Problema Isoperimétrico no Plano

PRIMIERI, R. B.[1], KLASER, P. K.[2]

1 Autor: Rodrigo Borges Primieri, Engenharia Civil, UFRGS
2 Orientadora: Patrícia Kruse Klaser

INTRODUÇÃO

Uma das mais clássicas questões da matemática é a seguinte: “Dentre todas as curvas fechadas no plano de perímetro fixo, qual delas maximiza a área em seu interior?”.

O estudo deste problema teve sua origem na Grécia Antiga, no século IX a.C. e fez parte do épico Eneida, do poeta romano Virgílio. Também durante a Idade Média era comum serem feitos muros de proteção para as cidades cuja construção era cara e trabalhosa. Por isso, otimizar a área cercada para uma quantidade fixa de material era fundamental.

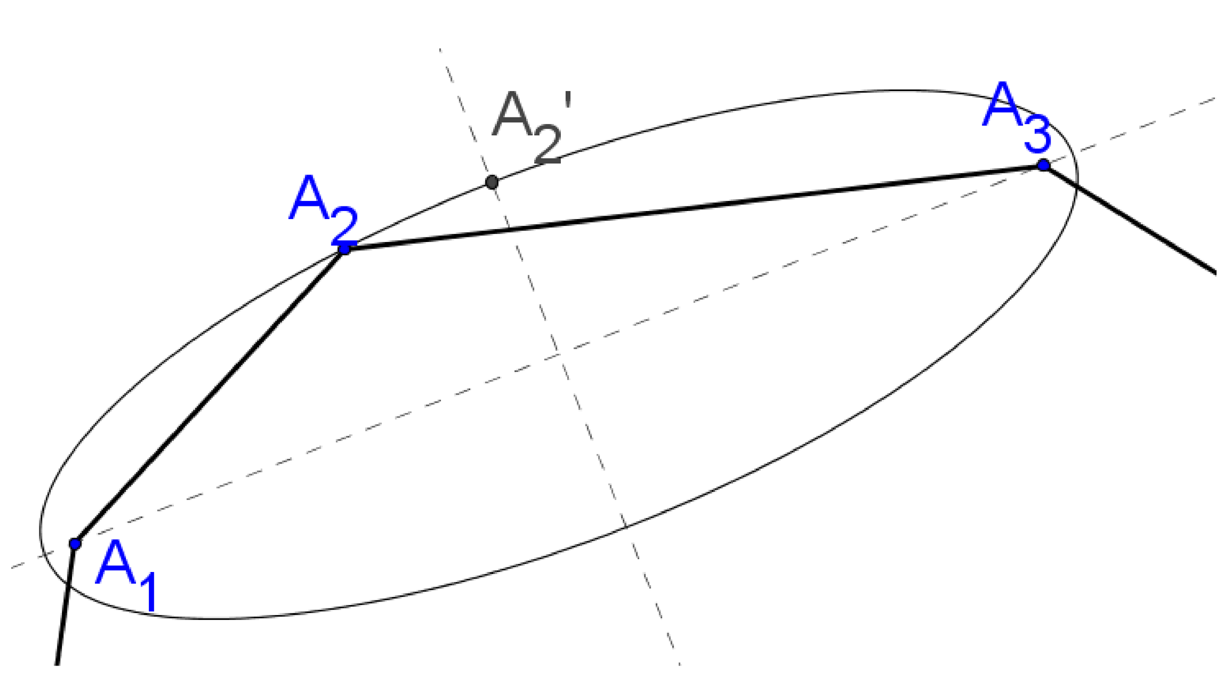
Para resolver este problema, iniciaremos nosso estudo buscando um polígono de *n* lados e perímetro *P* que tenha a maior área possível. Em seguida partiremos para curvas.

POLÍGONOS

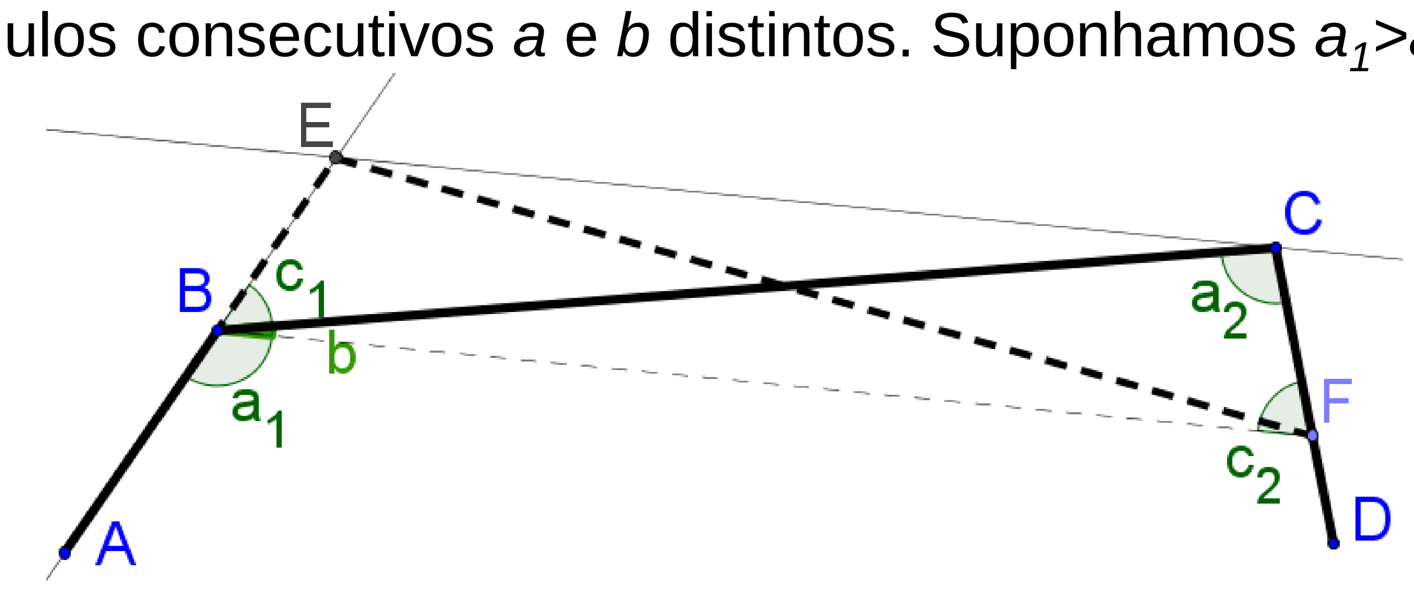
A primeira observação que deve ser feita é de que um polígono de *n* lados e perímetro fixado necessita ser **convexo** para ter a maior área.

Para demonstrar isso, supomos por absurdo que algum polígono côncavo satisfaça nossa exigência.
Sendo *V* um vértice de concavidade, traçamos a reta *r* que passa pelos vértices adjacente a *V*. Consideramos então o ponto *V’*, simétrico a *V* em relação a *r*, e obtemos outro polígono com mesmo perímetro, porém área maior.

Também o polígono necessita ser **equilátero**. Para tanto, enumeramos os vértices de um polígono não equilátero no sentido horário, de modo que os lados adjacentes A_1A_2 e A_2A_3 sejam distintos. Seja $l = |A_1A_2| + |A_2A_3|$. Para l fixo, podemos mover A_2 ao longo de uma elipse de focos A_1 e A_3 e eixo maior l. A área entre A_1, A_2 e A_3 é maximizada quando A_2 estiver o mais longe possível da reta que passa por A_1A_3. Logo o novo vértice A'_2 deve estar no eixo menor da elipse, isto é, na mediatriz de A_1A_3.



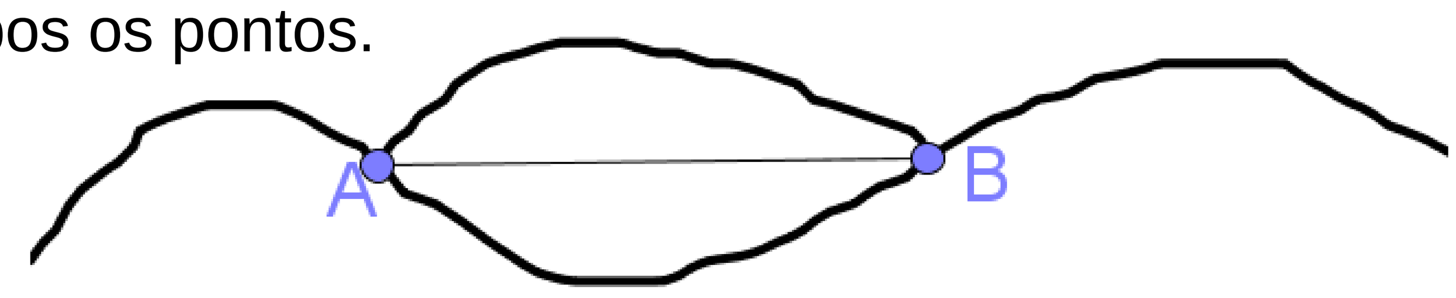
O polígono também necessita ser **equiângulo**. Para mostrar isso por absurdo, tomemos um polígono com ângulos consecutivos *a* e *b* distintos. Suponhamos $a_1 > a_2$.



Tomando *F* de modo que $2b < a_1 - a_2$, definimos *E* como sendo o ponto sobre o prolongamento de *AB* de modo que *EC* seja paralelo a *BF*. Temos então $a_1 + c_1 - b = \pi$ e $a_2 - c_2 + b = \pi$, que implicam $c_2 > c_1$. Logo $|BE| + |EF| < |BC| + |CF|$.
Dessa forma, substituindo a parte *ABCD* do polígono por *AEFD*, permanecemos com a mesma área porém obtemos perímetro menor.
Para corrigir isso basta tomarmos dois lados consecutivos *XY* e *YZ*, escolher *Y’* sobre a mediatriz de *XZ* de modo que $(|XY'| + |Y'Z|) - (|XY| + |YZ|)$ seja igual à diminuição de perímetro causada pelo método acima.
Dessa forma, o polígono que maximiza a área é **regular**.

CURVAS

Analogamente aos polígonos, a curva não pode ter ângulos internos maiores que *180º*.
A cada curva côncava de comprimento *P* corresponde uma outra de mesmo comprimento que engloba área maior. Para vermos isto, basta escolhermos, em uma região de concavidade, dois pontos próximos, traçar uma reta sobre eles e refletir a porção da curva que se encontra entre ambos os pontos.



Seja *C* uma curva plana convexa que delimita área máxima dentre as curvas de comprimento *P*. Os passos da demonstração são:
(1) Se uma reta divide o comprimento de *C* ao meio, ela divide a área ao meio.
(2) Dada uma reta *r* do tipo do item acima, ao considerarmos um triângulo com vértices nos dois pontos de interseção entre *r* e *C* e algum outro ponto de *C*, esse triângulo será retângulo.
(3) *C* é um círculo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Djairo G. de Figueiredo, Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana, em *Matemática Universitária Número 9/10,* SBM.
2. Hugh Howards, Michael Hutchings and Frank Morgan, The Isoperimetric Problem on Surfaces, Mathematical Association of America.