

A função ζ_{Ruelle} para o fluxo geodésico sobre \mathbb{T}^2

Cassiê Fernanda Longhi

Orientador: Paolo Giulietti

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Resumo: Iremos apresentar algumas simulações numéricas sobre as propriedades da função ζ_{Ruelle} . Em particular, considerado o toro \mathbb{T}^2 , é possível construir o fluxo geodésico sobre ele. O comprimento das geodésicas fechadas permitem, por meio da função zeta acima, estudar a distribuição delas mesmas.

A superfície e as geodésicas

O Toro é uma superfície de revolução gerada pela rotação de um círculo, sobre um eixo coplanar com o círculo, no espaço tridimensional. Em particular, a superfície

$$z^2 + \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

pode ser pensada como uma variedade lisa. Para o nosso caso foi usada uma parametrização padrão da superfície, onde $u, v \in [0, 2\pi)$.

$$S(u, v) = \left(1 + \frac{1}{2} \cos(u)\cos(v), 1 + \frac{1}{2} \cos(u)\sin(v), \frac{1}{2} \sin(u)\right)$$

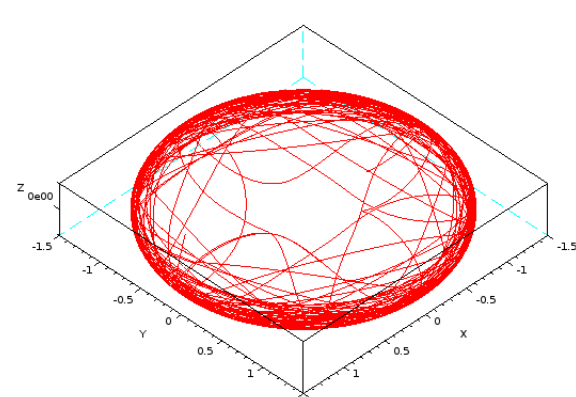
Uma geodésica é a curva de menor comprimento que une dois pontos (se os pontos forem suficientemente próximos). Para ser mais rigoroso uma geodésica (dado um ponto na superfície e um vetor tangente como condições iniciais) é uma curva $\gamma(t) \in S(u, v)$ que satisfaz, para funções $u(t), v(t)$ com $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ as equações

$$\begin{cases} \ddot{u} + 2\left(1 + \frac{1}{2} \cos(u)\right) (\sin u) (\dot{v})^2 = 0 \\ \ddot{v} - \frac{\sin(u)}{(1 + \frac{1}{2} \cos(u))} \dot{u} \dot{v} = 0 \end{cases}$$

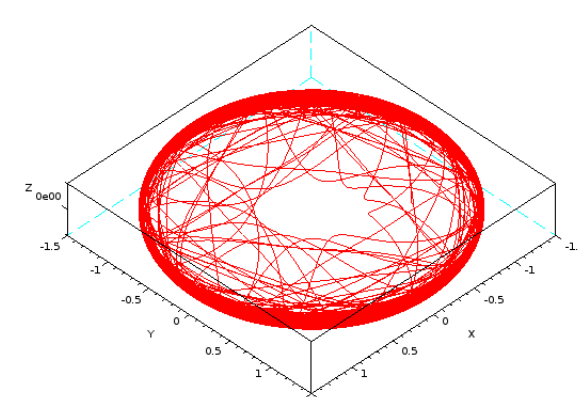
onde todas as derivadas são calculadas respeito a t . Essas equações são um caso particular das equações

$$\ddot{x}_i + \Gamma_{j,k}^i \dot{x}_j \dot{x}_k = 0$$

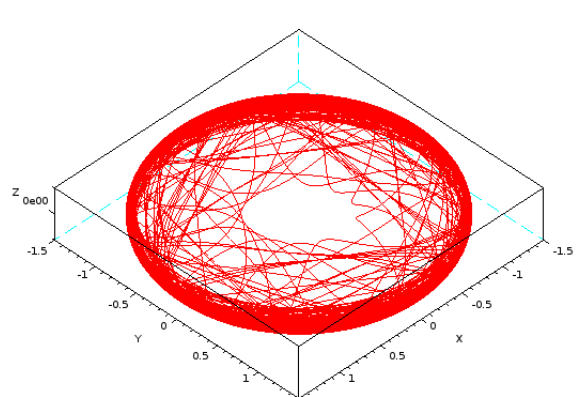
onde i, j, k são os índices das coordenadas e $\Gamma_{j,k}^i$ são os símbolos de Christoffel (calculados a partir da primeira forma fundamental da superfície). Veja [1] para mais detalhes sobre as geodésicas. Ademais, por meio de uma reparametrização, é possível restringir o problema a achar geodésicas tais que a velocidade inicial $\|\dot{\gamma}(0)\| = 1$. Desta forma pode-se resolver a EDO acima.



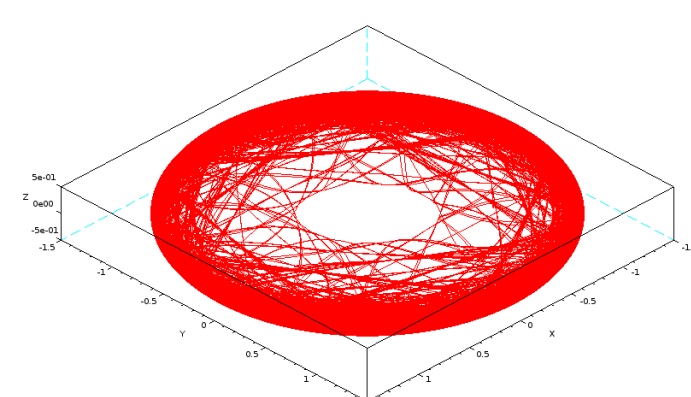
(a) $t = 10$



(b) $t = 20$



(c) $t = 40$



(d) $t = 60$

Observamos que as geodésicas fechadas preenchem bastante rapidamente o toro.

Do ponto de vista numérico, um modo de encontrar geodésicas fechadas, é estudando o fluxo restrito a uma seção e usar os pontos fixos sobre a seção. No caso atual, usando as simetrias do toro, foi suficiente escolher a seção gerada para os eixos xz . Ou seja :

$$S(u, v) = \left(1 + \frac{1}{2} \cos(u)\cos(v), 0, \frac{1}{2} \sin(u)\right)$$

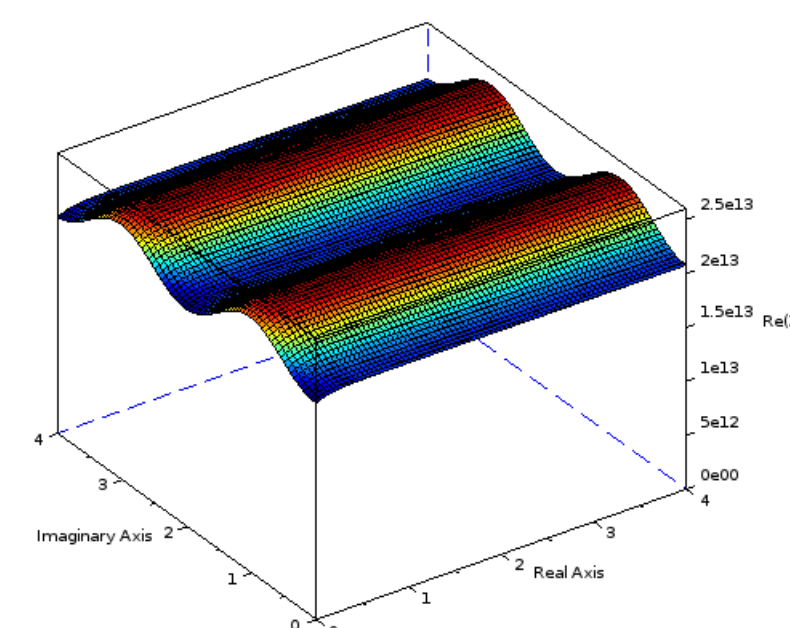
Lembramos que uma geodésica, no momento de voltar a seção gerada para os eixos xz , tem que ter derivadas iguais aquelas usadas como condições iniciais.

Função zeta

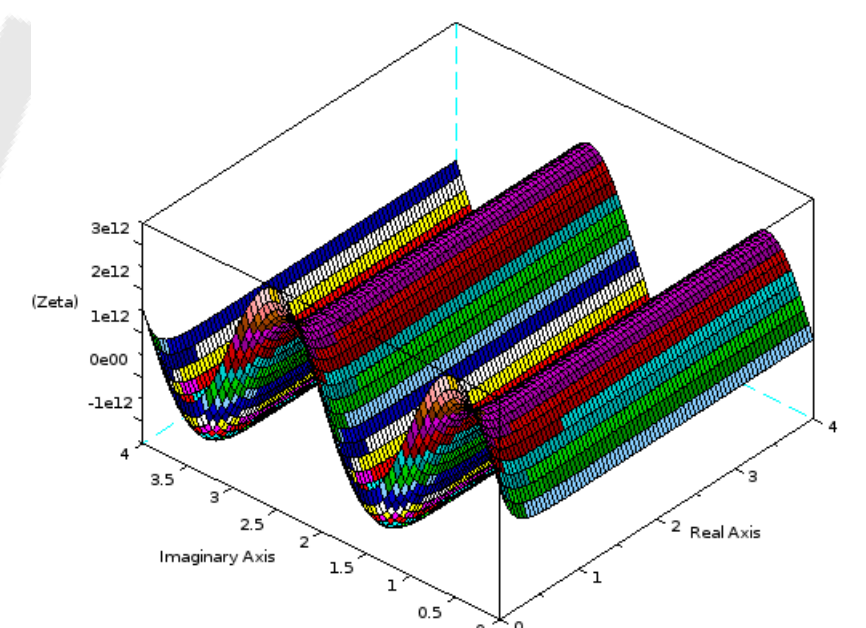
Para o tempo $t = e^4 \sim 55$ procuramos o conjunto das geodésicas de comprimento até t por meio das soluções de EDO acima. Ao longo do círculo inicial foram escolhidos cerca 120 pontos para $\gamma(0)$, e por cada ponto foram escolhidos 120 pontos para $\dot{\gamma}(0)$. A partir delas, em todos os casos calculamos a função zeta:

$$\zeta_{\text{Ruelle}}(z) = \prod_{\tau \in \mathcal{T}_p} \left(1 - e^{-z\lambda(\tau)}\right)^{-1}, z \in \mathbb{C}$$

onde \mathcal{T}_p são órbitas primas de comprimento até 55.



(a) $\Re(\zeta_{\text{Ruelle}}^{-1})$

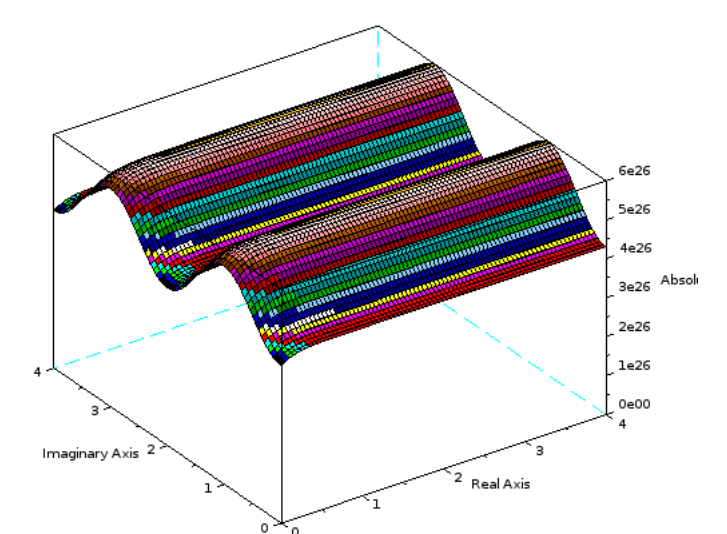


(b) $\Im(\zeta_{\text{Ruelle}}^{-1})$

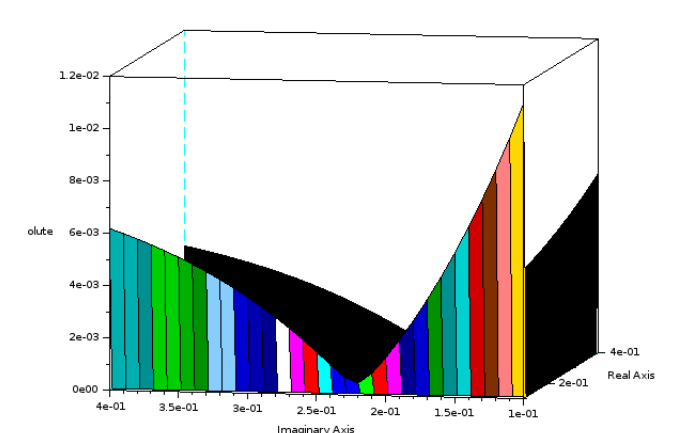
A direita a nossa aproximação para $|\zeta_{\text{Ruelle}}^{-2}|$.

Observamos que o custo computacional da operação não permite obter resultados com uma boa precisão. Por simplicidade foi calculada $\zeta_{\text{Ruelle}}^{-1}$ e não ζ_{Ruelle} . Observamos que é melhor aproximar a zeta com poucas órbitas e obter uma boa precisão no comprimento delas, ao invés de muitas órbitas em baixa precisão (por causa da natureza hiperbólica do fluxo geodésico). As simulações (a direita) mostraram a possibilidade de ter um zero cerca de $\Re(z) \sim e^{-1}$ e $\Im(z) \sim e^{-1}$.

As simulações foram efetuadas com o software open source SciLab.



(a)



(b)

Referências

- [1] "Differential Geometry of Curves and Surfaces" Do Carmo, M. P. Prentice-Hall.
- [2] "Chaos: Classical and Quantum", P. Cvitanović, R. Artuso, R. Mainieri, G. Tanner and G. Vattay, ChaosBook.org.