Teoria da Eliminação

Matheus Bohrer | Orientador da bolsa: Prof. Luiz E. Allem | Orientador do trabalho: Prof.ª Virgínia M. Rodrigues | IM-UFRGS

Introdução

A Teoria da Eliminação lida com o problema de eliminar variáveis de um sistema polinomial. Algumas das aplicações são a resolução de sistemas polinomiais e a transformação de um tal sistema na forma triangular. O uso de bases de Gröbner permite provar teoremas importantes nessa teoria.

Bases de Gröbner

Definição 1. Seja > uma ordem monomial em $F[x_1,\dots,x_n]$, onde F é um corpo e $I \subseteq F[x_1,\dots,x_n]$ um ideal. Um subconjunto finito $G=\{g_1,\dots,g_t\} \subseteq I$ é uma **base de Gröbner** para I com respeito a > se

$$< lt(g_1),\dots,lt(g_t) > = < lt(I) > .$$

Definição 2. Uma ordem monomial em $F[x_1,\dots,x_n]$ é dita uma **ordem de eliminação** para as variáveis x_1,..., x_n, se cada x_i, $1 \le i \le k$, é maior que todos os monômios envolvendo apenas as variáveis x_{k+1}, ..., x_n.

Exemplo. A **ordem lexicográfica** definida por

$$(x_1,\dots,x_n) > (y_1,\dots,y_n)$$

se, e somente se, $x_1 > y_1$ ou $x_1 = y_1, \dots,$ $x_{i-1}=y_{i-1}$ e $x_i > y_i$, para algum $2 \le i \le n$, é uma ordem de eliminação.

Teoremas

Teorema da Eliminação. Seja $I \subseteq F[x_1,\dots,x_n]$ um ideal. Se G é uma base de Gröbner com respeito a uma ordem de eliminação para x_1,..., x_i, para algum $i \in \{1,\dots,n-1\}$, então o conjunto $G \cap F[x_{i+1},\dots,x_n]$ é uma base de Gröbner para o ideal $I \cap F[x_{i+1},\dots,x_n]$.

Teorema da Extensão. Seja $I = < f_1,\dots,f_s > \subseteq F[x_1,\dots,x_n]$ um ideal, onde F é algebricamente fechado, e $g_i(x_1,\dots,x_{n-1})$ o coeficiente líder de f_i como um polinômio em x_n, para $i=1,\dots,s$. Para qualquer solução parcial $(a_1,\dots,a_{n-1})$ na variedade afim definida pelo ideal $I \cap F[x_1,\dots,x_{n-1}]$, se $g_i(a_1,\dots,a_{n-1}) \neq 0$, para algum $i \in \{1,\dots,s\}$, então $(a_1,\dots,a_{n-1})$ se estende para uma solução completa na variedade afim definida por I.

Exemplo

Seja $I = < f_1,f_2,f_3 > \subseteq \mathbb{C}[x,y,z]$, com a ordem lexicográfica x > y > z, onde:

$$f_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-4,$$

$$f_2(x,y,z) = x^2+2y^2-5.$$

$$f_3(x,y,z) = xz - 1.$$

Temos que

$$G = \{x+2z^3-3z, y^2-z^2-1, 2z^4-3z^2+1\}$$

é uma base de Gröbner para I.

Passo de Eliminação. Obtemos que

$$I_1 = I \cap \mathbb{C}[y,z] = < 2z^4-3z^2+1, y^2-z^2-1 >,$$

$$I_2 = I \cap \mathbb{C}[z] = < 2z^4-3z^2+1 >.$$

Visto que

$$2z^4-3z^2+1 = (z-1)(z+1)(2z^2-1),$$

há quatro possíveis valores para z:

1,-1, $1/\sqrt{2}$, $-1/\sqrt{2}$.

Passo de Extensão. Considerando y^2-z^2-1 como um polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}[z]$, vemos que seu coeficiente líder é 1. Logo, pelo Teorema da Extensão, qualquer uma das soluções parciais acima vai se estender. Escolhendo, por exemplo, $z=1$, temos que

$$y^2-1-1=0 \Rightarrow y=\sqrt{2} \text{ ou } y=-\sqrt{2}.$$

Agora, considerando $x+2z^3-3z$ como um polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}[y,z]$, vemos que seu coeficiente líder é 1. Logo, pelo Teorema da Extensão, as soluções parciais $(1,\sqrt{2})$ e $(1,-\sqrt{2})$ se estendem para uma solução completa. De fato, para $z=1$, temos que

$$x+2-3=0 \Rightarrow x=1.$$

Logo, obtivemos duas soluções completas para o sistema, são elas:

$$(1,\sqrt{2},1) \text{ e } (1,-\sqrt{2},1).$$

Para obter as demais soluções, basta considerar os outros possíveis valores de z e repetir o processo.

Referências

COX, David; LITTLE, John; O'SHEA, Donal. *Ideals, Varieties, and Algorithms.* 3rd edition. Springer, 2008.

RODRIGUES, Virginia M. *Multivariate Polynomials: Irreducibility and Gröbner Bases* (Tese de Doutorado, Clemson University, 2003).

COX, David; LITTLE, John; O'SHEA, Donal. *Using Algebraic Geometry 2nd edition.* Springer, 2004.