

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**INCLUSÃO DE EFEITOS DISSIPATIVOS EM MODELOS  
CONSTITUTIVOS HIPERELÁSTICOS ATRAVÉS DA MODIFICAÇÃO DA  
FUNÇÃO ENERGIA DE DEFORMAÇÃO**

por

Eduardo Guilherme Mötke Wrubleski

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Fevereiro de 2015.

**INCLUSÃO DE EFEITOS DISSIPATIVOS EM MODELOS  
CONSTITUTIVOS HIPERELÁSTICOS ATRAVÉS DA MODIFICAÇÃO DA  
FUNÇÃO ENERGIA DE DEFORMAÇÃO**

por

Eduardo Guilherme Mötke Wrubleski

Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Ph.D. Rogério José Marczak

Aprovada por:

Prof. Dr. Eduardo Alberto Fancello (GRANTE - UFSC/ Florianópolis - Brasil)

Prof. Dr. Rodrigo Rossi (PROMEC - UFRGS/ Porto Alegre - Brasil)

Prof. Dr. Sandro Campos Amico (DEMAT - UFRGS/ Porto Alegre - Brasil)

Prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 04 de Março de 2015.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria inicialmente de agradecer ao meu orientador, colegas e amigos pelo apoio. Em especial à minha namorada pela paciência. Agradeço aos membros da banca de avaliação pelas contribuições ao trabalho e à CAPES pelo auxílio financeiro durante o mestrado.

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma metodologia para a inclusão de fenômenos dissipativos em relações constitutivas hiperelásticas. Embora seja dada ênfase para o efeito Mullins e histerese, esse procedimento pode ser aplicado a outros fenômenos como, por exemplo, de dano. Para isso, adota-se um modelo fenomenológico que inclui amolecimento em um modelo constitutivo hiperelástico através da pseudo-elasticidade, que permite que diferentes potenciais de energia possam ser utilizados em diferentes etapas do carregamento. Foram utilizados dois modelos hiperelásticos incompressíveis: Ogden e Hoss-Marczak. Para esse estudo, foram selecionados quatro diferentes materiais da literatura, três deles apresentavam apenas dados experimentais para tração uniaxial, enquanto o outro disponibilizou os ensaios de tração uniaxial, tração equibiaxial e cisalhamento puro. Foram selecionados dois parâmetros de amolecimento da literatura (Ogden e Roxburgh, 1999, e Dorfmann e Ogden, 2003) para modelar fenômenos dissipativos e então foram propostos novos parâmetros de amolecimento. Verificação gráfica dos resultados e um coeficiente de correlação ( $\overline{R^2}$ ) foram utilizados para comparar o desempenho desses parâmetros. Os materiais foram considerados isotrópicos e incompressíveis e o carregamento quasi-estático para obtenção dos resultados. Alguns parâmetros propostos não capturaram o efeito dissipativo, outros superestimaram o amolecimento, enquanto os da literatura capturaram o efeito. Ao final, obteve-se resultados bastante satisfatórios para um dos parâmetros propostos, que se verificou ser uma generalização do modelo de Dorfmann e Ogden, 2003.

Palavras-chave: Pseudo-elasticidade, Hiperelasticidade, Efeito Mullins, Histerese, Modelos constitutivos.

## ABSTRACT

This work applies a methodology to include dissipative effects in hyperelastic constitutive relations. The paper focuses on the Mullins effect and hysteresis. However, the methodology can also be applied to other phenomena, like damage. Basically, it is a phenomenological inclusion of the softening behavior in a hyperelastic constitutive model using pseudo-elasticity, in which different energy potentials can be used in different steps of the loading. Two hyperelastic models were employed: Ogden's and Hoss-Marczak's models. Four different materials were modeled, three of them subjected to uniaxial tension only, and a fourth subjected to the three classical loadings, namely, uniaxial tension, equibiaxial tension and pure shear. Two softening parameters from the literature were implemented and new softening parameters were proposed. Graphical inspection and  $\overline{R^2}$  correlation coefficient were used to compare the softening parameters. The materials were considered isotropic and incompressible, being subjected to quasi-static loading. Some of the proposed parameters did not capture the dissipative effect, other overestimate the softening, and those from the literature were able to capture the effects. Finally, very satisfying results were obtained with one of the proposed softening parameters, which was a generalization of the one proposed by Dorfmann e Ogden, 2003.

Keywords: Pseudo-elasticity, Hyperelasticity, Mullins effect, Hysteresis, Constitutive models.

## Sumário

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1      | Revisão Bibliográfica  | 2         |
| 1.1.1    | Efeito Mullins   | 2         |
| 1.1.2    | Histerese  | 7         |
| 1.2      | Objetivos  | 8         |
| 1.3      | Organização do Trabalho  | 9         |
| <b>2</b> | <b>FORMULAÇÃO MATEMÁTICA</b>                                       | <b>10</b> |
| 2.1      | Equacionamento básico  | 10        |
| 2.1.1    | Incompressibilidade  | 14        |
| 2.1.2    | Objetividade   | 15        |
| 2.1.3    | Simetria material  | 15        |
| 2.1.4    | Resposta isotrópica do material                                    | 17        |
| 2.2      | O Efeito Mullins idealizado  | 22        |
| 2.3      | Parâmetros de amolecimento   | 25        |
| 2.3.1    | Parâmetro de amolecimento de Ogden e Roxburgh                      | 26        |
| 2.3.2    | Parâmetro de amolecimento de Dorfmann e Ogden                      | 26        |
| 2.4      | Modelos constitutivos hiperelásticos                               | 27        |
| 2.4.1    | Modelo hiperelástico de Ogden 3 termos (OI3)                       | 28        |
| 2.4.2    | Modelo hiperelástico de HMI-HS                                     | 29        |
| <b>3</b> | <b>PARÂMETROS DE AMOLECIMENTO PROPOSTOS</b>                        | <b>31</b> |
| 3.1      | Parâmetro de amolecimento com potência $W_m - W_0(\lambda)$        | 33        |
| 3.2      | Parâmetro de amolecimento com potência $(W_m - W_0(\lambda))^{-1}$ | 33        |
| 3.3      | Parâmetro de amolecimento com potência $W_m^{-1}$                  | 34        |
| 3.4      | Parâmetro de amolecimento com potência $W_0^{-1}$                  | 34        |
| 3.5      | Parâmetro de amolecimento com potência na tangente hiperbólica     | 35        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>4</b> | <b>RESULTADOS</b> .....                    | <b>37</b> |
| 4.1      | Materiais utilizados para comparação ..... | 38        |
| 4.2      | Coeficiente de correlação .....            | 41        |
| 4.3      | Resultados dos ajustes de curva .....      | 43        |
| 4.4      | Análise de esforço computacional .....     | 62        |
| <b>5</b> | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....          | <b>64</b> |
| 5.1      | Sugestões para trabalhos futuros .....     | 65        |
|          | <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....    | <b>66</b> |
|          | <b>APÊNDICE A</b> .....                    | <b>71</b> |

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Símbolos latinos

|                  |  |
|------------------|--|
| $\mathbf{F}$     | Tensor gradiente de deformação                                     |
| $\mathbf{X}$     | Vetor posição do corpo indeformado                                 |
| $\mathbf{x}$     | Vetor posição do corpo deformado                                   |
| Div              | Operador divergente em $\Omega_0$                                  |
| $X_\alpha$       | Coordenadas do vetor posição do corpo indeformado                  |
| $x_i$            | Coordenadas do vetor posição do corpo deformado                    |
| $\mathbf{I}$     | Tensor identidade  |
| $\hat{W}$        | Especialização isotrópica e incompressível de $W$                  |
| $\hat{w}$        | Especialização isotrópica incompressível de $w$                    |
| $\hat{W}_0$      | Especialização isotrópica e incompressível de $W_0$                |
| $\overline{R^2}$ | Medida de erro   |
| $\bar{t}_e$      | Média da tensão experimental                                       |
| $\overline{W}$   | Especialização para cisalhamento simples de $\hat{W}$              |
| $\overline{W}_0$ | Especialização para cisalhamento simples de $\hat{W}_0$            |
| $\mathbf{P}$     | Primeiro tensor tensão de Piola Kirchhoff com amolecimento         |
| $\mathbf{P}_0$   | Primeiro tensor tensão de Piola Kirchhoff sem amolecimento         |
| $\mathbf{Q}$     | Rotação própria ortogonal  |
| $\mathbf{S}$     | Tensor de tensão de Piola  |
| ${}_2F_1$        | Função tangente hiperbólica  |
| $C$              | Restrição de evolução da variável $\eta$                           |
| $F_{i\alpha}$    | Componentes do tensor gradiente de deformação                      |
| $I_1$            | Primeiro invariante de deformação                                  |
| $I_2$            | Segundo invariante de deformação                                   |
| $J$              | Jacobiano ( $\det \mathbf{F}$ )                                    |
| $N(\mathbf{F})$  | Termo da pseudo-função energia de deformação de um caso mais geral |
| $p$              | Pressão hidrostática associada a tensão com amolecimento           |
| $p_0$            | Pressão hidrostática associada a tensão sem amolecimento           |

|               |  |
|---------------|--|
| $q$           | Multiplicador de Lagrange  |
| $r, m, q$     | Constantes materiais dos parâmetros de amolecimento                              |
| $S_{reg}$     | Numerador do coeficiente de correlação   |
| $S_{tot}$     | Denominador do coeficiente de correlação   |
| $t$           | Tensão de Biot com amolecimento  |
| $t_0$         | Tensão de Biot sem amolecimento  |
| $t_e$         | Tensão experimental  |
| $t_t$         | Tensão calculada com o modelo  |
| $t_{0\alpha}$ | Componentes da tensão de Biot sem amolecimento ( $\alpha \in 1, 2, 3$ )          |
| $t_{0i}$      | Tensão de Biot sem amolecimento na direção $i$                                   |
| $W$           | Função energia de deformação para $\eta$ ativo                                   |
| $w$           | Função energia de deformação em função de $F$ apenas                             |
| $W_0$         | Função energia de deformação para $\eta$ inativo                                 |
| $w_i$         | Parâmetro peso do coeficiente de correlação                                      |
| $W_m$         | Valor máximo que $W_0$ assumiu levando em conta todo o histórico de carregamento |
| $\dot{W}_m$   | Taxa de variação de $W_m$  |
| $W^B$         | Especialização para deformação equibiaxial de $\hat{W}$                          |
| $W^S$         | Especialização para cisalhamento puro de $\hat{W}$                               |
| $W^T$         | Especialização para tração uniaxial de $\hat{W}$                                 |
| $W_0^B$       | Especialização para deformação equibiaxial de $\hat{W}_0$                        |
| $W_0^S$       | Especialização para cisalhamento puro de $\hat{W}_0$                             |
| $W_0^T$       | Especialização para tração uniaxial de $\hat{W}_0$                               |

### Símbolos gregos

|                                 |   |
|---------------------------------|---|
| $\Omega$                        | Domínio do corpo deformado                            |
| $\Omega_0$                      | Domínio do corpo indeformado                          |
| $\alpha, \beta, b, n, \mu, C_2$ | Constantes constitutivas do modelo HMI-HS             |
| $\sigma$                        | Tensão de Cauchy com amolecimento                     |
| $\sigma_0$                      | Tensão de Cauchy sem amolecimento                     |
| $\dot{\phi}$                    | Taxa de variação de $\phi$                            |
| $\eta$                          | Parâmetro de amolecimento                             |
| $\eta_2$                        | Variável interna associada com deformação permanente. |

|                    |  |
|--------------------|--|
| $\eta_e$           | Parametro de amolecimento escrito de forma explícita                               |
| $\eta_m$           | Mínimo valor que $\eta$ pode assumir   |
| $\gamma$           | Deformação cisalhante  |
| $\lambda$          | Alongamento principal para carregamento simples                                    |
| $\lambda_i$        | Alongamentos principais nas direções $i \in \{1, 2, 3\}$                           |
| $\lambda_m$        | Alongamento máximo do histórico de carregamento                                    |
| $\mu$              | Módulo de cisalhamento transversal   |
| $\mu_p, \alpha_p$  | Constantes constitutivas do modelo OI3.  |
| $\phi$             | Dissipação associada à $\eta$  |
| $\sigma_i$         | Componentes do tensor de Cauchy nas direções principais                            |
| $\sigma_{0\alpha}$ | Tensão de Cauchy sem amolecimento nas direções principais ( $\alpha \in 1, 2, 3$ ) |
| $\tau$             | Tensão de cisalhamento   |
| $\sigma_0^B$       | Tensão de Cauchy sem amolecimento para tração equibiaxial                          |
| $\sigma_0^S$       | Tensão de Cauchy sem amolecimento para cisalhamento ( <i>shear</i> )               |
| $\sigma_0^T$       | Tensão de Cauchy sem amolecimento para tração uniaxial                             |

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

|        |  |
|--------|--|
| HMI    | Hoss-Marczak incompressível  |
| HMI-HS | Hoss-Marczak incompressível - Grandes deformações<br>Hoss-Marczak incompressible - High strain |
| OI3    | Ogden Incompressível de três termos  |

## Lista de Figuras

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | Explicação gráfica do efeito Mullins. ....   | 5  |
| 3.1  | Ensaio de tração uniaxial para Látex utilizando HMI-HS. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) $\eta$ segundo Dorfmann e Ogden, 2003. (b) $\eta$ segundo Ogden e Roxburgh, 1999. .... | 31 |
| 3.2  | Ensaio de tração uniaxial para Látex utilizando OI3. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) $\eta$ segundo Dorfmann e Ogden, 2003. (b) $\eta$ segundo Ogden e Roxburgh, 1999. ....    | 32 |
| 4.1  | Fluxograma I : Cálculo da relação constitutiva. ....   | 37 |
| 4.2  | Fluxograma II : cálculo das constantes do modelo hiperelástico. ....   | 38 |
| 4.3  | Fluxograma III : cálculo das constantes do modelo de amolecimento. ....  | 39 |
| 4.4  | Ensaio de tração uniaxial utilizados para diferentes materiais: (a) látex (Niemczura e Ravi-Chandar, 2011), (b) silicone 1 (Maiti et al., 2014), (c) polipropileno (Zrida et al., 2009). ....                                      | 40 |
| 4.5  | Ensaio de tração uniaxial (a), equibiaxial (b) e cisalhamento puro (c) para o silicone 2 (Machado et al., 2014). ....  | 41 |
| 4.6  | Cadeias moleculares dos componentes ewstudadeos: (a) látex (poliisopreno); (b) polipropileno; (c) silicone (polidimetilsiloxano). ....   | 42 |
| 4.7  | Ajustes para o latex com Dorfmann e Ogden, 2003. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3. ....  | 43 |
| 4.8  | Ajustes para o latex com Ogden e Roxburgh, 1999. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3. ....  | 44 |
| 4.9  | Ajustes para o latex com potência $(W_m - W_0(\lambda))$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3. ....  | 44 |
| 4.10 | Ajustes para o latex com potência $(W_m - W_0(\lambda))^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3. ....   | 44 |
| 4.11 | Ajustes para o latex com potência $W_m^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3. ....  | 45 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 4.12 | Ajustes para o latex com potência $W_0^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3. ....                          | 45 |
| 4.13 | Ajustes para o latex com potência na tangente hiperbólica. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3. ....              | 45 |
| 4.14 | Ajustes para o polipropileno com Dorfmann e Ogden, 2003. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3. ....                | 46 |
| 4.15 | Ajustes para o polipropileno com Ogden e Roxburgh, 1999. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3. ....                | 46 |
| 4.16 | Ajustes para o polipropileno com potência $(W_m - W_0(\lambda))$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3. ....      | 46 |
| 4.17 | Ajustes para o polipropileno com potência $(W_m - W_0(\lambda))^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3. .... | 47 |
| 4.18 | Ajustes para o polipropileno com potência $W_m^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3. ....                  | 47 |
| 4.19 | Ajustes para o polipropileno com potência $W_0^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3. ....                  | 48 |
| 4.20 | Ajustes para o polipropileno com potência na tangente hiperbólica. Resultados experimentais em linhas tracejadas e teóricos em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3. ....            | 48 |
| 4.21 | Ajustes para o silicone 1 com Dorfmann e Ogden, 2003. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3. ....                   | 49 |
| 4.22 | Ajustes para o silicone 1 com Ogden e Roxburgh, 1999. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3. ....                   | 49 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 4.23 | Ajustes para o silicone 1 com potência $(W_m - W_0(\lambda))$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.....  | 49 |
| 4.24 | Ajustes para o silicone 1 com potência $(W_m - W_0(\lambda))^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.....   | 50 |
| 4.25 | Ajustes para o silicone 1 com potência $W_m^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.....  | 50 |
| 4.26 | Ajustes para o silicone 1 com potência $W_0^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.....  | 50 |
| 4.27 | Ajustes para o silicone 1 com potência na tangente hiperbólica. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3. ....   | 51 |
| 4.28 | Ajustes do latex com $W_m - W_0$ para material submetido a um único ciclo de carga. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3. ....   | 51 |
| 4.29 | Evolução de $\eta$ em função do passo de tempo para o látex com o parâmetro de amolecimento com potência na tangente hiperbólica. ....   | 52 |
| 4.30 | Ajustes para o silicone 2 com $\eta$ segundo Dorfmann e Ogden, 2003. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI-HS <sup>T</sup> , (b) OI3 <sup>T</sup> , (c) HMI-HS <sup>B</sup> , (d) OI3 <sup>B</sup> , (e) HMI-HS <sup>S</sup> , (f) OI3 <sup>S</sup> . .... | 53 |
| 4.31 | Ajustes para o silicone 2 com $\eta$ segundo Ogden e Roxburgh, 1999. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI-HS <sup>T</sup> , (b) OI3 <sup>T</sup> , (c) HMI-HS <sup>B</sup> , (d) OI3 <sup>B</sup> , (e) HMI-HS <sup>S</sup> , (f) OI3 <sup>S</sup> . .... | 54 |
| 4.32 | Ajustes para o silicone 2 com $(W_m - W_0(\lambda))^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI-HS <sup>T</sup> , (b) OI3 <sup>T</sup> , (c) HMI-HS <sup>B</sup> , (d) OI3 <sup>B</sup> , (e) HMI-HS <sup>S</sup> , (f) OI3 <sup>S</sup> . ....          | 55 |
| 4.33 | Ajustes para o silicone 2 com HMI-HS e $W_m^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI-HS <sup>T</sup> , (b) OI3 <sup>T</sup> , (c) HMI-HS <sup>B</sup> , (d) OI3 <sup>B</sup> , (e) HMI-HS <sup>S</sup> , (f) OI3 <sup>S</sup> . ....                  | 56 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 4.34 | Ajustes para o silicone 2 com $(W_0(\lambda))^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI-HS <sup>T</sup> , (b) OI3 <sup>T</sup> , (c) HMI-HS <sup>B</sup> , (d) OI3 <sup>B</sup> , (e) HMI-HS <sup>S</sup> , (f) OI3 <sup>S</sup> .....           | 57 |
| 4.35 | Ajustes para o silicone 2 com potencia na tangente hiperbólica. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI-HS <sup>T</sup> , (b) OI3 <sup>T</sup> , (c) HMI-HS <sup>B</sup> , (d) OI3 <sup>B</sup> , (e) HMI-HS <sup>S</sup> , (f) OI3 <sup>S</sup> ..... | 58 |
| 4.36 | Coefficiente de correlação $\overline{R^2}$ para todo o intervalo de carregamento: (a) latex, (b) polipropileno.....   | 60 |
| 4.37 | Coefficiente de correlação $\overline{R^2}$ para todo o intervalo de carregamento: (a) silicone 1, (b) silicone 2. ....  | 61 |

## Lista de Tabelas

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.1 | Propostas gerais para modelagem de fenômenos dissipativos - Parte 1. ....    | 3  |
| 1.2 | Propostas gerais para modelagem de fenômenos dissipativos - Parte 2. ....    | 4  |
| 1.3 | Possíveis explicação física para o efeito Mullins (Diani et al., 2009) ..... | 7  |
| 4.1 | Tempo necessário para realizar ajuste de curva com OI3.....                  | 63 |
| 5.1 | Constantes constitutivas dos modelos hiperelásticos .....                    | 71 |
| 5.2 | Parâmetros de amolecimento para o látex .....                                | 72 |
| 5.3 | Parâmetros de amolecimento para o polipropileno .....                        | 72 |
| 5.4 | Parâmetros de amolecimento para o silicone 1 .....                           | 73 |
| 5.5 | Parâmetros de amolecimento para o silicone 2 .....                           | 73 |

## 1. INTRODUÇÃO

Modelos hiperelásticos, especialmente os incompressíveis, são altamente empregados na modelagem do comportamento mecânico de materiais tipo-borracha, como borracha natural, borracha sintética, entre outros.

Esses materiais são versáteis e tem diversas aplicações industriais (pneus automotivos, isolamento de vibrações, juntas, vedação e absorvedores de impactos, por exemplo). Eles se diferenciam de outros materiais de engenharia por não poderem ser modelados diretamente pela lei de Hooke pois comportamento dos mesmos não é linear. Por esse motivo eles são em geral modelados utilizando funções energia de deformações que geram relações constitutivas não lineares.

O sucesso desses modelos se reflete em seu largo uso no design de novos componentes de engenharia (Ogden e Roxburgh, 1999).

No entanto, são necessários modelos mais completos para incluir outros fenômenos, como o efeito Mullins e a histerese de maneira simples e sem perder a generalidade de aplicação a uma grande variedade de materiais. A possibilidade de se utilizar recursos computacionais viabilizou a implementação desses modelos mais completos em softwares de elementos finitos, como é o caso do modelo de amolecimento desenvolvido por Ogden e Roxburgh, 1999, implementado no software comercial Ansys, 2009.

Nas últimas décadas o estudo de materiais hiperelásticos e o desenvolvimento de novas metodologias para capturar diferentes fenômenos observados experimentalmente evoluíram consideravelmente (Dorfmann e Ogden, 2003). Porém ainda há espaço para o desenvolvimento e aperfeiçoamento dos modelos já existentes, que é um dos objetivos deste trabalho.

A pseudo-elasticidade foi escolhida para este trabalho pois possui fácil implementação numérica e pode utilizar os modelos hiperelásticos que já acompanham os softwares de elementos finitos, diminuindo o tempo de programação. Pseudo-elasticidade, é um termo introduzido por Fung, 1980, que trabalhou com uma metodologia similar para tecidos biológicos e consiste na utilização de diferentes funções energia de deformação em diferentes etapas do carregamento do material (mais de uma função energia de deformação).

Utiliza-se aqui com o termo "amolecimento" por essa metodologia ser aplicável a

diversos fenômenos dissipativos e não necessariamente relacionada com o aspecto físico do processo (utiliza-se uma abordagem fenomenológica). Ressalta-se aqui que o dano e o efeito Mullins são similares, sendo que a mesma formulação pode ser empregada para ambos, com algumas ressalvas conceituais (o dano é geralmente associado com o surgimento de microtrincas ou vazios no material, Lemaitre e Desmorat, 2006). É importante salientar que o presente modelo não é implementado da mesma forma que modelos de dano já que no presente trabalho o material sem danificação tem  $\eta = 1$  e o material totalmente danificado teria  $\eta = 0$ . A aplicação dessa metodologia para predição do efeito Mullins é mais evidente do que para a histerese, já que o controle das variáveis internas no primeiro é mais simples. Quando se trabalha com histerese, essa metodologia não permite a modificação da deformação mínima de um dos ciclos de carga-descarga para o seguinte porque ele não tem capacidade de prever comportamentos viscoelásticos e a resposta do material seria representada erroneamente.

## 1.1 Revisão Bibliográfica

Nesta seção são apresentados conceitos e informações pertinentes a respeito dos fenômenos abordados neste trabalho (efeito Mullins e histerese). As Tabelas 1.1 e 1.2 apresentam os modelos mais comuns desenvolvidos por diversos autores para representar Mullins e/ou Histerese e são discutidos nesta seção.

Borrachas são em geral compostas de duas ou mais fases, sendo que uma fase é o composto da básico chamado de matriz e uma segunda fase de carga de enchimento.

Existem outras contribuições à modelagem de fenômenos dissipativos anteriores aquelas apresentadas nas Tabelas 1.1 e 1.2, como: Simo e Ju, 1987, e Simo e Ju, 1989. Porém as contribuições mais significativas e de fácil implementação numérica somente começaram a ser desenvolvidas em meados dos anos 90.

### 1.1.1 Efeito Mullins

Materiais tipo borracha apresentam uma redução na resistência mecânica depois do primeiro ciclo de carregamento, conhecido como efeito Mullins, primeiramente observado por Mullins, 1948. Diferentes definições já foram dadas ao efeito Mullins (Diani et al., 2009), porém neste trabalho a definição utilizada é que Mullins é a diferença entre o primeiro

Tabela 1.1 – Propostas gerais para modelagem de fenômenos dissipativos - Parte 1.

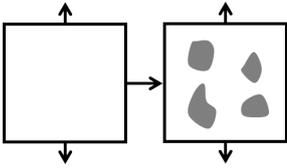
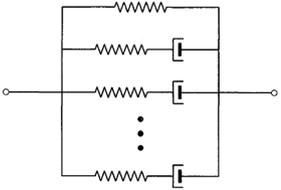
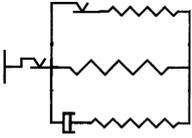
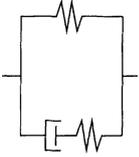
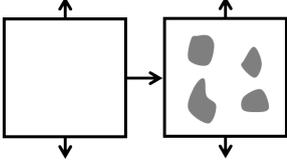
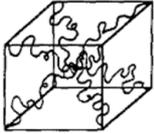
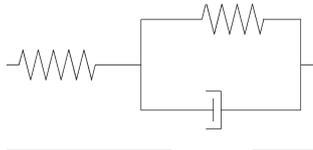
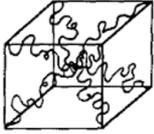
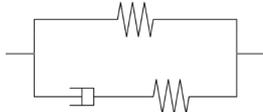
| Referência<br>(Fenômeno)                  | Proposta   |   |
|---|--|---|
| Mullins e Tobin, 1957.<br>(Mullins)       | Modelo assume a existência de duas fases no material e conforme o mesmo é deformado a proporção entre as fases se modifica causando mudança nas propriedades mecânicas do mesmo (assume material sem carga). |    |
| Holzapfel e Simo, 1996.<br>(Histerese)    | Modelo constitutivo de grandes deformações com acoplamento termomecânico. Decomposição aditiva da tensão em um elemento de rigidez e vários braços de Maxwell.   |   |
| Lion, 1996.<br>(Histerese e Mullins)      | Decomposição aditiva da tensão em tensão quasi-estática e sobretensão com dependência da temperatura. Elementos de fricção para modelar deformações permanentes.   |  |
| Bergström e Boyce, 1998.<br>(Histerese)   | Modelo baseado em uma simplificação do modelo de Holzapfel e Simo [1996], onde apenas um braço de Maxwell é utilizado, porém, com bons resultados para materiais com grande quantidade de carga.             |  |
| Beatty e Krishnaswamy, 2000.<br>(Mullins) | Modelo baseado na suposição da existência de duas fases no material, assim como Mullins e Tobin, 1957, porém com a função de proporção entre as fases (rígida/-flexível) modificada.                         |  |

Tabela 1.2 – Propostas gerais para modelagem de fenômenos dissipativos - Parte 2.

| Referência<br>(Fenômeno)                                | Proposta   |   |
|---|--|---|
| Marckmann et al., 2002.<br>(Mullins)                    | Baseado na teoria de alteração de rede, modifica o modelo de Arruda e Boyce, 1993. O qual previa o comportamento apenas hiperelástico através de uma rede com oito cadeias em cada nó.   |    |
| Laiarinandrasana et al., 2003.<br>(Histerese e Mullins) | Acopla o modelo reológico de Poynting-Thompson, para a parte viscosa, com um modelo de dano descontínuo.   |    |
| Chagnon et al., 2006.<br>(Mullins)                      | Baseado na teoria de alteração de rede assim como Marckmann et al., 2002. Utiliza potenciais energéticos fenomenológicos para facilitar a implementação numérica, no entanto, leva em conta considerações físicas na evolução dos parâmetros materiais durante o amolecimento. |  |
| Amin et al., 2006.<br>(Histerese)                       | Baseado na modificação do modelo de Zener, utiliza a decomposição multiplicativa do tensor gradiente de deformação e separa a tensão em tensão quasi-estática e sobretensão oriunda da velocidade de deformação.   |  |

e o segundo carregamento do material (Machado et al., 2014), que ocorre devido a uma diminuição de caráter permanente na rigidez do material. Como exemplificado na Figura 1.1.

O efeito Mullins é um tipo de amolecimento do material não associado à formação de

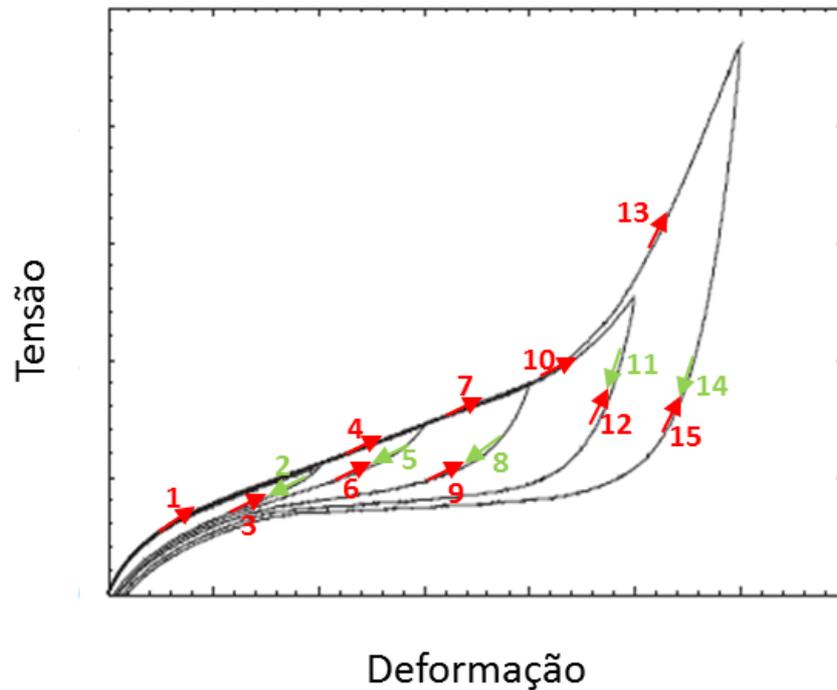


Figura 1.1 – Explicação gráfica do efeito Mullins.

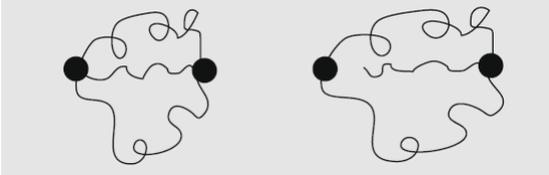
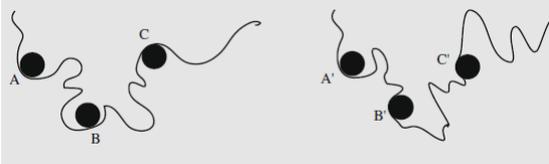
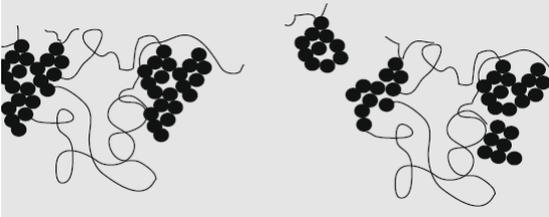
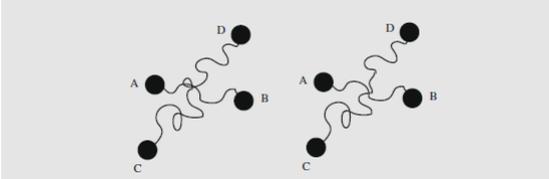
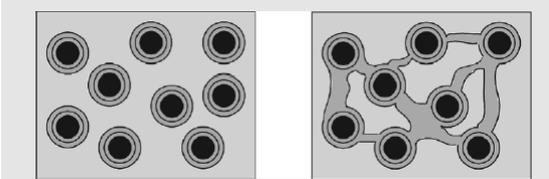
micro trincas ou micro cavidades mas a outras alterações estruturais no material. A primeira revisão do efeito Mullins foi feita em 1969 (Diani et al., 2009) porém, ainda não se tem um consenso do fenômeno físico que ocorre no material. Vários autores propuseram teorias para o fenômeno por trás do efeito Mullins, porém nenhuma foi aceita de forma unânime, por isso a maioria dos modelos utilizados é fenomenológica (Diani et al., 2009).

Alguns autores associam Mullins ao rompimento de cadeias na interface entre a matriz e a carga, deslizamento de moléculas, ruptura de aglomerações de carga, desemaranhamento de cadeias moleculares entre outras teorias mais complexas onde o carregamento modifica uma fase do material formando uma estrutura mais complexa. Porém esse fenômeno é característico de materiais com e sem carga de adição (Diani et al., 2009), por isso outro mecanismo deve ser responsável pela danificação no material. Mullins propôs que o fenômeno físico relacionado a esse efeito é a modificação das fases no material. Então Mullins e Tobin, 1957, e Mullins, 1969, propuseram um modelo onde duas fases existiam dentro do material, chamadas de fase dura e rígida, sendo que a proporção entre elas se modificava no material devido ao efeito do carregamento (fase dura se transforma em fase macia causando o amolecimento do material).

Sabe-se também que o efeito Mullins produz anisotropia no material, pois o amolecimento da tensão é fortemente influenciado pela direção de aplicação da carga (Machado et al., 2014). As principais interpretações físicas são relacionadas ao rompimento microestrutural do material bem como alterações na microestrutura do mesmo (rompimento de cadeias moleculares ou dos aglomerados de carga). Porém esses fenômenos são normalmente associados com materiais que possuem uma segunda fase presente no material, e geralmente não podem ser utilizados para materiais puros, que também apresentam esse fenômeno. Algumas dessas interpretações podem ser vistas na Tabela 1.3, onde as linhas indicam as cadeias poliméricas e as esferas uma segunda fase em forma de carga. As diferentes interpretações que existem para esses fenômenos mostram que ainda existe divergência na interpretação de como o efeito Mullins se inicia, se o mesmo tem origem na micro ou meso escalas (Diani et al., 2009).

Govindjee e Simo, 1991, propuseram um modelo baseado na ruptura de cadeias ligando as partículas de carga através das densidades de cadeias rompidas nas três direções principais. Marckmann et al., 2002, consideraram que a rede macromolecular pode ser representada pelo modelo de oito cadeias (Arruda e Boyce, 1993). O modelo contém oito comprimentos e oito densidades de cadeias evoluindo com a máxima deformação principal. Outra abordagem é a teoria de rede dupla (Green e Tobolsky, 1946), desenvolvida considerando que materiais do tipo borracha podem ser decompostos em duas fases (rígida e macia). Diferentes equacionamentos foram propostos (Beatty e Krishnaswamy, 2000, e Zúñiga e Beatty, 2002). Ao mesmo tempo, a teoria de dano foi empregada com frequência para descrever o fenômeno de amolecimento (Simo e Ju, 1987, Miehe, 1995, Chagnon et al., 2004). Li et al., 2008, associaram o efeito Mullins com o crescimento de microcavidades no material e um modelo compressível foi proposto. Uma das metodologias originais mais recentes foi proposta por Ogden e Roxburgh, 1999, e Dorfmann e Ogden, 2003, onde modelos pseudo-elásticos foram utilizados. Todos esses modelos foram capazes prever dados experimentais, alguns melhores que outros, para o caso de carregamento em uma única direção, isto é, sem mudança de direção no carregamento entre o primeiro e o segundo ciclo o que não leva em conta a anisotropia induzida por deformações (amolecimento isotrópico).

Tabela 1.3 – Possíveis explicação física para o efeito Mullins (Diani et al., 2009)

| Explicação física  | Esboço   |
|--|--|
| Ruptura de ligações  |    |
| Escorregamento de moléculas  |    |
| Ruptura da carga   |   |
| Desemaranhamento   |  |
| Criação ou modificação de segunda fase na matriz (Double-layer model Fukahori, 2005) |  |

### 1.1.2 Histerese

Efeitos histeréticos no material são normalmente relacionados com carregamentos cíclicos onde a resposta do material no carregamento e descarregamento não é a mesma, porém, neste caso esse comportamento é reversível. No descarregamento há uma redução na rigidez do material devido a dissipações internas. Uma das explicações aceitas para esse

efeito é o atrito gerado no material, que é perdido sob a forma de calor. A redução na tensão para o mesmo nível de deformação se acentua de acordo com a fração de volume de carga do material, quanto maior a concentração, maior é a diferença de tensão entre o carregamento e o descarregamento. Lembrando que quando o material é recarregado ele segue a curva de carregamento do primeiro ciclo e não a curva do descarregamento (considerando que a taxa de deformação não seja alterada). Vale ressaltar que alguns materiais sem carga de enchimento, "polímeros puros", podem ser considerado sem efeitos histeréticos (existem porém são desprezíveis, Lion, 1996).

Sabe-se que as propriedades mecânicas de polímeros se modificam com a temperatura, porém neste trabalho esse efeito é desconsiderado. É assumido carregamento é quasi-estático (com uma baixa taxa de deformação), dessa maneira a taxa pode ser desconsiderada.

## 1.2 Objetivos

O presente trabalho tem como primeiro objetivo a incluir efeitos dissipativos em modelos hiperelásticos já existentes, modificando, desta forma, os potenciais energéticos dos modelos originais. Uma vez a formulação implementada realizar o cálculo das contantes constitutivas dos modelos hiperelásticos sem amolecimento assim como as constantes constitutivas dos parâmetros de amolecimento.

Objetiva-se também testar a formulação matemática para carregamentos em tração uniaxial, tração equibiaxial e cisalhamento puro a fim de obter uma melhor caracterização do material (Ogden, 1997). Além disso, propor novos parâmetros de amolecimento que representem melhor o amolecimento do material.

Para modelar esses fenômenos dois modelos hiperelásticos foram utilizados, o Ogden incompressível (OI) e o Hoss-Marczak incompressível (HMI), assim como dois parâmetros de amolecimento também foram escolhidos, os parâmetros propostos por Ogden e Roxburgh, 1999, e Dorfmann e Ogden, 2003. A análise da eficácia dos parâmetros de amolecimento será realizada co base em inspeção visual e com o cálculo de  $\overline{R^2}$  proposto por Hoss et al., 2011.

Como último objetivo, procura-se propor novos parâmetros de amolecimento que representem melhor os fenômenos que ocorrem nos materiais hiperelásticos sem interferir na curva primária do material (puramente hiperelástica).

### 1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho está estruturado em 5 capítulos. No Capítulo 2, é apresentada a formulação matemática e os potenciais para o caso geral, levando em conta incompressibilidade, além de definir as relações constitutivas para tração uniaxial, equibiaxial e cisalhamento puro. No final deste capítulo, são apresentados os modelos de amolecimento da literatura e modelos hiperelásticos clássicos (sem amolecimento) utilizados neste trabalho.

Novos parâmetros de amolecimento são propostos no Capítulo 3. No Capítulo 4, são apresentados: a metodologia de ajuste, os dados experimentais utilizados, a formulação do coeficiente de correlação  $\overline{R^2}$ , os resultados obtidos com os parâmetros de amolecimento do capítulo anterior, os resultados com o coeficiente de correlação, discussões e uma análise do tempo computacional para obtenção das constantes constitutivas por duas metodologias diferentes.

As conclusões e sugestões para trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 5.

## 2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Este capítulo tem por objetivo apresentar a formulação matemática do contínuo associada com o equacionamento do problema. Os modelos aqui apresentados utilizam a teoria pseudo-elástica para modelar comportamentos não lineares e inelásticos de materiais sólidos, mais especificamente relacionadas ao amolecimento do material para carregamentos quasi-estáticos.

Nessa formulação, a dissipação energética pode ser avaliada em cada ciclo de carregamento - descarregamento do material, e a função energia de deformação pode ser diferente para cada ciclo de carregamento e descarregamento. A resposta do material é não elástica, porém as condições de contorno utilizadas para solucionar o problema em cada ciclo de carregamento são elásticas (Ogden e Roxburgh, 1999).

O termo pseudo-elasticidade é utilizado devido às variações na forma da função energia de deformação, isto é, nas propriedades do material devido ao amolecimento, por exemplo. As mudanças sobre a forma da energia de deformação podem ocorrer tanto de forma contínua como descontínua, porém neste trabalho as formas de mudança descontínuas não são abordadas (Fu e Ogden, 2001).

As formulações apresentadas foram propostas por Ogden e Roxburgh, 1999, e a melhoria proposta por Dorfmann e Ogden, 2003. Os parâmetros de amolecimento são apresentados no Capítulo 3.

### 2.1 Equacionamento básico

Considera-se a deformação em um corpo que quando em seu estado natural (sem a presença de tensões ou deformações) ocupa uma região  $\Omega_0$  do espaço. Os pontos materiais do corpo são definidos pelos vetores posição  $\mathbf{X}$  ocupando a região  $\Omega_0$ , onde as coordenadas cartesianas são apresentadas como  $X_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ). Depois da deformação ocorrer, o corpo ocupa a região  $\Omega$ , e o ponto que antes ocupava a região  $\mathbf{X}$  agora ocupa a região  $\mathbf{x}$  com as coordenadas  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). O tensor gradiente de deformação, escrito como  $\mathbf{F}$ , possui as componentes definidas por:

$$F_{i\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha}, \quad (2.1)$$

onde  $F_{i\alpha}$  são as componentes do tensor  $\mathbf{F}$ .

É possível assumir que a relação constitutiva do corpo pode ser descrita através de uma função energia de deformação com a forma  $W(\mathbf{F}, \eta)$ , definida por unidade de volume em  $\Omega$  (Holzapfel, 2000). A variável  $\eta$  é chamada de variável de dano ou parâmetro de amolecimento. Essa formulação é apresentada de forma similar a elasticidade clássica, com a exceção da inclusão da variável escalar  $\eta$ . Devido a inclusão dessa nova variável  $\eta$ , não é mais adequada a caracterização de  $W$  como uma função energia de deformação, mas como uma *pseudo-função energia de deformação*, e a teoria constitutiva correspondente é a *pseudo-elasticidade*, terminologia utilizada por Lazopoulos e Ogden, 1999. Este trabalho assume que  $\eta$  é contínua, teorias onde  $\eta$  pode ser descontínua são discutidas por Lazopoulos e Ogden, 1998, no modelamento de fenômenos de mudança de fase no material.

A variável  $\eta$  pode estar ativa ou não no modelo, e produz uma variação nas propriedades do material,  $\eta$  deve respeitar  $0 < \eta \leq 1$ , sendo 1 quando a mesma não modifica o modelo hiperelástico,  $\eta$  multiplica o a tensão sem amolecimento e essa restrição garante redução na rigidez do material. Quando a variável  $\eta$  está inativa, pode-se reescrever a função energia de deformação como:

$$W_0(\mathbf{F}) = W(\mathbf{F}, 1), \quad (2.2)$$

onde  $W_0$  é a função energia de deformação sem levar em consideração a dissipação, ou seja, prevendo somente om comportamento elástico do material. Como será visto posteriormente, assume-se que  $W_0$  seja um modelo hiperelástico tradicional. Neste trabalho, são utilizados os modelos de Ogden Incompressível de três termos (OI3) e Hoss-Marczak Incompressível para grandes deformações (High-Strain, HMI-HS).

Na ausência de restrições sobre  $W_0$ , a tensão de Piola  $\mathbf{P}_0$ , e a tensão de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}_0$  são dadas respectivamente por (Holzapfel, 2000):

$$\mathbf{P}_0 = \frac{\partial W_0(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}, \quad \boldsymbol{\sigma}_0 = J^{-1} \frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T. \quad (2.3)$$

Quando  $\eta$  está ativo, assume-se que ele depende do gradiente de deformação, essa dependência é escrita na forma:

$$C(\mathbf{F}, \eta) = 0, \quad (2.4)$$

onde  $C$  pode ser vista como uma restrição entre as variáveis  $\mathbf{F}$  e  $\eta$ .

Essa restrição associada com um multiplicador de Lagrange,  $q$ , permite que a tensão de Piola seja escrita como:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F}, \eta)}{\partial \mathbf{F}} + q \frac{\partial C(\mathbf{F}, \eta)}{\partial \mathbf{F}}. \quad (2.5)$$

Se for possível escrever a Equação (2.4) explicitamente para  $\eta$  em termos de  $\mathbf{F}$ , escreve-se:

$$\eta = \eta_e(\mathbf{F}), \quad (2.6)$$

onde o subíndice  $e$  indica que (2.5) é a solução explícita de (2.4) (analítica e que, em geral, não é única, Fu e Ogden, 2001). Então a função energia de deformação  $w$  é escrita como:

$$w(\mathbf{F}) = W(\mathbf{F}, \eta_e(\mathbf{F})), \quad (2.7)$$

e  $\mathbf{P}$  é dado por:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial W(\mathbf{F}, \eta)}{\partial \mathbf{F}} + \frac{\partial W(\mathbf{F}, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}. \quad (2.8)$$

Fazendo uma comparação entre (2.5) e (2.8), é possível verificar que:

$$q = -W_{,\eta}/C_{,\eta}, \quad (2.9)$$

que foi obtida a partir da diferenciação de (2.4) em relação a  $\mathbf{F}$ , como pode ser visto em:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{F}} = -\frac{\partial C}{\partial \mathbf{F}} \frac{1}{C_{,\eta}}, \quad (2.10)$$

onde a virgula significa operação de diferenciação em relação à variável que vem a seguir, no caso acima uma diferenciação de  $C$  em relação a  $\eta$ .

A função  $C$  é essencialmente arbitrária, necessitando apenas satisfazer as condições de objetividade (as quais serão apresentadas posteriormente). A dependência de  $W$  em  $\eta$  também é arbitrária e pode ser assumida como  $C = W_{,\eta}$ , sem perda de generalidade. Isso é equivalente a assumir o multiplicador de Lagrange  $q$  igual a zero, fazendo com que se possa reescrever a condição (2.4) como:

$$\frac{\partial W(\mathbf{F}, \eta)}{\partial \eta} = 0. \quad (2.11)$$

A equação acima com derivada igual a zero indica que a energia nunca sai do sistema, porém ela é armazenada em um outro potencial que não gera tensões no corpo, o qual será apresentado na Seção 2.1.3 como  $\phi$ .

Com isso, a tensão de Piola fica:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial w(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial W(\mathbf{F}, \eta)}{\partial \mathbf{F}}, \quad (2.12)$$

que pode ser calculada com o  $\eta$  dado por (2.6), ou implicitamente por (2.11). Neste trabalho, utiliza-se a relação implícita (2.11) entre  $\mathbf{F}$  e  $\eta$ . A tensão  $\mathbf{P}$  é dada por (2.12) independente de  $\eta$  estar ativo ou inativo, sendo que caso esteja inativo a relação se reduz à (2.3).

A Equação (2.11) também define o espaço  $(\mathbf{F}, \eta)$  para os quais os valores de  $\eta$  devem ser restritos, sabendo-se que  $\mathbf{F}$  deve ser restrito a condição:

$$0 < \det \mathbf{F} < \infty. \quad (2.13)$$

A Equação (2.11) identifica os pontos de  $W(\mathbf{F}, \eta)$  em relação a  $\eta$ : se  $\eta$  é unicamente definida em termos de  $\mathbf{F}$  então é possível escrever a equação analiticamente (como em 2.6) e a função energia de deformação única,  $w$ , resultante como definida em (2.7). As dependências sobre  $\eta$  variam com o modelo escolhido e o fenômeno a ser modelado, por essa maneira serão discutidas a posteriori (Fu e Ogden, 2001).

As equações de equilíbrio do problema estático para esse caso (Lazopoulos e Ogden, 1998) são:

$$\text{Div} \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad \text{em} \quad \Omega_0, \quad (2.14)$$

onde  $\text{Div}$  é o operador divergente em  $\Omega_0$ .

Até então não foi especificada uma forma da função  $W(\mathbf{F}, \eta)$ , nem uma forma sobre a função  $\eta_e(\mathbf{F})$  ou ainda as condições para que  $\eta$  esteja ativo ou inativo. Por exemplo, no caso do efeito Mullins (Ogden e Roxburgh, 1999), quando o material é carregado a primeira vez  $\eta$  está inativo, sendo ativado no descarregamento e mantendo-se ativo até o momento em que o material é carregado novamente ao máximo valor de carregamento que havia sofrido até então. Se nesse ponto o carregamento continuar,  $\eta$  é desativado novamente.

Já no caso da histerese, o material sempre deve ser descarregado até o estado em que não hajam forças externas atuando sobre o mesmo, ou quando a deformação mínima tenha sempre o mesmo valor. Ou seja,  $\eta$  sempre está desativado em qualquer ciclo de carga ( $W_m$  também deve ser zerado quando se atinge a deformação mínima), e assim como em Mullins, está ativo durante as etapas de descarregamento. As características de carga são diferentes do efeito Mullins pois na histerese o material se recupera quando submetido ao segundo ciclo de carregamento. A histerese aqui não depende da taxa de deformação, então para cada taxa de deformação novas constantes constitutivas são necessárias já que a resposta do material não é a mesma com a modificação da taxa de deformação (o material enrijece com o aumento da taxa de deformação).

### 2.1.1 Incompressibilidade

Neste trabalho, assume-se incompressibilidade do material, por esse motivo o tensor gradiente de deformação deve respeitar:

$$\det \mathbf{F} = 1. \quad (2.15)$$

Os tensores de tensão de Piola e Cauchy,  $\mathbf{P}_0$  e  $\boldsymbol{\sigma}_0$ , são respectivamente:

$$\mathbf{P}_0 = \frac{\partial W_0(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p_0 \mathbf{F}^{-1}, \quad \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{F} \frac{\partial W_0(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p_0 \mathbf{I}, \quad (2.16)$$

onde  $p_0$  é o multiplicador de Lagrange associado à restrição (2.15) quando  $\eta$  está inativo e  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade.

O tensor  $\mathbf{P}$  é dado por:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial w(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial W(\mathbf{F}, \eta)}{\partial \mathbf{F}} - p\mathbf{F}^{-1}, \quad (2.17)$$

onde  $p$  é o multiplicador de Lagrange associado à restrição (2.15) quando  $\eta$  está ativo. Já a tensão de Cauchy,  $\boldsymbol{\sigma}$ , é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T - p\mathbf{I} = \frac{\partial W(\mathbf{F}, \eta)}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T - p\mathbf{I}, \quad (2.18)$$

lembrando que (2.17) e (2.18) são avaliados para  $\eta$  dado por (2.6) e associado à restrição (2.11).

### 2.1.2 Objetividade

Assumindo-se que  $\eta$  é uma variável escalar e objetiva e que  $W(\mathbf{F}, \eta)$  satisfaz a condição de objetividade usual (Fu e Ogden, 2001), pode-se afirmar que:

$$W(\mathbf{Q}\mathbf{F}, \eta) = W(\mathbf{F}, \eta), \quad (2.19)$$

para todas as rotações próprias ortogonais  $\mathbf{Q}$ .

Com a dependência de  $\eta$  em  $\mathbf{F}$  definida por (2.11), para o caso particular de (2.6), é objetiva, então  $w$  definida em (2.7) também é objetiva. Porém, como não foi feita uma suposição sobre a simetria do material, não necessariamente uma simetria definida para  $W_0(\mathbf{F})$  será aquela de  $W(\mathbf{F}, \eta)$ .

### 2.1.3 Simetria material

Nessa seção são discutidas as considerações para simetrias materiais de uma função pseudo-elástica quando  $\eta$  está ativo ou inativo. Geralmente a simetria de  $W_0(\mathbf{F})$  é diferente e independente de  $w(\mathbf{F})$ , como definido em (2.7) (Ogden, 1997). Isso pode ser ilustrado pela pseudo função energia de deformação:

$$W(\mathbf{F}, \eta) = W_0(\mathbf{F}) + (\eta - 1)N(\mathbf{F}) + \phi(\eta). \quad (2.20)$$

Na equação acima, a função  $\phi(\eta)$  é chamada de *dissipação* e, pela relação de consistência (2.2), deve satisfazer:

$$\phi(1) = 0, \quad (2.21)$$

enquanto  $N(\mathbf{F})$  é uma função de  $\mathbf{F}$ , independente de  $W_0$ , a ser definida. Para um caso geral, a simetria material de  $N(\mathbf{F})$  é diferente da simetria de  $W_0(\mathbf{F})$ . A particularização de (2.11) nesse caso é:

$$\phi'(\eta) = -N(\mathbf{F}). \quad (2.22)$$

A tensão de Piola associado com (2.20) para um material sem cargas externas aplicadas é:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + (\eta - 1) \frac{\partial N}{\partial \mathbf{F}}, \quad (2.23)$$

onde  $\mathbf{P}_0$  é dado por (2.3), com modificações apropriadas no caso de compressibilidade.

Quando se assume que  $N = W_0$ , a Equação (2.20) é reduzida a:

$$W(\mathbf{F}, \eta) = \eta W_0(\mathbf{F}) + \phi(\eta), \quad (2.24)$$

a qual para o caso isotrópico, foi utilizada por Ogden e Roxburgh, 1999, em seu modelo do efeito Mullins. A Equação (2.22) fica:

$$\phi'(\eta) = -W_0(\mathbf{F}). \quad (2.25)$$

É importante ressaltar que a Equação (2.25), e também (2.22), permitem que  $\eta$  possa ser determinado, ao menos em um primeiro momento, em função de  $\mathbf{F}$ . Nota-se, no entanto, que no caso de (2.25)  $\eta$  depende de  $W_0(\mathbf{F})$  e que devido à (2.24) a simetria do material não muda quando  $\eta$  está ativo ou inativo para um material isotrópico.

A função  $\phi$  foi interpretada por Ogden e Roxburgh, 1999, como a parte não recuperável da energia dissipada em um processo de carregamento. Isso será discutido nas próximas seções.

É importante lembrar que, por simplicidade, a resposta do material é considerada isotrópica em relação a  $\Omega_0$  e que se mantém isotrópica mesmo após a relação constitutiva ser alterada pela inclusão de  $\eta$ . Em geral isso não é válido, pois as simetrias de  $w(\mathbf{F})$  e de  $W_0(\mathbf{F})$  não são as mesmas, o que pode gerar uma variação na simetria material quando  $\eta$  está ativo ou inativo. Além disso, quando se tem um material isotrópico, as deformações residuais podem gerar mudanças de simetria que (em geral) é ortotrópica (Diani et al., 2009).

#### 2.1.4 Resposta isotrópica do material

Nesta seção, a formulação matemática é apresentada para o caso específico em que o material é isotrópico antes de sofrer amolecimento e continua isotrópico depois de sofrer o amolecimento. Essa abordagem não é necessariamente correta pois geralmente existe uma anisotropia induzida no material, principalmente associada ao efeito Mullins. Porém essa abordagem é mais simples de ser implementada e gera resultados razoáveis um número razoável de casos de interesse industrial (Lazopoulos e Ogden, 1998).

Nesse caso a a função de energia pseudo-elástica assume a forma:

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \eta), \quad (2.26)$$

onde  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  são os alongamentos principais associadas com a deformação  $\Omega$ . E a restrição de incompressibilidade pode ser modelada como (Ogden, 1997):

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (2.27)$$

As tensões principais são coaxiais com as deformações principais no caso de um material isotrópico (Holzapfel, 2000). Por essa razão a relação constitutiva pode ser reescrita em função das deformações principais como:

$$\sigma_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - p, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.28)$$

estando  $\eta$  ativo ou não. A restrição (2.11) para este caso específico pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial W}{\partial \eta}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \eta) = 0, \quad (2.29)$$

deste modo  $\eta$  depende dos alongamentos principais,  $\eta = \eta_e(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

É possível simplificar  $W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \eta)$  levando em conta a condição de incompressibilidade. Dessa forma é possível assumir que  $\lambda_3 = \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}$ , o que leva a:

$$\hat{W}(\lambda_1, \lambda_2, \eta) = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}, \eta). \quad (2.30)$$

Eliminando  $p$  (pressão hidrostática) da Equação (2.28) (Holzapfel, 2000):

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \lambda_1 \hat{W}_{,1}, \quad \sigma_2 - \sigma_3 = \lambda_2 \hat{W}_{,2}, \quad (2.31)$$

onde  $\hat{W}_{,1}$  e  $\hat{W}_{,2}$  indicam as derivadas de  $\hat{W}$  com respeito a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , respectivamente. A Equação (2.29) fica:

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial \eta}(\lambda_1, \lambda_2, \eta) = 0, \quad (2.32)$$

lembrando que agora  $\eta$  é dado implicitamente por  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  apenas.

A nova função de energia quando  $\eta$  está inativo,  $\hat{W}_0$ , é equivalente a:

$$\hat{W}_0(\lambda_1, \lambda_2) = \hat{W}(\lambda_1, \lambda_2, 1), \quad (2.33)$$

a qual é a especialização isotrópica de (2.2), sendo (2.33) a função de energia quando  $\eta$  está inativo. Então, a Equação (2.31) quando  $\eta$  está inativo pode ser escrita como:

$$\sigma_{0\alpha} - \sigma_{03} = \lambda_\alpha \hat{W}_{0,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.34)$$

ou escrita em função da tensão de Biot:

$$t_{0\alpha} - t_{03} = \hat{W}_{0,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.35)$$

onde o subíndice 0 indica que  $\eta$  está inativo e a vírgula indica uma derivada em relação a  $\lambda_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ).

As condições sobre  $W_0$  ficam sendo:

$$\hat{W}_0(1, 1) = 0, \quad \hat{W}_{0,\alpha}(1, 1) = 0, \quad \hat{W}_{0,12} = 2\mu, \quad \hat{W}_{0,\alpha\alpha} = 4\mu, \quad (2.36)$$

onde  $\mu$  é o módulo de cisalhamento transversal do material na configuração indeformada ( $\Omega_0$ ) e  $\alpha$  assume os valores 1 ou 2 sem somatório.

Já quando  $\eta$  está ativo, assume-se que (2.32) pode ser resolvida explicitamente para  $\eta$ . Utilizando-se a notação de (2.6) escreve-se, nesse caso:

$$\eta = \eta_e(\lambda_1, \lambda_2) = \eta_e(\lambda_2, \lambda_1). \quad (2.37)$$

Como agora  $\eta_e$  tem dependência dos alongamentos principais, pode-se escrever a Equação da energia de deformação em função apenas destes, que para o caso específico de isotropia ( $\hat{w}$ ) fica:

$$\hat{w}(\lambda_1, \lambda_2) \equiv \hat{W}(\lambda_1, \lambda_2, \eta_e(\lambda_1, \lambda_2)). \quad (2.38)$$

Das Equações (2.31), (2.32) e (2.38) segue que:

$$\sigma_\alpha - \sigma_3 = \lambda_\alpha \frac{\partial \hat{w}}{\partial \lambda_\alpha} = \lambda_\alpha \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.39)$$

### Carregamento Uniaxial

Quando se considera tensão uniaxial, é possível escrever  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , e diz-se que  $\sigma = \sigma_1$  (Ogden e Roxburgh, 1999). Para esse caso também se escreve  $\lambda = \lambda_1$ , então  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-1/2}$  (Marczak et al., 2007). Por fim, define-se a pseudo-função energia de deformação para tração uniaxial,  $W^T$ , como:

$$W^T(\lambda, \eta) = \hat{W}(\lambda, \lambda^{-1/2}, \eta). \quad (2.40)$$

As Equações (2.32) e (2.39) para o caso de tração uniaxial ficam:

$$W^T_{,\eta}(\lambda, \eta) = 0, \quad \sigma = \lambda W^T_{,\lambda}(\lambda, \eta) \equiv \lambda t, \quad (2.41)$$

onde  $t = t_1$  é a tensão principal de Biot (Ogden e Roxburgh, 1999).

Das Equações (2.41), é possível identificar que:

$$\frac{\partial t}{\partial \lambda} = W^T_{,\lambda\lambda} - (W^T_{,\lambda\eta})^2 / W^T_{,\eta\eta}. \quad (2.42)$$

A Equação (2.42) mostra que a inclusão da variável  $\eta$  não modifica a relação constitutiva do material,  $W^T_{,\lambda\lambda}$ , quando  $\eta = 1$  pois a diferenciação de  $W^T$  em relação a  $\eta$  é zero.

Definindo  $W_0^T$  para o caso em que  $\eta$  está inativo, pode-se dizer que  $W_0^T(\lambda) = W^T(\lambda, 1)$ . Neste caso as condições (2.36) podem ser reescritas para tração uniaxial como:

$$W_0^T(1) = W_0^{T'}(1) = 0, \quad W_0^{T''}(1) = 3\mu, \quad (2.43)$$

onde os apóstrofos, indicam diferenciação com relação a  $\lambda$ .

### Carregamento equibiaxial

Um estado de deformações equibiaxiais é equivalente a um estado de deformações local imposto a uma casca esférica inflada (Ogden, 1997). Para caso específico para esforços equibiaxiais, assume-se que  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ ,  $\lambda_1 = \lambda^{-2}$ , tal que  $\sigma_2 = \sigma_3$ . Especializando-se as Equações (2.32) e (2.39) para este caso e definindo uma nova forma da função energia para o caso de deformações equibiaxiais,  $W^B$ , obtém-se:

$$W^B(\lambda, \eta) = \hat{W}(\lambda^{-2}, \lambda, \eta). \quad (2.44)$$

As tensões específicas para este caso, provenientes de (2.39), ficam:

$$2(\sigma_2 - \sigma_1) = \lambda W^B_{,\lambda}(\lambda, \eta), \quad (2.45)$$

enquanto (2.32) se resume a:

$$W^B_{,\eta}(\lambda, \eta) = 0. \quad (2.46)$$

Para o caso em que  $\eta$  esteja inativo, escreve-se:

$$W_0^B(\lambda) = W^B(\lambda, 1). \quad (2.47)$$

Por fim, as restrições impostas sobre  $W_0^B$ , análogas a (2.36), são:

$$W_0^B(1) = W_0^{B'}(1) = 0, \quad W_0^{B''}(1) = 12\mu \quad (2.48)$$

### Carregamento planar e cisalhamento puro

Para este caso de estudo, é necessário levar em consideração o estado plano de deformações, então  $\lambda_3 = 1$  (Ogden e Roxburgh, 1999), então utiliza-se a notação:

$$\lambda = \lambda_1, \quad \lambda_2 = \lambda^{-1}. \quad (2.49)$$

A pseudo energia de deformação para esse caso,  $W^S$ , em função de  $\lambda$ , é dada por:

$$W^S(\lambda, \eta) \equiv \hat{W}(\lambda, \lambda^{-1}, \eta), \quad (2.50)$$

e as Equações (2.32) e (2.39) ficam:

$$W^S_{,\eta} = 0, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \lambda W^S_{,\lambda}. \quad (2.51)$$

Agora, reescrevendo-se o carregamento planar para deformações cisalhantes, a *deformação cisalhante*, definida como  $\gamma$ , é dada em termos dos alongamentos como:

$$\gamma = \lambda - \lambda^{-1}, \quad (2.52)$$

onde, sem perda de generalidade,  $\lambda \geq 1$  corresponde a  $\gamma \geq 0$ .

Com o intuito de escrever a pseudo função energia em termos de  $\gamma$ , utiliza-se a notação  $\overline{W}$ , definida como:

$$\overline{W}(\gamma, \eta) \equiv W^S(\lambda, \eta). \quad (2.53)$$

Assim, assumindo que o cisalhamento puro acontece na direção  $X_1$  (vetor posição indeformado no plano 1-2, Seção 2.1), a tensão de cisalhamento puro  $\sigma_{12}$  fica:

$$\tau = \sigma_{12} = \overline{W}_{,\gamma}(\gamma, \eta), \quad (2.54)$$

então:

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} = \gamma \sigma_{12} = \gamma \tau, \quad (2.55)$$

onde  $\sigma_{11}$  e  $\sigma_{22}$  são as componentes normais do tensor de tensões de Cauchy. A Equação (2.51) pode agora ser escrita em função de  $\gamma$ , como:

$$\overline{W}_{,\eta}(\gamma, \eta) = 0, \quad (2.56)$$

a qual indica que  $\eta$  é dada em termos de  $\gamma$  quando  $\eta$  está ativo. Normalmente essa relação é dada implicitamente.

Quando  $\eta$  está inativo, define-se uma nova função energia que pode ser escrita como:

$$\overline{W}_0 = \overline{W}(\gamma, 1), \quad (2.57)$$

sendo que  $\overline{W}_0$  fica restrito às seguintes propriedades:

$$\overline{W}_0(0) = \overline{W}'_0(0) = 0, \quad \overline{W}''_0(0) = \mu, \quad (2.58)$$

onde esta é a contrapartida de (2.36) para cisalhamento puro, porém nesse as derivadas são em relação a  $\gamma$ .

## 2.2 O Efeito Mullins idealizado

Esta seção tem o objetivo de discutir o efeito Mullins idealizado, o qual não leva em conta deformações permanentes no material, isto é, quando as cargas externas são retiradas do material os alongamentos  $\lambda_\alpha$  são unitários (para  $\alpha = 1, 2, 3$ ). A curva de comportamento do material em um caso de carregamento monotônico (sem descarregamento) é considerada

a curva de carregamento primária. Quando um carregamento seguido de descarregamento ocorre, a curva de descarregamento se torna a curva de carregamento para um novo ciclo de carga até que o ponto de máximo carregamento seja alcançado novamente (Figura 1.1). Neste caso, o comportamento do material será igual ao da curva de carregamento primária.

Essa metodologia com o efeito Mullins idealizado gera bons resultados (Dorfmann e Ogden, 2003). Além disso, a definição apresentada se aplica a qualquer ponto da curva de carregamento primária na qual o descarregamento se inicia.

No restante dessa seção é discutida a forma como Ogden e Roxburgh, 1999, trataram o efeito Mullins idealizado sem definição das variáveis de amolecimento, e a seção seguinte foca os parâmetros de amolecimento propostos por Ogden e Roxburgh, 1999, e Dorfmann e Ogden, 2003. O material é considerado isotrópico, tanto antes quanto depois da deformação (o efeito Mullins idealizado). Primeiramente o material é considerado incompressível, assim as deformações independentes ocorrem no plano (1,2), ou seja  $\lambda_3 = \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}$ . Por isso escreve-se:

$$\hat{W}(\lambda_1, \lambda_2, \eta) = \eta \hat{W}_0(\lambda_1, \lambda_2) + \phi(\eta) , \quad \phi(1) = 0, \quad (2.59)$$

então é possível calcular as tensões através de :

$$\sigma_\alpha - \sigma_3 = \eta \lambda_\alpha \frac{\partial \hat{W}_0}{\partial \lambda_\alpha} = \eta (\sigma_{0\alpha} - \sigma_{03}) , \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.60)$$

onde  $\sigma_{0\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) indicam as tensões calculadas quando  $\eta$  está inativo nas direções 1, 2 ou 3.

Já a Equação (2.25) fica:

$$\phi'(\eta) = -\hat{W}_0(\lambda_1, \lambda_2), \quad (2.61)$$

que implicitamente define o parâmetro de amolecimento  $\eta$  em função dos alongamentos.

Além das restrições impostas sobre  $\hat{W}_0$  em (2.36),  $\hat{W}_0$  deve possuir um mínimo global nulo em  $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 1)$  e também não pode possuir um ponto estacionário no espaço- $(\lambda_1, \lambda_2)$ . Caso contrário, poderiam ocorrer, para um mesmo caso de carregamento externo, diferentes estados de deformações (Holzapfel, 2000).

Como definido na Seção 2.1.4, a tensão de Biot para o caso de tensão uniaxial é:

$$t = \eta W_0^{T'}(\lambda) = \eta t_0, \quad (2.62)$$

onde  $t_0$  é a tensão de Biot no carregamento primário (sem que ocorram descarregamentos, quando o material é virgem), para um mesmo valor de  $\lambda$ . Para que (2.62) prediga o amolecimento governado por (2.59) quando  $\eta$  está ativo, deve-se ter  $\eta \leq 1$  no descarregamento, com igualdade apenas onde o descarregamento inicia. Também deve-se assumir  $\eta > 0$  para que  $t$  permaneça positivo durante o descarregamento até  $\lambda = 1$ . Sendo assim, não existirá deformação residual, como propõe o efeito Mullins idealizado.

Para o caso de tração uniaxial (2.61) pode ser reescrita como:

$$\phi'(\eta) = -W_0^T(\lambda). \quad (2.63)$$

A qual sendo diferenciada em relação a  $\lambda$  fica:

$$\phi''(\eta) \frac{d\eta}{d\lambda} = -W_0^{T'}(\lambda). \quad (2.64)$$

Das restrições analisadas acima, associa-se o descarregamento a uma redução no valor de  $\eta$ . Visto que  $t_0 \equiv W_0^{T'}(\lambda) > 1$  para  $\lambda > 1$ , pode-se afirmar a partir da Equação (2.64) que:

$$\phi''(\eta) < 0. \quad (2.65)$$

A relação (2.65) será considerada válida no restante dessa seção. Assim,  $\phi'(\eta)$  é uma função monotonicamente decrescente de  $\eta$  que é unicamente determinada por (2.61) como uma função de  $W_0^T(\lambda)$ . Mais genericamente, para deformações biaxiais, essa condição garante que  $\eta$  é unicamente determinado como uma função da energia de carregamento  $\hat{W}_0(\lambda_1, \lambda_2)$ .

É importante ressaltar que  $\eta$  depende também do maior valor do alongamento principal no qual o descarregamento foi iniciado,  $\lambda_m$ , assim como das formas específicas de  $W_0^T(\lambda)$  e  $\phi(\eta)$  empregadas. Como  $\eta = 1$  em qualquer ponto do carregamento primário, quando o

descarregamento se inicia, tem-se:

$$\phi'(1) = -W_0^T(\lambda_m), \quad W_0^T(\lambda_m) \equiv W_m, \quad (2.66)$$

que é a definição de  $W_m$ , ou seja, sendo ele o valor máximo da energia atingido no carregamento primário. Assim como  $W_0^T$ ,  $W_m$  aumenta seguindo o carregamento primário. Também conforme a Equação (2.66), é possível afirmar que a função  $\phi$  depende implicitamente do ponto em que o descarregamento começou, já que depende da energia armazenada para atingir esse ponto ( $W_m$ ).

Quando o material é totalmente descarregado ( $\lambda = 1$ ),  $\eta$  atinge seu valor mínimo,  $\eta_m$ . Isso pode ser determinado facilmente através de:

$$\phi'(\eta_m) = -W_0^T(1) = 0. \quad (2.67)$$

Como  $\phi$  depende do ponto no qual o descarregamento foi iniciado,  $\eta_m$  também apresenta esta dependência. Assim, quando o material está totalmente descarregado, a pseudo função energia de deformação tem o valor residual definido por:

$$\hat{W}(1, 1, \eta_m) = \phi(\eta_m). \quad (2.68)$$

Isto se aplica para os casos de tensão uniaxial e equibiaxial. Nesses casos a energia residual (dissipada)  $\phi(\eta_m)$  pode ser interpretada como uma medida da energia necessária para causar danificação ao material, e o material só modificará seu valor de  $W_m$  quando ultrapassar seu máximo carregamento (obtendo-se um novo valor de  $\lambda_m$  e  $W_m$ ). Em tensão uniaxial,  $\phi(\eta_m)$  equivale à área entre a curva de carregamento primário e seu descarregamento equivalente.

### 2.3 Parâmetros de amolecimento

Nessa seção serão apresentados os modelos propostos por Ogden e Roxburgh, 1999, e Dorfmann e Ogden, 2003, para as funções  $\eta$  e  $\phi(\eta)$ .

### 2.3.1 Parâmetro de amolecimento de Ogden e Roxburgh

Ogden e Roxburgh, 1999, propuseram uma função  $\eta$ , de forma que a mesma mantivesse a restrição  $\phi''(\eta) < 0$  utilizando a função erro,  $\text{erf}$ , tal que:

$$\eta = 1 - \frac{1}{r} \text{erf} \left( \frac{W_m - W_0(\lambda)}{m} \right), \quad (2.69)$$

onde  $r$  e  $m$  são constantes do material a serem determinadas experimentalmente. A constante  $r$  deve respeitar a condição  $r > 1$  e a constante  $m$  deve ser positiva para garantir que  $\eta$  será sempre positiva. Além disso, respeitando-se essas desigualdades é possível garantir que  $W_0(\lambda) \leq W_m$  além de  $0 < \eta \leq 1$  ( $W_m$  é o maior valor de  $W_0(\lambda)$  no processo). Dessa forma o valor mínimo de  $\eta$ ,  $\eta_{min}$ , é dado por:

$$\eta_{min} = 1 - \frac{1}{r} \text{erf} \left( \frac{W_m}{m} \right), \quad (2.70)$$

e a taxa de dissipação pode ser escrita explicitamente como:

$$\dot{\phi}(\eta_{min}) = \frac{1}{r} \text{erf} \left( \frac{W_m}{m} \right) \dot{W}_m. \quad (2.71)$$

Contudo, não é possível integrar o inverso da função erro para obter uma expressão analítica para  $\phi(\eta)$  (Ogden e Roxburgh, 1999). A inversa da função erro pode ser calculada através de séries de Maclaurin, ou então de outra forma numérica respeitando a condição  $\text{erf}^{-1}(\text{erf}(x)) = x$  (Blair et al., 1976). Porém não há uma forma direta de calculá-la, por isso  $\phi$  é apenas indicada como:

$$\phi(\eta) = \int_1^\eta \{m \text{erf}^{-1}[r(\eta - 1)] - W_m\} d\eta \quad (2.72)$$

onde  $\text{erf}^{-1}$  é a inversa da função erro.

### 2.3.2 Parâmetro de amolecimento de Dorfmann e Ogden

A outra proposta para a função  $\eta$  (Dorfmann e Ogden, 2003) é dada por:

$$\eta = 1 - \frac{1}{r} \tanh \left( \frac{W_m - W_0(\lambda)}{m} \right), \quad (2.73)$$

onde  $\tanh$  é a função tangente hiperbólica.

Neste caso, o valor mínimo da função  $\eta$  será:

$$\eta_{min} = 1 - \frac{1}{r} \tanh\left(\frac{W_m}{m}\right). \quad (2.74)$$

Diferente da proposta de Ogden e Roxburgh, 1999, a utilização da função  $\tanh$  permite a integração de sua inversa. Por essa razão é possível escrever a função  $\phi(\eta)$ , como:

$$\phi(\eta) = -m (\eta - 1) \tanh^{-1}[r(\eta - 1)] - W_m(\eta - 1) - \frac{m}{2r} \ln [1 - r^2(\eta - 1)^2]. \quad (2.75)$$

Não há necessidade do cálculo de  $\phi(\eta)$  para a resolução do problema mecânico, porém caso haja interesse em saber seu valor, a formulação de Dorfmann e Ogden, 2003, permite esse cálculo de forma direta, não havendo necessidade de integração numérica.

## 2.4 Modelos constitutivos hiperelásticos

Nesta seção os modelos hiperelásticos empregados neste estudo são apresentados de forma sucinta. As equações apresentadas são basicamente a função energia de deformação (sem dissipação) e as relações constitutivas para tração uniaxial, equibiaxial e cisalhamento puro. Os modelos hiperelásticos utilizados foram Ogden incompressível três termos (OI3) e Hoss-Marczak incompressível de grandes deformações (*Hoss-Marczak Incompressible - High Strain*, HMI-HS).

Inicialmente se postula uma função energia de deformação (Holzapfel, 2000) que representa a energia de deformação armazenada no material. A função energia de deformação,  $W_0$ , depende do gradiente de deformação  $\mathbf{F}$ . Então a relação constitutiva pode ser obtida como (Holzapfel, 2000):

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = J^{-1} \frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T, \quad (2.76)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}_0$  é o tensor tensão de Cauchy e  $J$  é o Jacobiano ( $J = \det \mathbf{F}$ ).

Este estudo considera a incompressibilidade do material, então  $\det(\mathbf{F}) = 1$ , que é equivalente a dizer que  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ , e  $J = 1$ . Com isso, pode-se reduzir o número de

alongamentos principais através da relação  $\lambda_3 = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1}$ , e a tensão de Cauchy pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T - p \mathbf{I}, \quad (2.77)$$

onde  $p$  é a pressão hidrostática. Assim pode-se reescrever a tensão em função dos alongamentos principais como (2.26):

$$\sigma_{0i} = \lambda_i \frac{\partial W_0}{\partial \lambda_i} - p = \lambda_i \frac{\partial W_0}{\partial \lambda_i} - \lambda_3 \frac{\partial W_0}{\partial \lambda_3}, \quad i = 1, 2, \quad (2.78)$$

onde o subíndice  $i$  indica a direção principal, e a tensão na direção  $i = 3$  deve ser conhecida. Nos três casos de carregamentos aqui estudados, a tensão na direção 3 é nula, então basta igualar  $\sigma_{03}$  a zero e encontrar  $p$ .

O modelo HMI-HS é escrito em função dos invariantes, por esse motivo os mesmos são apresentados em função dos alongamentos principais (já que as relações constitutivas foram definidas em função dos alongamentos principais), como segue:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad I_2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2}. \quad (2.79)$$

Nos resultados apresentados nos gráficos, foi utilizada a tensão de engenharia e não a tensão de Cauchy que é definida como:

$$t_{0i} = \frac{\sigma_{0i}}{\lambda_i}. \quad (2.80)$$

#### 2.4.1 Modelo hiperelástico de Ogden 3 termos (OI3)

O modelo hiperelástico de Ogden é um modelo bem conhecido e utilizado, sendo escrito como um somatório de até  $n$ -termos, que normalmente é truncado com  $n = 3$  (Dorfmann e Ogden, 2003). Sua função energia de deformação é dada por:

$$W_0 = \sum_{p=1}^3 \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3), \quad (2.81)$$

onde  $\mu_p$  e  $\alpha_p$  são as constantes do material,  $\lambda_p$  são os alongamentos principais (para  $p = 1, 2, 3$ ) e  $W_0$  é a função energia de deformação que desconsidera o amolecimento do material. O somatório de  $\mu_p$  indica a rigidez do material quando  $\lambda = 1$ .

Utilizando a restrição de incompressibilidade sobre os alongamentos principais (isotropia) para o caso de tração uniaxial, é possível simplificar os alongamentos assumindo que  $\lambda = \lambda_1$  e  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-1/2}$ . Então, para o caso de tração uniaxial, a relação constitutiva é:

$$\sigma_0^T = 2 \left( \sum_{p=1}^3 \mu_p (\lambda^{\alpha_p-1} - \lambda^{-\alpha_p/2-1}) \right), \quad (2.82)$$

onde  $\sigma_0^T$  é a tensão de Cauchy para tração uniaxial, sem considerar amolecimento.

Para o caso de tração equibiaxial, os alongamentos principais são  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  e  $\lambda_3 = \lambda^{-2}$ , sendo assim a relação constitutiva fica:

$$\sigma_0^B = \left( \sum_{p=1}^3 \mu_p (\lambda^{\alpha_p-1} - \lambda^{-2\alpha_p-1}) \right). \quad (2.83)$$

Finalmente para o cisalhamento puro, assume-se que  $\lambda_3 = 1$ ,  $\lambda_1 = \lambda$  e  $\lambda_2 = \lambda^{-1}$ , sendo a relação constitutiva:

$$\sigma_0^S = 2 \left( \sum_{p=1}^3 \mu_p (\lambda^{\alpha_p-1} - \lambda^{-\alpha_p-1}) \right). \quad (2.84)$$

É importante ressaltar que nas equações acima está sendo apresentado apenas um componente do tensor tensão de Cauchy,  $\sigma_{011}$ . Para tensão uniaxial as outras componentes são zero. No caso equibiaxial de tensões,  $\sigma_{022} = \sigma_{011}$  e o restante das componentes são zero. E no caso de cisalhamento puro,  $\sigma_{022} = -\sigma_{011}$  e as outras componentes são nulas.

#### 2.4.2 Modelo hiperelástico de HMI-HS

O modelo HMI-HS foi desenvolvido com base no estudo de diferentes modelos hiperelásticos (Hoss et al., 2011). Sua função energia de deformação é escrita em termo dos invariantes de deformação e tem a forma:

$$W_0 = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(I_1-3)}) + \frac{\mu}{2b} \left( \left( 1 + \frac{b(I_1-3)}{n} \right)^n - 1 \right) + C_2 \ln \left( \frac{1}{3} I_2 \right), \quad (2.85)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $b$ ,  $n$ ,  $\mu$  e  $C_2$  são as constantes constitutivas do material.

Utilizando a condição de incompressibilidade, a tensão para o caso uniaxial é:

$$\sigma_0^T = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( \alpha e^{-\beta(I_1-3)} + \frac{\mu}{2} \left( 1 + \frac{b(I_1-3)}{n} \right)^{n-1} + \frac{1}{\lambda} \frac{C_2}{I_2} \right). \quad (2.86)$$

O primeiro termo entre parênteses (do lado direito da equação, e que depende exclusivamente de  $\lambda$ ), é relativo à derivada dos invariantes com respeito a  $\lambda$ . A relação constitutiva para tração equibiaxial é dada por:

$$\sigma_0^B = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) \left( \alpha e^{-\beta(I_1-3)} + \frac{\mu}{2} \left( 1 + \frac{b(I_1-3)}{n} \right)^{n-1} + \lambda^2 \frac{C_2}{I_2} \right), \quad (2.87)$$

e para cisalhamento puro:

$$\sigma_0^S = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left( \alpha e^{-\beta(I_1-3)} + \frac{\mu}{2} \left( 1 + \frac{b(I_1-3)}{n} \right)^{n-1} + \frac{C_2}{I_2} \right). \quad (2.88)$$

As mesmas considerações dos componentes do tensor de Cauchy apresentadas na seção anterior são válidas para este modelo.

### 3. PARÂMETROS DE AMOLECIMENTO PROPOSTOS

Neste capítulo são apresentados os parâmetros de amolecimento propostos, assim como os resultados relativos aos ajustes de curva de um material para os modelos de Ogden e Roxburgh, 1999, e Dorfmann e Ogden, 2003. Também será apresentada a dissipação ( $\phi$ ) específica para cada parâmetro de amolecimento. Vale ressaltar que algumas das formas de  $\phi$  não podem ser escritas analiticamente, podendo ser calculadas numericamente, se necessário.

As novas funções de amolecimento  $\eta$  propostas são apresentadas nessa seção na ordem cronológica em que foram propostas, e não necessariamente em uma ordem de evolução dos resultados obtidos. Além disso, são apresentadas as restrições impostas sobre as variáveis do modelo de modo que o valor de  $\eta$  não fique maior do que 1 e acabe causando um enrijecimento do material, efeito contrário ao que se procura modelar.

Antes de propor novos parâmetros de amolecimento, é importante implementar e verificar o comportamento que os parâmetros  $\eta$  apresentados anteriormente tem nos materiais de estudo. Para tanto, foram calculadas as constantes constitutivas para os modelos HMI-HS e OI3 com os parâmetros  $\eta$  propostos por Ogden e Roxburgh, 1999, e Dorfmann e Ogden, 2003, que podem ser visualizados nas Figuras 3.1 e 3.2.

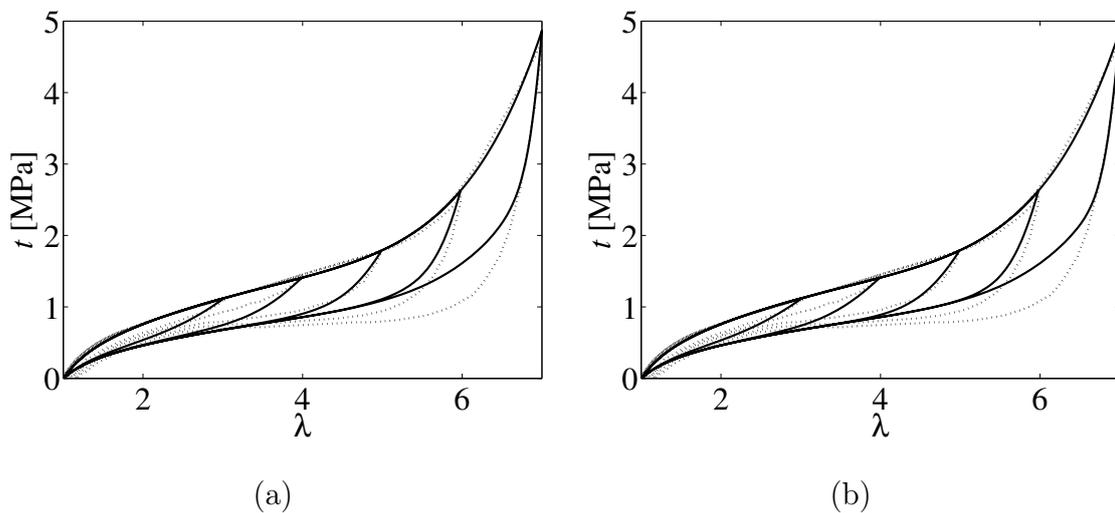


Figura 3.1 – Ensaio de tração uniaxial para Látex utilizando HMI-HS. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a)  $\eta$  segundo Dorfmann e Ogden, 2003. (b)  $\eta$  segundo Ogden e Roxburgh, 1999.

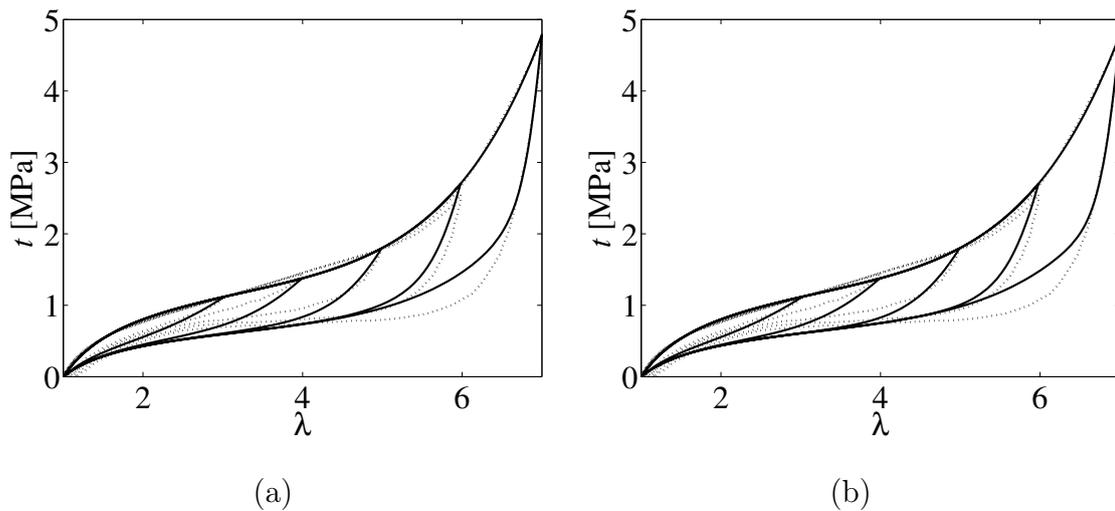


Figura 3.2 – Ensaio de tração uniaxial para Látex utilizando OI3. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a)  $\eta$  segundo Dorfmann e Ogden, 2003. (b)  $\eta$  segundo Ogden e Roxburgh, 1999.

Como é possível visualizar nessas figuras a concordância entre os resultados experimental e teóricos poderia ser melhor, e essa é a principal justificativa para propor novos parâmetros de amolecimento. É importante lembrar que o modelo aqui proposto não tem por intuito modelar a deformação permanente do material, mas isso seria possível através da inclusão de uma nova variável  $\eta$  descrita por Dorfmann e Ogden, 2004:

$$\eta_2 = \frac{\tanh \left[ \left( \frac{W_0(\lambda)}{W_m} \right)^{\alpha(W_m)} \right]}{\tanh(1)}, \quad (3.1)$$

onde  $\eta_2$  é a nova variável interna que governa a deformação permanente (Dorfmann e Ogden, 2004). Nessa abordagem, além da dependência de  $\eta$ ,  $W$  depende de  $\eta_2$ :

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \eta, \eta_2). \quad (3.2)$$

A seguir são apresentados os parâmetros de amolecimento propostos.

### 3.1 Parâmetro de amolecimento com potência $W_m - W_0(\lambda)$

A primeira modificação realizada foi a inclusão de uma potência na função  $\eta$  com o intuito de melhorar o resultado obtido durante o ciclo de descarregamento do material, sendo  $\eta$  escrito como:

$$\eta = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{(W_m - W_0(\lambda))} \tanh\left(\frac{W_m - W_0(\lambda)}{m}\right). \quad (3.3)$$

O valor mínimo desse novo  $\eta$  é:

$$\eta_{min} = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{W_m} \tanh\left(\frac{W_m}{m}\right). \quad (3.4)$$

Porém, devido ao fato de  $W_0$  estar em uma potência e também dentro da tangente hiperbólica, não é possível escrever analiticamente  $\phi(\eta)$ . Mas caso haja interesse nesse potencial, o mesmo pode ser obtido pela integração a cada incremento de deformação aplicado ao material, o que acarreta em um maior esforço computacional. Salienta-se, no entanto que durante a simulação numérica não é necessário o uso do potencial  $\phi(\eta)$  explícito para o cálculo do estado tensional do corpo.

Também é importante ressaltar que a inclusão do  $W_0(\lambda)$  fora da tangente hiperbólica pode resultar no desrespeito da restrição  $0 < \eta \leq 1$ , reduzindo a aplicabilidade para casos onde apenas um ciclo de carregamento é aplicado ou onde os alongamentos máximo e mínimo de todos os ciclos de carga são os mesmos.

### 3.2 Parâmetro de amolecimento com potência $(W_m - W_0(\lambda))^{-1}$

Com intuito de respeitar a restrição  $0 < \eta \leq 1$ ,  $\eta$  foi redefinida como:

$$\eta = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{1/(W_m - W_0(\lambda))} \tanh\left(\frac{W_m - W_0(\lambda)}{m}\right), \quad (3.5)$$

que possui um valor mínimo de:

$$\eta_{min} = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{1/W_m} \tanh\left(\frac{W_m}{m}\right). \quad (3.6)$$

Essa modificação corrige o problema da Equação (3.3). Porém como não é possível isolar  $W_0$  na Equação (3.5), ainda é necessário integrar numericamente  $\phi(\eta)$  para avaliar seu valor, assim como na seção anterior.

Nessa função é necessário ter cuidado quando o material é descarregado pela primeira vez, já que  $W_m$  e  $W_0(\lambda)$  são iguais. Nesse caso, o expoente de  $1/r$  na Equação (3.5) tende a infinito, causando uma descontinuidade. Porém avaliando o limite da função quando  $W_0 \rightarrow W_m$  a função é limitada. Se  $r = 1$  o termo  $1/r \rightarrow 1$ , e caso  $r > 1$ ,  $1/r \rightarrow 0$ . Viabilizando sua utilização sempre que  $r \geq 1$ .

### 3.3 Parâmetro de amolecimento com potência $W_m^{-1}$

Esta proposta tem o intuito de simplificar a formulação de  $\eta$  e permitir que  $\phi(\eta)$  possa ser escrita analiticamente. Por esse motivo, o termo  $W_0(\eta)$  não foi incluído na potência, simplificando a equação (3.5) para:

$$\eta = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{1/W_m} \tanh\left(\frac{W_m - W_0(\lambda)}{m}\right). \quad (3.7)$$

Dessa maneira, o  $\eta_{min}$  é:

$$\eta_{min} = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{1/W_m} \tanh\left(\frac{W_m}{m}\right), \quad (3.8)$$

e isolando  $W_0(\lambda)$  obtém-se:

$$W_0(\lambda) = -\phi'(\eta) = W_m + m \tanh^{-1}\left[r^{1/W_m}(\eta - 1)\right]. \quad (3.9)$$

Integrando a Eq. (3.10) resulta em:

$$\begin{aligned} \phi(\eta) = & -m(\eta - 1) \tanh^{-1}\left[r^{1/W_m}(\eta - 1)\right] - W_m(\eta - 1) + \\ & -\frac{m}{2} \frac{1}{r^{1/W_m}} \ln\left[1 - r^{2/W_m}(\eta - 1)^2\right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

### 3.4 Parâmetro de amolecimento com potência $W_0^{-1}$

Também com o intuito de simplificar a formulação de  $\eta$  a seguinte equação foi proposta:

$$\eta = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{1/W_0(\lambda)} \tanh\left(\frac{W_m - W_0(\lambda)}{m}\right). \quad (3.11)$$

O  $\eta_{min}$  nesse caso é:

$$\eta_{min} = 1 - \tanh\left(\frac{W_m}{m}\right). \quad (3.12)$$

Essa forma da função  $\eta$  não permite a escrita de  $\phi(\eta)$  analiticamente. Então, caso essa função seja necessária, ela deve ser integrada numericamente.

Outra característica desse modelo é que quando  $\lambda$  tende a 1, o termo  $1/r$  tende a zero, fazendo com que o valor de  $\eta$  se aproxime rapidamente de 1, anulando  $\tanh$  e fazendo  $\eta$  se aproximar rapidamente de 1 e desativando o amolecimento.

### 3.5 Parâmetro de amolecimento com potência na tangente hiperbólica

O último parâmetro de amolecimento proposto consiste na inclusão de uma constante que usa como base da potência a tangente hiperbólica. Dessa forma, é possível variar a taxa com que  $\eta$  varia de 1 a um valor menor. Sendo assim, a nova constante do material  $q$  modifica a função para:

$$\eta = 1 - \frac{1}{r} \left[ \tanh\left(\frac{W_m - W_0}{m}\right) \right]^q, \quad (3.13)$$

onde  $r$ ,  $m$  e  $q$  são as constantes do material para o amolecimento. As constantes devem obedecer:  $r \geq 1$ ,  $m > 0$  e  $q > 0$ . Como explicitado anteriormente,  $q$  deve ser positivo, caso contrário a tangente hiperbólica seria invertida e assim a rigidez do material aumentaria, efeito contrário ao que se deseja modelar neste trabalho.

Neste caso  $\eta_{min}$  é escrito como:

$$\eta_{min} = 1 - \frac{1}{r} \left[ \tanh\left(\frac{W_m}{m}\right) \right]^q. \quad (3.14)$$

A função  $\eta$  escrita dessa forma permite escrever  $W_0$  em função de  $\eta$  para que seja possível estimar  $\phi'(\eta)$  e posteriormente  $\phi(\eta)$ .  $\phi'(\eta)$  se torna:

$$\phi'(\eta) = -W_0 = -m \tanh^{-1} \left\{ [-r(\eta - 1)]^{1/q} \right\} - W_m. \quad (3.15)$$

Integrando a equação acima, obtém-se como resultado uma função hiperbólica que pode ser reescrita como um somatório infinito. Com a função hiperbólica obtém-se:

$$\phi(\eta) = \frac{m}{q+1} \eta (r(\eta - 1))^{1/q} {}_2F_1 \left( 1, \frac{q+1}{2}; \frac{q+3}{2}; (r(\eta - 1))^{2/q} \right) - W_m (\eta - 1) + \\ - m (\eta - 1) \tanh^{-1} (r(\eta - 1))^{1/q}. \quad (3.16)$$

onde  ${}_2F_1$  é a função hiperbólica. Utilizando a notação de somatório obtém-se:

$$\phi(\eta) = \frac{m}{q+1} \eta (r(\eta - 1))^{1/q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q+1}{q+2n+1} (r(\eta - 1))^{\frac{2n}{q}} - W_m (\eta - 1) + \\ - m (\eta - 1) \tanh^{-1} (r(\eta - 1))^{1/q}. \quad (3.17)$$

A forma de somatório pode ser utilizada e, de acordo com experimentos preliminares do autor, permite obter bons resultados para um  $n = 3$ . No entanto, vale ressaltar que quando se está analisando unicamente o comportamento mecânico do material não é necessário calcular o valor de  $\phi(\eta)$ . Porém, essas funções podem ser utilizadas caso seja de interesse saber a quantidade de energia que o material dissipou. Outro ponto interessante é que quando se substitui  $q$  por 1 se obtém o mesmo parâmetro de amolecimento proposto por Dorfmann e Ogden, 2003, e o somatório se resume a uma expansão em série de Taylor do logaritmo neperiano, sendo equivalente ao  $\phi(\eta)$  obtido por Dorfmann e Ogden, 2003. Portanto, essa proposta em particular tem caráter geral pois unifica vários modelos de amolecimento, algo não discutido nos trabalhos de Ogden e Roxburgh, 1999, Dorfmann e Ogden, 2003, Dorfmann e Ogden, 2004, e Dorfmann e Pancheri, 2012.

## 4. RESULTADOS

Nesta capítulo são apresentados os resultados gráficos e também o erro utilizando o coeficiente de correlação apresentado na seção 4.2. Os ajustes de curva e gráficos foram gerados com auxílio de um código Matlab, 2010, desenvolvido especialmente para este fim. O ajuste de curvas se baseia na minimização do erro através das funções `ga`, para obter uma estimativa inicial, seguida de `fmincon` ou `fminunc`, a primeira quando havia restrição sobre as variáveis e a segunda quando não havia restrição sobre as variáveis. Essas são funções do software utilizado e são apresentadas em detalhes no manual do mesmo. As Figuras (4.1), (4.2) e (4.3) mostram os fluxogramas de cálculo da relação constitutiva, das constantes do modelo hiperelástico e do modelo de amolecimento, respectivamente.

Os os índices  $T$ ,  $B$  e  $S$  indicam tração (traction), biaxial e cisalhamento (shear), respectivamente. Os erros são calculados como sendo o quadrado da diferença entre os resultados experimentais e teóricos ( $e^* = (t_e - t_t)^2$ ,  $* \in \{T, B, S\}$ ), enquanto o erro total é a soma dos erros individuais ( $e = e^T + e^B + e^S$ ).

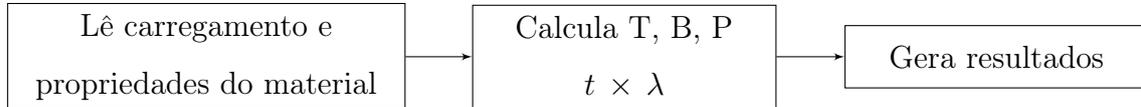


Figura 4.1 – Fluxograma I : Cálculo da relação constitutiva.

Os ajustes foram realizados em duas etapas, inicialmente sem considerar o amolecimento para o modelo constitutivo (Figura 4.2), seguido de outro ajuste para determinação das constantes do parâmetro de amolecimento (Figura 4.3). Sendo que `ga` foi usado para definir uma estimativa inicial seguido de `fmincon` ou `fminunc` para encontrar um mínimo local.

Nesse trabalho, tentou-se realizar os ajustes utilizando apenas o algoritmo genético (`ga`) do Matlab, 2010, por disponibilidade da rotina, porém havia um alto custo computacional para realizar os ajustes com as tolerâncias desejadas. Por essa razão, foi adotada a metodologia mista, que além de ser mais rápida gerava melhores resultados. A metodologia se baseia em utilizar `ga` com 100 iterações e uma população de 600 para que encontrar estimativas das constantes constitutivas. Então com os 21 melhores resultados se utilizou

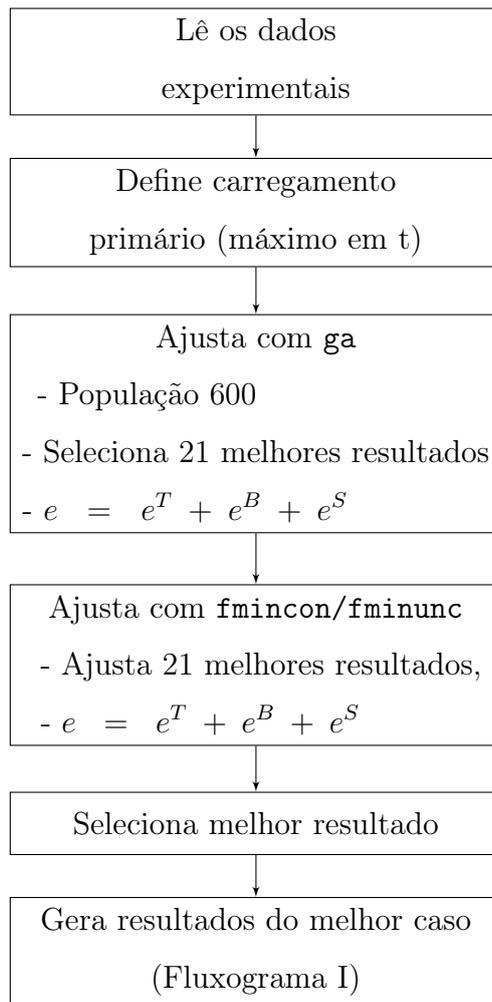


Figura 4.2 – Fluxograma II : cálculo das constantes do modelo hiperelástico.

as funções `fmincon` ou `fminunc`, as quais procuram mínimos locais e convergem com maior facilidade para obter o mínimos local da função. O critério de para foi a variação entre uma iteração e outra fosse menor do que  $10^{-1}$  para ambas as metodologias empregadas. O ganho em tempo para ajustes das constantes de amolecimento será mostrado na seção 4.4.

#### 4.1 Materiais utilizados para comparação

Foram utilizados quatro materiais para a realização deste estudo, sendo que em três deles os resultados experimentais são apenas para tração uniaxial. São eles: látex (Fig. 4.4.a), silicone 1 (Fig. 4.4.b, chamado assim pois o quarto material também se trata de um silicone) e polipropileno (Fig. 4.4.c). É importante lembrar que este trabalho considera

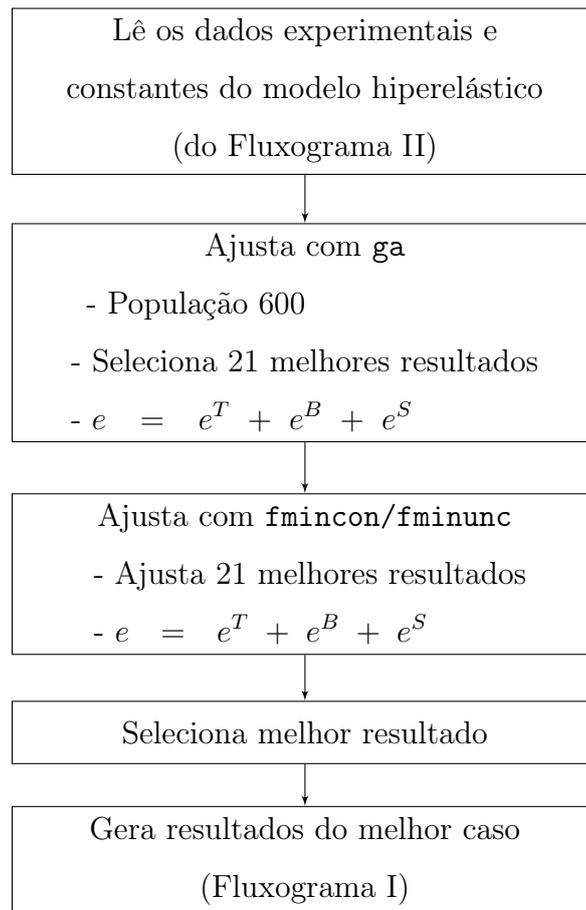


Figura 4.3 – Fluxograma III : cálculo das constantes do modelo de amolecimento.

um amolecimento isotrópico, material incompressível e carregamento quasi-estático, ou seja, não há dependência temporal ou direção preferencial de amolecimento no material mesmo após sofrer deformação. Os dados dos três materiais acima foram retirados de Niemczura e Ravi-Chandar, 2011, Maiti et al., 2014, e Zrida et al., 2009, respectivamente. Foram selecionados por: apresentarem amolecimento significativo, mostrarem curvas  $t \times \lambda$  distintas e variadas e por não serem simulados satisfatoriamente com os modelos de amolecimento tradicionais da literatura.

Também foi utilizado um segundo silicone (silicone 2) com três casos de carregamento (tração uniaxial, equibiaxial e cisalhamento puro), o que permitiu um ajuste multicritério (ajuste para vários ensaios simultaneamente, Stumpf, 2009). É importante realizar essa análise pois esses três casos de carregamento são necessários para definir de forma correta as constantes constitutivas do material para um caso de carregamento composto (Ogden,

1997). Essas curvas podem ser vistas na Figura (4.5), provenientes de Machado et al., 2014.

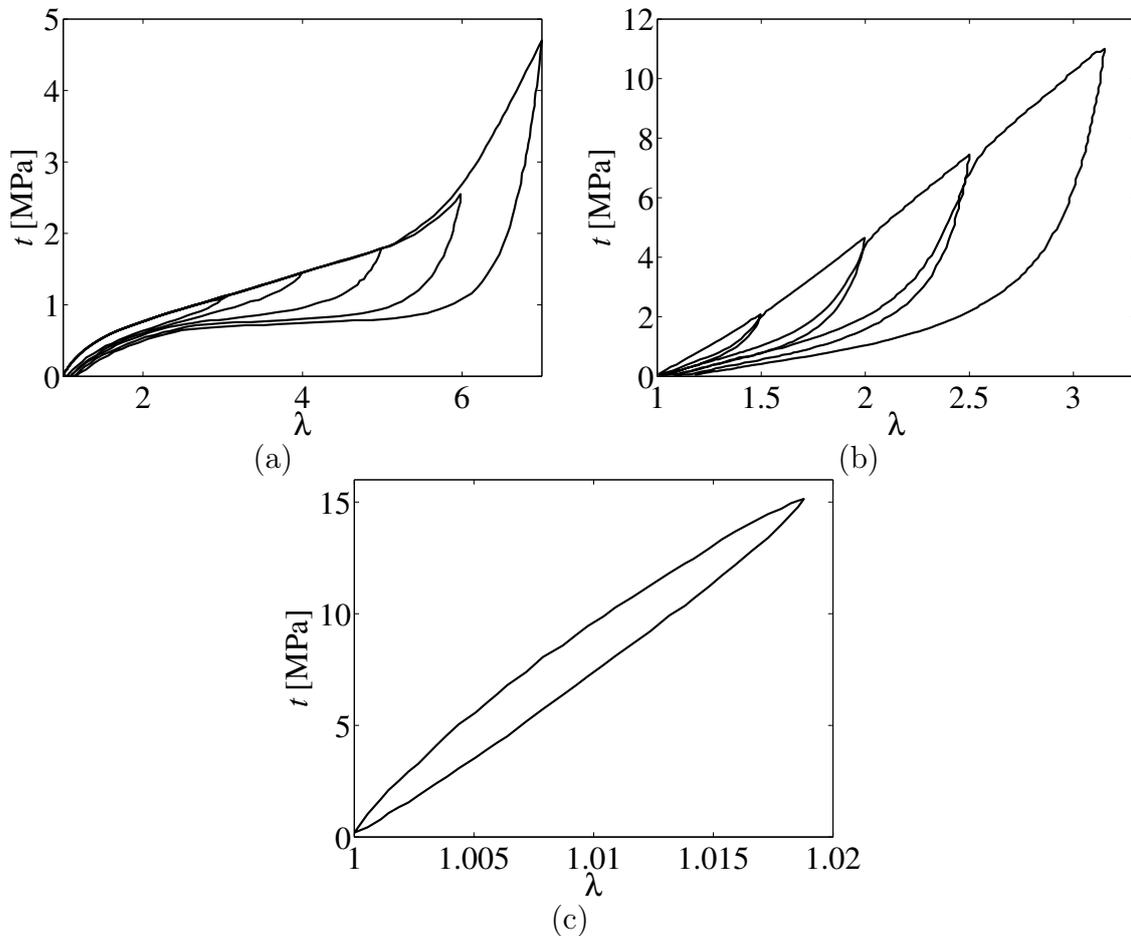


Figura 4.4 – Ensaio de tração uniaxial utilizados para diferentes materiais: (a) látex (Niemczura e Ravi-Chandar, 2011), (b) silicone 1 (Maiti et al., 2014), (c) polipropileno (Zrida et al., 2009).

O látex, ou borracha natural, consiste na polimerização isopreno (poliisopreno) que é então vulcanizado para obtenção das propriedades elásticas. O polipropileno é um material termoplástico que por ser de baixo custo é muito utilizado na indústria com aplicações como: tecidos, copos plásticos, cadeiras, fibras, brinquedos, autopeças e cabos de ferramentas. O silicone 1 consiste de polidimetilsiloxano, que tem grande resistência a temperaturas elevadas, radiação e ataque químico. Por isso é muito utilizado em aplicações desde órgãos artificiais e dispositivos biomédicos até almofadas, revestimentos, adesivos, e barreiras térmicas e elétricas. O silicone 2 é chamado de Rhodorsil RTV3428, e consiste de um silicone com carga que é fornecido como dois componentes líquidos que devem ser misturados e então injetados

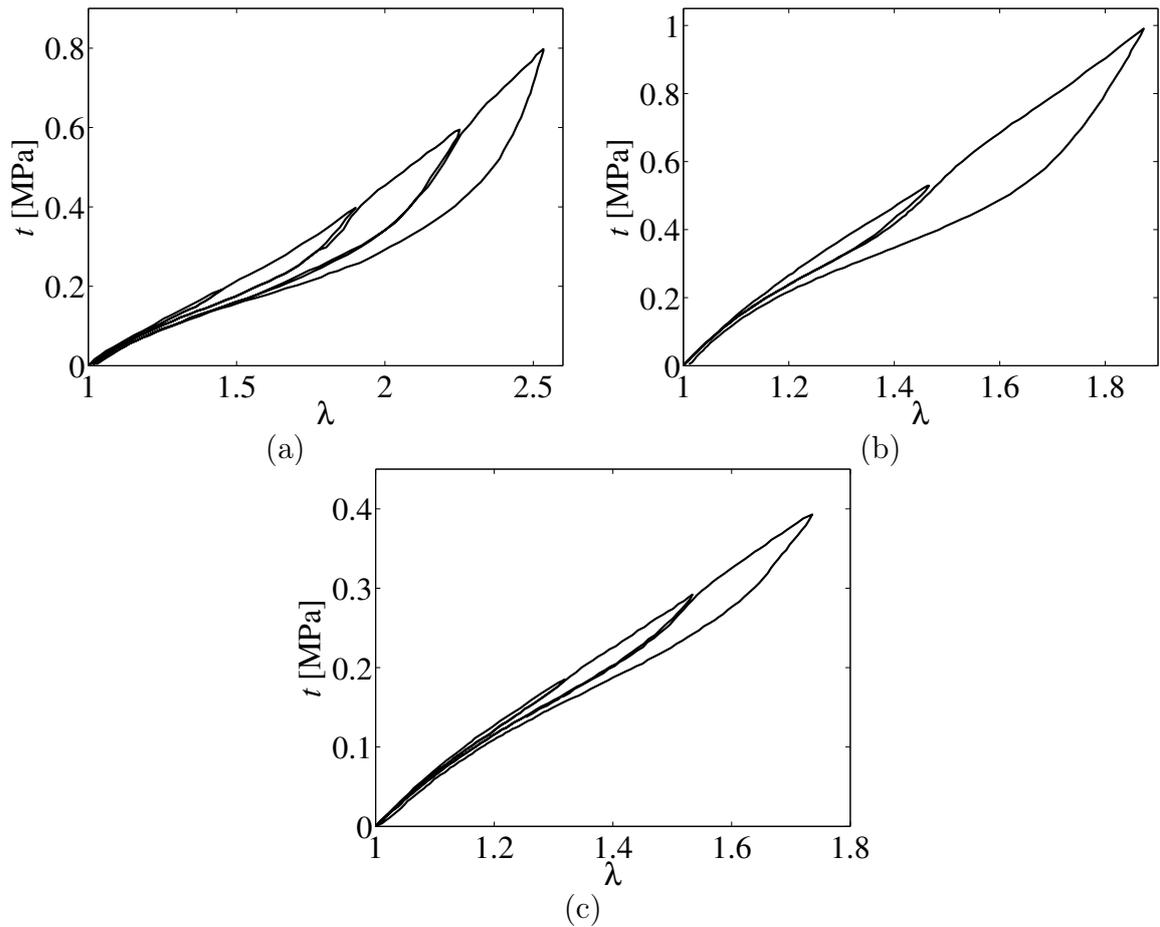


Figura 4.5 – Ensaio de tração uniaxial (a), equibiaxial (b) e cisalhamento puro (c) para o silicone 2 (Machado et al., 2014).

e irão curar a temperatura ambiente. É utilizado principalmente em aplicações aeronáuticas e na fabricação de barcos.

Tecnicamente o polipropileno não se encaixa na categoria de material elastomérico, mas foi incluído aqui para demonstrar a versatilidade da metodologia proposta. Por razão de completude as cadeias moleculares dos componentes são apresentadas abaixo, ambos os silicones apresentam a mesma cadeia molecular porém o segundo tem um processo de cura a frio.

## 4.2 Coeficiente de correlação

Um coeficiente de correlação é necessário para realizar uma comparação quantitativa entre os parâmetros de amolecimento da literatura e os propostos. Para isso, utilizou-se o

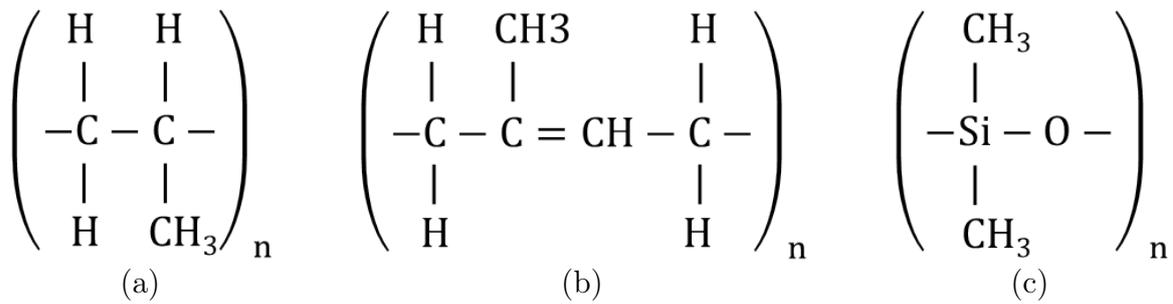


Figura 4.6 – Cadeias moleculares dos componentes estudados: (a) látex (poliisopreno); (b) polipropileno; (c) silicone (polidimetilsiloxano).

parâmetro proposto por Hoss et al., 2011. Este coeficiente de correlação foi desenvolvido para superar os problemas que eram obtidos com o coeficiente de regressão linear, não adequado para ajustes não lineares. O coeficiente de correlação  $\overline{R^2}$  é:

$$\overline{R^2} = 1 - \frac{S_{reg}}{S_{tot}}, \quad (4.1)$$

onde:

$$S_{reg} = \sum_{i=1}^n (t_e - t_t)^2, \quad (4.2)$$

e:

$$S_{tot} = \sum_{i=1}^n w_i (t_e - \bar{t}_e)^2, \quad (4.3)$$

onde  $\overline{R^2}$  pode ser definido de 0 a 1 com a melhora da qualidade do ajuste,  $t_e$  é a tensão experimental,  $t_t$  é a tensão calculada com o modelo,  $\bar{t}_e$  é a média da tensão experimental e  $w_i$  é um parâmetro de peso. No presente trabalho,  $w_i = 1$  foi utilizado.

Este parâmetro de erro calcula os erros em relação à média para os pontos experimentais utilizados, por esse motivo ele se comporta melhor para ajustes não lineares (Hoss et al., 2011).

### 4.3 Resultados dos ajustes de curva

Nessa seção são apresentados os resultados para os casos de carregamento das Figuras 4.4 e 4.5 utilizando os modelos hiperelásticos OI3 e HMI-HS juntamente com os diferentes parâmetros de amolecimento para os materiais apresentados na seção (4.1). Primeiramente são apresentados os resultados encontrados para o látex, silicone 1 e polipropileno (Figura 4.4), então são apresentadas as curvas ajustadas para o silicone 2 (Figura 4.5). Os ajustes para o silicone 2 foram realizados simultaneamente para tração uniaxial, tração equibiaxial e cisalhamento puro, dessa maneira as constantes constitutivas do modelo hiperelástico são as mesmas para os três casos de carregamento.

É importante ressaltar que o látex sofre histerese e não efeito Mullins, então para esse material, a metodologia numérica empregada para os ajustes é diferente das demais. Para este, o valor de  $W_m$  deve ser anulado quando o mesmo é descarregado ( $\lambda = 1$ ) e a função  $\eta$  deve ser também desativada nesse ponto do carregamento. A histerese pode ser representada por essa metodologia pois a deformação mínima é sempre a mesma, nesse caso  $\lambda = 1$  (material não tensionado).

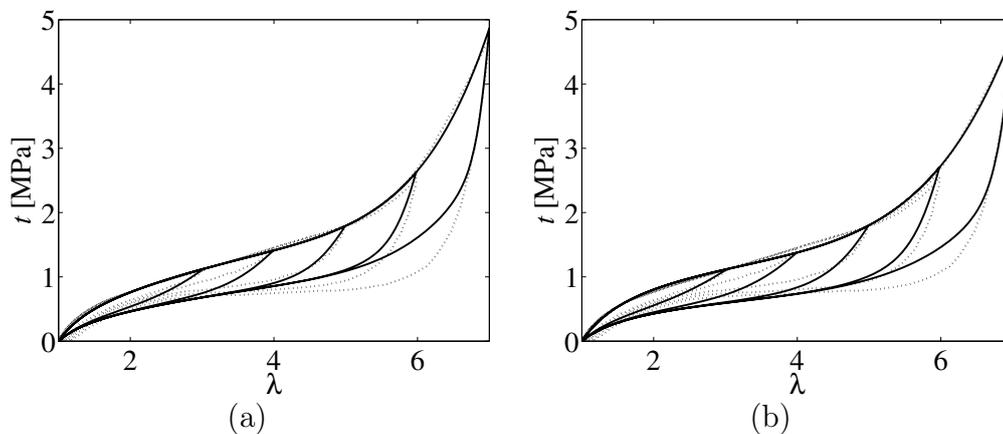


Figura 4.7 – Ajustes para o latex com Dorfmann e Ogden, 2003. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

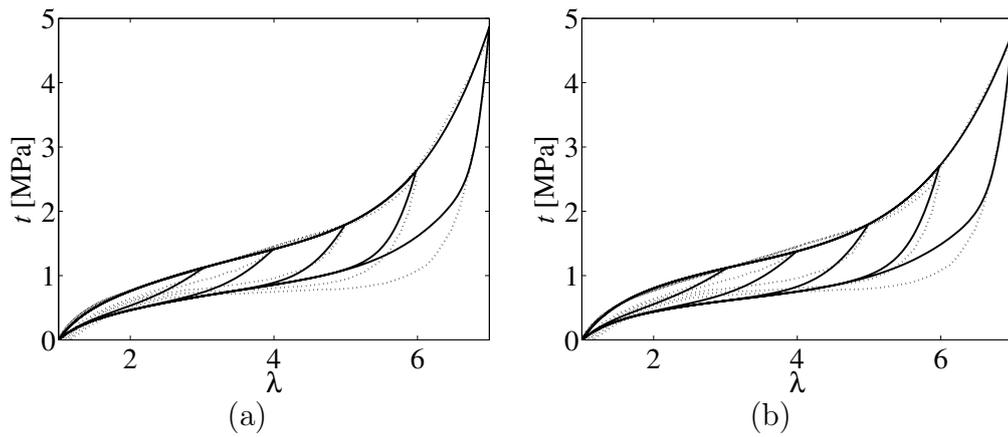


Figura 4.8 – Ajustes para o latex com Ogden e Roxburgh, 1999. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

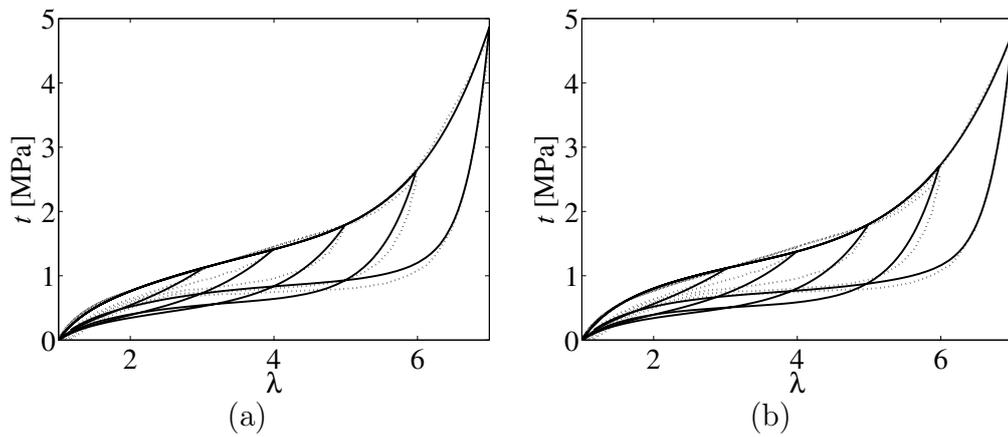


Figura 4.9 – Ajustes para o latex com potência  $(W_m - W_0(\lambda))$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

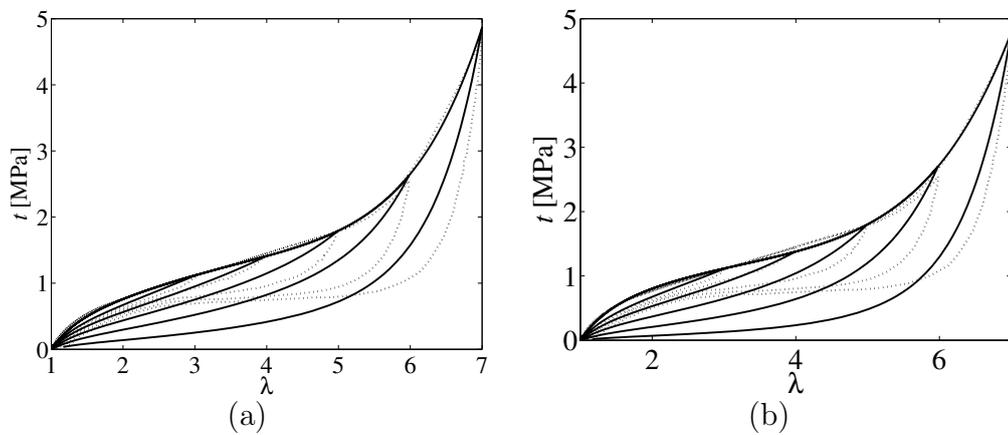


Figura 4.10 – Ajustes para o latex com potência  $(W_m - W_0(\lambda))^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

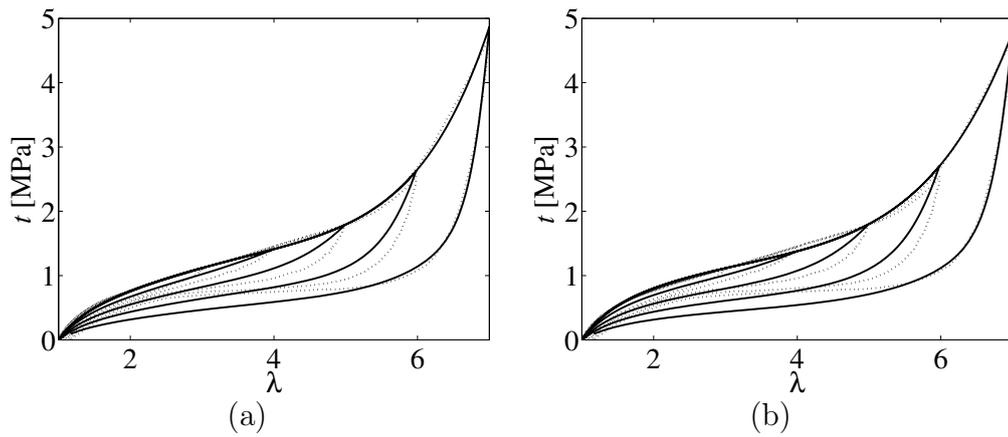


Figura 4.11 – Ajustes para o latex com potência  $W_m^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

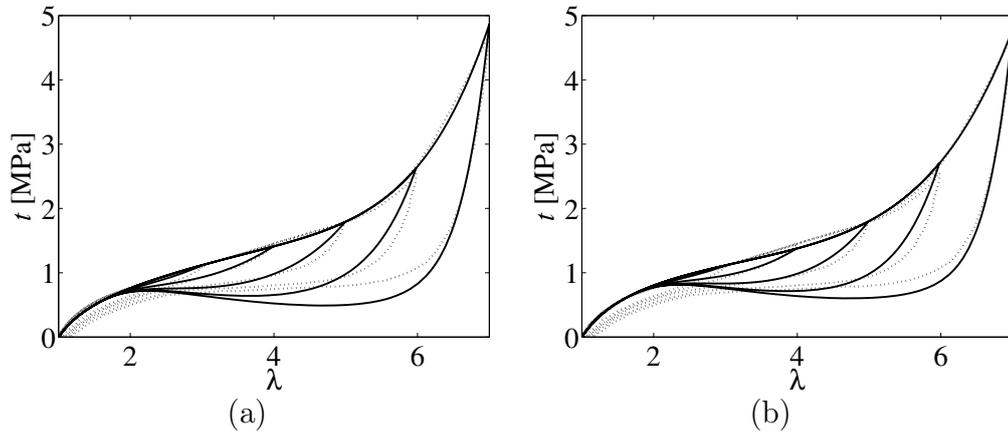


Figura 4.12 – Ajustes para o latex com potência  $W_0^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

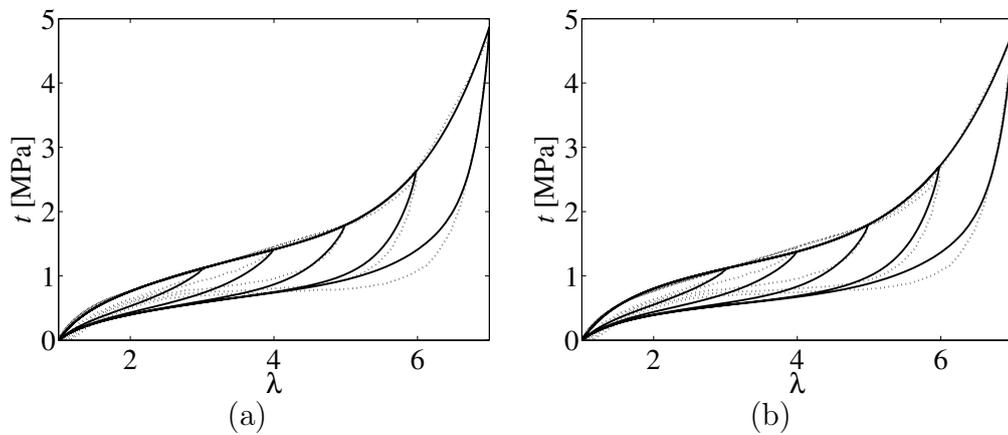


Figura 4.13 – Ajustes para o latex com potência na tangente hiperbólica. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

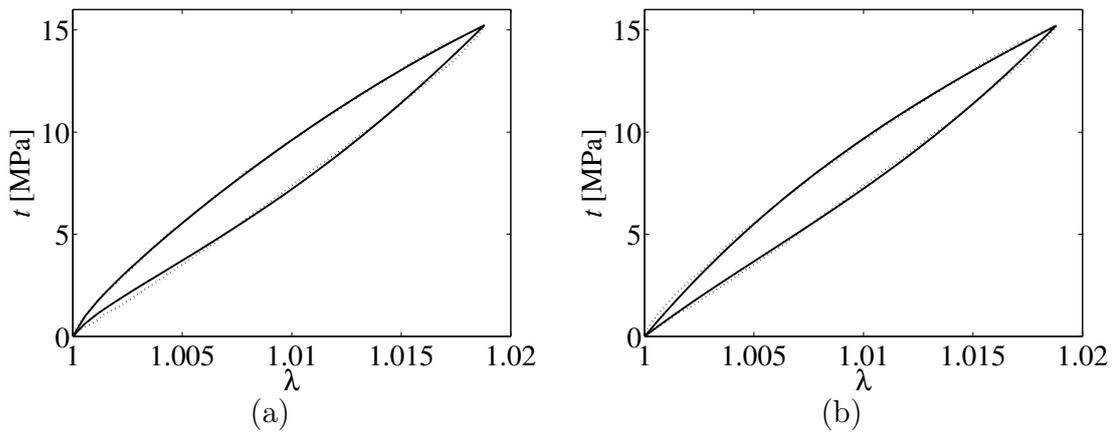


Figura 4.14 – Ajustes para o polipropileno com Dorfmann e Ogden, 2003. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

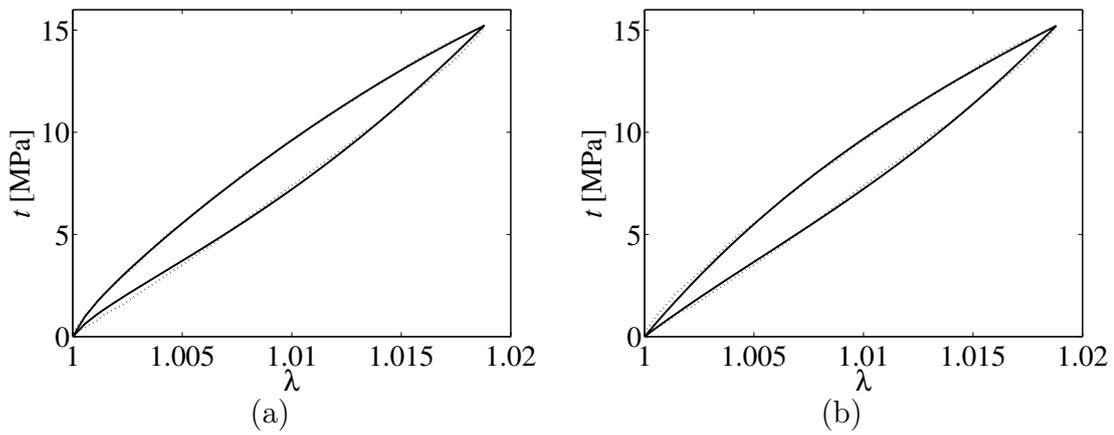


Figura 4.15 – Ajustes para o polipropileno com Ogden e Roxburgh, 1999. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

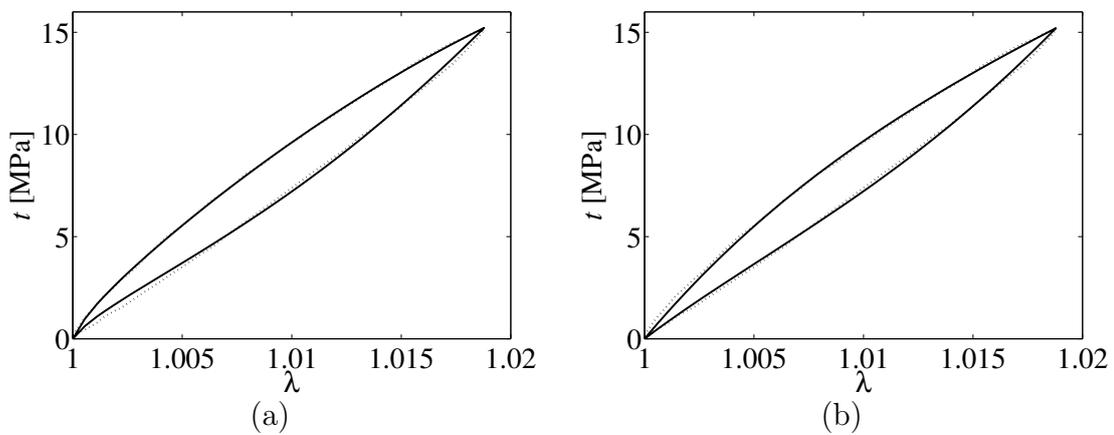


Figura 4.16 – Ajustes para o polipropileno com potência ( $W_m - W_0(\lambda)$ ). Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

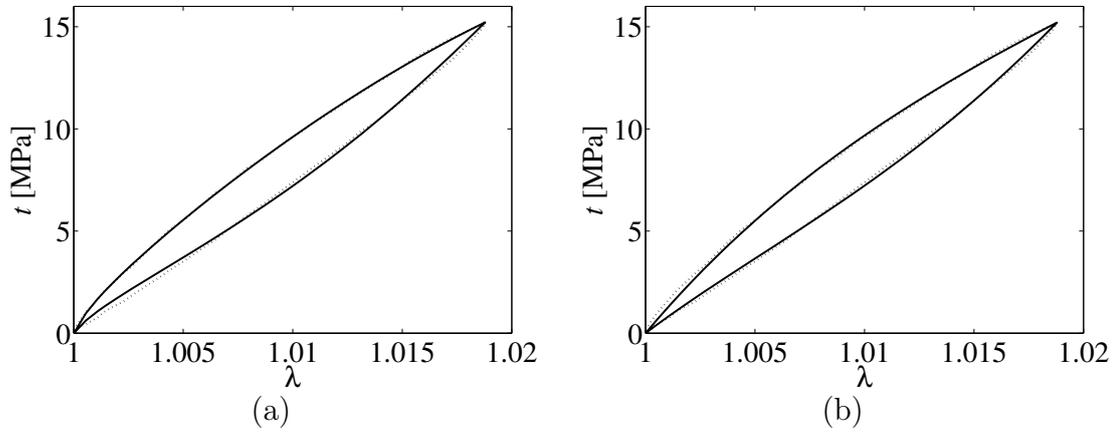


Figura 4.17 – Ajustes para o polipropileno com potência  $(W_m - W_0(\lambda))^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

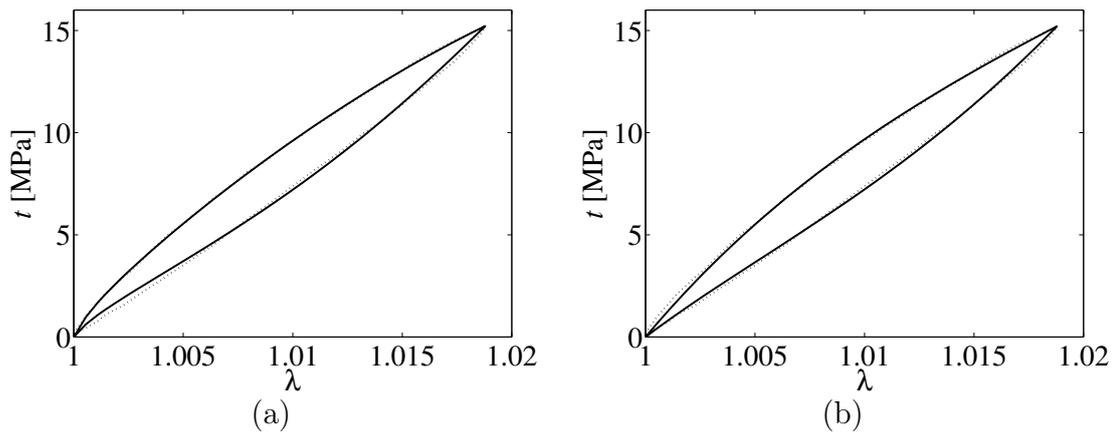


Figura 4.18 – Ajustes para o polipropileno com potência  $W_m^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

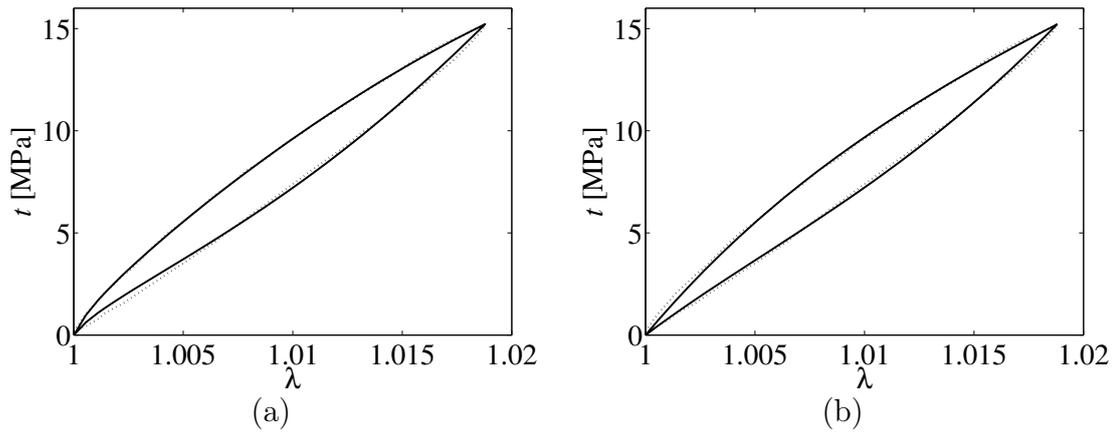


Figura 4.19 – Ajustes para o polipropileno com potência  $W_0^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

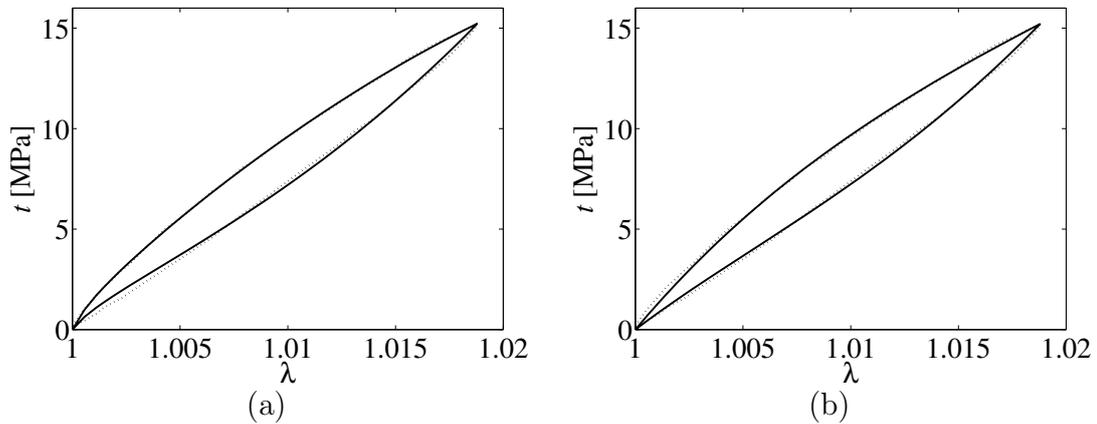


Figura 4.20 – Ajustes para o polipropileno com potência na tangente hiperbólica. Resultados experimentais em linhas tracejadas e teóricos em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

Através de inspeção visual das curvas (Figuras 4.9-4.27) é possível verificar que vários dos parâmetros de amolecimento propostos foram capazes de reproduzir os fenômenos de interesse, Mullins e histerese. No entanto, Dorfmann e Ogden, 2003, Ogden e Roxburgh, 1999, e potência na tangente hiperbólica claramente apresentaram melhores resultados para estes materiais. O parâmetro  $W_0^{-1}$  apresentou um comportamento similar aos resultados obtidos por Mullins e Tobin, 1957, onde o dano do material acontece apenas a partir de um determinado valor de  $\lambda$ , porém este parâmetro apresenta uma descontinuidade que deve ser controlada. Descontinuidade que ocorre pois o expoente tende a infinito conforme  $W_0$  tende a 0, ou ainda quando  $\lambda$  tende a 1 (material sem carregamento externo). Informações adicionais sobre os resultados obtidos por Mullins e Tobin, 1957, podem ser encontrados em Ogden e Roxburgh, 1999, juntamente com sua curva de carregamento.

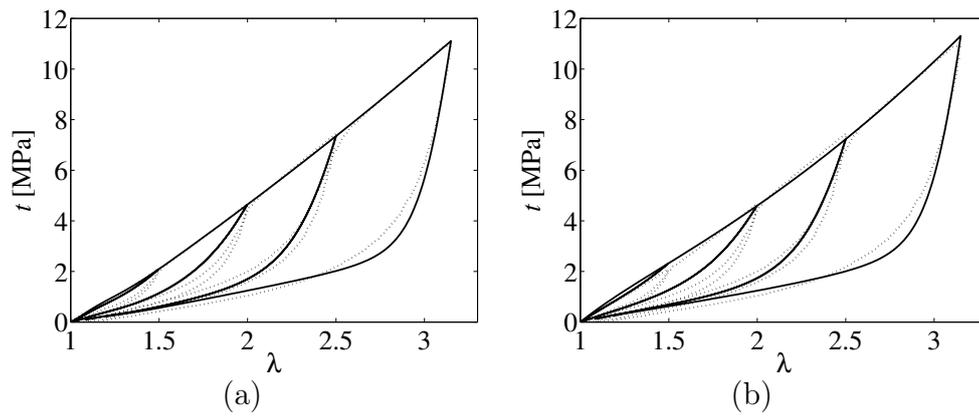


Figura 4.21 – Ajustes para o silicone 1 com Dorfmann e Ogden, 2003. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

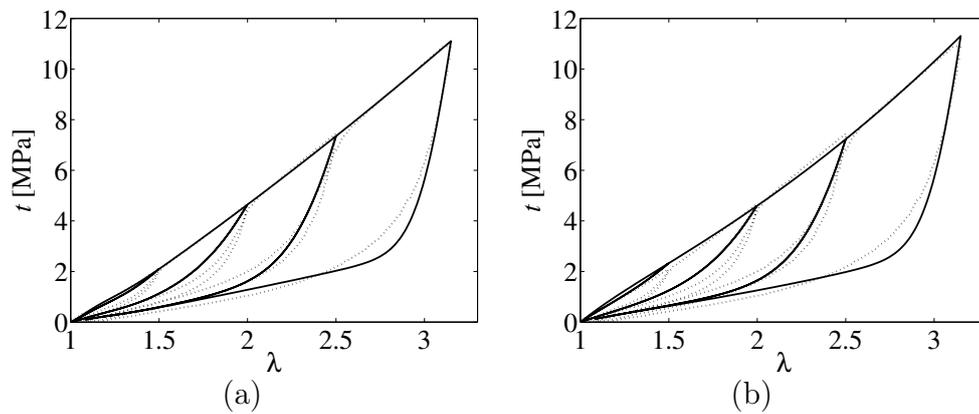


Figura 4.22 – Ajustes para o silicone 1 com Ogden e Roxburgh, 1999. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

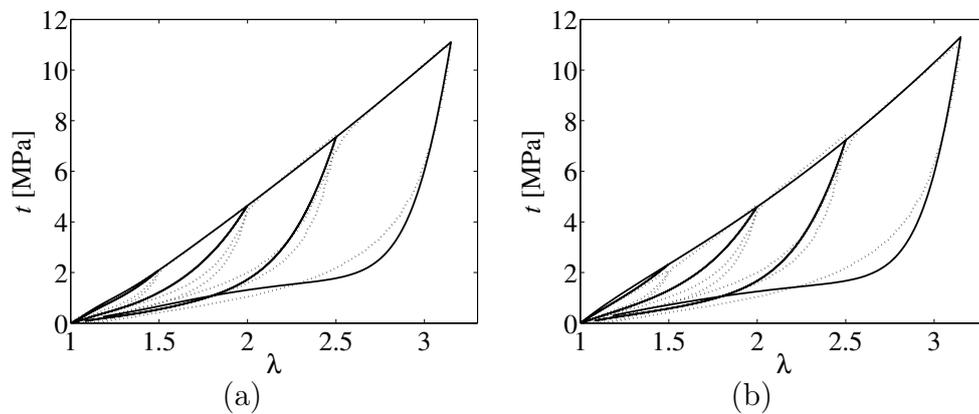


Figura 4.23 – Ajustes para o silicone 1 com potência ( $W_m - W_0(\lambda)$ ). Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

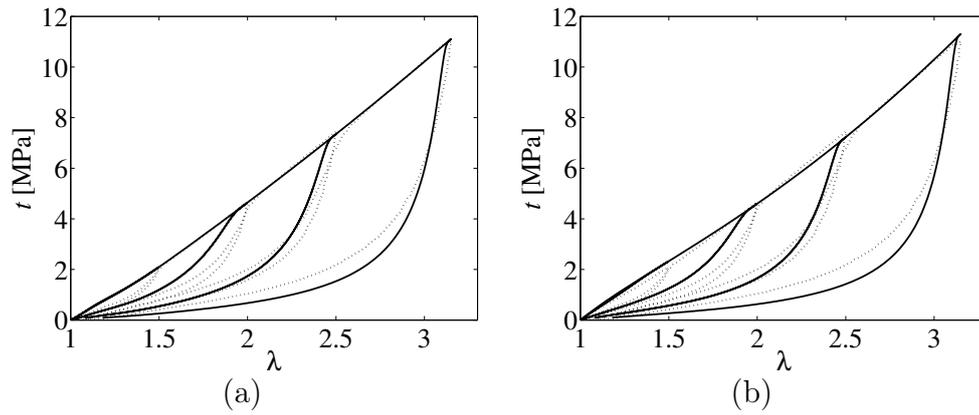


Figura 4.24 – Ajustes para o silicone 1 com potência  $(W_m - W_0(\lambda))^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

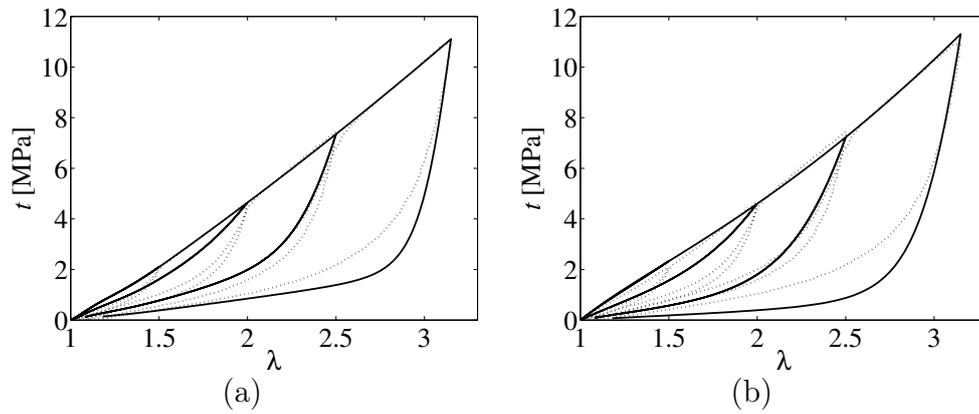


Figura 4.25 – Ajustes para o silicone 1 com potência  $W_m^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

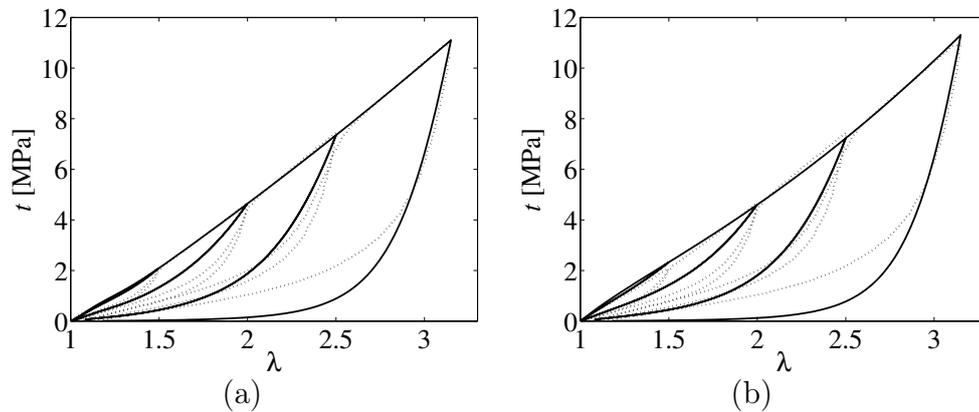


Figura 4.26 – Ajustes para o silicone 1 com potência  $W_0^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

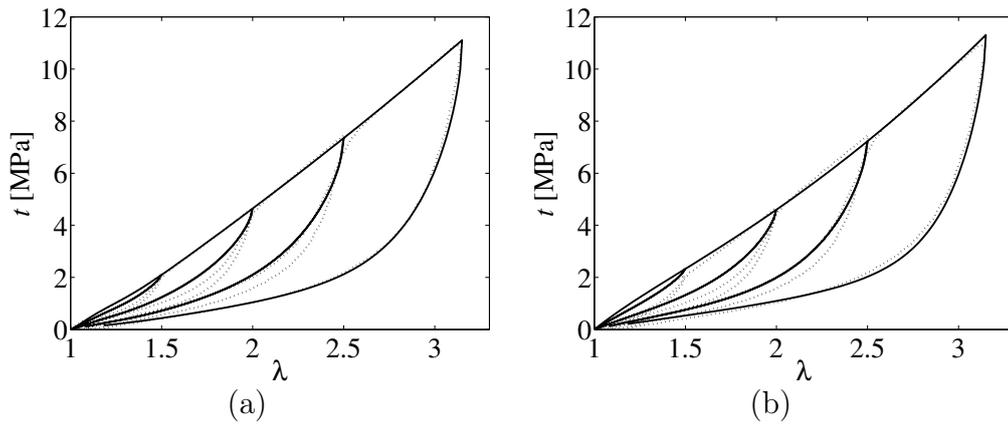


Figura 4.27 – Ajustes para o silicone 1 com potência na tangente hiperbólica. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

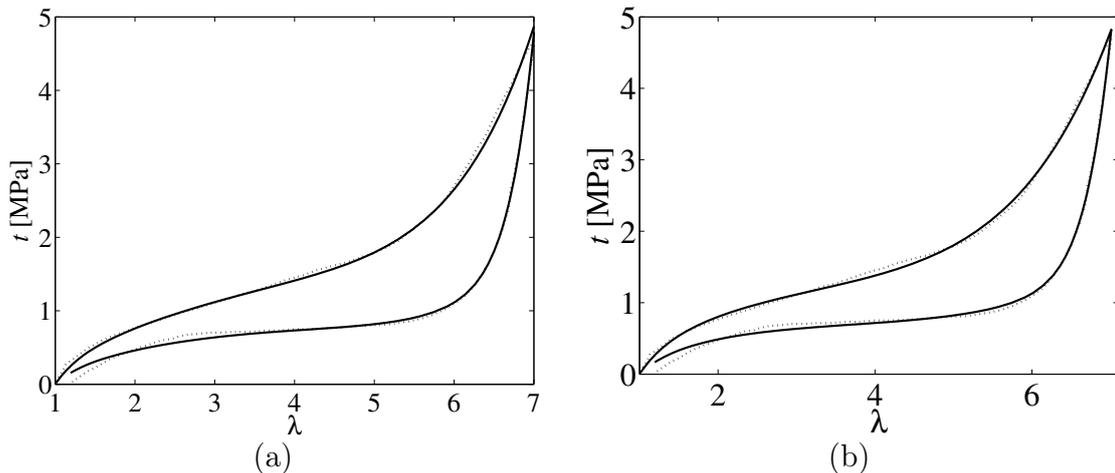


Figura 4.28 – Ajustes do latex com  $W_m - W_0$  para material submetido a um único ciclo de carga. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI, (b) OI3.

É possível verificar claramente nas Figuras (4.9) e (4.23) que o parâmetro de amolecimento chamado de  $W_m - W_0$  não se adequou bem ao comportamento do material. Ocorre uma sobreposição das curvas de descarregamento do material quando se aplica uma deformação superior a do ciclo de carga anterior. Isso se deve ao fato da potência  $W_m - W_0$  fazer com que  $\eta \rightarrow 1$  conforme  $\lambda \rightarrow 1$ , diminuindo o amolecimento. Não ocorre um enrijecimento no material, porém o valor de  $\eta$  aumenta conforme o material é descarregado, causando essa sobreposição. No entanto, se houvesse apenas um ciclo de carregamento essa sobreposição não ocorreria, e o modelo poderia ser empregado, como mostrado na Figura (4.28). De-

vido ao fato do silicone 2 não possuir apenas um ciclo de carregamento esse parâmetro de amolecimento não foi analisado para este material.

Para os demais casos ilustrados nas Figuras 4.7 a 4.27, percebe-se visualmente pouca vantagem entre os modelos analisados, com exceção da proposta com potência na tangente hiperbólica, que se sobressaiu além dos outros e mostrou-se capaz de capturar mudanças bruscas e/ou sutis nas curvas de comportamento do material.

Para exemplificar o comportamento de  $\eta$  e diferenciá-lo do dano, a curva de evolução do parâmetro de amolecimento  $\eta$  é apresentada na Figura 4.29. Sendo que o caso apresentado é para o látex com o parâmetro de amolecimento potência na tangente hiperbólica.

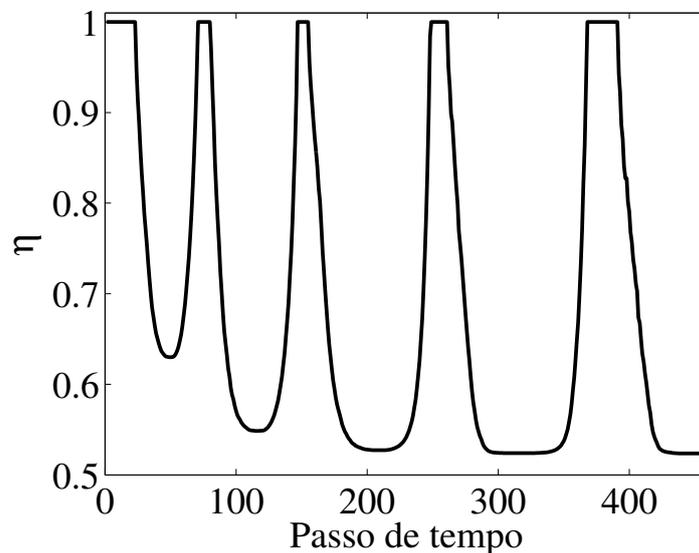


Figura 4.29 – Evolução de  $\eta$  em função do passo de tempo para o látex com o parâmetro de amolecimento com potência na tangente hiperbólica.

Os resultados obtidos para o caso do silicone 2 são apresentados nas Figuras 4.30-4.35, onde é possível visualizar que os parâmetros de amolecimento ajustados são capazes de capturar o fenômeno para um caso não uniaxial de carregamento. Nas legendas destes gráficos os expoentes  $T, B, P$  nos modelos hiperelásticos representam os ensaios de tração uniaxial, equibiaxial e cisalhamento puro, respectivamente. Esse material sofre influência do efeito Mullins. A histerese para um caso de carregamento composto poderia ser modelada dessa forma se as componentes do estado de tensão seguissem sempre o mesmo caminho, ou seja, as cargas externas aplicadas tivessem sempre a mesma direção com sentidos opostos (carregamento e descarregamento).

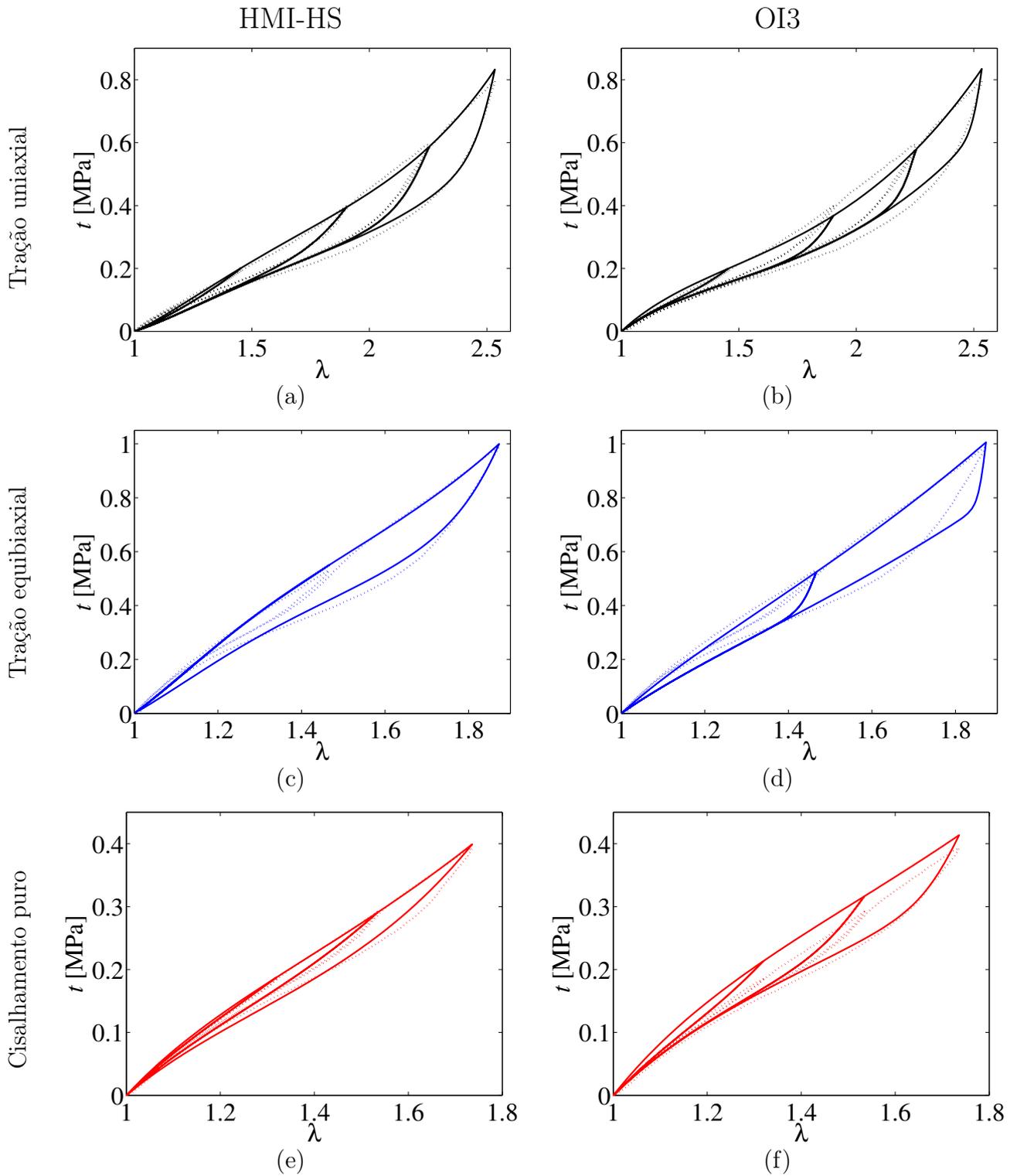


Figura 4.30 – Ajustes para o silicone 2 com  $\eta$  segundo Dorfmann e Ogden, 2003. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI-HS<sup>T</sup>, (b) OI3<sup>T</sup>, (c) HMI-HS<sup>B</sup>, (d) OI3<sup>B</sup>, (e) HMI-HS<sup>S</sup>, (f) OI3<sup>S</sup>.

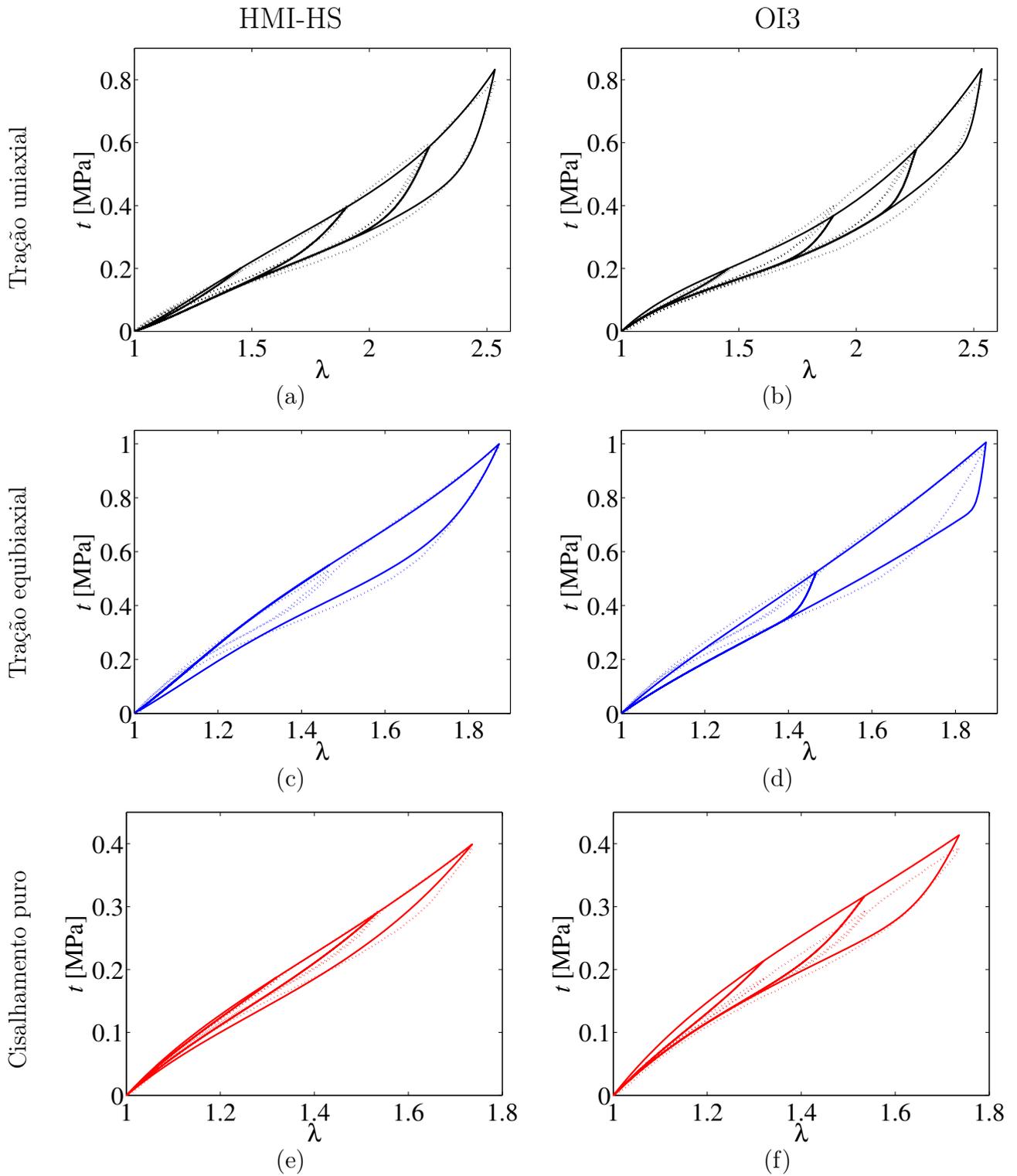


Figura 4.31 – Ajustes para o silicone 2 com  $\eta$  segundo Ogden e Roxburgh, 1999. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a)  $\text{HMI-HS}^T$ , (b)  $\text{OI3}^T$ , (c)  $\text{HMI-HS}^B$ , (d)  $\text{OI3}^B$ , (e)  $\text{HMI-HS}^S$ , (f)  $\text{OI3}^S$ .

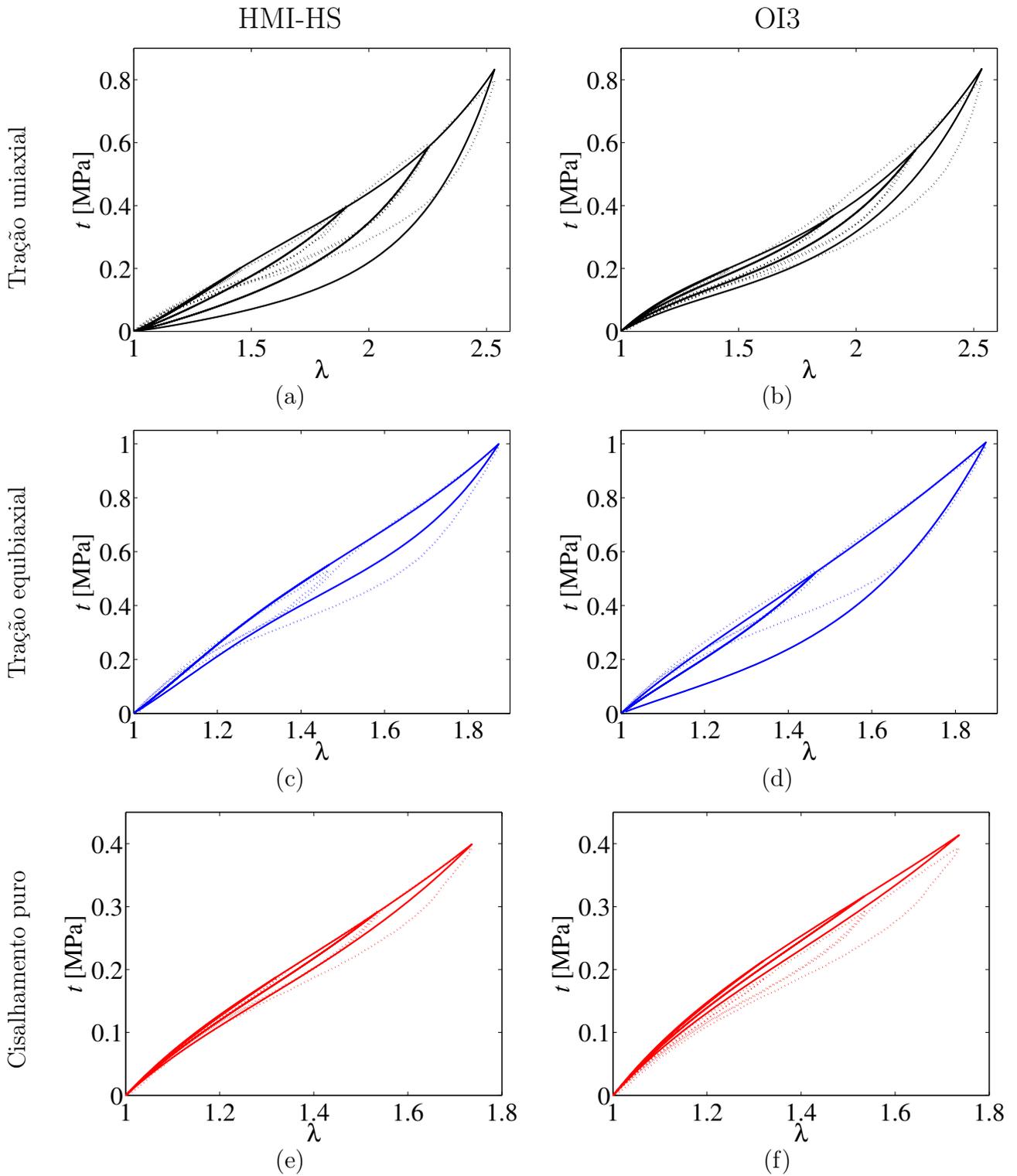


Figura 4.32 – Ajustes para o silicone 2 com  $(W_m - W_0(\lambda))^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI-HS<sup>T</sup>, (b) OI3<sup>T</sup>, (c) HMI-HS<sup>B</sup>, (d) OI3<sup>B</sup>, (e) HMI-HS<sup>S</sup>, (f) OI3<sup>S</sup>.

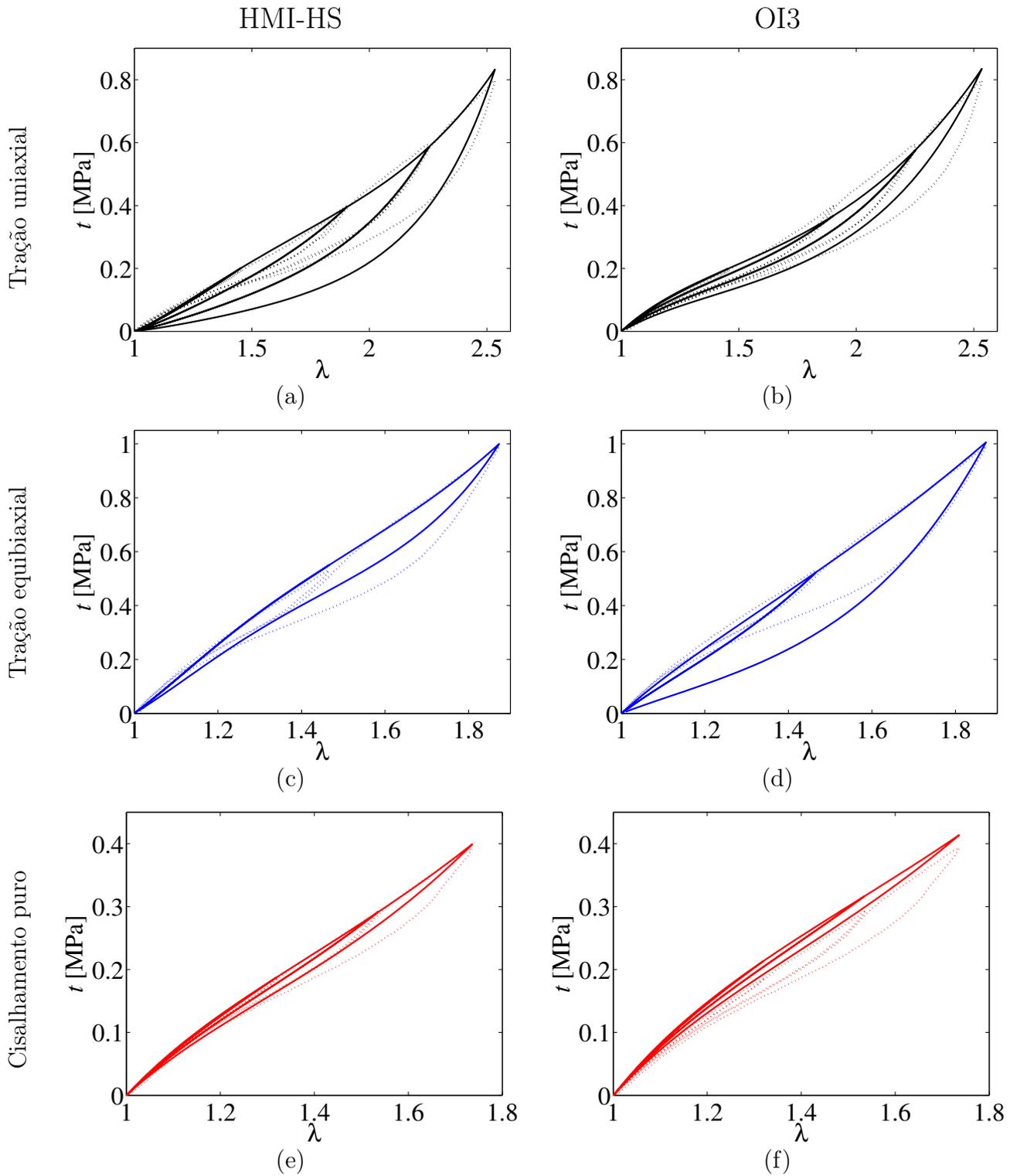


Figura 4.33 – Ajustes para o silicone 2 com HMI-HS e  $W_m^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI-HS<sup>T</sup>, (b) OI3<sup>T</sup>, (c) HMI-HS<sup>B</sup>, (d) OI3<sup>B</sup>, (e) HMI-HS<sup>S</sup>, (f) OI3<sup>S</sup>.

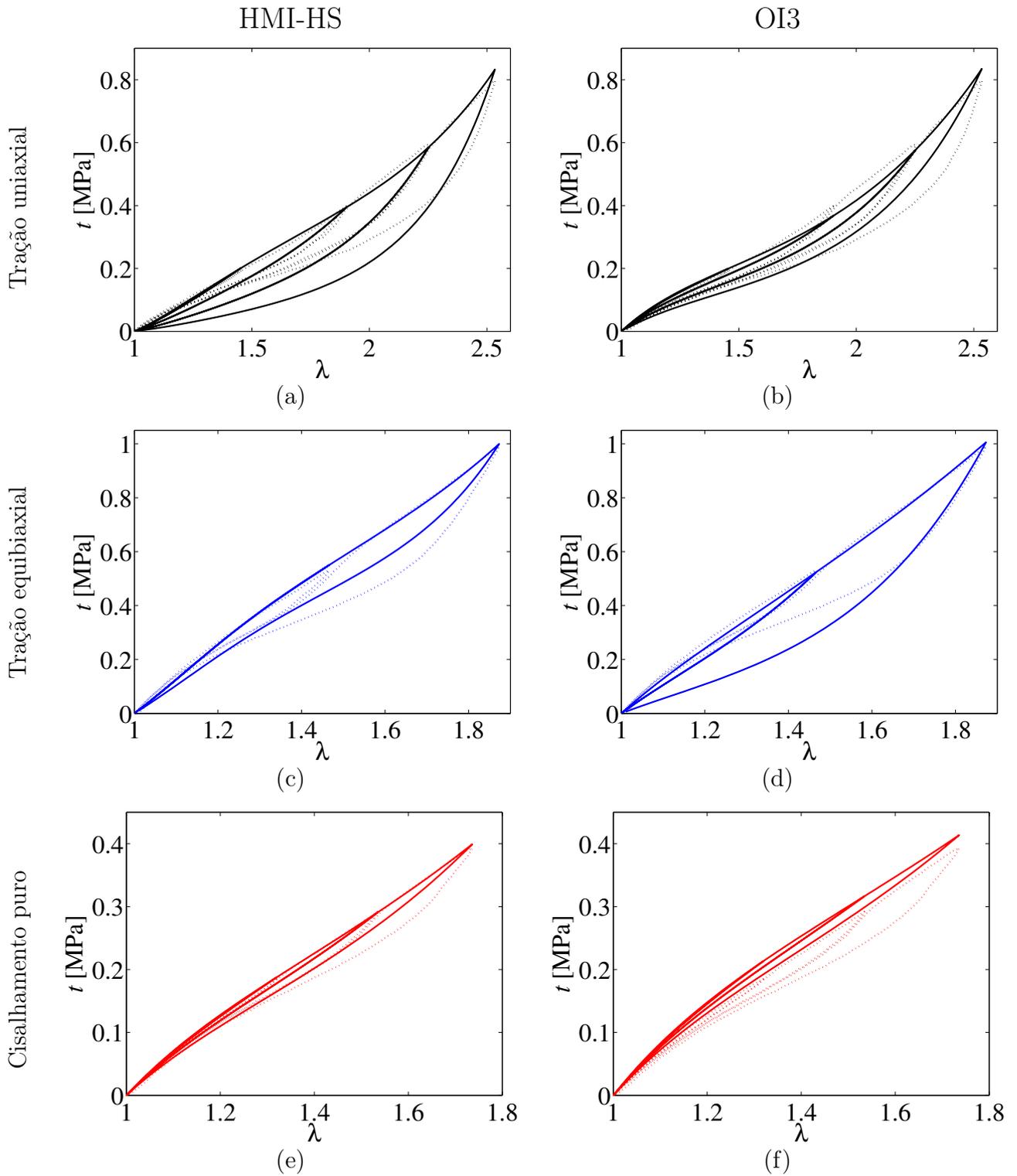


Figura 4.34 – Ajustes para o silicone 2 com  $(W_0(\lambda))^{-1}$ . Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a) HMI-HS<sup>T</sup>, (b) OI3<sup>T</sup>, (c) HMI-HS<sup>B</sup>, (d) OI3<sup>B</sup>, (e) HMI-HS<sup>S</sup>, (f) OI3<sup>S</sup>.

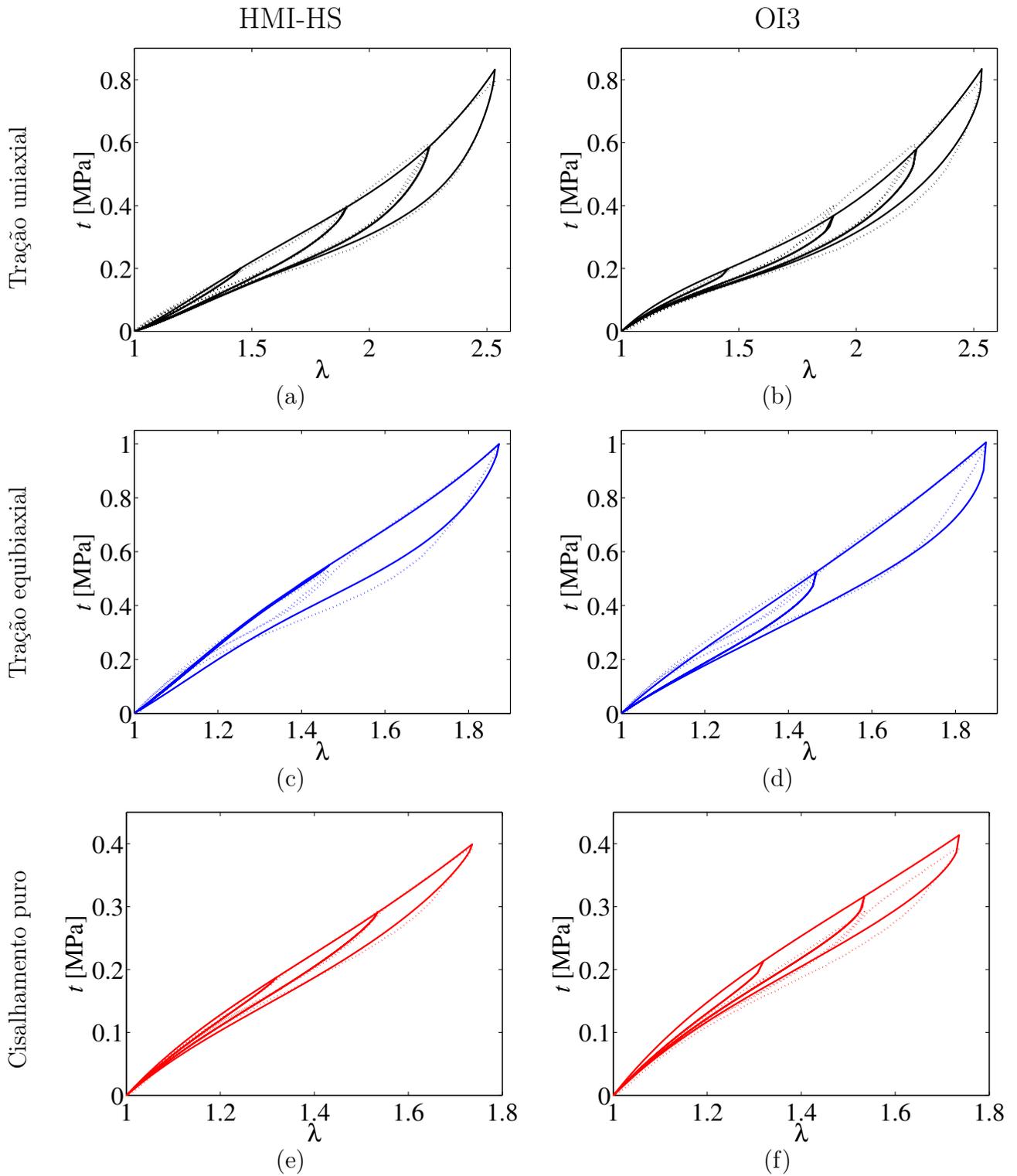


Figura 4.35 – Ajustes para o silicone 2 com potencia na tangente hiperbólica. Resultados experimentais em linhas tracejadas e modelo teórico em linha sólida: (a)  $\text{HMI-HS}^T$ , (b)  $\text{OI3}^T$ , (c)  $\text{HMI-HS}^B$ , (d)  $\text{OI3}^B$ , (e)  $\text{HMI-HS}^S$ , (f)  $\text{OI3}^S$ .

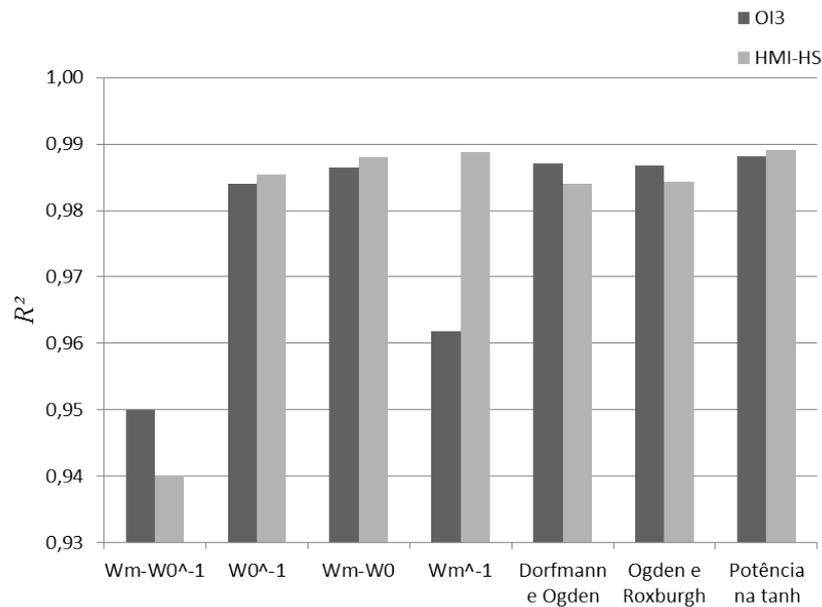
Quando se analisa apenas um caso de carregamento (tração uniaxial ou tração equibiaxial ou cisalhamento puro), os vários parâmetros  $\eta$  se comportaram adequadamente, porém quando se analisa simultaneamente tração uniaxial, equibiaxial e cisalhamento puro, fica evidente que os parâmetros propostos não se ajustam particularmente bem aos dados experimentais, com exceção do último parâmetro (potência na tangente hiperbólica). Essa afirmação é decorrência da inspeção visual das Figuras 4.30 a 4.35, pois houve amolecimento sub ou superestimado para pelo menos um tipo de carregamento.

A fim de formalizar uma comparação entre os parâmetros propostos e os de Dorfmann e Ogden, 2003, e Ogden e Roxburgh, 1999, as Figuras 4.36 e 4.37 apresentam o cálculo do erro  $\overline{R^2}$ , para todos os pontos experimentais (considerando todas as etapas de carregamento e descarregamento). Para o silicone 2 é utilizada somente a média do erro dos três ensaios (tração uniaxial, equibiaxial e cisalhamento puro). Inicialmente o erro foi calculado para cada ensaio separadamente (média experimental,  $\overline{t_e}$ , diferente em cada ensaio) e então a média dos três erros  $\overline{R^2}$  foi calculada. A média foi escolhida como parâmetro pois pode ser interpretada como um parâmetro relativo ao comportamento multiaxial do problema já que os três ensaios são necessários para caracterizar completamente um material hiperelástico (Ogden, 1997).

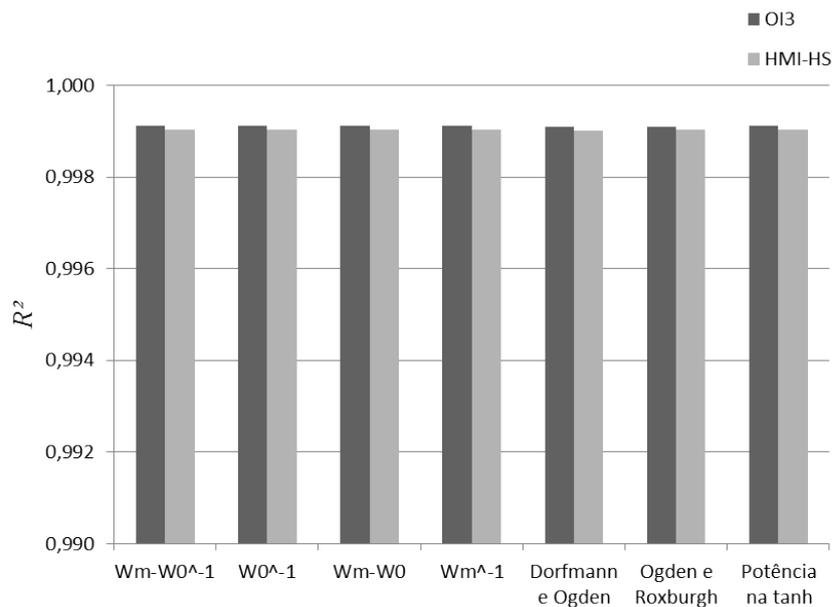
Destaca-se, no entanto, que o coeficiente de correlação  $\overline{R^2}$  é altamente não linear, ao contrário do tradicional coeficiente de correlação entre a solução numérica e experimental (Devore, 2007). Desta forma, as pequenas diferenças entre os erros obtidos para os modelos consagrados nas Figuras 4.36 e 4.37 não devem ser desprezadas, assim como sua relativa proximidade do valor critério.

O polipropileno é um caso de estudo no qual não é possível extrair conclusões devido à facilidade com que todos os parâmetros de amolecimento geraram bons resultados. Isso se dá pois a faixa de deformações do mesmo é baixa. Além disso ambos os modelos hiperelásticos (HMI-HS e OI3) foram capazes de prever bem seu comportamento sem amolecimento.

Quando se analisa o látex, os parâmetros Dorfmann e Ogden, 2003, Ogden e Roxburgh, 1999,  $W_m^{-1}$ ,  $W_0^{-1}$  e potência na tangente hiperbólica apresentaram bons resultados.  $W_0^{-1}$  tem, porém, a desvantagem do amolecimento praticamente desaparecer em baixas deformações.  $W_m^{-1}$  apresentou bons resultados para alongamentos elevados, porém para baixos alongamentos o mesmo tende a superestimar o amolecimento.  $(W_m - W_0)$  não é uma



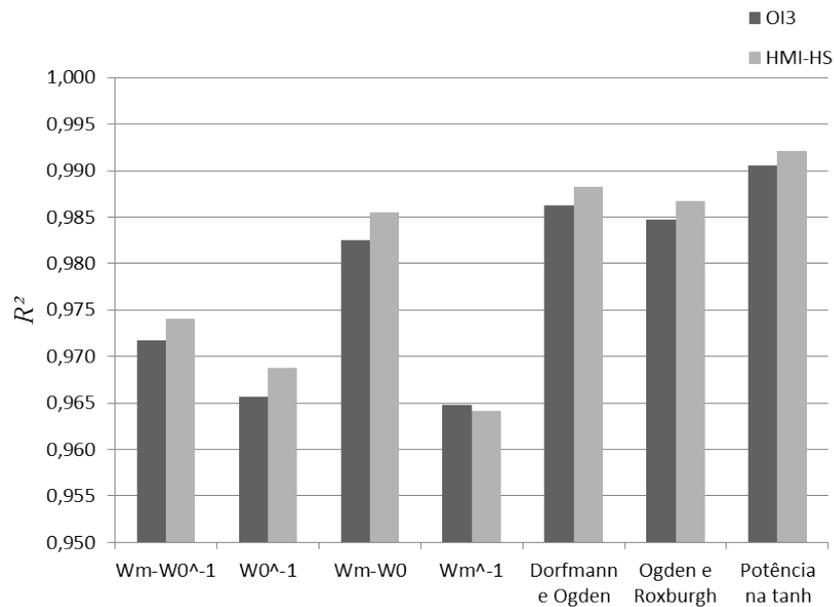
(a)



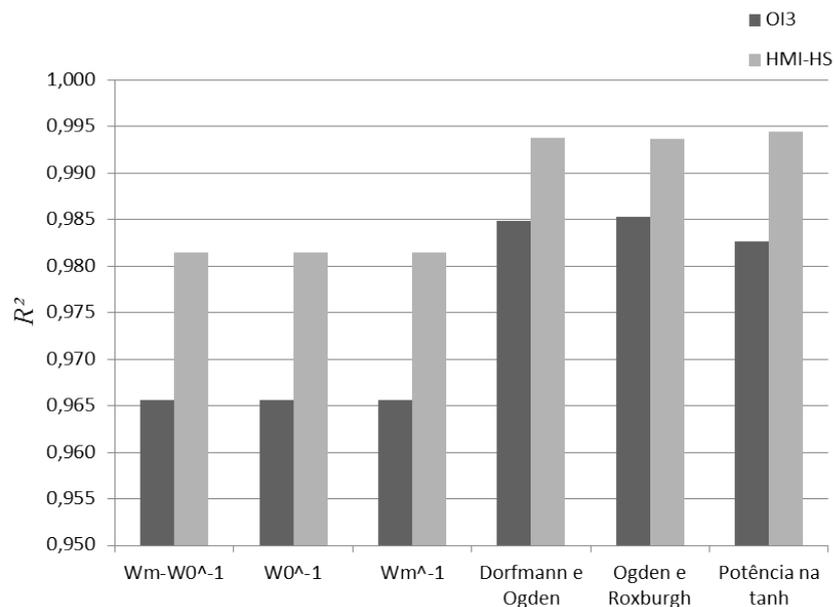
(b)

Figura 4.36 – Coeficiente de correlação  $\overline{R^2}$  para todo o intervalo de carregamento: (a) latex, (b) polipropileno.

boa escolha para este caso pois as linhas de carregamento e descarregamento se sobrepõem. No entanto, quando existe apenas um ciclo de carregamento ele gera bons resultados já que a existência da superposição não é um problema. Sendo assim, para este material as melhores opções são Dorfmann e Ogden, 2003, Ogden e Roxburgh, 1999, ou o modelo com potência na tangente hiperbólica. Sendo que o último apresentou resultados ligeiramente superiores no



(a)



(b)

Figura 4.37 – Coeficiente de correlação  $\overline{R^2}$  para todo o intervalo de carregamento: (a) silicone 1, (b) silicone 2.

$\overline{R^2}$ , porém analisando as Figuras 4.7, 4.8 e 4.13 em alongamentos maiores de 4 o resultado da potência na tangente hiperbólica apresentou melhora significativa quando comparado aos modelos de amolecimento de Dorfmann e Ogden, 2003, e Ogden e Roxburgh, 1999.

Finalmente, para o silicone 2 os melhores resultados (com menor erro) aconteceram para os modelos da literatura e para o modelo proposto com potência na tangente hiperbólica

(lembrando que  $(W_m - W_0)$  causa a referida sobreposição de curvas). Ambos os modelos da literatura apresentaram resultados similares tanto com OI3 ou HMI-HS. O coeficiente de correlação das Figuras 4.36 e 4.37 também comprovam que o modelo hiperelástico HMI-HS pode produzir ajustes consistentemente melhores que o celebrado modelo de Ogden, com exceção para tração equibiaxial.

É importante salientar que no caso do silicone 2 a Figura 4.37.b mostra que os resultados do HMI foram melhores em relação ao Ogden pois esse se ajustou melhor à curva primária do material (aquela sem amolecimento), lembrando que o  $\overline{R^2}$  foi calculado durante todas as etapas de carga e descarga do mesmo.

#### 4.4 Análise de esforço computacional

Nesta seção serão apresentados os resultados relativos à análise do esforço computacional dos ajustes para um dos casos de estudo. Foi analisado apenas o ajuste das constantes de amolecimento dos modelos propostos e da literatura utilizando as constantes do modelo hiperelástico previamente ajustadas. Ambos os modelos hiperelásticos apresentaram resultados similares, Por isso apenas os resultados do modelo OI3 são apresentados.

Como já mencionado, foi utilizado um algoritmo misto para os ajustes de curva que consiste em 100 iterações de `ga` com 600 populações, e subsequentemente se realizam ajustes com os 21 melhores resultados utilizando `fmincon` ou `fminunc`. Essa metodologia foi empregada e comparada com a utilização de apenas `ga` para a mesma tolerância, como mostra a Tabela 4.1.

Fica evidente a redução no tempo computacional para a metodologia empregada. Contudo em um dos casos de estudo o tempo computacional aumentou ligeiramente quando se utilizou o algoritmo misto. Acredita-se que esse aumento se deve à descontinuidade que ocorre quando  $\lambda$  tem valor unitário (sem deformação), discutido na seção 4.3. Porém nos demais casos estudados houve redução nos tempos computacionais, o que justifica o emprego do algoritmo misto.

Tabela 4.1 – Tempo necessário para realizar ajuste de curva com OI3

| <b>Modelo</b>      | <b>Tempo [min]</b> |      | <b>Ganho</b>   |
|--------------------|--------------------|------|----------------|
| OI3+               | Misto              | ga   | percentual     |
| Dorfmann           | 47,8               | 64,9 | 35,9%          |
| Ogden              | 44,3               | 74,6 | 68,4%          |
| $W_m - W_0$        | 36,9               | 76,5 | 107,1%         |
| $W_0^{-1}$         | 96,0               | 94,1 | -2,0%          |
| $W_m^{-1}$         | 84,2               | 88,9 | 5,6%           |
| $(W_m - W_0)^{-1}$ | 63,3               | 76,6 | 21,0%          |
| $\tanh^q$          | 10,1               | 58,4 | 477,8%         |
| <b>Média:</b>      |                    |      | <b>101,98%</b> |

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho tem por objetivo a implementação de um termo aditivo aos modelos hiperelásticos com o intuito de modelar fenômenos dissipativos através de funções de amolecimento e de propor novas funções de amolecimento que se ajustassem melhor a dados experimentais da literatura. Através de inspeção visual e do cálculo numérico de um coeficiente de correlação, foi possível comparar os resultados obtidos. Também foi avaliado o esforço computacional necessário para os ajustes de curva por duas metodologias diferentes.

Assim, foi realizada a implementação computacional dos parâmetros de amolecimento para três casos de carregamento (tração uniaxial, tração equibiaxial e cisalhamento puro). Os modelos foram capazes de prever o comportamento dissipativo dos materiais estudados e gerar bons resultados. O coeficiente de correlação se provou eficaz e foi útil na comparação dos modelos de amolecimento.

Os modelos hiperelásticos utilizados funcionaram bem para todos os casos de estudo em tração uniaxial. Porém, para o caso de carregamentos compostos (silicone 2) o modelo HMI-HS se mostrou mais eficaz do que o OI3 no ajuste das curvas primárias, exceto para tração equibiaxial.

A maior parte dos parâmetros de amolecimento propostos não foi efetiva para melhorar a qualidade dos ajustes, com exceção da potência na tangente hiperbólica, sendo essa a principal contribuição do presente trabalho. Além disso, alguns parâmetros não permitem escrever a dissipação  $\phi(\eta)$  de forma explícita, o que não é necessário para a modelagem mecânica do fenômeno mas que pode ser interessante quando se deseja obter a energia de deformação do material sem integração numérica. Os parâmetros de amolecimento da literatura (Dorfmann e Ogden, 2003, e Ogden e Roxburgh, 1999) apresentaram bons resultados. No entanto, para casos de carregamento em que o amolecimento tem uma inclinação muito elevada no descarregamento, como para o latex que tem  $\lambda = 7$ , há margem a melhorias em regime de maiores deformações.

Isso foi melhorado com o modelo potência na tangente hiperbólica, que foi o que apresentou os melhores resultados neste estudo. Embora o  $\eta$  proposto aumente uma constante constitutiva no material, não foi registrado aumento no tempo computacional para obtenção das propriedades de amolecimento. Também foi possível escrever analiticamente

a função  $\phi(\eta)$ , a qual não pode ser obtida dessa forma no modelo de Ogden e Roxburgh, 1999. Além disso, o modelo representa de um caso mais genérico do modelo proposto por Dorfmann e Ogden, 2003.

Relativo aos tempos de processamento analisados, verificou-se que quando o mecanismo de ajuste misto é utilizado o tempo computacional foi reduzido significativamente se comparado ao algoritmo genético. Entretanto, essa redução não ocorre para o caso  $W_0^{-1}$  devido à descontinuidade na função quando  $\lambda \rightarrow 1$ .

Finalmente, o presente trabalho recomenda o parâmetro de amolecimento dado pela Equação (3.13) em substituição aos demais estudados, e também demonstra a viabilidade do emprego do modelos HMI-HS com o amolecimento incluído, algo que ainda não havia sido avaliado.

## 5.1 Sugestões para trabalhos futuros

Para o prosseguimento do trabalho, sugere-se:

- Realização de ajustes com mais dados experimentais a fim de validar o modelo de amolecimento;
- Implementar um modelo de amolecimento que permita a inclusão da anisotropia induzida pelas deformações;
- Inclusão de deformações permanentes no modelo de amolecimento;
- Aplicação em materiais não convencionais e tecidos biológicos;
- Inclusão de outros efeitos como viscoelasticidade e plasticidade;
- Continuação dos testes com o modelo HMI;
- Inclusão do parâmetro de amolecimento potência na tangente hiperbólica em um software comercial de elementos finitos.

## Referências Bibliográficas

Amin, A., Lion, A., Sekita, S., and Okui, Y. Nonlinear dependence of viscosity in modeling the rate-dependent response of natural and high damping rubbers in compression and shear: Experimental identification and numerical verification, **International Journal of Plasticity**, vol. 22(9), p. 1610 – 1657, 2006.

Ansys. **Ansys 12.1 Help**. Ansys, Inc, 2009.

Arruda, E. M. and Boyce, M. C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials, **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, vol. 41(2), p. 389–412, 1993.

Beatty, M. F. and Krishnaswamy, S. A theory of stress-softening in incompressible isotropic materials, **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, vol. 48(9), p. 1931–1965, 2000.

Bergström, J. and Boyce, M. Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers, **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, vol. 46(5), p. 931 – 954, 1998.

Blair, J., Edwards, C., and Johnson, J. Rational Chebyshev approximations for the inverse of the error function, **Mathematics of Computation**, vol. 30(136), p. 827–830, 1976.

Chagnon, G., Verron, E., Gornet, L., Marckmann, G., and Charrier, P. On the relevance of continuum damage mechanics as applied to the Mullins effect in elastomers, **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, vol. 52(7), p. 1627–1650, 2004.

Chagnon, G., Verron, E., Marckmann, G., and Gornet, L. Development of new constitutive equations for the Mullins effect in rubber using the network alteration theory, **International Journal of Solids and Structures**, vol. 43(22–23), p. 6817 – 6831, 2006.

Devore, J. **Probability and Statistics for Engineering and the Sciences**. Cengage Learning, 2007.

Diani, J., Fayolle, B., and Gilormini, P. A review on the Mullins effect, **European Polymer Journal**, vol. 45(3), p. 601 – 612, 2009.

Dorfmann, A. and Ogden, R. A pseudo-elastic model for loading, partial unloading and reloading of particle-reinforced rubber, **International Journal of Solids and Structures**, vol. 40(11), p. 2699 – 2714, 2003.

Dorfmann, A. and Ogden, R. A constitutive model for the Mullins effect with permanent set in particle-reinforced rubber, **International Journal of Solids and Structures**, vol. 41(7), p. 1855 – 1878, 2004.

Dorfmann, A. and Pancheri, F. A constitutive model for the Mullins effect with changes in material symmetry, **International Journal of Non-Linear Mechanics**, vol. 47(8), p. 874 – 887, 2012.

Fu, Y. and Ogden, R. **Nonlinear Elasticity: Theory and Applications**. Lecture note series. Cambridge University Press, 2001.

Fukahori, Y. New progress in the theory and model of carbon black reinforcement of elastomers, **Journal of applied polymer science**, vol. 95(1), p. 60–67, 2005.

Fung, Y. C. On the pseudo-elasticity of living tissues, **Mechanics today (ed. S. N. Nasser)**, vol. (4), p. 49 – 66, 1980.

Govindjee, S. and Simo, J. A micro-mechanically based continuum damage model for carbon black-filled rubbers incorporating Mullins' effect, **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, vol. 39(1), p. 87–112, 1991.

Green, M. and Tobolsky, A. A new approach to the theory of relaxing polymeric media, **The Journal of Chemical Physics**, vol. 14(2), p. 80–92, 1946.

Holzappel, G. **Nonlinear solid mechanics : a continuum approach for engineering**. Wiley, Chichester New York, 2000.

Holzappel, G. A. and Simo, J. C. A new viscoelastic constitutive model for continuous media at finite thermomechanical changes, **International Journal of Solids and Structures**, vol. 33(20), p. 3019–3034, 1996.

Hoss, L., Stumpf, F. T., de Bortoli, D., and Marczak, R. J. Constitutive Models for Rubber-Like Materials: Comparative Analysis, Goodness of Fitting Measures, and Proposal of a New Model, **International Rubber Conference**, 2011.

Laiarinandrasana, L., Piques, R., and Robisson, A. Visco-hyperelastic model with internal state variable coupled with discontinuous damage concept under total Lagrangian formulation, **International Journal of Plasticity**, vol. 19(7), p. 977 – 1000, 2003.

Lazopoulos, K. A. and Ogden, R. W. Nonlinear elasticity theory with discontinuous internal variables, **Mathematics and Mechanics of Solids**, vol. 3(1), p. 29–51, 1998.

Lazopoulos, K. A. and Ogden, R. W. Spherically-symmetric solutions for a spherical shell in finite pseudo-elasticity, **European Journal of Mechanics - A/Solids**, vol. 18(4), p. 617 – 632, 1999.

Lemaitre, J. and Desmorat, R. **Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures**. Springer, 2006.

Li, J., Mayau, D., and Lagarrigue, V. A constitutive model dealing with damage due to cavity growth and the Mullins effect in rubber-like materials under triaxial loading, **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, vol. 56(3), p. 953–973, 2008.

Lion, A. A constitutive model for carbon black filled rubber: Experimental investigations and mathematical representation, **Continuum Mechanics and Thermodynamics**, vol. 8(3), p. 153–169, 1996.

Machado, G., Chagnon, G., and Favier, D. Theory and identification of a constitutive model of induced anisotropy by the Mullins effect, **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, vol. 63, p. 29 – 39, 2014.

Maiti, A., Small, W., Gee, R., Weisgraber, T., Chinn, S., Wilson, T., and Maxwell, R. Mullins effect in a filled elastomer under uniaxial tension, **Physical Review E**, vol. 89(1), p. 012602, 2014.

Marckmann, G., Verron, E., Gornet, L., Chagnon, G., Charrier, P., and Fort, P. A theory of network alteration for the Mullins effect, **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, vol. 50(9), p. 2011–2028, 2002.

Marczak, R., Gheller, J. J., and Hoss, L. **Caracterização de elastômeros para simulação numérica**. São Leopoldo: Senai, 2007.

Matlab. **Matlab Product Help**. The MathWorks, Inc, 2010.

Miehe, C. Discontinuous and continuous damage evolution in Ogden-type large-strain elastic materials, **European journal of mechanics. A. Solids**, vol. 14(5), p. 697–720, 1995.

Mullins, L. Effect of stretching on the properties of rubber, **Rubber Chemistry and Technology**, vol. 21(2), p. 281–300, 1948.

Mullins, L. Softening of rubber by deformation, **Rubber Chemistry and Technology**, vol. 42(1), p. 339–362, 1969.

Mullins, L. and Tobin, N. Theoretical model for the elastic behavior of filler-reinforced vulcanized rubbers, **Rubber Chemistry and Technology**, vol. 30(2), p. 555–571, 1957.

Niemczura, J. and Ravi-Chandar, K. On the response of rubbers at high strain rates—III. Effect of hysteresis, **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, vol. 59(2), p. 457–472, 2011.

Ogden, R. W. **Non-linear elastic deformations**. Dover Publications, Mineola, N.Y, 1997.

Ogden, R. W. and Roxburgh, D. G. A pseudo-elastic model for the Mullins effect in filled rubber, vol. 455(1988), p. 2861–2877, 1999.

Simo, J. and Ju, J. Strain- and stress-based continuum damage models—II. Computational aspects, **International Journal of Solids and Structures**, vol. 23(7), p. 841 – 869, 1987.

Simo, J. and Ju, J. Strain- and stress-based continuum damage models—I. Formulation, **Mathematical and Computer Modelling**, vol. 12(3), p. 378 –, 1989.

Stumpf, F. T. **Avaliação de um modelo hiperelástico incompressível análise de restrições, implementação e otimização de parâmetros constitutivos**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009.

Zrida, M., Laurent, H., Rio, G., Pimbert, S., Grolleau, V., Masmoudi, N., and Bra-dai, C. Experimental and numerical study of polypropylene behavior using an hyper-visco-hysteresis constitutive law, **Computational Materials Science**, vol. 45(2), p. 516–527, 2009.

Zúñiga, A. and Beatty, M. A new phenomenological model for stress-softening in elastomers, **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP**, vol. 53(5), p. 794–814, 2002.

## APÊNDICE A

São apresentadas neste anexo as constantes obtidas como resultados neste trabalho.

Tabela 5.1 – Constantes constitutivas dos modelos hiperelásticos

| <b>Latex</b>         |                |                  |           |              |             |                |
|----------------------|----------------|------------------|-----------|--------------|-------------|----------------|
| Constantes           | $\alpha/\mu_1$ | $\beta/\alpha_1$ | $b/\mu_2$ | $n/\alpha_2$ | $\mu/\mu_3$ | $C_2/\alpha_3$ |
| HMI-HS               | 0,198255       | 0,014091         | 0,938085  | 4,183407     | 0,000211    | 0,202899       |
| OI3                  | 7,85E-06       | 5,667762         | 1,375901  | 0,811995     | 7,356593    | 1,33E-05       |
| <b>Polipropileno</b> |                |                  |           |              |             |                |
| Constantes           | $\alpha/\mu_1$ | $\beta/\alpha_1$ | $b/\mu_2$ | $n/\alpha_2$ | $\mu/\mu_3$ | $C_2/\alpha_3$ |
| HMI-HS               | 106,1997       | 137,0783         | 1176916   | 0,782511     | 450,9832    | 0,126059       |
| OI3                  | 1,260438       | 82,70336         | 1,444993  | 153,5884     | 1,790763    | 150,1665       |
| <b>Silicone 1</b>    |                |                  |           |              |             |                |
| Constantes           | $\alpha/\mu_1$ | $\beta/\alpha_1$ | $b/\mu_2$ | $n/\alpha_2$ | $\mu/\mu_3$ | $C_2/\alpha_3$ |
| HMI-HS               | 0,381478       | 7,608796         | 1013786   | 1,237961     | 0,08817     | 4,59E-06       |
| OI3                  | 2,87896        | 0,394552         | 2,883613  | 0,918939     | -5,75185    | -2,19E-05      |
| <b>Silicone 2</b>    |                |                  |           |              |             |                |
| Constantes           | $\alpha/\mu_1$ | $\beta/\alpha_1$ | $b/\mu_2$ | $n/\alpha_2$ | $\mu/\mu_3$ | $C_2/\alpha_3$ |
| HMI-HS               | 0,079239       | -0,19767         | -0,37083  | -6509,83     | 0,257914    | -0,45251       |
| OI3                  | 5,248929       | 0,01243          | -1,37891  | -0,13397     | -1,38973    | -0,16006       |

Tabela 5.2 – Parâmetros de amolecimento para o látex

| <b>Látex</b>       | <b>HMI-HS</b> |        |        | <b>OI3</b> |        |        |
|--------------------|---------------|--------|--------|------------|--------|--------|
|                    | r             | m      | q      | r          | m      | q      |
| Constantes         |               |        |        |            |        |        |
| Dorfmann e Ogden   | 2,5459        | 1,0084 | -      | 2,1420     | 1,2592 | -      |
| Ogden e Roxburgh   | 2,5495        | 1,1675 | -      | 2,1954     | 1,4183 | -      |
| $W_m - W_0$        | 1,1280        | 2,9169 | -      | 1,1150     | 2,8648 | -      |
| $(W_m - W_0)^{-1}$ | 1,0020        | 8,3337 | -      | 1,0020     | 6,2095 | -      |
| $W_m^{-1}$         | 222,1892      | 1,5924 | -      | 153,5512   | 1,7104 | -      |
| $W_0^{-1}$         | 3,3044        | 3,0288 | -      | 5,2338     | 2,6483 | -      |
| Power-law tanh     | 2,0997        | 1,5942 | 0,7547 | 1,9535     | 1,7702 | 0,7411 |

Tabela 5.3 – Parâmetros de amolecimento para o polipropileno

| <b>Polipropileno</b> | <b>HMI-HS</b> |        |        | <b>OI3</b> |        |        |
|----------------------|---------------|--------|--------|------------|--------|--------|
|                      | r             | m      | q      | r          | m      | q      |
| Constantes           |               |        |        |            |        |        |
| Dorfmann e Ogden     | 1,0755        | 0,4008 | -      | 1,1334     | 0,3749 | -      |
| Ogden e Roxburgh     | 1,1135        | 0,4383 | -      | 1,1506     | 0,4173 | -      |
| $W_m - W_0$          | 1,0001        | 0,4325 | -      | 1,0000     | 0,4257 | -      |
| $(W_m - W_0)^{-1}$   | 1,0000        | 0,4324 | -      | 1,0000     | 0,4257 | -      |
| $W_m^{-1}$           | 1,0002        | 0,4320 | -      | 1,0003     | 0,4249 | -      |
| $W_0^{-1}$           | 1,0000        | 0,4325 | -      | 1,0000     | 0,4257 | -      |
| Power-law tanh       | 1,0000        | 0,4554 | 0,9625 | 1,0000     | 0,4325 | 0,9927 |

Tabela 5.4 – Parâmetros de amolecimento para o silicone 1

| <b>Silicone 1</b>  | HMI-HS |        |        | OI3    |        |        |
|--------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                    | r      | m      | q      | r      | m      | q      |
| Constantes         |        |        |        |        |        |        |
| Dorfmann e Ogden   | 1,3644 | 2,2791 | -      | 1,3681 | 2,3330 | -      |
| Ogden e Roxburgh   | 1,3793 | 2,5790 | -      | 1,3749 | 2,6525 | -      |
| $W_m - W_0$        | 1,0363 | 3,4558 | -      | 1,0351 | 3,3572 | -      |
| $(W_m - W_0)^{-1}$ | 4,0633 | 0,0502 | -      | 3,7060 | 0,0801 | -      |
| $W_m^{-1}$         | 9,4658 | 2,1556 | -      | 2,4834 | 3,2159 | -      |
| $W_0^{-1}$         | 1,0001 | 4,3666 | -      | 1,0000 | 4,1712 | -      |
| Power-law tanh     | 1,2331 | 5,6370 | 0,5446 | 1,2872 | 4,3607 | 0,5929 |

Tabela 5.5 – Parâmetros de amolecimento para o silicone 2

| <b>Silicone 2</b>  | HMI-HS  |        |        | OI3    |        |        |
|--------------------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                    | r       | m      | q      | r      | m      | q      |
| Constantes         |         |        |        |        |        |        |
| Dorfmann e Ogden   | 3,5394  | 0,0840 | -      | 4,4852 | 0,0379 | -      |
| Ogden e Roxburgh   | 3,6698  | 0,0926 | -      | 4,5435 | 0,0435 | -      |
| $W_m - W_0$        | 32,2287 | 0,2909 | -      | 8,0222 | 0,5170 | -      |
| $(W_m - W_0)^{-1}$ | 1,0000  | 0,5901 | -      | 1,0000 | 1,3190 | -      |
| $W_m^{-1}$         | 1,0000  | 0,5901 | -      | 1,0000 | 1,3190 | -      |
| $W_0^{-1}$         | 1,0000  | 0,5901 | -      | 1,0000 | 1,3190 | -      |
| Power-law tanh     | 3,2276  | 0,1690 | 0,5723 | 3,8140 | 0,2959 | 0,3106 |