0),(1,1)\}$$

$$v(\{a,c\}) = \mu(H_{\{a,c\}}) = \frac{0}{4}, \quad H_{\{a,c\}} = \{\emptyset\}$$

$$v(\{d\}) = \mu(H_{\{d\}}) = \frac{1}{4}, \quad H_{\{d\}} = \{\emptyset\}$$

3.1 Definição usual

Nesta seção mostraremos uma equivalência, que é usualmente apresentada nos livros. Ela foi feita por Mahlon Day no ano de 1950 [3] e vai nos permitir demonstrar que se G é comutativo então G é ameno no sentido topológico, entre outras coisas. Para isso precisamos de alguns conceitos.

Definição 35 ($L^\infty_\mu(X)$)**.** *Seja (X, R, μ) um espaço de medida, $L^\infty_\mu(X)$ é o conjunto das classes de equivalência $[f] = \{h : f(x) = h(x) \quad \forall x \in A \in R, \ \mu(A) \neq 0\}$ das funções complexas mensuráveis limitadas, isto é*

$$L^\infty_\mu(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \quad \sup_X |f| \lneq \infty\}$$

$$\sup_X |f| = \inf\{c \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq c \ \ q.t.p.\}$$

dotado da norma

$$\|f\|_\infty = \sup_X |f|$$

Proposição 12. *$L^\infty_\mu(X)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver Teorema 3.4.1 , [14]. □

A proposição 13 nos mostrará, de modo construtivo, que para cada $[f] \in L^\infty_\mu(X)$ existem umas classes de equivalência de funções simples que convergem a ela em norma. Isto é, fazendo um abuso de notação poderíamos dizer que o conjunto das funções simples é denso em $L^\infty_\mu(X)$.

Proposição 13. *Seja (X, R, μ) um espaço de medida e $E = \{f : \ f : R \to \mathbb{C}\}$ cuja base de Hamel são as funções características X_A , $A \in R$; então $\overline{E}/[f] = L^\infty_\mu(X)$ ($[f] = \{h : f(x) = h(x) \ \ \forall x \in A \in R, \ \mu(A) \neq 0\}$).*

Demonstração. (por construção) Para que a proposição tenha sentido primeiro provaremos que as funções características X_A são mensuráveis e limitadas em quase todo ponto, logo $[X_A] \in L^\infty_\mu(X)$; depois, se $[f] \in L^\infty_\mu(X)$ criaremos uma sequência de funções simples (funções que pertencem a E) que convirja para quaisquer $f \in [f]$.

$$X_A \in L^\infty_\mu(X)$$

- $sup_X|X_A| = 1 \quad \forall x \in X$
- X_A mensurável
  Seja $B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ σ-álgebra de Borel dos complexos, então somente acontecem os seguintes casos

- se $1 \in B \Rightarrow X_A^{-1}(B) = A$
- se $0 \in B \Rightarrow X_A^{-1}(B) = A^c$
- se $1, 0 \in B \Rightarrow X_A^{-1}(B) = X$
- se $1, 0 \notin B \Rightarrow X_A^{-1}(B) = \emptyset$

Para estudar os Borelianos de $\mathbb{C}$ podemos considerar os conjuntos $I_1 \times I_2$ onde I_1, I_2 (é por causa de os Borelianos de $\mathbb{C}$ é uma σ-álgebra gerada por esta classe de conjuntos) são intervalos de $\mathbb{R}$ e como f tem contradomínio complexo então $f = Re(f) + Im(f)$, nos centraremos em mostrar a convergência para funções com contradomínio nos $\mathbb{R}$ para poder construir duas famílias que convirjam para $Re(f)$ e $Im(f)$ respectivamente.
Seja $g : R \to \mathbb{R}$, com $[g] \in L_\mu^\infty(X)$. Como os elementos da σ-álgebra de Borel são os intervalos e $Im(g(x))$ é limitado $q.t.p.$ então existem a, b tais que $Im(g(x)) \subseteq [a, b) \quad \forall x \in X \ (q.t.p.)$. Considere a família finita de intervalos $\mathbb{F}_1 = \{[n, n+1)_{n\in\mathbb{Z}} : [a, b) \subseteq \cup_{n=-s}^{s}[n, n+1), \mid s \mid\lneq \infty\}$, como g é mensurável $g^{-1}([n, n+1)) = A_n \in R$ temos $R = \cup_{n=-s}^{s} A_n = \cup_{n=-s}^{s} g^{-1}([n, n+1))$ note que os A_n são disjuntos de outro modo g não estaria bem definida.
Considere a função simples

$$S_1(x) = \sum_{n=-s}^{s} (n + \frac{1}{2}) X_{A_n}(x),$$

Seja $x \in R \Rightarrow x \in A_n$ para algum único n, o qual chamaremos n_x, pelo que $g(x) \in g(A_{n_x}) = [n_x, n_x + 1) \ (q.t.p.)$, por outro lado $S_1(x) = S_1(A_{n_x}) = n_x + \frac{1}{2}$, desta forma temos que

$$n_x - (n_x + \frac{1}{2}) \leq g(x) - S_1(x) \leq (n_x + 1) - (n_x + \frac{1}{2}) \ (q.t.p.),$$

$$\mid g(x) - S_1(x) \mid\leq \frac{1}{2} \ (q.t.p.)$$

Pela norma dada sobre $L_\mu^\infty(X)$ da definição 35 temos que $\parallel g(x) - S_1(x) \parallel\leq \frac{1}{2}$.
Seguindo o mesmo esquema de construção, considere a família finita de intervalos

$$\mathbb{F}_k = \{[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k})_{n\in\mathbb{Z}} : [a, b) \subseteq \cup_{n=-s_k}^{s_k}[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}), \mid s_k \mid\lneq \infty\};\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

(em geral não é necessário mas para ter mais controle, consideraremos os $\mathbb{F}_k$ como partições de um $\mathbb{F}_1$ fixo) os $g^{-1}([\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k})) = A_{n_k}$ e a família de funções simples

$$S_k(x) = \sum_{n=-s_k}^{s_k} (\frac{n + \frac{1}{2}}{2^k}) X_{A_{n_k}}(x)$$

Note que $\forall \epsilon \gneq 0$, $\exists N \gneq 0$ tal que $\forall k \geq N$

$$\parallel g(x) - S_k(x) \parallel\leq \frac{\frac{1}{2}}{2^k} \leq \epsilon$$

$$\lim_{k\to\infty} S_k = g$$

Considere $f : R \to \mathbb{C}$ e $f \in L_\mu^\infty(X)$, $f = Re(f) + Im(f)$ e as família de funções $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ onde $S_k(x) = \sum_{n=-s_k}^{s_k}(\frac{n+\frac{1}{2}}{2^k}) X_{A_{n_k}}(x)$, $R_k(x) = \sum_{m=-r_k}^{r_k}(\frac{m+\frac{1}{2}}{2^k}) X_{B_{m_k}}(x)$ tais que $lim_{k\to\infty} S_k = Re(f)$ e $lim_{k\to\infty} R_k = Im(f)$. Construa um refinamento para as partições $\{A_{n_k}\}$ e $\{B_{m_k}\}$

$$C_{u_k} = \{A_{n_k} \cap B_{m_k} : -s_k \leq n_k \leq s_k \ \text{ e } \ -r_k \leq m_k \leq r_k\}$$

e considere a família de funções $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, tal que

$$f_k(x) = \sum_{u_k=-s_kr_k}^{s_kr_k} (\frac{n+\frac{1}{2}}{2^k}) + i(\frac{m+\frac{1}{2}}{2^k})X_{C_{u_k}}(x) = \sum_{u_k=-s_kr_k}^{s_kr_k} (\frac{n+\frac{1}{2}}{2^k}) + i(\frac{m+\frac{1}{2}}{2^k})X_{A_{n_k}\cap B_{m_k}}(x)$$

Por exemplo, se $x \in A_{n_k} \cap B_{n_k}$

$$f_k(x) \in \{a+ib : a \in [\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}),\ b \in [\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k})$$

$$\text{e } S_k^{-1}([\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k})) = A_{n_k},\ R_k^{-1}([\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k})) = B_{m_k}\}$$

Note que $Re(f_k) = S_k$ pois os $C_{u_k} \subset A_{n_k}$ e $Im(f_k) = R_k$ pois os $C_{u_k} \subset B_{m_k}$, logo

$$\| f - f_k \| \leq \| Re(f) - Re(f_k) \| + \| Im(f) - Im(f_k) \| \leq \epsilon$$

e

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f.$$

De fato, se $lim_{k\to\infty} f_k = f$, e h_1 pertence a classe de equivalência $[f] = \{h \in L^\infty_\mu(X) : f(x) = h(x)\ \ \forall\, x \in A \in R,\ m(A) \neq 0\}$ então $lim_{k\to\infty} f_k = h$. □

Definição 36 (média M sobre $L^\infty_\mu(X)$)**.** *Seja (X, R, μ) um espaço de medida e seja $F \subseteq L^\infty_\mu(X)$ um subespaço fechado no sentido topológico que contém as funções constantes e é fechado pela conjugação complexa. Uma média M sobre F é um funcional linear $M : F \to \mathbb{C}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $M([1_x]) = 1$ *onde* $1_x(x) = 1\ \forall\, x \in X,$

ii) $M([\varphi]) \geq 0 \quad \forall\, [\varphi] \in F$ *com* $\varphi(x) \in \mathbb{R}^+\ \forall\, x \in X\ (q.t.p.)\ (\varphi(x) \in [\varphi])$.

Se G é um grupo atuando sobre X, que deixa a R invariante, dizemos que M é G-invariante a esquerda se:

iii) $M([_g\varphi]) = M([\varphi]) \quad \forall\, g \in G,\ [\varphi] \in F \quad ({}_g\varphi(x) = \varphi(gx) = \tau_{x^{-1}}\varphi(g))\ (\varphi(x) \in [\varphi])$

É importante lembrar que se G é um grupo atuando sobre X e $g \in G$, a função $g(x)$ é uma bijeção.

Proposição 14. *O conjunto $\mathbf{M}$ das médias sobre $F \in L^\infty_\mu(X)$ com a topologia fraca estrela é um subconjunto fechado, compacto e convexo do espaço dual de $L^\infty_\mu(X)$ $((L^\infty_\mu(X))^*)$.*

Demonstração. 1) $\mathbf{M} \subseteq (L^\infty_\mu(X))^*$

Para provar que: $M \in \mathbf{M}$ então $M \in (L^\infty_\mu(X))^*$, resta provar que é contínua pois por definição já é linear.

$L^\infty_\mu(X)$ é um espaço de Banach e F por definição é um subespaço fechado, então F é um espaço de Banach. Como $M : F \to \mathbb{C}$ é linear tem-se que M é contínua se e somente se M é acotada (Ver Proposição 2,1 John B. Conway [16]).

- Se $\varphi(x) \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in X$

$$-\|\varphi\|_\infty \leq \varphi(x) \leq \|\varphi\|_\infty \quad \forall\, x \in X\ (q.t.p)$$

$$-1_x\|\varphi\|_\infty \leq \varphi \leq 1_x\|\varphi\|_\infty \quad \forall\, x \in X\ (q.t.p)$$

$$0 \leq 1_x\|\varphi\|_\infty - \varphi \quad \text{e} \quad 0 \leq 1_x\|\varphi\|_\infty + \varphi \quad \forall\, x \in X\ (q.t.p)$$

usando a condição $ii)$ da definição 36

$$0 \leq M(1_x\|\varphi\|_\infty - \varphi) \quad \text{e} \quad 0 \leq M(1_x\|\varphi\|_\infty + \varphi)$$

como M linear e usando a condição $i)$ da definição 36

$$M(\varphi) \leq \|\varphi\|_\infty \quad \text{e} \quad -\|\varphi\|_\infty \leq M(\varphi)$$

Logo

$$|M(\varphi)| \leq \|\varphi\|_\infty$$

- Se $\varphi \in F$
considere a $\varphi = Re(\varphi) + iIm(\varphi)$ note que $Re(\varphi), Im(\varphi) \in F$, pois $Re(\varphi) = \frac{1}{2}(\varphi + \overline{\varphi})$ e $Im(\varphi) = \frac{1}{2i}(\varphi - \overline{\varphi})$; além disso $Re(\varphi)(x), Im(\varphi)(x) \in \mathbb{R}, \ \forall x \in X$.

$|M(\varphi)| = |M(Re(\varphi)) + iIm(\varphi))| \leq |M(Re(\varphi))| + |M(Im(\varphi))| \leq \|Re(\varphi)\|_\infty + \|Im(\varphi)\|_\infty$.

Logo $M(\varphi)$ é acotada.

2) **M** é fechado
mostraremos que: se a sequência de Cauchy com respeito a topologia fraca* $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{M}$, converge fracamente* a f^* $(M_n \rightharpoonup f^*)$ então $f^* \in \mathbf{M}$.
Como $(M_n \rightharpoonup f^*) \Leftrightarrow (M_n(f) \to f^*(f)) \quad \forall f \in L^\infty_\mu(X)$, é dizer $\{M_n\}$ converge pontualmente a f , considere

$$M(f) = \lim_{n\to\infty} M_n(f) \quad \forall f \in L^\infty_\mu(X).$$

Mostraremos que $M \in \mathbf{M}$. Fazendo um abuso de notação $M(f) = M([f])$.

- M esta bem definida.
de fato como $\{M_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy nos complexos $(lim_{n\to\infty} M_n(f) \in \mathbb{C})$, e pela boa definição dos M_n, M tem uma única imagem para cada $f \in L^\infty_\mu(X)$.
- M é uma média.
  - $M(1_x) = lim_{n\to\infty} M_n(1_x) = lim_{n\to\infty} 1 = 1$.
  - Se $f(x) \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in X \ (q.t.p.)$
  $M(f) = lim_{n\to\infty} M_n(f) = lim_{n\to\infty} a_n = a$ onde $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$ é uma sucessão de Cauchy pois $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{M}$ é uma sequência de Cauchy com respeito a topologia fraca* então para cada bola nos complexos centrada em zero $B(0,r)$, existe um $N \gneq 0$ tal que, se $n, m \geq N$, $(M_n - M_m)(f) \in B(0,r) \subset \mathbb{C}$ o que é equivalente a $a_n - a_m \in B(0,r)$. Como $\mathbb{C}$ é um espaço normado, ter $a_n - a_m \in B(0,r)$ é equivalente a ser sucessão de Cauchy na norma que induz a topologia, portanto $\|a_n - a_m\| \leq \epsilon$; como $\mathbb{R}^+$ é um conjunto fechado dos complexos $M(f) = a \in \mathbb{R}^+$.

Por último, pela definição de M tem-se que $M_n(f) \to f^*(f) = M(f)$.

3) M é compacto.
Mostraremos que o conjunto **M** está contido na bola unitária de $(L^\infty_\mu(X))^*$, como a bola unitária é compacta na topologia fraca* pelo Teorema de Alaoglu (Ver Anexos, Teorema 24), **M** é fechado e o $(L^\infty_\mu(X))^*$ é Hausdorff tem-se que **M** é compacta.
Se $f(x) \in \mathbb{R}$ e $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in G$ então, se $0 \leq f(x) \leq 1$ tem-se $0 \leq M(1-f)$ e $M(f) \leq 1$, e se $-1 \leq f(x) \leq 0$ tem-se $0 \leq M(1+f)$ e $0 \leq -M(f) \leq 1$; portanto $|M(f)| \leq 1$. Agora, para o caso onde f tem contradomínio complexo, note que existe $\alpha \in \mathbb{C}$, com $|\alpha| = 1$ tal que $|M(f)| = \alpha M(f)$. Considere $\alpha f = f_1 + if_2$, como $\alpha M(f) = M(\alpha f) = M(f_1 + if_2) = M(f_1) + iM(f_2) \in \mathbb{R}^+$ então $M(f_2) = 0$. Note que, se $\|f\|_\infty \leq 1$ tem-se que $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|\alpha\|_\infty \leq 1$, por tanto $\|f_1\|_\infty \leq \|\alpha f\| \leq 1$, usando o caso da função ter contradomínio real concluímos que $|M(f)| = M(f_1) \leq 1$ como queria-se mostrar.

$\square$

Proposição 15. *Seja G um grupo topológico Hausdorff e localmente compacto com a medida de Haar a esquerda μ. Então existe uma bijeção entre as médias* ($\boldsymbol{m}$) *de probabilidade absolutamente contínuas com respeito a μ de G e as médias* ($\boldsymbol{M}$) *sobre $L^{\infty}_{\mu}(G)$.*

Demonstração. (Por construção)

$$\sigma : \mathbf{M} \to \mathbf{m} \quad \sigma(M)(A) = m(A) = M(X_A) \ (A \in \mathcal{B}(G))$$

- σ está bem definida.
  - $\sigma(M)(A)$ é uma média.
    - $\sigma(M)(\emptyset) = M(X_\emptyset) = M(0_x) = M(0.1_x) = 0.M(1_x) = 0.1 = 0$
    - Se $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad A_i \cap A_j \ i \neq j$

$$\sigma(M)(A) = \sigma(M)\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = M(X_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}) = M\left(\sum_{i=1}^{n} X_{A_i}\right)$$

    por linearidade da média

$$= \sum_{i=1}^{n} M(X_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} \sigma(M)(A_i)$$

  - $\sigma(M)(A)$ é uma média absolutamente contínua com respeito μ.
    Se $\mu(A) = 0 \Rightarrow \sigma(M)(A) = 0 \Leftrightarrow X_A \in$ Ker(M), então basta provar que $X_A \in$ Ker(M).
    Se $\mu(A) = 0 \Rightarrow \alpha X_A \in L^{\infty}_{\mu}(X) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$
    $|M(\alpha X_A)| = |\alpha||M(X_A)|$ como M é acotada, $|M(X_A)| = 0 \Rightarrow M(X_A) = 0$
  - Se $\sigma(M) = m_1$ e $\sigma(M) = m_2$ então $m_1 = m_2$.
    Assuma por absurdo que $m_1(A) \neq m_2(A)$, como $m_1(A) = M(X_A)$ e $m_2(A) = M(X_A)$ então M não está bem definida.

- σ é sobrejetiva.
  Dada m uma média de probabilidade absolutamente contínua com respeito a μ de G, mostraremos que M definida como $M(f) = lim_{k\to\infty} M(f_k)$ (por abuso de notação $M([f]) = M(f)$), onde $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ é a família de funções simples mostrada na Proposição 13 e se $S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{A_i}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ é uma função simples mensurável

$$M(S) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(A_i), \quad \alpha_i \in \mathbb{C},$$

  é uma média sobre $L^{\infty}_{\mu}(G)$.
  Pela aditividade finita de m, a definição de M sobre os funcionais simples não depende da representação de S como combinação linear das funções características X_A. Por exemplo com A_i mensuráveis se $A_n = A_p \cup A_r$ e $A_p \cap A_r = \emptyset$ então $M(S) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(A_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i m(A_i) + \alpha_n m(A_p) + \alpha_n m(A_s)$.
  Como $\mathbb{C}$ é um espaço de Banach (toda sequência de Cauchy converge (em norma)) e $\{a_k + ib_k\}_{k\in\mathbb{N}} \to a + ib \ \Leftrightarrow \ \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \to a$ e $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \to b$; provaremos que $lim_{k\to\infty} M(f_k)$ converge, mostrando que $\{M(Re(f_k))\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{M(Im(f_k))\}_{k\in\mathbb{N}}$ são sequencias de Cauchy.
  Para $M(Re(f_k))$, consideremos esta mudança de notação

$$Re(f_k)(x) = \sum_{n=-s_k}^{s_k-1} \left(\frac{n+\frac{1}{2}}{2^k}\right) X_{A_{n_k}}(x) = \sum_{i=1}^{2^k m} \left(\frac{n_{A_{(n_i)_k}} + \frac{1}{2}}{2^k}\right) X_{A_{(n_i)_k}}(x)$$

onde deixamos em evidência a dependência de n com respeito a sua partição e $2^k m = 2^k(2s_0) = 2s_k$ nos diz a quantidade de elementos que estão-se adicionando em termo de k e uma quantidade inicial fixa m. Note que se $r \geq k$,

$$Re(f)^{-1}\left[\frac{n_j}{2^k}, \frac{n_j+1}{2^k}\right) =$$

$$Re(f)^{-1}\left(\left[\frac{n_j}{2^k}, \frac{n_j}{2^k}+\frac{1}{2^r}\right) \cup \left[\frac{n_j}{2^k}+\frac{1}{2^r}, \frac{n_j}{2^k}+\frac{2}{2^r}\right) \cup \cdots \cup \left[\frac{n_j+1}{2^k}-\frac{1}{2^r}, \frac{n_j+1}{2^k}\right)\right).$$

Pelo que dado um $A_{(n_j)_k}$ fixo $j \in \{0, 1 \ldots 2^k m\}$, existem $\{A_{(n_i)_r}\}$ únicos tais que

$$A_{(n_j)_k} = \bigcup_{i=1}^{2^{r-k}} A_{(n_i)_r}.$$

De fato, note que $A_{(n_j)_k} = \bigcup_{i=1}^{2^{r-k}} A_{(2^{r-k}n_j+(i-1))_r}$ (isto não será usado na prova). Agora, com as observações prontas

$$W := |M(Re(f_r)) - M(Re(f_k))| = |\sum_{i=1}^{2^r m}\left(\frac{n_{A_{(n_i)_r}}+\frac{1}{2}}{2^r}\right) m(A_{(n_i)_r}) - \sum_{j=1}^{2^k m}\left(\frac{n_{A_{(n_j)_k}}+\frac{1}{2}}{2^k}\right) m(A_{(n_j)_k})|$$

organizando e se é necessário renomeando de forma que $A_{(n_j)_k} = \bigcup_{i=(j-1)2^{r-k}}^{j2^{r-k}} A_{(n_i)_r}$

$$W = |\sum_{j=1}^{2^k m}\left(\sum_{i=(j-1)2^{r-k}}^{j2^{r-k}}\left(\frac{n_{A_{(n_i)_r}}+\frac{1}{2}}{2^r}\right) m(A_{(n_i)_r})\right)_j - \sum_{j=1}^{2^k m}\left(\frac{n_{A_{(n_j)_k}}+\frac{1}{2}}{2^k}\right) m(A_{(n_j)_k})|$$

pegando o máximo $\left(\frac{n_{A_{(n_i)_r}}+\frac{1}{2}}{2^r}\right)$ para cada j

$$\leq |\sum_{j=1}^{2^k m}\left(\sum_{i=(j-1)2^{r-k}}^{j2^{r-k}}\left(\frac{n_{A_{(n_j)_k}}+1}{2^k} - \frac{1}{2^{r+1}}\right) m(A_{(n_i)_r})\right)_j - \sum_{j=1}^{2^k m}\left(\frac{n_{A_{(n_j)_k}}}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}\right) m(A_{(n_j)_k})|.$$

Como m é finitamente aditiva

$$= |\sum_{j=1}^{2^k m}\left(\left(\frac{n_{A_{(n_j)_k}}+1}{2^k} - \frac{1}{2^{r+1}}\right) - \left(\frac{n_{A_{(n_j)_k}}}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}\right)\right) m(A_{(n_j)_k})|$$

$$= |\sum_{j=1}^{2^k m}\left(\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{r+1}}\right) m(A_{(n_j)_k})| = |\left(\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{r+1}}\right)\sum_{j=1}^{2^k m} m(A_{(n_j)_k})|,$$

como m é média de probabilidade ($m(X) = 1$)

$$|\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{r+1}}| \leq \epsilon.$$

Concluímos que $\{M(Re(f_k))\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ é uma sequência de Cauchy. A mesma prova pode ser feita para $\{M(Im(f_k))\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$.

É importante notar que o número $M(f)$ só depende da classe $[f]$ pelo que mostramos que nosso M está bem definido, agora só nos resta mostrar que M é uma média, abusaremos da notação novamente.

i) $M(1_x) = M(1X_X) = 1m(X) = 1$.

ii) Se $f \geq 0$ então $Im(f) \equiv 0$ portanto nos aproximamos de f só com $Re(f_k)$ que têm contra-domínio em $\mathbb{R}$. Agora como $f \geq 0$ os $(Re(f))^{-1}([\frac{n_i}{2^k}, \frac{n_i+1}{2^k})) = \emptyset$ quando $n_i \lneq 0$, logo $Re(f_k) \geq 0 \; \forall \, k$.

iii) M é linear.
Precisamos provar que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} M(f+g)_k = \lim_{k \longrightarrow \infty} M(f)_k + \lim_{k \longrightarrow \infty} M(g)_k$$

onde $\{(f+g)_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ são as famílias de funções simples que convergem em norma a $f+g$, f e g respectivamente. Note que $\| \, (f+g)-(f_k+g_k) \, \| \leq \| \, (f-f_k) \, \| + \| \, (g-g_k) \, \| \leq \epsilon$ para um k suficientemente grande; mas precisamos expressar (f_k+g_k) como uma função simples, então se $f_k(x) = \sum_{n=-s_k}^{s_k} (\alpha_{A_{n_k}}) X_{A_{n_k}}(x)$ e $g_k(x) = \sum_{m=-r_k}^{r_k} (\beta_{B_{m_k}}) X_{B_{m_k}}(x)$ construa um refinamento para as partições $\{A_{n_k}\}$ e $\{B_{m_k}\}$

$$C_{u_k} = \{A_{n_k} \cap B_{m_k} : -s_k \leq n \leq s_k \;\text{ e }\; -r_k \leq m \leq r_k\}$$

e defina a família de funções simples $\{(f+g)_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Como

$$(f+g)_k(x) = \sum_{u_k=-s_k r_k}^{s_k r_k} (\alpha_{A_{n_k}} + \beta_{B_{m_k}}) X_{C_{u_k}}(x) = \sum_{u_k=-s_k r_k}^{s_k r_k} (\alpha_{A_{n_k}} + \beta_{B_{m_k}}) X_{A_{n_k} \cap B_{m_k}}(x)$$

por aditividade finita de m

$$\begin{aligned} M((f+g)_k) &= \sum_{u_k=-s_k r_k}^{s_k r_k} (\alpha_{A_{n_k}} + \beta_{B_{m_k}}) m(C_{u_k}) \\ &= \sum_{u_k=-s_k r_k}^{s_k r_k} (\alpha_{A_{n_k}}) m(C_{u_k}) + \sum_{u_k=-s_k r_k}^{s_k r_k} (\beta_{B_{m_k}}) m(C_{u_k}) \\ &= M((f)_k) + M((g)_k) \end{aligned}$$

então

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} M(f+g)_k = \lim_{k \longrightarrow \infty} M(f)_k + M(g)_k = \lim_{k \longrightarrow \infty} M(f)_k + \lim_{k \longrightarrow \infty} M(g)_k$$

- σ é injetiva

$$\sigma(M_1)(A) = m(A) = \sigma(M_2)(A) \; (A \in B(G))$$

Precisamos provar que $M_1 = M_2$. Para isso note que se $S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{A_i}, \; \alpha_i \in \mathbb{C}$ é uma função simples

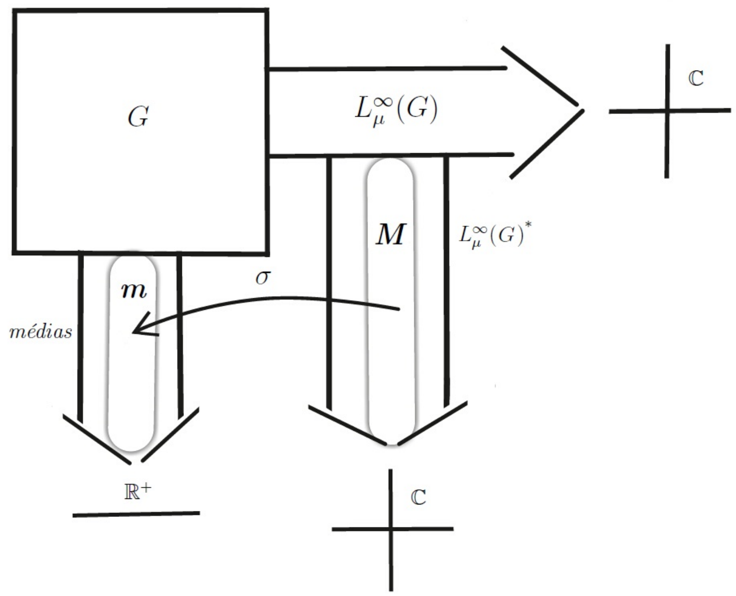
$$M_1(S) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(A_i) = M_2(S)$$

e se $f \in L^\infty_\mu(X)$ e $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ é a família de funções simples que converge em norma para f, então

$$M_1(f) = \lim_{k \longrightarrow \infty} M_1(f_k) = \lim_{k \longrightarrow \infty} M_2(f_k) = M_2(f)$$

É importante lembrar nosso abuso de notação $M_1(f) = M_1([f])$

$\square$



Proposição 16 (definição usual)**.** *Seja G um grupo topológico Hausdorff e localmente compacto com a medida de Haar a esquerda μ.*
G é ameno no sentido topológico $\Leftrightarrow$ existe uma média G-invariante a esquerda sobre $L^\infty_\mu(G)$.

Demonstração. (por construção) Com a função

$$\sigma : \mathbf{M} \to \mathbf{m} \quad \sigma(M)(A) = m(A) = M(X_A) \ (A \in B(G))$$

da Proposição 15, provamos que existe uma bijeção σ entre as médias ($\mathbf{m}$) de probabilidade absolutamente contínuas com respeito a μ de G e as médias ($\mathbf{M}$) sobre $L^\infty_\mu(G)$.
Resta mostrar que $M \in \mathbf{M}$ é G-invariante a esquerda $\Leftrightarrow$ $\sigma(M) \in \mathbf{m}$ é G-invariante a esquerda.

$\Leftarrow$ Se S é é uma função simples

$$M({}_gS) = M\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{A_i} g(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} M(\alpha_i X_{A_i} g(x))$$

como

$$X_{A_i}(g(x)) \Rightarrow \begin{cases} 1 & \text{se}\, g(x) \in A_i \\ 0 & \text{se}\, g(x) \notin A_i \end{cases} \equiv \ X_{g^{-1}A_i}(x) \Rightarrow \begin{cases} 1 & \text{se}\, x \in g^{-1}A_i \\ 0 & \text{se}\, x \notin g^{-1}A_i \end{cases}$$

tem-se

$$= \sum_{i=1}^{n} M(\alpha_i X_{g^{-1}A_i}(x))$$

pela bijeção e por hipóteses

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sigma(M)(g^{-1}A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sigma(M)(A_i) = \sum_{i=1}^{n} M(\alpha_i X_{A_i}(x)) = M(S)$$

Para f qualquer

$$M({}_gf) = \lim_{k \longrightarrow \infty} M({}_gf_k) = \lim_{k \longrightarrow \infty} M(f_k) = M(f).$$

(o limite ocorre nos conjuntos de medida não nula).

$\Rightarrow$

$$\sigma(M)(gA) = M(X_{gA}(x)) = M(X_A)(g^{-1}(x)) = M(X_A(x)) = \sigma(M)(A)$$

$\square$

Teorema 11 (Teorema do ponto fixo de Markov-Kakutani). *Seja K um conjunto convexo e compacto em um espaço E localmente convexo e Hausdorff. Então cada família $\{T_i\}_{i\in I}$ de endomorfismos contínuos e afins que comutam uns com os outros têm um ponto fixo em comum.*

Exemplo 12 (grupo comutativo). *Se G é um grupo topológico comutativo então G é ameno no sentido topológico. Note que $(L^\infty(G))^*$ é localmente convexo na topologia fraca estrela, e o conjunto das médias $\boldsymbol{M}$ é fechado e está contido na bola unitária do $(L^\infty(G))^*$. Logo pelo teorema de Alaoglu $\boldsymbol{M}$ é compacta (para detalhes ver Proposição 14). Para cada $g \in G$ defina $T_g : (L^\infty(G))^* \to (L^\infty(G))^*$ como,*

$$T_g(\phi)(f) = (\phi)({}_g f) \quad f \in (L^\infty(G)), \ \phi \in \boldsymbol{M}$$

Cada função T_g é contínua pois pela Proposição 27, é suficiente mostrar que dado um $h \in L^\infty(G)$ e um $g \in G$, $J_h(T_g(\phi)) : (L^\infty(G))^* \to \mathbb{C}$ é continua, mas isto é verdade já que $J_h(T_g(\phi)) = J_h(\phi({}_g f)) = \phi({}_g h) = J_{gh}(\phi)$.
Cada função T_g deixa M invariante, pois se $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in G$ tem-se que ${}_g f \geq 0$. Portanto $T_g(M_1) = M_1(g_f) = M_2(f)$ onde $M_1, \ M_2 \in \boldsymbol{M}$ e além disso $T_aT_b = T_bT_a$ então pelo teorema do ponto fixo de Markov-Kakutani existe um $M_0 \in M$ tal que $T_g(M_0) = T(M_0)\ \forall g \in G$. Pelo que M_0 é uma média invariante sobre $(L^\infty(G))$.

Exemplo 13.

- *Considere $(\mathbb{R}, \tau, +)$ se τ é a topologia usual da reta (topologia dos intervalos abertos) então $(\mathbb{R}, \tau, +)$ é ameno. Note que a ação de $\mathbb{R}$ sobre si mesmo contém as traslações da reta.*

- *Considere $(\mathbb{C}, \tau, +)$. Se τ é a topologia usual dos complexos (topologia das bolas abertas) então $(\mathbb{C}, \tau, +)$ é ameno. Note que a ação sobre si mesmo contém as translações do plano.*

- *Considere $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \tau, \cdot)$. Se τ é a topologia usual dos complexos então $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \tau, \cdot)$ é ameno. Note que a ação sobre si mesmo contem as rotações do plano.*

Daqui em diante a topologia dos grupos será considerada discreta, ou seja, só mostraremos ser ameno no sentido abstrato.

Proposição 17. *Seja G um grupo discreto ameno (ameno no sentido abstrato). Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Cada subgrupo H e cada cociente G/N (N é um subgrupo normal) de um grupo G ameno, é ameno.*

2. *Se $N \trianglelefteq G$ e G/N são amenos então G é ameno.*

3. *Todo limite direto de grupos amenos é ameno (limite direto quer dizer que dado um conjunto de grupos $\{G_i\}_{i\in I}$ tal que para cada $i, j \in I$ existe um k tal que $G_i \cup G_j \subseteq G_k$ tomamos $\bigcup_{i\in I} G_i$).*

Demonstração. 1.
Suponha que $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ é a medida sobre G que faz de G um grupo ameno.
Cada subgrupo H de G tem uma transversal à direita M em G (Ver Preliminares). Podemos definir $\nu : \mathcal{P}(H) \to [0,1]$ por $\nu(A) := \mu(AM)$ que é fácil ver que é uma medida sobre H.
Para um quociente G/N de G, defina $\lambda : \mathcal{P}(G/N) \to [0,1]$ por $\lambda(A) := \mu(AN)$, que é uma medida sobre G/N.

2.
Suponha ν_1, ν_2 são médias sobre (respectivamente) $N \trianglelefteq G$ e G/N. Então para $A \subseteq G$ defina $f_A : G \to \mathbb{R}$ por $f_A(g) := \nu_1(N \cap g^{-1}A)$ e defina $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0,\infty]$ por $\mu(A) := \int f_A \, d\nu_2$, que é fácil ver que é uma probabilidade finitamente aditiva sobre G. Para ver que é invariante à esquerda, note que $\int f_{xA} \, d\nu_2 = \int {}_x(f_A) \, d\nu_2 = \int f_A \, d\nu_2$ já que ν_2 é invariante à esquerda.
Observação: Note que se $g, h \in G$ pertencem a uma mesma classe lateral esquerda de N, $\exists\, n \in N$ tal que $h = gn$, portanto pela invariância a esquerda $\nu_1(n^{-1}(N \cap g^{-1}A)) = \nu_1(N \cap h^{-1}A)$ é dizer $f_A(g) = f_A(h)$, por isso, se $|G/N| = r$ (cardinalidade) então $\int f_A \, d\nu_2 = \sum_{i=1}^{r} f_A(g) \, \nu_2(gN)$
3.
Temos que $G = \cup_{i\in I} G_i$ onde para cada $i, j \in I$ existe um $k \in I$ tal que $G_i, G_j \leq G_k$. Para cada $i \in I$, denota por μ_i à medida sobre G_i que faz a este um grupo ameno, e defina o conjunto

$$M_i := \{\mu : \mathcal{P}(G) \to [0,1] : \mu \;\; \textit{é uma medida finitamente aditiva e}\, \mu(gA) = \mu(A) \; \forall\, g \in G_i\}$$

Então cada M_i, $i \in I$ é não vazio, já que podemos definir μ por $\mu(A) := \mu_i(A \cap G_i)$. Note que $[0,1]^{\mathcal{P}(G)}$ é compacto pelo Teorema de Tychonoff (Ver Teorema 25) e é fácil mostrar que cada M_i é fechado em $[0,1]^{\mathcal{P}(G)}$.
Se $G_i, G_j \leq G_k$ então $M_k \subseteq M_i \cap M_j$. Portanto a família $\{M_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos fechados de $[0,1]^{\mathcal{P}(G)}$ satisfaz a propriedade da interseção finita, isto é, existe uma medida finitamente aditiva (média) $\mu \in \cap_{i\in I} M_i$ que faz G ameno.

□

Proposição 18 (Solúvel)**.** *Cada grupo G solúvel é ameno.*

Demonstração. Como G é solúvel existe sequência finita de subgrupos $\{G_i\}_{i=1}^n$ tal que $1 \rhd G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_n = G$, G_i/G_{i+1} é comutativo. Note que $\{1\}$ é ameno e como $G_0/1$ é comutativo então pela Proposição 17, G_0 é ameno, fazendo o mesmo processo n-vezes tem-se que G é ameno. □

Exemplo 14. *O conjunto dos isomorfismos de $\mathbb{R}^n$ forma um grupo denotado por $(Isom(\mathbb{R}^n))$, de fato $(Isom(\mathbb{R}^n))$ é um grupo solúvel para $n = 1, 2$; portanto $Isom(\mathbb{R}^n)$ é ameno (no sentido abstrato) para $n = 1, 2$ e pela Proposição 11 pode-se construir uma média de probabilidade sobre $\mathbb{R}^2$ invariante por isometrias.*

3.2 Condição de Følner

Nesta seção mostraremos a equivalência dos grupos amenos no sentido abstrato com a existência de uma sequencia de Følner. Isto é interessante porque nos permitirá ter uma ideia mais geométrica do assunto. Nesta seção nos restringiremos aos grupos enumeráveis.

Definição 37. *Um grupo discreto G satisfaz a condição Følner se para cada subconjunto finito $A \subseteq G$ e cada $\epsilon \gneq 0$ existe um subconjunto finito não-vazio $F \subseteq G$ tal que para cada $a \in A$ temos*
$$\frac{|aF \triangle F|}{|F|} \leq \epsilon.$$

Definição 38. *Para um grupo discreto ou enumerável G, a sequência de Følner é uma sequência $\{F_n\}$ de subconjunto finitos não vazios de G que satisfaz*
$$\frac{|gF_n \triangle F_n|}{|F_n|} \to 0$$
para cada $g \in G$.

Exemplo 15. *O grupo $\mathbb{Z}$ tem uma sequência Følner, chamando $F_n = \{-n, \ldots, n\}$.*

Por simplicidade o seguinte Teorema será feito só para o caso de grupos discretos enumeráveis. Se G é um grupo discreto enumerável as classes de funções do espaço $L^\infty(G)$ com a medida da contagem será notada por $\ell^\infty(G)$.
Seja $f : G \to \mathbb{R}$ e $x \in G$, definimos à translação a esquerda $\tau_x f(y) := f(x^{-1} \cdot y)$. Além disso, se $g : G \to \mathbb{R}$, definimos o produto interno $\langle f, g\rangle := \sum_{x\in G} f(x)g(x)$ sempre que a parte direita da igualdade convirja.
Uma média finita é uma função $\nu : G \to \mathbb{R}$ não negativa, finitamente suportada tal que $\|\nu\|_{\ell^1(G)} = 1$. As médias consideradas no seguinte Teorema serão só as que têm valores reais, note que este conjunto de médias é fechado com a topologia fraca* pelo que segue valendo para ele o Teorema 16.

Teorema 12. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1) *G é ameno no sentido abstrato, existe uma média de probabilidade μ finitamente aditiva sobre $\mathcal{P}(G)$ invariante a esquerda.*

2) *Existe uma média invariante à esquerda $\lambda : \ell^\infty(G) \to \mathbb{R}$, ou seja existe uma média tal que $\lambda(\tau_x f) = \lambda(f)$ para todo $f \in \ell^\infty(G)$ e $x \in G$.*

3) *Para cada conjunto finito $S \subset G$ e cada $\epsilon \gneq 0$, existe uma média finita ν tal que $\|\nu - \tau_x\nu\|_{\ell^1(G)} \leq \epsilon$ para todo $x \in S$.*

4) *Para cada conjunto finito $S \subset G$ e cada $\epsilon \gneq 0$, existe um conjunto finito não vazio $A \subset G$ tal que $|(x \cdot A) \triangle A|/|A| \leq \epsilon$ para todo $x \in S$ (condição de Følner).*

5) *Existe uma sequência A_n de conjuntos finitos não vazios tais que $|(x \cdot A_n) \triangle A_n|/|A_n| \to 0$ quando $n \to \infty$ para cada $x \in G$ (sequência Følner).*

Demonstração. 1) $\Rightarrow$ 2).
-Pelo Teorema 16.

2) $\Rightarrow$ 3) (por contradição).
-Suponha por contradição que 3) é falsa, então existe um S e um ϵ_0 tais que $sup_{x\in S}\|\nu - \tau_x\nu\|_{\ell^1(G)} \gneq \epsilon_0$ para toda média finita $\nu \in \ell^1(G)$. O conjunto $M := \{(\nu - \tau_x\nu)_{x\in S} : \nu \in \ell^1(G)\}$ é um conjunto convexo de $(\ell^1(G))^s$ e esta limitado longe de zero.
Observação: Lembre que $(\ell^1(G))^S$ representa o espaço produto de ℓ^1, e os elementos deste espaço são da forma $(\nu_1, \ldots, \nu_{|S|})$ ($|S|$ é a cardinalidade de S). Portanto, sejam ν e μ médias finitas e $0 \leq t \leq 1$, têm-se que

$$\begin{aligned} & t(\nu - \tau_{x_1}\nu, \ldots, \nu - \tau_{x_{|S|}}\nu) - (1-t)(\mu - \tau_{x_1}\mu, \ldots, \mu - \tau_{x_{|S|}}\mu) \\ = & (t(\nu - \tau_{x_1}\nu) - (1-t)(\mu - \tau_{x_1}\mu), \ldots, t(\nu - \tau_{x_{|S|}}\nu) - (1-t)(\mu - \tau_{x_{|S|}}\mu)). \end{aligned}$$

Como o conjunto das médias é convexo, e dada uma média ν, tem-se que $\tau_x\nu,\ x \in G$ é também uma média, a prova termina.

-Aplicando o Teorema de separação de Hanh-Banach forte em espaços normados (Ver Corolário 6), existe um funcional linear $\rho \in \ell^1(G)^*$ tal que $\rho(\nu - \tau_x\nu) \geq \epsilon_0 \gneq 0$ para toda média finita ν.
Observação: Note que $B(0, \epsilon_0/2)$ é um conjunto convexo e $d(B(0, \epsilon_0/2), M) = \epsilon_0/2 \gneq 0$.

-Como $\ell^1(G)^* \cong \ell^\infty(G)$ (Ver Teorema 9.4.8, Cohn, [14]), basta considerar o isomorfismo isométrico componente a componente para ter $(\ell^1(G)^S)^* \cong (\ell^\infty(G))^S$, portanto existe um $m_x \in \ell^\infty(G)$ para cada $x \in S$ tal que $\rho(\nu - \tau_x\nu) = \sum_{x\in S}\langle \nu - \delta_x * \nu, m_x\rangle \geq \epsilon_0$ para toda média finita ν.
Observação: A notação $\delta_x * \nu$ significa a convolução da função ν com a delta de Kronecker em x, mais exatamente, sejam $\nu_1, \nu_2 \in \ell^1(G)$ dizemos que a convolução $\nu_1 * \nu_2$ é dada pela formula

$$\nu_1 * \nu_2(t) = \sum \nu_1(s_1)\nu_2(s_2) : \ s_1 \cdot s_2 = t$$

(definição obtida de [6] pag.19). Como $\delta_a(x) = \begin{cases} 1 & se\ x = a \\ 0 & se\ x \neq a \end{cases}$ tem-se

$$\delta_x * \nu(t) = \delta_x(x)\nu(x^{-1}t) = \tau_x\nu$$

-Assim $\langle \nu, \sum_{x\in S} m_x - \tau_{x^{-1}}m_x\rangle \geq \epsilon_0$.
Observação: por linearidade do produto interno $\sum_{x\in S}\langle \nu - \delta_x * \nu, m_x\rangle = \sum_{x\in S}\langle \nu, m_x\rangle - \sum_{x\in S}\langle \delta_x * \nu, m_x\rangle$ abrindo o produto interno $\sum_{x\in S}\langle \nu, m_x\rangle - \sum_{x\in S}\sum_{y\in G}\nu(x^{-1}\cdot y)m_x(y)$ e fazendo mudança de variável na segunda componente $z = x^{-1}\cdot y$ temos $\sum_{x\in S}\langle \nu, m_x\rangle - \sum_{x\in S}\sum_{z\in G}\nu(z)m_x(x\cdot z) = \sum_{x\in S}\langle \nu, m_x - \tau_{x^{-1}}m_x\rangle$.

-Então se consideramos a função delta de Kronecker δ_a a qual é uma média finita, temos $\sum_{x\in S} m_x(a) - \tau_{x^{-1}}m_x(a) \geq \epsilon_0 \gneq 0$ para cada ponto $a \in G$. Na construção do isomorfismo isométrico entre $(\ell^1(G)^S)^*$ e $(\ell^\infty(G))^S$ cada $m_x \in \ell^\infty(G)$, então $\sum_{x\in S} m_x - \tau_{x^{-1}}m_x \in \ell^\infty(G)$. Por 1) existe uma média λ invariante à esquerda, se aplicamos ela, por propriedade $\lambda(\sum_{x\in S} m_x - \tau_{x^{-1}}m_x) \geq \epsilon_0 \gneq 0$, e por linearidade $\sum_{x\in S}\lambda(m_x) - \lambda(\tau_{x^{-1}}m_x) \gneq 0$, pelo que existe pelo menos um $x_0 \in S$ tal que $\lambda(m_{x_0}) \gneq \lambda(\tau_{x_0^{-1}}m_{x_0})$, o que contradiz à invariança a esquerda de λ.

$3 \Rightarrow 4$).
Fixe S (que pode ser tomado como não-vazio), e seja $\epsilon \gneq 0$ uma pequena quantidade a ser escolhida depois. Por (2) pode-se achar uma média finita ν tal que

$$\|\nu - \tau_x\nu\|_{\ell^1(G)} \leq \epsilon/|S|,$$

para todo $x \in S$.
Como ν é finitamente suportada, usando a decomposição "Layer Cake" (Ver Definição 7), podemos escrever $\nu = \sum_{i=1}^k c_i 1_{E_i}$ para alguma cadeia (sucessão) de conjuntos não vazios $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_k$ e certas constantes positivas c_i. Como ν é uma média finita, nós temos

$\sum_{i=1}^{k} c_i|E_i| = 1$. Agora para $g \in G$, se existir, considere o E_i mais pequeno, tal que $g \in E_i$ ou $g \in x \cdot E_i$. Note que se $j \lneq i$ tem-se $\mathbf{1}_{E_j} = 0$, e se $g \in E_i \cap x \cdot E_i$ então $c_i\mathbf{1}_{E_i} - c_i\mathbf{1}_{x \cdot E_i} = 0$. Para $g \in (x \cdot E_i \triangle E_i)$, tem-se que $g \in x \cdot E_i$ ou (exclusão) $g \in E_i$ portanto $|\nu(g) - \tau_x\nu(g)| \geq c_i$, assim

$$\sum_{i=1}^{n} c_i|x \cdot E_i \triangle E_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |\nu - \tau_x\nu| = \|\nu - \tau_x\nu\|_{\ell^1(G)} \leq \epsilon/|A| = \epsilon/|S| \sum_{i=1}^{n} c_i|F_i|,$$

para cada $x \in S$. Já que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in S} c_i|x \cdot E_i \triangle E_i| \leq \epsilon \sum_{i=1}^{n} c_i|E_i|,$$

pelo "princípio da casa dos pombos" existe um i tal que $\sum_{x \in S} |x \cdot E_i \triangle E_i| \leq \epsilon|E_i|$ de onde $|x \cdot E_i \triangle E_i|/|E_i| \leq \epsilon$ para todo $x \in S$.

4) $\Rightarrow$ 5): Suponha que G satisfaz a condição e escreva isto como $G = \cup_n A_n$, a união ascendente de subconjuntos finitos $S_1 \subset S_2 \cdots$. Seja $\epsilon_n = 1$ para cada n. A condição Følner implica que para cada n, existe um subconjunto finito A_n tal que para cada $x \in S$ temos $|xA_n \triangle A_n|/|A_n| \leq 1/n$. Então para cada $g \in G$ existe algum S_n contendo ele (e portanto se $n \leq m$ então S_m também) de modo que $|gA_n \triangle A_n|/|A_n| \leq 1/n \to 0$.

5) $\Rightarrow$ 1):
-Seja $\mathbf{m}$ o conjunto das médias sobre G e $\{A_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ a sequência de Følner. Dado um $B \in G$ e um $V \in \mathbf{m}$, defina

$$V_n(B) := \frac{1}{|A_n|} \sum_{g \in A_n} V(g \cdot B).$$

Note que V_n é uma média, e lembre que $\mathbf{m}$ é compacto na topologia fraca*, portanto $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência que contém uma subsequência convergente $V_{n_k} \to \mu$.

-Mostraremos que μ é G-invariante à esquerda.
Sejam

$$V_n(gA) = \frac{1}{|A_n|} \sum_{h \in A_n} V(h \cdot g \cdot A) = \frac{1}{|A_n|} \sum_{k \in A_n \cdot g} V(k \cdot A)$$

e

$$V_n(A) = \frac{1}{|A_n|} \sum_{h \in A_n} V(h \cdot A).$$

Portanto

$$\lim_{n \to \infty} V_m(g \cdot A) - V_m(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{|A_m|} \sum_{k \in A_m \cdot g} V(k \cdot A) - \frac{1}{|A_m|} \sum_{h \in A_m} V(h \cdot A)$$

$$\mu(g \cdot A) - \mu(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{|A_m|} \sum_{k \in A_m \cdot g \triangle A_m} V(k \cdot A) \leq \lim_{n \to \infty} \frac{|A_m \cdot g \triangle A_m|}{|A_m|} = 0$$

Refazendo o mesmo processo para $V_m(A) - V_m(g \cdot A)$ obtemos $\mu(A) - \mu(g \cdot A) \leq 0$, portanto $\mu(A) = \mu(g \cdot A)$ como queria-se provar.

□

Principio da casa dos pombos ou princípio das gavetas de Dirichlet: Se n pombos devem ser postos em m casas, e se $n \gneq m$, então pelo menos uma casa irá conter mais de um pombo. Matematicamente falando, isto quer dizer que se o número de elementos de um conjunto finito A é maior do que o número de elementos de um outro conjunto B, então uma função de A em B não pode ser injetiva.

Exemplo 16. *Todo grupo finito (compacto no caso topológico) satisfaz a condição Følner, simplesmente pegando $F = G$*

Exemplo 17. *o grupo $(\mathbb{Z}^2, +)$ tem uma sequência de Følner $F_n := \{-n, \dots, n\} \times \{-n, \dots, n\}$. Pois $|F_n| = (2n+1)^2$ e a ação de $g = (x, y) \in \mathbb{Z}^2$ é uma traslação no plano, por tanto $|F_n \triangle g + F_n| = x(2n+1) + y(2n+1) = (x+y)(2n+1)$. Como sempre existe um $N \gneq 0$ tal que $x + y \lneq 2n+1$, quando $n \gneq N$, temos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|F_n \triangle gF_n|}{|F_n|} = 0 \quad \forall\, g \in \mathbb{Z}^2,$$

como queria-se provar.

3.3 Taxa de Crescimento

Começaremos lembrando a definição de crescimento de palavras em um grupo finitamente gerado.

Definição 39 (função comprimento)**.** *Seja G um grupo gerado por um subconjunto S finito e simétrico, definimos a função comprimento como $l_S : G \to \mathbb{N}$ (com respeito a S) onde $l_S(g)$ é o minimo dos comprimentos das representações de g em termos de S.*

Isto define uma métrica sobre G, onde a bola de raio n centrada na identidade $B_S(n)$ é o conjunto de todos os elementos com $l_S(g) \leq n$.
Definimos a função crescimento de G com respeito a S por $\gamma_G^S(n) := |B_S(n)|$ ($|B_S(n)|$ é a cardinalidade do conjunto $B_S(n)$).
Para duas funções γ^1, γ^2denotamos $\gamma^1 \precsim \gamma^2$ se existe um C, $\alpha \lneq 0$ tais que $\gamma(n) \leq C\gamma(\alpha n)$ para todo n.
γ^1, γ^2 são equivalentes ($\gamma^1 \sim \gamma^2$) se $\gamma^1 \precsim \gamma^2$ e $\gamma^2 \precsim \gamma^1$. É fácil ver que $\gamma^1 \precsim \gamma^2$ é uma relação de equivalência.

Proposição 19. *O conjunto das funções crescimento (com respeito a conjuntos finitos geradores) de um grupo G finitamente gerado são equivalentes.*

Demonstração. Sejam S_1, S_2 dois conjuntos geradores do grupo G e $m := max\{\ell_{S_2}(h) : h \in S_1\}$. Note que $|B_{S_1}(n)| \leq |B_{S_2}(mn)|$, portanto $\gamma_G^{S_1}(n) \precsim \gamma_G^{S_2}(n)$ como queria-se provar. □

Estes são alguns tipos de crescimento:

1. Crescimento polinomial, onde $\gamma(n) \sim n^\alpha$.

2. Crescimento exponencial, onde $\gamma(n) \sim e^n$.

3. Crescimento intermediário, onde $\gamma(n)$ tem um crescimento maior do que o polinomial mas menor do que o exponencial.

O limite $lim_{n\to\infty}\gamma_G(n)^{1/n}$ existe para todo grupo finitamente gerado (porque $\gamma_G(n)$ é submultiplicativo). Se este limite é estritamente maior do que zero, o grupo tem crescimento exponencial; se é igual a zero dizemos que tem um *crescimento subexponecial.*

Teorema 13. *Todos os grupos de crescimento subexponencial são amenos.*

Demonstração. A ideia é usar as bolas $B(n)$ como uma sequência de Følner. Seja G um grupo com crescimento subexponencial, logo $\gamma(n)^{1/n} = |B(n)^{1/n}| \to x \leq 1$. Isto significa que para cada $\epsilon \lneq 0$ existe k_ϵ tal que $|B(k_\epsilon + 1)|/|B(k_\epsilon)| \leq 1 + \epsilon$. Seja $n_i := k_{1/i}$, para cada s de um conjunto gerador fixo S, note que $|sB(n_i)| = |B(n_i)|$ e que

$$2(|sB(n_i)|-|sB(n_i)\cap B(n_i)|) \leq 2(|sB(n_i)|-|B(n_i)|+|sB(n_i)\setminus B(n_i)|)) \leq 2(|B(n_i+1)|-|B(n_i)|),$$

portanto

$$\frac{|sB(n_i) \triangle B(n_i)|}{|B(n_i)|} \leq \frac{2(|B(n_i+1)| - |B(n_i)|)}{|B(n_i)|} \leq 2(1+1/i) - 2 \to 0$$

Já que cada $g \in G$ pode-se obter com elementos de S, concluímos

$$\frac{|gB(n_i) \triangle B(n_i)|}{|B(n_i)|} \to 0$$

□

De fato grupos de crescimento subexponencial são mais que amenos, eles são superamenos, um conceito introduzido por Rosenblatt.

Definição 40. *um grupo G é superameno se para cada $\emptyset \neq A \subseteq G$ existe uma média (medida finitamente aditiva) invariante à esquerda $\mu : \mathcal{P}(G) \Longrightarrow [0,1]$ tal que $\mu(A) = 1$.*

Proposição 20. *um grupo G é superameno se e somente se todos os subconjuntos $\emptyset \neq A \subseteq G$ não são G-paradoxal.*

Demonstração. Pelo Teorema de Tarski (Teorema 10) é evidente se consideramos a $X = G$ □

Proposição 21. *Seja G um grupo finitamente gerado:*

1. *Se G tem crescimento subexponencial e atua sobre um conjunto X então cada subconjunto não vazio $A \subseteq X$ não é G-paradoxal.*

2. *Se G tem crescimento subexponencial então é superameno.*

Demonstração. 1. (Por contradição) Suponha que A é G-paradoxal. Então existem duas realizações $h_1, h_2 : A \to A$ tais que $h_1(A) \cap h_2(A) = \emptyset$. Por definição de realização, para h_1 existe uma partição de A dada pelos subconjuntos $\{A_{i_1}\}_{i=1}^k$, e existem $g_{i_1} \in G$ tais que $g_{i_1}(A_{i_1}) = B_{i_1}$ onde $\{B_{i_1}\}_{i=1}^k$ é uma partição de $h_1(A)$, o mesmo tem-se para h_2. Note que as composições das realizações são sempre diferentes, portanto para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos associar um conjunto H_n de 2^n funções, dadas por n ou um número menor de composições de h_1, h_2, chamemos estas funções de f_a $a = (i, \ldots, j)$.

Por exemplo para $n = 3$ considere $f_{(1,1,2)}(x) = h_2h_1h_1(x)$ e $f_{(1,2,2)}(x) = h_2h_2h_1(x)$. Note que dado um $x_0 \in A$ qualquer, $x_0 \in A_{i_1} \cap A_{j_2}$ onde A_{i_1} é um elemento da partição dado por h_1 e A_{j_2} é um elemento da partição dada por h_2, isto é $h_1h_1(x_0) = g_{i_1}g_{s_1}(x_0) \neq h_2h_1(x_0) = g_{j_2}g_{s_1}(x_0)$, agora se $h_1h_1(x_0)$ e $h_2h_1(x_0)$ pertencem a uma mesma partição A_{l_2} então existe uma bijeção g_{l_2} e as imagens de dois elementos distintos são diferentes. Se por outro lado $h_1h_1(x_0)$ e $h_2h_1(x_0)$ pertencem a duas partições distintas então existem duas bijeções g_{l_2} e g_{r_2} com suas imagens disjuntas. Note que conseguimos relacionar a cada f_i uma palavra de elementos de G.

Agora, como G tem crescimento subexponencial existe um $\alpha \gneq 0$ tal que $\gamma_G^S(n) \leq n^\alpha$, mas pelo argumento anterior para cada n temos assegurado 2^n palavras, portanto existe uma bola $B(\beta)$ tal que $\beta^\alpha \lneq 2^\beta$ o que contradiz o crescimento subexponencial.

2. Considere G atuando sobre si mesmo por multiplicação a esquerda. Seja $\emptyset \neq A \subseteq G$. Pelo argumento anterior (item 1.) e a Proposição 20, G é superameno.

$\square$

Proposição 22. *Grupos finitos tem crescimento polinomial*

Demonstração. Basta considerar $\alpha = |G|$. $\square$

Proposição 23. *Grupos abelianos finitamente gerados tem crescimento polinomial*

As Proposições 22, 23 implicam que grupos finitos e grupos abelianos finitamente gerados são superamenos. É assim que os grupos superamenos possuem propriedades interessantes, para uma melhor abordagem ver [5].

Voltando a nosso objeto de estudo, nem todo grupo ameno tem crescimento subexponencial, de fato

Teorema 14 (Milnor-Wolf)**.** *Seja G um grupo solúvel finitamente gerado. Se G tem um subgrupo nilpotente H de índice finito, então G tem crescimento polinomial. Caso contrario G não tenha um subgrupo H nilpotente de índice finito, então G tem crescimento exponencial.*

Demonstração. Teorema 4.8, Ver [18]. $\square$

Mais geralmente

Teorema 15 (Chou)**.** *Seja G um grupo finitamente gerado que pertence a (EG). Então G tem crescimento polinomial ou tem crescimento exponencial.*

Demonstração. Teorema 3.2 , Ver [19]. $\square$

Outros resultados envolvendo crescimento podem ser encontrados em [17]).

3.4 Problema de Day (AG≠EG)

Na Proposição 17 vimos como a propriedade de ser ameno é preservada por algumas operações algébricas básicas, no ano de 1957 [20], Day conjecturou que o conjunto dos grupos amenos (AG), seria o conjunto de quocientes, uniões diretas e subgrupos de grupos finitos e comutativos, este conjunto é chamado o conjunto de grupos elementares (EG) (por exemplo os grupos solúveis pertencem a (EG)). A conjectura foi demostrada como falsa no ano de 1985 por Rostislav Grigorchuk [23]. Neste trabalho o autor mostra que o primeiro grupo de Grigorchuk é ameno mas não pertence a (EG).
Nesta seção definiremos o primeiro grupo de Grigorchuk, e enunciaremos os resultados (sem prova) usados para mostrar que o primeiro grupo de Grigorchuk é ameno mas não elementar. De fato a ideia central é demonstrar que tem crescimento subexponencial para provar que é ameno, e seguir a exposição feita em [22] via torsão, para mostrar que não é elementar. Uma outra forma de fazer a prova é mostrar que tem crescimento intermediário, mas isto não será abordado.

Definição 41 (Grupo finitamente gerado)**.** *Seja G um grupo e $S \subseteq G$. Seja $\mathcal{J} = \{H \leq G : S \subseteq H\}$. Então $\langle S \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{J}} (H)$ é o subgrupo de G gerado por S. Um grupo G diz-se finitamente gerado se este é gerado por algum subconjunto finito $S \subseteq$ é dizer $G = \langle S \rangle$.*

Definição 42 (ordem)**.** *Seja G um grupo. Um elemento $g \in G$ tem ordem finita se $\exists n \in \mathbb{Z}$ tal que $g^n = 1$.*

Definição 43 (periódico)**.** *Um grupo G é periódico se $\forall\, g \in G$, $\exists\, n \in \mathbb{Z}$ tal que $g^n = 1$, é dizer, cada elemento do grupo tem ordem finita.*

Definição 44 (grupo de torsão)**.** *Um grupo abeliano A é chamado de um grupo de torsão (o periódico) se cada elemento A tem ordem finita.*

Definição 45 (localmente finito)**.** *Um grupo localmente finito é um grupo onde todo subgrupo finitamente gerado é finito.*

Teorema 16. *Cada grupo de torsão em (EG) é localmente finito.*

Demonstração. Teorema 4.2 [3]. □

Observação 3 (Problema de Burnsides)**.**

Todo grupo finitamente gerado e periódico é finito?

A resposta é não, um dos contraexemplos é o primeiro grupo de Grigorchuk, feita por Rostislav Grigorchuk no ano de 1980. Foi precisamente esta, num primeiro momento a motivação para sua construção.

3.4.1 Primeiro grupo de Grigorchuk

Tanto a definição como a ilustração desta seção foram extraídas de [27].

Definição 46 (Árvore com raiz d-ario)**.** *Uma árvore com raiz d-ario $T^{(d)}$, $(d \geq 1)$, é uma árvore cujo conjunto de vértices consiste de sequências finitas de inteiros $\{0, \ldots, d-1\}$ e os eixos de T^d conectam pares de vértices cujo comprimento da sequência difere de exatamente 1, e a sequência mais curta pode ser obtida da mais longa eliminando o último elemento na direita da sequência. Por exemplo $v_i = (1, 2, 2, 0, 1)$ e $v_j = (1, 2, 2, 0)$ poderiam formar um eixo, enquanto $v_l = (1, 2, 2, 1, 1)$ com v_i não. A raiz é definida pela sequência vazia, e denotada como $(\emptyset)$ cada vértice $(x_1, \ldots, x_k) \neq \emptyset$ tem exatamente um parente $(x_1, \ldots, x_{k-1})$ (note que a raiz de T^d não tem parentes). Na árvore com raiz d-ario T^d, cada vértice $(x_1, \ldots, x_k)$ tem k filhos, que são da forma $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$ onde $x_{k+1} \in \{0, \ldots, d-1\}$. Na arvore com raiz d-ario T^d temos uma noção de níveis, onde o nível k-ésimo de T^d é o subconjunto de vértices consistindo de todas as sequências de comprimento k, denotado por $L^d(k)$*

Para cada vértice $x \in T^{(d)}$, existe uma subárvore $T_x^{(d)}$ de $T^{(d)}$ que contem todos os vértices cujas sequências começam com x. Por concatenação de x com um vértice $v \in T^{(d)}$, obtemos um novo vértice $xv \in T_x^{(d)}$. Isto define um automorfismo de grafos:

$$\delta_x : T^{(d)} \to T_x^{(d)} \ \text{ onde } \ v \mapsto xv.$$

O grupo de todos os automorfismos sobre $T^{(d)}$ é denotado como $G^{(d)}$. Note que todo automorfismo de $T^{(d)}$ fixa a raiz, porque a raiz tem d vizinhos mas quaisquer outro vértice tem $d+1$. Assim os automorfismos de $T^{(d)}$, só permutam as subárvores $T_{(0)}^{(d)}, \ldots, T_{(d-1)}^{(d)}$ e fixam $(\emptyset)$.

Definição 47. $St_{G^{(d)}}(k) = \{g \in G^{(d)} : \forall\, x \in L^{(d)}(k),\, g(x) = x\}$ *é o grupo estabilizador de $G^{(d)}$ fixando $L^{(d)}(k)$.*

Dados d automorfismos $g_0, \ldots, g_{d-1} \in G^{(d)}$, podemos definir um novo automorfismo $g \in St_{G^{(d)}}(1)$ (é dizer g fixa o primeiro nível da árvore), tal que cada g_j atua sobre a subárvore $T_j^{(d)}$. Podemos formalizar esta noção notando que a ação de g_j sobre a j-ésima subárvore é precisamente o automorfismo $g_j \delta_j$.

Da mesma forma pode-se reverter este procedimento e demonstrar que todo automorfismo no estabilizador do primeiro nível, $St_{G^{(d)}}(1)$ é desta forma. Agora podemos definir a seguinte função, a qual é um isomorfismo de grupo pela discussão anterior

$$\psi : St_{G^{(d)}}(1) \to G^{(d)} \times \cdots \times G^{(d)}$$

Como $g \mapsto (g_0, \ldots, g_{d-1})$ faremos um abuso de notação e escreveremos $g = (g_0, \ldots, g_{d-1})$. Agora que a teoria de árvores com raiz d-ario foi estabelecida, focaremos nossa atenção sobre o caso binário e definiremos o primeiro grupo de Grigorchuk.

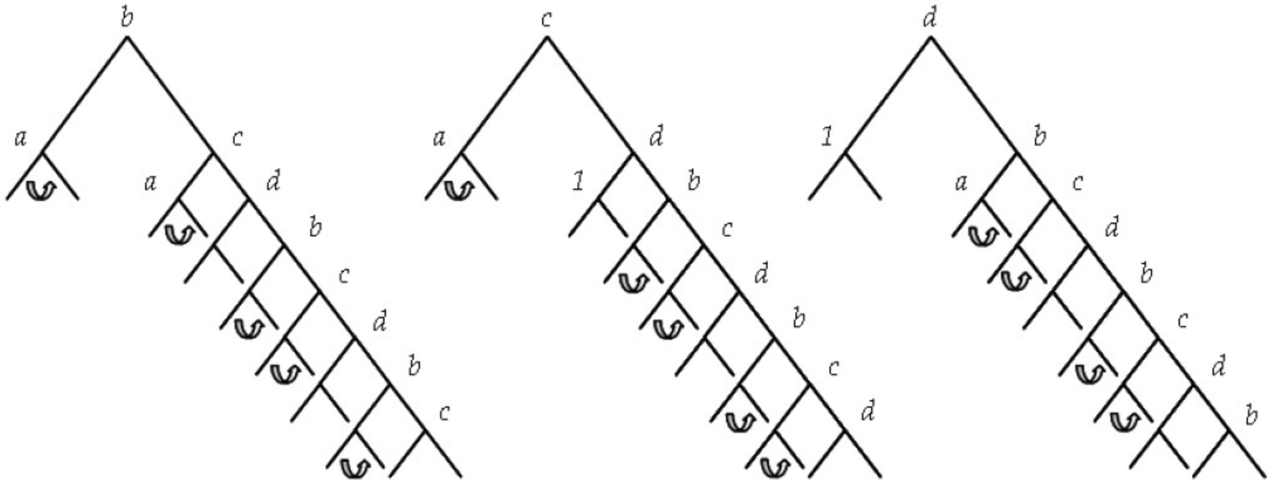
O primeiro grupo de Grigorchuk é construído sobre os elementos em $G^{(2)}$, que são automorfismos da árvore binária com raiz $T^{(2)}$. Para $j \in \{0, 1\}$, seja $\overline{1} := 0$ e $\overline{0} := 1$. Considere o automorfismo a tal que dado um vértice $v = (i_1, ..., i_n)$

$$a(i_1, ..., i_n) = (\overline{i_1}, ..., i_n)$$

por exemplo $a(1, 0, 1, 1, 0) = (0, 0, 1, 1, 0)$. Três automorfismos no estabilizador do primeiro nível, $St_{G^{(d)}}(1)$, podem ser agora definidos recursivamente da definição de a, considere

$$b = (a, c) \quad c = (a, d) \quad d = (1, b)$$

Onde a igualdade representa o abuso de notação antes mencionado,



Por exemplo:
$b(1, 0, 1, 1, 0) = (1, c(0, 1, 1, 0)) = (1, 0, a(1, 1, 0)) = (1, 0, 0, 1, 0)$
$c(1, 0, 1, 1, 0) = (1, d(0, 1, 1, 0)) = (1, 0, 1(1, 1, 0)) = (1, 0, 1, 1, 0)$
$d(1, 0, 1, 1, 0) = (1, b(0, 1, 1, 0)) = (1, 0, a(1, 1, 0)) = (1, 0, 0, 1, 0)$

Definição 48. *O primeiro grupo de Grigorchuk* Γ *é o grupo gerado por* $\{a, b, c, d\}$*, isto é* $\langle a, b, c, d \rangle$.

3.4.2 Ameno mas não elementar

Proposição 24. $b^2 = c^2 = d^2 = 1$

Proposição 25. *O primeiro grupo de Grigorchuk* Γ *é infinito.*

Demonstração. A ideia é mostrar que existe uma bijeção de Γ com um dos seus subconjuntos próprios, mais exatamente com $St_\Gamma(1)$. □

Com estes dois últimos resultados e o Teorema 16 provamos que o primeiro grupo de Grigorchuk Γ não é um grupo elementar. Agora provaremos que é ameno.

Lema 9. *Para cada* $g \in St(3)$ *temos que* $\sum_{1,j,k=0,1} l_{(g_{ijk})} \leq \frac{3}{4}l(g) + 8$ *onde* g_{ijk} *é um elemento obtido reduzindo* $\varphi_k(\varphi_j(\varphi_i)(g))$.

Demonstração. Lema 4.8 [3]. □

Teorema 17. *O primeiro grupo de Grigorchuk* Γ *tem crescimento subexponencial.*

Demonstração. Teorema 4.9 [3]. □

Como o grupo Γ tem crescimento subexponencial então pelo Teorema 13 Γ é ameno.

3.5 Problema de Von Neuman AG $\neq$ NF

Motivado pela construção do Teorema de Banach-Tarski, no ano de 1929 [21] Von Neuman conjecturou que o conjunto de grupos amenos (AG) era o conjunto de grupos que não contém um subgrupo não abeliano livre (NF), o que é conhecido como o problema de Von Neuman. A conjetura é falsa e o primeiro contraexemplo foi mostrado por Olshanski no ano de 1980 (Ver [8]), provando que o grupo monstro de Tarski não era ameno. Um outro contraexemplo foi construído por Nicolas Monod no ano de 2013 (Ver [25]).

Capítulo 4

Grupos Hiperbólicos

Os exemplos e as ilustrações deste capítulo foram obtidas do livro da professora Clara Löh (Ver [12]), convidamos aos leitores que estejam interessados em aprofundar-se na teoria de Grupos hiperbólicos a usar esta referência.

Definição 49 (Grafo de Cayley)**.** *Seja G um grupo finitamente gerado por $S \subseteq G$. Então o grafo de Cayley de G com respeito ao conjunto gerador S, é o grafo $Cay(G, S)$ cujo:*

- *Conjunto de vértices é G*

- *Conjunto de eixos é*

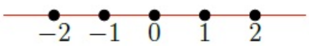
$$\{\{g, g \cdot s\} : \ g \in G, \ s \in S \setminus \{e\}\}$$

Isto é, dois vértices no grafo de Cayley são adjacentes se e somente se eles diferem por um elemento do grupo gerador S.

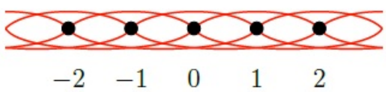
Sejam G um grupo finitamente gerado por $S \subseteq G$ e $\ell_S(g) :=$ o número mínimo de elementos de S necessários para escrever g, ($\ell_S(g)$ é o comprimento de g relativo a S). Seja $d_S(g_1, g_2) := \ell_S(g_1^{-1} g_2)$, então $(Cay(G, S), d_S)$ é um espaço métrico conexo por arco e invariante por translações à esquerda de G.

Exemplo 18 (Grafos de Cayley)**.**

- *O grafo de Cayley do grupo $\mathbb{Z}$ com gerador $\{1\}$ e gerador $\{2, 3\}$ respectivamente.*

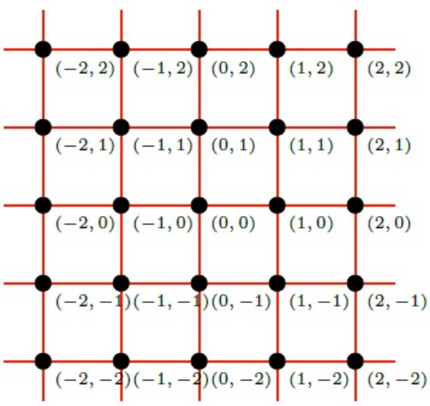


$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$

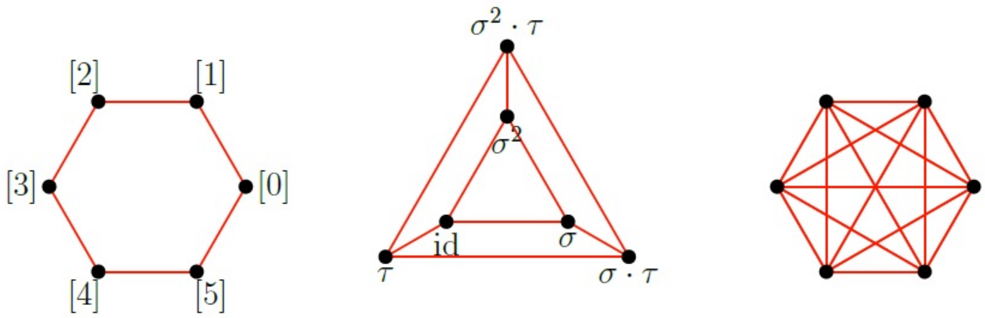


$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$

- *O grafo de Cayley do grupo aditivo $\mathbb{Z}^2$ com respeito ao gerador $\{(0, 1), (1, 0)\}$.*



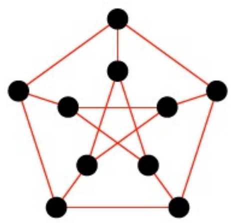
- *O grafo de Cayley dum grupo livre de dois geradores.*
- *O grafo de Cayley do grupo cíclico* $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ *com respeito ao conjunto gerador* $\{[1]\}$ *é um grafo cíclico.*
- *considere o grupo simétrico* S_3*. Seja* τ *a transposição trocando 1 por 2, e seja* σ *o ciclo* $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 1$*; o grafo de Cayley de* S_3 *com respeito ao conjunto gerador* $\{\tau, \gamma\}$*.*



$\mathrm{Cay}\big(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \{[1]\}\big)$ $\mathrm{Cay}\big(S_3, \{\tau, \sigma\}\big)$ $\mathrm{Cay}(S_3, S_3)$
$\cong \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$

Note que o grafo de Cayley $Cay(S_3, S_3)$ *é um grafo completo com 6 vértices, similarmente* $Cay(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ *é também um grafo completo de 6 vértices. Portanto, vemos que grupos não isomorfos (não existe isomorfismo de grupo) podem ter grafos de Cayley isomorfos para certos conjuntos geradores.*

Nem todo grafo é grafo de Cayley de algum grupo, por exemplo o grafo de Petersen.



Por outro lado as árvores são grafos bem caracterizados, como se verá abaixo.

Teorema 18 (Grafo de Cayley dum grupo livre)**.** *Se* F *é um grupo livre, livremente gerado por* $S \subset F$*. Então o correspondente grafo de Cayley* $Cay(F, S)$ *é uma árvore.*

Demonstração. Ver Teorema 3.3.1, Clara Löh [12]. □

O caso contrário não é verdade

Exemplo 19.

- *O grafo de Cayley* $Cay(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, [1])$ *consistindo de dois vértices unidos por um eixo; claramente este grafo é uma árvore, mas o grupo* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *não é livre.*
- *O grafo de Cayley* $Cay(\mathbb{Z}, \{1, -1\})$*, coincide com* $Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$*, que é uma árvore (realmente é uma linha). Mas* $\{1, -1\}$ *não é um conjunto gerador livre de* $\mathbb{Z}$*.*

Teorema 19 (Árvore e grupo livre)**.** *Seja um grupo G e seja $S \subset G$ é um conjunto gerador satisfazendo $s \cdot t \neq e$ para todo $t \in S$. Se o grafo de Cayley $Cay(G, S)$ é uma árvore, então S é um conjunto gerador livre de G.*

Demonstração. Ver Teorema 3.3.3, Clara Löh [12]. □

Definição 50 (Segmento geodésico)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico e x_0, x_1 dois pontos de X tal que $a = d(x_0, x_1)$.*

- *Um segmento geodésico parametrizado é uma isometria $g : [0, a] \to X$ tal que $g(0) = x_0$ e $g(a) = x_1$.*

- *Um segmento geodésico geométrico é a imagem de um segmento geodésico parametrizado.*

Definição 51 (Espaço geodésico)**.** *Um espaço (X, d) é um espaço geodésico se para todo $x_0, x_1 \in X$ existe um segmento geodésico parametrizado com domínio $[0, d(x_0, x_1)]$.*

Definição 52 (Triângulo geodésico)**.** *Dado (X, d). Um triângulo geodésico de vértices $x, y, z \in x$ é a reunião de 3 segmentos geodésicos geométricos que unem estes vértices dois a dois. O caso degenerado é admitido, por exemplo o caso onde $x = y$ tem-se que o segmento de x a z é igual que o segmento de y a z.*

Definição 53 (Condição de Rips)**.** *Seja $\delta \geq 0$. Um espaço métrico geodésico satisfaz a condição de Rips de constante δ, se para todo triângulo geodésico $\triangle$ de X, se satisfaz a fórmula:*

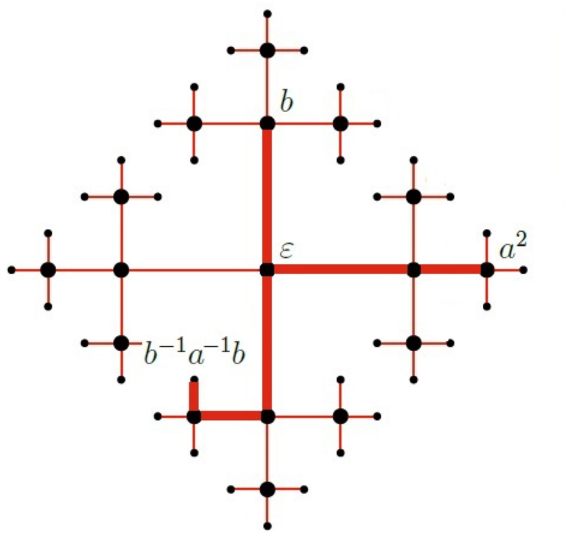
$$\text{Para todo } \triangle = [x, y] \cup [x, z] \cup [y, z] \text{ y para todo } u \in [x, y],$$
$$\text{tem-se que } d(u, [x, z] \cup [y, z]) \leq \delta.$$

Definição 54 (Espaço hiperbólico)**.** *Um espaço geodésico é hiperbólico se existe um $\delta \geq 0$ tal que o espaço cumpra a condição de Rips com constante δ.*

Definição 55 (Grupo hiperbólico)**.** *Um grupo G finitamente gerado por S é hiperbólico se o grafo de Cayley $Cay(G, S)$ é um espaço hiperbólico.*

Proposição 26 (F_2)**.** *O grupo livre F_2 é hiperbólico.*

Demonstração. Sejam $w_1, w_2, w_3 \in F_2$, e seja $g_{12} = g_{21}$ a geodésica geométrica que une as palavras w_1, w_2 portanto o triângulo geodésico que une as palavras w_1, w_2, w_3 é dado por $\triangle = g_{12} \cup g_{23} \cup g_{13}$. Seja W_1 a geodésica geométrica que une o elemento neutro $e := 1$ com a palavra w_1. Note que $g_{12} = (W_1 \cup W_2) \setminus (W_1 \cap W_2)$, $g_{13} = (W_1 \cup W_3) \setminus (W_1 \cap W_3)$ e $g_{32} = (W_3 \cup W_2) \setminus (W_3 \cap W_2)$. De fato $g_{12} = (g_{13} \cup g_{23}) \setminus (g_{13} \cap g_{23})$ portanto se $u \in g_{12}$ tem-se que $u \in g_{23}$ ou $u \in g_{13}$ e de esta forma o F_2 cumpre a condição de Rips com constante 0.



□

Definição 56 (quasi-isometria)**.** *Sejam (X, d) e (X, d') dois espaços métricos. Dizemos que X, X' são quasi-isométricos se existem duas aplicações $f : X \to X'$ e $g : X \to X'$ assim como constantes $\lambda \gneq 0$, $c \geq 0$ tais que:*

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(y)) &\leq \lambda d(x, y) + c \quad \forall\, x, y \in X \\ d(g(x'), f(y')) &\leq \lambda d'(x', y') + c \quad \forall\, x', y' \in X' \\ d(g(f(x)), x) &\leq c \\ d'(f(g(x')), x') &\leq c. \end{aligned}$$

As primeiras duas desigualdades são condições que fazem de g, f ser quasi-lipschitzianas, as últimas duas permitem que sejam quasi-inversas.

A quasi-isometria é uma relação e equivalência entre espaços métricos.

Teorema 20 (hiperbolicidade é invariante na quasi-isometria)**.** *Seja G e H subgrupos finitamente gerados. Se G e H são quasi-isométrico então G é um grupo hiperbólico se e somente se H é hiperbólico.*

Demonstração. Ver item 2. da Proposição 7.3.2, Clara Löh, [12]. □

Exemplo 20.

- *Dado um grupo G finito qualquer então ele é hiperbólico, pois seu grafos de Cayley é um espaço geodésico que cumpre a condição de Rips com $\delta = |G|$.*

- *O grupo $\mathbb{R}$ é hiperbólico, pois seus triângulos geodésicos são degenerados e portanto cumpre a condição de Rips com $\delta = 0$. Assim mesmo $\mathbb{Z}$ é hiperbólico pois ele é quasi-isométrico a $\mathbb{R}$.*

- *O grupo $\mathbb{R}^2$ não é hiperbólico, resta considerar uma família de triângulos Equiláteros e fazemos que seus lados tendam para o infinito. É claro que o ponto meio de qualquer lado não cumpre a condição de Rips. Da mesma forma $\mathbb{Z}^2$ não é hiperbólico pois ele é quasi-isométrico a $\mathbb{R}^2$.*

- *Seja M uma superfície Riemanniana de curvatura seccional negativa (uma superfície hiperbólica). Então o grupo fundamental $\pi_1(M)$ é hiperbólico (Ver exemplo 7.3.3 [12]). Em particular, o grupo fundamental de superfícies conectadas fechadas de gênero ao menos 2 são hiperbólicas.*

Teorema 21. *Cada grupo hiperbólico infinito contém um elemento de ordem infinita.*

Demonstração. Teorema 7.5.1 [12]. □

Capítulo 5

Amenos e Hiperbólicos

Como vimos:
O grupo $(\mathbb{R}, +)$, e os grupos finitos são amenos (Ver Exemplo 13, 10) e também são hiperbólicos (Ver Exemplo 20).
O grupo F_2 é hiperbólico (Ver Exemplo 26) mas não é ameno (Ver Exemplo 6).
O grupo $(\mathbb{Z}^2, +)$ é ameno (Ver Exemplo 17) mas não é hiperbólico (Ver Exemplo 20).

Isso nos leva a perguntar se existe alguma forma de caracterizar a interseção destes dois interessantes conjuntos de grupos dum jeito mais fácil que pedir que cumpram as duas definições.

Ver [26] para achar resultados nesta direção.

Capítulo 6

Anexos

6.1 Teoria da medida

Definição 57. *Seja (X, R, μ) um espaço de medida positiva, R^* a extensão de Lebesgue, R^1 a família de todos os conjuntos $E \subseteq X$ para os quais $A \cap E \in R^*$ para cada conjunto $A \in R$ com $\mu(A) \lneq \infty$. Claramente R^1 é uma σ-álgebra contendo a R.*
A função μ_1 sobre R^1 definida como

$$\mu_1(E) = \mu(E) \quad \text{se } E \in R^*$$

$$\mu_1(E) = \infty \quad \text{se } E \in R^1 \setminus R^*$$

é uma extensão contavelmente aditiva de μ que vai de R^* a R^1.
O espaço $ba(X, R, \mu)$ é o espaço dessas funções acotadas e aditivas que se anulam sobre os conjuntos de μ-medida zero. A norma de um elemento de $ba(X, R, \mu)$ é sua variação total.

Teorema 22. *Existe um isomorfismo isométrico entre $(L^\infty(X, R, \mu))^*$ e $ba(X, R, \mu)$ determinado pela identidade*

$$x^*(f) = \int_X f(x)\lambda(ds)$$

$$f \in L^\infty(X, R, \mu),\ x^* \in (L^\infty(X, R, \mu))^*,\ \lambda \in ba(X, R, \mu)$$

6.2 Requisitos da análise funcional

Seja X, Y conjuntos arbitrários e seja $F(X, Y)$ o conjunto de todas as funções de X a Y. Qualquer subconjunto de $F(X, Y)$ dotado de alguma topologia τ é um espaço de funções.
Pode-se identificar o conjunto $F(X, Y)$ com o conjunto produto da maneira seguinte: Seja Y_x uma réplica Y indexada por $x \in X$, e seja P o produto dos conjuntos Y_x

$$P = \prod\{Y_x : x \in X\}$$

Lembre-se que P consiste de todos os pontos $p = \langle a_x : x \in X\rangle$ que fazem corresponder a cada $x \in X$ o elemento $a_x \in Y_x = Y$, é dizer P consiste de todas as funções de X a Y, e portanto, $P = F(X, Y)$. Agora respeito a cada elemento $x \in X$, a função e_x a função do conjunto de funções a Y definida por

$$e_x(f) = f(x)$$

Denomina-se função avaliação em x. (Aqui f é uma função qualquer do conjunto de funções $F(X, Y)$) Considerada a identificação de P com $F(X, Y)$, a função avaliação e_x é precisamente a função projeção π_x de P no espaço coordenado $Y_x = Y$.

Topologia aberta puntual

Seja X um conjunto arbitrário e seja Y um espaço topológico. Primeiro investigaremos a topologia produto τ do espaço $F(X, Y)$. Lembre-se que a sub-base de definição δ da topologia produto de P consiste em todos os subconjuntos de P da forma

$$\pi_{x_0}^{-1}[U] = \{f : \pi_{x_0}(f) \in U\}$$

onde $x_0 \in X$ e U é um subconjunto aberto coordenado $Y_{x_0} = Y$. Agora, $\pi_{x_0}(f) = e_{x_0} = f(x_0)$, onde e_{x_0} é a função avaliação em $x_0 \in X$. Logo a sub-base de definição δ da topologia produto τ consiste em todos os subconjuntos de $F(X, Y)$ da forma $\{f : f(x_0) \in U\}$, é dizer todas a funções que fazem corresponder um ponto arbitrário $x_0 \in X$ com um conjunto aberto U de Y. Esta topologia produto de $F(X, Y)$, chama-se topologia aberta pontual.
Também pode-se definir a topologia aberta puntual de $F(X, Y)$ como a menos fina das topologias de $F(X, Y)$ respeito as quais é contínua qualquer função avaliação $e_x : F(X, Y) \to Y$. Esta corresponde diretamente a definição de topologia produto.

Seja $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ uma sucessão de funções de um conjunto arbitrário X em um espaço topológico Y. A sucessão converge pontualmente a uma função $g : X \to Y$ se, para todo $x_0 \in X$, tem-se que $\langle f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots \rangle$ converge a $g(x_0)$, é dizer $lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = g(x_0)$.

Teorema 23. *Uma sucessão de funções $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ em $F(X, Y)$ converge a $g \in F(X, Y)$ quando é considerada a topologia aberta pontual de $F(X, Y)$, se e somente se $\langle f_n \rangle$ converge pontualmente a g.*

Topologia fraca*

Seja E um espaço vetorial normado. Denote

$$(E^*)^* = E^{**}$$

E^{**} é chamado o espaço bidual de E. Podemos definir um operador linear limitado canônico

$$J : E \to E^{**}$$

da seguinte forma: para cada $x \in E$, o funcional linear limitado $J_x : E^* \to \mathbb{R}$ é dado por

$$J(x)(f) = f(x) \;\; \forall f \in E^*$$

Definição 58. *Seja E um espaço vetorial normado e considere a inmersão canônica $J : E \to E^{**}$ a topologia fraca* sobre o dual E^* é a topologia menos fina tal que todos os funcionais lineares na imagem $J(E)$ são contínuos.*

Proposição 27. *Sejam E um espaço vetorial normado e Y um espaço topológico. Então uma aplicação $\Phi : Y \to E^*$ é continua quando E^* é munido da topologia fraca* si e somente se $(J_x) \circ \Phi : Y \to \mathbb{R}$ é contínua para todo $x \in E$.*

Teorema 24 (Alaoglu)**.** *Se E é um espaço vetorial normado, então a bola unitária fechada $B^* := \overline{B}_{E^*}(0; 1) = \{f \in E^* : |f| \leq 1\}$ é um espaço topológico de Hausdorff compacto na topologia fraca*.*

Corolário 6 (Separação forte entre espaços normados)**.** *Sejam A e B subconjuntos convexos não vazios de um espaço normado X suponhamos que $d(A, B) = \rho \gneq 0$. Então existem $f \in X^*$ com $|f| = 1$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tais que*

$$Re(f(a)) \leq \gamma \lneq \gamma + \rho \leq Re(f(b)) \quad (a \in A, b \in B).$$

Se diz-se que o funcional f separa fortemente os conjuntos A e B. Observe que temos dois hiperplanos, reais e afins, dados pelas duas equações $Re(f(x)) = \gamma$ e $Re(f(x)) = \gamma + \rho$, tais que o conjunto A fica a um lado de ambos e B ao outro. Além disso a distância entre tais hiperplanos é ρ a máxima possível.

Definição 59 (Layer cake representation)**.** *Seja X, F, μ uma medida, Seja ν a medida de Borel sobre $[0, \infty)$ e $f \in M_+(X)$. Para $a, t \geq 0$, conjunto*

$$\phi(t) := \int_0^t d\mu(s), \quad u(a) := \mu\{f \gneq a\}.$$

Proposição 28.

$$\int \phi(f(x))\, d\mu(x) = \int_0^t u(a)\, d\nu(s)$$

Corolário 7. $f(x) = \int 1_{\{f \gneq a\}}(x)\, d(a)$

A Layer Cake representation de uma função f mensurável, não negativa e de valores reais definida sobre o espaço $\mathbb{R}^n$ é a fórmula dada no Corolário 7.

6.3 Topologia

Teorema 25 (Teorema de Tychonoff)**.** *Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família arbitraria de espaços topológicos. $\prod_{i \in I} X_i$ é um espaço topológico compacto si e somente se cada X_i é compacto.*

6.4 Grafos

Definição 60. *um **grafo** é um conjunto V de **vértices** com uma coleção E de pares não ordenados distintos de V, chamados **arestas** (uma aresta pode aparecer repetidamente em E). Um grafo é **bipartido** se o conjunto dos vértices se divide em duas partes tais que cada aresta tem um vértice em cada parte. O **grau** do vértice v é o número de arestas contendo v, e um grafo é k-regular se todos os vértices tem grau k. Um "**emparelhamento perfeito**"em um grafo é uma coleção de arestas abarcando todos os vértices tais que nenhuma destas arestas tem um vértice em comum.*

Teorema 26. *[Teorema de König] um grafo bipartido k-regular ($k \lneq \infty$) tem um emparelhamento perfeito.*

Demonstração. Ver [11], Teorema 0.2.4. □

Bibliografia

[1] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe and Alain Valette: *Kazhdan's Property (T)*. New Mathematical Monographs, Cambridge University Press, Apendix G, 2008.

[2] Jean Paul Pier: *Amenable locally compact groups*. Centre universitarie of Luxemburg, John Wiley & Sons, 1984.

[3] Alejandra Garrido: *An introduction to Amenable groups*. Notas tomadas duma clase avançada em Oxfort, http://people.maths.ox.ac.uk/kar/amenable.pdf, 2013.

[4] Robinson, R.M.: *On the descomposition of spheres*. Fund. Math. 34 (1947), 246-260.

[5] Stan Wagon: *The Banach-Tarski Paradox*. New Mathematical Monographs, Cambridge University Press, 1994.

[6] I. Namioka: *I Folner's conditions for amenable semi-groups*. Math. Scand., 15:18–28, 1964.

[7] Adilson Gonçalves: *Introdução à álgebra*. 5. ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2012.

[8] Ol'shanskii, A. Y.: *On the problem of the existence of an invariant mean on a group*.Rusian Math. Surveis (Uspekhi) 35 No. (1980), 180-181.

[9] Mahlon M. Day, A. Y.: *Means on semigroups and groups*.Bull. Amer. Math. Soc **55** (1949),1054-1055.

[10] J. Dixmier: *Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurts aplications*. Acta. Scient. Math. (Szeged), $\mathbf{12} : 213 - 227$ (1950).

[11] Volker Runde: *Lectures on Amenability*.Departament of Mathematical and Statistical Sciences. Universidade of Alberta. Canada (Springer), (2002).

[12] Clara Löh: *Geometric group theory, and introduction*. Universität Regensburg. Alemanha, (2011).

[13] Etienne Ghys, Pierre de la Harpe : *Sur les Groupes Hiperboliques d'après Mikhael Gromov*. Birkhäuser Boston . (1990).

[14] Donald L. Cohn : *Measure Theory*. Birkhäuser Boston . (1980).

[15] Jhonatan Gleason : *Existence and Uniqueness of Haar measure*.University of Chicago Mathematics REU. (2010).

[16] John B. Conway : *A course in funtional analysis*.Graduate Text in Mathematics, Springer, Second Edition. (1990).

[17] D. V. Osin : *The entropy of sovable groups*. Departament of Higher Algebra. MEHMAT, Moscow State University, Russia. (2001).

[18] Joseph A. Wolf : *Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds*.J. Diff. Geom., **2**. (1968)

[19] Ching Chou : *Elementary amenable groups*. Illinois Journal of Mathematics Volume 24, Number 3. (1980)

[20] M.M. Day : *Amenable semigroups*. Illinois Journal of Mathematics Volume 1. (1957), 509-544.

[21] J. Von Neuman : *Zur Allgemeinen Theory des Masses*. Fund. Math., vol. 13 (1929), p.p. 73-116.

[22] P. de la Harpe : *Topics in Geometric Group Theory*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press. (2000)

[23] R. I. Grigorchuk : *Degrees of growth of finitely generated groups, and the theory of invariant means* . Mathematics of the USSR-Izvestiya, 25(2):259. (1985)

[24] A. Yu. Ol'shanskii : *An inifinite group whit subgroups of prime orders*. Math. USSR, Izv., 16:279-289. (1981)

[25] Nicolas Monod : *Group of piecewise projective homeomorphisms*. École Polytechnique Federale de Lausanne. (2013)

[26] Pierre-E. Caprace, Y. de Cornulier, N. Monod, R. Tessera : *Amenable hyperbolic groups*. Cornell university Library, arXiv:1202.3585. (2013)

[27] Drew A. Hudec : *On the Burnside Problem*. University of Chicago, REU. (2006)