UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Simone Lovatel

MATEMÁTICA PARA ELETRÔNICA:
UMA PROPOSTA PARA O ENSINO TÉCNICO

PORTO ALEGRE
2007

Simone Lovatel

MATEMÁTICA PARA ELETRÔNICA:
UMA PROPOSTA PARA O ENSINO TÉCNICO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Irene Maria Fonseca Strauch

PORTO ALEGRE
2007

Simone Lovatel

AGRADECIMENTOS

Um trabalho de pesquisa não é fruto de uma única pessoa, por isso, neste momento, cabe expressar meu agradecimento a todos aqueles que contribuíram para a execução do presente trabalho.

À Profa. Dra. Irene Maria Fonseca Strauch pela sua amizade, carinho, dedicação e competência.

Aos meus familiares, que me auxiliaram e apoiaram com carinho, durante o período de estudo. Ao meu amor, Eduardo Brandalise Lazzarotto, meu reconhecimento especial pelo incondicional auxílio e incentivo.

Aos professores e colegas da primeira turma do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática, por terem colaborado com seus conhecimentos e experiências. Em especial, às colegas Daiane Scopel Boff e Adriana Bonadimam.

Aos colegas professores e aos alunos do curso Técnico em Eletrônica Industrial da Escola de Educação Profissional de Farroupilha – ETFAR/UCS, pela colaboração. Meu agradecimento especial ao professor Mosart Roque Longhi Jr**.**

A Deus, por todos os momentos vividos durante este mestrado, pela proteção de todas as horas e por ter colocado, no meu caminho, todos aqueles que de uma forma ou de outra contribuíram para meu aperfeiçoamento.

RESUMO

Apresentamos um projeto pedagógico interdisciplinar aplicado a um curso técnico em eletrônica. A parte central deste projeto consistiu na elaboração de um texto didático que apresenta tópicos de matemática com muitas aplicações na eletrônica básica. O objetivo principal deste texto é não só apoiar o trabalho do professor em sala de aula, mas também ser usado como bibliografia de consulta individual no decorrer da formação técnica.

A elaboração desse texto envolveu várias etapas, entre elas destacamos uma sondagem realizada para melhor conhecer o perfil do público-alvo. O projeto pedagógico foi aplicado em uma turma piloto e seus resultados mostraram-se francamente positivos.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Educação Técnica, Estratégia de Ensino e Interdisciplinaridade.

ABSTRACT

We present an interdisciplinary pedagogical project applied in a technical electronics course. The central part of this project consists of a didactic text matching mathematical topics for beginning electronics students. Its principal aim is to aid the class work, but it is conceived in such a way that it could be used by the student during further technical courses.

The total project involves many stages. Between them, we mention the student profile study and the selection of electronics examples.

This pedagogical project was applied in a pilot population made of 27 students and the results are very favorable.

Key-words: Teaching of Mathematics, Technique Education, Teaching Strategy and Interdisciplinarity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
AC	Corrente Alternada
CEB	Câmara de Educação Básica
CEFET	Centros Federais de Educação Tecnológica
CNE	Conselho Nacional de Educação
DC	Corrente Contínua
EJA	Supletivo ou de Educação de Jovens e Adultos
ETFAR	Escola de Educação Profissional de Farroupilha
IBOPE	Instituto Brasileiro de Opinião Pública e Estatística
INAF	Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
SENAC	Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial
SENAI	Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial
SI	Sistema Internacional de Unidades
SOE	Serviço de Orientação Escolar
UCS	Universidade de Caxias do Sul

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Como docente de Matemática de escola de ensino profissionalizante, temos constatado que os alunos, na maioria egressos do sistema público de ensino, não têm os conhecimentos mínimos previstos para esse nível de escolarização. Os estudantes não possuem as competências e habilidades matemáticas necessárias para dar seqüência aos cursos que as exijam. Estas dificuldades abrangem desde a realização de operações básicas até o processo de raciocínio lógico-matemático.

Recentemente, foram divulgados os resultados da quarta edição do Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional (INAF), pesquisa realizada pelo Instituto Brasileiro de Opinião Pública e Estatística (IBOPE), que focalizou as habilidades matemáticas da população brasileira. Tal investigação visa a contribuir para que a sociedade possa compreender e dimensionar os problemas da educação brasileira, de modo a fomentar o debate público, orientar a implementação e a avaliação de políticas educacionais e propostas pedagógicas.

Uma das principais constatações feitas pelo INAF foi a de que 2% da população brasileira se encontra em situação de analfabetismo matemático, ou seja, não consegue realizar tarefas elementares com números, como ler o preço de um produto ou anotar um número de telefone. Os estudos mostram ainda que apenas 22% da população jovem e adulta possui conhecimento pleno de habilidades matemáticas. Tais habilidades envolvem a capacidade de controlar uma estratégia na resolução de problemas mais complexos, como por exemplo, elaborar e executar uma série de operações relacionadas entre si, ler e interpretar mapas e gráficos e outras representações matemáticas de uso social freqüente.

Esses indicadores refletem o que vem acontecendo com o ensino de Matemática nas escolas. Sabe-se que o ensino vem se apresentando de forma compartimentalizada e descontextualizada. No entanto, de acordo com os princípios definidos na atual Lei de Diretrizes e Bases (LDB) tal não deveria estar acontecendo. O Ministério da Educação (MEC), em consonância com a LDB, num trabalho conjunto com educadores de todo o país defende um novo perfil para o currículo do ensino médio. Esse perfil está apoiado em competências básicas, buscando dar significado ao conhecimento escolar, incentivando, mediante a interdisciplinaridade, o raciocínio e a capacidade de aprender. Esse é, em linhas gerais, o entendimento proposto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), lançados pelo MEC, documento norteador do ensino, cuja finalidade é “criar uma escola média com identidade, que atenda às expectativas de formação escolar dos alunos para o mundo contemporâneo” (2000, p. 4). Esse documento propõe ainda, na página 20, que a “aprendizagem das Ciências da Natureza deve contemplar formas de apropriação e construção de sistema de pensamento mais abstratos e ressignificados que as trate como processo cumulativo de saber e de ruptura de consensos e pressupostos metodológicos”. E, referindo-se à Matemática, ressalta: “Os estudos nessa área devem levar em conta que a Matemática é uma linguagem que busca dar conta de aspectos do real e que é instrumento formal de expressão e comunicação para diversas ciências.” (ibid., p. 20).

Nós professores de Matemática, ouvimos diariamente os professores que utilizam os conhecimentos matemáticos em suas disciplinas queixarem-se que os alunos não são capazes de fazer cálculos simples, não conhecem e não sabem aplicar as regras mais elementares, o que confere com o levantamento feito pelo INAF. Isso também ocorre na Escola de Educação Profissional de Farroupilha (ETFAR), escola técnica em que lecionamos desde 2002. As reclamações dos professores, a esse respeito, foram tantas que o currículo do curso Técnico em Eletrônica Industrial foi reavaliado e reformulado. Dentre as reformulações, foi elaborada uma nova base curricular que passou a vigorar no primeiro semestre de 2005. Então foi introduzida a disciplina de Matemática Aplicada, cuja finalidade primeira é a de suprir as deficiências trazidas pelos alunos egressos do ensino médio, habilitando-os a cursar as demais disciplinas do curso.

Neste momento, como já atuávamos como professora da Instituição, recebemos a indicação para a regência da disciplina de Matemática Aplicada. Aceitamos esse desafio, justo no momento em que ingressávamos no curso de Mestrado em Ensino de Matemática. Assim, entendemos ser pertinente eleger como tema de nossa dissertação de mestrado um projeto de ensino de matemática para o curso Técnico em Eletrônica Industrial. Estava consciente que tal projeto exigiria muito estudo para um docente com formação em Licenciatura Plena em Matemática, pois, na realidade, tratava-se de um projeto interdisciplinar. Nossa primeira iniciativa foi, pois, estabelecer um contato muito estreito com os professores das disciplinas de eletrônica do curso, passando a assistir suas aulas e a estudar a bibliografia técnica adotada. Paralelamente, com a vigência da nova base curricular, iniciamos nossas aulas com a primeira turma da nova disciplina. Como já havíamos tomado a decisão de implementar um ensino de matemática diferenciado, iniciamos esse trabalho com as seguintes metas:

a) diagnosticar, através de sondagens, os conceitos matemáticos trazidos do ensino médio;

b) estimular o interesse do aluno pela matemática e iniciar um processo de formação científica que o leve a rever a matemática elementar e a superar dificuldades conceituais, a fim de aplicá-la, tornando-a compreensível e útil;

c) criar condições para rever, entender, aprofundar e aplicar os conceitos matemáticos em um cenário de um curso técnico de eletrônica;

d) desenvolver uma proposta didática auto-explicativa que possa ser utilizada pelos alunos em aula e como bibliografia de estudo individual.

Uma vez delineados esses objetivos, passamos a estruturar a presente dissertação de mestrado que, como produto final, consiste de um Texto Didático com tópicos de matemática selecionados para um curso de técnico em eletrônica. Sua primeira versão foi aplicada no segundo semestre de 2005, aperfeiçoada ao longo dos dois semestres letivos de 2006 e consolidada no primeiro semestre de 2007. Atualmente, o texto contém toda a seqüência de aulas.

Como nosso projeto de pesquisa foi desenvolvido em uma escola técnica, iniciamos a presente dissertação, fazendo, no capítulo 1, um breve resumo da história da educação profissional no Brasil. Como há muitas versões da trajetória política da educação profissional no Brasil, focalizamos apenas os aspectos que julgamos serem os mais importantes.

No capítulo 2, apresentamos a Escola de Educação Profissional de Farroupilha, onde o nosso projeto foi aplicado e, no capítulo 3, de forma mais detalhada, o curso de Técnico em Eletrônica Industrial, cujos alunos compõem o *corpus* da investigação. Abordamos, no capítulo 3, a grade curricular, as habilidades e as competências a serem desenvolvidas em cada uma das disciplinas, bem como a criação da disciplina de Matemática Aplicada.

No capítulo 4, apresentamos o levantamento do perfil do aluno da turma piloto, bem como uma sondagem (pré-teste), cujo objetivo é o levantamento de possíveis deficiências dos alunos com vistas à elaboração da proposta de ensino. A concretização dessa proposta, o Texto Didático, será apresentada no capítulo 5.

E finalmente, no capítulo 6, são apresentados os resultados da análise de nossa proposta de ensino, bem como as conclusões desta investigação.

1 EDUCAÇÃO PROFISSIONAL NO BRASIL

Os primeiros registros do que hoje poder-se-ia chamar de educação profissional no Brasil fazem referência à transferência de conhecimentos nas tribos indígenas existentes no Brasil na época do descobrimento. A preparação para o trabalho fundia-se com as práticas cotidianas de socialização e de convivência no interior das tribos, as quais se efetivavam com a observação e a participação nas atividades de caça, pesca, coleta, plantio e colheita; de construção e confecção de objetos. Foram, pois, os índios os primeiros educadores de artes e ofícios para as áreas de tecelagem e cerâmica; para adornos e artefatos de guerra; para a construção de casas; para as técnicas de cultivo da terra e para a produção de medicamentos (MANFREDI, 2003).

Segundo essa autora (ibid.), nos primeiros dois séculos após o descobrimento, na época do Brasil Colônia, a economia era baseada na agroindústria açucareira, predominando o sistema escravocrata de produção. Nessa época, prevaleciam as práticas educativas informais, relacionadas às atividades dos engenhos. Com o desenvolvimento da agroindústria açucareira e a extração de minério, formaram-se centros urbanos demandantes de serviços especializados, tais como: ferreiros, carpinteiros, pedreiros, sapateiros e outros. Nesses centros urbanos, encontravam-se também os colégios jesuítas, os quais sediaram os primeiros centros de formação profissional, ou seja, as escolas-oficinas de formação de artesãos e demais ofícios, durante o período colonial. Segundo Cunha (apud MANFREDI, 2003, p. 74), em meados do século XVIII, os jesuítas mantinham no Brasil 25 residências, 36 missões e 17 colégios e seminários. A Companhia de Jesus adotava, em suas escolas, pedagogia, modelos institucionais e currículos próprios. A expulsão da Companhia de Jesus, em 1759, do Brasil, desorganizou por um período o sistema de educação escolar existente. O desmantelamento do sistema educacional jesuítico, contudo, não impediu a rearticulação de iniciativas privadas e confessionais de educação. Mas as primeiras instituições públicas fundadas ocorreram a partir da transferência da Corte portuguesa para o Rio de Janeiro em 1808.

Manfredi (2003) relata que, no período do Brasil Império, mudou o *status* do Brasil, que deixou de ser colônia para ser a sede do Reino. Em decorrência desse fato, nas primeiras décadas do século XIX, ocorreram significativas transformações econômicas e políticas. Para suprir as necessidades do Exército e da administração do Estado, foram fundadas, nessa época, as primeiras instituições públicas de ensino superior. As iniciativas de educação profissionalizante eram apoiadas ora pelas associações civis, ora pelas esferas estatais, cujo objetivo era a de preparar pessoas para os ofícios manufatureiros.

Segundo a parte histórica do Parecer CNE/CEB nº 16/99, elaborado pela Comissão Especial do Conselho Nacional de Educação para definir as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional de Nível Técnico, na primeira metade do século XIX, especialmente na década de 40, foram construídas nas capitais de províncias dez “Casas de Educandos e Artífices”, objetivando “a diminuição da criminalidade e da vagabundagem”. Na segunda metade do século XIX, foram fundados, por iniciativa de entidades da sociedade civil, os “Liceus de Artes e Ofícios”, que se localizavam nos principais centros urbanos, com livre acesso aos cursos para aqueles que quisessem estudar, exceto para os escravos.

Algumas dessas instituições foram mantidas após a proclamação da república em 1889 e serviram de base para a construção de uma rede nacional de escolas profissionalizantes. Diz Manfredi (2003) que, nesse período, as práticas educativas pareciam refletir duas concepções distintas, porém complementares: uma de natureza assistencialista, destinada aos pobres e desafortunados, a fim de que, mediante o trabalho, pudessem tornar digna a pobreza; e outra dizia respeito à educação como veículo de formação para o trabalho artesanal, considerado qualificado, socialmente útil e também legitimador da dignidade da pobreza.

Ainda, segundo os estudos dessa autora (ibid.), a partir do Brasil República até os anos 30, a configuração escolar e a educação profissional ganharam uma nova forma. Nesse período, houve uma vertiginosa aceleração dos processos de industrialização e de urbanização, demandando qualificação profissional no campo da instrução básica e profissional popular. Nessa fase, as poucas instituições de ensino de ofícios artesanais e manufatureiros cederam espaço às redes de ensino, fomentadas pelos governos estaduais e federal, igreja católica e associações sindicais. Os destinatários pertenciam aos setores populares urbanos, não necessariamente pobres, mas pessoas que iriam se transformar em trabalhadores assalariados.

É importante destacar que o ensino industrial teve início pelo Decreto nº 7.566, de 1909, assinado pelo então presidente Nilo Peçanha. O decreto determinava a criação e a manutenção, pelo Governo Federal, de 19 “Escolas de Aprendizes e Artífices”, em quase todos os estados, exceto no Rio Grande do Sul e no Distrito Federal, dando início a uma rede federal que culminou nas escolas técnicas e posteriormente nos Centros Federais de Educação Tecnológica (CEFET). As escolas de Aprendizes e Artífices perduraram por 33 anos, até 1942, e por elas passaram 141 mil alunos (em média 4.300 por ano), tornando-se obsoletas devido à mudança do perfil de profissionais, exigidos pelo mercado, de fabris para industriais; acrescentando-se a esse fator, a falta de atualização dos currículos oferecidos, correspondente à nova realidade.

A partir da década de 40, o ensino profissional apresentou alterações consideráveis, devido ao processo de industrialização desencadeado na década de 30, o qual exigia um crescente contingente de profissionais especializados, tanto para a indústria como para os setores de comércio e serviços. Assim, os seus diversos ramos passaram a ter uma legislação nacional específica. A partir de 1942, são baixadas, por decretos-leis, as conhecidas "Leis Orgânicas da Educação Nacional":

a) 1942 – Leis Orgânicas do Ensino Secundário (Decreto-lei nº 4.244/42);

b) 1942 - Leis Orgânicas do Ensino Industrial (Decreto-lei nº 4.073/42);

c) 1943 - Leis Orgânicas do Ensino Comercial (Decreto-lei nº 6.141/43);

d) 1946 - Leis Orgânicas do Ensino Agrícola (Decreto-lei nº 9.613/46).

Paralelamente a essas medidas legais e administrativas, foram criadas as Escolas do Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial (SENAI) em 1942, cuja mantenedora é a própria indústria, através da Confederação Nacional das Indústrias, com diversos cursos de aprendizagem, aperfeiçoamento e especialização industrial; e o Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial (SENAC) em 1946, cuja mantenedora é o comércio, através da Confederação Nacional do Comércio (Parecer nº 16/99).

Foi, conforme a parte histórica do referido Parecer, em 1942, no governo de Getúlio Vargas, que iniciou a consolidação do ensino profissional, no Brasil. Foram os decretos-leis que instituíram o conceito de "menor aprendiz" para os efeitos da legislação trabalhista e dispuseram sobre a "Organização da Rede Federal de Estabelecimentos de Ensino Industrial".

A partir da década de 50, consta também no Parecer nº 16/99, as Leis Federais nº 1.076/50 e 1.821/53 permitiram a equivalência entre estudos acadêmicos e profissionalizantes, possibilitando que os concluintes de cursos profissionais continuassem seus estudos acadêmicos em níveis superiores, desde que prestassem exame nas disciplinas não estudadas naqueles cursos.

A plena equivalência entre todos os cursos de mesmo nível, sem necessidade de exames e provas de conhecimentos, ocorreu com a promulgação da Lei Federal nº 4.024/6. Assim, com as novas formas de funcionamento, acabaram as figuras dos “aprendizes” e dos “artífices” para surgir o “auxiliar técnico” (com formação equivalente ao atual Ensino Fundamental) e o técnico (com formação equivalente ao atual Ensino Médio).

Na década de 60, estimulados pelo disposto no artigo 100 da Lei Federal nº 4.024/61, foram implantados em todo o território nacional uma série de experimentos educacionais orientados para a profissionalização de jovens, tais como os Ginásios Orientados para o Trabalho e o Programa de Expansão e Melhoria do Ensino.

Na década de 70, a Lei Federal nº 5.692/71 substitui a Lei nº 4.024/61, generalizando a profissionalização no segundo grau, atual Ensino Médio, e a partir de sua implantação, centenas e centenas de cursos profissionalizantes foram criados. A Lei Federal nº 5.692/71 instituiu a “profissionalização universal e compulsória para o ensino secundário”, estabelecendo, formalmente, a equiparação entre os cursos secundários e os cursos técnicos. Em conseqüência, a educação profissional não ficou mais limitada às instituições especializadas, recaindo sobre as instituições de ensino público, as quais não tiveram como se adaptar à nova realidade e não receberam o devido apoio para oferecer um ensino profissional de qualidade. Muitas críticas surgiram nessa época, um resumo delas é apresentada no Parecer nº 16/99 do Conselho Nacional de Educação – Câmara de Educação Básica (CNE/CEB):

> [...] a introdução generalizada do ensino profissional no segundo grau se fez sem a preocupação de se preservar a carga horária destinada à formação de base; o desmantelamento, em grande parte, das redes públicas de ensino técnico então existentes, assim como a descaracterização das redes do ensino secundário e normal mantidas por estados e municípios; a criação de uma falsa imagem de formação profissional com solução para os problemas de emprego, possibilitando a criação de muitos cursos mais por imposição legal e motivação político-eleitoral que por demandas reais da sociedade.

Em 1978, através da Lei nº 6.545/78, ocorreu a transformação das escolas técnicas federais em CEFETs, sendo que, somente em 1982, a referida lei foi realmente regulamentada.

A Lei Federal nº 7.044/82 torna facultativa a profissionalização do ensino no segundo grau, restringindo, praticamente, a formação profissional às instituições especializadas. Assim, as escolas de segundo grau reverteram a sua grade curricular e passaram a oferecer apenas o ensino acadêmico.

Novamente, é interessante analisar o descrito no Parecer nº 16/99 do CNE/CEB:

> Enfim, a Lei Federal nº 5.692/71, conquanto modificada pela de nº 7.044/82, gerou falsas expectativas relacionadas com a educação profissional ao se difundirem, caoticamente, habilitações profissionais dentro de um ensino de segundo grau sem identidade própria, mantido clandestinamente na estrutura de um primeiro grau agigantado.

A superação dos enfoques assistencialista e economicista da educação profissional, bem como do preconceito social que a desvalorizava, veio finalmente em 1996 com a atual Lei nº 9.394/96, Lei de Diretrizes e Bases, a nova LDB.

1.1 A EDUCAÇÃO PROFISSIONAL NA LEI 9.394/96 E O DECRETO FEDERAL Nº 2.208/97.

A nova LDB (Lei nº 9.394/96 de 20 de dezembro de 1996) juntamente com o Decreto Federal nº 2.208/97 conferem um novo perfil à educação profissional. Ficam estabelecidos dois níveis para a educação, conforme o artigo 21, Título V - Dos Níveis e das Modalidades de Educação e Ensino, da referida lei, que apregoa: “A educação escolar compõe-se de: I - educação básica, formada pela educação infantil, ensino fundamental e ensino médio; II - educação superior.”

Embora a LDB, nessa classificação inicial, não tenha mencionado o ensino profissional, este foi contemplado no Capítulo III do Título V, nos artigos 39 a 42, a seguir reproduzidos:

> Art. 39 - A educação profissional, integrada às diferentes formas de educação, ao trabalho, à ciência e à tecnologia, conduz ao permanente desenvolvimento de aptidões para a vida produtiva.
> Parágrafo único. O aluno matriculado ou egresso do ensino fundamental, médio e superior, bem como o trabalhador em geral, jovem ou adulto, contará com a possibilidade de acesso à educação profissional.
> Art. 40 - A educação profissional será desenvolvida em articulação com o ensino regular ou por diferentes estratégias de educação continuada, em instituições especializadas ou no ambiente de trabalho.
> Art. 41 - O conhecimento adquirido na educação profissional, inclusive no trabalho, poderá ser objeto de avaliação, reconhecimento e certificação para prosseguimento ou conclusão de estudos.
> Parágrafo único. Os diplomas de cursos de educação profissional de nível médio, quando registrados, terão validade nacional.
> Art. 42 - As escolas técnicas e profissionais, além dos seus cursos regulares, oferecerão cursos especiais, abertos à comunidade, condicionada a matrícula à capacidade de aproveitamento e não necessariamente ao nível de escolaridade.

Para Berger Filho (1999), o art. 39, além de destacar a relação entre a educação escolar e o processo formativo, quando faz referências à integração entre a educação profissional e as diferentes formas de educação, o trabalho, a ciência e a tecnologia, também confere à educação profissional a aprendizagem permanente de modo que a mesma proporcione ao educando um permanente desenvolvimento de aptidões para a vida produtiva.

"O parágrafo único desse artigo e os artigos 40 e 42 introduzem o caráter complementar da educação profissional e ampliam sua atuação para além da escolaridade formal [...]" (BERGER FILHO, 1999, p. 4). Este autor afirma ainda que os artigos estabelecem a forma de reconhecimento e certificação das competências adquiridas fora do ambiente escolar, tanto para prosseguir os estudos quanto para obter a titulação.

Como podemos observar, a educação profissional, na LDB, não substitui a educação básica nem com ela concorre. A valorização de uma não representa a negação da importância da outra. A qualidade da educação profissional pressupõe uma educação básica de qualidade e constitui condição indispensável para o êxito num mundo pautado pela competição, inovação tecnológica e crescentes exigências de qualidade, produtividade e conhecimento.

A Lei nº 9.394/96 considera as três premissas básicas que posteriormente foram contempladas no decreto nº 2.208/97 que trata da educação profissional de nível técnico. Pela sua importância destacamos estas premissas:

a) definir metodologias de elaboração de currículos a partir de competências profissionais gerais do técnico por área;

b) delegar autonomia a cada instituição para construir com flexibilidade seu currículo pleno de modo a considerar as peculiaridades do desenvolvimento tecnológico;

c) atender as demandas do cidadão, do mercado de trabalho e da sociedade.

No que diz respeito ao currículo, o art. 7º do Decreto nº 2.208/97 estabelece que:

> [...] para a elaboração das diretrizes curriculares para o ensino técnico deverão ser realizados estudos de identificação do perfil de competências necessárias às atividades requeridas, ouvindo os setores interessados, inclusive trabalhadores e empregadores.

Assim, a definição de competências e habilidades e as bases tecnológicas para a formação de um profissional devem estar embasadas em uma análise do processo produtivo de cada área profissional. Dessa forma, a organização curricular ganha em organicidade, flexibilidade e adequação às atividades produtivas.

É, também, conferida à escola a liberdade de estabelecer projetos curriculares próprios, por habilitação ou por área, por disciplinas ou módulos, com a possibilidade de fazer alterações, sem previa autorização, em pelo menos 30% da carga horária mínima obrigatória. A organização curricular por módulo permite uma maior flexibilidade, possibilitando ao aluno interromper o andamento do curso com a possibilidade de reingresso, cursar um ou mais módulos bem como receber um certificado de qualificação.

Ainda pelo Decreto nº 2.208/97 fica estabelecido que a educação profissional de ensino técnico será complementar ao ensino médio, podendo ocorrer de forma concomitante ou seqüencial a ele desde que, observando habilidades e competências, estabeleça-se para cada uma das áreas o momento a partir do qual a concomitância poderá se dar.

Finalmente, destacamos alguns princípios importantes mencionados no Parecer nº 16/99 do CNE/CEB que acompanhou a proposta aprovada para as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional de Nível Técnico:

a) Estética da sensibilidade – está diretamente relacionada com os conceitos de qualidade e respeito ao cliente. Essa dimensão de respeito pelo cliente exige o desenvolvimento de uma cultura do trabalho centrada no gosto pelo trabalho bem feito e acabado, quer na prestação de serviços, quer na produção de bens ou conhecimentos.

b) Política da igualdade – o direito de todos à educação para o trabalho é o principal eixo da política da igualdade como princípio orientador da educação profissional.

c) Ética da identidade – seu principal objetivo é a constituição de competências que possibilite aos trabalhadores uma maior autonomia para gerenciar sua vida profissional. A competência inclui o decidir e agir em situações imprevistas, o que significa intuir, pressentir e arriscar com base na experiência e no conhecimento.

Entendemos que esses princípios devem nortear o trabalho do docente do ensino profissional. Não se pode falar em desenvolvimento de competências, em busca da identidade profissional, se o mediador desse processo, o docente, não estiver adequadamente preparado para essa relevante ação educativa e devidamente apoiado pela escola. E esta, por sua vez, deverá incorporar em seu projeto pedagógico estratégias de estímulo e cooperação.

Concluindo este capítulo, podemos dizer que a legislação em vigor confere um novo perfil à educação profissional no Brasil, talvez, aquele que sempre deveria ter sido, o de ser uma etapa de consolidação da educação básica, de aprimoramento do educando como pessoa humana, de aprofundamento dos conhecimentos adquiridos na educação básica, para continuar aprendendo, e o de preparação para o trabalho e o exercício da cidadania.

2 ESCOLA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL DE FARROUPILHA ETFAR/UCS

Neste capítulo, apresentaremos uma escola de educação profissional da serra gaúcha, na qual desenvolvemos um projeto pedagógico para a disciplina de Matemática Aplicada do curso Técnico de Eletrônica Industrial.

Trata-se da Escola de Educação Profissional de Farroupilha (ETFAR), administrada pela Fundação Universidade de Caxias do Sul (UCS), que foi escolhida para administrá-la devido a sua vasta experiência na área educacional. A ETFAR foi inaugurada no dia 14 de maio de 2001 e está localizada na Avenida São Vicente, 705, na cidade de Farroupilha – RS.

2.1 BREVE HISTÓRICO

A ETFAR, dentro das perspectivas que regem o ensino profissionalizante no país, descrito no capítulo 1, tem o propósito de formar profissionais para atuarem nas empresas da Região Nordeste do Estado. Sua origem foi o resultado de uma mobilização regional, iniciada nos anos 90, que integrou:

a) Fundação Universidade de Caxias do Sul;

b) Prefeitura Municipal de Farroupilha;

c) Câmara de Indústria e Comércio e Serviços de Farroupilha – CICS;

d) Sindicato da Indústria de Material Plástico do Nordeste Gaúcho – SIMPLAS;

e) Conselho Regional de Desenvolvimento da Serra - COREDE/SERRA.

Os passos para a consecução desse projeto estavam perfeitamente amparados pelo § 5º do art. 47 da Lei nº 9.649, de 27 de maio de 1998, transcrito abaixo.

> Art. 47 – [...]
>
> § 5º - A expansão da oferta de educação profissional, mediante a criação de novas unidades de ensino por parte da União, somente poderá ocorrer em parceria com Estados, Municípios, Distrito Federal, setor produtivo ou organizações não-

> governamentais, que serão responsáveis pela manutenção e gestão dos novos estabelecimentos de ensino.

Os recursos para esse projeto, oriundos do Banco Interamericano de Desenvolvimento – BID, foram repassados pelo Programa de Expansão da Educação Profissional – PROEP do Ministério da Educação.

A inauguração, em 14 de maio de 2001, presidida pelo Ministro da Educação, ocorreu quatro anos após a assinatura do convênio entre os parceiros instituidores. A autorização de funcionamento da escola ocorreu em 09 de janeiro de 2002, pelo Parecer nº 60/2002 do Ministério da Educação (MEC).

A ETFAR iniciou suas atividades em março de 2002, oferecendo os cursos técnicos de Eletrônica Industrial, Telecomunicações, Processamento de Polímeros e Projeto e Gerenciamento de Redes de Computadores. Em agosto do mesmo ano, passou a funcionar o curso de Desenvolvimento de Software. Nos anos subseqüentes, novos cursos técnicos foram criados, atendendo à demanda regional: em 2003, Desenvolvimento de Produto e Metalurgia; em 2005, Ferramentaria; em 2006, Eletrotécnica.

Esses cursos têm duração de dois anos, mais um semestre de estágio.

A escola optou por organizar seu projeto pedagógico na forma de módulos, atendendo às recomendações sugeridas na legislação. Entende-se por módulo, um conjunto didático pedagógico sistematicamente organizado para o desenvolvimento das competências profissionais pertinentes. Sua duração foi fixada em 350 horas-aula e reúne cinco disciplinas por semestre letivo, totalizando uma carga horária de 1800 horas. Atualmente, os cursos são oferecidos no turno da noite das 19 às 22 horas e 30 minutos.

A ETFAR, conhecendo a relevância para o processo produtivo e a necessidade de contratação de profissionais com conhecimento técnico que se integrem de forma dinâmica às equipes de trabalho, oferece à comunidade cursos especiais, denominados de cursos básicos. Estes podem ser formatados, no que se refere à carga horária, datas e locais, de acordo com as necessidades da comunidade.

Segue relação dos cursos básicos por área:

a) Área da Qualidade: LID – Leitura e Interpretação de Desenho e Metrologia; FMEA - Análise do Modo de Falha e Efeito; MASP - Método de Análise de Falha e Efeito; CEP - Controle Estatístico do Processo; CNC Básico; Operador de Máquinas Operatrizes; *Solid Works*; PPAP - Plano de Aprovação da Peça de

Produção; CNC Avançado; Auditoria de Processo; Hidráulica Básica; TPM - Manutenção Produtiva Total; Hidráulica Avançada; Auditoria de Produto; Pneumática Básica; Gestão de Projetos; Pneumática Avançada.

b) Área da Informática: Informática Básica.

c) Área da Eletro-Eletrônica: Básico de Rede de Computadores; Eletrotécnica Aplicada; Linux; Eletrônica Básica; Desenvolvimento de Páginas Web; Eletrônica Avançada; Gestão de Projetos; Programação de CLP; Programação em Microcontroladores Pic; CAD para Eletrônica Industrial; Eletricidade Automotiva; NR-10 Segurança em Instalações e Serviços em Eletricidade.

d) Área de Polímeros: Polímeros de Engenharia; Materiais Poliméricos; Processo de Extrusão de Polímeros; Processo de Injeção de Polímeros.

A ETFAR está assim cumprindo o previsto no artigo 42 da LDB que apregoa: “As escolas técnicas e profissionais, além dos seus cursos regulares, oferecerão cursos especiais, abertos à comunidade, condicionada a matrícula à capacidade de aproveitamento e não necessariamente ao nível de escolaridade.”

2.2 ESTRUTURA DA INSTITUIÇÃO

A escola possui uma área construída de 4,7 mil m², distribuída em três blocos, com 1,3 mil m² cada um, sendo que o Bloco III tem um subsolo com 583,94m². Possui 27 laboratórios técnicos, 13 salas de aula, 1 almoxarifado central e 2 de apoio, 1 auditório com 200 lugares, lanchonete, biblioteca, sala de professores e demais dependências administrativas.

A equipe administrativa conta com um diretor, uma supervisora pedagógica, uma orientadora escolar e três chefes de departamento; possui 15 funcionários que atuam na secretaria, biblioteca, assessoria de comunicação e nos laboratórios de informática, eletrônica e metalurgia.

O corpo docente, até o presente momento, é formado por 66 professores das mais variadas áreas; o corpo discente têm 394 alunos regularmente matriculados nos cursos técnicos.

2.3 PERFIL DOS ALUNOS DA ETFAR

A identidade de cada curso é definida pelo perfil de seus alunos. Para traçar o perfil do aluno da ETFAR, utilizamos algumas informações contidas nas fichas de matrículas e dados coletados pelo Serviço de Orientação Escolar (SOE), referentes ao ano de 2006.

Apresentamos a seguir gráficos que ilustram diversos aspectos do corpo discente.

a) Gênero

Como podemos observar, o quadro de alunos da escola é composto, na sua grande maioria, por homens, refletindo o perfil do mercado de trabalho regional nas áreas técnicas.

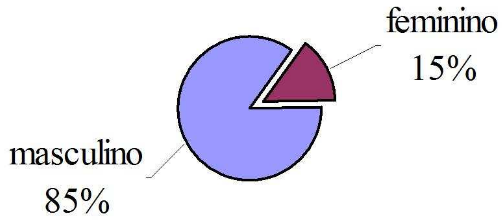


Figura 1 - Gênero dos alunos da ETFAR
Fonte: Serviço de Orientação Escolar da ETFAR. Ano: 2006

b) Idade

Mais de 75% dos alunos têm menos de 25 anos de idade, demonstrando uma forte prevalência de jovens.

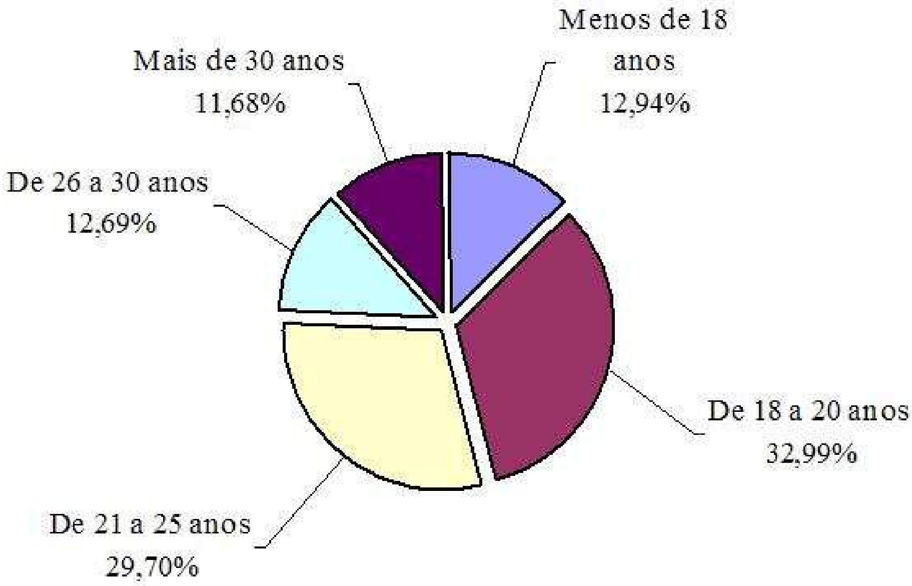


Figura 2 - Idade dos alunos da ETFAR
Fonte: Serviço de Orientação Escolar da ETFAR. Ano: 2006

c) Tipo de formação do ensino médio

Como se pode constatar, uma parcela considerável do corpo discente, 85%, teve sua formação básica no ensino público. Desse total, cerca de 29% cursaram o ensino médio na modalidade de Supletivo ou de Educação de Jovens e Adultos (EJA).

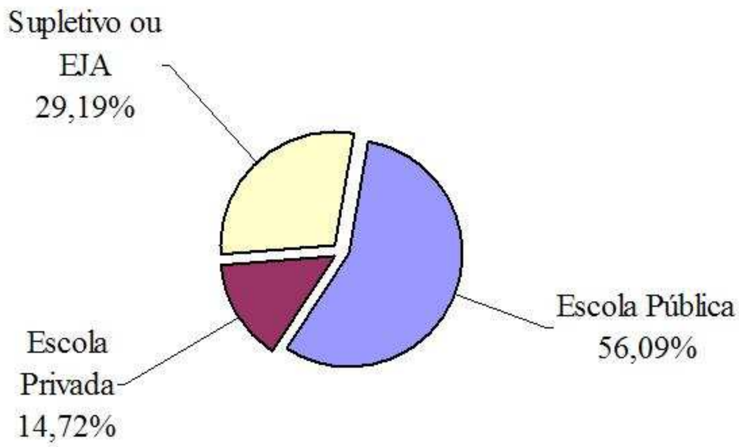


Figura 3 - Tipo de formação do ensino médio dos aluno da ETFAR
Fonte: Serviço de Orientação Escolar da ETFAR. Ano: 2006

d) Tipo de bolsa de estudos

Como se verifica, cerca de 60% dos alunos possuem algum tipo de auxílio educação através de bolsas de estudos.

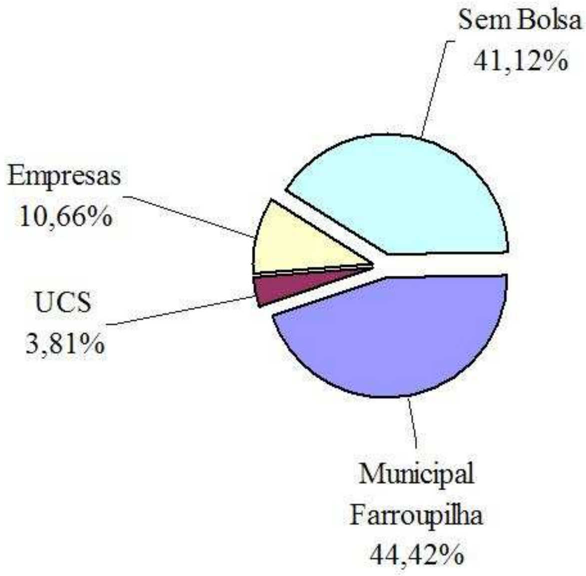


Figura 4 - Tipo de bolsa dos alunos da ETFAR
Fonte: Serviço de Orientação Escolar da ETFAR. Ano: 2006

É importante ressaltar que, do total de alunos com bolsas de estudo, o Município de Farroupilha contribui com 75%. Essas bolsas, que variam de 20 a 100% do valor da mensalidade, são exclusivas para moradores de Farroupilha e são distribuídas conforme os recursos financeiros dos alunos.

Outro importante fomentador do ensino é o grupo de empresas que auxilia na qualificação dos seus funcionários, sendo que mais de 10% do total de alunos e quase 20% do total de bolsas são custeadas por elas.

e) Trabalhadores

Como se pode verificar, a maioria dos alunos, 70%, são trabalhadores que buscam qualificação para sua atividade profissional ou buscam um melhor posicionamento no mercado de trabalho.

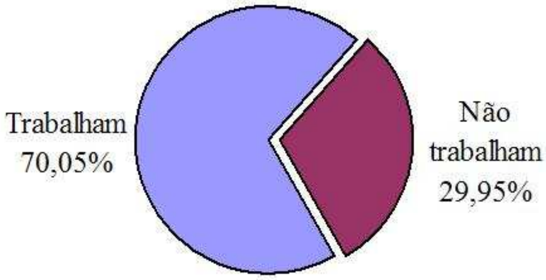


Figura 5 - Alunos da ETFAR que trabalham
Fonte: Serviço de Orientação Escolar da ETFAR. Ano: 2006

Em resumo, o aluno da ETFAR é essencialmente do sexo masculino; tem cerca de 25 anos de idade; sua formação básica foi em escola pública; recebe algum auxílio para sua educação em forma de bolsa de estudo e trabalha em empresas da região.

3 CURSO TÉCNICO DE ELETRÔNICA INDUSTRIAL DA ETFAR

O profissional formado em Eletrônica Industrial deverá estar apto a atuar sob a supervisão de engenheiros e tecnólogos elétricos, eletrônicos e mecânicos, desenvolvendo atividades relacionadas a teste e medição de componentes, mensuração e montagem de equipamentos eletrônicos, implantação e desenvolvimento de sistemas eletrônicos bem como na manutenção destes. Esse profissional poderá atuar em empresas que projetam, produzem, instalam e utilizam equipamentos eletrônicos em sua linha de produção e também atuar na prestação de serviços.

A ETFAR, a fim de formar profissionais com as referidas aptidões, inicialmente, ofereceu o curso com uma base curricular que, posteriormente, devido às necessidades pedagógicas e de mercado, foi alterada. As alterações ocorreram tanto no que se refere à seqüência das disciplinas no curso como à exclusão e inclusão de novas disciplinas, dependendo das necessidades do público alvo.

Podemos constatar essas alterações, comparando as bases curriculares da tabela 1.

Tabela 1 – Grade curricular/2002 do curso Técnico em Eletrônica Industrial da ETFAR

Base Curricular/ 2002	Base Curricular / 2005
Módulo I 1. Informática Básica 2. Princípios de Eletricidade 3. Português Instrumental e Inglês Técnico 4. Eletrotécnica* 5. Programação*	**Módulo I – 350 horas** 1. Informática Básica 2. Princípios de Eletricidade 3. Português Instrumental e Inglês Técnico 4. Matemática Aplicada*** 5. Sistemas e Gestão da Qualidade*
Módulo II 1. Luminotécnica* 2. Eletrônica Analógica 3. Eletrônica Digital 4. Eletrônica de Potência* 5. Desenho Técnico I** 6. Aplicação Prática I	**Módulo II – 350 horas** 1. Eletrotécnica* 2. Programação* 3. Eletrônica Analógica 4. Eletrônica Digital 5. Aplicação Prática I

Continua

Conclusão

Base Curricular/ 2002	Base Curricular / 2005
Módulo III	**Módulo III – 350 horas**
1. Microcontrolador	1. Microcontroladores
2. Máquinas Elétricas	2. Eletrônica de Potência*
3. Comandos Eletro-eletrônicos*	3. Máquinas Elétricas
4. Fontes de Alimentação**	4. Eletrônica Aplicada***
5. Aplicação Prática II	5. Aplicação Prática II
Módulo IV	**Módulo IV – 350 horas**
1. Aplicação Prática III	1. Luminotécnica*
2. Desenho Técnico II**	2. Sistemas Hidráulicos e Pneumáticos
3. Sistemas de Aquisição de Dados	3. Aplicação Prática III
4. Sistemas Hidráulicos e Pneumáticos	4. Comandos Eletro-eletrônicos*
5. Sistemas e Gestão da Qualidade*	5. Sistemas de Aquisição de Dados

(*) Indica as disciplinas que continuam existindo no curso, porém em módulos distintos.
(**) Indica as disciplinas que foram excluídas da primeira base curricular.
(***) Indica as disciplinas que foram incluídas na nova base curricular.
Fonte: Serviço de Orientação Escolar da ETFAR. Ano: 2006

No curso de Eletrônica Industrial, as habilidades e competências, por disciplina são:

a) **Módulo I**: Básico:

- **Informática Básica**: saber utilizar processadores de texto, planilhas eletrônicas, softwares de apresentação (*power point*), navegadores de internet e gerenciadores de e-mail.

- **Português Instrumental e Inglês Técnico**: leitura e interpretação de texto; elaborar e redigir relatórios, currículos; ler e interpretar manuais e/ou documentos técnicos em inglês.

- **Matemática Aplicada**: reconhecer e transformar unidades de medida; operar com números escritos na forma de potências de base dez; escrever um número em notação científica e de engenharia; aplicar as regras de arredondamento; identificar percentuais de erro e saber calcular e interpretar seu significado; reconhecer uma equação linear; resolver sistemas lineares nas diferentes formas de resolução e aplicar esses conceitos na análise de circuitos elétricos; identificar um número complexo, suas formas de representação; operar com números complexos nas diferentes formas e aplicar esses conceitos na análise de circuitos elétricos.

- **Princípios de Eletricidade**: conhecer e identificar as grandezas elétricas em corrente contínua; identificar falhas em circuitos elétricos, utilizando conceitos básicos de eletricidade e instrumentos de medição; identificar e montar circuitos elétricos a partir de diagramas elétricos.

- **Sistemas de Gestão da Qualidade**: conhecer, identificar e aplicar formas de gerir uma empresa.

b) **Módulo II**: Desenvolvimento de Circuitos Eletrônicos (Qualificação: Auxiliar de Eletrotécnica);

- **Programação**: reconhecer e transformar problemas em soluções lógicas, utilizando como ferramentas fluxograma, algoritmos e linguagem de programação.

- **Eletrotécnica**: conhecer e identificar as grandezas elétricas em corrente alternada; identificar falhas em circuitos elétricos, utilizando conceitos básicos de eletricidade e instrumentos de medição; identificar e montar circuitos elétricos a partir de diagramas elétricos.

- **Eletrônica Analógica**: conhecer e identificar dispositivos semicondutores básicos; identificar falhas em circuitos eletrônicos, utilizando conceitos básicos de eletroeletrônica e instrumentos de medição; identificar e montar circuitos eletrônicos a partir de diagramas elétricos.

- **Eletrônica Digital**: conhecer e identificar dispositivos digitais básico; identificar falhas em circuitos digitais, utilizando conceitos básicos de lógica digital e instrumentos de medição; identificar e montar circuitos digitais a partir de diagramas elétricos.

- **Aplicação Prática I**: utilizar ferramentas de confecção de lay-out de circuitos eletrônicos e executar atividades definidas no plano de ação pedagógica empreendedora.

c) **Módulo III**: Desenvolvimento de Sistemas Eletroeletrônicos Industriais (Qualificação: Auxiliar de Eletrônica Básica);

- **Eletrônica de Potência**: conhecer e identificar dispositivos semicondutores de potência; identificar falhas em circuitos de potência, utilizando conceitos básicos de eletrônica e eletrotécnica e instrumentos de medição; identificar e montar circuitos a partir de diagramas elétricos.

- **Eletrônica Aplicada**: conhecer e identificar circuitos, utilizando amplificadores operacionais; identificar falhas em circuitos, utilizando conceitos básicos de eletrônica e instrumentos de medição; identificar e montar circuitos a partir de diagramas elétricos.
- **Máquinas Elétricas**: identificar as diferentes tecnologias de motores elétricos, suas características técnicas, suas aplicações e diagnósticar falhas em máquinas elétricas.
- **Microcontroladores**: conhecer e identificar diferentes tecnologias e arquiteturas de microcontroladores e ferramentas de programação; elaborar circuitos funcionais, utilizando microcontroladores e programação em linguagem *assembly*.
- **Aplicação prática II**: conhecer e identificar diferentes tecnologias e arquiteturas de Controladores Lógicos Programáveis e ferramentas de programação; elaborar circuitos funcionais, utilizando linguagem *ladder* e executar atividades definidas no plano de ação pedagógica empreendedora.

d) **Módulo IV**: Desenvolvimento de Sistemas Eletrônicos Microprocessados (Qualificação: Auxiliar de Eletrônica Avançado).

- **Luminotécnica**: conhecer e identificar as diferentes tecnologias para iluminação e distribuição de energia elétrica em ambiente industrial, suas características técnicas, suas aplicações e diagnosticar falhas; interpretar diagramas e dimensionar circuitos elétricos.
- **Sistemas Hidráulicos e Pneumáticos**: aplicar os conhecimentos teóricos e práticos de pneumática e hidráulica para montar e diagnosticar falhas em sistemas eletropneumáticos e eletrohidráulicos.
- **Comandos Eletro-eletrônicos**: aplicar os conhecimentos teóricos na prática de comandos.
- **Sistemas de Aquisição de Dados**: interagir com sistemas de dados e aplicá-los em projetos práticos.
- **Aplicação prática III**: concluir o trabalho definido no plano de ação pedagógica empreendedora.

Cada professor é responsável pelo desenvolvimento das habilidades e competências da disciplina que ministra. Contudo, seu trabalho em sala de aula deverá estar em sintonia com os demais professores do módulo e também do curso. Neste sentido, há reuniões periódicas do corpo docente com o objetivo de propor melhorias, bem como compartilhar conhecimentos e experiências a fim de proporcionar ao aluno uma formação contínua e eficaz.

A forma de avaliar o aluno também é responsabilidade de cada professor, mas atende algumas regras gerais da escola e especificidades da disciplina que ministra. Durante o semestre letivo, o aluno é submetido a duas avaliações denominadas avaliações integradas ou interdisciplinares, as quais são organizadas pelos professores do módulo que, em geral, elaboram situações problema que, para serem solucionadas, exigem do aluno, além dos conhecimentos adquiridos em cada disciplina, habilidades para relacioná-los.

3.1 A MATEMÁTICA COMO DISCIPLINA INTEGRANTE DA BASE CURRICULAR DO CURSO DE ELETRÔNICA INDUSTRIAL

Quando o curso foi organizado, não estava prevista uma disciplina específica de Matemática. A equipe responsável pela organização do currículo entendeu que, embora a matemática fosse de fundamental importância e utilizada em grande escala como ferramenta em praticamente todas as disciplinas do curso, o aluno que ingressasse no curso, tendo ele ensino médio completo, já possuiria os pré-requisitos básicos.

No entanto, atuando como professora da ETFAR desde o primeiro semestre de seu funcionamento (2002), presenciamos as constantes reclamações dos professores do curso de Eletrônica Industrial, indignados com a falta de conhecimentos básicos de matemática de seus alunos. Freqüentemente, essas críticas eram exemplificadas com situações concretas de atividades didáticas que continham erros inadmissíveis para alunos egressos do ensino médio. Para ilustrar, citamos algumas frases, colocações feitas por professores, colhidas por nós, em diversas ocasiões: *"Os alunos não sabem nada de matemática"; "Eles não sabem nem isolar uma variável numa fórmula"; "Na resolução de uma equação, eles usam a regra 'se troca de lado então troca de sinal para qualquer operação'"; "Não sabem reconhecer quando uma fórmula sofre alguma manipulação matemática se estas representam a mesma coisa ou não";*

“Não sabem substituir os dados, somar, subtrair, multiplicar ou dividir, respeitando a ordem das operações”; “Operar com números escritos na forma de potência de dez, eles nunca viram”; “Não têm habilidades para transformar unidades de medida”; “Se a unidade for acompanhada por um múltiplo ou submúltiplo, eles dizem nunca ter visto isto antes”; “Falar em casas decimais, arredondamento, notação científica, uso da calculadora científica é estar falando de algo que, alguns têm uma vaga lembrança”.

Mas, as colocações que mais nos preocuparam, que mais nos fizeram refletir, foram: “*O que vocês, professores de Matemática, ensinam para os alunos na escola?”; “O que eles vão fazer na escola que saem sem saber nada?”*. E, como se não bastasse, complementavam seus comentários dizendo: *“Na minha época, o ensino era melhor, aprendia-se mais”*.

As críticas também eram dirigidas ao atual sistema educacional brasileiro, tanto ao sistema privado quanto ao público regular, ou ao de Educação de Jovens e Adultos (EJA), ou Supletivo. Justificavam tais críticas, dizendo que se a lei fosse cumprida não teríamos alunos com tantas dificuldades. A lei a que eles se referiam é a atual LDB, especialmente ao art. 35, que prevê:

> Art. 35 - O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:
> I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
> II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
> III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
> IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Não queremos aqui julgar a veracidade dessas últimas críticas, mesmo porque os dados do corpo discente da escola não nos permitem projetar uma conclusão mais global em níveis nacionais. Outra hipótese é de que as dificuldades apresentadas pelos alunos são devidas ao tempo de afastamento dos bancos escolares e, em conseqüência, presume-se que tenham “esquecido” o conteúdo. Aqui, escrevemos entre aspas, pois, na verdade, quando ocorre a aprendizagem, não se esquece o que se aprendeu.

Com o passar de alguns semestres, os professores constataram que deficiências matemáticas impediam o bom desempenho dos alunos nas disciplinas técnicas, o que ensejou a reformulação do currículo, a reorganização das disciplinas e a inserção, entre outras, de uma disciplina de Matemática Aplicada. Esta nova disciplina passou a compor o Módulo I, como se pode verificar na descrição da base curricular/2005 (Tabela 1).

Os critérios usados para selecionar os conteúdos foram o da utilidade e o da aplicabilidade, tendo em mente a formação básica de um técnico em eletrônica. Foi recomendado pelo corpo docente que os tópicos fossem sempre apresentados com muitos exemplos e aplicações num cenário de eletrônica básica. Os conteúdos selecionados foram:

- Unidades de Medida

- Sistema Internacional de Unidades (SI)
- Unidades Derivadas do SI
- Prefixos (múltiplos e submúltiplos)

- Potências de base dez

- Propriedades da potenciação
    - Potência de 10^n
    - Inverso da Potência de 10^n
    - Produto
    - Quociente
    - Potência de uma potência
- Operações aritméticas básicas
    - Adição e Subtração
    - Multiplicação
    - Divisão
    - Potências de dez elevadas a um expoente *m*
- Conversão de unidades de medida usando potências de dez

- Notação

- Notação Científica
- Notação de Engenharia

- Arredondamento e Erro

- Teoria do arredondamento
- Teoria do erro:
    - Erro relativo
    - Erro absoluto

- Sistemas de Equações Lineares

- Equação Linear:
    - Solução de uma Equação Linear
- Métodos de resolução de sistema lineares:

- Método da Adição
- Método da Substituição
- Método de Cramer
- Método da Eliminação Gaussiana
- Aplicação do conceito de sistema de equações lineares no cálculo de tensão e corrente de circuitos elétricos.

- Números Complexos

- Representação dos Números Complexos:
  - Forma Retangular, Cartesiana ou Algébrica
  - Forma Polar
  - Forma Trigonométrica
  - Forma Exponencial
- Operações com Números Complexos na Forma Algébrica:
  - Adição e Subtração
  - Multiplicação
  - Divisão
- Operações com Números Complexos na Forma Polar, Trigonométrica ou exponencial:
  - Multiplicação
  - Divisão
  - Potenciação
- Aplicação do conceito de números complexos no cálculo de tensão e corrente em circuitos elétricos.

4 A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA APLICADA

4.1 HISTÓRICO

No ano de 2005, fomos convidadas a assumir a regência da disciplina de Matemática Aplicada para o curso de Eletrônica Industrial da ETFAR. Nessa mesma época, iniciamos o curso de pós-graduação em nível de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática, (PPGEM) no Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Conscientes das dificuldades dos alunos e tendo a necessidade de desenvolver uma pesquisa para o curso de pós-graduação, resolvemos associar os conhecimentos teóricos, oportunizados pela academia, à experiência prática de regente da disciplina de Matemática Aplicada, fazendo da sala de aula o campo de pesquisa.

A primeira experiência com a disciplina confirmou tudo que havia sido apontado pelos colegas docentes. Havia, pois, necessidade de investir em novas estratégias de ensino. Então, nos dois semestres seguintes, preparamos uma proposta de ensino contemplando aspectos que considerávamos relevantes: sondagem, texto didático próprio, estratégias de motivação e otimização do tempo em sala de aula.

A partir desse ponto, passamos a relatar os passos que nortearam o trabalho desenvolvido no ano de 2006 e que culminaram com a elaboração de um texto didático que será apresentado no capítulo 5.

4.2 Perfil do aluno da disciplina de Matemática Aplicada

Todo projeto pedagógico deve se preocupar com o perfil de seu público-alvo. Neste caso, são os 27 alunos da disciplina de Matemática Aplicada, módulo I, do curso Técnico de

Eletrônica Industrial, do segundo semestre de 2006. Seu perfil com relação à idade, ao ano de conclusão do ensino médio e ao tipo de formação são apresentados nos gráficos abaixo:

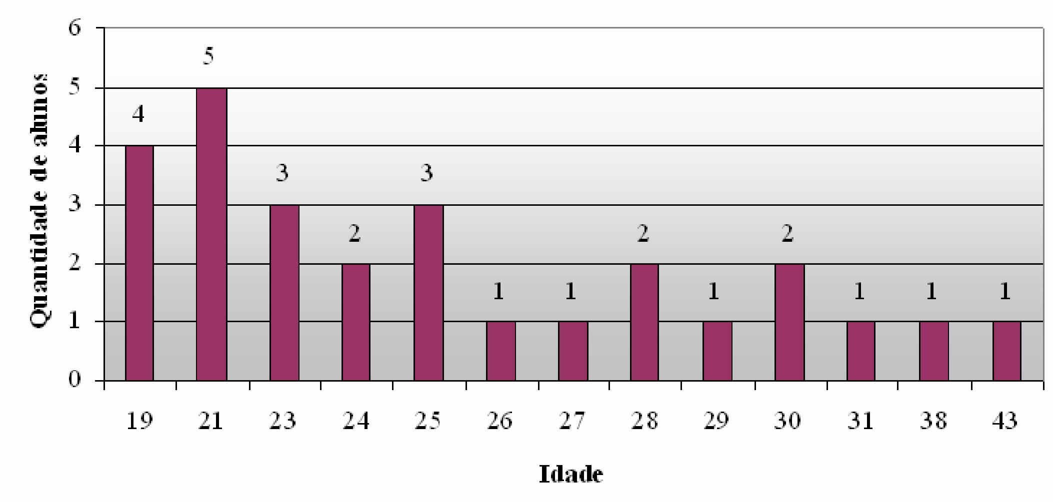


Gráfico 1 - Quantidade de alunos por idade na disciplina de Matemática Aplicada, do curso Técnico em Eletrônica Industrial da ETFAR, do segundo semestre de 2006.
Fonte: Secretaria da ETFAR. Ano: 2006

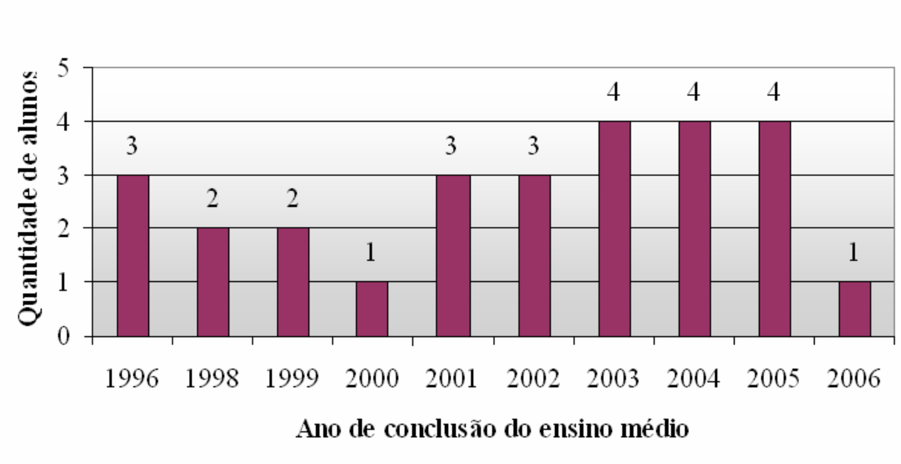


Gráfico 2 - Quantidade de alunos por ano de conclusão do ensino médio na disciplina de Matemática Aplicada, do curso Técnico em Eletrônica Industrial da ETFAR, do segundo semestre de 2006.
Fonte: Secretaria da ETFAR. Ano: 2006

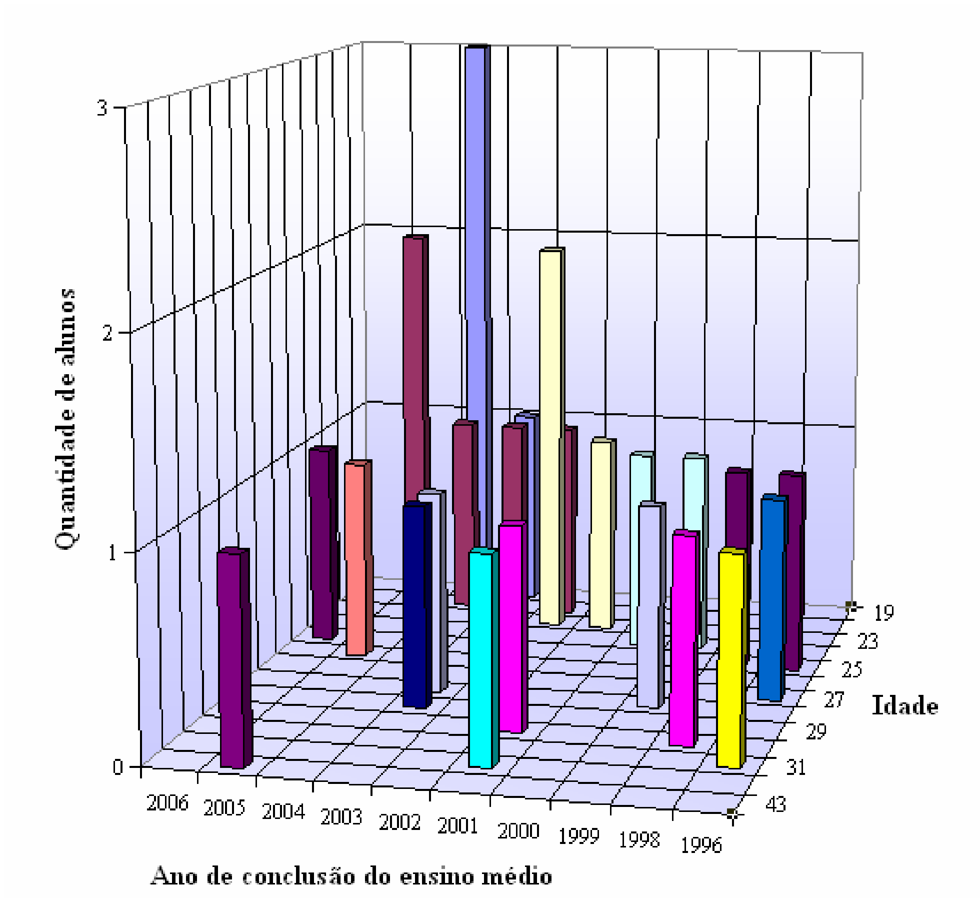


Gráfico 3 - Quantidade de alunos por idade e ano de conclusão do ensino médio na disciplina de Matemática Aplicada, do curso Técnico em Eletrônica Industrial da ETFAR, do segundo semestre de 2006.
Fonte: Secretaria da ETFAR. Ano: 2006

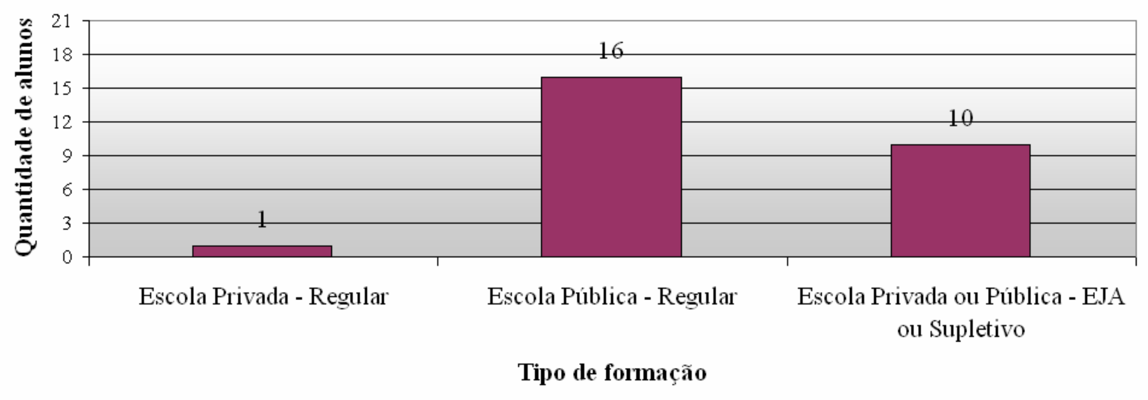


Gráfico 4 - Quantidade de alunos por tipo de formação do ensino médio na disciplina de Matemática Aplicada, do curso Técnico em Eletrônica Industrial da ETFAR, do segundo semestre de 2006.
Fonte: Secretaria da ETFAR. Ano: 2006

Dos gráficos apresentados anteriormente, destacamos dois aspectos:

a) o intervalo de tempo decorrido desde a conclusão do ensino médio;

b) a modalidade de formação básica.

A idade, em média, dos alunos dessa turma é de 25 anos, tendo concluído sua formação básica há cerca de 4 a 5 anos em escolas públicas.

Esses dados serão importantes para o planejamento da disciplina. Entende-se por planejamento da disciplina a distribuição dos conteúdos e suas ênfases ao longo da carga-horária prevista e a metodologia de ensino e suas estratégias. Esse será o tema do próximo capítulo.

4.2.1 Sondagem

Com o objetivo de identificar as lacunas nos conhecimentos básicos de matemática, apresentadas pelos alunos, bem como de chamar sua atenção para a importância da disciplina, foi elaborada uma sondagem, composta de dez questões, que foi aplicada na primeira aula (pré-teste).

Para responder às questões, foi permitido utilizar o material que tinham trazido para a aula, inclusive a calculadora. Foi solicitado que tentassem, ao máximo, resolver as questões. Caso não chegassem a nenhuma conclusão, foi sugerido que, mesmo assim, descrevessem suas tentativas ou o motivo que os impedia de ir adiante. Ao final do trabalho, foi solicitado que, no verso da folha, escrevessem o seu parecer em relação à atividade proposta.

Apresentaremos a seguir as questões da sondagem. Incluímos também, abaixo de cada questão, os objetivos da mesma.

Questão 1: Realize as operações abaixo e apresente os resultados em notação científica com três casas decimais, observando regras de arredondamento.

a) $\left(4{,}5678x10^{7}\ .\ 21{,}1567x10^{-3}\right) + 6712{,}89x10^{6}$

b) $\dfrac{\left(345{,}9785x10^{3}\right)^{5}}{7x10^{8}} - 2{,}78765x10^{8}$

Objetivo: identificar no aluno habilidade em operar com números escritos na forma de potência de dez, representação de um número na notação científica e aplicação de regras de arredondamento de um número.

Questão 2: Qual(is) o(s) critério(s) que você utilizou para arredondar os resultados dos itens a) e b) da questão 1? Cite-os.

Objetivo: Identificar se o aluno tem conhecimento das regras de arredondamento.

Questão 3: O número $675{,}947 \times 10^{-11}$ escrito na forma de notação científica é _______ e escrito na forma de notação de engenharia é _______. Qual a diferença entre as duas notações?

Objetivo: Escrever o número na notação solicitada e saber se posicionar quanto à diferença entre as duas notações.

Questão 4: Sendo $V_r = \dfrac{(R_1 + R_2)V_H}{R_1}$, com V_H = 5 mV, R_1= 820 Ω e R_2 = 12 kΩ. Qual o valor de V_r?

Objetivos: Identificar e quantificar múltiplos e submúltiplos associados às grandezas fornecidas; transformar e relacionar unidades de medidas e equacionar a função.

Questão 5: Sendo $L = \dfrac{\mathrm{N}^2\ \mathrm{d}^2\ A\ \mu_r x10^{-6}}{0{,}46\ \mathrm{d} + \mathrm{c}}$, com N = 100, d = 10 mm, c = 50 mm, μ_r = 5.213 e A = 1. Determine L.

Observação: Os valores de d = 10 mm e c = 50 mm, na fórmula devem estar em metros.

Objetivos: Transformar e relacionar unidades de medidas, operar com potências de base dez e equacionar a função.

Questão 6: Dado que a voltagem V em um capacitor de capacidade C carregado com uma carga Q é $V = \frac{Q}{C}$. É possível dizer que $V = \frac{Q}{C} \Rightarrow \frac{V}{Q} = \frac{1}{C}$? Ou seja, esta implicação é verdadeira? Justifique.

Objetivo: Identificar e aplicar regras matemáticas de razão e proporção que permitam verificar a veracidade ou não da implicação.

Questão 7: Tendo dois capacitores C_1 e C_2 associados em série, sabe-se que $V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$. É o mesmo que escrever $\frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$? Você concorda? Demonstre.

Objetivo: Colocar o termo comum em evidência e trazê-lo para o lado esquerdo da igualdade de forma matematicamente correta.

Questão 8: Se o inverso do capacitor equivalente (C_{eq}) é igual ao somatório do inverso de cada capacitor (C_1, C_2), ou seja, $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ isso implica em $C_{eq} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 . C_2}$? Mostre.

Objetivo: Identificar a falsidade da implicação usando regras como mínimo múltiplo comum e inversão de termos.

Questão 9: No cálculo do C_{eq}, sabendo que $C_1 = 33x10^{-9}F \;\; e \;\; C_2 = 47x10^{-9}F$, então $C_{eq} = 19{,}4nF$? Demonstre detalhadamente o cálculo.

Objetivo: Substituir dados numa determinada lei e transformar o resultado obtido numa nova notação.

Questão 10: Considerando uma fonte de tensão 12V e usando C_{eq} calculado no item anterior, e lembrando que $Q = V.C_{eq}$, qual a carga?

Objetivo: Utilizar dados e substituí-los na lei fornecida a fim de obter a informação desejada.

4.2.2 Análise dos resultados do pré-teste

Na tabela abaixo, estamos apresentando a síntese dos resultados obtidos. O detalhamento dos dados do pré-teste encontra-se no Anexo B.

Tabela 2 - Resultados do Pré-teste

	Questão										**Acertos**	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Qtde**	**%**
Acertos por questão	2	0	2	2	1	1	0	0	0	0	**8**	
% de acertos	7,4	0,0	7,4	7,4	3,7	3,7	0,0	0,0	0,0	0,0		**3,0%**

Os resultados confirmam mais uma vez as deficiências que, ao longo do curso, entre uma disciplina e outra, vinham sendo constatadas. É, realmente, preocupante a falta de habilidade em matemática básica que os calouros do curso técnico de Eletrônica Industrial apresentam.

Acompanhar os alunos durante a resolução das questões propostas, ouvir suas ponderações, analisar as respostas e depoimentos chega a ser comovente. Dentre suas ponderações, citamos: *"Não sei fazer cálculos com números exponenciais"; "Não consegui resolver, usei a calculadora, mas deve ser por causa do ponto e da vírgula ou do mau uso da calculadora"; "A calculadora possui vírgula e ponto, será que isso influência no meu resultado?"; "Não continuei porque não sei se* Ω *e* $k\Omega$ *têm algum valor"; "O que seria '*μ*'?"; "É matemática ou física?"; "Não me recordo nada do assunto"; "Não, pois, quando um valor positivo muda de lado no sinal de igual muda para negativo, alterando valores".*

Na parte dos depoimentos escritos no verso do pré-teste, selecionamos o que está reproduzido a seguir, por ser representativo do pensamento geral da turma: *"Já percebi que meus conhecimentos em relação aos conteúdos passados não estão nada bons". "Espero que eu entenda bem a matéria a mim passada". "E no que depender de mim para aprender não vai faltar força de vontade". "Compreendo que a matemática é uma disciplina indispensável e sem ela o aluno não tem condições de seguir adiante". "Espero compreensão do orientador e paciência, sem mais agradeço."* Outras respostas e depoimentos seguem no Anexo A.

Nossa conclusão pode ser resumida nos seguintes pontos:

a) é evidente a percepção do aluno no que se refere às suas deficiências;

b) há clara vontade de aprender;

c) fica plenamente justificada a necessidade da disciplina.

5 UMA PROPOSTA DE ENSINO

Considerando o perfil do aluno, os resultados do pré-teste, a nossa experiência como professora de Matemática e mestranda em Ensino de Matemática, iniciamos uma análise da bibliografia específica do curso no intuito de perceber, com maiores detalhes, qual seria a colaboração da matemática na formação dos profissionais técnicos em Eletrônica Industrial. Ao longo desse estudo, percebemos que, embora alguns livros de eletrônica tragam uma breve revisão de conceitos matemáticos, esses estão isolados em apêndices e desvinculados do contexto das aplicações. Sentimos, então, a necessidade de construir uma proposta de ensino que incluísse a elaboração de seu próprio texto didático. Por se tratar de uma proposta interdisciplinar, tal texto preenche uma lacuna existente entre a matemática e a eletrônica básica.

Paralelamente a esse estudo bibliográfico, tivemos oportunidade de assistir às aulas de colegas, professores de disciplinas específicas do curso. A intenção era perceber como os colegas engenheiros usam a matemática em sala de aula. Constatamos, assim, que a matemática utilizada não era apenas a matemática conceitual, mas preferencialmente a matemática como ferramenta da área científico-tecnológica. Depois dessas observações, concluímos que era necessário estabelecer uma linguagem comum para as abordagens matemáticas e dar muita ênfase às aplicações. Por linguagem comum, estamos nos referindo à terminologia matemática usada nesta área do conhecimento.

Com essa visão, o texto começou a ser produzido para cada aula e utilizado pelos alunos na nossa disciplina. Tivemos também a preocupação de elaborar um texto que fosse auto-suficiente, que contemplasse a parte prática a ser trabalhada, otimizando o tempo de sala de aula. Nesse aspecto, foi importante o levantamento do perfil do aluno, pois, sendo ele um trabalhador, não teria muito tempo para estudar fora dos seus horários de aula.

A versão do texto didático foi aprimorada ao longo de dois semestres, através de sugestões recebidas tanto de alunos como de colegas professores, e encontra-se, na seqüência deste trabalho, apresentada na mesma modalidade com que os alunos hoje a utilizam em sala de aula.

Introduzimos, nessa última versão, um mapa que mostra a relação da matemática com as áreas científico-tecnológicas nas suas mais variadas aplicações, contemplando inclusive algumas disciplinas do curso, o qual reproduziremos abaixo. Após visualizarem e conscientizarem-se da interferência e importância dos conhecimentos matemáticos como base teórica para o estudo da eletrônica, os alunos não mais questionam a existência da disciplina de Matemática Aplicada no currículo do curso; ao contrário, manifestam-se no sentido de que gostariam que ela fizesse parte dos demais módulos do curso.

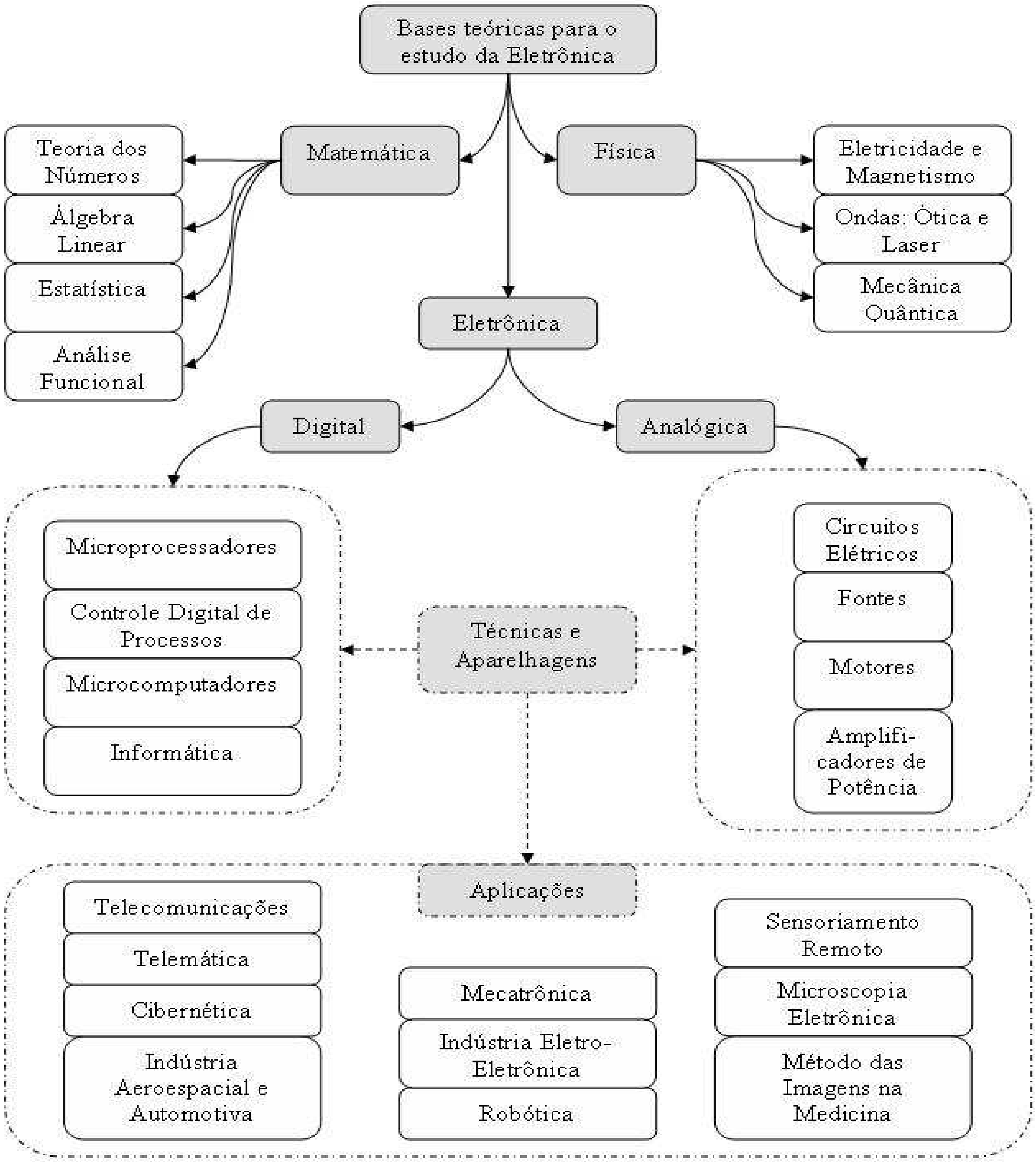


Figura 6 – Diagrama das bases teóricas para o estudo da Eletrônica.

5.1 TEXTO DIDÁTICO

Em relação à apresentação do texto didático, em aula, é importante salientar algumas estratégias que permitam uma aprendizagem mais significativa.

Ressaltamos que o material a ser utilizado a cada aula esteja à disposição dos alunos com antecedência. Isso permitirá que eles possam lê-lo antes de cada aula e assim, estabelecer as conexões entre o que já foi dado e o que virá a seguir. No entanto, isso não dispensará a explanação do conteúdo pelo professor, tanto no que se refere a sua parte teórica quanto aos respectivos exemplos, os quais são colocados no quadro e resolvidos passo a passo. Essa estratégia visa, também, à atenção dos alunos, pois eles não precisarão se dividir entre o ato de atentar para a exposição e o de copiar, podendo assim, anotar suas próprias observações sobre o que está sendo apresentado.

A parte prática dos conteúdos está contemplada, tanto nos exemplos resolvidos em aula como nas listas propostas para os alunos. Em geral, ela é composta por atividades relacionadas à eletrônica, proporcionando ao aluno, com isso, a oportunidade de perceber a aplicação dos conceitos matemáticos estudados na sua área de interesse.

O texto prevê, a cada unidade, exercícios a serem resolvidos pelos alunos, com os respectivos espaços em branco para a resolução em aula. As tarefas poderão ser realizadas em pequenos grupos, possibilitando a interação e discussão do que está sendo resolvido. Nesse momento, os alunos que apresentarem maior facilidade serão incentivados a auxiliar os demais colegas.

Além desses aspectos, julgamos importante desenvolver os conteúdos de forma ordenada, partindo do mais simples para os mais complexos, do concreto para o abstrato.

Destacamos ainda, como fatores relevantes, que o professor possibilite encontros agradáveis, tranqüilos, permitindo, assim, uma maior interação entre aluno-professor, professor-aluno e aluno-aluno. Também julgamos necessário que o docente demonstre entusiasmo pela matéria; seja paciente e calmo ao responder aos questionamentos; demonstre domínio e saiba aproveitar as reações dos alunos, além de reformular explicações que não tenham sido efetivamente compreendidas.

5.1.1 Unidades de medida

Em qualquer área técnico-científica é importante não só compreender os conceitos básicos, como saber aplicá-los e também medí-los. Para descrever uma determinada quantidade (grandeza) física, necessitamos definir uma **unidade**, isto é, a medida da quantidade que é exatamente 1.0; em seguida, definir um **padrão**, ou seja, uma referência com relação à qual todas as outras podem ser comparadas.

É de vital importância, o uso adequado das unidades de medida, para que uma grandeza seja compreendida.

5.1.1.1 Sistema Internacional de Unidades (SI)

Com objetivo de facilitar o intercâmbio científico, em 1971, na décima quarta Conferência Geral de Pesos e Medidas, em Paris, foi adotado o **Sistema Internacional de Unidades (SI)**, que tem a finalidade de padronizar as unidades utilizadas.

O SI, conhecido popularmente como sistema métrico, foi construído a partir de sete unidades básicas as quais seguem na Tabela 3.

Para a grafia das unidades, são utilizadas letras minúsculas, conforme mostrado na Tabela 3. Os símbolos das unidades são expressos em letras minúsculas, exceto os derivados de nomes próprios, tais como K (kelvin) e A (ampère).

Assim, as sete unidades básicas são: **o metro, o quilograma, o segundo, o ampère, o grau kelvin, o mole e a candela.**

As demais unidades serão derivadas a partir destas. Algumas recebem nomes especiais, como veremos a seguir.

Tabela 3 - Unidades SI de Base.

Grandeza Física	Unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente elétrica	ampère	A
Temperatura termodinâmica	kelvin	K
Quantidade de matéria	mole	mol
Intensidade luminosa	candela	cd

Fonte: extraída de BRASIL (1971, p.11).

5.1.2 Unidades Derivadas do SI

As unidades derivadas são constituídas, a partir, das unidades de base, por expressões algébricas, utilizando símbolos matemáticos de multiplicação e divisão (Tabela 4).

Tabela 4 - Unidades SI derivadas

Grandeza Física	Unidade	Símbolo
Superfície	metro quadrado	m^2
Volume	metro cúbico	m^3
Velocidade	metro por segundo	m/s
Aceleração	metro por segundo ao quadrado	m/s^2
Massa específica	quilograma por metro cúbico	kg/m^3
Densidade de corrente	ampère por metro quadrado	A/m^2
Campo magnético	ampère por metro	A/m
Concentração	mol por metro cúbico	mol/m^3
Luminância	candela por metro quadrado	cd/m^2

Fonte: extraída de BRASIL (1971, p.12).

Diversas, entre essas unidades derivadas, recebem nomes especiais e símbolos particulares (Tabela 5).

Tabela 5 - Unidades SI derivadas possuidoras de nomes especiais

Grandeza Física	Unidade	Símbolo	Expressão em outras unidades SI	Expressão em unidades básicas do SI
Freqüência	hertz	Hz	-	s^{-1}
Força	newton	N	-	$m.kg.s^{-2}$
Pressão	pascal	Pa	N/m^2	$m^{-1}.kg.s^{-2}$
Energia, trabalho, quantidade de calor	joule	J	N.m	$m^2.kg.s^{-2}$
Potência	watt	W	J/s	$m^2.kg.s^{-3}$
Carga elétrica	coulomb	C	-	s.A
Potencial elétrico, tensão elétrica, força eletromotriz	volt	V	W/A	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-1}$
Capacitância elétrica	farad	F	A.s/V	$m^2.kg^{-1}.s^4.A^2$
Resistência elétrica	ohm	Ω	V/A	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-2}$
Indutância elétrica	henry	H	V.s/A	$m^2.kg. s^{-2}.A^{-2}$
Temperatura Celsius	grau celsius	^oC	-	K-273,15

Fonte: extraída de BRASIL (1971, p.13).

5.1.3 Prefixos (múltiplos e submúltiplos)

Uma unidade de medida pode ser também expressa por seus múltiplos e submúltiplos para facilitar ou melhorar a apresentação de uma determinada grandeza.

Imagine, por exemplo, se a distância entre duas cidades ou o diâmetro da grafite de sua lapiseira fossem dados em metros. Proibido? Não, mas não seria a forma mais prática. Para isso, usamos respectivamente o **quilô**metro e o **milí**metro que nos dão uma idéia melhor dessas grandezas.

Na verdade, tanto o **quilo** quanto o **mili,** os quais aparecem ligados à palavra metro, não são unidades, mas são prefixos que, ao serem associados às unidades, também representam uma quantidade e podem ser usados em conjunto com quaisquer unidades.

Essas unidades são chamadas de **múltiplos** e **submúltiplos** da unidade padrão (Tabela 6).

Observações:

1. Os prefixos em negrito, na Tabela 6, são os mais usados.
2. A relação desses prefixos com a unidade de referência é:
   a. **giga** é um trilhão de vezes
   b. **mega** é um milhão de vezes
   c. **quilo** é mil vezes
   d. **mili** é a milésima parte
   e. **micro** é uma parte em um milhão
   f. **nano** é uma parte em um trilhão
   g. **pico** é uma parte em um quadrilhão.
3. Você deve ter observado, na primeira coluna da Tabela 6, o tamanho dos espaços utilizados para escrever os múltiplos na forma decimal.

Tabela 6 - Prefixos

Multiplicador	Multiplicador na forma de potência de base 10	Prefixo	Símbolo
1.000.000.000.000.000.000.000.000		yotta	Y
1.000.000.000.000.000.000.000		zetta	Z
1.000.000.000.000.000.000		hexa	E
1.000.000.000.000.000		peta	P
1.000.000.000.000		terá	T
1.000.000.000		**giga**	G
1.000.000		**mega**	M
1.000		**quilo**	k
100		hecto	h
10		deca	da
0,1		deci	d
0,01		centi	c
0,001		**mili**	m
0,000 001		**micro**	μ
0,000 000 001		**nano**	n
0,000 000 000 001		**pico**	p
0,000 000 000 000 001		femto	f
0,000 000 000 000 000 001		atto	a
0,000 000 000 000 000 000 001		zepto	z
0,000 000 000 000 000 000 000 001		yocto	y

No capítulo seguinte, apresentaremos uma forma mais sucinta de representar números de magnitudes tão variadas; são as chamadas **Potências de base dez**. Após este capítulo, você estará apto a preencher a coluna em branco da Tabela 6.

5.2 POTÊNCIAS DE BASE DEZ

As chamadas **potências de base dez** ou, de maneira simplificada, **potências de dez** são escritas da seguinte forma:

$$\boxed{10^n}$$

Sendo 10 a base e n o expoente inteiro.

Sabe-se que, a partir da magnitude relativa de diversas unidades de medida, números muito grandes e muito pequenos são freqüentemente encontrados na prática científica. Para facilitar a manipulação de números de magnitudes tão variadas, costuma-se utilizar a notação potência de dez. Essa notação faz uso de todas as vantagens das propriedades matemáticas das potências de base dez.

5.2.1 Propriedades da Potenciação

Para cada propriedade que segue, considere n e m números inteiros quaisquer.

5.2.1.1 Potência de 10^n

Uma potência de dez, 10^n, representa o produto de n fatores todos iguais a 10.

$$\boxed{10^n = 10 \; x \; 10 \; x \; 10 \; x \; 10 \; x \; ... \; x \; 10 \; (n \text{ fatores})}$$

5.2.1.2 Inverso da Potência de 10^n

Para deslocar uma potência de dez do denominador para o numerador, ou para efetuar a operação inversa, é necessário simplesmente trocar o sinal do expoente.

$$\boxed{\frac{1}{10^n} = 10^{-n} \qquad \frac{1}{10^{-n}} = 10^n}$$

Exemplos:

a) $\frac{1}{1000} = \frac{1}{10x10x10} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$

b) $\frac{1}{0{,}00001} = \frac{1}{10^{-5}} = 10^5$

Observação:

Neste último exemplo, conta-se, no denominador, o número de decimais depois da vírgula, e esse número será o expoente negativo de dez.

5.3.1.3 Produto

Para efetuar o produto entre duas ou mais potências de dez, conserva-se a base 10 e **somam-se** as potências.

$$\boxed{\left(10^{n}\right)\left(10^{m}\right)=10^{n+m}}$$

Exemplos:

a) $(1.000)(10.000)=\left(10^{3}\right)\left(10^{4}\right)=10^{(3+4)}=10^{7}$

b) $(0{,}00001)(100)=\left(10^{-5}\right)\left(10^{2}\right)=10^{(-5+2)}=10^{-3}$

Observe como é mais concisa a notação das potências de dez.

5.3.1.4 Quociente

Para efetuar o quociente entre duas ou mais potências de dez, conserva-se a base 10 e subtraem-se as potências.

$$\boxed{\frac{10^{n}}{10^{m}}=10^{(n-m)}}$$

Exemplos:

a) $\frac{100.000}{100}=\frac{10^{5}}{10^{2}}=10^{(5-2)}=10^{3}$

b) $\frac{1.000}{0{,}0001}=\frac{10^{3}}{10^{-4}}=10^{(3-(-4))}=10^{(3+4)}=10^{7}$

5.3.1.5 Potência de uma potência

Para elevar uma potência 10^n a um expoente *m*, conserva-se a base 10 e multiplicam-se as potências.

$$\boxed{\left(10^n\right)^m = 10^{(nm)}}$$

Exemplos:

a) $(100)^4 = \left(10^2\right)^4 = 10^{(2)(4)} = 10^8$

b) $(1.000)^{-2} = \left(10^3\right)^{-2} = 10^{(3)(-2)} = 10^{-6}$

c) $(0{,}01)^{-3} = \left(10^{-2}\right)^{-3} = 10^{(-2)(-3)} = 10^6$

5.3.2 Operações aritméticas básicas

Vamos analisar agora a utilização de potências de dez, para realizar algumas operações aritméticas básicas, envolvendo números que não são potências de base dez.

O número 5.000 pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} &5x1000 \\ &= 5x10x10x10 \\ &= 5x10^3 \end{aligned}$$

O número 0,0004 pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} &4x0{,}0001 \\ &= 4x\frac{1}{10000} \end{aligned}$$

$$= 4x\frac{1}{10x10x10x10}$$
$$= 4x\frac{1}{10^4}$$
$$= 4x10^{-4}$$

Para que você possa realizar as operações com tranqüilidade, é importante saber transformar os valores deslocando a vírgula e alterando corretamente o expoente da potência de base dez.

Exemplos:

1) Velocidade da luz no vácuo $\cong 300.000.000$ m/s

$$= 3\,x\,10^8 \text{ m/s}$$

2) Diâmetro da Terra $\cong 13.000.000$ m

$$= 13\,x\,10^6 \text{ m}$$
$$= 1{,}3\,x\,10^7 \text{ m}$$

3) Distância Terra – Lua $\cong 380.000.000$ m

$$= 380\,x\,10^6 \text{ m}$$
$$= 38\,x\,10^7 \text{ m}$$
$$= 3{,}8\,x\,10^8 \text{ m}$$

4) Massa do elétron $\cong 0{,}000000000000000000000000000000911 kg$

$$= 911\,x\,10^{-33}\ kg$$
$$= 0{,}911\,x\,10^{-30}\ kg$$

Observação:

Você deve ter observado que, ao deslocar a vírgula para a esquerda, o expoente, em valor absoluto, aumenta; ao deslocar a vírgula para a direita, o expoente, em valor absoluto, diminui.

Exercícios:

1) Retorne à Tabela 6 e complete a coluna em branco, usando potências de dez.

2) Observando os números fornecidos, complete as lacunas em branco.

a) 345,901 = ___________x 10^2

b) 0,03481 = 3,481 x ___________

c) -0,000004 = ___________x 10^{-6}

d) 38,74 x 10^{-4} = 3,874 x ___________= 3874 x ___________

e) 36,0868 = 0,360868 x ___________= ___________ x 10^{-4}

5.3.2.1 Adição e subtração

Quando você for adicionar ou subtrair números no formato de potências de dez, certifique-se de que a potência de dez é a mesma para cada número. Em seguida, separe os multiplicadores, efetue a operação requerida e aplique a mesma potência de dez no resultado.

$$\boxed{A \, x \, 10^n \pm B \, x \, 10^n = (A \pm B) \, x \, 10^n}$$

Exemplos:

1) 6.300 + 75.000 = (6,3)(1.000) + (75)(1.000)

= 6,3 x 10^3 + 75 x 10^3

= (6,3 + 75) x 10^3

= 81,3 x 10^3

2) 0,00096 – 0,000086 = (96)(0,00001) – (8,6)(0,00001)

= 96 x 10^{-5} - 8,6 x 10^{-5}

$= (96 - 8{,}6) \text{ x } 10^{-5}$

$= 87{,}4 \text{ x } 10^{-5}$

5.3.2.2 Multiplicação

Quando você for multiplicar números no formato de potências de dez, determine primeiro o produto dos multiplicadores e, em seguida, use a regra 2.1.3, isto é, o expoente da potência de dez será a soma dos expoentes das potências de dez dos fatores.

$$\boxed{\left(\mathrm{A}\ x 10^{n}\right)\left(\mathrm{B}\ x 10^{m}\right) = \left(\mathrm{A}\right)\left(\mathrm{B}\right) x 10^{n+m}}$$

Exemplos:

1) $(0{,}0002)(0{,}000007) = (2 \text{ x } 10^{-4})(7 \text{ x } 10^{-6})$

$= (2)(7) \text{ x } \left(10^{-4}\right)\left(10^{-6}\right)$

$= 14 \text{ x } 10^{-10}$

2) $(340.000)(0{,}00061) = (3{,}4 \text{ x } 10^{5})(61 \text{ x } 10^{-5})$

$= (3{,}4)(61) \text{ x } \left(10^{5}\right)\left(10^{-5}\right)$

$= 207{,}4 \text{ x } 10^{0}$

$= 207{,}4$

Observação:

Lembre-se que um número elevado ao expoente zero é igual a 1.

5.3.2.3 Divisão

Quando você for **dividir** números no formato de potências de dez, determine primeiro o resultado da divisão dos multiplicadores das potências. Em seguida, determine o expoente da potência de dez do resultado, subtraindo o expoente da potência do denominador do expoente da potência do numerador.

$$\boxed{\frac{\mathrm{A}\,x\,10^{n}}{\mathrm{B}\,x\,10^{m}}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\,x\,10^{n\,-\,m}}$$

Exemplos:

1) $\dfrac{0{,}00047}{0{,}002}=\dfrac{47\,x\,10^{-5}}{2\,x\,10^{-3}}=\left(\dfrac{47}{2}\right)x\left(\dfrac{10^{-5}}{10^{-3}}\right)=23{,}5\,x\,10^{(-5-(-3))}=23{,}5\,x\,10^{-2}$

2) $\dfrac{690.000}{0{,}00000013}=\dfrac{69\,x\,10^{4}}{13\,x\,10^{-8}}=\left(\dfrac{69}{13}\right)x\left(\dfrac{10^{4}}{10^{-8}}\right)=5{,}31\,x\,10^{12}$

5.3.2.4 Potências de dez elevadas a um expoente *m*

Quando você encontrar um número que esteja representado no formato de potência de dez, elevado a um determinado expoente, primeiro separe o multiplicador da potência de dez e determine a potenciação de cada um separadamente. O expoente da base dez do resultado será o produto dos expoentes, isto é:

$$\boxed{\left(\mathrm{A}\,x\,10^{n}\right)^{m}=\mathrm{A}^{m}\,x\,10^{nm}}$$

Exemplos:

1) $(0{,}00003)^3 = (3\,x\,10^{-5})^3 = (3)^3\ x\ (10^{-5})^3 = 27\ x\,10^{-15}$

2) $(90.800.000)^2 = (9{,}08\,x\,10^7)^2 = (9{,}08)^2\ x\ (10^7)^2 = 82{,}4464\,x\,10^{14}$

5.3.3 Conversão de unidades de medida usando potências de dez

É muito comum termos a necessidade de converter um resultado, representado em uma potência de dez, em outra potência de dez. Por exemplo, se um freqüencímetro só fornece o resultado em quilohertz (kHz), pode ser necessário transformar o resultado da medida em megahertz (MHz); ou se o tempo for medido em milissegundos (ms), pode ser necessário determinar o tempo correspondente em microssegundos (μs) para traçar um gráfico. Essa não é uma conversão difícil, se tivermos em mente que um aumento ou uma diminuição no expoente da potência de dez é sempre acompanhado por um efeito oposto sobre o fator que multiplica a potência. Esse efeito você pode observar nos exemplos e exercícios do item 2.2.

Observe que, para cada conversão, é importante ter presente os fatores de conversão da Tabela 6**,** bem como o efeito causado na alteração da potência de dez e do seu fator multiplicativo.

Exemplos:

1) Converter 20 kHz para MHz.

Pela Tabela 6, sabemos que: **quilo** $= 10^3$

mega $= 10^6$

Logo:

A medida 20 kHz, no formato de potência de dez, fica:

$$20\ \text{kHz} = 20\ x\ 10^3\ \text{Hz}$$

Para transformar em MHz, sabe-se que o expoente da potência de dez **aumenta**, por um fator de três; portanto, o multiplicador deve **diminuir**, deslocando-se a vírgula três casas para a esquerda, ou seja:

$$\begin{aligned} & 20\,\text{kHz} \\ &= 20x10^{3}\ \text{Hz} \\ &= 0{,}020x10^{6}\ \text{Hz} \\ &= 0{,}02\ \text{MHz} \end{aligned}$$

2) Converter 0,01 ms para μs.

Pela Tabela 6, sabemos que: $\textbf{mili} = 10^{-3}$

$\textbf{micro} = 10^{-6}$

Logo:

No formato de potência de dez, transformar 0,01 ms em μs fica:

$$0{,}01\ \text{ms} = 0{,}01\ x\ 10^{-3}\,\text{s}$$

Para transformar em μs, sabe-se que o expoente da potência de dez **diminui,** por um fator de três; portanto o multiplicador deve **aumentar,** deslocando-se a vírgula três casas para a direita, ou seja:

$$\begin{aligned} & 0{,}01\,\text{ms} \\ &= 0{,}01x10^{-3}\ \text{s} \\ &= 10\ x\,10^{-6}\ \text{s} \\ &= 10\ \mu\text{s} \end{aligned}$$

Exercícios:

1) Faça as conversões solicitadas:

a) 34,6 MW para kW = ______________________________

b) 3,75 μA para mA = ______________________________

c) 1,602 nC para pC = ______________________________

d) 56,98 mV para nV = ______________________________

e) 2580 μs para ms = ______________________________

f) 0,0006 ms para μs = ______________________________

g) 1,237 mA para nA = ____________________________

h) 1,3 GV para kV = ______________________________

i) 37,9 MW para W = ______________________________

2) A velocidade da luz, indicada pela letra c, é de aproximadamente trezentos milhões de metros por segundo, isto é, $c \cong 300.000.000$ m/s. Calcule essa velocidade em km/h, usando potências de dez.

Durante o curso, em várias situações você deverá utilizar conceitos que envolvem operações com números escritos na potência de base dez. Veja o exemplo que segue.

3) Uma fórmula empírica (resultado da experimentação), usada para o cálculo da indutância de uma bobina é dada pela fórmula:

$$L = \frac{N^2\ d^2\ A\ \mu_r x 10^{-6}}{0{,}46\ d + c}$$

Onde:

L = indutância [H]

d = diâmetro do enrolamento [m]

c = comprimento do enrolamento [m]

N = número de espiras

μ_r = permeabilidade magnética relativa do núcleo

A = fator de blindagem

Considerando $L = 20x10^{-6}$ H, d = 10 mm, c = 25 mm, $\mu_r = 1$ e A = 1, determine o número de espiras dessa bobina.

5.4 NOTAÇÃO

5.4.1 Notação Científica

Existe uma forma padrão utilizada para representar quantidades em trabalhos científicos, que deve, na medida do possível, ser aplicada. É a chamada notação científica que usa conceitos de potência de dez e tem a seguinte forma:

$$\boxed{\mathrm{N}\, x 10^{n}}$$

Onde:

$1 \leq \mathbf{N} < 10$

N é um número real

n é um número inteiro

Exemplos:

1) $345{,}901 = 3{,}45901\ x\ 10^{2}$
2) $0{,}03481 = 3{,}481\ x\ 10^{-2}$
3) $-0{,}000004 = -4\ x\ 10^{-6}$
4) $38{,}74 \text{ x } 10^{-4} = 3{,}874\ x\ 10^{-3}$

Exercícios:

1) Escreva na forma de notação científica

a) 0,045 = ___________________________
b) -0,00034 = ________________________
c) 543,987 = _________________________
d) $76{,}03 \text{ x } 10^{5}$ = ______________________
e) $0{,}000798 \text{ x } 10^{-3}$ = __________________

2) A carga de um elétron é 0,000 000 000 000 000 000 16 coulomb (C). Expresse-a em notação científica.

5.4.2 Notação de Engenharia

A notação de engenharia determina que todas as potências de dez devem ter expoentes múltiplos de três; e a mantissa deve ser maior ou igual a 1, mas menor que 1000. Essa restrição sobre as potências de dez, deve-se ao fato de que certas potências específicas têm associadas a elas certos prefixos que facilitam a relação entre os dados analisados.

Assim, temos:

$$\boxed{\mathrm{N}\, x 10^{n}}$$

Onde:

$1 \leq \mathbf{N} < 1.000$

N é um número real

n é um número inteiro múltiplo de três

Exemplos:

1) $2345{,}901 = 2{,}345901\ x\ 10^{3}$
2) $0{,}03481 = 34{,}81\ x\ 10^{-3}$
3) $-0{,}000004 = -4\ x\ 10^{-6}$
4) $76{,}03\ x\ 10^{5} = 7{,}603 \text{ x } 10^{6}$

Exercícios:

1) Escreva na forma de notação científica.

   a) 0,045 = __________________________

   b) -0,00034 = _______________________

   c) 543,987 = ________________________

   d) $76{,}03 \times 10^{5}$ = _____________________

   e) $0{,}000798 \times 10^{-3}$ = __________________

2) O peso de um elétron é $9{,}1x10^{-28}$ g. Expresse-o em notação de engenharia.

3) Sabe-se que 1 C contém $6{,}24x10^{18}$ elétrons. A notação usada nessa afirmação é a notação científica ou a notação de engenharia? Justifique.

5.4.3 Exercícios Suplementares

1) Expresse os números a seguir como potências de dez, usando a forma $1x10^{n}$:

   a) 10.000 = _________________
   b) 0,0001 = _________________
   c) 1.000 = __________________
   d) 1.000.000 = _______________
   e) 0,0000001 = ______________
   f) 0,000001 = _______________
   g) 0,01 = ___________________

2) Expresse os números a seguir como potências de dez, usando a notação científica:

   a) 15.000 = ______________________

   b) 7.400.000 = ___________________

   c) 0,03000 = _____________________

d) 0,0000068 = ____________________

e) 0,00040200 = ___________________

f) 0,0000000002 = _________________

3) Preencha as lacunas nas seguintes conversões:

a) $6 \, x \, 10^{3}$ = ___________ $x \, 10^{6}$

b) $4 \, x \, 10^{-4}$ = ___________ $x \, 10^{-6}$

c) $50 \, x \, 10^{5}$ = ___________ $x \, 10^{3}$ = ___________ $x \, 10^{6}$ = ___________ $x \, 10^{9}$

d) $30 \, x \, 10^{-8}$ = ___________ $x \, 10^{-3}$ = ___________ $x \, 10^{-6}$ = ___________ $x \, 10^{-9}$

4) Efetue as operações a seguir, expressando o resultado como potências de dez, usando a notação científica:

a) 4.200 + 6.800.000 = ____

b) $9 \, x \, 10^{4} + 3{,}6 \, x \, 10^{3}$ = ____

c) $0{,}5 \, x \, 10^{-3} – 6 \, x \, 10^{-5}$ = ____

d) $1{,}2 \, x \, 10^{3} + 50.000 \, x \, 10^{-3} – 0{,}006 \, x \, 10^{5}$ = _______________________________

e) $67{,}4 \, x \, 10^{5} – 0{,}0367 \, x \, 10^{7} – (- 45{,}87 \, x \, 10^{2})$ = ___________________________

f) $634{,}59 \, x \, 10^{-2} + (- 75{,}8 \, x \, 10^{-3})$ = _______________________________________

5) Efetue as operações a seguir expressando o resultado como potências de dez e observando a notação científica:

a) (100)(1000) = ____

b) 0,045 *x* 0,004 =____

c) (- 0,01)(-1.000) = ____

d) 12.000.000 *x* 2,2 = ____

e) $(10^{3})(10^{6})$ = ____

f) $(10^{-6})(10.000.000)$ = ____

g) (-2.000)(0,00003) = ____

h) 0,00034 *x* 0,0202 = ____

i) (50.000)(0,0003) = ____

j) $(3 \, x \, 10^{-4})(0{,}0002)(7 \, x \, 10^{8})$ = ____________________________________

6) Efetue as operações a seguir, expressando o resultado como potências de dez e observando a notação científica:

a) $\dfrac{0{,}01}{100} =$ ____

b) $\dfrac{(100)^{1/2}}{0{,}001} =$ ____

c) $\dfrac{2.000}{0{,}00008} =$ ____

d) $\dfrac{-0{,}000234}{2.000} =$ ____

e) $\dfrac{0{,}0092}{-7.300.000} =$ ____

f) $\dfrac{-0{,}000215}{-0{,}00005} =$ ____

g) $\dfrac{78x10^{9}}{4x10^{-6}} =$ ____

7) Efetue as operações a seguir, expressando o resultado como potências de dez e observando a notação científica:

a) $(10.000)^{8}$ = ____

b) $(0{,}0001)^{1/2}$ = ____

c) $(2{,}2 \, x \, 10^{3})^{3}$ = ____

d) $(0{,}0006 \, x \, 10^{2})^{4}$ = ____

e) $(0{,}004)(6\ x\ 10^{2})^{2}$ = ______________________________

f) $[(2\ x\ 10^{-3})(0{,}8\ x\ 10^{4})(0{,}003\ x\ 10^{5})]^{3}$ = ______________________

8) Efetue as operações a seguir e expresse sua resposta em notação de engenharia:

a) $\dfrac{[(100)(0{,}01)]^{-3}}{[(100)^{2}][0{,}001]}$ = ______________________________

b) $[(40.000)^{2}][(20)^{-3}]$ = ______________________________

c) $\dfrac{(0{,}000027)^{1/3}}{210.000}$ = ______________________________

d) $\dfrac{[(4.000)^{2}][300]}{0{,}02}$ = ______________________________

e) $[(0{,}000016)^{1/2}][(100.000)^{5}][0{,}02]$ = ______________________

f) $\dfrac{[(0{,}003)^{3}][(0{,}00007)^{2}][(800)^{2}]}{[(100)(0{,}0009)]^{1/2}}$ = ______________________

9) Efetue as seguintes conversões:

a) 2.000 μs para ms = ______________________________

b) 0,04 ms para μ s = ______________________________

c) 0,06 μF para nF = ______________________________

d) 8.400 ps para μ s = ______________________________

e) 0,006 km para mm = ______________________________

f) 250 mA para μ A = ______________________________

g) 3,3 GW para W = ______________________________

h) 8,3 kV para V = ______________________________

5.5 ARREDONDAMENTO E ERRO

5.5.1 Teoria do arredondamento

Como você representaria o número 37,9387 com apenas dois algarismos significativos?

Para representar essa quantidade de forma simplificada, é necessário desprezar alguns algarismos menos significativos. Pode-se, portanto, escrever esta quantidade como:

37,938 ou 37,93 ou 37,9 ou 37.

Se a pretensão era obter uma quantidade com apenas dois algarismos, o objetivo foi atingido (37), mas se a idéia era que essa quantidade fosse a mais próxima possível da quantidade original (37,9387), o procedimento foi INCORRETO, já que a quantidade mais próxima, com apenas dois algarismos, seria 38.

O procedimento correto é chamado de arredondamento e tem como objetivo limitar o número de algarismos de uma certa quantidade, obtida numa operação matemática ou numa medida.

O procedimento para o arredondamento de um número prevê algumas regras, para que ele seja feito de forma coerente. A Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) estabelece um procedimento geral para se fazer um arredondamento, descrito na norma NBR-5891:1977.

5.5.1.1 Regras para arredondamento, de acordo com a NBR-5891:1977.

1. Determinar o número de algarismos desejados para a quantidade;
2. arredondar o último algarismo desejado segundo as seguintes regras:

2.1 quando o algarismo imediatamente seguinte ao último algarismo desejado é inferior a 5, o último algarismo desejado não deve ser modificado;

2.2 quando o algarismo imediatamente seguinte ao último algarismo desejado é superior a 5, o último algarismo desejado deve ser acrescido de uma unidade;

2.3 quando o algarismo imediatamente seguinte ao último algarismo desejado é 5, procede-se da seguinte forma:

2.3.1 Se o 5 é seguido de zeros e o último algarismo desejado é ímpar, o último algarismo desejado deve ser conservado;

2.3.2 Se 5 é seguido de zeros e o último algarismo desejado é par, o último algarismo desejado deve ser acrescido de uma unidade;

2.3.3 Se o 5 é seguido de pelo menos um algarismo diferente de zero, o último algarismo desejado deve ser acrescido de uma unidade.

Exemplos:

1) Arredondar para três casas decimais:

a) 47,97437 = 47,974 (Regra 2.1)

b) 97,93874 = 97,939 (Regra 2.2)

c) 25,347500 = 25,347 (Regra 2.3.1)

d) 131,29450 = 131,295 (Regra 2.3.2)

e) 31,396534 = 31,397 (Regra 2.3.3)

2) A voltagem total, através de um divisor de voltagens, é a soma das seguintes voltagens, obtidas em um voltímetro digital: V_1 = 257,5V; V_2 = 36,24V e V_3 = 0,8362V. Qual é a voltagem total?

Voltagens	Volts
V_1	257,5
V_2	36,24
V_3	0,8362
V_{Total}	**294,5762**

A resposta deve ser arredondada na primeira casa decimal, isto é, V_{Total} = 294,6 V.

Observação:

Ao somar ou subtrair medidas com diferentes precisões, a resposta deverá manter a casa decimal da medida de menor precisão.

Uma corrente de 2,26 A circula por uma resistência de 18 Ω. Use a lei de Ohm para calcular a voltagem através da resistência.

Pela lei de Ohm sabemos que V = RI

= 2,26 A x 18 Ω

= 40,68 V

A resposta final é aproximadamente 41 V.

Observação:

Da mesma forma, ao multiplicar ou dividir medidas com diferentes precisões, a resposta deverá manter a casa decimal da medida de menor precisão.

Exercício:

1) Arredondar para duas casas decimais:

a) 12,3742 = ____________________

b) 83,7381 = ____________________

c) 24,3937 = ____________________

d) 4,735 = ______________________

e) 324,785 = ______________________

f) 183,2651 = _____________________

g) 8,6350001 = ____________________

5.5.2 Teoria do erro

Os erros podem ser induzidos nas medidas por “falha” humana na leitura ou falha da precisão do instrumento utilizado, ou dos arredondamentos. Da mesma forma, os erros podem ocorrer no resultado de uma operação matemática, principalmente, quando são utilizados números irracionais. Assim, torna-se importante um estudo mais detalhado sobre os erros.

Os erros podem ser representados, principalmente, de duas formas:

5.5.2.1 Erro relativo

$$\boxed{\mathbf{M} \pm \boldsymbol{e\%}}$$

Em que ***e%*** representa a margem de erro percentual de M, sendo M a medida da grandeza física.

5.5.2.2 Erro absoluto

$$\boxed{\mathbf{M} \pm \boldsymbol{e}}$$

Em que ***e*** representa a margem quantitativa de erro.

Observação:

Normalmente, os fabricantes de instrumentos indicam a precisão e o erro associados às medidas com seus instrumentos.

Exemplo:

1) Num laboratório, dois estudantes chegaram aos seguintes resultados de uma medida de corrente elétrica dada em ampère:

a) $23 \pm 8\%$ A

Sabendo que 8% de 23A é igual a 1,84A, isso significa que a medida está entre 24,84A e 21,16A.

b) $23 \pm 1{,}84$A

Significa que a medida está entre 24,84A e 21,16A.

Portanto, ambos chegam ao mesmo resultado, porém de formas diferentes.

Exercícios:

1) Determine os máximos e mínimos dos valores abaixo.

a) $1{,}5\,k\Omega \pm 5\%$ = ________________________________

b) $2{,}2\ k\Omega \pm 20\%$ = ________________________________

c) $3{,}8\ k\Omega \pm 2\%$ = ________________________________

d) $120\ \Omega \pm 10\%$ = ________________________________

e) $4{,}7\ M\Omega \pm 5\%$ = ________________________________

f) $86{,}6\ k\Omega \pm 2\%$ = ________________________________

g) $3{,}57\ k\Omega \pm 2\%$ = ________________________________

2) Medindo-se a tensão de um componente de um circuito elétrico, foi obtido 22,3V. Sabendo que o voltímetro utilizado possui uma margem de erro de 2%, quais os valores máximos e mínimos reais?

5.5.2.3 Margem de erro percentual

É comum, durante um experimento, calcular o erro de uma medida para que se possa fazer uma análise do resultado quando se dispõe de um valor teórico como referência. Para essa análise, deve-se comparar a margem de erro percentual prevista pelo instrumento utilizado com o erro real percentual obtido.

Para o cálculo desse erro, pode-se usar a seguinte fórmula:

$$\boxed{er\% = \frac{valor\ medido - valor\ teórico}{valor\ teórico}\, x\, 100}$$

Como se trata de um erro real, o resultado pode ser tanto positivo quanto negativo dependendo, respectivamente, se o valor medido foi maior ou menor que o valor teórico.

Exercício:

1) A tensão de um circuito, quando teoricamente calculada, é de 43V. O circuito foi montado, e o resultado medido de forma experimental foi de 41,3V. Calcule o erro percentual.

5.6 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Há pelo menos uns 1800 anos a.C., os povos babilônicos dominavam a técnica de resolução de equações lineares de duas variáveis. Também na antiga China, por volta de 250 a.C., na obra *Nove Capítulos sobre a Arte Matemática* são apresentados problemas sobre soluções de sistemas de equações lineares.

Vários outros trabalhos a respeito desse assunto surgiram mais tarde na antiga Grécia, com Diofante de Alexandria (século II), e na antiga Índia, com Aryabhata (século VI), Bramagupta (século VII) e Bhaskara (século XII).

Esses estudos foram, posteriormente, sistematizados nos séculos XVII e XVIII por Leibnitz, na Alemanha; Kowa, no Japão; Maclaurin, na Escócia; Cramer, na Suíça e Etienne Bézout, na França.

Atualmente, o conceito de sistemas lineares, que há séculos vêm sendo estudado, tem múltiplas aplicações em várias áreas do conhecimento.

No nosso curso, uma aplicação importante diz respeito à **Análise de Circuitos de Corrente Contínua (DC)**. Ao aplicar a **Lei de Kirchhoff** nesses circuitos, deparamo-nos com **equações lineares** que possuem uma relação de dependência entre as variáveis, constituindo assim um **sistema linear**. As informações desejadas (correntes, tensões em diferentes pontos) são obtidas mediante solução desse sistema.

Vamos iniciar nosso estudo introduzindo alguns conceitos básicos.

5.6.1 Equação Linear

Qualquer linha reta no plano xy pode ser representada algebricamente por uma equação da forma

$$\boxed{a_1x + a_2y = b}$$

Em que a_1, a_2 e b são constantes reais não nulas. Uma equação dessa forma é chamada equação linear nas variáveis x e y. Mais geralmente, define-se uma equação linear a n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ com uma equação que pode ser expressa na forma

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b}$$

em que a_1, a_2, ..., a_n e b são constantes reais. As variáveis de uma equação linear são chamadas de incógnitas.

Exemplos de:

1) Equações lineares

   a) $x + 3y = 7$

   b) $y = \frac{1}{2}x + 3z + 1$

   c) $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$

2) Equações não lineares:

   a) $x + 3\sqrt{y} = 5$,

   b) $3x + 2y + xz = 4$

   c) $y = \text{sen } x$

Observação:

Uma equação linear não envolve produtos ou raízes de variáveis. Todas as variáveis ocorrem somente na primeira potência e não aparecem como argumentos de funções trigonométricas, logarítmicas ou exponenciais.

5.6.1.1 Solução de uma equação linear

A **solução** de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ é uma seqüência de *n* números s_1, s_2, ..., s_n tais que a equação é satisfeita quando substituímos $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, ..., $x_n = s_n$.

O conjunto ordenado de todas as soluções de uma equação é chamado de **conjunto-solução** ou **solução geral** da equação.

Exemplos:

1) Considerando a equação linear 3x – y = 5, observe que:

a) O par ordenado (2, 1) é solução dessa equação, pois 3.2 -1 = 5

b) O par ordenado (3, 4) solução dessa equação, pois 3.3 -4 = 5

c) O par ordenado (3, 2) não solução dessa equação, pois 3.3 -2 $\neq$ 5

2) Considerando a equação linear 2x + y – 3z = 0, observe que:

a) O terno ordenado (1, 4, 2) é solução dessa equação, pois 2.1 + 4 – 3.2 = 0

b) O terno ordenado (4, 1, 3) é solução dessa equação, pois 2.4 + 1 – 3.3 = 0

c) O terno ordenado (2, 3, 1) é solução dessa equação, pois 2.2 + 3 – 3.1 $\neq$ 0

5.6.2 Definição de Sistemas de Equações Lineares

Um conjunto finito de equações lineares nas variáveis x_1, x_2, ..., x_n é chamado de **sistema de equações lineares** ou **sistema linear**. Uma seqüência de números s_1, s_2, ..., s_n é chamada de uma solução do sistema se $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, ..., $x_n = s_n$ é uma solução de cada equação do sistema.

Um sistema linear pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Sendo x_1, x_2, ..., x_n as incógnitas, e as letras a e b com subscritos denotam constantes.

Exemplos:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ x + y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + z = 6 \\ x + y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 25 \end{cases}$$

Observação:

Como estamos interessados em revisar sistemas lineares para análise de circuitos elétricos, iremos nos restringir aos sistemas lineares chamados consistentes, isto é, aqueles que possuem ao menos uma solução. Matematicamente existem ainda os sistemas lineares chamados inconsistentes, isto é, que não possuem solução.

5.6.3 Métodos de Resolução de Sistema Lineares

O conjunto solução de um sistema linear pode ser obtido pelo menos de quatro formas distintas, sendo que em um mesmo sistema, muitas vezes, pode-se aplicar, de maneira associada, mais de uma forma. Estudaremos os chamados: **método da adição**, **método da substituição**, **regra de Cramer** e **método de eliminação de Gauss**.

5.6.3.1 Método da adição

O método da adição é utilizado, de forma mais eficiente, para resolver sistemas lineares de ordem 2, duas equações e duas incógnitas.

Considere o sistema: $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$

Observe que, se multiplicarmos quaisquer uma das linhas por -1, teremos:

$$\begin{cases} x+2y=0 \ \ (-1) \\ x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-2y=0 \\ x+y=-1 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ x+y=-1 \ \ (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ -x-y=1 \end{cases}$$

Se, após a multiplicação por -1, em qualquer um dos casos, somarmos as duas equações, teremos:

$$\begin{array}{l} (+)\begin{cases} -x-2y=0 \\ x+y=-1 \end{cases} \\ \hline (-x+x)+(-2y+y)=(0-1) \\ \Rightarrow 0x-y=-1 \\ \Rightarrow -y=-1 \\ \Rightarrow y=1 \end{array}$$

Para obter o valor de *x*, basta substituir *y*, encontrado no item acima, em qualquer uma das equações. Vejamos:

$$\begin{array}{l} x=y=-1 \\ \Rightarrow x+1=-1 \\ \Rightarrow x=-1-1 \\ \Rightarrow x=-2 \end{array}$$

Sendo assim, o par ordenado (-2, 1) é a solução do referido sistema linear.

Observação:

Nesse método de resolução, é importante observar que o objetivo de se multiplicar uma equação por -1, é que, ao somar as equações, uma das incógnitas se anula, permitindo assim determinar o valor da outra, como no exemplo. Dessa forma, pode-se multiplicar uma das equações por um determinado valor ou, ambas as equações por valores que nos permitam atingir o objetivo.

Exemplo:

Determine a solução do sistema $\begin{cases} x-2y=-2 \\ 3x-y=3 \end{cases}$

Solução:

Se multiplicarmos a segunda equação por -2, teremos: $\begin{cases} x-2y=-2 \\ -6x+2y=-6 \end{cases}$

Somando as equações, ficamos com:

$$\begin{aligned}
&(x-6x)+(-2y+2y)=(-1-6) \\
&\Rightarrow -5x=-8 \\
&\Rightarrow x=\frac{8}{5}
\end{aligned}$$

Tendo o valor de *x*, sabe-se que:

$$\begin{aligned}
&x-2y=-2 \\
&\Rightarrow -2y=-2-x \\
&\Rightarrow -2y=-2-\frac{8}{5} \\
&\Rightarrow -2y=\frac{-10-8}{5} \\
&\Rightarrow -2y=-\frac{18}{5} \\
&\Rightarrow y=\frac{-\frac{18}{5}}{-2} \\
&\Rightarrow y=\frac{18}{10}
\end{aligned}$$

Logo, a solução do sistema é $\left(\frac{8}{5},\frac{18}{10}\right)$.

2) Determine a solução do sistema $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 3x-2y=3 \end{cases}$

Solução:

Se multiplicarmos a primeira equação por 2 e segunda equação por 3, teremos:

$$\begin{cases} 4x+6y=4 \\ 9x-6y=9 \end{cases}$$

Somando-se as duas equações, ficamos com:

$$(4x+9x)+(-6y+6y)=(4+9)$$
$$\Rightarrow 13x=13$$
$$\Rightarrow x=1$$

Tendo o valor de *x*, sabe-se que:

$$2x+3y=2$$
$$\Rightarrow 2\cdot 1+3y=2$$
$$\Rightarrow 2+3y=2$$
$$\Rightarrow 3y=2-2$$
$$\Rightarrow 3y=0$$
$$\Rightarrow y=\frac{0}{3}$$
$$\Rightarrow y=0$$

Logo, a solução do sistema é (1, 0).

Exercícios:

1) Determine a solução dos sistemas abaixo.

a) $\begin{cases} 2x-3y=13 \\ x+2y=-4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+5y=-9 \\ 3x-y=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=3y \\ x+y=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-y+4=0 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3y+x=11 \\ 4x-y=5 \end{cases}$

5.6.3.2 Método da Substituição

A resolução de sistemas lineares, através do Método da Substituição, consiste, no caso de um sistema de ordem 2, em isolar em uma das equações uma das variáveis e substituí-la na outra equação.

Exemplos:

1) Considere o sistema: $\begin{cases} x+2y=0 \\ x+y=-1 \end{cases}$

Observe que o mesmo pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} x=0-2y \\ x+y=-1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{x} = \text{-}2\mathrm{y} \\ \mathrm{x} + \mathrm{y} = \text{-}1 \end{cases}$$

Deste modo, se

$$x = -2y$$

então,

$$\begin{aligned} & x+y=-1 \\ \Rightarrow\ & -2y+y=-1 \\ \Rightarrow\ & -y=-1 \\ \Rightarrow\ & y=1 \end{aligned}$$

sendo assim, para determinar o valor de x basta substituir y = 1 na equação

$$x = -2y \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

Logo, a solução do sistema é (-2, 1).

2) Considere o sistema: $\begin{cases} 2x+3y+5z=3 \\ x-2y-3z=0 \\ 3x-y+2z=-1 \end{cases}$

Nesse caso, escolhe-se uma das equações para isolar uma variável e substituí-la nas outras duas equações.

Considerando a equação $x - 2y - 3z = 0 \Rightarrow x = 2y + 3z$, optou-se por isolar a variável *x*. Substituindo esta variável nas outras duas equações, teremos:

$$\begin{aligned} & 2x + 3y + 5z = 3 \\ \Rightarrow\ & 2(2y + 3z) + 3y + 5z = 3 \\ \Rightarrow\ & 4y + 6z + 3y + 5z = 3 \\ \Rightarrow\ & 7y + 11z = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3x - y + 2z = -1 \\ \Rightarrow\ & 3(2y + 3z) - y + 2z = -1 \\ \Rightarrow\ & 6y + 9z - y + 2z = -1 \\ \Rightarrow\ & 5y + 11z = -1 \end{aligned}$$

Para determinar o valor das outras variáveis *y* e *z*, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} 7y + 11z = 3 \\ 5y + 11z = -1 \end{cases}$$

Caso a opção seja resolver pelo método da adição, pode-se multiplicar uma das equações por -1, sendo assim, teremos:

$$\begin{cases} 7y + 11z = 3 \\ -5y - 11z = 1 \end{cases}$$

Somando-se as duas equações, ficamos com $2y = 4 \Rightarrow y = 2$ e substituindo o valor de *y*, em qualquer das equações, teremos $z = -1$.

Para determinar o valor de *x*, basta retornar para a equação $x = 2y + 3z$ e substituir os valores de *y* e *z*. Sendo assim, $x = 1$.

Logo, a solução do sistema é (1, 2, -1).

Exercício:

1) Determine a solução dos sistemas abaixo.

a) $\begin{cases} 4x + y = 5 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 13 \\ x - y + z = 1 \\ 7y - 2z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = -2 \\ 7x + 2y - 5z = -4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a + 2b + c = 1 \\ 3a + b - 11c = -2 \\ 2a + 3b - c = 0 \end{cases}$

5.6.3.3 Método de Cramer

O método de Cramer pode ser aplicado para resolver todo sistema linear em que o número de equações é igual ao número de incógnitas, desde que o determinante dos coeficientes das incógnitas seja diferente de zero.

É um método que utiliza o sistema escrito na forma matricial e obtém informações calculando o determinante dessas matrizes. Vamos nos restringir aos determinantes de ordem 2 e 3 uma vez que, para calcular determinantes de ordem maior que 3, é necessário utilizar técnicas numéricas mais avançadas.

Vamos revisar a seguir as regras do cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem 2 e 3.

5.6.3.3.1 Determinante de uma matriz de ordem 2

O determinante de uma matriz de ordem 2 é a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

Assim sendo, teremos que:

Diagonal Secundária

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}.a_{22}) - (a_{12}.a_{21})$$

Diagonal principal

Exemplos:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (4.5) - (3.2) = 20 - 6 = 14$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = (2.3) - (-1.7) = 6 - (-7) = 6 + 7 = 13$

5.6.3.3.2 Determinante de uma matriz de ordem 3

O determinante de uma matriz de ordem 3 pode ser determinado pela regra de Sarrus. Para tal, deve-se seguir os passos abaixo:

1. repetem-se as duas primeiras colunas à direita do determinante;
2. multiplicam-se:
   2.1. os elementos da diagonal principal e os elementos de cada paralela a essa diagonal e somam-se os resultados;
   2.2. os elementos da diagonal secundária e os elementos de cada paralela a essa diagonal e somam-se os resultados;
3. O determinante será a diferença entre os resultados obtidos em 2.1 e 2.2

Assim sendo, temos que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= (a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}) - (a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{21}.a_{33})$$

Exemplo:

$$a)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} &= [(2.-2.1)+(1.4.3)+(3.1.2)]-[(3.-2.3)+(2.4.2)+(1.1.1)] \\ &= [-4+12+6]-[-18+16+1] \\ &= 14-[-1] \\ &= 14+1 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Exercícios:

1) Calcule os determinantes abaixo:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Agora que já revisamos o cálculo de determinantes, passemos ao **método de Cramer** para a resolução de sistemas lineares.

Considere o seguinte sistema linear com duas equações e duas incógnitas:

$$M = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \quad \text{na forma de matriz} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Considere o determinante:

$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, chamado de "**determinante dos coeficientes** de *M*".

$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, note que D_{x_1} é obtido substituindo-se, em *D*, a coluna dos coeficientes de x_1 pela coluna dos termos independentes.

$D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$, note que D_{x_2} é obtido substituindo-se, em *D*, a coluna dos coeficientes de x_2 pela coluna dos termos independentes.

Observação:

Para os sistemas de ordem três, procede-se da mesma forma.

Gabriel Cramer (1704 - 1752) demonstrou, por volta de 1750, que o sistema linear M é consistente de solução única se, e somente se, D $\neq 0$ e a solução é dada por:

$$\boxed{x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} \qquad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}}$$

Exemplo:

Considere o sistema linear: $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 3 \\ x - 2y - 3z = 0 \\ 3x - y + 2z = -1 \end{cases}$

Solução:

Na forma matricial temos: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Destacando a matriz D e calculando o valor de seu determinante, teremos:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{matrix}$$

$$= \{[2 \cdot (-2) \cdot 2] + [3 \cdot (-3) \cdot 3] + [5 \cdot 1 \cdot (-1)]\} - \{[5 \cdot (-2) \cdot 3] + [2 \cdot (-3) \cdot -1] + [3 \cdot 1 \cdot 2]\}$$
$$= [(-8) + (-27) + (-5)] - [(-30) + (6) + (6)]$$
$$= (-40) - (-18)$$
$$= -40 + 18$$
$$= -22$$

Formando agora a matriz D_x e calculando o valor de seu determinante, teremos:

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 3 \\ 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{matrix}$$

$$= \{[3 \cdot (-2) \cdot 2] + [3 \cdot (-3) \cdot (-1)] + [5 \cdot 0 \cdot (-1)]\} - \{[5 \cdot (-2) \cdot (-1)] + [3 \cdot (-3) \cdot (-1)] + [3.0.2]\}$$
$$= [(-12) + (9) + (0)] - [(5) + (9) + (0)]$$
$$= (-3) - (19)$$
$$= -3 - 19$$
$$= -22$$

Formando agora a matriz D_y e calculando o valor de seu determinante, teremos:

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{matrix}$$

$$= \{[2 \cdot 0 \cdot 2] + [3 \cdot (-3) \cdot 3] + [5 \cdot 1 \cdot (-1)]\} - \{[5 \cdot 0 \cdot 3] + [2 \cdot (-3) \cdot (-1)] + [3 \cdot 1 \cdot 2]\}$$
$$= [(0) + (-27) + (-5)] - [(0) + (6) + (6)]$$
$$= (-32) - (12)$$
$$= -32 - 12$$
$$= -44$$

Formando agora a matriz D_z e calculando o valor de seu determinante, teremos:

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{matrix}$$

$$= \{[2 \cdot (-2) \cdot (-1)] + [3 \cdot 0 \cdot 3] + [3 \cdot 1 \cdot (-1)]\} - \{[3 \cdot (-2) \cdot 3] + [2 \cdot 0 \cdot (-1)] + [3 \cdot 1 \cdot (-1)]\}$$
$$= [(4) + (0) + (-3)] - [(-18) + (0) + (-3)]$$
$$= (1) - (-21)$$
$$= 22$$

Portando, pelo método de Cramer, sabe-se que:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-22}{-22} = 1 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-44}{-22} = 2 \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{22}{-22} = -1$$

Logo, a solução do sistema linear é (1, 2, -1).

Exercícios:

1) Use a regra de Cramer para determinar a solução dos sistemas lineares que seguem.

a) $\begin{cases} 5x + y = 1 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ x + y - z = 0 \\ x + z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ 34i_1 + 10i_3 = 10 \\ 15i_2 - 10i_3 = -5 \end{cases}$

5.6.2.4 Método da Eliminação Gaussiana ou Método de Escalonamento

O Método de Eliminação de Gauss-Jordan, também conhecido como Método do Escalonamento, é utilizado para análise e resolução de sistemas lineares de qualquer ordem. Nesse método, não há limitação com relação ao número de incógnitas e equações, como no método de Cramer.

O processo tem como objetivo transformar um dado sistema em sucessivos sistemas equivalentes até que se obtenha o mais fácil de ser resolvido. Tal sistema estará na sua forma, dita **escalonada**, se os coeficientes das incógnitas, localizadas abaixo da diagonal principal, no caso de um sistema quadrado, forem nulos.

Nesse processo é permitido:

a) permutar linhas, ou seja, permutar equações entre si;

b) permutar colunas, ou seja, permutar incógnitas entre si;

c) multiplicar uma equação qualquer por um número real e adicionar o resultado a outra equação.

Exemplo:

Considere o sistema linear: $\begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + 3y + 5z = 3 \\ 3x - y + 2z = -1 \end{cases}$

Solução:

Escreve-se o mesmo na forma matricial, utilizando os coeficientes das incógnitas e, na última coluna à direita, os termos independentes;

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} & \textbf{termos independentes} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Observe que a diagonal principal é formada pelos números $a_{11} = 1$, $a_{22} = 3$ e $a_{33} = 2$. O sistema estará escalonado quando os elementos a_{21}, a_{31} e a_{32} , localizados abaixo da diagonal, forem anulados.

Para anular os elementos $a_{21} = 2$, $a_{31} = 3$ das linhas 2 e 3, usa-se o elemento $a_{11} = 1$, o qual será chamado de **líder** ou **pivô**.

Assim:

- para anular o elemento $a_{21} = 2$, multiplica-se a primeira linha por -2 e soma-se com a segunda linha;
- para anular o elemento $a_{31} = 3$, multiplica-se a primeira linha por -3 e soma-se com a terceira linha.

O primeiro sistema equivalente será:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 11 & 3 \\ 0 & 5 & 11 & -1 \end{bmatrix}$$

Para finalizar o escalonamento, precisamos ainda anular o $a_{32} = 5$, utilizando o $a_{22} = 7$. Contudo, para facilitar essa operação, podemos usar a propriedade que permite permutar colunas. Observe que, se permutarmos a coluna da variável z com a de y, teremos:

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{z} & \boldsymbol{y} & \textbf{termos independentes} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 11 & 7 & 3 \\ 0 & 11 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Ficou mais fácil fazer o escalonamento, pois teremos que anular o elemento a_{32} que, agora, passa a valer 11, utilizando o elemento a_{22} que também é 11. O destaque em negrito na matriz acima é para não esquecer que houve uma mudança na posição das variáveis, neste caso entre ***y*** e ***z***.

Para anular o $a_{33} = 11$, multiplica-se a segunda linha por -1 e soma-se com a terceira linha.

O segundo sistema equivalente fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 11 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Uma vez escalonada a matriz, deve-se formar o respectivo sistema de equações, respeitando a ordem das variáveis.

$$\begin{cases} x-3z-2y = 0 \\ \quad 11z+7y = 3 \\ \qquad -2y = -4 \end{cases}$$

De acordo com o Método da Eliminação de Gauss, o sistema escalonado é equivalente ao sistema original. Portanto, a solução desse sistema escalonado é a solução procurada.

Para determinar as soluções deve-se:

isolar a variável *y*, isto é: $-2y = -4$

$$\Rightarrow y = 2$$

Conhecido o valor de *y*, isolar a variável *z*, isto é: $11z + 7y = 2$

$$\Rightarrow 11z = 3 - 7(2)$$
$$\Rightarrow z = \frac{3-14}{11}$$
$$\Rightarrow z = -1$$

Finalmente, conhecidos *y* e z, isolar *x*,

$$x - 3z - 2y = 0$$
$$\Rightarrow x = 2y + 3z$$
$$\Rightarrow x = 2(-1) + 3(2)$$
$$\Rightarrow x = 1$$

Logo, a solução do sistema é (1, 2, -1).

Exercício:

1) Use a regra da Eliminação de Gauss para determinar a solução dos sistemas lineares que seguem.

a) $\begin{cases} 4x + y = 5 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 13 \\ x - y + z = 1 \\ 7y - 2z = 3 \end{cases}$

5.6.2.5 Aplicação dos métodos de solução de sistemas lineares: cálculo de tensão e corrente em circuitos elétricos.

A base física, para a análise de um circuito elétrico, consiste de duas propriedades fundamentais. Essas propriedades foram observadas experimentalmente pelo físico alemão Gustav Kirchhoff (1824 - 1887). Suas observações sobre o comportamento das correntes e voltagens em circuitos elétricos levaram-no a formular duas leis: a Lei das Correntes e a Lei das Tensões ou Voltagens. Atualmente essas leis são conhecidas, respectivamente, como a primeira e a segunda **Lei de Kirchhoff.**

5.6.2.5.1 Lei de Kirchhoff das correntes

A soma algébrica das correntes que entram em um nó ou região é igual à soma algébrica das correntes que saem desse nó.

5.6.2.5.2 Lei de Kirchhoff das tensões

A soma algébrica das tensões em uma malha é zero.

A formulação matemática dessas leis leva a um sistema de equações lineares que, ao ser resolvido, fornece as correntes e tensões do circuito. O exemplo, a seguir, ilustra essa importante aplicação.

Exemplo:

Aplique as Leis de Kirchhoff ao circuito abaixo e determine as correntes e tensões dos resistores.

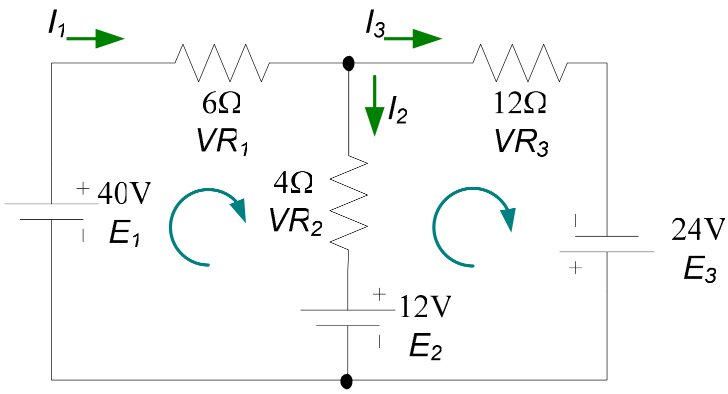


Figura 7 - Exemplo de circuito de corrente contínua.

Solução:

Antes de aplicar a **primeira Lei de Kirchhoff** é importante destacar a convenção sobre o sentido das correntes que será usada. Adotaremos a convenção mostrada no circuito e indicada por I_1, I_2 e I_3.

Assim, pela lei das correntes temos:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Da mesma forma, ao aplicarmos a **segunda Lei de Kirchhoff**, que menciona a soma algébrica das tensões, é importante acordar sobre os sinais das tensões nos elementos do circuito. Consideraremos positivas as tensões dos resistores quando percorridos por correntes que deixam os terminais positivos das fontes (baterias), exceto para os resistores compartilhados pelas duas malhas, quando então, serão negativas.

No que se refere às fontes de tensão, as voltagens serão negativas se as correntes deixarem o terminal positivo da fonte e vice-versa.

Logo, no circuito acima temos:

$$-E_1 + V_{R_1} + V_{R_2} + E_2 = 0$$
$$-E_2 - V_{R_2} + V_{R_3} - E_3 = 0$$

Sabendo, pela ***Lei de Ohm***, que ***V = RI***, então:

$$-40+6I_1+4I_2+12=0$$
$$-12-4I_2+12I_3-24=0$$

Observe que, se organizarmos as três equações acima na forma de sistema, teremos:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 6I_1 + 4I_2 = 28 \\ -4I_2 + 12I_3 = 36 \end{cases}$$

Esse é um sistema linear de ordem 3 e, para determinar o valor das correntes I_1, I_2 *e* I_3, basta resolver o sistema utilizando um dos método de **resolução de sistemas lineares** estudados.

1) Método da Substituição e da Adição

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 & \text{(eq.1)} \\ 6I_1 + 4I_2 = 28 & \text{(eq.2)} \\ -4I_2 + 12I_3 = 36 & \text{(eq.3)} \end{cases}$$

Isolando I_1 em (eq.1), teremos: $I_1 = I_2 + I_3$

Substituindo I_1 em (eq.2), teremos:

$$6(I_2+I_3)+4I_2=28$$
$$\Rightarrow 6I_2+6I_3+4I_2=28$$
$$\Rightarrow 10I_2+6I_3=28 \qquad \text{(eq.2.1)}$$

Organizando um sistema com (eq.2.1) e (eq.3), teremos:

$$\begin{cases} 10I_2 + 6I_3 = 28 \\ -4I_2 + 12I_3 = 36 \end{cases}$$

Para utilizar o método da adição, uma das possibilidades é dividir (3) por -2. Assim:

$$\begin{cases} 10I_2 + 6I_3 = 28 \\ 2I_2 - 6I_3 = -18 \end{cases}$$

Somando as duas equações, obtém-se:

$$12I_2 + 0I_2I_3 = 10$$
$$\Rightarrow 12I_2 = 10$$
$$\Rightarrow I_2 \cong 0{,}83\text{A}$$

Para determinar o valor de I_3, basta substituir $I_2 \cong 0{,}83\,\text{A}$ em qualquer das equações do sistema. Assim,

$$\begin{aligned}
&10I_2 + 6I_3 = 28\\
&\Rightarrow 10(0{,}83) + 6I_3 = 28\\
&\Rightarrow 8{,}3 + 6I_3 = 28\\
&\Rightarrow 6I_3 = 28 - 8{,}3\\
&\Rightarrow I_3 \cong 3{,}27\,\text{A}
\end{aligned}$$

E, da eq(1), temos que:

$$\begin{aligned}
&I_1 = I_2 + I_3\\
&\Rightarrow I_1 \cong 0{,}83 + 3{,}27\\
&\Rightarrow I_1 \cong 4{,}11\,\text{A}
\end{aligned}$$

2) Método de Cramer

A forma matricial do sistema é:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 12 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matriz dos}\\ \text{coeficientes de}\\ I_1,\, I_2,\, I_3}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matriz das}\\ \text{incógnitas}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 28 \\ 36 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matriz dos termos}\\ \text{independentes}}}$$

Cálculo dos determinantes:

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & -4 & 12 & 0 & -4 \end{array}\right. = 144$$

$$D_{I_1} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 28 & 4 & 0 & 28 & 4 \\ 36 & -4 & 12 & 36 & -4 \end{array}\right. = 592$$

$$D_{I_2} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 28 & 0 & 6 & 28 \\ 0 & 36 & 12 & 0 & 36 \end{array}\right. = 120$$

$$D_{I_3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 28 \\ 0 & -4 & 36 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 6 & 4 \\ 0 & -4 \end{matrix} = 472$$

Para calcular os valores de I_1, I_2 e I_3, através da regra de Cramer, sabe-se que:

$$I_1 = \frac{512}{144} \cong 4{,}11\text{A}$$

$$I_2 = \frac{120}{144} \cong 0{,}83\text{A}$$

$$I_3 = \frac{472}{144} \cong 3{,}27\text{A}$$

3) Método da Eliminação de Gauss ou Método do Escalonamento

$$\begin{array}{cccc} I_1 & I_2 & I_3 & \textbf{termos independentes} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 28 \\ 0 & -4 & 12 & 36 \end{bmatrix}$$

Para anular o elemento $a_{21} = 6$, multiplica-se a primeira linha por -6 e soma-se com a segunda linha;

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 6 & 28 \\ 0 & -4 & 12 & 36 \end{bmatrix}$$

Observe que a segunda linha possui elementos múltiplos de 2 e que a terceira linha possui elementos múltiplos de 4. Assim sendo, para facilitar os cálculos, dividiremos a segunda linha por dois e a terceira linha por três:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 14 \\ 0 & -1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Permutando a segunda linha com a terceira, teremos, para a seqüência do cálculo, o *pivô* valendo -1, o que torna mais simples o próximo passo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 5 & 3 & 14 \end{bmatrix}$$

Para anular o elemento $a_{31} = 5$, multiplica-se a segunda linha por 5 e soma-se com a terceira linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 18 & 59 \end{bmatrix}$$

Realizado o escalonamento, o sistema equivalente é:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 \ \ = 0 & (1) \\ \quad - I_2 + 3I_3 = 9 & (2) \\ \qquad\quad 18I_3 = 59 & (3) \end{cases}$$

Assim, com a eq(3) temos que:

$I_3 = 3{,}27\text{A}$

$I_2 = 0{,}83\text{A}$

$I_1 = 4{,}11\text{A}$

Observação:

Com a resolução desse exemplo, você deve ter observado que, independentemente do método usado, foi possível obter as informações desejadas sobre as correntes. Assim, quando você for resolver um sistema, escolha o método que lhe for mais conveniente; e, não se esqueça de atender às especificidades de cada um deles.

Sabendo o valor da corrente em cada resistor, é possível determinar também a tensão usando a **lei de Ohm**. Isto é, ***V = RI***

Assim:

$$V_{R_1} \cong \ 6\Omega \,.\, 4{,}11\text{A} \ \cong \ 24{,}66V$$

Observe que a unidade de medida, resultante do produto ΩA é, pela **Tabela 5**, igual a volt (V).

Portanto, a tensão no resistor R_1 é:

$$V_{R_1} \cong 24{,}66\ \text{V}$$

De forma similar ao cálculo da tensão V_{R_1}, pode-se calcular:

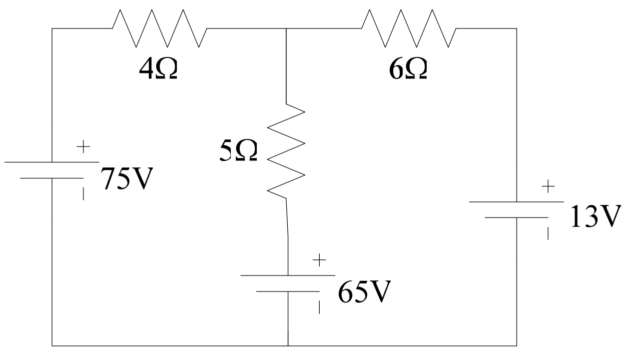
$$V_{R_2} \cong 3{,}32\,\text{V}$$

$$V_{R_3} \cong 39{,}24\,\text{V}$$

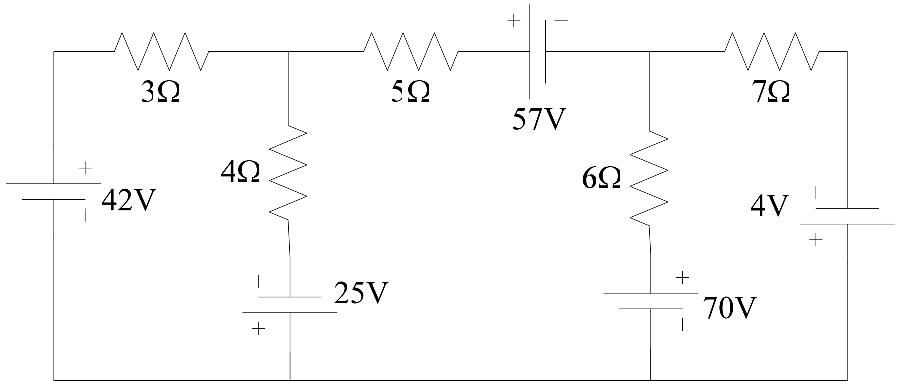
Exercícios:

Faça a análise dos circuitos abaixo, calculando a corrente e a tensão em cada resistor, utilizando o método de resolução de sistemas linear que considerar conveniente.

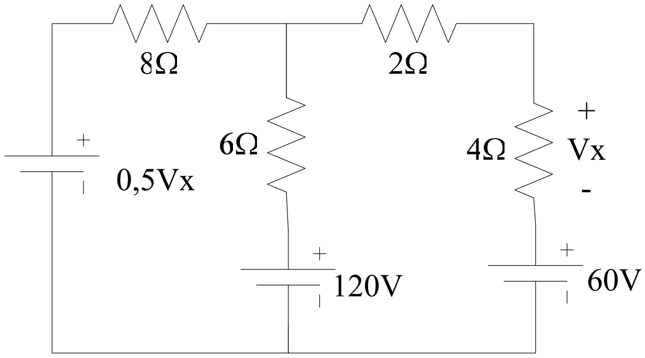
1)



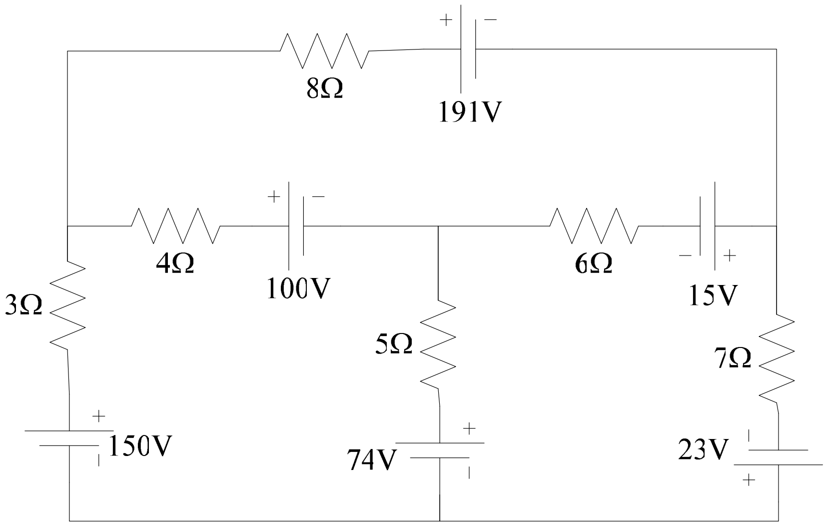
2)



3)



4)



5.7 NÚMEROS COMPLEXOS: A MATEMÁTICA BÁSICA DOS CIRCUITOS DE CORRENTE ALTERNADA (AC)

Quando lidamos com circuitos de corrente alternada (AC), devemos considerar uma variável adicional, o ângulo de fase. Esse simples item pode incrementar muito o tempo e esforço requerido para a análise de circuitos. O grau de dificuldade aumenta rapidamente com o número de componentes reativos presentes no circuito. Entretanto, a matemática irá nos ajudar a organizar e a simplificar os cálculos. O dispositivo matemático que devemos usar é chamado de operador-*j*, uma ferramenta dos **números complexos**.

O que são e como surgiram os números complexos?

Em 1572, Raphael Bombelli mostrou que para se obter a solução de uma equação da forma $x^2 + a = 0$, ou se aceita o conceito de **número imaginário** $\sqrt{-a}$, ou conclui-se que a solução não tem significado. Contudo, graças ao trabalho de importantes matemáticos como Karl F. Gauss, esse conceito prosperou e evoluiu para a sólida Teoria dos Números Complexos.

No final do século XIX, Oliver Heaviside e engenheiros da General Electric Company concluíram que era possível estabelecer uma conexão entre essa teoria, que até então era vista como uma curiosidade matemática, e a Teoria da Corrente Alternada.

Nessa nova formulação, tanto a voltagem como a corrente elétrica em circuitos AC são descritas pelas suas magnitudes e ângulos de fase.

Conseqüentemente, os números complexos são valiosos para nós, pois eles permitem estender as técnicas de análise de circuitos DC para circuitos AC. Embora, à primeira vista, os números complexos possam parecer algo estranho, suas aplicações são bastante simples.

Algumas definições serão necessárias para mostrar que eles podem ser manipulados com as mesmas regras, já familiares, da aritmética e da álgebra. Vejamos como aparecem esses conceitos fundamentais.

Consideremos a equação $x^2 + 2 = 0$. Qual é a solução?

$$x^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-2}$$

Mas não existe um número **real**, cujo quadrado é -2. O que, então, queremos representar com $\sqrt{-2}$?

A raiz quadrada de um número negativo não é um número real, entretanto soluções dessa ordem são úteis para muitas aplicações. Por ser um número "não real", foi chamado de número imaginário.

Por outro lado, o número resultante da soma de um número real com um número imaginário é chamado de número complexo.

Assim, se a equação de segundo grau for, por exemplo, $x^2 + 4x + 6 = 0$, suas soluções serão dadas pela fórmula de Bhaskara.

Assim:

$$x_1 = \frac{-4+\sqrt{-8}}{2} = -2 + \frac{\sqrt{-8}}{2} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-4-\sqrt{-8}}{2} = -2 - \frac{\sqrt{-8}}{2}$$

A parte real de ambas as raízes é -2 e a parte imaginária é $\frac{\sqrt{-8}}{2}$ na primeira e $-\frac{\sqrt{-8}}{2}$ na segunda.

Como é possível fatorar números sob o radical, podemos indicar um número imaginário como uma quantidade vezes $\sqrt{-1}$. Assim, $\frac{\sqrt{-8}}{2} = \frac{\sqrt{4.2}}{2} . \sqrt{-1} = \sqrt{2} . \sqrt{-1}$. Ou seja, em cada número imaginário isolamos $\sqrt{-1}$ do resto do número. A raiz de -1 é chamada **unidade imaginária**, indicada simbolicamente pela letra **i**.

Contudo, seguiremos a notação usada nos textos técnicos de eletrônica e engenharia, nos quais, é usual representar a unidade imaginária pela letra **j**, a fim de não confundir com a corrente elétrica, cujo símbolo é i.

Por esse motivo, chamamos de unidade imaginária o **número** j, tal que:

$$\boxed{j = \sqrt{-1} \qquad \text{ou} \qquad j^2 = -1}$$

E, as raízes x_1 e x_2 da equação $x^2 + 4x + 2 = 0$ podem então se escritas como:

$$x_1 = -2 + j\sqrt{2} \quad \text{e} \quad x_2 = -2 - j\sqrt{2}$$

ou ainda

$$x_1 = -2 + \sqrt{2}j \quad \text{e} \quad x_2 = -2 - \sqrt{2}j$$

Observações:

a) Como já vimos **j** é apenas um fator e como tal não importa a ordem em que aparece.

b) No contexto das aplicações elétricas, a letra j, designando a unidade imaginária, é também chamada de **operador-j**. Mais adiante, veremos a razão dessa nomenclatura.

Exercícios:

1) Sabendo, $j^2 = -1$, mostre que:

a) $j^3 = -j$

b) $j^4 = 1$

c) $j^5 = j$

d) $j^6 = -1$

2) Simplifique e expresse as raízes abaixo, usando a unidade imaginária j.

a) $\sqrt{-4} =$ ________________________________

b) $\sqrt{-16} =$ ________________________________

c) $\sqrt{-32} =$ ________________________________

d) $\sqrt{-98} =$ ________________________________

5.7.1 Representação dos Números Complexos

Um número complexo possui quatro formas de representação:

a) Forma Retangular, Cartesiana ou Algébrica.

a) Forma Polar ou Fasorial.

b) Forma Trigonométrica.

c) Forma Exponencial.

Cada uma dessas formas pode ser utilizada, dependendo das operações matemáticas desejadas.

5.7.1.1 Forma Retangular, Cartesiana ou Algébrica

Genericamente, todo número complexo **z** pode ser representado na forma cartesiana por:

$$\boxed{\mathbf{z = a + jb}}$$

em que **a** é a chamada **parte real** de **z** e **b** a **parte imaginária** de **z**. Ambos são números reais. Ou seja, a = Re(**z**) e b = Im(**z**).

Observe que:

a) Se b = 0, então **z** = a logo **z** é real.

d) Se a = 0 e b $\neq$ 0, então **z** = jb logo **z** é imaginário puro.

e) Se a $\neq$ 0 e b $\neq$ 0, então **z** é complexo

Números dessa forma podem ser representados graficamente num plano bidimensional, chamado de **Plano Complexo,** também conhecido como **Plano de Argand**.

Esse plano possui as mesmas características do Plano Cartesiano, porém o eixo das abscissas passa a se chamar **eixo real** e nele fica representada a parte real do número complexo; e o eixo das ordenadas passa a se chamar **eixo imaginário** e nele fica representada a parte imaginária do número complexo.

Assim, o número **z =** a +jb, no plano complexo, é representado pelo par ordenado (a, b).

Estamos diante de duas possibilidades de interpretação geométrica para o número complexo **z,** as quais estão ilustradas nos gráficos a seguir.

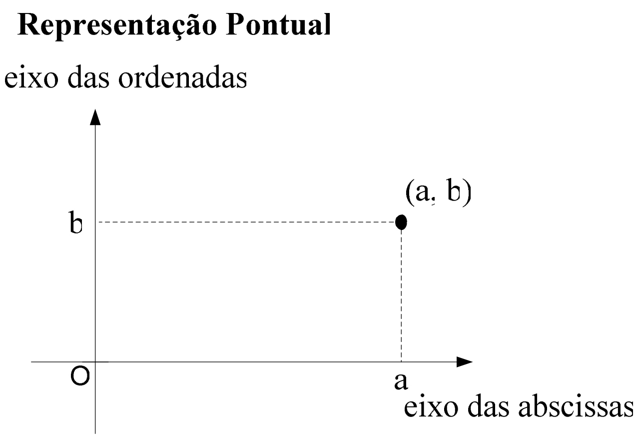


Figura 8 – Representação pontual de um número complexo no plano cartesiano

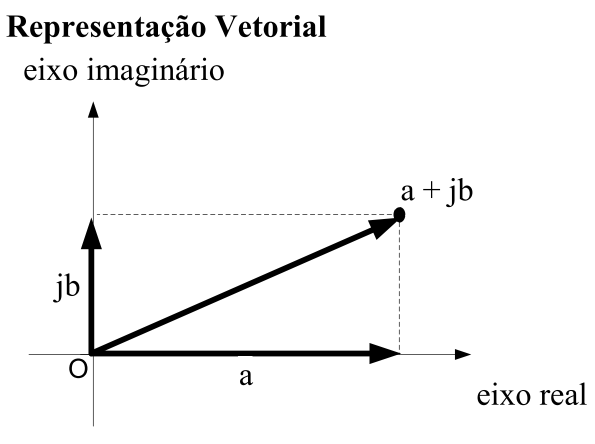


Figura 9 – Representação vetorial de um número complexo no plano cartesiano

No gráfico que ilustra a **representação pontual,** a interpretação geométrica de **z** é o ponto de coordenadas (a, b).

No gráfico que ilustra a **representação vetorial,** a interpretação geométrica de **z** é o vetor com origem em O e extremidade em P, isto é, **z** = $\overrightarrow{OP}$ = (a, b) é um vetor de componentes a e b.

Afinal, qual das interpretações geométricas adotaremos no nosso estudo?

A resposta virá naturalmente ao apresentarmos as outras três formas analíticas de representação de um número complexo.

Observação:

É importante ressaltar que o lugar geométrico de um número complexo pode estar sobre o eixo real ou sobre o eixo imaginário. Caso esteja sobre o eixo real, o número será da forma **z** = a + j0, com a$\in \Re$, ou seja, **z** = (a, 0), o que é facilmente constatado, que **z** é um número real. E, estando z sobre o eixo imaginário, **z** = 0 + jb, com b$\in \Re$,ou seja, **z** = (0, b), neste caso, que **z** é dito imaginário puro.

Exercício

1) Represente no plano complexo os números:

a) $z_1 = 4 + j4$

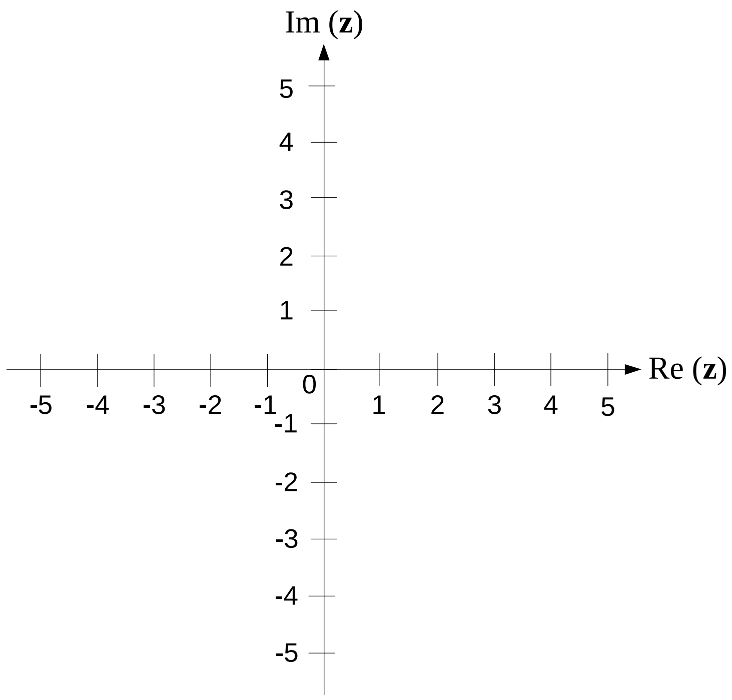
b) $z_2 = -3 + j2$

c) $z_3 = -j5$

d) $z_4 = -4$

e) $z_5 = -5 - j3$

f) $z_6 = 3 + j4$



5.7.1.2 Forma Polar ou Fasorial

Para introduzir a forma polar ou fasorial de um número complexo **z** = a + jb, é importante retomar a sua representação gráfica na forma vetorial.

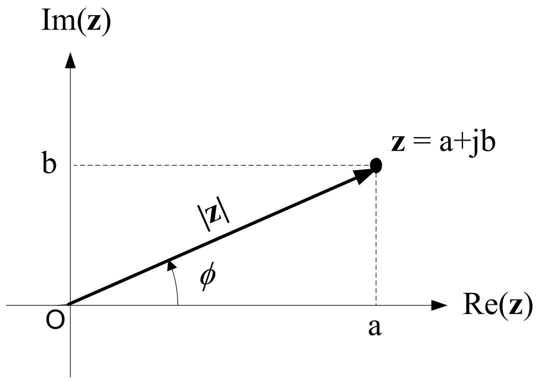


Figura 10 – Representação do módulo e do argumento de um número complexo no plano cartesiano

A forma polar de representar um número complexo **z** é caracterizada pela medida do segmento de reta $\overline{oz}$ **= |z|** (módulo de **z**) e, pelo ângulo ϕ**,** (letra grega fi), medido no sentido anti-horário, que por convenção é o sentido positivo.

Assim, em termos vetoriais **|z|** é o **módulo** ou **magnitude** do vetor $\overrightarrow{oz}$ = (a, b) e ϕ é o chamado **ângulo de fase** ou **argumento** de **z**.

A notação tradicional adotada pelos textos técnicos, para um número complexo na forma polar é:

$$|\mathbf{z}|\ \underline{\big|\ \phi\quad}$$

Essa notação introduz o conceito de **fasor**, isto é, um vetor de módulo **|z|** e ângulo de fase ϕ (fasor = fase + vetor).

Essas são as duas características de uma corrente alternada: a sua magnitude (ou módulo) e seu ângulo de fase (ou argumento).

Para calcular o módulo de **z**, retornamos à figura 12.

Observe o triângulo retângulo oaz, cuja hipotenusa é a medida do segmento $\overline{oz} = |\mathbf{z}|$, e os catetos são os segmentos de medida $\overline{oa} = a$ e $\overline{az} = \overline{ob} = b$ sendo assim, pelo teorema de Pitágoras, teremos:

$$\boxed{|\mathbf{z}|^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Sabemos da trigonometria que, no triângulo retângulo, a função trigonométrica tangente de ϕ é definida por $\tan\phi = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$. No caso do triângulo oaz, teremos $\overline{oa} = a$ (oposto de ϕ) e $\overline{az} = b$ (adjacente de ϕ) e, portanto, $\tan\phi = \dfrac{b}{a}$.

Para ângulos $0 < \phi < 90^o$ (isto é, **z** no primeiro quadrante), a > 0 e b > 0 e, portanto $\tan\phi > 0$. Para calcular ϕ, é necessário que se calcule a função inversa da tangente.

Para contemplar a possibilidade de **z**, localizado nos demais quadrantes, vamos definir.

$$\boxed{\phi = \arctan\frac{|b|}{|a|} \quad \text{ou} \quad \phi = \tan^{-1}\frac{|b|}{|a|}}$$

Ao se calcular ϕ, pelo processo acima, determina-se, independentemente do lugar geométrico de **z**, um arco no primeiro quadrante. Chamaremos de ϕ' esse ângulo e será tal que $0 < \phi' < 90^o$. Quando o segmento $\overline{oz}$ estiver localizado em outros quadrantes, é preciso corrigir ϕ'. Essa correção será feita da seguinte maneira:

a) se o segmento $\overline{oz}$ pertencer ao primeiro quadrante então $\phi = \phi'$;

b) se o segmento $\overline{oz}$ pertencer ao segundo quadrante então $\phi = 180^o - \phi'$;

c) se o segmento $\overline{oz}$ pertencer ao terceiro quadrante então $\phi = 180^o + \phi'$;

d) se o segmento $\overline{oz}$ pertencer ao quarto quadrante então $\phi = 360^o - \phi'$.

Observação:

Nas aplicações elétricas os ângulos de fase são expressos em graus.

Exemplos:

1) Dado o número complexo **z** = 3 + j2, represente-o graficamente e expresse-o na sua forma polar ou fasorial.

a) Representação no plano complexo:

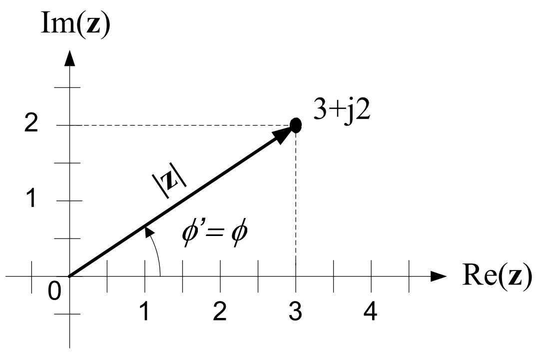


Figura 11 – Representação de z = 3 + j2 no plano complexo.

b) Cálculo do módulo de **z**:

$$|\mathbf{z}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \cong 3{,}6$$

c) Cálculo do argumento de **z**:

$$\phi' = \tan^{-1}\frac{|2|}{|3|} = \tan^{-1}\frac{2}{3} \cong 33{,}69^o$$

Observe que, como o lugar geométrico de z é o primeiro quadrante, ϕ' é igual a ϕ. Sendo assim, o argumento de z é $\phi \cong 33{,}69^o$.

d) Forma polar ou fasorial de **z**:

$$3{,}6\,\underline{\big|\;33{,}69^0}$$

2) Dado o número complexo **z** = -3 + j2, represente-o graficamente e expresse-o na sua forma polar ou fasorial.

a) Representação no plano complexo:

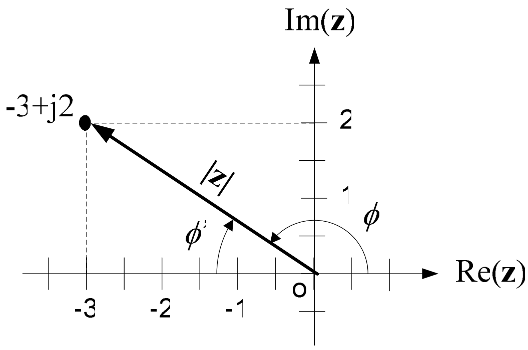


Figura 12 - Representação de z = -3 + j2 no plano complexo.

b) Cálculo do módulo de **z**:

$$|\mathbf{z}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \cong 3{,}6$$

c) Cálculo do argumento de **z**:

$$\phi' = \tan^{-1}\frac{|2|}{|-3|} = \tan^{-1}\frac{2}{3} \cong 33{,}69^{o}$$

Observe que, como o lugar geométrico de **z** é o segundo quadrante, para se obter ϕ deve-se corrigir ϕ'. Sendo assim, o argumento de **z** é:

$$\phi = 180^{o} - \phi' \cong 180^{o} - 33{,}69^{o} \cong 146{,}31^{o}$$

d) Forma polar ou fasorial de **z**:

$$3{,}6 \underline{\left| 146{,}31^{0} \right.}$$

3) Dado o número complexo **z** = -3 - j2, represente-o graficamente e expresse-o na sua forma polar ou fasorial.

a) Representação no plano complexo:

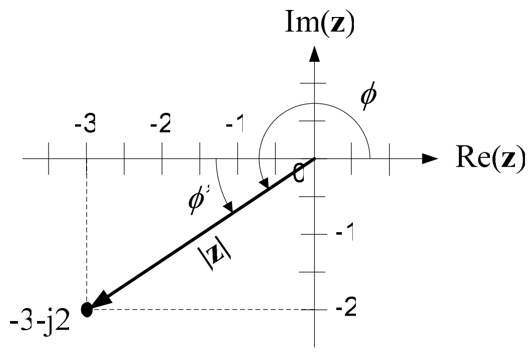


Figura 13 - Representação de z = 3 - j2 no plano complexo.

b) Cálculo do módulo de **z**:

$$|\mathbf{z}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \cong 3{,}6$$

c) Cálculo do argumento de **z**:

$$\phi\text{'} = \tan^{-1}\frac{|-2|}{|-3|} = \tan^{-1}\frac{2}{3} \cong 33{,}69^{o}$$

Observe que, como o lugar geométrico de z_3 é o terceiro quadrante, para se obter ϕ deve-se corrigir ϕ'. Sendo assim, o argumento de z_3 é:

$$\phi = 180^{o} + \phi\text{'} \cong 180^{o} + 33{,}69^{o} \cong 213{,}69^{o}$$

d) Forma polar ou fasorial de **z**:

$$3{,}6 \underline{\left|\, 213{,}69^{0} \right.}$$

4) Dado o número complexo **z** = 3 - j2, represente-o graficamente e expresse-o na sua forma polar ou fasorial.

a) Representação no plano complexo:

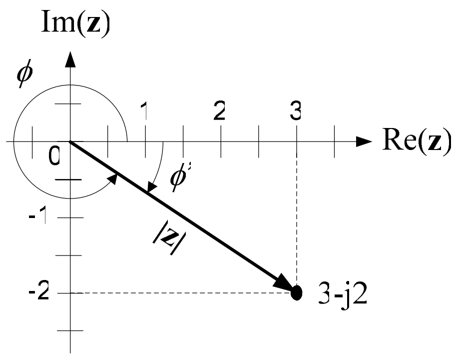


Figura 14 - Representação de z = 3 - j2 no plano complexo.

b) Cálculo do módulo de **z**:

$$|\mathbf{z}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \cong 3{,}6$$

c) Cálculo do argumento de **z**:

$$\phi' = \tan^{-1}\frac{|-2|}{|3|} = \tan^{-1}\frac{2}{3} \cong 33{,}69^o$$

Observe que, como o lugar geométrico de z_3 é o quarto quadrante, para se obter ϕ deve-se corrigir ϕ'. Sendo assim, o argumento de z_4 é:

$$\phi = 360^o - \phi' \cong 360^o - 33{,}69^o \cong 326{,}31^o$$

d) Forma polar ou fasorial de **z**:

$$3{,}6 \,\underline{|326{,}31^0}$$

5.7.1.3 Forma Trigonométrica

A forma trigonométrica de um número complexo **z** é:

$$\boxed{\mathbf{z} = |\mathbf{z}|\,(\cos\phi + j.\mathrm{sen}\,\phi)}$$

Vejamos a interpretação geométrica dessa forma no gráfico abaixo.

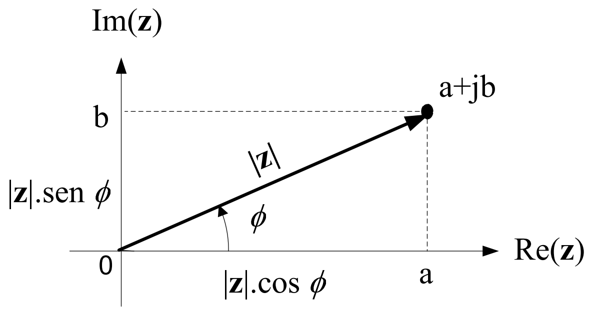


Figura 15 – Interpretação geométrica da forma a trigonométrica de um número complexo no plano cartesiano.

No triângulo retângulo oaz e as funções trigonométricas são:

$$\mathrm{sen}\,\phi = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |\mathbf{z}|.\mathrm{sen}\,\phi$$

$$\cos\phi = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |\mathbf{z}|.\cos\phi$$

Substituindo a e b em **z =** a + jb, obtém-se a forma trigonométrica de **z** que é:

$$\boxed{\mathbf{z} = |\mathbf{z}|\,(\cos\phi + j.\mathrm{sen}\,\phi)}$$

5.7.1.4 Forma Exponencial

Em alguns cálculos, na eletrônica, é conveniente expressar os fasores na forma exponencial. Precisamos, pois, passar da forma polar para trigonométrica e dessa para a exponencial. Isso só é possível graças à existência de uma importante fórmula, conhecida como *fórmula de Euler*. Mostraremos no apêndice A que:

$$\boxed{\cos\phi + \text{j}.\text{sen}\,\phi = e^{\text{j}\phi}}$$

Assim, o número complexo na forma trigonométrica $\mathbf{z} = |\mathbf{z}|\,(\cos\phi + \text{j}.\text{sen}\,\phi)$ passa ser escrito na forma exponencial por:

$$\boxed{\mathbf{z} = |\mathbf{z}|\,e^{\text{j}\phi}}$$

Exemplos:

1) Dado o número complexo **z** = 4 + j4, represente-o graficamente e expresse-o na sua forma trigonométrica e exponencial.

a) Representação no plano complexo:

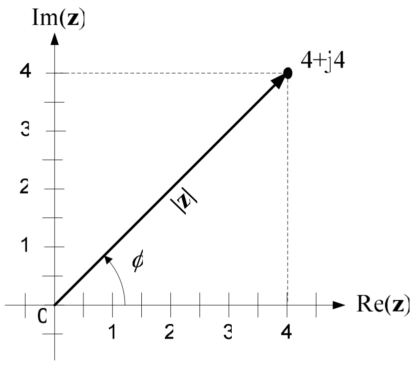


Figura 16 - Representação de z = 4 + j4 no plano complexo.

b) Cálculo do módulo de **z**:

$$|\mathbf{z}| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} \cong 5{,}65$$

c) Cálculo do argumento de **z**:

$$\phi\text{'} = \tan^{-1}\frac{|4|}{|4|} = \tan^{-1}\frac{4}{4} = 45^{o}$$

Observe que, como o lugar geométrico de **z** é o primeiro quadrante, ϕ' é igual a ϕ. Sendo assim, o argumento de **z** é $\phi = 45^{o}$.

d) Forma trigonométrica de **z**:

$$\mathbf{z} \cong 5{,}65\ (\cos 45^{o} + j.\text{sen } 45^{o})$$

e) Forma exponencial de **z**:

$$\mathbf{z} \cong 5{,}65\ e^{j45^{o}}$$

2) Dado o número complexo **z** = -3 + j2, represente-o graficamente e expresse-o na sua forma trigonométrica e exponencial.

a) Representação no plano complexo:

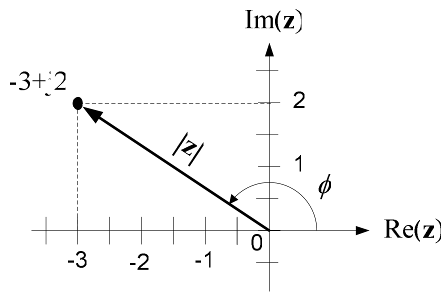


Figura 17 - Representação de z = -3 + j2 no plano complexo.

b) Cálculo do módulo de **z**:

$$|\mathbf{z}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \cong 3{,}6$$

c) Cálculo do argumento de **z**:

$$\phi\text{'} = \tan^{-1}\frac{|2|}{|-3|} = \tan^{-1}\frac{2}{3} \cong 33{,}69^{o}$$

Observe que, como o lugar geométrico de **z** é o segundo quadrante, para se obter ϕ deve-se corrigir ϕ'. Sendo assim, o argumento de **z** é:

$$\phi = 180^o - \phi' \cong 180^o - 33{,}69^o \cong 146{,}31^o$$

d) Forma trigonométrica de **z**:

$$\mathbf{z} \cong 3{,}6\ (\cos 146{,}31^o + j.\text{sen } 146{,}31^o)$$

e) Forma exponencial de **z**:

$$\mathbf{z} \cong 3{,}6\ e^{j146{,}31^o}$$

3) Dado o número complexo **z** = -4 - j3, represente-o graficamente e expresse-o na sua forma trigonométrica e exponencial.

a) Representação no plano complexo:

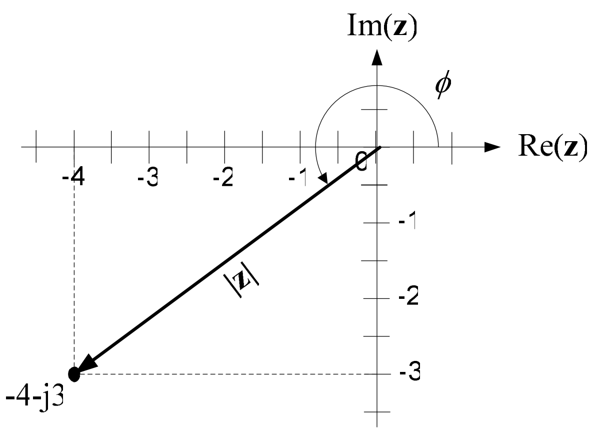


Figura 18 - Representação de z = -4 – j3 no plano complexo.

b) Cálculo do módulo de **z**:

$$|\mathbf{z}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

c) Cálculo do argumento de **z**:

$$\phi\text{'} = \tan^{-1}\frac{|-3|}{|-4|} = \tan^{-1}\frac{3}{4} \cong 36{,}87^{o}$$

Observe que, como o lugar geométrico de **z** é o terceiro quadrante, para se obter ϕ deve-se corrigir ϕ'. Sendo assim, o argumento de **z** é:

$$\phi = 180^{o} + \phi\text{'} \cong 180^{o} + 36{,}87^{o} \cong 216{,}87^{o}$$

d) Forma trigonométrica de **z**:

$$\mathbf{z} \cong 5\,(\cos 216{,}87^{o} + j.\text{sen}\ 216{,}87^{o})$$

e) Forma exponencial de **z**:

$$\mathbf{z} \cong 5\ e^{j\,216{,}87^{o}}$$

4) Dado o número complexo **z** = -j4, represente-o graficamente e expresse-o na sua forma trigonométrica e exponencial.

a) Representação no plano complexo:

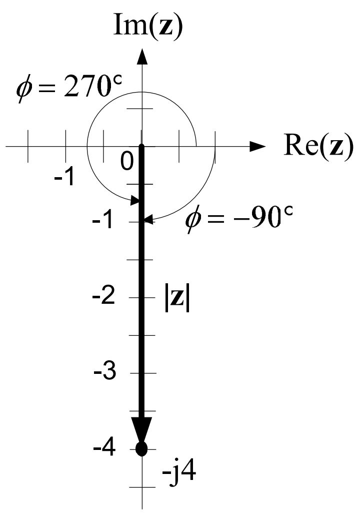


Figura 19 - Representação de z = - j4 no plano complexo.

b) Cálculo do módulo de **z**:

Nesse exemplo, nosso número complexo é um número imaginário puro, pois sua parte real é nula. Sua representação gráfica é ao longo do eixo Im(**z**) e seu módulo é a medida do segmento $\overline{oz}$ que é igual a 4.

Ou, analiticamente, poderíamos encontrar este valor aplicando a fórmula:

$$|\mathbf{z}| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$$

c) Cálculo do argumento de **z**:

Observe que o lugar geométrico de **z** é o eixo que divide o terceiro e quarto quadrante, ou seja, ϕ será 270^o. Nos textos técnicos, é usual expressar ângulos contidos no quarto quadrante ($270^o \leq \phi < 360^o$) como ângulos negativos compreendidos entre 0 e 90^o. Nesse exemplo, o argumento de **z** poderá ser representado por:

$$\phi = 270^o \quad \text{ou} \quad \phi = -90^o$$

d) Forma trigonométrica de **z**:

$$\mathbf{z} = 4\ (\cos 270^o + j.\text{sen } 270^o)$$

ou

$$\mathbf{z} = 5\ (\cos -90^o + j.\text{sen } -90^o)$$

e) Forma exponencial de **z**:

$$\mathbf{z} = 5\ e^{j270^0}$$

ou

$$\mathbf{z} = 5\ e^{j(-90^0)}$$

5) Dado o número complexo **z** = 4 – j3, represente-o graficamente e expresse-o na sua forma trigonométrica e exponencial.

a) Representação no plano complexo:

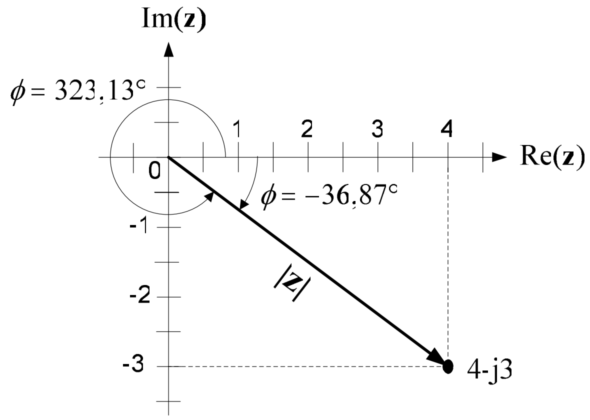


Figura 20 - Representação de z = 4 – j3 no plano complexo.

b) Cálculo do módulo de **z**:

$$|\mathbf{z}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

c) Cálculo do argumento de **z**:

$$\phi' = \tan^{-1}\frac{|-3|}{|4|} = \tan^{-1}\frac{3}{4} \cong 36{,}87^{o}$$

Observe que, como o lugar geométrico de **z** é o quarto quadrante, para se obter ϕ deve-se corrigir ϕ'. Sendo assim, o argumento de **z** é:

$$\phi = 360^{o} - \phi' \cong 360^{o} - 36{,}87^{o} \cong 323.13^{o}$$

$$\text{ou } \phi \cong -36{,}87^{o}$$

d) Forma trigonométrica de **z**:

$$\mathbf{z} \cong 5\,(\cos 323{,}13^{o} + j.\text{sen } 323{,}13^{o})$$

ou

$$\mathbf{z} \cong 5\,(\cos -36{,}87^{o} + j.\text{sen } -36{,}87^{o})$$

e) Forma exponencial de **z**:

$$\mathbf{z} = 5\ e^{j323,13^0}$$

ou

$$\mathbf{z} = 5\ e^{j(-36,87^0)}$$

Exercícios:

1) Converta para a forma polar.

a) **z** = j4 ____

b) **z** = –7 ____

c) **z** = –j2 ____

d) **z** = 15 + j25 __________________________________

e) **z** = 7 – j15 ___________________________________

2) Converta para a forma trigonométrica.

a) **z** = 3 – j3 ____

b) **z** = 3 – j ____

c) **z** = –6 – j2 _______________________________________

d) **z** = 7 – j5 ____

e) **z** = –1 + j2_______________________________________

3) Converta para a forma exponencial.

a) **z** = –8 + j9 ____

b) **z** = –3 ____

c) **z** = j9 ____

d) **z** = 5 + j3 ____

e) **z** = 120 + j100 _____________________________________

4) Um gerador AC produz a voltagem $120\underline{|30^o}$ V. Expresse a voltagem nas formas trigonométrica e retangular.

5) Uma corrente AC é especificada como 15 – j8 A. Expresse a corrente na forma polar.

6) Faça o gráfico dos seguintes números complexos. Determine também a sua magnitude.

a) 75 + j100 Ω

b) 3,3 + j0,7 μA

c) 56 – j10 kV

d) 3,5 – j9 V

e) j7 Ω

5.7.2 Operações com Números Complexos na Forma Retangular

5.7.2.1 Adição e subtração

Na adição ou subtração de números complexos, combinam-se as partes reais com reais e as partes imaginárias com imaginárias. Usam-se as mesmas regras de sinais utilizadas para os números reais.

Logo, se tivermos: (3 + j2) + (4 – j3) = 3 + j2 + 4 – j3

= (3 + 4) + j(2 – 3)

= 7 – j

Exemplo:

1) Se, num circuito em série, as impedâncias são 4800 + j1000, 1800 – j7200 e 3300 + j10.000 Ω, a impedância total é dada pela soma de cada impedância. Sendo assim teremos:

(4800 + j1000) + (1800 – j7200) + (3300 + j10.000)

= (4800 + 1800 + 3300) + (1000 – 7200 + 10.000)j

= 9900 + j3800 Ω

Para representar graficamente a adição de quantidades complexas, valemo-nos da representação vetorial, isto é, a cada número complexo associamos um vetor. A soma dos números complexos será, pois, regida pela **regra do paralelogramo** para a adição de vetores.

Exemplos:

1) Considerando (5 + j2) + (1 + j4) = (5 + 1) + (2 + 4)j = 6 + j6, a representação gráfica dessa adição será:

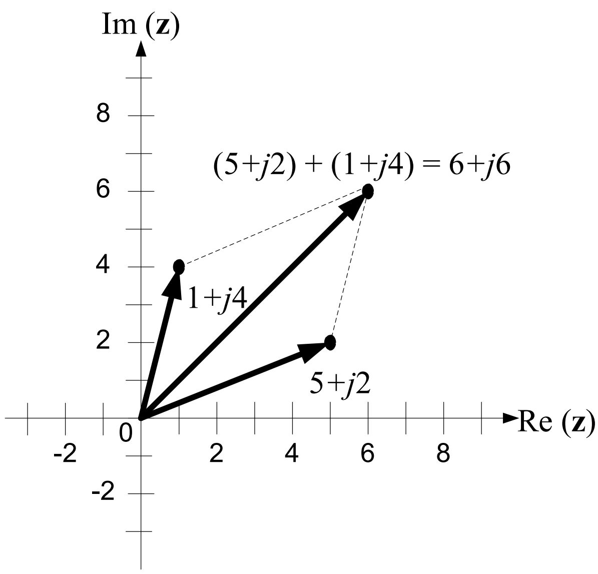


Figura 21 – Exemplo de soma de números complexos na forma retangular.

2) Considerando (5 + j2) + (2 – j6) = (5 + 2) + (2 – 6)j = 7 – j4, a representação gráfica dessa adição será:

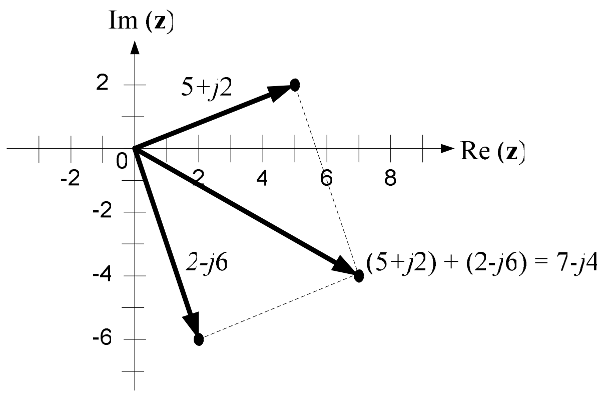


Figura 22 - Exemplo de soma de números complexos na forma retangular.

5.7.2.2 Multiplicação

5.7.2.2.1 Multiplicação por j

Vamos considerar, inicialmente, um número real positivo, por exemplo, o número 5, representado no plano complexo abaixo como o vetor $\overrightarrow{OA}$.

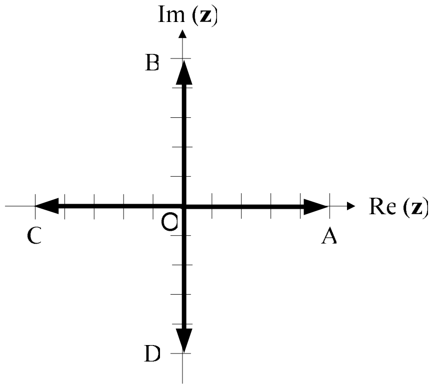


Figura 23 - Exemplo de vetores no plano complexo.

Se multiplicarmos o número 5 por j, temos o número imaginário j5, o qual está representado no plano complexo pelo vetor $\overrightarrow{OB}$. Esse novo vetor é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{OA}$.

Se continuarmos multiplicando sucessivamente por j, teremos $j^2 5 = -5$. Esse número agora é representado pelo vetor $\overrightarrow{OC}$ perpendicular a $\overrightarrow{OB}$. Multiplicando -5 por j, geramos o vetor $\overrightarrow{OD}$. Finalmente retornamos ao vetor $\overrightarrow{OA}$ e, se multiplicarmos –j5 por j, isto é, teremos (-j5)(j) = 5.

Podemos concluir, então que:

Multiplicar por j resulta em uma rotação de 90^o no sentido anti-horário

Observe que poderíamos ter iniciado com qualquer número complexo **z** = a + jb para mostrar que multiplicar por j resulta numa rotação de 90^o. É nesse sentido que a unidade imaginária j é também referida como **operador-j.**

5.7.2.2.2 Multiplicação entre números complexos

Sendo que $(a + b)(c + d)$ é igual a $ac+ bc+bc+bd$, então o mesmo procedimento pode ser usado para multiplicar números complexos.

Assim:

$$(a + jb)(c+jd) = ac + jad + jbc + j^2bd \quad \textbf{(lembre-se que } \mathbf{j^2 = -1)}$$

$$= ac + jad + jbc - bd$$

$$= (ac – bd) + j(ad + bc)$$

Logo, se tivermos: $(3 – j2)(5 + j4) = 15 + j12 – j10 – j^2 8$

$$= 15 + j12 – j10 + 8$$

$$= 23 + j2$$

Exemplo:

1) Em circuitos elétricos, a multiplicação de números complexos é usada, por exemplo, para calcular a voltagem. A lei de Ohm, para circuitos de corrente alternada fica V = IZ (sendo V a voltagem, I a corrente e Z a impedância). Se Z = 4 + j3 Ω e I = 5 + j2 A, determine a voltagem.

Assim, V = (5 + j2)(4 + j3)

= 20 +j15 + j8 + $j^2$6

= 20 +j23 – 6

= 14 +j23V

5.7.2.3 Divisão

A divisão de números complexos é análoga à operação realizada para racionalizar denominadores. Por exemplo, para dividir 5 + j4 por 1- j3 escreve-se:

$$\frac{5 + j4}{1 - j3}$$

e, para resolver, multiplica-se o numerador e o denominador pelo **complexo conjugado** do denominador.

Mas o que é **conjugado**? É uma palavra que vem do Latim e significa **unido**. Na matemática, conjugado refere-se a expressões que são quase idênticas. Os termos matemáticos conjugados mais comuns são as expressões binomiais que contêm dois termos. Se dois binômios contêm termos idênticos, mas diferem apenas nos sinais, separando os termos, eles são conjugados.

No caso dos números complexos $\mathbf{z_1}$ = a + jb e $\mathbf{z_2}$ = a – jb, temos complexos conjugados um do outro.

A notação para denotar o complexo conjugado de **z** é $\overline{\mathbf{z}}$

Assim, dado **z =** 2 – j3 o seu complexos conjugados é $\bar{\mathbf{z}}$ = 2 + j3, cuja representação gráfica é:

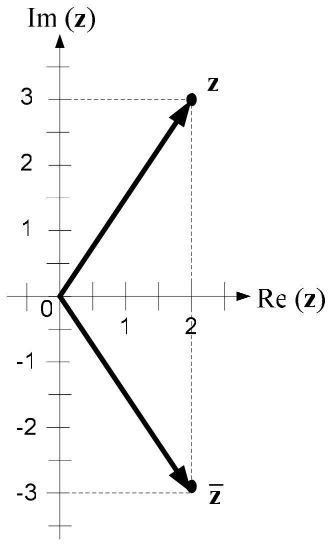


Figura 24 – Representação geométrica do conjugado de um n° complexo no plano complexo.

Voltando à divisão de números complexos, tem-se:

$$\frac{5+j4}{1-j3}\,x\,\frac{1+j3}{1+j3}=\frac{5+j4+j15+j^2 12}{1+j3-j3-j^2 9}$$

$$=\frac{5+j19-12}{1+9}$$

$$=\frac{-7+j19}{10}$$

$$=\frac{-7}{10}+j\frac{19}{10}$$

Exercícios:

1) Adicione e verifique graficamente.

a) 7 + (6 – j2) = ____

b) 2 – j5 – (3 + j6) = ____________________________________

c) 7 + j5 + 6 – j2 + j4 = _________________________________

d) + j5 + (2 – j) = _______________________________________

e) 15 + j9 – 2(2 – j5) = __________________________________

f) – j2 + 4 – (3 + j5) +2 = ________________________________

2) Multiplique

a) 6 (2 – j4) = ____

b) j5 (3 + j10) = ____

c) (3 – j2)(3 + j2) = ____

d) (5 – j)(2 + j3) = ____

e) (4 +j6)(3 + j3) = ____

f) (2 – j5)(3 – j4) = ____

3) Divida

a) $\frac{5 - j2}{j} =$ ____

b) $\frac{16 - j20}{j4} =$ ____

c) $\frac{4 + j8}{1 + j3} =$ ____

d) $\frac{3 - j}{2 - j3} =$ ____

e) $\frac{6 - j4}{5 + j} =$ ____

f) $\frac{9 + j8}{-2 + j3} =$ ____

Observação:

Para adicionar e subtrair quantidades complexas, o melhor é tê-las na forma retangular ou algébrica. Por outro lado, as operações de multiplicação, divisão e potenciação são facilmente realizadas com os números complexos nas formas polar, trigonométrica e exponencial.

Para as voltagens, costuma-se converter de uma forma para outra, várias vezes, durante a resolução de um problema. Você terá a oportunidade de constatar isso em atividades posteriores.

5.7.3 Operações com Números Complexos nas Formas Polar, Trigonométrica e Exponencial.

5.7.3.1 Multiplicação

A regra básica para multiplicar quantidades complexas em uma dessas três formas é:

$$\boxed{\text{multiplicar os módulos e somar os argumentos}}$$

(Veja a demonstração no apêndice B)

a) Forma Polar:

$$\mathbf{z_1} = |\mathbf{z_1}| \underline{|\ \phi_1} \quad \text{e} \quad \mathbf{z_2} = \underline{|\ \phi_2} \text{ , então:}$$

$$\boxed{\mathbf{z_1}.\mathbf{z_2} = |\mathbf{z_1}|.\ |\mathbf{z_2}| \underline{|\ \phi_1 + \phi_2}}$$

Exemplo:

Sendo $\mathbf{z_1} = 2\ \underline{|\ 20^o}$ e $\mathbf{z_2} = 3\ \underline{|\ 37^o}$, então:

$$\mathbf{z_1}.\mathbf{z_2} = (2\underline{|\ 20^o})(3\underline{|\ 37^o})$$
$$= 6\ \underline{|\ 57^o}$$

Graficamente temos:

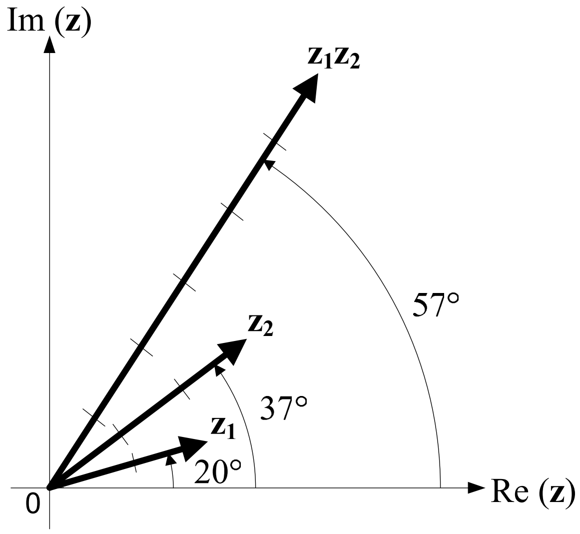


Figura 25 - Representação geométrica da multiplicação de números complexos no plano complexo.

b) Forma Trigonométrica:

$\mathbf{z_1} = |\mathbf{z_1}|(\cos\phi_1 + j.\text{sen}\,\phi_1)$ e $\mathbf{z_2} = |\mathbf{z_2}|(\cos\phi_2 + j.\text{sen}\,\phi_2)$, então:

$$\boxed{\mathbf{z_1}.\mathbf{z_2} = |\mathbf{z_1}|.\,|\mathbf{z_2}|[\cos(\phi_1+\phi_2) + j.\text{sen}(\phi_1+\phi_2)]}$$

Exemplo:

1) Sendo $\mathbf{z_1} = 3(\cos 30^0 + j.\text{sen}30^0)$ e $\mathbf{z_2} = 4(\cos 80^0 + j.\text{sen}80^0)$, então:

$$\mathbf{z_1}.\mathbf{z_2} = [3(\cos 30^0 + j.\text{sen}30^0)][\,4(\cos 80^0 + j.\text{sen}80^0)]$$

$$= 12(\cos 110^0 + j.\text{sen}110^0)$$

Graficamente temos:

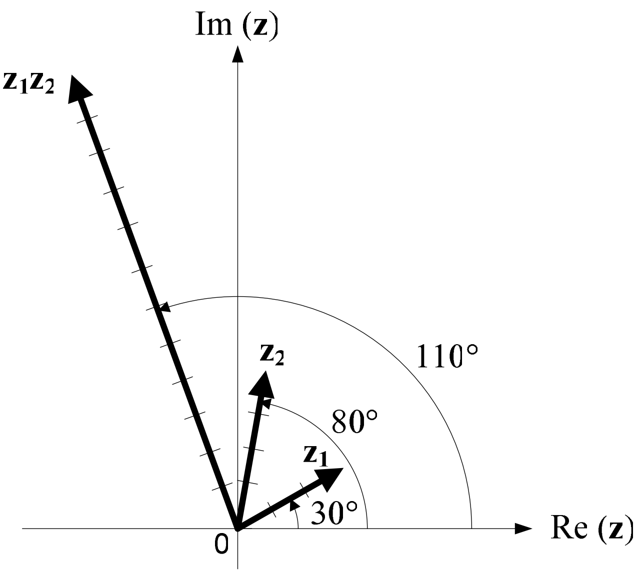


Figura 26 - Representação geométrica da multiplicação de números complexos no plano complexo.

c) Forma Exponencial:

$$\mathbf{z_1} = |\mathbf{z_1}|\ e^{j\phi_1} \quad \text{e} \quad \mathbf{z_2} = |\mathbf{z_2}|\ e^{j\phi_2}, \text{ então:}$$

$$\boxed{\mathbf{z_1}.\mathbf{z_2} = |\mathbf{z_1}|\ |\mathbf{z_2}|\, e^{j(\phi_1+\phi_2)}}$$

Exemplo:

1) Sendo $\mathbf{z_1} = 2e^{j20^0}$ e $\mathbf{z_2} = 4e^{j45^0}$, então:

$$\mathbf{z_1}.\mathbf{z_2} = (2\ e^{j20^0})(\ 4\ e^{j45^0})$$

$$= 8\ e^{j65^0}$$

Graficamente teremos:

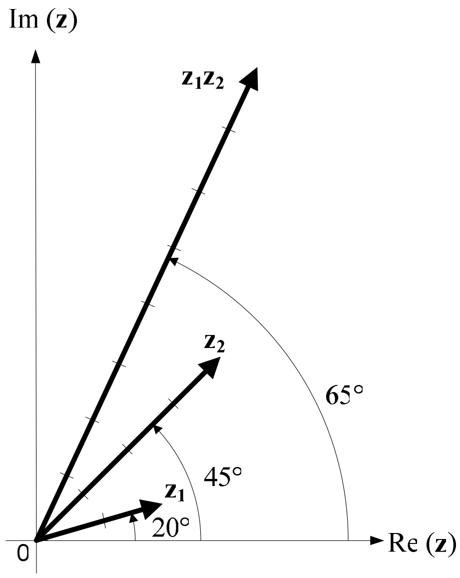


Figura 27 - Representação geométrica da multiplicação de números complexos no plano complexo.

5.7.3.2 Divisão

A regra básica para dividir quantidades complexas expressas nas formas polar, trigonométrica e exponencial é:

dividir os módulos e subtrair os argumentos

(Veja a demonstração no apêndice C)

a) Forma Polar:

$\mathbf{z_1} = |\mathbf{z_1}| \underline{\big|\ \phi_1}$ e $\mathbf{z_2} = |\mathbf{z_2}| \underline{\big|\ \phi_2}$, então:

$$\boxed{\frac{\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_2}} = \frac{|\mathbf{z_1}|}{|\mathbf{z_2}|} \underline{\big|\ \phi_1 - \phi_2}}$$

Exemplo:

1) Sendo $z_1 = 8\ \underline{|60^o}$ e $\mathbf{z_2} = 2\ \underline{|20^o}$, então:

$$\frac{\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_2}} = \frac{8\underline{|60^o}}{2\underline{|20^o}} = 4\ \underline{|40^o}$$

Graficamente teremos:

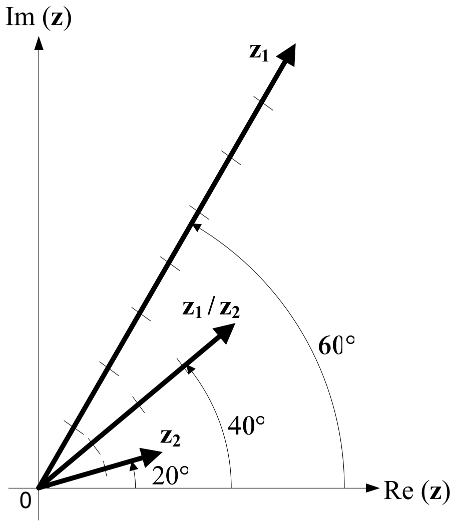


Figura 28 - Representação geométrica da divisão de números complexos no plano complexo.

b) Forma Trigonométrica:

$\mathbf{z_1} = |\mathbf{z_1}|(\cos\phi_1 + j.\text{sen}\,\phi_1)$ e $\mathbf{z_2} = |\mathbf{z_2}|(\cos\phi_2 + j.\text{sen}\,\phi_2)$ então:

$$\boxed{\frac{\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_2}} = \frac{|\,\mathbf{z_1}\,|}{|\,\mathbf{z_2}\,|}\ [\cos(\phi_1 - \phi_2) + j.\text{sen}(\phi_1 - \phi_2)]}$$

Exemplo:

1) Sendo $\mathbf{z_1} = 9(\cos 30^o + j.\text{sen}30^o)$ e $\mathbf{z_2} = 3(\cos 80^o + j.\text{sen}80^o)$, então:

$$\frac{\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_2}} = \frac{9(\cos 30^o + j.\text{sen}30^o)}{3(\cos 80^o + j.\text{sen}80^o)}$$

$$= \frac{9}{3}[\cos(30^0 - 80^0) + j.\text{sen}(30^0 - 80^0)]$$

$$= 3[\cos(-50^o) + j.\text{sen}(-50^o)]$$

ou

$$= 3[\cos 310^o + j.\text{sen}310^o]$$

Observação:

Observe que o argumento é um ângulo do quarto quadrante e está sendo definido no sentido horário (que é o sentido negativo). Se desejarmos obter o argumento no sentido anti-horário (que é o sentido positivo), basta somar 360^o, ou seja, no sentido positivo o argumento resultante da divisão será 310^o.

Graficamente teremos:

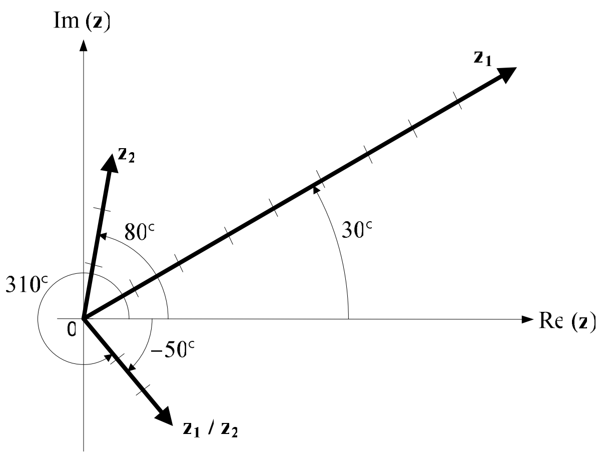


Figura 29 - Representação geométrica da divisão de números complexos no plano complexo.

c) Forma Exponencial:

$$\mathbf{z_1} = |\mathbf{z_1}|.\, e^{j\phi_1} \quad \text{e} \quad \mathbf{z_2} = |\mathbf{z_2}|.\, e^{j\phi_2}, \text{ então:}$$

$$\boxed{\frac{\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_2}} = \frac{|\mathbf{z_1}|}{|\mathbf{z_2}|}\, e^{j(\phi_1 - \phi_2)}}$$

Exemplo:

1) Sendo $\mathbf{z_1} = 10\, e^{j70^0}$ e $\mathbf{z_2} = 5\, e^{j45^0}$, então:

$$\frac{\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_2}} = \frac{10}{5}\, e^{j(70^0 - 45^0)}$$

$$= 2\, e^{j25^0}$$

Graficamente teremos:

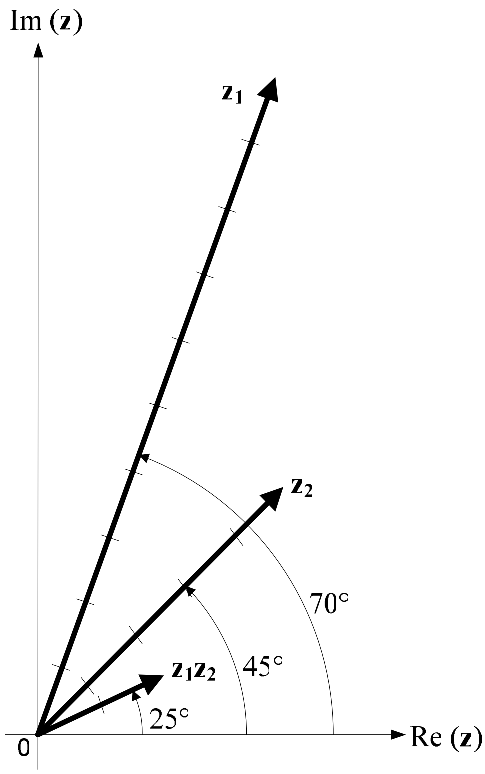


Figura 30 - Representação geométrica da divisão de números complexos no plano complexo.

5.7.3.3 Potenciação

A regra básica, para elevar a uma potência quantidades complexas expressas na forma polar, trigonométrica e exponencial, é:

elevar o módulo e multiplicar o argumento pela potência

(Veja a demonstração no Apêndice D)

a) Forma Polar:

$$\boxed{(\mathbf{z})^{n} = |\mathbf{z_1}|^{n} \underline{\left| \, n\phi \right.}}$$

Exemplo:

1) Sendo $\mathbf{z} = 2 \angle 32^o$, então

$$(z)^3 = (2)^3 \angle (3)(32^o)$$
$$= 8 \angle 96^o$$

Graficamente teremos:

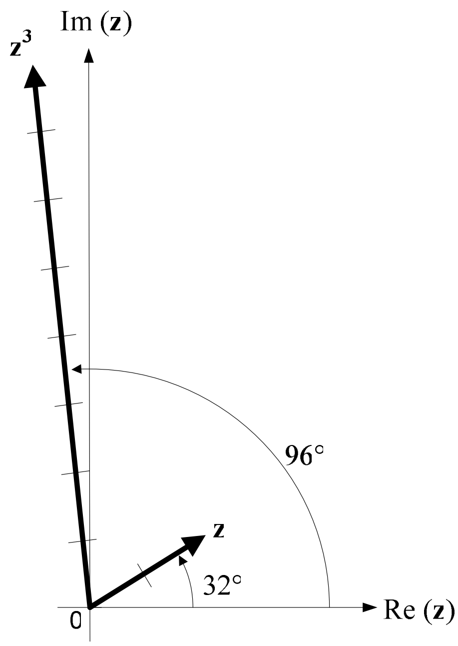


Figura 31 - Representação geométrica da potenciação de números complexos no plano complexo.

b) Forma Trigonométrica: $\mathbf{z} = |\mathbf{z}|(\cos\phi + j\text{sen}\,\phi)$

$$\boxed{(\mathbf{z})^n = (|\mathbf{z}|)^n\,[\cos(n\phi) + j.\text{sen}(n\phi)]}$$

Exemplo:

1) Sendo $\mathbf{z} = 3(\cos 30^o + j.\text{sen}30^o)$, então se $(\mathbf{z})^2$ é igual a:

$$(\mathbf{z})^2 = 3^2(\cos(2.30^o + j.\text{sen}(2.30^o)$$

$$= 9(\cos 60^o + j.\text{sen}\,60^o)$$

Graficamente teremos:

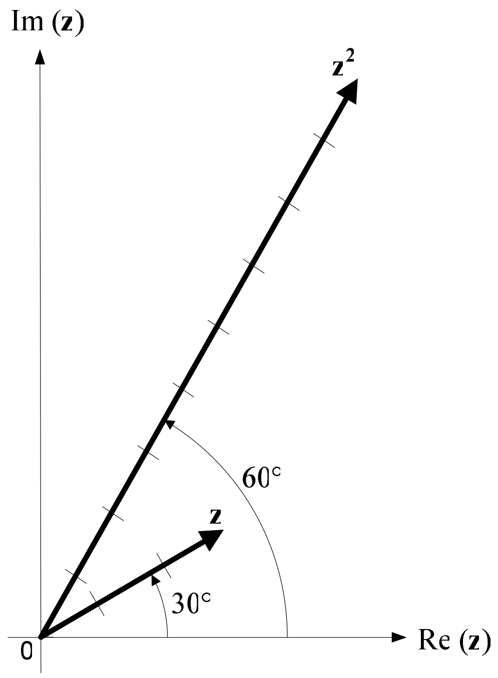


Figura 32 - Representação geométrica da potenciação de números complexos no plano complexo.

d) Forma Exponencial: $\mathbf{z} = |\mathbf{z}|.\, e^{j\phi_1}$, então:

$$\boxed{(\mathbf{z})^n = (|\mathbf{z}|)^n\, e^{jn\phi_1}}$$

Exemplo:

1) Sendo $\mathbf{z} = 2\,e^{j20^0}$,então se $(\mathbf{z})^4$ é igual a:

$$(\mathbf{z})^4 = 16\,e^{j80^0}$$

Graficamente teremos:

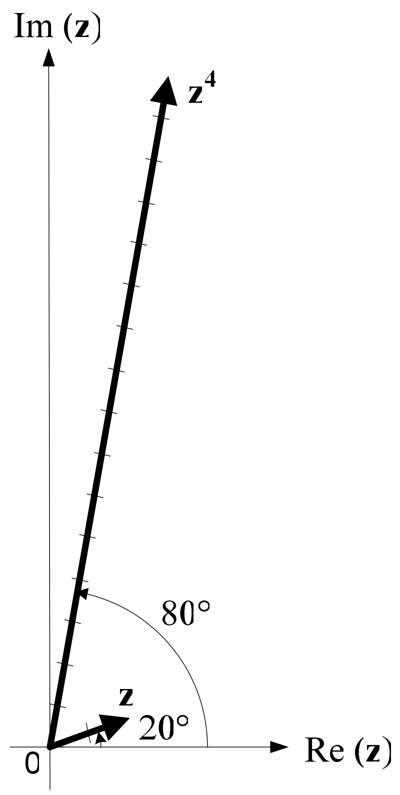


Figura 33 - Representação geométrica da potenciação de números complexos no plano complexo.

5.7.4 Introdução à Análise de Circuitos AC, usando Números Complexos.

Como já foi visto, para um circuito AC usa-se preferencialmente a notação fasorial para as voltagens (V) e para as correntes (I). Ou seja, cada corrente e cada voltagem é um número complexo.

Por outro lado, nos circuitos DC, cada corrente e cada voltagem são representadas por números reais.

É razoável supor que as regras desenvolvidas para análise de circuitos DC possam ser usadas para analisar circuitos AC, apenas substituindo a representação de números reais por números complexos.

O tratamento dado a resistores, capacitores e indutores é unificado então pela introdução do conceito de **impedância**. Esse conceito foi proposto em 1897 por Oliver Heaviside e tem sido uma valiosa ferramenta da análise de circuitos AC.

A impedância de um circuito AC é designada pela letra maiúscula **Z** e é definida como um número complexo, cuja parte real é composta pela resistência R do circuito. A parte imaginária, chamada de reatância do circuito, é composta por uma contribuição indutiva, $X_{L,}$ e uma capacitiva, X_C.

Assim, a impedância **Z** é definida por:

$$\boxed{\mathbf{Z} = R + jX}$$

em que, $X = X_L + X_C$.

A unidade da impedância é a mesma da resistência, isto é, ohm (Ω).

Podemos generalizar a lei de Ohm para um circuito AC, como:

$$\boxed{V = ZI}$$

Para um caso particular de um circuito AC com a presença apenas de resistores, a lei de Ohm se reduz a:

$$\boxed{V = RI}$$

em que I e V são números complexos, mas R é real.

Quando resistores, capacitores e indutores estão presentes, as impedâncias dos componentes individuais são combinadas (em série ou em paralelo) da mesma forma que as resistências são combinadas em circuitos DC.

A impedância equivalente, $Z_{eq,}$ dessa combinação é dada por:

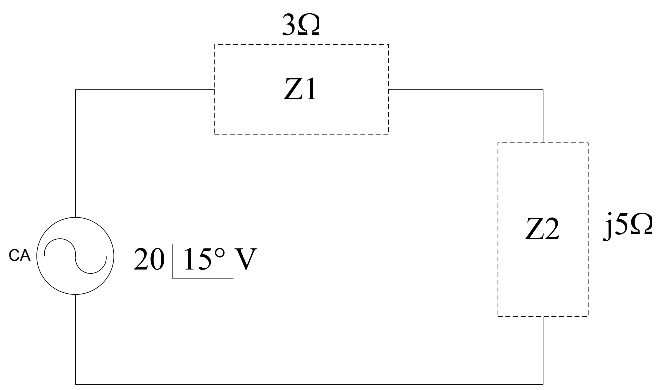
$$\boxed{Z_{eq} = R_{eq} + jX_{eq}}$$

em que R_{eq} é a parte resistiva da impedância e X_{eq} é a parte reativa da impedância.

Em vista disso, é comum referir-se a um capacitor ou indutor como **componentes reativos**.

Exemplos:

1) Dado o circuito



a) determine a corrente total (I) que passa pelo circuito;

b) determine as correntes I_{Z_1} e I_{Z_2};

c) determine as tensões em V_{Z_1} e V_{Z_2};

d) represente as tensões no *diagrama de fasores*.

Solução:

Para determinar os itens acima, é importante lembrar que:

1. nos circuitos em série, $Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n$.;
2. nos circuitos em série, $V = V_{Z_1} + V_{Z_2} + ... + V_{Z_n}$;.
3. nos circuitos em série a corrente em todos os componentes é igual.

a) Sendo

$V_{total} = Z_{eq} I$ o que implica que $I = \dfrac{V}{Z_{eq}}$

$Z_{eq} = Z_1 + Z_2$, $Z_{eq} = 3 + j5$

Pode-se dizer que $I = \dfrac{V}{Z_{eq}} = \dfrac{20\underline{|15^{o}}}{3 + j5}$.

Observação:

Para continuar a operação, devemos transformar 3 + j5 para a forma polar e, em seguida, aplicar o conceito de divisão de números complexos na forma polar.

Sendo $Z_{eq} = 3 + j5$

Módulo = $\sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \cong 5{,}8$

Argumento = $\tan^{-1}\left(\dfrac{5}{3}\right) \cong 59^{o}$

Logo,

$$I \cong \frac{20\ \underline{|15^{o}}}{5{,}8\ \underline{|59^{o}}}$$

$$\cong \frac{20}{5{,}8}\underline{|15^{o} - 59^{o}}$$

$$I \cong 3{,}45\underline{|-44^{o}}A$$

b) Num circuito em série, a corrente que passa pelos componentes é sempre a mesma. Sendo assim $I_{Z_1} = I_{Z_2} = I \cong 3{,}45\underline{|-44^{o}}A$

c) Sendo $V = ZI$, teremos que:

$$V_{Z_1} = Z_1 I = (3)(3{,}45\underline{|-44^{o}}) \cong 10{,}35\underline{|-44^{o}}\ V$$

$$V_{Z_2} = Z_2 I = (j5)(3{,}45\underline{|-44^{o}}).$$

Transformando j5 para a forma polar, teremos $5\underline{|90^{o}}$.

Assim:

$$V_{Z_2} = (5\underline{|90^o})(3{,}45\underline{|-44^o}) \cong 17{,}25\underline{|46^o}\ V$$

Sabendo que, nos circuitos em série, o somatório da tensão em cada componente é igual à tensão total ($V = V_{Z_1} + V_{Z_2}$) e que as tensões são representadas por números complexos, o chamado **diagrama de fasor** nada mais é que a representação de V_{Z_1}, V_{Z_2} e V no **plano complexo**.

Para determinar V, é preciso transformar V_{Z_1} e V_{Z_2} para a forma cartesiana. Vejamos como fazer essa conversão.

Partimos da forma polar para a forma trigonométrica e desta para a cartesiana.

Para V_{Z_1} temos:

- Forma Polar**:** $V_{Z_1} \cong 10{,}35\underline{|-44^o}\ V$
  - Módulo $\cong 10{,}35$
  - Argumento $\cong -44^o$
- Forma Trigonométrica**:** $V_{Z_1} \cong 10{,}35[\cos(-44) + j.\text{sen}(-44)]\ V$
- Forma Cartesiana**:** $V_{Z_1} \cong 7{,}44 - j7{,}25\ V$

Para V_{Z_2} teremos:

- Forma Polar**:** $V_{Z_2} \cong 17{,}25\underline{|46^o}\ V$
  - Módulo $\cong 17{,}25$
  - Argumento $\cong 46^o$
- Forma Trigonométrica**:** $V_{Z_2} \cong 17{,}25[\cos(46^o) + j.\text{sen}(46^o)]\ V$
- Forma Cartesiana**:** $V_{Z_2} \cong 11{,}88 + j12{,}41V$

Para V, teremos finalmente:

$$V = V_{Z_1} + V_{Z_2} \cong (7{,}44 - j7{,}25) + (11{,}88 + j12{,}41) \cong 19{,}32 + j5{,}17V$$

Em resumo:

Tensão(V)	Forma Cartesiana	Forma Polar
V_{Z_1}	$7{,}44 - j7{,}25$	$10{,}35\underline{\vert -44^o}$
V_{Z_2}	$11{,}88 + j12{,}42$	$17{,}25\underline{\vert 46^o}$
$V = V_{Z_1} + V_{Z_2}$	$19{,}32 + j5{,}17$	$20\underline{\vert 15^o}$

Figura 34 – Síntese dos resultados da solução do circuito do exemplo 1.

Representação no diagrama de fasores:

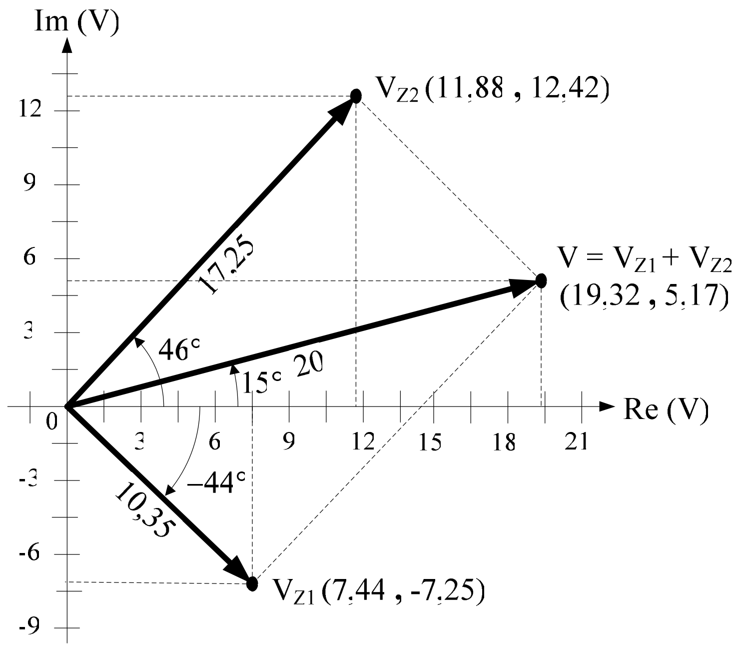
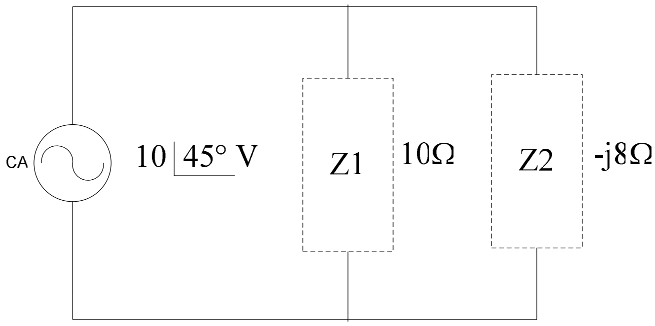


Figura 35 – Representação geométrica do exemplo 1 no diagrama de fasores.

2) Dado o circuito



a) determine as correntes I_{Z_1} e I_{Z_2};

b) determine a corrente total (I) que passa pelo circuito;

c) determine as tensões em V_{Z_1} e V_{Z_2};

d) represente as correntes no diagrama de fasores.

Solução:

Para determinar os itens acima, é importante lembrar que:

1. nos circuitos em paralelo, $Z_{eq} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots + \frac{1}{Z_n}$;
2. nos circuitos em paralelo a tensão em todos os componentes é igual;
3. nos circuitos em paralelo, $I = I_{Z_1} + I_{Z_2} + \ldots + I_{Z_n}$.

a) $I_{Z_1} = \frac{V}{Z_1} = \frac{10\angle 45^\circ}{10} = \frac{10\angle 45^\circ}{10\angle 0} = 1\angle 45^\circ$ A

$$I_{Z_2} = \frac{V}{Z_2} = \frac{10\angle 45^\circ}{-j8} = \frac{10\angle 45^\circ}{8\angle -90^\circ} = 1{,}25\angle 135^\circ \text{ A}$$

A corrente total é: $I = I_{Z_1} + I_{Z_2} = (1\angle 45^\circ) + (1{,}25\angle 135^\circ)$

Observação:

É importante destacar que, para realizar essa operação, devemos transformar os complexos que estão na forma polar para a forma cartesiana.

Para I_{Z_1}, teremos:

- Forma Polar: $I_{Z_1} = 1\underline{|\,45^o}\ A$ $\begin{cases} \text{Módulo} = 1 \\ \text{Argumento} = 45^o \end{cases}$

- Forma trigonométrica**:** $I_{Z_1} = 1(\cos 45^o + j.\text{sen}45^o)\ A$

- Forma cartesiana: $I_{Z_1} = 1\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cong 0{,}71 + j0{,}71\ A$

Para I_{Z_2}, teremos:

- Forma Polar**:** $I_{Z_2} = 1{,}25\underline{|\,135^o}\ A$ $\begin{cases} \text{Módulo} = 1{,}25 \\ \text{Argumento} = 135^o \end{cases}$

- Forma trigonométrica**:** $I_{Z_2} = 1{,}25(\cos 135^o + j.\text{sen}135^o)$

- Forma cartesiana**:**

$$I_{Z_2} = 1{,}25\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cong 1{,}25(-0{,}71 + j0{,}71) \cong -0{,}89 + j0{,}89A$$

Para , I temos:

$$\begin{aligned} I &= I_{Z_1} + I_{Z_2} \\ &= (1\underline{|\,45^o}) + (1{,}25\underline{|\,135^o}) \\ &\cong (0{,}71 + j0{,}71) + (-0{,}89 + j0{,}89) \\ &\cong 0{,}71 + j0{,}71 - 0{,}89 + j0{,}89 \\ I &\cong -0{,}18 + j1{,}6A \end{aligned}$$

- Forma cartesiana**:** $I \cong -0{,}18 + j1{,}6A$

Módulo = $\sqrt{(-0{,}18)^2 + (1{,}6)^2} \cong 1{,}61$

$\tan^{-1}\left(\dfrac{1{,}6}{0{,}18}\right) \cong 83{,}6^o$ corrigindo temos:

Argumento = $96{,}4^o$

Observação:

$I \cong -0{,}18 + j1{,}6A$ é um número complexo, cujo lugar geométrico é o segundo quadrante. Portanto, é necessário corrigir o argumento, pois o argumento encontrado é do primeiro quadrante. Assim, fazendo $180^o - 83{,}6^o = 96{,}4^o$, determina-se o argumento de I.

- Forma Polar**:** $I = 1{,}61|\underline{96{,}4^o}$

c) Sabemos que nos circuitos em paralelo a tensão em todos os componentes é igual. Assim, $V_{Z_1} = V_{Z_2} = V = 10|\underline{45^o}$ V

Ao representar as correntes no diagrama de fasor, estaremos representando graficamente a adição de quantidades complexas.

Corrente(A)	Forma Cartesiana	Forma Polar
I_{Z_1}	$0{,}71 + j0{,}71\,A$	$1|\underline{45^o}$
I_{Z_2}	$-0{,}89 + j0{,}89$	$1{,}25|\underline{135^o}$
I	$-0{,}18 + j1{,}6A$	$1{,}61|\underline{96{,}4^o}$

Figura 36 - Síntese dos resultados da solução do circuito do exemplo 1.

Representação no diagrama de fasores:

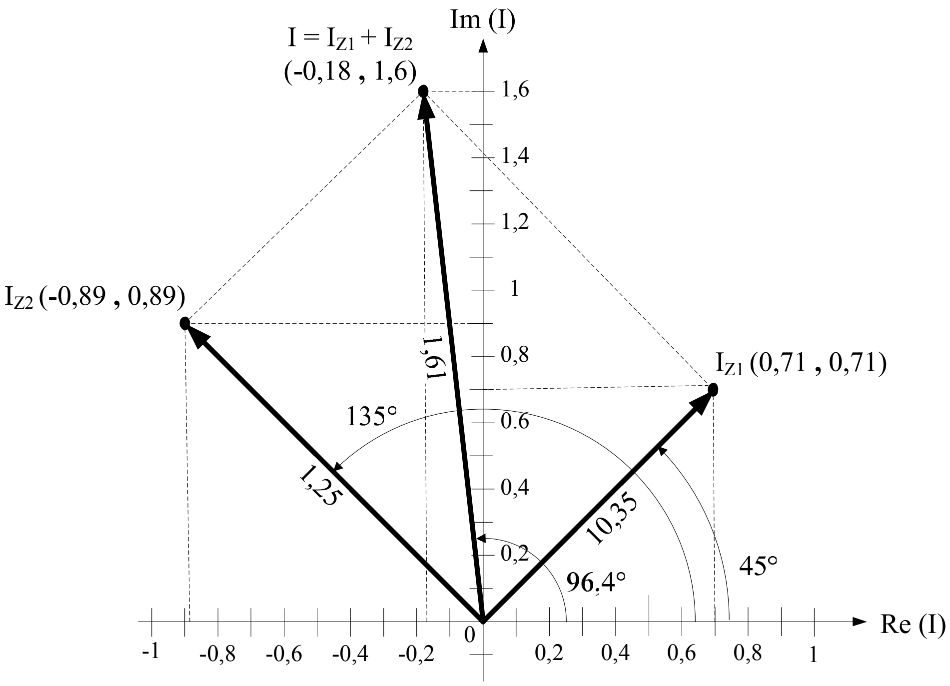
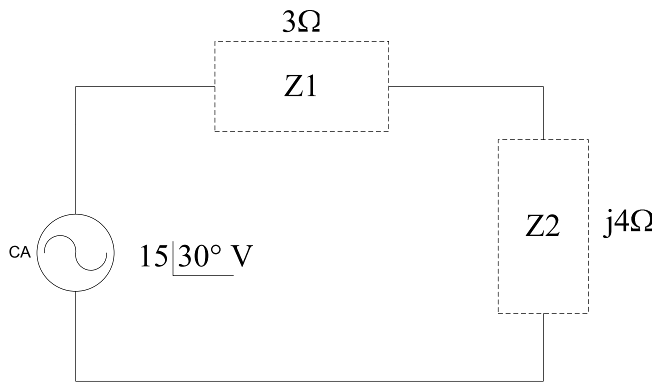


Figura 37 - Representação geométrica do exemplo 2 no diagrama de fasores.

Exercícios:

1) Dado o circuito

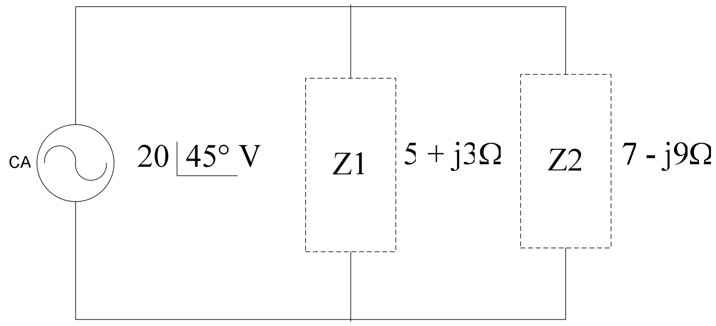


a) determine a corrente total (I) que passa pelo circuito;

b) determine as tensões em V_{Z_1} e V_{Z_2} ;

c) represente as tensões no diagrama de fasores.

2) Dado o circuito



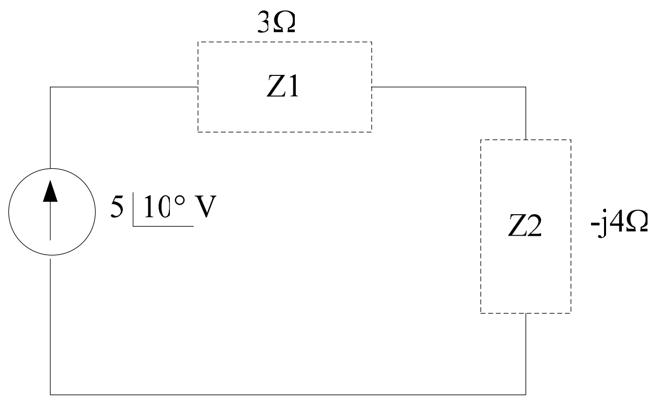
a) determine as correntes I_{Z_1} e I_{Z_2};

b) determine a corrente total (I) que passa pelo circuito;

c) determine as tensões em V_{Z_1} e V_{Z_2};

d) represente as correntes no diagrama de fasores.

3) Dado o circuito

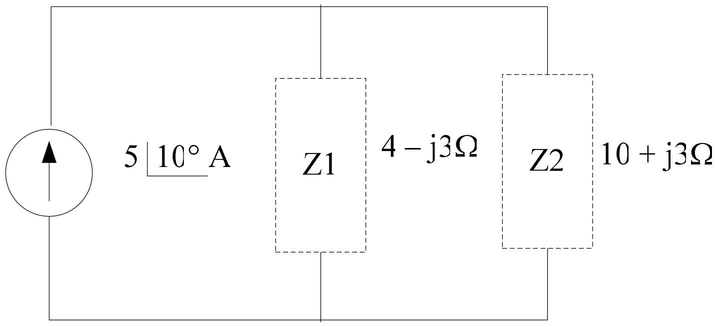


a) determine as tensões em V_{Z_1} e V_{Z_2};

b) determine as correntes I_{Z_1} e I_{Z_2};

c) represente as tensões no diagrama de fasores.

4) Dado o circuito



a) determine as correntes I_{Z_1} e I_{Z_2};

b) determine a corrente total (I) que passa pelo circuito;

c) represente as correntes no diagrama de fasores.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A primeira etapa de nossa investigação foi diagnosticar o nível de conhecimento matemático de nosso público alvo. Isso foi alcançado através do pré-teste e da interação com os alunos já nas primeiras aulas. Comprovou-se grande deficiência de conhecimentos mínimos necessários, concordando com o que já havia sido apontado pelos demais professores do curso. Ficou evidente, pois, a necessidade de desenvolver uma proposta de ensino diferenciada que suprisse as falhas diagnosticadas, bem como levasse em consideração o resultado do levantamento do perfil do aluno.

Mas como estimular o interesse do aluno pela matemática e iniciar um processo de formação científica que o levasse a rever a matemática elementar e a superar as dificuldades conceituais? Como criar condições para rever, entender, aprofundar e aplicar os conceitos matemáticos no cenário de um curso de eletrônica? Esses eram os desafios, traduzidos nos objetivos da presente pesquisa. Para tanto, elaboramos, desenvolvemos e aplicamos uma proposta didática auto-explicativa que foi utilizada como texto de apoio para os alunos do curso Técnico em Eletrônica Industrial e que também poderá ser utilizada como bibliografia de estudo individual.

Como instrumento para validação do método, aplicou-se, no último dia de aula, a mesma sondagem aplicada no pré-teste. Os resultados foram muito satisfatórios, uma vez que o percentual de acertos passou de 3% no pré-teste para 92% de acerto no pós-teste (Anexo C).

Os resultados traduziram-se em ganho acentuado de conhecimento e, em decorrência disso, na mudança de comportamento dos estudantes frente à Matemática.

Nos primeiros encontros, os estudantes mostravam-se ansiosos, inseguros, mais interessados nos aspectos da eletrônica do que na matemática formal. No decorrer do semestre letivo, aos poucos, mais confiantes, mais seguros, passaram a valorizar o conhecimento matemático, reconhecendo a importância de sua compreensão para poder dar seqüência ao curso. Essa mudança de comportamento significa uma vitória e a certeza de que o método de ensino aplicado é válido. Contudo, não se pode menosprezar o papel desempenhado pelo professor em todo o processo de ensino-aprendizagem. É necessário que o professor provoque e explore as reações dos alunos, suas colocações e procure valorizar os conhecimentos que o aluno traz. Para tal, o professor terá que ser flexível, determinado, apresentar o conteúdo de forma lógica e organizada. É importante também informar aos alunos os objetivos que pretende alcançar para, assim buscarem conjuntamente a construção do aprendizado.

Para o docente que quer e que gosta de lecionar, é gratificante acompanhar a evolução dos alunos, verificar o domínio dos conteúdos através de suas colocações, das análises e da satisfação que isso lhes dá. Por outro lado, todo esse processo de ensino-aprendizagem é realimentado pelos comentários positivos dos professores das demais disciplinas do curso. Também, se constata o bom desempenho dos alunos frente as avaliações integradas realizadas no decorrer do semestre.

Em vista de todos esses resultados favoráveis, temos a convicção da importância de um texto didático auto-explicativo, principalmente para os cursos técnicos, onde o perfil do aluno é o de um trabalhador em horário integral. Assim sendo, será em sala de aula o seu momento de aprendizagem e estudo. O objetivo é otimizar o tempo, de tal forma que os alunos não precisem dividir sua atenção entre copiar a matéria do quadro e prestar atenção às explicações do professor. Cabe, contudo, ao professor estimular a utilização dos espaços previstos no texto, a fim de que cada aluno possa registrar seu próprio processo de raciocínio. Dessa forma, o aluno terá um material didático personalizado.

Também, concordamos com os preceitos dos Parâmetros Curriculares Nacionais de que o desenvolvimento da competência matemática é um “processo cumulativo de saber”, no sentido de que, para alcançá-la, é necessário romper com metodologias que estejam afastadas da realidade do mundo contemporâneo, aproximando os saberes, uma vez que o homem é um ser social e busca conhecimento, para melhorar sua condição de vida e, assim, transformar a sociedade em que vive.

Sabemos que o presente trabalho apresenta limitações. Talvez ainda, possamos fazer adequações ao material utilizado, considerando que a cada ano muda o perfil do corpo discente, assim como mudam as necessidades do mercado de trabalho que absorve esse técnico.

Cumpre ressaltar que conceitos matemáticos importantes não foram contemplados, pois haveria necessidade de o curso prever uma maior carga horária para a disciplina de Matemática Aplicada. Como por exemplo, Álgebra Vetorial, Trigonometria e Funções Periódicas.

Finalmente, desejamos que esta proposta encoraje muitos professores a explorar os interessantes tópicos das várias áreas do conhecimento para ensinar matemática, mostrando sua aplicabilidade e relevância na interdisciplinaridade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBUQUERQUE, Rômulo O. **Circuitos em Corrente Alternada.** 5. ed. São Paulo: Erica, 1997.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR-5891: Regras de Arredondamento na Notação Decimal – Procedimento**. Rio de Janeiro: ABNT, 1977.

BARKER, Forrest L.; WHEELER, Gershon J. **Mathematics for Eletronics.** [s.l.]: Adisson-Wesley Publishing Company, 1968.

BERGER, Rui L. F. **Educação Profissional no Brasil**: novos rumos. Disponível em: <http://www.rieoei.org/rie20a03.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2006.

BOYLESTAD, Robert L. **Introdução à Análise de Circuitos**. 10. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2004.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. **Parecer CNE/CEB nº 16/99**. Brasília, 1999.

BRASIL. Leis, Decretos. **Lei nº 9394, de dezembro de 1996.** Brasília, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (ensino médio)**. 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/14_24.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2006.

BRASIL. Ministério da Indústria e do Comércio, Instituto Nacional de Pesos e Medidas. **SI – Sistema Internacional de Unidades**. Rio de Janeiro: [s.n.], 1970.

BUTKOV, Eugene. **Mathematical Physics**. [s.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

CORDÃO, Francisco A. **A LDB e a Nova Educação Profissional**. Disponível em: <http://www.senac.br/INFORMATIVO/BTS/281/boltec281b.htm>. Acesso em: 25 jan. 2007.

DANTE, Luiz R. **Matemática:** contexto e aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2005.

DEPRESBITERIS, Lea. **Educação Profissional**: seis faces de um mesmo tema. Disponível em: <http://www.senac.br/informativo/bts/262/boltec262c.htm>. Acesso em: 02 fev. 2007.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentals of Fhysics.** 5. ed. [s.l.]: John Wiley & Sons Inc., 1997.

HOWARD, Anton; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

INSTITUTO Paulo Montenegro, **INAF – Indicador de Analfabetismo Funcional: Um Balanço dos Resultados de 2001 a 2005.** 2007. Disponível em: <http://www.ipm.org.br/download/ inaf_5anos_completo.pdf>. Acesso em: 25 maio 2007.

LANDER, Cyril W. **Eletrônica Industrial:** teorias e aplicações**.** São Paulo: Mc Graw Hill, 1988.

LIPSCHUTZ, Seymour, **Álgebra Linear:** teoria e problemas. 3. ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

LOURENÇO, Antonio C. de.; CRUZ, Eduardo C.A.; JUNIOR, Salomão C. **Circuitos em Corrente Contínua.** 4. ed. São Paulo: Erica, 1998.

MANFREDI, Silvia M. **Educação Profissional no Brasil.** São Paulo: Cortês, 2002.

MOREIRA, Marco A. **Pesquisa em Ensino:** aspectos metodológicos e referenciais teóricos à luz do vê epistemológico de Gowin**.** São Paulo: EPU, 1990.

NODELMAN, Henry M. SMITH, Frederick W. **Mathematics for Eletronics with Applications.** [s.l.]: McGraw-Hill Book Company, 1956.

O'MALLEY, John. **Análise de Circuitos.** 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1993.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 1995.

RIPOLL, Jaime B.; RIPOLL, Cydara C.; SILVEIRA, José F. P. **Números Racionais, Reais e Complexos.** Porto Alegre: UFRGS, 2006.

VASSALO, Francisco R. **Formulário de Eletrônica: t**odas as leis fundamentais da eletricidade e da eletrônica. São Paulo: Hemus, [1990?].

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DA REPRESENTAÇÃO DE UM NÚMERO COMPLEXO NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Considerando as séries de potência, no intervalo $-\infty < \phi < +\infty$, das funções:

$$\text{(i) } \operatorname{sen}\phi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\phi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^7}{7!} + \ldots$$

$$\text{(ii) } \cos\phi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\phi^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \ldots$$

$$\text{(iii) } e^{\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{n!} = 1 + \phi + \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + \frac{\phi^5}{5!} + \ldots$$

Substituindo em (iii) ϕ por $j\phi$, sendo j a unidade imaginária, temos:

$$\begin{aligned}
e^{j\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\phi)^n}{n!} &= \frac{(j\phi)^0}{0!} + \frac{(j\phi)^1}{1!} + \frac{(j\phi)^2}{2!} + \frac{(j\phi)^4}{4!} \frac{(j\phi)^5}{5!} + \frac{(j\phi)^6}{6!} + \frac{(j\phi)^7}{7!} + \ldots \\
&= 1 + j\phi - \frac{\phi^2}{2!} - \frac{j\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + \frac{j\phi^5}{5!} - \frac{\phi^6}{6!} - \frac{j\phi^7}{7!} + \ldots \\
&= \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \ldots\right) + \left(j\phi - \frac{j\phi^3}{3!} + \frac{j\phi^5}{5!} - \frac{j\phi^7}{7!} + \ldots\right) \\
&= \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \ldots\right) + j\left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^7}{7!} + \ldots\right) \\
&= \cos\phi + j.\operatorname{sen}\phi \quad [\text{por (i) e(ii)}]
\end{aligned}$$

Logo,

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j.\operatorname{sen}\phi$$

Esta última expressão é conhecida como fórmula de Euler.

Na matemática, ***e*** é conhecido como o número de Euler, em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783). O número ***e*** vale aproximadamente

2, 718 282 e é o resultado de um processo de limite da fórmula $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para n tendendo a valores muito grandes. A maneira de expressar matematicamente esse processo de limite é:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Este limite está ilustrado numéricamente na tabela abaixo a qual foi gerada usando uma calculadora. Compare os resultados da tabela com o valor mencinado acima

n	$1+\frac{1}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2	2,000000
10	1,1	2,593742
100	1,01	2,704814
1.000	1,001	2,716924
10.000	1,0001	2,718146
100.000	1,00001	2,718268
1.000.000	1,000001	2,718280

Leonhard Euler começou a usar a letra *e* para representar a constante em 1727, e o primeiro uso de *e* foi na publicação Euler's Mechanica (1736). As verdadeiras razões para escolha da letra *e* são desconhecidas, mas talvez seja porque *e* seja a primeira letra da palavra exponencial.

O número *e* é um número irracional, como π (pi). A irracionalidade de *e* foi demonstrada por Lambert em 1761 e mais tarde por Euler. O número *e* é usado também como a base dos logaritmos naturais, isto é, $\log_e x = \ln x$.

APÊNDICE B - DEMONSTRAÇÃO DA MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Números complexos na forma polar.

i) Sendo $z_1 = |z_1| e^{j\phi_1}$ e $z_2 = |z_2| e^{j\phi_2}$, números complexos na forma exponencial, então:

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{j\phi_1} . |z_2| e^{j\phi_2}$$
$$= |z_1| |z_2| e^{j\phi_1} e^{j\phi_2}$$

Da regra de multiplicação de potências de mesma base, temos que:

$$e^{j\phi_1} e^{j\phi_2} = e^{j\phi_1 + j\phi_2} = e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$$

Logo,

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$$

ii) Como, $e^{j\phi} = \cos\phi + j.\text{sen}\phi$ e $z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$ então, para multiplicar números complexos na forma trigonométrica temos:

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| \left(\cos(\phi_1 + \phi_j) + j.\text{sen}(\phi_1 + \phi_2\right)$$

Números complexos na forma cartesiana.

Sendo z_1 = a + jb e z_2 = c +jd números complexos na forma cartesiana, então:

$$z_1 z_2 = (a + jb)(c + jd)$$
$$= ac + jad + jbc + j^2bd$$
$$= ac + jad + jbc - bd$$
$$= (ac - bd) + j(ad + bc)$$

Logo,

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + j(ad + bc)$$

APÊNDICE C - DEMONSTRAÇÃO DA DIVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Números complexos na forma polar.

i) Sendo $z_1 = |z_1| e^{j\phi_1}$ e $z_2 = |z_2| e^{j\phi_2}$, números complexos na forma exponencial, então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{j\phi_1}}{|z_2| e^{j\phi_2}}$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|} \frac{e^{j\phi_1}}{e^{j\phi_2}}$$

Da regra de divisão de potências de mesma base, temos que:

$$\frac{e^{j\phi_1}}{e^{j\phi_2}} = e^{j\phi_1 - j\phi_2} = e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$$

Logo,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$$

ii) Como, $e^{j\phi} = \cos\phi + j\mathrm{sen}\phi$ e $z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|\, e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$ então, para dividir números complexos na forma trigonométrica temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\phi_1 - \phi_2) + j.\mathrm{sen}(\phi_1 - \phi_2)\right)$$

Números complexos na forma cartesiana.

Sendo $z_1 = a + jb$ e $z_2 = c + jd$ números complexos na forma cartesiana, então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + jb}{c + jd}$$

Para obter as partes real e imaginária deste quociente, multiplicamos numerador e denominador por c – jd e simplificamos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + jb}{c + jd} \cdot \frac{c - jd}{c - jd} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 - j^2 d^2}$$
$$= \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

Logo,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

APÊNDICE D - DEMONSTRAÇÃO DA POTENCIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

i) Sendo $z = |z_1|\, e^{j\phi}$ um número complexo na forma exponencial. Então:

$$
\begin{aligned}
z^n &= z \; x \; z \; x \; z \; x \ldots (\text{n vezes}) \\
&= |z_1|\, e^{j\phi} \; x \; |z_1|\, e^{j\phi} \; x \; |z_1|\, e^{j\phi} \; x \ldots (\text{n vezes}) \\
&= |z_1| \; x \; |z_1| \; x \; |z_1| \; x \ldots (\text{n vezes}) \; x \; e^{j\phi} \; x \; e^{j\phi} \; x \; e^{j\phi} \; x \ldots (\text{n vezes}) \\
&= |z_1|^n \left(e^{j\phi}\right)^n
\end{aligned}
$$

Da regra de potência de uma potência, temos que:

$$\left(e^{j\phi}\right)^n = e^{j(n\phi)}$$

Logo,

$$z^n = |z_1|^n e^{j(n\phi)}, \text{com } n \in N$$

ii) Como, $e^{j\phi} = \cos\phi + j\text{sen}\phi$ e $z^n = |z_1|^n e^{j(n\phi)}$ então, para elevar números complexos na forma trigonométrica a uma potência n, $\text{com } n \in N$, temos:

$$z^n = |z_1|^n (\cos n\phi + j\text{sen}\, n\phi)$$

Observação: O ângulo ϕ é chamado argumento de z e não é definido de forma única porque podemos adicionar ou subtrair qualquer múltiplo de 2π, produzindo outro valor do argumento. Os múltiplos valores do argumento de z são úteis para encontrar as raízes n-ésimas dos números complexos. Cada uma dessa n raízes possuem o mesmo módulo, isto é, $\sqrt[n]{|z|}$ e os argumentos diferirão de $\frac{2\pi}{n}$ radianos. Isto implica que as raízes n-ésimas de z estão igualmente espaçadas em torno de um círculo de raio $\sqrt[n]{|z|}$ e que se conhecemos a n-ésima raiz, então as demais n – 1 raízes podem ser obtidas girando essa raiz através de incrementos sucessivos de $\frac{2\pi}{n}$ radianos, conforme apresentado no texto (página 112).

ANEXO A - RESPOSTAS RELATIVAS AO PRÉ-TESTE

Questão 1: Realize as operações abaixo, apresente os resultados em notação cientifica com três casas decimais, observando regras de arredondamento.

a) $\left(4{,}5678x10^{7}\ .\ 21{,}1567x10^{-3}\right)+6712{,}89x10^{6}$

b) $\dfrac{\left(345{,}9785x10^{3}\right)^{5}}{7x10^{8}}-2{,}78765x10^{8}$

não sei fazer calculos
com nº Exponenciais!

Tentei desta maneira em 1º lugar
samando tudo direto, mas deu
muito numero e muita virgula.
Resultado 6,713,856,396. na calculadora
Na segunda tentativa somei os numeros
com expoente positivos e depois multipliquei
o de expoente negativo, resultado foi igual.

$(46.678.\ 0.0211)+6712.890$

OBS: NA CALCULADORA USEI A TECLA ∧.
1º COLOQUEI OS NUMEROS ( ) E NA
CALCULADORA DEU ERROR.

2º COLOQUEI OS NUMEROS ( )+ E TAMBÉM
DEU ERROR.

NÃO CONSEGUI RESOLVER,
USEI A CALCULADORA, MAS DEVE
SER POR CAUSA DOS PONTOS E
VÍRGULAS OU DO MAL USO DA
CALCULADORA.

* A CALCULADORA POSSUI VÍRGULA E PONTO. SERÁ QUE ISSO INFLUENCIA NO MEU RESULTADO?

Já vi o assunto, ~~mas~~ lembro vagamente que se calcula os espoentes, se mexe na virgula e os resultados não ficam imensos mas não sei calcular

Questão 2: Qual(is) o(s) critério(s) que você utilizou para arredondar os resultados dos itens a) e b) da questão 1? Cite-os.

Ⓐ Não consegui uma resposta que me fisese acreditar que dessi para arredondar.

Ⓑ Tentei resolve a primeira parte até fui uma parte mas a seguinda parte ~~tentei~~ tentei fazer um calculo e a calculadora não asseitou

realmente não lembro

Questão 3: O número 675,947x10^{-11} escrito na forma de notação científica é _____________ e escrito na forma de notação de engenharia é _____________. Qual a diferença entre as duas notações?

Não tenho noção nenhuma dessa questão.
não sei mesmo.

Questão 4: Sendo $V_r = \dfrac{(R_1 + R_2)V_H}{R_1}$, com V_H = 5 mV, R_1= 820 Ω e R_2 = 12 kΩ. Qual o valor de V_r?

$V_R = \dfrac{832k\Omega . 5mV}{820\ \Omega} = \dfrac{4.160}{820\Omega} = 5,073\ k\Omega$ (os símbolos não sei)

$V_R = \frac{(R_1 + R_2)\, V_H}{R_1} =$ 5 mV = (820 Ω + 12 KΩ).
5 mV = (

Não continuei porque não sei se Ω e KΩ tem algum valor.

$V_R = \frac{820 + 12}{820}$
$V_R = 8$

V_H e R_2: precisa ser transformado de KΩ e mV em Ω

.

Teria que usar a calculadora em alguns itens mas não consigo usar.

é matemática ou física?
não me recordo de nada do assunto

$5 = \frac{820 + 12}{820} = \frac{832}{820} = 1{,}014634146$ $\quad V_R = \frac{(820 + 12)}{820}\, 5 \quad V_R\ 832$
já vi mas não consigo fazer a equação.

Questão 5: Sendo $L = \frac{N^2\, d^2\, A\, \mu_r x 10^{-6}}{0{,}46\, d + c}$, com N = 100, d = 10 mm, c = 50 mm, μ_r = 5.213 e A = 1. Determine L.

Observação: Os valores de d = 10 mm e c = 50 mm, na fórmula devem estar em metros.

Não tenho a mínima idéia como é feito essas contas

O que seria "μ" ?

To perdido aqui.

$$L = \frac{100^2 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 5{,}213 \times 10^{-6}}{0{,}46 \cdot 10 + 50}$$

$$L = \frac{521300 \times 10^{-6}}{54.6}$$

$L =$?

$$L = \frac{(100)^2 \cdot 10 \cdot (5.273 \times 10^{-6})}{0{,}46 \cdot 10 + 50}$$

$$L = \frac{10.000 \cdot 10 \cdot (5.272 \times 10^{-6})}{27{,}60}$$

$$L = \frac{10.0000 \cdot (5.212 \times 10^{-6})}{27{,}60}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}46 \\ \times 60 \\ \hline 27{,}60 \end{array}$$

$$L = \frac{1 \times 10^5 \cdot 5{,}272 \times 10^{-6}}{2760}$$

$$L = \frac{5{,}272 \times 10^{-1}}{27{,}60}$$

$L =$

Não sei e fiz certo. Acredito que até aí esta correto
O 10^{-1} anulo para dividir o outro valor?

Questão 6: Dado que a voltagem V em um capacitor de capacidade C carregado com uma carga Q é $V = \dfrac{Q}{C}$. É possível dizer que $V = \dfrac{Q}{C} \Rightarrow \dfrac{V}{Q} = \dfrac{1}{C}$? Ou seja esta implicação é verdadeira? Justifique.

Verdadeiro porque $V = \dfrac{Q}{C}$
o Q passa para esquerda do = e é invertido e continua sendo multiplicado por 1 e V continua multiplicando o C.

NÃO, POIS, QUANDO UM VALOR POSITIVO MUDANDO DE LADO NO SINAL DE IGUAL MUDA PARA NEGATIVO, ALTERANDO VALORES.

Vi capacitores com o professor Pedro no Estadual mas não me lembro

Acredito se seja verdadeiro, pois no 2º grau vi algo parecido, mas posso estar enganado.

Questão 7: Tendo dois capacitores C_1 e C_2 associados em série, sabe-se que $V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$. É o mesmo que escrever $\frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$? Você concorda? Demonstre.

já vi mas não lembro

Questão 8: Se o inverso do capacitor equivalente (C_{eq}) é igual ao somatório do inverso de cada capacitor (C_1, C_2), ou seja, $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ isso implica em $C_{eq} = \frac{C_1 + C_2}{C_1.C_2}$? Mostre.

$$(C1, C_2) \cdot \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad C_{eq} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 \cdot C_2}$$

este demostrativo
cabe aos inventores
da matemática
"porque eu não
estou lembrado"
Obrigado

Poxa!

Questão 9: No cálculo do C_{eq}, sabendo que $C_1 = 33x10^{-9}F$ e $C_2 = 47x10^{-9}F$, então $C_{eq} = 19{,}4nF$? Demonstre detalhadamente o cálculo.

Tô doido!!!

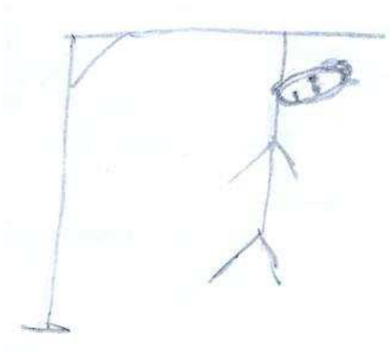
$$C_{eq} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 \cdot C_2} = 19{,}4 = \frac{33x10^{-9} + 47x10^{-9}}{33x10^{-9} \cdot 47x10^{-9}} = \frac{3.3x10^{-08} + 4.7x10^{-08}}{1,551x10^{-15}} = 19{,}4 = \frac{8x10^{-08}}{1.551x10^{-15}}$$

Resolvi a conta desta maneira resolvi parar por estar me perdendo mais.

$$C_{eq} = \frac{33x\cancel{10^{-9}} + 47x\cancel{10^{-9}}}{33x\cancel{10^{-9}} \cdot 47x\cancel{10^{-9}}} \quad C_{eq} = \frac{33+47}{33 \cdot 47} \quad C_{eq} = \frac{80}{1551} = 0{,}0515$$

o meu cálculo matemático não confere com $C_{eq} = 19{,}4nF$ mesmo sabendo que está em outra unidade não sei fazer por sima imagina detalhadamente

Questão 10: Considerando uma fonte de tensão 12V e usando C_{eq} calculado no item anterior, e lembrando que $Q = V.C_{eq}$, qual a carga?



Conclusões dos alunos, descritas no verso da folha do pré-teste, no que diz respeito as suas percepções sobre o questionário e sua autocrítica.

Em trabalho foi importante para testar nossos conhecimentos, apesar de ter visto tudo isso nos tempos de escola, cheguei a conclusão que sem praticar a gente esquece a maioria das coisas, sei que não foi um grande trabalho que eu respondi, sei que não sou tão burro também quanto estou parecendo, mas fazer oque, já fazem três anos que praticamente não pegava um livro na mão, mas oque dizem é "nunca é tarde pra recomeçar" e estamos aí, dispostos a aprender e ganhar mais esta conquista.

Já percebi que meus conhecimentos em relação ao conteúdo passado não esta nada bom. Espero que eu entenda bem a matéria a mim passada. E o que depender de mim para aprender não vão faltar forças de vontade. Compreendo que a matemática é uma diciplina indispensável e sem ela o aluno não tem condições de seguir adiante. Espero compreensão do orientador e paciencia, sem mais agradeço.

CONCLUSÃO:

ESTES EXERCÍCIOS SÃO COMPLEXOS, MAS PERSISTI EM FAZÊ-LOS, PORQUE CONHECIMENTO EU TENHO. ALGUNS NÃO APLIQUEI DEVIDO AO NÍVEL DO EXERCÍCIO. MAS ESTOU AQUI PARA APRENDER E SOU SINCERO EM DIZER ISSO E SOU PERSISTENTE NA MATEMÁTICA, QUE É UMA MATÉRIA DAS MAIS IMPORTANTES E VOU ME AVALIAR ASSIM: QUANDO SEI EU FAÇO E QUANDO NÃO SEI VOU PERGUNTAR ATÉ APRENDER.

Eletrônica

A minha conclusão é que com este teste percebi como tenho ainda muitas dificuldades principalmente na resolução, mas também na interpretação, então achei muito bom este sistema de mostrar como está nosso conhecimento. Assim a professora saberá como trabalhar melhor conosco.

Tudas as questões dadas tive muita dificuldade. Mesmo que a 3 anos atraz já tenha feito um semestre, foi tudo muito diferente com certeza. Para isto que eu estou aqui, espero que quando chegar no final do curso este teste tenha outras resposta, que não seja estas, e sim aquelas que segam nesessarios para continuar no curso e sair desto curso não só com um diploma e sim com a safedoria nesessaria para ser um bom tecnico em Eletrotécnica

No primeiro momento fiquei assustado com o conteúdo, com os exercícios desta avaliação, porque cursei o ensino Médio através de supletivo não tenho conhecimento desta matéria, mas vou me esforçar para conseguir acompanhar o (ces) conteúdo quero ser esforçado e ser um aluno muito dedicado porque quero ser um profissional de primeira.

CONCLUSÃO:

VI QUE TENHO UM CAMINHO ARDUO PELA FRENTE. NOS PRÓXIMOS MESES TEREI QUE TRABALHAR, APRENDER, DESENVOLVER A MATERIA PROPOSTA, TENDO COMO INTUITO SEGUIR EM FRENTE E DESENVOLVER O CURSO COMO UM TODO. HÁ DIFICULDADES, MAS HÁ RESOLUÇÕES.

A professora fez este trabalho para perceber o conhecimento dos alunos, poderá ser utilizado como comparativo ao final do semestre e com certeza o resultado será muito diferente.

Sobre mim percebi estar fraco na matéria

Espero (e vou me esforçar para isto) que ao final do semestre estarei "apto" para prosseguir o curso.

Professora, Não sei nem uma das questões, Não Foi por Falta de tentativa porem proponho para mim Hoje no proximo teste Não vou errar uma.

Hoje. Nem a calculadora sei usar.

Aconteceu o que em partes já esperava porem achei que conheceria um pouco mais. mas já vi que Foi sem por cento. o aproveita-mento para mim, sei mais o grau de dificul-dade em que me apresento. e o dezempenho a ser tomado.

A minha conclusão sobre a atividade foi válida porque mesmo eu não entendendo as contas, me mostra que tenho que me esforçar o dobro, acredito que a matéria não é difícil mais também não vai ser fácil. Também preciso de ajuda com a calculadora pois nunca usei, não sei fazer as operações com a calculadora.

Mas quero dizer que sou muito esforçado e quero muito fazer este curso de eletrotécnico. por isso vou aprender bem matemática.

ANEXO B – TABULAÇAO DOS DADOS DO PRÉ-TESTE

Tabela 7 - Tabulação dos dados do Pré-teste

Aluno	Questão										Acertos	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Qtde**	**%**
1	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	0
2	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	0
3	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	0
4	C	E	E	E	E	E	E	E	E	E	1	10
5	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	0
6	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	0
7	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	0
8	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	0
9	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	0
10	E	E	C	E	E	E	E	E	E	E	1	10
11	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	0
12	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	0
13	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	0
14	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	0
15	E	E	E	C	E	C	E	E	E	E	2	20
16	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	0
17	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	0
18	E	E	E	E	C	E	E	E	E	E	1	10
19	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	0
20	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	0
21	C	E	E	C	E	E	E	E	E	E	2	20
22	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	0
23	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	0
24	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	0
25	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	0
26	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	0
27	E	E	C	E	E	E	E	E	E	E	1	10
Acertos por questão	**2**	**0**	**2**	**2**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**8**	
% de acertos	**7,4**	**0,0**	**7,4**	**7,4**	**3,7**	**3,7**	**0,0**	**0,0**	**0,0**	**0,0**		**3,0%**

ANEXO C – TABULAÇAO DOS DADOS DO PÓS-TESTE

Tabela 8 - Tabulação dos dados do Pós-teste

Aluno	Questão										Acertos	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Qtde	%
1	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10	100
2	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	9	90
3	C	C	C	C	E	C	C	E	C	C	8	80
4	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10	100
5	C	E	C	C	C	C	C	C	C	C	9	90
6	C	C	C	C	C	C	C	E	C	C	9	90
7	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	9	90
8	C	C	C	C	C	E	C	E	C	C	8	80
9	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10	100
10	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	9	90
11	C	E	C	C	C	C	C	C	C	C	9	90
12	E	E	C	C	E	C	C	C	C	C	7	70
13	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10	100
14	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10	100
15	C	C	C	C	C	C	C	E	C	C	9	90
16	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10	100
17	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10	100
18	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10	100
19	E	E	C	C	C	C	C	C	C	C	8	80
20	E	C	C	C	C	E	C	C	C	C	8	80
21	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	9	90
22	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10	100
23	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10	100
24	E	E	C	C	E	C	C	C	C	C	7	70
25	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10	100
26	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10	100
27	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10	100
Acertos por questão	**23**	**22**	**27**	**27**	**22**	**25**	**27**	**23**	**27**	**25**	**248**	
% de acertos	**85,2**	**81,5**	**100**	**100**	**81,5**	**92,6**	**100**	**85,2**	**100**	**92,6**		**91,9%**